

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт спектроскопии Российской академии наук

На правах рукописи

**Карташов Ярослав Вячеславович**

УЕДИНЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В  
МИКРОСТРУКТУРИРОВАННЫХ СРЕДАХ: ФОРМИРОВАНИЕ,  
СТАБИЛИЗАЦИЯ И КОНТРОЛЬ

Специальность 01.04.05 - оптика

Диссертация на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Троицк - 2012

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>6</b>
<b>Глава 1. Солитоны в периодических решетках показателя преломления</b>	<b>27</b>
§1.1. Переключение пространственных солитонов в одномерных решетках показателя преломления	32
§1.2. Стимулированный распад связанных солитонных состояний в одномерных решетках показателя преломления	37
§1.3. Формирование и устойчивость одномерных солитонов в периодических решетках	41
§1.4. Формирование и устойчивость двумерных солитонов в периодических решетках	50
§1.5. Солитоны в решетках с дробной размерностью	55
§1.6. Солитоны в двумерных бинарных решетках	62
§1.7. Трехмерные оптические пули в периодических решетках	67
<b>Глава 2. Солитоны в оптических решетках, индуцированных недифрагирующими пучками Бесселя, параболическими пучками и пучками Матье</b>	<b>74</b>
§2.1. Вращающиеся солитоны в бесселевых решетках показателя преломления	79
§2.2. Солитонные комплексы и азимутальное переключение в модулированных решетках Бесселя	85
§2.3. Вихревые солитоны в радиально-симметричных решетках Бесселя	89
§2.4. Влияние дискретной симметрии решетки на топологический заряд вихревых солитонов	94
§2.5. Вращающиеся солитоны в динамических решетках Бесселя	99
§2.6. Солитоны в решетках, созданных недифрагирующими пучками Матье	103
§2.7. Солитоны в параболических решетках показателя преломления	108

<b>Глава 3. Поверхностные солитоны на границе периодических нелинейных сред</b>	<b>114</b>
§3.1. Одномерные поверхностные решеточные солитоны в дефокусирующей среде	120
§3.2. Поверхностные солитоны на границах модулированных решеток показателя преломления	125
§3.3. Двумерные поверхностные волны на границе периодической и однородной сред	133
§3.4. Двумерные поверхностные волны в секторных гексагональных массивах волноводов	137
§3.5. Двумерные солитоны на границе раздела различных периодических сред	142
§3.6. Векторные поверхностные солитоны на границе периодической решетки	147
§3.7. Вихревые поверхностные солитоны	152
<b>Глава 4. Солитоны в однородных и периодических нелокальных нелинейных средах</b>	<b>159</b>
§4.1. Одномерные мультипольные солитоны в нелокальной нелинейной среде	165
§4.2. Серые солитоны в нелокальной нелинейной среде	171
§4.3. Двумерные мультипольные солитоны в среде с тепловой нелинейностью	177
§4.4. Устойчивость вихревых солитонов в средах с тепловой нелинейностью	181
§4.5. Одномерные решеточные солитоны в нелокальной нелинейной среде	187
§4.6. Одномерные солитоны в слоистой среде с тепловой нелинейностью	192
§4.7. Поверхностные солитоны в нелокальной нелинейной среде	197
<b>Глава 5. Солитоны в средах с пространственно-неоднородной нелинейностью</b>	<b>203</b>
§5.1. Устойчивость, преобразование профилей и дрейф одномерных	

солитонов в смешанных линейных-нелинейных решетках	209
§5.2. Вихревые солитоны в смешанных линейных-нелинейных решетках	215
§5.3. Двумерные солитоны в нелинейных решетках	219
§5.4. Векторные солитоны в нелинейных решетках	224
§5.5. Светлые солитоны в дефокусирующих средах с пространственно-неоднородной нелинейностью	230
 <b>Глава 6. Контроль распространения световых пучков в динамически модулированных решетках</b>	 <b>239</b>
§6.1. Параметрическая раскачка осцилляций одномерных солитонов в продольно-модулированных решетках	245
§6.2. Резонансные преобразования мод в нелинейных продольно-модулированных потенциалах	250
§6.3. Контролируемый дрейф солитонов в динамических решетках показателя преломления	256
§6.4. Подавление туннелирования в одномерных продольно-модулированных массивах волноводов	261
§6.5. Уширение резонансов при подавлении туннелирования в нелинейных средах	269
§6.6. Подавление туннелирования и анизотропная дифракция в двумерных продольно-модулированных массивах волноводов	273
§6.7. Световые пули в продольно-модулированных сотовых массивах волноводов	279
 <b>Глава 7. Андерсоновская локализация света в разупорядоченных решетках показателя преломления</b>	 <b>285</b>
§7.1. Поверхностная андерсоновская локализация в одномерных массивах с беспорядком	289
§7.2. Андерсоновская кросс-локализация в двумерных массивах	295
§7.3. Переход от одномерной к двумерной андерсоновской локализации	302
§7.4. Отражение и передача солитонов в периодических решетках, стимулированные беспорядком	306
§7.5. Броуновское движение солитонов в случайных	

профилях показателя преломления	312
<b>Заключение</b>	<b>320</b>
<b>Литература</b>	<b>324</b>

## Введение

Интерес к изучению нелинейных эффектов, возникающих при распространении высокоинтенсивного излучения в среде, начал проявляться уже в 60-е годы прошлого столетия (см. монографии [1-13]) по мере появления и совершенствования адекватных источников - лазеров. Среди всего многообразия нелинейно-оптических явлений особое место занимают эффекты самовоздействия, поскольку они не требуют каких-либо особых условий для реализации и наблюдения (как, например, фазовый синхронизм при генерации гармоник или параметрических процессах). Процессы самовоздействия даже в пространственно-однородной среде весьма сложны, так как здесь теснейшим образом переплетаются пространственные (самофокусировка, дифракция) и временные (фазовая самомодуляция, дисперсия, формирование ударных волн) эффекты. Однако, при определенных условиях эффекты нелинейного самовоздействия, дисперсия и дифракция могут устойчиво компенсировать друг друга таким образом, что становится возможным стационарное распространение волнового пакета в среде, когда он сохраняет исходное распределение интенсивности даже на значительных расстояниях - т.е. происходит формирование оптического солитона.

Термин "солитон" был впервые введен Забусским и Крускалом в 1965 году [14]. Согласно исходному определению, солитоном (уединенной волной) называют локализованное частицеподобное решение нелинейного волнового уравнения, описывающее возбуждение с конечной энергией, которое обладает рядом характерных свойств: при распространении уединенной волны она сохраняет свой профиль; при взаимодействии нескольких солитонов происходит их упругое рассеяние, так что сохраняются как их число, так и профили. Одним из естественных атрибутов уединенной волны является быстрый темп спада интенсивности к нулю при бесконечном удалении от её центра. Теория солитонов, как и связанная с ней теория интегрируемых нелинейных эволюционных уравнений в однородных средах, привлекли внимание широкого круга исследователей. Так, в 60-е годы был развит метод обратной задачи рассеяния для нелинейных уравнений [15]. Формализм этого метода (зачастую называемого также методом обобщенных спектральных преобразований) применим для целого ряда нелинейных эволюционных уравнений, в том числе и для широко известного кубического уравнения Шредингера [16-18], описывающего, в частности, распространение интенсивных световых импульсов в оптических волокнах, а также пучков в средах с нелинейностью Керровского типа. Основные результаты метода обратной задачи рассеяния отражены в монографиях [19-22].

В течение более чем 50 лет с пионерской работы [14] концепция солитонов была существенно расширена, и она проникла в самые разнообразные области науки, от фи-

зики и прикладной математики до химии и биологии, и даже сам термин "солитон" сейчас принято толковать расширительно. Среди математических моделей, описывающих реальные физические системы и допускающих солитонные решения, можно отметить уравнения Кортевега-де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, уравнения синус-Гордона, Ландау-Лифшица, Кадомцева-Петвиашвили и многие другие. Специфические черты эволюции и взаимодействия солитонов в рамках соответствующих моделей связаны, прежде всего, с их полной интегрируемостью. Как правило, интегрируемость соответствующих моделей нарушается при включении второстепенных физических эффектов, влияние которых зачастую может быть учтено с помощью теории возмущений для систем, близких к интегрируемым [23]. Для более общей ситуации был разработан обширный арсенал численных методов (спектральных, конечно-разностных, релаксационных и др.), включающих как прямое интегрирование эволюционного уравнения с начальными и граничными условиями, так и непосредственное нахождение его стационарных решений, и линейный анализ их устойчивости.

Наиболее существенным стимулом развития теории солитонов послужило экспериментальное наблюдение и изучение таких структур в различных нелинейных оптических материалах. Оптические солитоны, для описания формирования которых широко используются различные модификации нелинейного уравнения Шредингера, можно условно разделить на временные, пространственные и пространственно-временные. Солитоны могут быть одномерными и многомерными. Простейшие практически одномерные временные солитоны были предсказаны еще в 1973 году [24] в оптических световодах, где эффекты самомодуляции и дисперсии можно наблюдать почти в чистом виде вне конкуренции с другими нелинейными эффектами [25,26] и изменениями пространственного профиля направляемой моды. Такие солитоны формируются преимущественно в результате конкуренции между дисперсионным расплыванием в режиме аномальной дисперсии групповых скоростей и фокусирующей нелинейностью, характерной для кварцевых световодов [27]. Первое наблюдение их пространственных аналогов, формирующихся благодаря подавлению дифракционного расплывания за счет фокусирующей нелинейности, было произведено в конце 80-х годов в планарных волноводах [28,29]. Двумерные пространственные солитоны в пространственно-однородных средах наблюдались в фоторефрактивных кристаллах с нелинейностью насыщающегося типа [30,31], а также в квадратичных нелинейных средах [32] после теоретического предсказания в [33]. Самоканалирование пространственно-временных пучков, достигающееся при одновременном подавлении дифракционного и дисперсионного расплывания за счет нелинейности, также наблюдалось в квадратично-нелинейной среде [34], однако первые экспериментальные результаты по полностью трехмерным солитонам (или световым пулям) в кубичной нелинейной среде опубликованы лишь недавно [35].

Все вышеупомянутые работы посвящены так называемым светлым солитонам, характеризуемым экспоненциально спадающими на бесконечности распределениями интенсивности в поперечном сечении. Однако, при определенных условиях (например, в дефокусирующей нелинейной среде) возможно также формирование темных солитонов, представляющих из себя провал интенсивности на фоне волны постоянной интенсивности. Свойства темных солитонов в различных нелинейных средах подробно описаны в обзоре [36].

В то время как свойства солитонов в пространственно-однородных нелинейных средах изучены достаточно подробно и возможность их формирования была подтверждена экспериментально для сред с самыми разными механизмами нелинейности [24-34], формирование и распространение одномерных и многомерных солитонов в неоднородных нелинейных материалах является предметом актуальных интенсивных исследований. Особый интерес представляют среды с достаточно мелкой (или слабонаправляющей) периодической поперечной (к направлению распространения излучения) модуляцией показателя преломления с глубиной  $\delta n \sim 10^{-4} - 10^{-2}$ , в которых нелинейная добавка к показателю преломления сравнима с  $\delta n$ . Для описания распространения света в подобных структурах еще применимо параксиальное приближение, приводящее к уравнению шредингеровского типа. В этих структурах возможно наблюдение целого ряда уникальных волновых явлений, не имеющих аналогов в однородных средах, а также формирование и устойчивое распространение совершенно новых типов пространственных солитонов (детальный обзор исследований, выполненных в этом направлении, приведен в первой, второй и четвертой главах диссертации).

Одной из причин, приведших к росту интереса к распространению света в пространственно-неоднородных структурах, является значительный прогресс в технологии их изготовления, достигнутый в течение последнего десятилетия. Можно выделить несколько наиболее эффективных технологий изготовления пространственно-неоднородных микроструктур.

В полупроводниковых материалах, таких как AlGaAs, периодическая одномерная модуляция показателя преломления реализуется с помощью специальной высокоточной гравировки с глубиной  $\sim 1 \mu\text{m}$  на поверхности образца. В результате формируется периодическая система слабосвязанных или "дискретных" волноводов, где эффекты самовоздействия наблюдаются уже при интенсивностях  $\sim 10 \text{ GW}/\text{cm}^2$  (нелинейный коэффициент AlGaAs  $n_2 \sim 10^{-13} \text{ cm}^2/\text{W}$  на длине волны  $1.53 \mu\text{m}$ ) и которые позволили наблюдать простейшие "дискретные" пространственные солитоны [37] при уровнях мощности излучения  $\sim 500 \text{ W}$  [38]. Дискретные массивы волноводов также могут быть изготовлены на основе полимерных материалов [39].



Периодические массивы волноводов могут быть записаны в плавленом кварце высокой чистоты и однородности ( $n_2 \simeq 2.7 \times 10^{-20} \text{ м}^2/\text{В}$ ) с помощью мощных сфокусированных фемтосекундных лазерных импульсов, генерируемых Ti:Sa лазером. В области фокуса формируются оптические дефекты, приводящие к увеличению показателя преломления стекла. Перемещение фокуса пишущего пучка вдоль образца позволяет изготавливать массивы с практически произвольной конфигурацией, периодом  $\sim 20 \text{ мкм}$ , глубиной модуляции показателя преломления вплоть до  $1.3 \times 10^{-3}$ , и длиной до  $100 \text{ мм}$ . Простейшие двумерные фундаментальные солитоны в гексагональных массивах, изготовленных с помощью этой технологии, наблюдались в работах [40,41] при пиковых мощностях  $\sim 2 \text{ MW}$ .

Нематические жидкие кристаллы являются весьма удобными средами для экспериментов с нелинейными периодическими массивами волноводов из-за их исключительно высокой (хотя и медленной) ориентационной нелинейности, которая может превосходить нелинейность стандартных полупроводников на несколько порядков. Жидкие кристаллы используются для изготовления периодических структур, контролируемых приложенным внешним напряжением [42-44], за счет системы электродов с характерным периодом  $\sim 6 \text{ мкм}$ , нанесенной на верхнюю и нижнюю плоскости образца толщиной в несколько микрометров. Приложенное внешнее напряжение приводит к переориентации молекул жидкого кристалла только в определенных областях пространства и к соответствующим изменениям показателя преломления и нелинейности. Типичная мощность, необходимая для формирования солитонов в таких массивах, составляет  $\sim 35 \text{ мW}$  при приложенном напряжении  $\sim 1.2 \text{ В}$ .

Наиболее гибким методом создания периодических структур является метод оптической индукции [45], поскольку именно он позволяет создавать полностью перестраиваемые периодические распределения показателя преломления, которые контролируются фазами, углами распространения и интенсивностями нескольких плоских волн, индуцирующих решетку. Заметим, что для большинства приложений светоиндуцированные решетки должны оставаться инвариантными (стационарными) в направлении распространения. Эксперименты с такими решетками зачастую используют сильную анизотропию электрооптического коэффициента некоторых фоторефрактивных кристаллов (так, в SBN типичные значения используемых элементов электрооптического тензора  $r_{33} \simeq 1340 \text{ pm/V}$  и  $r_{13} \simeq 67 \text{ pm/V}$ ). Благодаря анизотропии, обыкновенно поляризованные пучки в такой среде хотя и приводят к накоплению пространственного заряда (следовательно, появлению внутреннего поля) в кристалле, но практически не испытывают самовоздействия, возникающего из-за электрооптического эффекта, в силу малости соответствующего коэффициента  $r_{13}$ . Если же обыкновенно поляризованный пучок вдобавок принадлежит к классу недифрагирующих, то он вовсе не искажается в

процессе распространения. При наличии статического поля, приложенного к кристаллу, необыкновенно поляризованные пучки испытывают сильную фоторефрактивную нелинейность, поскольку нелинейная добавка к показателю преломления определяется большим коэффициентом  $r_{33}$  [46,47], и модуляцию показателя преломления, созданную обыкновенной волной. Характерный период оптически индуцированных решеток составляет  $\sim 10 \mu\text{m}$ , а нелинейная добавка к показателю преломления достигает  $\delta n_{\text{нл}} \sim 10^{-3}$  уже при мощностях излучения  $\sim 1 \mu\text{W}$ . Заметим, однако, что скорость установления нелинейной добавки растет с интенсивностью практически линейно. Оптически индуцированная решетка может быть создана не только с помощью интерференции когерентных плоских волн, но и с помощью амплитудно-модулированного частично когерентного света [48], что позволяет использовать такие решетки даже в случае необыкновенной поляризации, когда нелинейность среды влияет на решетку. Оптическая индукция используется для наведения квадратных [46,47], гексагональных [45, 49] и сотовых [50] решеток в зависимости от количества и фаз интерферирующих плоских волн. Заметим, что волны, индуцирующие оптические решетки и распространяющиеся в нелинейном режиме, имеют много общего с так называемыми кноидальными волнами [12,51,52].

Текущий уровень развития технологий позволяет изготавливать материалы не только с пространственно-неоднородным линейным показателем преломления, но и с модулированной в поперечном направлении нелинейностью. В частности, при записи массивов волноводов фемтосекундными лазерными импульсами в области фокуса наблюдается также уменьшение нелинейного коэффициента материала, что приводит к периодической модуляции нелинейности, противофазной с линейной решеткой показателя преломления [40,41]. Неоднородное легирование фоторефрактивных материалов различными примесями, повышающими локальный нелинейный коэффициент, также может быть использовано для создания требуемых пространственных профилей нелинейности, включая периодические. Модуляция нелинейности неизбежно присутствует в фотонных кристаллах волоконного типа [8,10,11], в которых отдельные капилляры могут быть заполнены жидкостями с ориентационными или тепловыми нелинейностями, жидкими кристаллами и иными средами. Подбирая показатель преломления материала, используемого для заполнения капилляров, можно создать композиционный материал с практически одинаковым показателем преломления и значительной модуляцией нелинейности (т.е. чисто нелинейную решетку). Наконец, приложение разности потенциалов к системе электродов на поверхности жидкого кристалла сопровождается одновременным изменением его показателя преломления и нелинейности [42]. Изучение возможности формирования и стабилизации пространственных солитонов в нелинейных и смешанных линейных-нелинейных решетках является одним из наибо-

лее новых и динамично развивающихся направлений исследований в нелинейной оптике неоднородных сред (более подробный обзор состояния исследований в этом направлении будет приведен в пятой главе диссертации).

Большинство подходов к созданию периодических линейных или нелинейных решеток, описанных выше, позволяет также вносить контролируемые деформации в профиль решетки. В частности, возможно изготовление периодических структур, занимающих лишь часть пространства, или разупорядоченных массивов с контролируемой степенью беспорядка. Такие деформации или пространственные неоднородности приводят к качественному изменению характера распространения излучения в структуре. Например, наличие границы раздела между решеткой и однородной средой ведет к асимметричной дифракции низкоинтенсивных световых пучков, распространяющихся вблизи границы раздела. Небольшие флуктуации положений или глубин отдельных волноводов в разупорядоченных массивах приводят к преобразованию неограниченных собственных мод периодической системы волноводов в пространственно-локализованные андерсоновские моды и подавлению дифракционного расплывания (или андерсоновской локализации) пучков [53,54]. В настоящий момент весьма интенсивно исследуется формирование так называемых поверхностных солитонов на границах пространственно-ограниченных периодических массивов волноводов (см. детали в третьей главе диссертации), а также влияние нелинейности на локализацию излучения в разупорядоченных массивах (подробный обзор современного состояния исследований в этой области приведен в седьмой главе диссертации).

Помимо стационарных решеток, остающихся инвариантными в направлении распространения излучения, возможно изготовление динамических бипериодических решеток, параметры которых периодически варьируются вдоль продольной оси. Например, периодическое изменение направления мелкой гравировки на поверхности полупроводниковых материалов [38,54] позволяет создавать зигзагообразные динамические массивы волноводов. В волноводах, записываемых фемтосекундными лазерными импульсами, поперечные осцилляции положения фокуса записывающего пучка при его движении вдоль образца могут быть использованы для формирования системы периодически искривленных каналов. Альтернативно, периодические изменения скорости записи волноводов ведут к осцилляциям глубины модуляции показателя преломления в продольном направлении [40,41,53]. Динамические решетки показателя преломления могут быть оптически индуцированы в фоторефрактивных кристаллах при наличии периодически изменяющейся вдоль трассы распространения некогерентной внешней подсветки кристалла или статического электрического поля, приложенного к нему [46,47]. Дифракция света в продольно-модулированных массивах носит совершенно необычный характер. Благодаря модуляции возможны радикальные деформации (такие,

как появление плоских участков) дисперсионных характеристик собственных мод динамических решеток и модификации эффективной постоянной связи между отдельными каналами массива. С продольной модуляцией показателя преломления связана возможность динамической локализации света в линейном режиме, при которой пучок периодически расплывается по массиву и испытывает полное восстановление профиля, и подавление туннелирования, при котором пучок всегда остается в исходном канале, испытывая лишь небольшие осцилляции ширины и пиковой амплитуды. Исследования особенностей распространения излучения в продольно-модулированных волноводных структурах являются одним из приоритетных направлений в оптике неоднородных сред (детальный обзор состояния исследований в этом направлении содержится в [55,56] и в шестой главе диссертации).

Таким образом, к началу работы над диссертацией технологический прогресс привел к появлению принципиально новых объектов для экспериментирования и развития нелинейной теории волн: микроструктурированных и композитных материалов, волоконных фотонных кристаллов. С фундаментальной точки зрения, открылась уникальная возможность синтеза достижений оптики, теории твердого тела и квантовой механики на базе упомянутых объектов. С прикладной точки зрения, возникли новые перспективы для управления светом, направленной доставки и переключения оптического излучения, формирования сложных недифрагирующих стационарных волновых полей. На первый план вышли нерешенные и актуальные с фундаментальной и практической точек зрения задачи исследования подвижности солитонов и связанных солитонных состояний в непрерывных периодических решетках показателя преломления, стабилизации в этих структурах одномерных и двумерных солитонных комплексов, а также оптических пульс. Стал актуальным анализ формирования фундаментальных и вихревых солитонов, а также солитонных комплексов в оптических решетках с новыми типами симметрии, индуцированными недифрагирующими пучками Бесселя, Матье и параболическими пучками. Возник целый класс нерешенных задач, связанных с формированием одномерных и двумерных поверхностных солитонов на границе раздела периодической и однородной сред, а также на границе раздела двух разных периодических сред. Отсутствовала информация об устойчивости одномерных и двумерных солитонных комплексов, а также вихревых солитонов в нелокальных нелинейных средах, и оставался открытым вопрос о влиянии нелокальности нелинейности на формирование солитонов в бесконечных и полубесконечных периодических массивах волноводов. Требовали изучения устойчивость, подвижность и динамика формирования одномерных и двумерных солитонов в материалах с конкурирующими линейными и нелинейными решетками, и возможность их устойчивого распространения в чисто нелинейных решетках. Назрела необходимость экспериментального подтверждения эффекта подавле-

ния туннелирования света между соседними волноводами, а также исследование резонансных явлений раскачки осцилляций и преобразования мод в одномерных и двумерных массивах с продольной модуляцией показателя преломления. Наконец, не было изучено влияние границ и размерности неупорядоченных массивов на андерсоновскую локализацию света. Решению этих актуальных задач, находящихся на переднем крае исследований в оптике неоднородных сред, и посвящена эта диссертационная работа.

Целями диссертационной работы являлось:

1. Теоретическое исследование подвижности фундаментальных солитонов и распада связанных солитонных состояний в одномерных решетках показателя преломления. Анализ устойчивости одномерных и двумерных солитонных комплексов в фокусирующих и дефокусирующих периодических средах. Наблюдение солитонов в решетках с дробной размерностью и оптических пульс.

2. Изучение свойств фундаментальных солитонов в оптически индуцированных решетках Бесселя, Матье и параболических решетках. Анализ устойчивости вихревых и мультиполюсных солитонов в радиально-симметричных и модулированных решетках Бесселя, выявление связи между симметрией решетки и максимальным топологическим зарядом вихревого солитона.

3. Анализ возможности существования локализованных поверхностных солитонов на границе решетки с дефокусирующей нелинейностью. Наблюдение двумерных поверхностных солитонов на границе периодической и однородной сред, а также на границе двух периодических решеток. Наблюдение векторных и изучение свойств вихревых поверхностных солитонов.

4. Теоретическое исследование устойчивости одномерных и двумерных мультиполюсных солитонов, а также вихревых солитонов в нелокальных нелинейных средах. Наблюдение двумерных мультиполюсов в среде с тепловой нелинейностью. Анализ влияния нелокальности нелинейности на подвижность солитонов в глубине решетки и формирование стационарных поверхностных волн.

5. Изучение устойчивости и подвижности одномерных и вихревых солитонов в конкурирующих линейных и нелинейных решетках. Подтверждение возможности стабилизации двумерных солитонов в кубичной чисто нелинейной решетке. Доказательство

возможности существования устойчивых светлых солитонов в средах с неоднородной дефокусирующей нелинейностью.

6. Анализ явлений резонансной раскачки осцилляций солитонов и преобразования мод в волноводных структурах с продольной модуляцией показателя преломления. Наблюдение эффекта подавления туннелирования в линейных и нелинейных одномерных массивах волноводов. Предсказание этого эффекта в двумерных сотовых массивах и демонстрация анизотропной дифракции.

7. Наблюдение андерсоновской локализации на границе раздела одномерной неупорядоченной решетки и однородной среды. Наблюдение эффекта кросс-локализации в двумерных массивах с одномерным недиагональным беспорядком и перехода от одномерной к двумерной локализации в массивах волноводов с дробной размерностью. Изучение диффузии солитонов в случайных профилях показателя преломления.

#### Актуальность исследования:

Актуальность диссертационной работы обусловлена, прежде всего, широким кругом прикладных задач, в которых могут использоваться нелинейные волноводные микроструктуры с поперечной или бипериодической модуляцией показателя преломления и/или нелинейности. Технологии изготовления периодических и более сложных волноводных структур, где эффекты нелинейного самовоздействия, дифракции и рефракции играют одинаково важную роль при распространении излучения, были разработаны лишь в течение последних десяти лет. Динамика и траектории распространения излучения в таких неоднородных средах кардинально зависят от мощности, ширины и угла распространения входных волновых пакетов, что открывает широкие практические возможности для контроля их профилей, взаимодействия и выходных характеристик даже при низких уровнях мощности. Также весьма актуальна и широко исследуется возможность формирования в нелинейных микроструктурах самосогласованных сложных распределений поля, которые не существуют или являются неустойчивыми в однородных нелинейных средах. Кроме того, вышеупомянутые микроструктурированные объекты открывают уникальные возможности для визуального наблюдения и изучения прямых аналогов ключевых эффектов квантовой механики и теории твердого тела (динамическая локализация, осцилляции Раби, андерсоновская локализация, туннелирование Зенера и др.).

#### Научная новизна:

1. Впервые продемонстрирована возможность распада связанных солитонных состояний и управление его продуктами в периодических решетках. Получены и экспериментально наблюдались в одномерном массиве ранее неизвестные устойчивые солитонные комплексы. Экспериментально исследованы солитоны в решетках с дробной размерностью. Впервые наблюдались оптические пули.
2. Исследовано ранее неизвестное вращательное движение солитонов в бесселевых решетках показателя преломления с фокусирующей нелинейностью, и предсказано формирование устойчивых радиально-симметричных вихревых солитонов в дефокусирующих решетках Бесселя. Выведено правило зарядов для вихревых солитонов в решетках с дискретной вращательной симметрией.
3. Установлено, что граница раздела периодической и однородной сред поддерживает локализованные солитоны даже при дефокусирующей нелинейности. Впервые наблюдались двумерные поверхностные солитоны на границе раздела решетки и однородной среды, а также на границе решеток с разными топологиями. Найдены устойчивые вихревые поверхностные солитоны.
4. Обнаружено и доказано, что устойчивые одномерные солитонные комплексы в жидких кристаллах и средах с тепловой нелинейностью не могут содержать более четырех пиков интенсивности, а топологический заряд устойчивых вихревых солитонов в этих средах не может превышать двойки. Впервые наблюдались двумерные солитонные комплексы в средах с тепловой нелинейностью. Установлено, что нелокальность повышает подвижность солитонов в периодических решетках.
5. Предсказана повышенная подвижность солитонов в конкурирующих линейных-нелинейных решетках. Впервые показано, что периодическая модуляция кубичной нелинейности может стабилизировать двумерные фундаментальные солитоны. Найдены светлые солитоны в неоднородной дефокусирующей среде, существование которых ранее полагалось невозможным.
6. Впервые поставлена и решена задача о резонансной параметрической раскачке осцилляций солитонов в продольно-модулированных волноводных структурах. Наблюдалось подавление туннелирования в одномерных линейных и нелинейных массивах с противофазной модуляцией показателя в соседних волноводах. Предсказаны подавле-

ние туннелирования в сотовых модулированных массивах и возможность формирования в них оптических пуль при пониженных уровнях энергии.

7. Наблюдалась андерсоновская локализация у поверхности разупорядоченного полубесконечного массива волноводов. Впервые проанализирован переход от одномерной к двумерной локализации в массивах с постепенно увеличивающейся размерностью, а также эффект кросс-локализации в двумерных массивах, вызванный эффективно одномерным беспорядком. Обнаружена ранее неизвестная аналогия между диффузией солитонов в спеклообразных случайных решетках и движением броуновских частиц.

#### Практическая значимость работы:

Полученные результаты важны как с фундаментальной, так и с практической точек зрения. В частности, выявленные в диссертации особенности режимов распространения, самовоздействия и нелинейного взаимодействия пучков в линейных и нелинейных решетках показателя преломления могут быть использованы для решения ряда инженерных задач лазерной физики, включая построение нелинейных систем управления света светом, высокоскоростных оптических переключателей и разветвителей, проблеме передачи без искажений в линейных и нелинейных средах сложных изображений, содержащих множество световых пучков (пикселей), контроль скорости и направления дифракционного расплывания света, контроль выходных распределений интенсивности в многоканальных структурах, и, наконец, управление самой траекторией распространения излучения в объеме среды.

#### Достоверность результатов:

Достоверность полученных в диссертационной работе результатов гарантируется тем, что используемые математические модели основаны на известных и апробированных практикой фундаментальных уравнениях. Аналитические результаты сопоставлены и согласуются с данными компьютерного моделирования. Во многих случаях теоретические результаты полностью подтверждены экспериментальными данными, а также последующими теоретическими работами других авторов.

#### Положения, выносимые на защиту:

1. В одно- и двумерных периодических решетках существуют устойчивые солитонные комплексы, которые наблюдались в массивах волноводов в фотовольтаических кри-



сталлах. Поперечная модуляция показателя преломления стабилизирует световые пули в кубичной нелинейной среде и позволяет наблюдать их экспериментально в гексагональных массивах кварцевых волноводов.

2. Радиально-симметричные решетки Бесселя поддерживают устойчиво вращающиеся фундаментальные солитоны в фокусирующей среде, а также устойчивые радиально-симметричные вихревые солитоны в дефокусирующей среде. Дискретная вращательная симметрия решетки Бесселя с азимутальной модуляцией накладывает ограничения на максимальный заряд вихревых солитонов.

3. Граница раздела однородной и периодической дефокусирующих сред поддерживает устойчивые локализованные солитоны. Существование двумерных поверхностных солитонов на границе периодической решетки и однородной среды с фокусирующей нелинейностью подтверждено экспериментально.

4. Существует ограничение на число пиков интенсивности в устойчивых мультипольных солитонах в нелокальных нелинейных средах. Двумерные мультипольные солитоны в среде с нелокальной тепловой нелинейностью реализованы экспериментально. Нелокальность нелинейного отклика значительно увеличивает подвижность одномерных решеточных солитонов.

5. Двумерная чисто нелинейная решетка может стабилизировать фундаментальные солитоны в кубичной среде. В среде с пространственно-неоднородной дефокусирующей нелинейностью, растущей к периферии, существуют устойчивые светлые фундаментальные, мультипольные и вихревые солитоны.

6. Подавление туннелирования света в одномерных линейных и нелинейных массивах с противофазной продольной модуляцией показателя преломления в соседних волноводах реализовано экспериментально. Продольная модуляция показателя преломления в двумерных сотовых массивах позволяет подавить туннелирование и дает возможность управлять анизотропией дифракции.

7. Для достижения той же степени андерсоновской локализации на поверхности разупорядоченного массива, что и в его глубине, требуется больший уровень беспорядка. Наблюдался переход от одномерной к двумерной андерсоновской локализации в массивах с увеличивающимся числом рядов.

### Личный вклад автора:

Подавляющее большинство теоретических результатов, представленных в диссертации, получено автором лично, либо при его определяющем участии в постановке задачи, компьютерном моделировании и подготовке публикаций. Экспериментальные данные, вошедшие в диссертацию, были получены при участии коллег автора в Клаустальском технологическом университете (Клаусталь, Германия), Институте прикладной физики (Йена, Германия) и Технионе (Хаифа, Израиль), как правило, по инициативе автора.

### Публикации:

По теме диссертации опубликовано 57 статей в регулярных рецензируемых журналах.

### Апробация работы:

Результаты исследований, составивших основу диссертации, докладывались на следующих всероссийских и международных конференциях: Международной конференции ICONO по когерентной и нелинейной оптике (Санкт-Петербург, Россия, 2005 г.); Международной конференции "CLEO/Europe-EQEC" (Мюнхен, Германия, 2005 г.); Конференции "Nonlinear guided waves and their applications" (Дрезден, Германия, 2005 г.); 12-ой Конференции "Оптика Лазеров" (Санкт-Петербург, Россия, 2006 г.); на первом съезде Европейского оптического общества (Париж, Франция, 2006 г.); Международном симпозиуме "Coherent nonlinear optics of artificial media" (Лиссабон, Португалия, 2006 г.); Симпозиуме "Instabilities, patterns, and spatial solitons" (Метц, Франция, 2007 г.); Международной конференции ICONO по когерентной и нелинейной оптике (Минск, Беларусь, 2007 г.); Международной конференции "CLEO/Europe-EQEC" (Мюнхен, Германия, 2007 г.); Конференции "Nonlinear waves: Theory and experiment" (Ташкент, Узбекистан, 2008 г.); Международной конференции "CLEO/QELS" (Сан-Хосе, США, 2008 г.); 1-ой Конференции "Nonlinear waves - theory and applications" (Бейджинг, Китай, 2008); 13-ой Конференции "Оптика Лазеров" (Санкт-Петербург, Россия, 2008 г.); Международной конференции "CLEO Europe - EQEC" (Мюнхен, Германия, 2009 г.); Конференции "ACOLS-ACOFT", проводимой совместно с симпозиумом по диссипативным солитонам (Аделаида, Австралия, 2009 г.); Международной конференции "CLEO/QELS" (Сан-Хосе, США, 2010 г.); 8-ой Конференции "AIMS International conference on dynamical systems, differential equations and applications" (Дрезден, Германия, 2010 г.); 2-ой Международной конференции "Nonlinear waves - theory and applications" (Бейджинг, Китай, 2010); Международной конференции "Frontiers in Optics 2010" (Рочестер, США, 2010 г.); Меж-

дународной конференции "CLEO/QELS" (Балтимор, США, 2011 г.); 7-ой Международной конференции "IMACS international conference on nonlinear evolution equations and wave phenomena" (Атене, США, 2011 г.); 5-ом Международном симпозиуме "Nonlinear guided waves" (Стамбул, Турция, 2011 г.); Международной конференции "Applications of optics and photonics" (Брага, Португалия, 2011 г.); Конференции "CLEO/Europe-EQEC" (Мюнхен, Германия, 2011 г.); 1-ом Международном симпозиуме "Nonlinear photonics: theory, materials, applications" (Санкт-Петербург, Россия, 2011 г.).

#### Структура и объем диссертации:

Диссертация состоит из введения, семи глав, заключения и списка литературы. В начале каждой главы следует развернутый обзор текущего состояния исследований в области, которой посвящена данная глава, а также описывается оригинальный вклад автора. Общий объем диссертации составляет 354 страницы, включая 152 рисунка. Список цитируемой литературы содержит 443 наименования.

#### Краткое содержание диссертации:

Во введении обоснована актуальность работы, сформулированы ее цели, показана научная новизна и практическая значимость полученных результатов, а также изложены защищаемые положения и краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуется подвижность одномерных солитонов, а также свойства одно- и двумерных фундаментальных солитонов, солитонных комплексов и оптических пучков в периодических решетках показателя преломления.

В параграфе 1.1 обсуждаются различные режимы распространения одномерных солитонов в периодических решетках. С использованием модели эффективных частиц определяется критический угол, при котором пучок начинает двигаться вдоль решетки, и траектория его распространения. Показана возможность захвата движущихся солитонов в одном из каналов решетки, номер которого определяется исходным углом распространения пучка.

В параграфе 1.2 анализируется динамика контролируемого распада связанных состояний  $N$  солитонов в одномерных решетках показателя преломления. Установлено, что углы распространения выходных односолитонных пучков с различными факторами определяются глубиной решетки и углом распространения входного связанного состояния.

В параграфе 1.3 обсуждаются всевозможные семейства одномерных солитонов в среде с насыщением нелинейности и периодической модуляцией показателя преломле-

ния. Предсказано, что благодаря насыщению нелинейности области устойчивости четных и нечетных солитонов чередуются. Показано, что в фокусирующей среде устойчивые солитонные комплексы должны состоять из противофазных пучков, а в дефокусирующей среде, наоборот, из синфазных. Представлено экспериментальное наблюдение солитонных комплексов в дефокусирующей среде.

Параграф 1.4 посвящен исследованию самосогласованных решений в двумерных решетках. В нем показано, что наличие периодической модуляции показателя преломления не только позволяет подавить коллапс простейших пучков в кубичной среде, но и открывает возможности для формирования сложных устойчивых структур, включающих ансамбли пучков и даже представляющих из себя целые изображения, которые могут распространяться без искажения.

В параграфе 1.5 экспериментально и теоретически исследуются солитоны в массивах дробной размерности. Продемонстрировано, что увеличение числа рядов в массиве волноводов, эквивалентное увеличению его размерности, приводит к повышению пороговой мощности формирования стационарных солитонов.

Параграф 1.6 раскрывает особенности генерации солитонов в бинарных решетках показателя преломления, состоящих из двух типов волноводов. Экспериментально подтверждено, что даже небольшая разница в показателях преломления двух подрешеток, формирующих бинарную решетку, приводит к существенной разнице в порогах формирования солитонов, центрированных на мелких и глубоких волноводах.

В параграфе 1.7 рассматриваются оптические пули в двумерных решетках показателя преломления. Предсказано, что поперечная модуляция показателя преломления приводит к стабилизации пространственно-временных солитонов и представлено их первое экспериментальное наблюдение в гексагональных массивах волноводов.

Вторая глава диссертации сфокусирована на анализе уникальных особенностей солитонов в оптически-индуцированных решетках Бесселя, Матье и параболических решетках.

В параграфе 2.1 описываются свойства фундаментальных и мультипольных солитонов в радиально-симметричных бесселевых решетках. Показано, что солитоны, локализованные в кольцах такой решетки, могут вращаться, не теряя мощности на излучение. Взаимодействия солитонов в одном или разных кольцах решетки могут приводить к формированию вращающихся солитонных пар, их периодическим столкновениям с изменением направления вращения или их слиянию, в зависимости от разности фаз и скоростей вращения взаимодействующих пучков.

Параграф 2.2 посвящен исследованию самосогласованных решений в азимутально-модулированных решетках Бесселя. В нем показано, что решетки, индуцированные недифрагирующими пучками порядка  $n$ , поддерживают устойчивые солитонные ком-

плексы с  $2n$  противофазными пиками. Анализируется возможность азимутального переключения солитонов.

В параграфе 2.3 рассмотрены радиально-симметричные решетки Бесселя с дефокусирующей нелинейностью. Установлено, что в них могут устойчиво распространяться радиально-симметричные вихревые солитоны. Показано, что минимальная глубина решетки, необходимая для стабилизации вихревого солитона, растет с увеличением его топологического заряда.

Влияние степени дискретной вращательной симметрии решетки Бесселя с азимутальной модуляцией показателя преломления на максимально возможный топологический заряд вихревого солитона в такой решетке составляет предмет параграфа 2.4. В нем с помощью численного анализа и аналитики, базирующейся на теории групп, выведены правила зарядов и устойчивости для вихревых солитонов.

Параграф 2.5 посвящен распространению солитонов в динамических вращающихся решетках Бесселя, наведенных парой интерферирующих пучков с различными топологическими зарядами. Показано, что такая решетка может захватывать и вращать фундаментальные и дипольные солитоны.

В параграфе 2.6 анализируются солитоны в оптически-индуцированных решетках Матье. Установлено, что такие решетки связывают семейства бесселевых и квазиодномерных периодических решеток. Устойчивость и поперечная подвижность солитонов кардинально изменяются при преобразовании топологии такой решетки.

Самосогласованные решения в решетках, индуцированных недифрагирующими параболическими пучками, исследуются в параграфе 2.7. Продемонстрировано, что параболические решетки поддерживают семейства устойчивых мультипольных солитонов с искривленными осями, которые ответвляются от линейных мод решетки по мере роста мощности.

В третьей главе рассматриваются одно- и двумерные поверхностные солитоны на границах раздела периодических решеток и однородных сред с фокусирующей или дефокусирующей нелинейностями.

В параграфе 3.1 предсказано существование одномерных локализованных поверхностных солитонов на границе полубесконечной периодической решетки с дефокусирующей нелинейностью. Свойства таких солитонов представляют собой уникальную комбинацию свойств нелинейных решений в однородной и периодических средах.

Параграф 3.2 концентрируется на анализе свойств поверхностных солитонов в решетках, параметры которых (такие, как частота или глубина) модулированы в поперечном направлении. Показано, что модуляция параметров решетки может приводить к отклонению излучения к границе и формированию беспороговых поверхностных волн. Представлено их экспериментальное наблюдение.

Первое экспериментальное наблюдение и анализ свойств двумерных поверхностных волн на плоской границе и в углу периодических решеток входят в основу параграфа 3.3. В нем показано, что поверхностные солитоны, локализованные в углу решетки, обладают меньшей пороговой мощностью, чем солитоны, расположенные на ее плоской границе.

В параграфе 3.4 исследуются специфические поверхностные солитоны в гексагональных массивах волноводов, занимающих различные угловые сектора пространства. Экспериментально и теоретически изучается зависимость скорости дифракционного расплывания для возбуждений углового волновода и зависимость пороговой мощности от угла раствора массива.

Параграф 3.5 посвящен наблюдению поверхностных солитонов на границе квадратного и гексагонального массивов волноводов с одинаковыми или разными глубинами модуляции показателя преломления. Установлено, что увеличение глубины одной из решеток существенно понижает порог формирования поверхностного солитона в ней, но, в то же время, повышает порог формирования по другую сторону от границы.

Экспериментальное наблюдение и анализ свойств двумерных векторных солитонов с двумя ортогонально поляризованными компонентами поля на границе раздела между периодическим нелинейным массивом и однородной средой изложены в параграфе 3.6. Показано, что векторные солитоны ответвляются от семейств скалярных солитонов при увеличении мощности, причем векторные солитоны могут содержать компоненты с сильно различающейся степенью локализации.

Параграф 3.7 нацелен на исследование вихревых поверхностных солитонов на границе двух квадратных решеток с различными глубинами модуляции показателя преломления. Показано, что, несмотря на сильную асимметрию распределений интенсивности, поверхностные вихревые солитоны могут быть устойчивы.

В четвертой главе диссертации исследуются фундаментальные, мультипольные и вихревые солитоны в однородных и неоднородных нелокальных средах.

Параграф 4.1 посвящен анализу устойчивости одномерных мультипольных комплексов в однородных нелокальных средах с различными функциями отклика. В нем продемонстрировано, что в жидких кристаллах, а также в средах с тепловой нелинейностью мультипольные солитоны могут быть устойчивы только в том случае, если число пиков интенсивности в них не превышает четырех.

В параграфе 4.2 исследуются движущиеся серые солитоны в нелокальных нелинейных средах. Показано, что нелокальность нелинейного отклика существенно понижает максимально возможную скорость движения серого солитона с заданной амплитудой. Установлено, что серые солитоны могут формировать устойчивые связанные состояния.

Анализ устойчивости и экспериментальное наблюдение двумерных мультипольных солитонов в среде с тепловой нелинейностью представлены в параграфе 4.3. В нем продемонстрировано, что двумерные мультиполи даже со сложными кольцевыми профилями являются метастабильными, и поэтому легко наблюдаются на длине экспериментально доступных образцов.

В параграфе 4.4 рассматривается устойчивость вихревых солитонов в цилиндрических средах с тепловой нелинейностью. Предсказывается, что существует ограничение на максимальный заряд устойчивого вихревого солитона и анализируется динамика распада неустойчивых вихревых решений.

Параграф 4.5 посвящен исследованию влияния нелокальности нелинейного отклика на свойства фундаментальных, четных и мультипольных солитонов в периодических решетках показателя преломления. Показано, что нелокальность ослабляет неустойчивость четных солитонов и приводит к радикальному увеличению подвижности фундаментальных солитонов.

Свойства одномерных солитонов в слоистой среде с тепловой нелинейностью являются предметом параграфа 4.6. Подобные среды поддерживают целый ряд устойчивых самосогласованных решений, включая мультиполи и солитоны, смещенные от центра образца, которые не существуют в однородной тепловой среде.

В завершающем параграфе 4.7 показано, что граница раздела между периодической и однородной нелокальной средами поддерживает новые типы устойчивых мультипольных солитонов, пики интенсивности в которых находятся по разные стороны от границы раздела.

Пятая глава диссертации посвящена особенностям формирования одномерных и двумерных пространственных солитонов в средах с одновременной поперечной модуляцией показателя преломления и нелинейности, а также в чисто нелинейных решетках.

В параграфе 5.1 рассматриваются преобразования профилей и подвижность одномерных солитонов в противофазных линейной и нелинейной решетках. Установлено, что конкуренция между двумя решетками приводит к радикальному увеличению подвижности солитонов даже при достаточно глубокой модуляции линейного показателя преломления.

Преобразования профилей вихревых солитонов по мере увеличения их мощности и их устойчивость в конкурирующих линейной и нелинейной решетках являются предметом исследования в параграфе 5.2. Вышеупомянутая конкуренция приводит к ограничению максимальной мощности вихревых состояний и появлению новых семейств солитонов.

Параграф 5.3 посвящен изучению стабилизации двумерных солитонов в чисто нелинейных решетках в фокусирующей кубичной среде. В нем предсказано, что устойчивое распространение фундаментальных солитонов возможно в том случае, когда решетка состоит из периодического массива нелинейных цилиндров, внедренных в линейную среду.

Многообразие устойчивых векторных солитонов с различными симметриями компонент поля в нелинейных решетках обсуждается в параграфе 5.4. Показывается, что кросс-модуляционное взаимодействие между устойчивыми и неустойчивыми скалярными состояниями может привести к формированию устойчивых векторных решений.

В параграфе 5.5 анализируется возможность формирования светлых солитонов в среде с неоднородной дефокусирующей нелинейностью. Установлено, что они могут формироваться, если нелинейность достаточно быстро нарастает от центра к периферии среды. В неоднородных дефокусирующих средах найдены не только фундаментальные, но и устойчивые мультипольные светлые солитоны.

В шестой главе диссертации исследуются новые физические явления в периодических решетках и других волноводных структурах, показатель преломления которых периодически модулирован в направлении распространения излучения.

В параграфе 6.1 предсказывается возможность резонансной раскачки амплитуды осцилляций центра солитона в периодических и параболических потенциалах, подобной раскачке параметрического маятника. Показано, что в периодической решетке система неизбежно выходит из условий параметрического резонанса, что сопровождается периодическим затуханием/нарастанием амплитуды осцилляций, в то время как в параболических профилях показателя преломления раскачка происходит монотонно.

Параграф 6.2 посвящен изучению резонансного преобразования мод волноводных структур при наличии продольной модуляции показателя преломления. Показана возможность каскадного преобразования мод, обсуждается влияние нелинейности на процесс преобразования. Подчеркивается аналогия между этим процессом и осцилляциями Раби.

Контролируемый дрейф солитонов в динамических решетках показателя преломления, индуцированных в фоторефрактивном кристалле тремя несбалансированными плоскими волнами, изучается в параграфе 6.3. В нем обсуждается зависимость скорости дрейфа от мощности солитона и параметров слабой управляющей плоской волны, которая вносит асимметрию в распределение показателя преломления.

В параграфе 6.4 представлен теоретический анализ и первое экспериментальное наблюдение эффекта подавления туннелирования света в массиве с противофазной продольной модуляцией показателя преломления в соседних волноводах. Этот эффект



продемонстрирован как для двухканальной системы, так и на границе и в глубине периодического массива.

Влияние фокусирующей нелинейности на эффект подавления туннелирования исследуется в параграфе 6.5. Показано, что увеличение пиковой амплитуды исходного пучка приводит к уширению отдельных резонансов в зависимости мощности во входном канале, усредненной по трассе распространения, от частоты продольной модуляции. Представлено экспериментальное подтверждение этого эффекта.

Параграф 6.6 посвящен описанию подавления туннелирования для двумерных пучков в продольно-модулированном сотовом массиве волноводов. Указывается на возможность реализации анизотропной дифракции при определенном выборе групп волноводов, для которых модуляция показателя преломления является противофазной. В таких массивах показана возможность неискаженной передачи сложных пучков даже в линейном случае.

Возможность формирования оптических пуль при пониженных уровнях мощности в сотовых массивах волноводов обсуждается в параграфе 6.7. Установлено существование оптимальной амплитуды входного волнового пакета, приводящей к формированию оптической пули, для каждого значения частоты продольной модуляции показателя преломления волноводов в сотовом массиве.

Седьмая глава диссертации посвящена исследованию явления андерсоновской локализации света в разупорядоченных линейных массивах волноводов, а также анализу передачи и диффузии солитонов через неупорядоченные массивы.

В параграфе 7.1 обсуждаются особенности андерсоновской локализации вблизи границы раздела неупорядоченного массива волноводов и однородной среды. Установлено, что из-за отталкивания от границы раздела для достижения той же степени локализации вблизи нее, что и в глубине массива, требуется больший уровень беспорядка. Представлено экспериментальное наблюдение эффекта приповерхностной локализации.

Параграф 7.2 основан на результатах исследования явления кросс-локализации в двумерных массивах волноводов, состоящего в том, что эффективно одномерный некоррелированный недиагональный беспорядок приводит к локализации излучения вдоль обеих поперечных осей массива. Этот эффект наблюдается экспериментально.

Экспериментальное наблюдение перехода от одномерной к двумерной андерсоновской локализации в массивах с постепенно увеличивающимся числом рядов обсуждается в параграфе 7.3. Показано, что степень локализации усредненного выходного распределения поля выше в одномерном массиве.

В параграфе 7.4 исследуется отражение солитонов от неупорядоченных массивов конечной ширины. Установлено, что наличие беспорядка может привести к просветле-

нию массива даже для тех углов падения солитона, при которых в регулярном случае происходит полное отражение. Наоборот, в диапазоне углов, для которых солитон свободно проходит через массив волноводов, беспорядок приводит к увеличению доли отраженного излучения.

Наконец, в параграфе 7.5 исследуется динамика распространения солитонов в спеклообразных случайных профилях показателя преломления, индуцированных оптически в фоторефрактивных кристаллах. Установлено, что в определенном диапазоне параметров солитоны в таких профилях показателя преломления испытывают диффузию, подобную диффузии броуновских частиц.

В заключении сформулированы основные выводы диссертации.

## Глава 1. Солитоны в периодических решетках показателя преломления

Периодическая модуляция показателя преломления радикально меняет характер распространения излучения даже в линейной среде. Если в однородном пространстве собственные моды представлены плоскими волнами и дифракция любого локализованного пучка в линейном режиме обусловлена различными фазовыми набегам (различными постоянными распространения), приобретаемыми плоскими волнами с различными пространственными частотами, то в периодической среде собственными модами являются уже так называемые блоховские волны [53,54], постоянные распространения которых нетривиально зависят от пространственной частоты (в отличие от однородной среды, где зависимость является параболической) и могут принимать значения лишь из ограниченных интервалов - разрешенных зон, в которых возможно существование блоховских волн [57,58]. В результате линейная дифракция в периодической среде обусловлена дефазировкой различных блоховских мод, возбуждаемых исходным пучком, и кардинально отличается от дифракции в однородной среде. Для такой "дискретной" дифракции характерно наличие двух ярко выраженных боковых максимумов интенсивности, которые разбегаются под постоянным углом, определяемым константой связи (перекрытием волновых полей) между индивидуальными волноводами [59-61]. Рассеяние света в периодической среде также определяется структурой разрешенных и запрещенных зон в блоховском спектре решетки [62]. Вероятно, одной из наиболее удивительных и привлекательных черт периодических сред является возможность контролировать как величину, так и сам знак дифракции (выпуклый или вогнутый профиль фазового фронта), т.е. темп дифракционного расплывания профиля интенсивности. В частности, для определенного угла распространения и структуры исходного пучка с достаточно узким пространственным спектром дифракционное расплывание в периодической решетке может быть практически полностью подавлено [59].

Нелинейность среды еще более обогащает динамику распространения в периодических средах и ведет к формированию так называемых решеточных солитонов. Простейшие или фундаментальные одномерные солитоны такого типа были получены в [37] еще в рамках дискретной модели, учитывающей связь лишь между соседними волноводами, в то время как первое их наблюдение было проведено в [38]. Приближенная дискретная модель не может правильно описать реальную структуру блоховского спектра периодической структуры и позволяет получить лишь некоторые решения из полубесконечной запрещенной зоны (для более полной информации по дискретной модели см. обзоры [53,54] и работы [63,64]). Все многообразие солитонов, поддерживаемых периодическими структурами стало доступно для исследования лишь с введением техни-

ки оптической индукции [47], которая позволяет индуцировать плавные (например, синусоидальные) распределения показателя преломления, где соседние "каналы" структуры всегда являются сильно связанными.

Отсутствие трансляционной инвариантности в такой пространственно неоднородной системе сильно связанных волноводов, эквивалентное появлению удерживающего потенциала, приводит к тому, что солитоны не могут свободно перемещаться вдоль решетки [65] и для того, чтобы привести их в движение, необходим некий импульс (реализуемый, как правило, в виде наклона плоского фазового фронта входного пучка). Если в линейном режиме такой пучок испытывает рассеяние и значительные трансформации профиля интенсивности, определяемые зонной структурой решетки [62], то при наличии нелинейности он может сохранить свою структурную целостность при движении вдоль решетки, хотя и будет постепенно терять мощность за счет излучения. Это излучение может рано или поздно (в зависимости от исходного импульса и глубины решетки) привести к захвату солитона в одном из каналов решетки, как было показано в рамках дискретной модели [65-70]. Однако, в рамках реалистичной непрерывной модели с синусоидальной решеткой этот эффект не был изучен вплоть до работы [71] автора и его обсуждению посвящен первый параграф данной главы. В частности, в нем будет показано, как увеличение глубины решетки или исходного градиента фазы влияет на положение канала, в котором захватывается солитон, и как этот эффект можно использовать для контролируемого переключения света.

Устойчивый баланс между нелинейностью и дифракцией, приводящий к формированию солитонов, позволяет рассматривать их в качестве переносчиков определенной информации (например, изображений), содержащейся в исходном сложном распределении интенсивности. Эта концепция весьма популярна в телекоммуникационных линиях связи, где индивидуальные солитоны могут рассматриваться в качестве битов информации, причем повышенный интерес вызывают даже не фундаментальные солитоны, а связанные состояния, содержащие несколько солитонов в одном комплексе [72]. В физических системах, описываемых полностью интегрируемыми эволюционными уравнениями, такие состояния включают несколько простейших солитонов с различными амплитудами, определяемыми собственными значениями Захарова-Шабата в обратной задаче рассеяния. Поскольку энергия связи между солитонами в связанных состояниях нулевая, то внешние возмущения могут привести к распаду связанных состояний на отдельные солитоны [73-76]. Во втором параграфе данной главы будет показано, как распад может контролироваться в том случае, если связанное состояние распространяется в синусоидальной решетке показателя преломления. В частности, изменения глубины решетки существенно влияют на параметры выходных солитонов, полу-

чающихся при распаде связанного состояния, как было впервые показано автором в работе [77].

Первые эксперименты с одномерными синусоидальными оптически индуцированными решетками были сконцентрированы в основном на наблюдении простейших фундаментальных солитонов, которые могут рассматриваться как "дефектные" моды, ответвляющиеся от блоховских мод на различных границах зонной структуры. При этом постоянные распространения (характеризующие нелинейный фазовый набег в процессе эволюции) смещаются в глубину запрещенных зон по мере роста нелинейности (т.е. по мере увеличения вклада нелинейной добавки в полный показатель преломления) [46,78,79]. В частности, в кристаллах с фокусирующей нелинейностью наблюдались солитоны из полубесконечной запрещенной зоны в спектре решетки, в то время как среды с дефокусирующей нелинейностью позволили наблюдать фундаментальные солитоны из первой ограниченной запрещенной зоны, которые также были получены в массивах полупроводниковых волноводов [80], фотовольтаических кристаллах [81], и даже конденсатах Бозе-Эйнштейна [82]. Отметим, что возможность формирования "светлых" солитонов в среде с дефокусирующей нелинейностью является одним из следствий нетривиальной дифракции света в периодической среде, которая может менять знак при определенных условиях.

Влияние насыщения фоторефрактивной нелинейности на свойства фундаментальных солитонов и возможность формирования более сложных многогорбых комплексов в синусоидальных одномерных решетках были впервые продемонстрированы автором данной диссертации в работе [83]. Описанию свойств таких солитонов посвящен третий параграф данной главы. В частности, в нем показывается возможность чередования устойчивости нечетных (центрированных на канале решетки) и четных (центрированных между каналами решетки) солитонов по мере роста их амплитуды. Позднее была прослежена связь этого явления с аномальной мобильностью солитонов в решетках с насыщением [84]. В третьем параграфе показано, что в фокусирующей (дефокусирующей) среде только комплексы, построенные из противофазных (синфазных) индивидуальных солитонов, могут быть устойчивы. В этом же параграфе обсуждается экспериментальное наблюдение таких комплексов, проведенное при участии автора [85]. Следует упомянуть аналогичный эксперимент, опубликованный позднее в [86] и работы, посвященные многосолитонным комплексам в конденсатах Бозе-Эйнштейна с кубической нелинейностью [87,88].

Многообразие солитонных структур существенно возрастает при переходе к двумерным решеткам показателя преломления. Простейшие фундаментальные солитоны в фокусирующей решетке имеют постоянные распространения, принадлежащие к полубесконечной запрещенной зоне, также как и в одномерном случае [89,90]. Впервые та-

кие солитоны наблюдались в работе [47]. Помимо решеток, созданных когерентными плоскими волнами, фундаментальные двумерные солитоны наблюдались в периодических профилях показателя преломления, индуцированных частично некогерентным излучением [91,92], а также в массивах волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами [40,41]. В дефокусирующей среде были продемонстрированы различные типы солитонов из ограниченных запрещенных зон [47,49,50, 93,94]. Двумерные решетки могут подавлять азимутальные неустойчивости оптических вихрей, которые в однородной среде, как правило, распадаются на несколько фундаментальных солитонов, разлетающихся по касательной к исходному кольцевому распределению интенсивности [95]. При наличии решетки показателя преломления такие солитоны приобретают существенную азимутальную модуляцию, но становятся устойчивыми, если решетка достаточно глубока [89,96-98].

Необходимо подчеркнуть, что одним из наиболее существенных отличий между одномерными и двумерными решеточными солитонами в кубичной нелинейной среде является тот факт, что в отсутствие решетки в двумерном случае все стационарные решения (солитоны Таунса) неустойчивы и при наличии возмущений расплываются или коллапсируют, в то время как в одномерном кубичном уравнении Шредингера устойчивые солитоны существуют и в отсутствие решетки. По этой причине, области устойчивости солитонов в одномерных и двумерных решетках также существенно различаются. Еще одним принципиальным отличием является то, что одномерные решеточные солитоны могут возбуждаться даже маломощными широкими пучками, но двумерные солитоны всегда требуют некоей пороговой мощности для их возбуждения. В четвертом параграфе данной главы описываются результаты анализа устойчивости двумерных решеточных солитонов, впервые проведенного автором данной диссертации, а также предсказывается существование сложных устойчивых двумерных комплексов, которые могут быть скомпонованы из противофазных фундаментальных солитонов [99]. Дипольные солитоны такого типа обсуждались также в [100], в то время как экспериментальная демонстрация дипольных солитонов и даже более сложных структур в виде колец солитонов описана в более поздних работах [101-103]. Интересно отметить, что зачастую неустойчивость солитонов в кубичной нелинейной среде может быть подавлена более низкоразмерной решеткой показателя преломления. Так, квазиодномерные решетки также поддерживают устойчивые двумерные солитоны [104,105].

В то время как техника оптической индукции позволяет генерировать решетки, которые являются либо чисто одномерными, либо чисто двумерными, техника записи волноводов с помощью фемтосекундных лазерных импульсов позволяет создавать гораздо более сложные профили показателя преломления. Записывая массивы волноводов с заметно большим числом столбцов, чем строк, можно реализовать постепенный

переход от эффективно одномерной решетки, представленной одной строкой волноводов, где свет может дифрагировать только в одном направлении вдоль массива, к полностью двумерной решетке, содержащей большое число строк. При этом формально промежуточные структуры, содержащие небольшое количество рядов (строк), могут рассматриваться как переходные между одномерными и двумерными [106]. Экспериментальному исследованию свойств солитонов в таких специфических решетках с контролируемой размерностью, проведенному при участии автора в работе [106], посвящен пятый параграф данной главы. В частности установлена связь между размерностью решетки и порогом по мощности для формирования солитона.

Поскольку особенности формирования солитонов и распространения света в решетке в значительной степени определяются ее структурой, изготовление решеток с нетривиальными профилями показателя преломления в пределах одного периода представляется весьма интересным. Важным примером такой структуры, которая может быть изготовлена с помощью прямой записи волноводов, является бинарная решетка. Такая решетка характеризуется наличием на одном периоде двух типов волноводов с разной глубиной или шириной, которые могут периодически чередоваться. Из-за наличия двух типов волноводов бинарная решетка обладает существенно более сложным блоховским спектром, чем обыкновенная решетка. Более того, динамика распространения света в такой решетке зависит от того, в какой именно волновод запущен пучок. Ранее солитоны в бинарных решетках исследовались только в одномерном случае [107-109]. Шестой параграф этой главы посвящен проведенному автором диссертации анализу свойств и экспериментальному наблюдению солитонов в двумерных бинарных решетках, записанных фемтосекундными импульсами [110].

Особенно трудной с экспериментальной и теоретической точек зрения является задача формирования трехмерных пространственно-временных решеточных солитонов или оптических пульс. Оптическая пуля формируется, когда нелинейность одновременно и устойчиво компенсирует как дифракционное, так и дисперсионное расплывание волнового пакета. Понятие оптических пульс было впервые введено в [111] при изучении коллапса пространственно-временных солитонов в однородной кубичной среде, однако в течение практически двадцати лет с момента опубликования работы [111] в генерации таких трехмерных объектов не было достигнуто прогресса. Одной из причин этой задержки явилась сильная "суперкритическая" неустойчивость пульс в наиболее хорошо изученных кубичных средах, а второй причиной послужило отсутствие естественных материалов с достаточно сильной аномальной дисперсией групповых скоростей. В работах [112,113] было предсказано, что неустойчивость оптических пульс может быть подавлена в дискретных массивах волноводов. Это предсказание было недавно обобщено автором данной диссертации на случай реалистичной модели с синусоидальной и бессе-

левой решетками показателя преломления [114,115]. Весьма существенным оказалось то обстоятельство, что поперечная модуляция показателя преломления существенно замедляет дифракцию волнового пакета, а одинаковые темпы дифракционного и дисперсионного расплывания могут быть достигнуты уже для импульсов с длительностью в несколько десятков фемтосекунд, легко реализуемых на практике. Данное предсказание позволило реализовать первый эксперимент по наблюдению световых пульс в массивах волноводов, проведенный при участии автора [35]. Описанию вышеупомянутого метода стабилизации оптических пульс и их экспериментального наблюдения посвящен седьмой параграф этой главы.

Таким образом, в основу данной главы вошли результаты оригинальных исследований одно-, двух- и трехмерных решеточных солитонов, опубликованные в работах автора [35,53,71,76,77,83,85,99,105,106,110,114,115].

### §1.1. Переключение пространственных солитонов в одномерных решетках показателя преломления

В данном параграфе рассматривается переключение пространственных солитонов в гармонических решетках показателя преломления, которые, в отличие от дискретных массивов волноводов, характеризуются достаточно сильной связью между соседними каналами (максимумами показателя преломления) решетки, зависящей от поперечной глубины модуляции показателя преломления [71]. Предполагается, что свет распространяется в планарном волноводе, так что дифракционное расплывание по оси  $y$  отсутствует, в то время как пучок может дифрагировать вдоль оси  $x$ , в направлении которой показатель преломления периодически модулирован. В этом случае эволюция электрического поля волны, поляризованной в направлении оси  $y$ , при ее распространении вдоль оси  $z$  в среде с фокусирующей кубичной нелинейностью описывается уравнением Шредингера, которое может быть легко получено из системы уравнений Максвелла в парааксиальном приближении (см. вывод в книге [11]):

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - q|q|^2 - pR(\eta)q. \quad (1.1)$$

Здесь  $q(\eta, \xi) = (L_{\text{dif}} / L_{\text{nl}})^{1/2} A(\eta, \xi) I_0^{-1/2}$  - безразмерная амплитуда светового поля,  $A(\eta, \xi)$  - медленно меняющаяся в направлении распространения огибающая поля,  $I_0$  - характерная входная интенсивность волны, поперечная координата  $\eta = x / x_0$  нормирована на характерный поперечный масштаб  $x_0$ , продольная координата  $\xi = z / L_{\text{dif}}$  нормирована на дифракционную длину  $L_{\text{dif}} = kx_0^2$ , где  $k = 2\pi n_0 / \lambda$  - волновое число в среде,  $n_0$  - невозму-



щенный показатель преломления среды,  $\lambda$  - длина волны,  $L_{nl} = 2n_0 / kn_2 I_0$  - длина нелинейного самовоздействия в среде, зависящая от интенсивности волны и коэффициента нелинейности  $n_2$  материала,  $p = L_{dif} / L_{ref}$  - волноводный параметр, где  $L_{ref} = n_0 / k\delta n$  - рефракционная длина и  $\delta n \ll n_0$  - глубина модуляции показателя преломления. Функция  $R(\eta)$  в уравнении (1.1), удовлетворяющая условию  $\max |R(\eta)| = 1$ , описывает распределение показателя преломления в среде. В данном параграфе рассматривается профиль  $R(\eta) = \cos(\Omega\eta)$  [напомним, что полный показатель преломления в этом случае имеет вид  $n_0 + \delta n \cos(\Omega\eta)$ ] с безразмерной пространственной частотой  $\Omega$ . При выводе уравнения (1.1) предполагается, что нелинейная добавка к показателю преломления также является малой по сравнению с невозмущенным показателем преломления, т.е. выполняется условие  $n_2 I_0 \sim \delta n \ll n_0$ . Первый член в правой части уравнения (1.1) описывает дифракцию пучка, второй - его нелинейное самовоздействие (фазовую самомодуляцию), а третий - рефракционную модуляцию фазы за счет неоднородного распределения показателя преломления в поперечной плоскости.

Различные режимы распространения светового пучка в такой решетке могут быть классифицированы с помощью так называемого метода эффективных частиц, который предполагает, что модуляция показателя преломления влияет на траекторию распространения солитона, вызывает изменения его пиковой амплитуды, но не меняет его функциональный профиль [116]. Этот подход, обоснованный в случае достаточно мелких решеток показателя преломления, базируется на уравнениях

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \eta_{\text{int}} &= p U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dR/d\eta |q|^2 d\eta, \\ \frac{d^2}{d\xi^2} w_{\text{int}} &= 2U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [|\partial q / \partial \eta|^2 + p |q|^2 (\eta - \eta_{\text{int}}) dR/d\eta - |q|^4 / 2] d\eta + \\ &+ 2U^{-2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} q^* \partial q / \partial \eta d\eta \right)^2 \end{aligned} \quad (1.2)$$

для положения интегрального центра солитона  $\eta_{\text{int}}(\xi) = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 \eta d\eta$  и его ширины  $w_{\text{int}}(\xi) = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 (\eta - \eta_{\text{int}})^2 d\eta$ , следующих из уравнения (1.1). Здесь введена мощность солитона  $U = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta$ , которая является одним из интегралов уравнения (1.1) и сохраняется в процессе распространения. Данный подход требует подстановки профиля солитона  $q(\eta, \xi)$  в правые части уравнений (1.2) и предположения о его автомодельности в процессе распространения, что позволяет произвести интегрирование по координате  $\eta$ . В частности, можно положить  $q \sim q_0 \operatorname{sech}[\chi(\eta - \eta_{\text{int}})] \exp[i\alpha(\eta - \eta_{\text{int}})]$  (здесь мы опустили члены, описывающие набег фазы при распространении, поскольку они не влияют на результат интегрирования), где  $q_0$  - амплитуда пучка,  $\chi$  - его форм-фактор или обратная ширина,  $\alpha$  - исходный угол распространения. Такой выбор профиля солитона обос-

нован, поскольку при  $p \rightarrow 0$  мы получаем точное солитонное решение для однородной среды при  $q_0 = \chi$ . Подстановка профиля  $q(\eta, \xi)$  и профиля решетки  $R(\eta)$  в уравнение (1.2) дает

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\xi^2} \eta_{\text{int}} &= -p\Omega \frac{(\pi\Omega/2\chi)}{\sinh(\pi\Omega/2\chi)} \sin(\Omega\eta_{\text{int}}), \\ \frac{d^2}{d\xi^2} w_{\text{int}} &= \frac{2}{3}(\chi^2 - q_0^2) - 2p \frac{(\pi\Omega/2\chi)}{\sinh(\pi\Omega/2\chi)} \left[ \frac{(\pi\Omega/2\chi)}{\tanh(\pi\Omega/2\chi)} - 1 \right] \cos(\Omega\eta_{\text{int}}). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Данные уравнения должны быть дополнены начальными условиями - например, для пучка, запущенного в точке  $\eta = 0$  с исходным фазовым наклоном (углом)  $\alpha$ , можно записать  $\eta_{\text{int}}|_{\xi=0} = 0$  и  $d\eta_{\text{int}}/d\xi|_{\xi=0} = \alpha$ . Уравнения (1.3) показывают, что солитон может рассматриваться как эффективная частица, движущаяся в периодическом потенциале, в то время как положение частицы отражает положение интегрального центра солитона. Увеличение исходного угла  $\alpha$  фактически эквивалентно увеличению начальной кинетической энергии эффективной частицы. При малых кинетических энергиях частица остается в исходной яме периодического потенциала, что соответствует осцилляциям центра пучка около точки запуска  $\eta = 0$  внутри центрального канала решетки. Увеличение  $\alpha$ , т.е. исходной кинетической энергии частицы, до значения, превышающего глубину потенциальной ямы, приводит к тому, что частица покидает центральную яму и начинает двигаться вдоль структуры (т.е. солитон начинает перемещаться вдоль решетки показателя преломления). Критическое значение исходного угла, при котором это происходит равно  $\alpha_{\text{cr}} = 2[p(\pi\Omega/2\chi) \sinh^{-1}(\pi\Omega/2\chi)]^{1/2}$ . Траектории центра солитона описываются формулами  $\eta_{\text{int}} = (2/\Omega) \arcsin[m \operatorname{sn}(\Omega\alpha_{\text{cr}}\xi/2, m)]$  с  $m = \alpha/\alpha_{\text{cr}}$  для случая  $\alpha < \alpha_{\text{cr}}$  и  $\eta_{\text{int}} = (2/\Omega) \arcsin[\operatorname{sn}(\Omega\alpha\xi/2, m)]$  с  $m = \alpha_{\text{cr}}/\alpha$  для случая  $\alpha > \alpha_{\text{cr}}$ . Второе из уравнений (1.3) позволяет при этом получить амплитуду солитона  $q_0$ , соответствующую неизменной интегральной ширине. Интересно, что как для очень узких пучков с  $\chi/\Omega \gg 1$ , так и для очень широких пучков с  $\chi/\Omega \ll 1$  второе из уравнений (1.3) предсказывает, что ширина солитона остается практически постоянной для любых значений  $\eta_{\text{int}}$  если  $q_0 = \chi$ .

Результаты анализа распространения солитона с помощью метода эффективных частиц были подтверждены прямым интегрированием уравнения (1.1). Начальные условия выбирались в виде  $q(\eta, \xi = 0) = \chi \operatorname{sech}(\chi\eta) \exp(i\alpha\eta)$ . Рисунок 1.1(а) показывает, как пучок с шириной, сравнимой с периодом решетки, движется вдоль нее, практически не меняя свой профиль, когда исходный угол  $\alpha$  существенно превышает критический угол  $\alpha_{\text{cr}}$ . В том случае, если исходный угол меньше критического, солитон совершает осцилляции внутри того канала решетки, где он был запущен, как показано на рис. 1.1(б). Зависимости критического угла и амплитуды солитона, соответствующей стационарному

распространению, от обратной частоты решетки  $\Omega^{-1}$ , полученные на основе уравнений (1.3), показаны на рис. 1.2(a) и 1.2(b). Критический угол быстро растет с увеличением  $\Omega^{-1}$ , но затем насыщается. Чем уже исходный солитон, тем выше критический угол и тем меньше отклонение амплитуды солитона  $q_0$  от величины  $\chi$ . При наличии решетки амплитуда солитона всегда меньше, чем амплитуда в однородной среде. При этом  $q_0 \rightarrow \chi$  когда  $p \rightarrow 0$ .

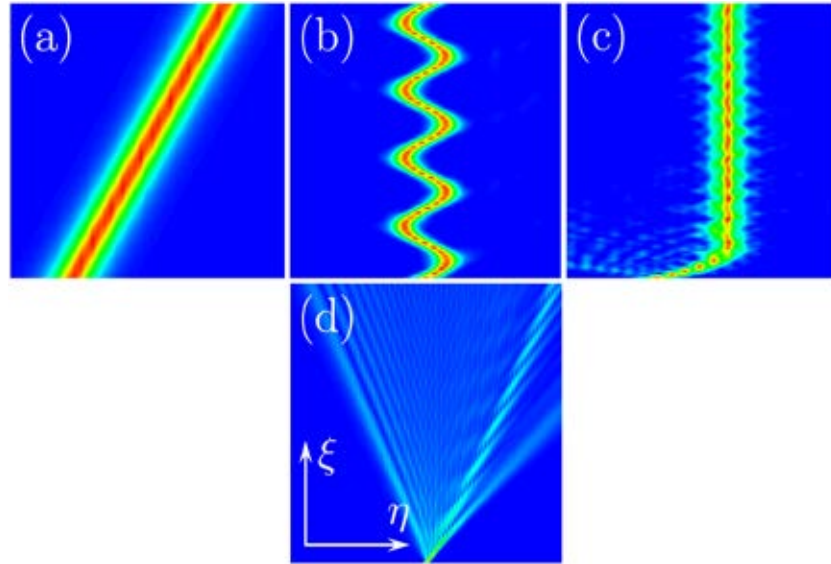


Рис. 1.1. Различные режимы распространения солитонов в периодических решетках. (a) Дрейф вдоль решетки практически без потерь на излучение при  $\Omega = 8$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha = 0.05$ , (b) периодические осцилляции в центральном канале при  $\Omega = 0.5$ ,  $p = 0.25$ ,  $\alpha = 0.7$ , (c) захват солитона в пятом канале при  $\Omega = 4$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha = 0.8$ , (d) распад солитона при  $\Omega = 2$ ,  $p = 0.25$ ,  $\alpha = 1.13$ .

Численное интегрирование показывает, что солитоны, движущиеся вдоль решетки, всегда теряют мощность на излучение (отметим, что этот эффект не учитывался в методе эффективных частиц). Потери мощности при движении солитона связаны с перекрытием части пространственного спектра движущегося солитона со спектром направляемых мод, что приводит к передаче части мощности этим модам. Последнее может привести к захвату солитона в одном из каналов решетки, где он и продолжает распространяться, как показано на рис. 1.1(c). На языке метода эффективных частиц потери мощности на излучение эквивалентны уменьшению кинетической энергии частицы, которая в один момент может стать меньше глубины потенциальной ямы, что приводит к захвату частицы. Нужно отметить, что дистанция распространения, на которой происходит захват, может быть достаточно мала - всего порядка десятка дифракционных длин. Оказалось, что увеличение исходного угла (кинетической энергии) приводит к

увеличению номера канала, в котором захватывается исходный солитон. Этот эффект позволяет реализовать контролируемое переключение света в периодических решетках показателя преломления. Зависимость номера выходного канала от  $\alpha$  показана на рис. 1.2(c). Интервалы углов, соответствующие захвату в канале с номером  $n$ , уменьшаются с ростом  $n$ , причем, чем меньше глубина решетки, тем круче зависимость  $n(\alpha)$ . Необходимо отметить, что переключение может быть реализовано в ограниченном интервале углов  $0 < \alpha < \alpha_b$ , поскольку при  $\alpha \approx \alpha_b = \Omega/2$  брэгговское отражение от периодической структуры ведет к полному разрушению солитона, как показано на рис. 1.1(d). Быстрое увеличение потерь на излучение с ростом периода решетки всегда проявляется в уменьшении номера выходного канала. Заметим, что в высокочастотной решетке потери на излучение минимальны и солитон практически не чувствует периодической модуляции показателя преломления. В то же время, номер выходного канала может варьироваться в широких пределах при изменении глубины решетки, как показано на рис. 1.2(d).

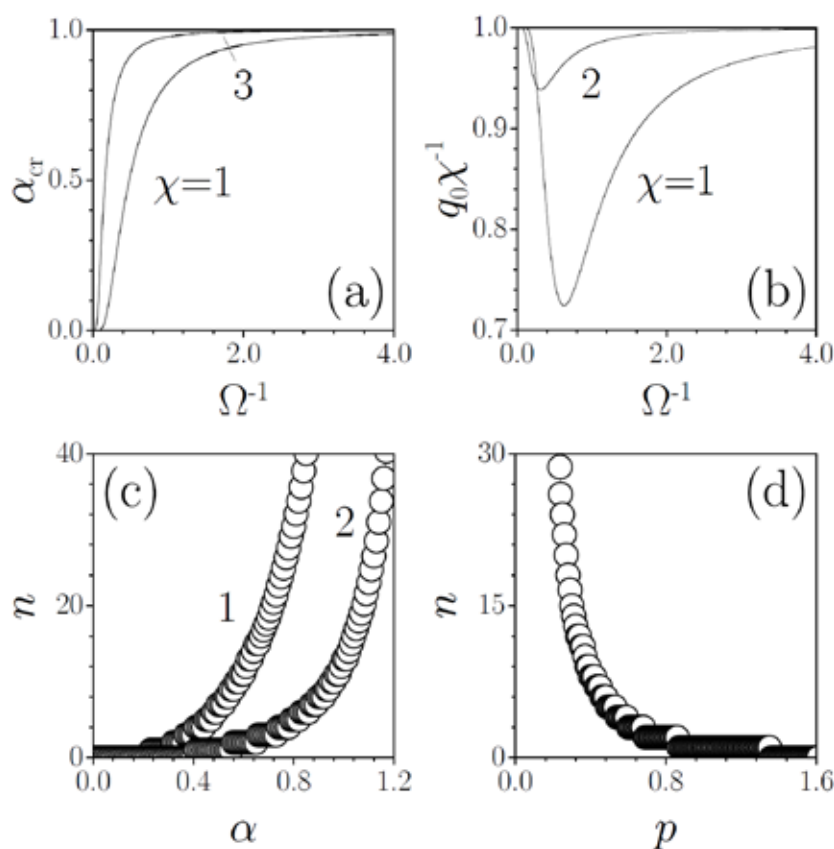


Рис. 1.2. Критический угол (a) и амплитуда стационарной волны (b) как функции обратной частоты решетки при  $p=0.25$ . (c) Зависимость номера выходного канала от исходного угла для  $p=0.45$  (кривая 1) и  $p=1$  (кривая 2) при  $\Omega=4$ . (d) Зависимость номера выходного канала от глубины решетки при  $\alpha=0.5$ ,  $\Omega=4$ .

Таким образом, периодические решетки показателя преломления позволяют контролировать динамику распространения нелинейных световых пучков и осуществлять переключение, контролируемое не только исходным углом распространения, но и глубиной самой решетки. Подобное переключение было реализовано экспериментально в массивах волноводов в жидких кристаллах, где напряжение, приложенное к системе электродов на поверхности кристалла, позволяет варьировать глубину решетки и распределение мощности между выходными каналами [117].

## §1.2. Стимулированный распад связанных солитонных состояний в одномерных решетках показателя преломления

Как упоминалось ранее, уравнение Шредингера, описывающее распространение излучения в одномерной кубичной однородной среде, допускает помимо обычного односолитонного решения также решения, описывающие связанные солитонные состояния. Существование таких решений напрямую связано с интегрируемостью соответствующего уравнения методами обратной задачи рассеяния. Простейшее связанное состояние komponуется из нескольких противофазных солитонов (например, трех) с различными форм-факторами  $\chi = 1, 3, 5$ . В однородной среде связанное состояние осциллирует из-за различия постоянных распространения, периодически воспроизводя свой исходный профиль. Из-за нулевой энергии связи между солитонами в связанном состоянии оно распадается на составляющие при наличии возмущений, и в этом параграфе показано, как этот процесс можно контролировать с помощью мелкой решетки показателя преломления [76,77].

Для описания распространения связанных состояний при наличии периодической модуляции показателя преломления используется уравнение (1.1). Частота решетки полагается равной  $\Omega = 4$ , в то время как глубину решетки мы будем изменять от малых значений  $p \sim 0.05$ , когда она может рассматриваться как малое возмущение, вплоть до достаточно больших значений  $p \sim 1$ , когда глубина решетки становится сравнима с нелинейной добавкой к показателю преломления. Основной целью является извлечение и контроль динамики односолитонных компонент, содержащихся в исходном  $N$ -солитонном связанном состоянии  $q(\eta, \xi = 0) = N \operatorname{sech}(\eta) \exp(i\alpha_{\text{in}}\eta)$ , где  $N$  - целое число,  $\alpha_{\text{in}}$  - исходный фазовый наклон или угол распространения. Для простоты рассмотрим связанные состояния с  $N = 2, 3$ , содержащие 2 или 3 односолитонные компоненты. Амплитуды  $\chi_k$  и углы распространения  $\alpha_k$  односолитонных компонент в связанном состоянии связаны с собственными значениями Захарова-Шабата  $\lambda_k$  (амплитудами рассеяния в обратной задаче) соотношениями:  $\chi_k = 2 \operatorname{Im} \lambda_k$ ,  $\alpha_k = 2 \operatorname{Re} \lambda_k$  [18,72]. Так, для связанного состояния  $q(\eta, \xi = 0) = N \operatorname{sech}(\eta) \exp(i\alpha_{\text{in}}\eta)$  амплитуда и угол распространения со-

литона с номером  $k$  равны  $\chi_k = 2k - 1$ ,  $\alpha_k = \alpha_{\text{in}}$  ( $k = 1, \dots, N$ ). Решетка показателя преломления приводит к расщеплению на односолитонные компоненты, причем процесс контролируется не только исходным углом распространения связанного состояния, но и глубиной решетки.

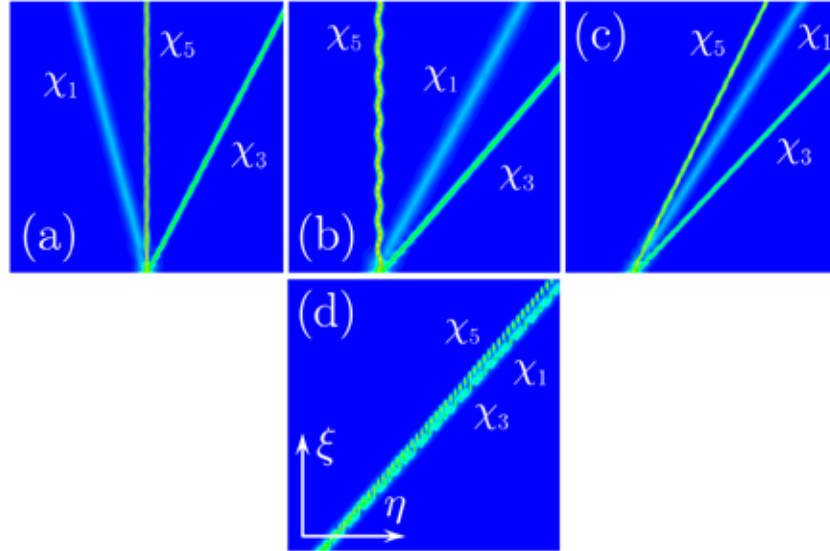


Рис. 1.3. Распад трехсолитонного связанного состояния при  $\alpha_{\text{in}} = 0.1$  (a),  $0.3$  (b),  $0.5$  (c),  $1.4$  (d). Глубина решетки  $p = 0.05$ . Символы  $\chi_k$  обозначают солитоны с соответствующими амплитудами.

На рис. 1.3 проиллюстрированы режимы распада связанного состояния трех солитонов в решетке для различных исходных углов  $\alpha_{\text{in}}$ . Видно, что для небольших углов распространения только солитон, обладающий наибольшей амплитудой, захватывается во входном канале решетки, в то время как два других солитона с меньшими амплитудами начинают двигаться вдоль решетки под практически неизменными углами [рис. 1.3(a) и 1.3(b)]. Заметим, что из-за малой глубины решетки потери на излучение достаточно малы и приводят лишь к очень медленному уменьшению амплитуды движущихся компонент. Захват одного или нескольких солитонов в исходном канале решетки может произойти в том случае, если исходный угол распространения связанного состояния меньше критического угла  $\alpha_{\text{cr}} = 2[p(\pi\Omega/2\chi) \sinh^{-1}(\pi\Omega/2\chi)]^{1/2}$ , который различается для компонент с различными амплитудами  $\chi$  и растет с увеличением  $\chi$ . Это объясняет, почему при увеличении угла  $\alpha_{\text{in}}$  сначала происходит отщепление компонент с меньшими амплитудами (меньшими критическими углами). В мелких решетках фактические амплитуды  $\chi_k$  солитонов, возникающих сразу после расщепления связанного состояния, практически совпадают со значениями  $\chi_k = 2k - 1$ . С физической точки зрения распад связанного состояния происходит из-за различных фазовых набегов, приобретаемых

односолитонными компонентами при их взаимодействии с решеткой, и из-за нелинейного взаимодействия между компонентами. Например, на ранних стадиях распространения ( $\xi \sim 1$ ) трехсолитонное состояние испытывает сильное сжатие, за которым следует формирование двугорбого распределения интенсивности. Асимметричное туннелирование мощности в соседние каналы решетки приводит к появлению асимметрии этого двугорбого распределения, так что последующего восстановления исходного профиля не происходит. При этом сложное нелинейное взаимодействие между компонентами может привести даже к их отгалкиванию, сопровождающемуся отщеплением солитонов иногда даже в направлении, обратном исходному фазовому градиенту [рис. 1.3(a)].

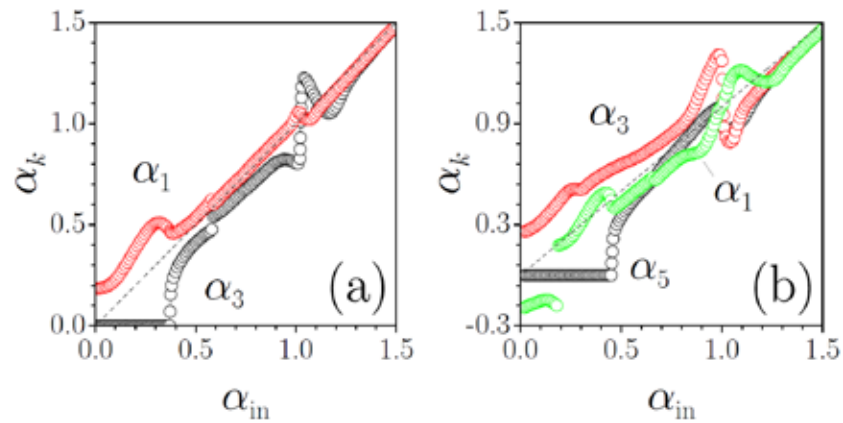


Рис. 1.4. Углы распространения солитонов, возникающих при распаде связанного состояния двух (a) и трех (b) солитонов как функции начального угла  $\alpha_{in}$  при  $p = 0.05$ . Пунктирная линия соответствует  $\alpha_k = \alpha_{in}$ .

Как видно из рис. 1.3, углы распространения односолитонных компонент могут контролироваться с помощью изменения исходного угла  $\alpha_{in}$ . Рисунок 1.4 иллюстрирует зависимости  $\alpha_k(\alpha_{in})$  для двух- и трехсолитонных связанных состояний. Критический угол, при котором солитон с максимальной амплитудой покидает центральный канал, близок к 0.4 для  $N = 2$  и 0.45 для  $N = 3$ . При больших исходных углах односолитонные компоненты движутся под практически одинаковыми углами, близкими к  $\alpha_{in}$ , в то время как эффективное разделение односолитонных компонент достигается при небольших  $\alpha_{in}$ . Заметим, что динамика распада практически не меняется даже при наличии малого шума, наложенного на исходное связанное состояние, что говорит о регулярности и контролируемости процесса. Более того, глубина решетки, которая может легко варьироваться в современных экспериментах, также является важным контрольным параметром. Ее влияние на динамику распада проиллюстрировано на рис. 1.5(a) и 1.5(b). Хотя наращивание глубины решетки и не приводит к качественному изменению динамики распада (например, к смене знака углов распространения односолитонных

компонент), оно ведет к заметному увеличению углов распространения. Зависимости  $\alpha_k(p)$  для трехсолитонного связанного состояния приведены на рис. 1.5(с). Заслуживает упоминания тот факт, что траектории распространения солитонов остаются линейными даже для глубин решетки  $p \sim 0.3$ .

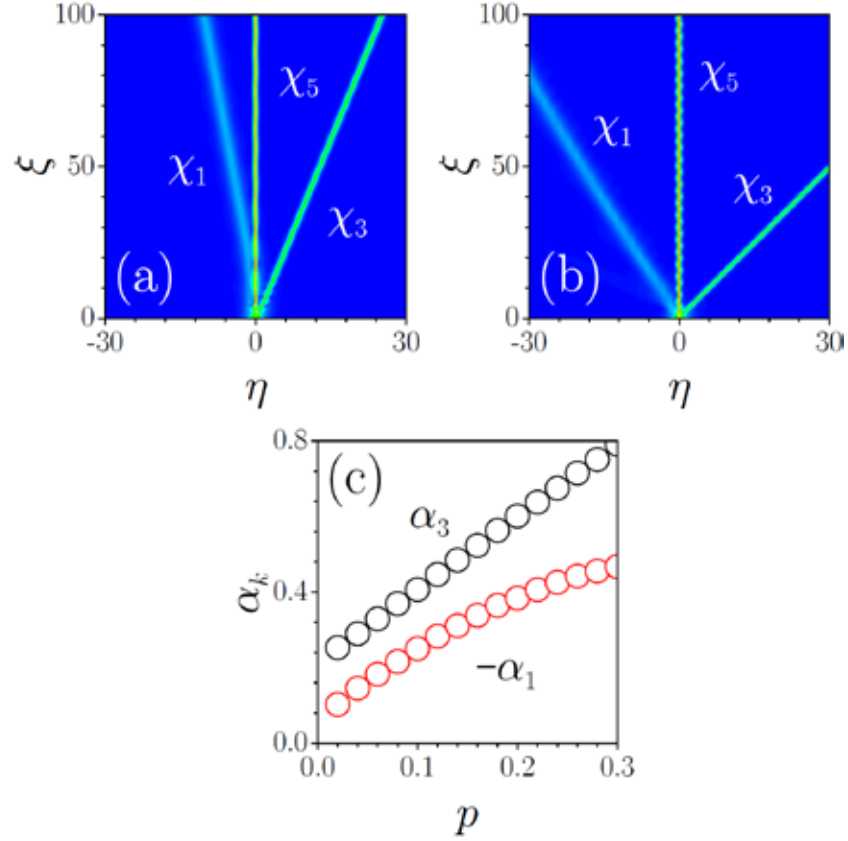


Рис. 1.5. Динамика распада трехсолитонного связанного состояния в решетке с  $p = 0.02$  (a) и  $p = 0.2$  (b) при  $\alpha_{\text{in}} = 0.1$ . (c) Углы распространения солитонов, возникающих при распаде трехсолитонного состояния в зависимости от глубины решетки при  $\alpha_{\text{in}} = 0.1$ . Солитон с амплитудой  $\chi_5$  при этом всегда остается в исходном канале.

Как следует из предыдущего обсуждения, периодическая решетка показателя преломления с одной стороны стимулирует распад связанных состояний на составляющие, но, с другой стороны, она же создает периодическую систему потенциальных барьеров для движущихся солитонов, что прямо указывает на возможность своеобразной масс-спектрометрии связанных состояний. В достаточно глубоких решетках становится возможным захват отдельных солитонов, образовавшихся после распада связанного состояния, в разных каналах. В этом случае распространение солитонов до момента их захвата сопровождается достаточно сильным излучением. В зависимости от исходного угла выходные солитоны могут быть захвачены в самых различных каналах решетки. По-



сколькo решетка уже не может рассматриваться как малое возмущение, амплитуды выходных солитонов существенно отличаются от амплитуд солитонов  $\chi_k = 2k - 1$ , скрытых в исходном связанном состоянии. Увеличение глубины решетки приводит к заметному росту критического угла, а также к росту потерь на излучение. В определенный момент, при росте  $p$ , модель начинает настолько отличаться от интегрируемого уравнения Шредингера в однородной среде, что при распаде связанного состояния становится возможным рождение более чем  $N$  солитонов, а также их уничтожение при распространении.

Таким образом, в данном параграфе показано, что, варьируя глубину решетки и угол запуска для связанных солитонных состояний в решетке, можно сформировать ансамбль разлетающихся солитонов, имеющих различные пиковые амплитуды и полностью контролируемые углы распространения, с возможностью их последующего захвата в разных каналах решетки.

### §1.3. Формирование и устойчивость одномерных солитонов в периодических решетках

В предыдущем параграфе обсуждалась в основном динамика распространения пучков, запущенных в решетку под некоторым углом, причем в некоторых случаях была проиллюстрирована возможность их захвата в одном из каналов решетки. Можно ожидать, что при определенных условиях пучок, запущенный в данный канал решетки параллельно оси  $\xi$ , будет оставаться в этом канале и в процессе распространения может сформировать стационарное солитонное состояние, амплитуда которого не будет меняться. Исследованию свойств таких солитонов в одномерных решетках с насыщающейся нелинейностью и посвящен данный параграф. При этом основное внимание будет уделено устойчивости и условиям формирования сложных многогорбых солитонных структур, которые не существуют в однородной локальной нелинейной среде [83,85].

Для описания распространения излучения далее будет использоваться версия уравнения (1.1), обобщенная на случай среды с насыщением нелинейного отклика:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\sigma q |q|^2}{1 + S |q|^2} - pR(\eta)q. \quad (1.4)$$

Здесь нормировки координат и амплитуды поля  $\eta, \xi, q$  совпадают с нормировками, введенными для уравнения (1.1), коэффициент  $\sigma = -1 (+1)$  соответствует фокусирующей

(дефокусирующей) нелинейности, а параметр насыщения  $S$  определяется максимальной добавкой к показателю преломления, возможной в такой среде. Рассматривается периодическая решетка показателя преломления  $R = \cos(\Omega\eta)$ . Необходимо отметить, что значительное насыщение нелинейности характерно для фоторефрактивных кристаллов, где оно зависит от так называемой темновой проводимости, уровень которой можно эффективно менять за счет некогерентной внешней подсветки кристалла [30,31]. Периодическая модуляция показателя преломления в таких кристаллах может быть наведена оптически [47]. С другой стороны, модель (1.4) описывает стационарный отклик фотовольтаических кристаллов, для которых характерна дефокусирующая нелинейность и где решетки показателя преломления могут быть созданы технологически с помощью внедрения различных легирующих добавок, таких как Ti, Fe, Cu, в приповерхностный слой образца [81].

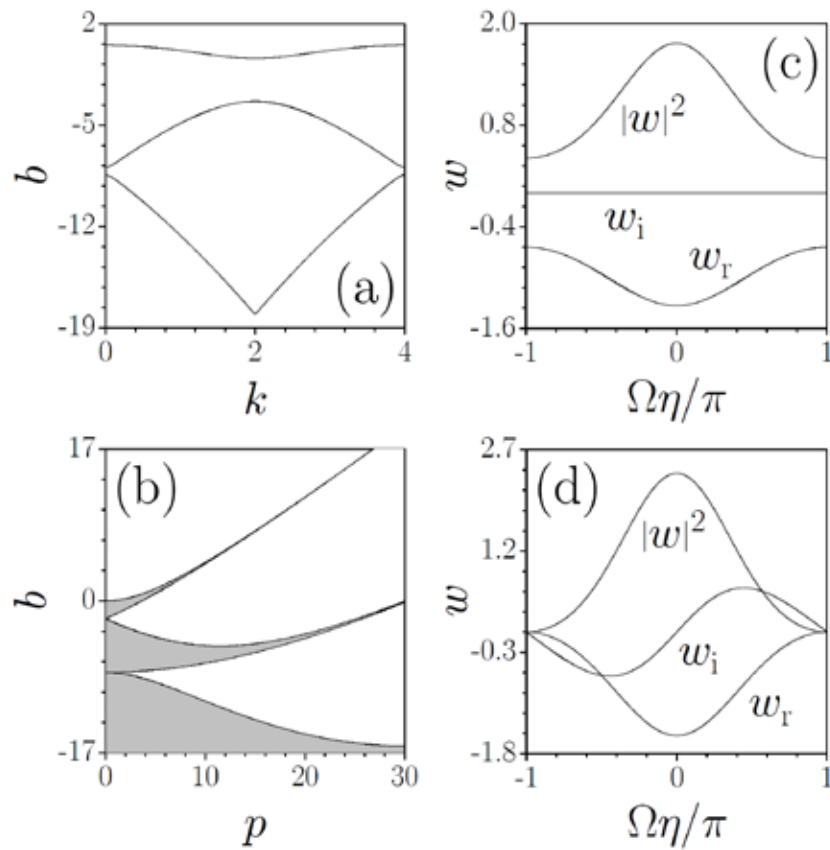


Рис. 1.6. (а) Зависимости постоянных распространения блоховских волн из разных зон от поперечного волнового числа  $k$  при  $\Omega = 4$ ,  $p = 3$ . (б) Блоховский спектр решетки при  $\Omega = 4$ . Разрешенные зоны показаны серым цветом, в то время как запрещенные зоны показаны белыми. Профили блоховских волн из первой зоны при  $k = 0$  (с) и  $k = \Omega/2$  (д),  $\Omega = 4$ ,  $p = 3$ .

Свойства солитонов в периодических решетках тесно связаны со структурой блоховского спектра решетки. Так, теория Блоха утверждает, что в линейном случае при  $\sigma = 0$  решения уравнения (1.4) имеют вид  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi + ik\eta)$ , где  $b$  - постоянная распространения,  $k$  - блоховское волновое число, а  $w(\eta) = w(\eta + 2\pi/\Omega)$  - комплексная периодическая функция [типичные профили  $w(\eta)$  приведены на рис. 1.6(c) и 1.6(d)]. Подстановка поля в таком виде в уравнение (1.4) приводит к следующей задаче на собственные значения  $b$  и собственные функции  $w$  [53,54]:

$$bw = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 w}{d\eta^2} + 2ik \frac{dw}{d\eta} - k^2 w \right) + pRw \quad (1.5)$$

Решение этой задачи показывает, что зависимости  $b(k)$  периодические, с периодом равным частоте решетки  $\Omega$  [рис. 1.6(a)]. Более того, при фиксированном  $k$  существует бесконечное число собственных значений  $b$ , которые принадлежат к так называемым разрешенным зонам, где возможно существование периодических решений в виде блоховских волн. Эти разрешенные зоны разделены запрещенными зонами, где периодические решения не существуют [рис. 1.6(b)]. Нелинейность среды приводит к тому, что полный профиль показателя преломления, включающий нелинейную добавку, создаваемую локализованным пучком, уже не является периодическим, а локально деформирован. При этом солитоны могут рассматриваться как дефектные моды такого локально деформированного потенциала, постоянные распространения которых ответвляются от соответствующих границ разрешенных зон в блоховском спектре и находятся в запрещенной части линейного спектра. При этом при уменьшении пиковой амплитуды такие солитоны должны постепенно переходить в делокализованные блоховские моды.

Солитонные решения уравнения (1.4) ищутся в виде  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$ , где  $w(\eta)$  - действительная функция, описывающая профиль солитона,  $b$  - постоянная распространения. Из такой записи следует, что распределение модуля поля в решеточном солитоне остается неизменным в процессе распространения вдоль оси  $\xi$  и только фазовый набег, определяемый постоянной распространения  $b$ , линейно растет с пройденным расстоянием. Поскольку уравнение (1.4) инвариантно по отношению к масштабным преобразованиям вида  $q(\eta, \xi, S, p) \rightarrow \chi q(\chi\eta, \chi^2\xi, \chi^{-2}S, \chi^2p)$ , где  $\chi$  - произвольный масштабный коэффициент, то поперечный масштаб можно выбрать так, что  $\Omega = 4$  и варьировать лишь параметры  $b$ ,  $S$ , и  $p$ . Здесь и далее в диссертации стационарные солитонные решения находятся с помощью метода релаксации. При линейном анализе устойчивости стационарных решений возмущенный профиль солитона может быть записан в виде  $q(\eta, \xi) = [w(\eta) + u(\eta) \exp(\delta\xi) + iv(\eta) \exp(\delta\xi)] \exp(ib\xi)$ , где  $u, v \ll w$  - действительная и мнимая

части возмущения,  $\delta = \delta_r + i\delta_i$  - инкремент нарастания возмущения (неустойчивость наблюдается, если действительная часть инкремента  $\delta_r > 0$ ). Подстановка возмущенного поля в таком виде в уравнение (1.4) и его линеаризация приводит к следующей линейной задаче на собственные функции  $u, v$  и собственные значения  $\delta$ :

$$\begin{aligned}\delta v &= +\frac{1}{2}\frac{d^2u}{d\eta^2} - bu - \frac{3w^2 + Sw^4}{(1+Sw^2)^2}\sigma u + pRu, \\ \delta u &= -\frac{1}{2}\frac{d^2v}{d\eta^2} + bv + \frac{w^2 + Sw^4}{(1+Sw^2)^2}\sigma v - pRv,\end{aligned}\tag{1.6}$$

решение которой позволяет построить зависимости  $\delta(b)$  и определить области устойчивости и неустойчивости стационарного решения.

Одномерная решетка с фокусирующей нелинейностью поддерживает два простейших типа солитона с постоянными распространения, принадлежащими к полубесконечной запрещенной зоне - четный и нечетный (рис. 1.7). Максимум нечетного солитона совпадает с локальным максимумом показателя преломления  $R(\eta)$  [рис. 1.7(c)], а четный солитон центрирован между двумя максимумами решетки [рис. 1.7(d)]. Особенность нелинейной системы, рассматриваемой здесь, заключается в том, что каждому значению постоянной распространения соответствует свой уникальный профиль солитона с определенной мощностью (в отличие от линейных направляемых мод, постоянные распространения которых определяются только профилем линейного показателя преломления в волноводе). Зависимости мощности от постоянной распространения для четного  $U_e$  и нечетного  $U_o$  солитонов очень близки [рис. 1.7(a)]. Такие солитоны могут быть найдены в ограниченном диапазоне постоянных распространения  $b_{low} \leq b \leq b_{upp}$ . В то время как нижняя отсечка по постоянной распространения  $b_{low}$  совпадает с нижней границей полубесконечной запрещенной зоны в спектре решетки [рис. 1.6(b)], наличие верхней отсечки  $b_{upp}$  обусловлено насыщением нелинейности, и она равна  $b_{upp} = b_{low} + 1/S$ , т.е. область существования солитонов в фокусирующей среде сужается с ростом параметра насыщения  $S$  как для четных, так и для нечетных солитонов [рис. 1.7(b)]. При фиксированном  $b$  увеличение глубины решетки приводит к уменьшению пиковой амплитуды и увеличению ширины солитона. Анализ устойчивости для нечетных солитонов показывает наличие множественных областей неустойчивости, чередующихся с областями устойчивости вблизи верхней границы области существования [рис. 1.7(e)]. Ширина этих областей уменьшается при  $b \rightarrow b_{upp}$  а также по мере уменьшения параметра насыщения  $S$  и увеличения глубины решетки  $p$ . В то же время неожиданный результат был обнаружен для четных солитонов - в среде с насыщением нелинейности такие солитоны могут быть устойчивы [рис. 1.7(f)], что невозможно в кубич-

ной нелинейной среде, причем их области устойчивости (неустойчивости) в точности совпадают с областями неустойчивости (устойчивости) для нечетных солитонов. Таким

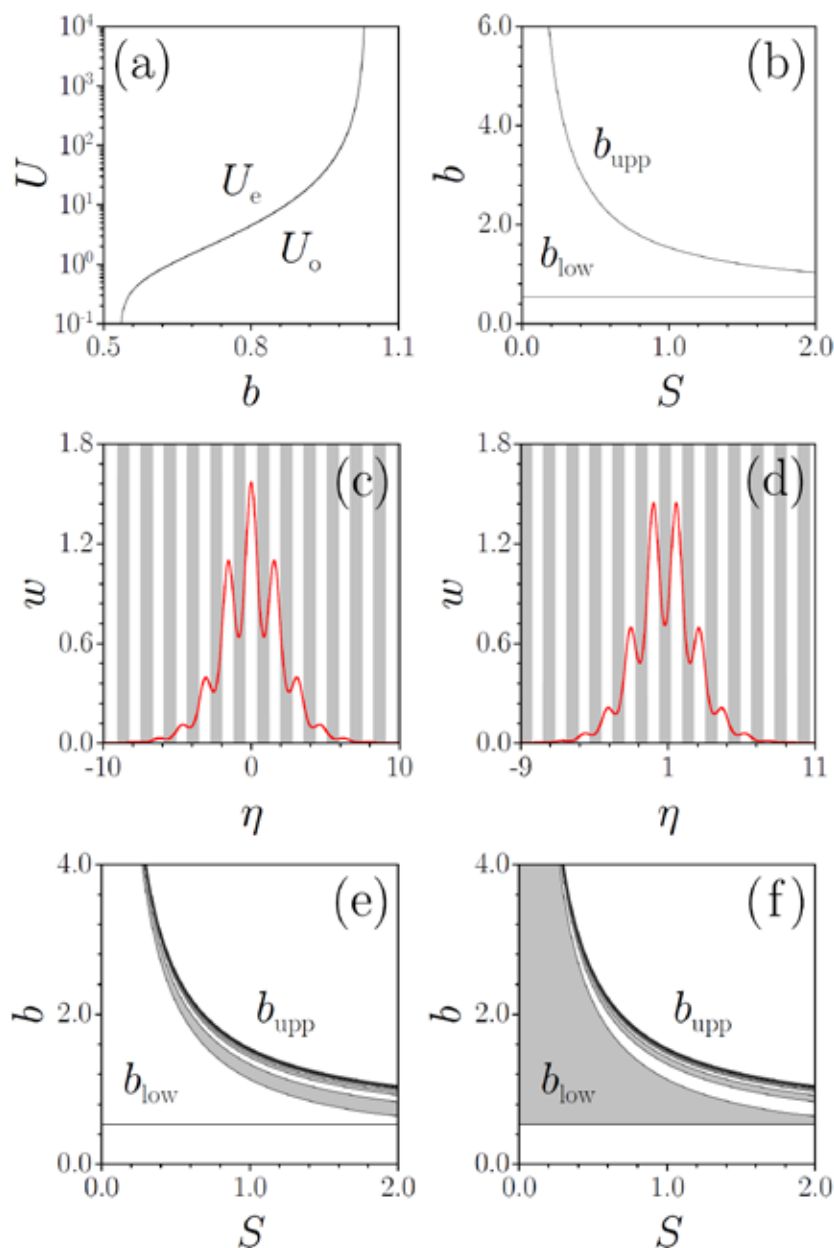


Рис. 1.7. (а) Мощности четного и нечетного солитонов в зависимости от постоянной распространения при  $S=2$ . (б) Нижняя и верхняя границы области существования как функции  $S$ . Профили нечетного (с) и четного (d) солитонов соответствующих  $b=0.8$ ,  $S=2$ . В серых областях  $R(\eta)<0$ . Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) для нечетного (е) и четного (f) солитонов на плоскости  $(S, b)$ . Во всех случаях  $p=3$ .

образом, в среде с насыщением нелинейности возможен своеобразный обмен устойчивостью между двумя простейшими типами солитонов. Позднее было показано, что вблизи точки смены устойчивости величина потенциального барьера, который должен

преодолеваются при движении солитона вдоль решетки (см. параграф 1.1), обращается в ноль, т.е. солитоны становятся полностью мобильными, несмотря на наличие модуляции показателя преломления.

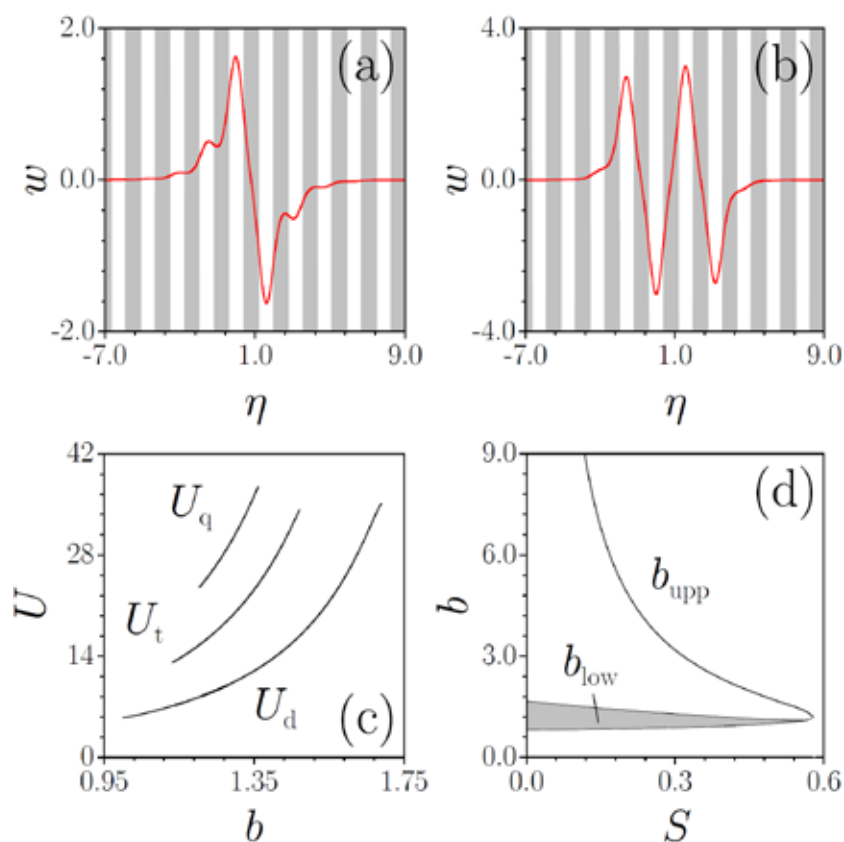


Рис. 1.8. Профили дипольного солитона при  $b = 1$ ,  $S = 0.4$  (a) и квадрупольного солитона при  $b = 2$ ,  $S = 0.25$  (b). (c) Мощности дипольного  $U_d$ , трипольного  $U_t$ , и квадрупольного  $U_q$  солитонов как функции постоянной распространения при  $S = 0.5$ . (d) Области существования, устойчивости (белая), и неустойчивости (серая) для дипольного солитона на плоскости  $(S, b)$ . Во всех случаях  $p = 3$ .

Помимо четных и нечетных солитонов периодическая решетка может поддерживать мультипольные солитоны (рис. 1.8). Для таких солитонов функция  $w(\eta)$  меняет знак в соседних периодах решетки, т.е. феноменологически эти решения могут рассматриваться как нелинейная суперпозиция нескольких нечетных солитонов с разницей фаз  $\pi$  [рис. 1.8(a) и 1.8(b)]. Сама возможность существования таких солитонов обусловлена поперечной модуляцией показателя преломления, которая компенсирует отталкивание противофазных солитонов (полюсов). Количество солитонов, которые могут входить в такой мультипольный комплекс, не ограничено. Мультипольные солитоны требуют некоторой пороговой мощности для их формирования [рис. 1.8(c)] и также существуют в ограниченном диапазоне постоянных распространения  $b_{\text{low}} \leq b \leq b_{\text{upp}}$ , который сужается

с увеличением порядка мультиполя (количества пиков интенсивности). Область существования мультипольных солитонов сужается с увеличением параметра насыщения и может даже полностью исчезнуть при  $S > S_{cr}$  [рис. 1.8(d)]. Мультипольные решения не существуют, если решетка показателя преломления недостаточно глубока. Мультипольные солитоны, независимо от их порядка, устойчивы практически во всей области существования за исключением узкой области вблизи нижней отсечки по постоянной распространения - на рис. 1.8(d) эта область показана для простейшего дипольного солитона (она закрашена серым). Интересно отметить, что "отключение" решетки на каком-то расстоянии  $\xi = \xi_{end}$  приводит к распаду мультипольного комплекса на составляющие его противофазные солитоны, которые начинают разлетаться под некоторым углом к оси  $\xi$ , растущим с увеличением глубины решетки. Из-за насыщения нелинейности угол разлета является немонотонной функцией полной мощности солитона и достигает минимального значения при промежуточных уровнях мощности.

Поскольку характер дифракции качественно меняется в среде с периодической модуляцией показателя преломления, такие среды могут поддерживать локализованные солитоны даже в дефокусирующей среде. Так, например, для блоховской волны с широкой огибающей, узким угловым спектром и блоховским моментом  $k$  эффективный дифракционный коэффициент определяется производной  $d^2b/dk^2$ , где зависимость  $b(k)$  можно найти из уравнения (1.5) [62]. В случае дефокусирующей среды простейшие солитоны могут быть найдены, когда постоянная распространения принадлежит к первой ограниченной запрещенной зоне в спектре решетки. Их свойства проиллюстрированы на рис. 1.9. При одинаковом уровне мощности такие солитоны, как правило, существенно шире, чем солитоны в фокусирующей среде. Они характеризуются осциллирующими хвостами, указывающими на то, что брэгговское отражение от периодической структуры вносит существенный вклад в формирование солитона [рис. 1.9(a) и 1.9(b)]. Как и в случае фокусирующей среды, помимо простейшего нечетного солитона [рис. 1.9(a)] удастся найти четные [рис. 1.9(b)] и мультипольные солитоны. В дефокусирующей среде мощность солитона уменьшается с увеличением постоянной распространения [рис. 1.9(c)]. Характерная ширина солитона в дефокусирующей среде взаимосвязана с положением его постоянной распространения внутри запрещенной зоны спектра. Если постоянная распространения попадает в середину запрещенной зоны, то солитон является достаточно узким. Однако, если постоянная распространения приближается к верхней или нижней границе запрещенной зоны, то ширина солитона резко растет [пример такого достаточно широкого солитона приведен на рис. 1.9(a)]. Солитоны могут быть получены в ограниченном диапазоне постоянных распространения  $b_{low} \leq b \leq b_{upp}$  [рис. 1.9(d)]. Теперь верхняя отсечка всегда совпадает с верхней границей первой запрещенной зоны. Нижняя отсечка совпадает с нижней границей этой зоны только при малых

параметрах насыщения  $S$ , в то время как для больших степеней насыщения имеем  $b_{\text{low}} = b_{\text{upp}} - 1/S$ . Анализ устойчивости показывает, что нечетные солитоны в дефокусирующих решетках устойчивы за исключением областей примыкающих к верхней отсечке  $b_{\text{upp}}$ . Интересно, что в дефокусирующей среде свойства устойчивости четных и дипольных солитонов полностью меняются по сравнению с фокусирующей средой. Так, в дефокусирующей среде четные солитоны могут быть устойчивы в достаточно широкой области, в то время как мультипольные солитоны всегда неустойчивы. Отметим также, что помимо полубесконечной и первой ограниченной запрещенных зон, которые обсуждались выше, солитоны могут быть найдены в любой запрещенной зоне в спектре решетки - профили таких решений становятся все более сложными по мере роста номера зоны и отражают структуру блоховских волн вблизи границ соответствующих запрещенных зон.

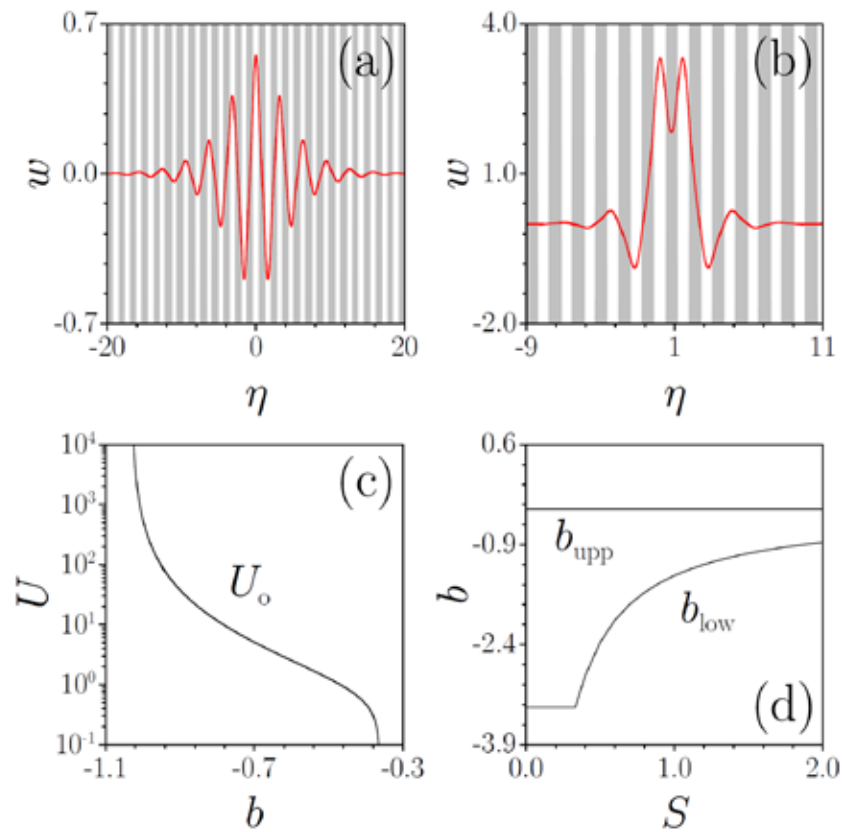


Рис. 1.9. Профили (a) нечетного солитона при  $S = 1.5$ ,  $b = -0.45$  и (b) четного солитона при  $S = 0.4$ ,  $b = -1.5$ . (c) Мощность нечетного солитона как функция постоянной распространения при  $S = 1.5$ . (d) Верхняя и нижняя отсечки для нечетного солитона в зависимости от параметра насыщения. Во всех случаях  $p = 3$ .

Предсказанные в [83] одномерные солитоны высшего порядка наблюдались нами в работе [85] в массивах с длиной 25 mm и поперечным периодом  $7.6 \mu\text{m}$ , изготовлен-



ных технологически в кристаллах  $\text{LiNbO}_3$ , допированных медью (для увеличения дефокусирующей фотovoltaической нелинейности кристалла). Массивы изготавливались с помощью внедрения в поверхность кристалла  $\text{LiNbO}_3$  атомов титана, диффундирующих при высоких температурах из предварительно нанесенных на поверхность периодических полосок этого материала. Эта технология приводит к периодической мелкой модуляции показателя преломления в приповерхностном слое образца, хорошо описываемой функцией  $\cos^2(\Omega\eta)$ . Глубина модуляции линейного показателя преломления составляла  $\delta n \approx 0.0022$  (что для длины волны  $\lambda = 532 \text{ nm}$  соответствует параметру  $p \sim 17$ ), в то время как максимальная нелинейная добавка к показателю преломления  $\delta n_{\text{нл}} \sim 2 \times 10^{-4}$  задает параметр насыщения  $S \approx 0.5$ . Распространение излучения в таком кристалле хорошо описывается уравнением (1.4). В эксперименте пучок от непрерывного  $\text{YVO}_4$  лазера ( $\lambda = 532 \text{ nm}$ ) проходил через амплитудную маску с двумя или более отверстиями и фокусировался на поверхность образца в несколько соседних волноводах, возбуждая их синфазно, как это требуется для формирования четных солитонов. Аналогично, для синфазного возбуждения двух и более каналов может также использоваться широкий гауссовский пучок, ширина которого может варьироваться с помощью дополнительной цилиндрической линзы. Распределения интенсивности на выходной поверхности кристалла регистрировались с помощью ССД камеры. На рисунке 1.10(а) показана картина линейной дифракции для одноканального возбуждения при низкой интенсивности. В отличие от дифракции в однородной среде, распределение интенсивности сильно модулировано - интенсивность на оси ниже, чем в боковых максимумах. Четные солитоны и солитоны высшего порядка формируются в стационарном состоянии (по истечении нескольких минут) при повышении уровня входной мощности и возбуждении соответствующего числа каналов. Так, формирование четного солитона достигается при мощности  $10 \text{ } \mu\text{W}$  [рис. 1.10(б)], а солитон с тремя синфазными пиками сформировался при мощности  $20 \text{ } \mu\text{W}$  [рис. 1.10(с)]. Для сравнения, экспериментальные выходные распределения интенсивности наложены на теоретические рисунки, показывающие динамику распространения внутри образца согласно модели (1.4). Также была исследована временная динамика формирования четных солитонов. Поскольку фотovoltaическая нелинейность достаточно медленна и нарастает со временем до тех пор, пока оптический отклик кристалла не достигнет стационарного состояния, динамика распространения существенно варьируется в процессе установления. Так, в начальный момент времени при двухканальном возбуждении всегда наблюдается линейная дифракция [рис. 1.10(д)]. Затем выходное распределение существенно сужается благодаря росту дефокусирующей нелинейности [рис. 1.10(е)], до тех пор, пока не происходит достижение стационарного состояния и не формируется устойчивый четный солитон. Заметим, что в начальные моменты времени возможны осцилляции интенсивности в централь-

ных каналах, связанные с неустойчивостью солитонов при слабой нелинейности. На рис. 1.10(f) один из пучков, формирующих четный солитон, был заблокирован после достижения стационарного состояния, что привело к осцилляциям мощности между каналами, а в итоге к формированию простейшего нечетного солитона.

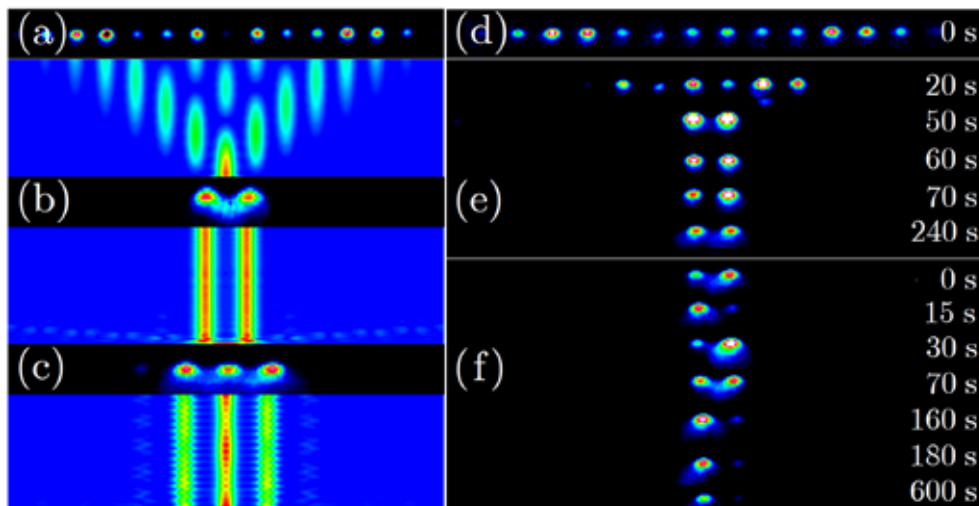


Рис. 1.10. Экспериментальное наблюдение дискретной дифракции (a), а также четного солитона (b) и солитона с тремя синфазными пиками (c). Фотографии выходных распределений интенсивности наложены на теоретические рисунки, показывающие динамику распространения внутри кристалла. (d)-(f) Временная динамика формирования четных солитонов. (d) Дискретная дифракция в начальный момент времени. (e) Формирование солитона по мере роста фотовольтаической нелинейности. На панели (f) правый пучок заблокирован в момент времени  $t=0$  s, что приводит к осцилляциям света между каналами и к формированию нечетного солитона в левом канале.

Таким образом, периодическая модуляция показателя преломления позволяет генерировать одномерные структуры солитонного типа со сложными распределениями интенсивности, которые не имеют аналогов в однородных фокусирующих и дефокусирующих средах. Такие солитоны, включая нечетные, четные и мультипольные, могут быть полностью устойчивы, что позволило наблюдать их в эксперименте.

#### §1.4. Формирование и устойчивость двумерных солитонов в периодических решетках

Солитоны могут формироваться не только в одномерных, но и в двумерных решетках показателя преломления. При этом увеличение размерности задачи приводит к существенным изменениям свойств солитонов, особенно если рассматриваются среды с

кубической нелинейностью. В первую очередь это связано с тем, что если в одномерной кубической среде солитоны могут быть устойчивы и в отсутствие решетки, то в однородной двумерной среде солитоны всегда неустойчивы и коллапсируют при превышении мощности над критической [118]. Наличие периодической модуляции показателя преломления не только позволяет подавить коллапс простейших пучков в кубической среде, но и открывает возможности для формирования более сложных устойчивых структур, включающих ансамбли пучков и даже представляющих из себя целые изображения, которые могут распространяться без искажения, как показано автором в [99]. Этот параграф посвящен анализу свойств и устойчивости таких двумерных солитонных структур.

Для описания распространения излучения в двумерной периодической решетке показателя преломления с кубической нелинейностью может использоваться уравнение

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - q|q|^2 - pR(\eta, \zeta)q. \quad (1.7)$$

Здесь вертикальная поперечная координата  $\zeta = y/x_0$  также нормирована на характерный масштаб  $x_0$ . Далее мы рассматриваем так называемую "неразделяемую" решетку с профилем  $R(\eta, \zeta) = \cos(\Omega\eta) \cos(\Omega\zeta)$  и одинаковыми периодами  $2\pi/\Omega$  по обеим осям  $\eta, \zeta$ . Такие решетки могут быть индуцированы оптически с помощью двух пар интерферирующих плоских волн. Заметим, что для такой двумерной решетки, так же как и в одномерном случае, может быть найден блоховский спектр для собственных значений  $b$ , в то время как собственными функциями являются двумерные блоховские волны  $w(\eta, \zeta) \exp(ik_\eta\eta + ik_\zeta\zeta) \exp(ib\xi)$ , периодичные по каждой из поперечных координат, т.е.  $w(\eta, \zeta) = w(\eta + 2\pi/\Omega, \zeta)$  и  $w(\eta, \zeta) = w(\eta, \zeta + 2\pi/\Omega)$  [119]. Однако, если в одномерной решетке разрешенные зоны [т.е. зависимости  $b(k)$  для разных собственных значений] не пересекаются и разделены запрещенными зонами, то в двумерной решетке двумерные поверхности, описывающие зависимости  $b(k_\eta, k_\zeta)$ , могут пересекаться, тем самым приводя к исчезновению определенных ограниченных запрещенных зон. В результате, в таких решетках всегда существует полубесконечная запрещенная зона, но, как правило, доступно только ограниченное число запрещенных зон, причем обычно последние "открываются" по мере увеличения глубины решетки, начиная с первой ограниченной запрещенной зоны. Как следствие, в дефокусирующей нелинейной среде наблюдение даже простейших солитонов из первой ограниченной зоны требует достаточно глубоких решеток показателя преломления. Здесь мы ограничимся свойствами солитонов из полубесконечной запрещенной зоны в фокусирующей среде, поскольку уже само наличие второй поперечной координаты существенно обогащает класс доступных солитонных решений.

Такие решения ищутся в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ , где действительная функция  $w(\eta, \zeta)$  описывает поперечный профиль с постоянной распространения  $b$ . Как и в одномерном случае, инвариантность решения по отношению к масштабным преобразованиям  $q(\eta, \zeta, \xi, p) \rightarrow \chi q(\chi\eta, \chi\zeta, \chi^2\xi, \chi^2p)$  может быть использована для того, чтобы зафиксировать частоту решетки  $\Omega = 4$ , оставив в задаче только два свободных параметра  $b, p$ . Анализ устойчивости полученных решений производится с помощью линеаризации эволюционного уравнения (1.7). Как и ранее, семейства солитонов удобно характеризовать с помощью зависимости мощности солитона  $U = \int \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta d\zeta$  от постоянной распространения.

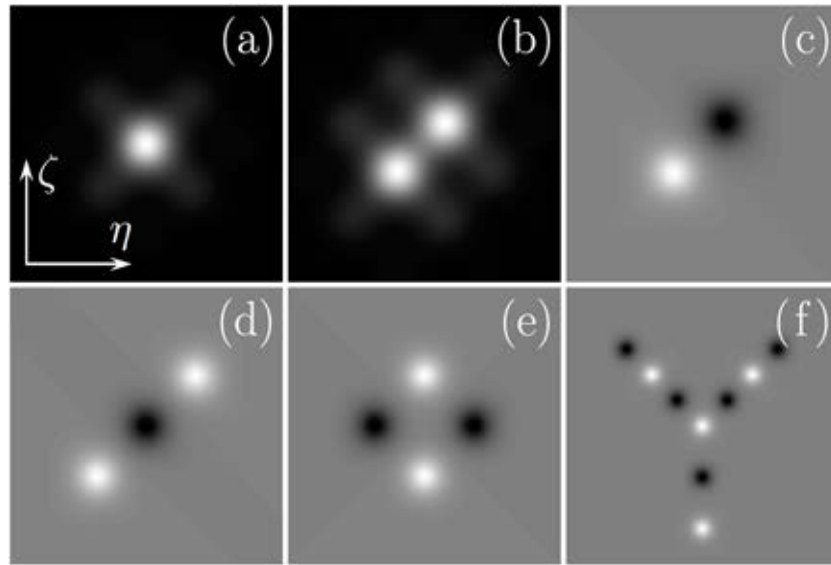


Рис. 1.11. Профили (а) нечетного солитона при  $b = 2.5$ , (б) четного солитона при  $b = 2.5$ , (с) диполя при  $b = 6$ , (д) триполя при  $b = 8$ , (е) квадруполя при  $b = 11$ , (ф) сложного солитонного комплекса при  $b = 16$ . Глубина решетки  $p = 10$  для панелей (а)-(е) и  $p = 20$  для панели (ф).

Известно, что в однородной кубичной среде мощность фундаментального солитона (так называемого солитона Таунса) не меняется с постоянной распространения и равняется  $U_T(b) \simeq 5.85$ . Согласно известному критерию Вахитова-Колоколова [120], ветви фундаментальных солитонных решений, для которых  $dU/db \leq 0$ , являются неустойчивыми и, следовательно, солитон Таунса, для которого  $dU/db \equiv 0$ , должен разрушаться под действием возмущений. Такая неустойчивость действительно наблюдалась в ряде экспериментов (см. обзор [118]). Введение периодической модуляции показателя преломления качественно меняет зависимость  $U(b)$  для двумерных солитонов. Пример такой зависимости для простейшего нечетного солитона, максимум интенсивности которого совпадает с одним из локальных максимумов решетки [рис. 1.11(а)], приведен на

рис. 1.12(a). Помимо нечетного солитона мы нашли четный солитон с двумя одинаковыми синфазными пиками, расположенными в соседних каналах [рис. 1.11(b)], и включили соответствующую зависимость  $U(b)$  в рис. 1.12(a). Необходимо отметить, что в двумерной решетке расстояние между соседними пиками в четном солитоне может составлять  $2\pi/\Omega$  (если линия, соединяющая максимумы интенсивности, параллельна одной из осей  $\eta, \zeta$ ) или  $2^{1/2}\pi/\Omega$  (если линия, соединяющая максимумы, образует угол  $\pi/4$  с осями  $\eta, \zeta$ ). Здесь проиллюстрирован последний случай, поскольку он соответствует более сильному нелинейному взаимодействию между соседними пиками. В решетке зависимость мощности от постоянной распространения немонотонна. Существует нижняя отсечка по постоянной распространения  $b_{co}$ , вблизи которой пиковая амплитуда существенно уменьшается, а солитон становится широким, приближаясь к профилю делокализованной блоховской волны с нижней границы полубесконечной запрещенной

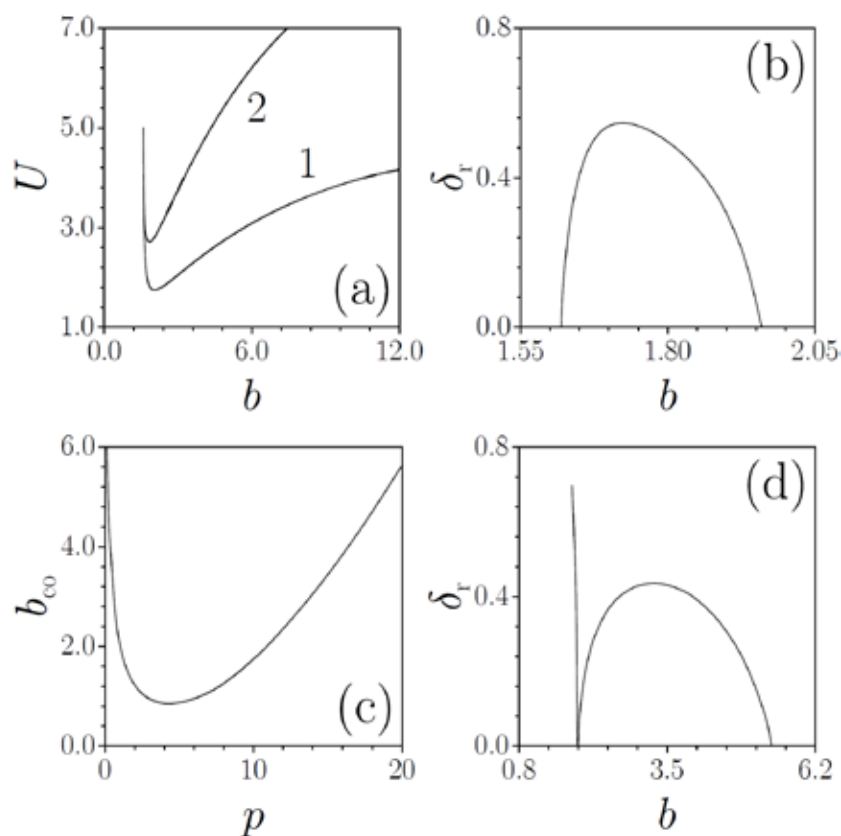


Рис. 1.12. (a) Зависимости мощности нечетного (кривая 1) и четного (кривая 2) солитонов от постоянной распространения при  $p=10$ . (b) Действительная часть инкремента нарастания неустойчивости для нечетного солитона как функция  $b$  при  $p=10$ . (c) Отсечка для диполя в зависимости от  $p$ . (d) Действительная часть инкремента для дипольного солитона как функция  $b$  при  $p=10$ .

зоны. При этом мощность солитона сначала падает с ростом постоянной распространения до тех пор, пока  $U$  не достигнет определенного минимума, и лишь потом начинает возрастать. Этот процесс сопровождается монотонным уменьшением ширины солитона. В частности, при  $b \rightarrow +\infty$ , когда амплитуда солитона становится настолько велика, что решетка почти не влияет на профиль солитона, его мощность асимптотически приближается к таковой в однородной среде  $U_T = 5.85$ . Таким образом, в отличие от одномерной решетки, где мощность солитона падает до нуля вблизи границы запрещенной зоны, в двумерной решетке мощность солитона никогда не становится ниже некоторой пороговой мощности. Эта пороговая мощность уменьшается с ростом глубины решетки  $p$ . Отсечки по постоянной распространения для четного и нечетного солитонов в точности равны. Мощность четного солитона близка к мощности нечетного солитона только вблизи отсечки, но вдали от нее мощность четного солитона выше. В полном соответствии с критерием Вахитова-Колоколова анализ устойчивости показывает, что нечетный солитон неустойчив в узком диапазоне постоянных распространения вблизи отсечки, где  $dU/db \leq 0$ , и устойчив в области с  $dU/db > 0$ . Действительная часть инкремента нарастания для возмущения обращается в ноль в точке где  $dU/db = 0$  [рис. 1.12(b)]. В то же время, четный солитон оказался экспоненциально неустойчивым (т.е. для него  $\delta_r > 0$  при  $\delta_i = 0$ ) во всей области существования.

Ситуация качественно меняется в случае дипольных солитонов, у которых соседние пики противофазны [рис. 1.11(c)]. Как и для нечетных солитонов мощность дипольного солитона является немонотонной функцией постоянной распространения. Такие солитоны также существуют при  $b \geq b_{co}$ , однако отсечка  $b_{co}$  теперь уже не совпадает с нижней границей полубесконечной запрещенной зоны и находится выше нее. Это означает, что дипольные солитоны (а также все мультиполи) являются весьма специфическими решениями, не совпадающими с блоховской волной в линейном пределе. Зависимость отсечки от глубины решетки для диполей является немонотонной функцией (в отличие от постоянной распространения, соответствующей нижней границе полубесконечной запрещенной зоны, монотонно уменьшающейся при  $p \rightarrow 0$ ) и приведена на рис. 1.12(c). Поскольку критерий устойчивости Вахитова-Колоколова уже неприменим для солитонов высшего порядка, их устойчивость была исследована численно. Дипольные солитоны становятся устойчивыми, когда их постоянная распространения (или мощность) превышает некоторое критическое значение  $b_{cr}$  [рис. 1.12(d)]. Вблизи отсечки существует область экспоненциальной неустойчивости, которая сменяется осцилляторной неустойчивостью с  $\delta_r, \delta_i \neq 0$  и  $\delta_r \ll \delta_i$  (при такой неустойчивости разрушение солитона сопровождается нарастающими осцилляциями амплитуды поля в соседних каналах решетки). Заметим, что при  $b = b_{cr}$  два пика, формирующие дипольный солитон, тесно контактируют, т.е. нелинейное взаимодействие между ними в точке стабилизации весь-

ма существенно. Ширина области неустойчивости  $b_{cr} - b_{co}$  для дипольных солитонов сужается с ростом глубины решетки.

Помимо дипольных солитонов, двумерная решетка показателя преломления может поддерживать более сложные структуры, которые также могут быть устойчивыми, если только соседние пики в них являются противофазными (если хотя бы для одной пары пиков разница фаз становится нулевой, то такое решение обычно бывает экспоненциально неустойчивым). Примеры подобных структур показаны на рис. 1.11(d)-1.11(f). Свойства таких структур, включая зависимости  $U(b)$  и  $b_{co}(p)$ , качественно схожи со свойствами дипольных солитонов. Чем большее количество пиков содержится в солитонных структурах, тем большая мощность необходима для их стабилизации (последняя монотонно растет с увеличением числа пиков, также как и критическая постоянная распространения). Дипольные, трипольные и квадрупольные солитоны, показанные на рис. 1.11(c)-1.11(e), могут рассматриваться в качестве элементарных блоков для построения более сложных устойчивых "изображений", которые могут распространяться внутри двумерной решетки без искажений даже при наличии возмущений. Пример такого устойчивого изображения в виде буквы "Y" продемонстрирован на рис. 1.11(f). Заметим, что подобные распределения светового поля с требуемым фазовым профилем могут быть легко созданы с использованием пространственных модуляторов света. Двумерные солитонные структуры могут существовать и в достаточно глубоких дефокусирующих решетках, с той разницей, что для их устойчивости требуется синфазность всех пиков в солитоне.

Таким образом, двумерные решетки открывают возможности для формирования и устойчивой передачи сложных солитонных комплексов, которые могут представлять собой даже изображения. Простейшие мультипольные солитоны в таких решетках наблюдались экспериментально в [101,102], а более сложные кольцевые структуры были получены в работе [103].

## §1.5. Солитоны в решетках с дробной размерностью

Как правило, при исследовании свойств решеточных солитонов предполагается, что решетка показателя преломления либо одномерная (в этом случае солитонный пучок, распространяющийся в такой решетке, может быть пространственно однороден по второй поперечной координате или локализован в планарном волноводе), либо чисто двумерная. Поскольку свойства одномерных и двумерных солитонов существенно различаются, как было показано выше, возникает интересный вопрос: возможно ли создание периодических систем, размерность которых можно было бы рассматривать как промежуточную между 1 и 2, и как свойства солитонов варьируются при изменении размерно-

сти системы? Заметим, что значительное влияние степени локализации волновой функции по одной из координат на эволюцию возбуждений и отклик системы привлекало внимание исследователей еще в электронных системах [121]. Благодаря сходному виду уравнений, описывающих поведение электронов во внешних потенциалах и распространение света в пространственно-неоднородных диэлектрических средах, многие эффекты, предсказанные в электронных системах, могут быть продемонстрированы и в оптике. Например, техника записи массивов волноводов с помощью фемтосекундных лазерных импульсов, описанная в работах [40,41], позволяет формировать массивы с эффективно дробной размерностью, где локализация волнового пакета по одной из координат может контролироваться и влиять на всю динамику распространения пакета. Исследованию распространения излучения в таких системах с эффективно дробной размерностью, впервые проведенному автором, и посвящен данный параграф [106].

Для исследования влияния локализации волнового пакета по одной из координат на его распространение здесь рассматривается набор массивов волноводов с постепенно увеличивающимся числом рядов (или строк) в вертикальном направлении. Каждый ряд в массиве содержит 7 волноводов. Это позволяет рассмотреть промежуточные системы между одномерной (массив с  $7 \times 1$  волноводами) и двумерной (массив с  $7 \times 7$  волноводами), эффективная размерность которых зависит от соотношения количества волноводов в горизонтальном и вертикальном направлениях. Для моделирования распространения излучения в такой системе мы используем уравнение (1.7), где функция  $R(\eta, \zeta)$ , задающая распределение показателя преломления, может быть аппроксимирована суммой гауссовских функций  $\exp[-(\eta/w_\eta)^2 - (\zeta/w_\zeta)^2]$ , описывающих профили отдельных волноводов, разделенных расстоянием  $d$ . Далее, в соответствии с реальным эллиптическим сечением  $4.5 \times 12 \mu\text{m}^2$  волноводов, записанных лазерными импульсами, полагаем  $w_\eta = 0.45$  и  $w_\zeta = 1.2$ . Расстояние между соседними волноводами в массиве составляет  $40 \mu\text{m}$  (что соответствует  $d = 4.0$ ). При нормировке учитывается, что нелинейный коэффициент плавленого кварца, где записывается массив, равен  $n_2 = 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$  - нелинейность этого материала всегда фокусирующая. Нормированная глубина модуляции показателя преломления полагается равной  $p = 2.9$ , что эквивалентно  $\delta n \sim 3.2 \times 10^{-4}$ .

Прежде всего, нами было исследовано влияние размерности решетки на свойства стационарных солитонов. Профили таких солитонов, локализованных в центре, в углу и на границе массива, показаны на рис. 1.13. Все эти солитоны существуют при постоянных распространения, превышающих некоторую отсечку  $b_{co}$ , которая растет с увеличением глубины решетки  $p$ , а также с увеличением числа рядов в массиве. По мере приближения постоянной распространения к отсечке, ширина солитонов существенно увеличивается, что особенно хорошо заметно для солитонов, локализованных в центре массива [рис. 1.13(a), 1.13(d) и 1.13(g)]. В случае массива с  $7 \times 1$  волноводами даже слабо



локализованные в горизонтальном направлении солитоны имеют вертикальную ширину порядка ширины волновода  $w_z$  [рис. 1.13(a) и 1.13(c)]. Увеличение пиковой амплитуды с ростом постоянной распространения сопровождается концентрацией света в практически единственном волноводе [рис. 1.13(b)]. Если число рядов в массиве немного увеличивается, то свет может проникать в соседние волноводы также и в вертикальном направлении. При этом возможно формирование солитонов, которые занимают значительное число волноводов в горизонтальном направлении, но сконцентрированы всего в нескольких каналах в вертикальном направлении [рис. 1.13(d)-1.13(f)]. Подобные солитоны могут формально рассматриваться в качестве промежуточных между одномерными и двумерными состояниями. Чем больше рядов содержится в массиве, тем сильнее становится расширение солитона в вертикальном направлении вблизи отсечки, так что в массиве  $7 \times 7$  волноводов получаем обычные двумерные солитоны в квадратной решетке [рис. 1.13(g)-1.13(i)].

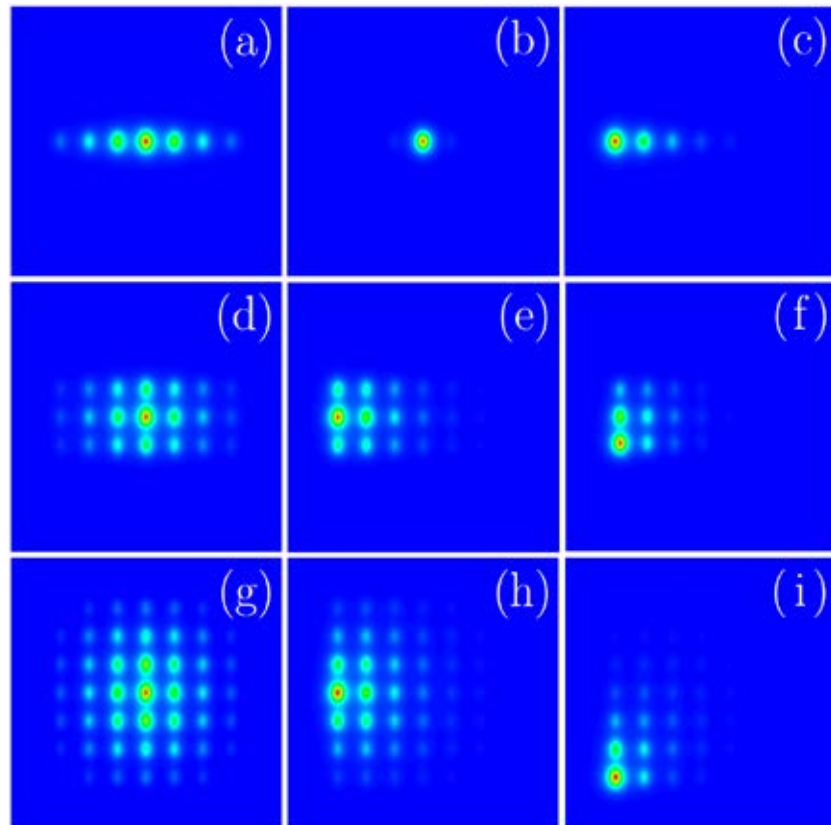


Рис. 1.13. Профили центральных солитонов при  $b = 0.562$  (a) и  $b = 0.740$  (b), а также углового солитона при  $b = 0.567$  (c) в массиве с  $7 \times 1$  волноводами. Профили центрального солитона при  $b = 0.604$  (d), солитона на левой границе массива при  $b = 0.605$  (e), и углового солитона при  $b = 0.609$  (f) в массиве с  $7 \times 3$  волноводами. Профили центрального солитона при  $b = 0.612$  (g), солитона на левой границе при  $b = 0.613$  (h), и углового солитона при  $b = 0.612$  (i) в массиве из  $7 \times 7$  волноводов.

Особенно интересно влияние степени локализации солитона в вертикальном направлении на зависимость мощности от постоянной распространения (рис. 1.14). В то время как в одномерном массиве из  $7 \times 1$  волноводов мощность солитона, локализованного в центре массива, монотонно возрастает с увеличением  $b$  [рис. 1.14(a), кривая 1], в массивах с несколькими рядами на зависимости  $U(b)$  появляются участки с отрицательной производной  $dU/db$  и точка, в которой  $U$  локально достигает минимального значения [рис. 1.14(a), кривые 2,3]. Поскольку здесь рассматриваются пространственно ограниченные массивы, которые поддерживают слабо локализованные линейные моды,

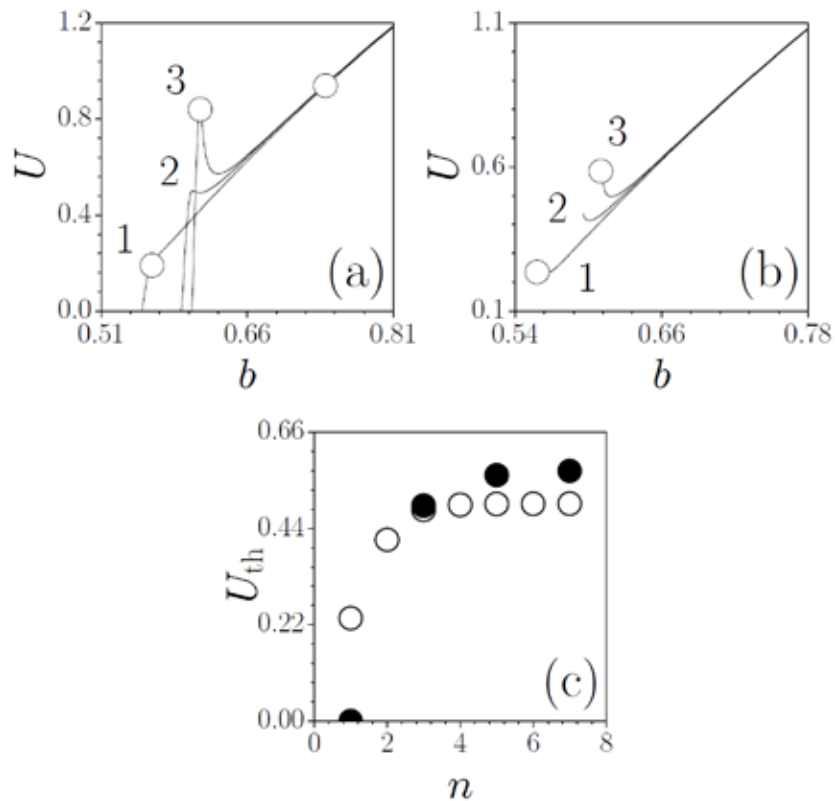


Рис. 1.14. Мощность в зависимости от постоянной распространения для (a) солитонов локализованных в центральном волноводе в массивах размера  $7 \times 1$  (кривая 1),  $7 \times 3$  (кривая 2),  $7 \times 7$  (кривая 3), и для (b) солитонов локализованных в угловом волноводе в массивах размера  $7 \times 1$  (кривая 1),  $7 \times 2$  (кривая 2),  $7 \times 7$  (кривая 3). Точки на панели (a) соответствуют солитонам на рис. 1.13(a), 1.13(g) и 1.13(b), а точки на панели (b) соответствуют солитонам с рис. 1.13(c) и 1.13(i). (c) Пороговая мощность для солитонов локализованных в углу (белые кружки) и в центре (черные кружки) массива в зависимости от числа рядов.

то расширение солитона вблизи отсечки ограничено размерами самого массива и, как следствие, мощность в отсечке всегда стремится к нулю. Тем не менее, значение мощности в локальном минимуме практически точно совпадает с порогом для формирования солитонов в массиве, который бесконечен в горизонтальном направлении. Заметим, что локальный порог по энергии, который появляется уже в массиве размера  $7 \times 2$ , увеличивается с ростом числа рядов по мере того, как система преобразуется в полностью двумерную систему. Солитоны, локализованные на границе массива, требуют пороговой мощности для их существования даже в одномерном случае, причем этот порог заметно увеличивается при переходе от одномерной к двумерной системе [рис. 1.14(b)]. Так, для солитона, локализованного в углу массива, пороговая мощность возрастает от  $U_{th} = 0.236$  для массива размером  $7 \times 1$  до  $U_{th} = 0.496$  для массива размером  $7 \times 7$ . Хотя пороговые мощности для солитонов на границе и в центре массива всегда растут с увеличением его размерности, скорости этого роста несколько различны [рис. 1.14(c)]. В то время как в одномерной системе пороговая мощность для формирования поверхностных солитонов существенно выше, уже для массива с примерно тремя рядами становится легче возбудить поверхностные солитоны. Для массивов с более чем четырьмя рядами порог для формирования поверхностных солитонов перестает меняться и равняется примерно  $U_{th} = 0.496$ , в то время как для солитонов в центре массива порог продолжает расти и достигает больших значений.

Отметим, что возникновение поверхностных мод, изображенных на рис. 1.13(c), 1.13(e), 1.13(f), напрямую связано с эффектом нарушения симметрии при достаточно больших уровнях мощности. Помимо симметричных и антисимметричных мод, локализованных в центре двух- или многоканальной волноводной структуры, последняя может поддерживать также асимметричные поверхностные моды, но только если их мощность превышает некоторое пороговое значение. Этот эффект был впервые предсказан для простейшей слоистой нелинейной структуры в работе [122]. Такие асимметричные ветви решений, как правило, ответвляются от симметричных или антисимметричных ветвей и характеризуются немонотонными зависимостями мощности от постоянной распространения.

Описанные выше результаты были подтверждены экспериментально в массивах волноводов, записанных в плавленом кварце с помощью сфокусированных фемтосекундных лазерных импульсов. В рамках этой техники лазерный пучок фокусируется в определенной точке внутри образца, где он при достаточно высоких интенсивностях вызывает оптическое повреждение материала вблизи фокуса, приводящее к локальному увеличению показателя преломления. Перемещение фокуса пучка вдоль образца приводит к формированию волновода с эллиптическим (типичное соотношение осей 3:1) поперечным сечением в объеме образца с исключительно точно контролируемой

глубиной модуляции показателя преломления, зависящей от скорости перемещения пишущего пучка вдоль образца. Длина волновода ничем не ограничена, кроме длины самого образца. Специальная позиционирующая система, контролирующая перемещение пишущего пучка, позволяет записывать сотни практически идентичных параллельных волноводов, из которых могут быть построены решетки с произвольными поперечными структурами. В нашем случае были записаны массивы длиной 100 мм, состоящие из 1–7 рядов с 7 волноводами в каждом ряду. Скорость записи была постоянной и составляла  $\sim 1750 \mu\text{m/s}$ , что позволяет считать нелинейность образца пространственно однородной. Для возбуждения солитонов использовался Ti:Sa лазер, генерирующий импульсы с длительностью порядка 150 fs и частотой повторения 1 kHz на длине волны  $\lambda = 800 \text{ nm}$ . Входной пучок фокусировался в возбуждаемый волновод с помощью 4× объектива, в то время как выходное распределение интенсивности фиксировалось с помощью CCD камеры. Сравнивались выходные распределения интенсивности при промежуточных значениях пиковой мощности  $\sim 1 \text{ MW}$  для разного числа рядов в массиве [рис. 1.15(a)-1.15(h)]. При таком уровне мощности солитон в центре одномерного массива с одним рядом волноводов уже хорошо локализован и сконцентрирован практически в одном канале [рис. 1.15(a)]. Добавление второго ряда волноводов приводит к возможности перекачки части мощности излучения в этот ряд и формированию симметричной моды, которая существует в такой системе также и в линейном случае [рис. 1.15(c)]. При этом локализация моды в системе с двумя рядами явно ухудшается по сравнению с локализацией в одномерной системе. Еще более значительное уменьшение локализации наблюдается в системе  $7 \times 3$  волноводов, где был возбужден центральный волновод, и где часть излучения сконцентрировалась в первом и третьем рядах [рис. 1.15(e)]. В полностью двумерной системе свет расплывается практически по всему массиву как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях и о нелинейной локализации говорить уже нельзя [рис. 1.15(g)]. Похожая картина наблюдается для возбуждения угловых волноводов. В одномерной системе при данном уровне мощности свет практически полностью сконцентрирован в исходном канале [рис. 1.15(b)]. В системе  $7 \times 2$  волноводов наблюдается лишь слабая тенденция к делокализации [рис. 1.15(d)], но уже для массива  $7 \times 3$  волноводов происходит сильное перераспределение энергии в вертикальном направлении [рис. 1.15(f)]. В двумерной системе с  $7 \times 7$  волноводами выходное распределение сильно проникает в глубину массива и уже нельзя говорить о возбуждении поверхностным мод [рис. 1.15(h)]. Эти экспериментальные результаты непосредственно подтверждают существенное повышение пороговой мощности для формирования солитона с ростом размерности системы [рис. 1.14(c)].

Динамика формирования солитона по мере увеличения исходной мощности для углового солитона в массиве с тремя рядами показана на рис. 1.15(i)-1.15(l). В режиме,

близком к линейному, при пиковой мощности 0.16 MW свет, изначально запущенный в волновод в нижнем левом углу массива, туннелируется в верхний ряд массива [рис. 1.15(i)]. При промежуточной мощности 0.7 MW отталкивание от границы постепенно компенсируется нелинейностью, и видна тенденция к уменьшению расплывания пучка [рис. 1.15(k)]. При высоких мощностях  $\sim 1.5$  MW достигается формирование углового

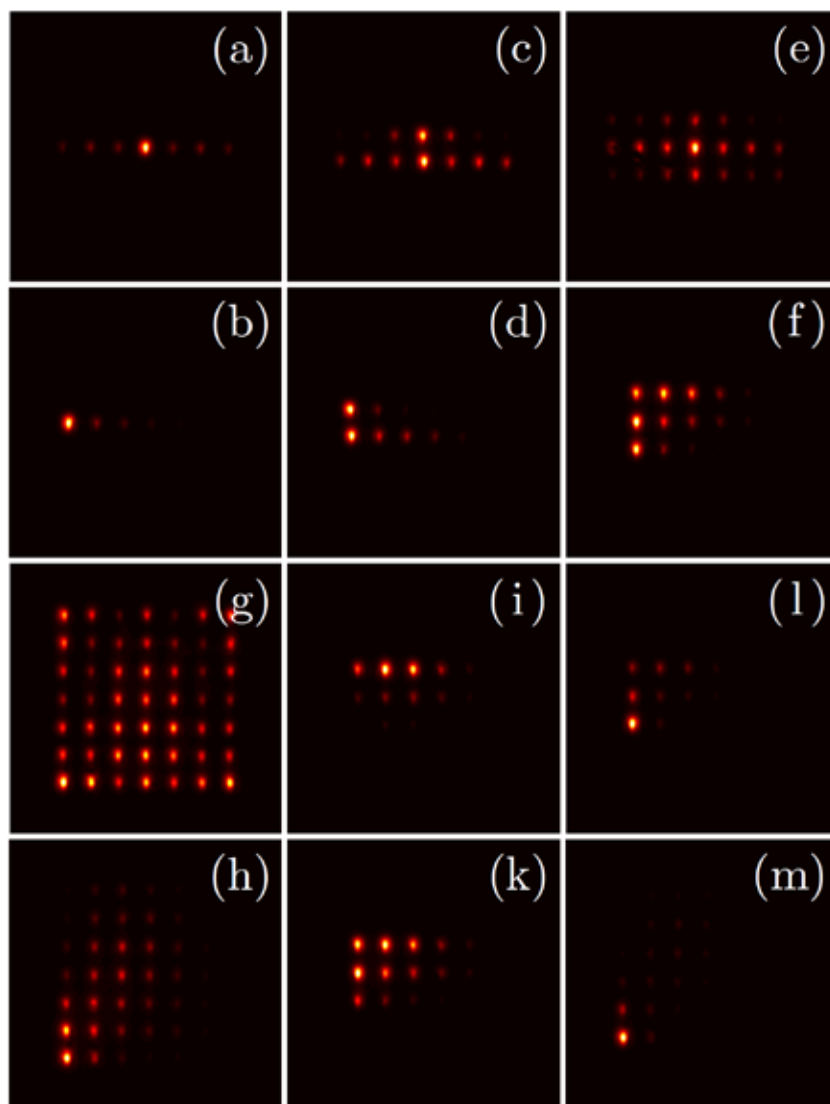


Рис. 1.15. Частичная локализация света в центральном волноводе при входной мощности 1.0 MW [панели (a), (c), (e) и (g)] и в угловом волноводе при мощности 0.7 MW [панели (b), (d), (f) и (h)]. Панели (a), (b) соответствуют массиву  $7 \times 1$  волноводов, панели (c), (d) массиву  $7 \times 2$  волноводов, панели (e), (f) массиву  $7 \times 3$  волноводов, и панели (g), (h) массиву  $7 \times 7$  волноводов. Панели (i)-(l) показывают динамику формирования углового солитона при повышении мощности в массиве  $7 \times 3$  волноводов, а панель (m) иллюстрирует угловой солитон в массиве  $7 \times 7$  волноводов при мощности 1.7 MW.

поверхностного солитона [рис. 1.15(l)]. Заметим, что для формирования столь же хорошо локализованного углового солитона в полностью двумерной системе потребовалась бы более высокая мощность 1.7 MW [рис. 1.15(m)].

Подытоживая, увеличение размерности системы приводит к постепенному увеличению пороговой мощности, необходимой для формирования солитонов как в глубине, так и на поверхности массива, что прямо подтверждается экспериментом в массивах, записанных в плавленом кварце фемтосекундными лазерными импульсами.

## §1.6. Солитоны в двумерных бинарных решетках

В параграфах 1.4 и 1.5 нами были рассмотрены свойства солитонов в простейших двумерных периодических решетках. Как было показано, симметрия солитонов, их устойчивость и области существования существенно зависят от симметрии, глубины и периодичности решетки. При этом в рассмотренных ранее решетках все внутренние каналы эквивалентны и, следовательно, свойства солитонов не зависят от их положения в решетке. Однако, современные технологические методы позволяют создавать массивы волноводов с более сложными профилями показателя преломления, которые в то же время остаются периодичными. Среди них важную роль играют так называемые бинарные решетки, включающие волноводы двух типов с разными глубинами или профилями. Главными особенностями таких решеток являются более сложная структура блоховского спектра, а также зависимость свойств солитонов от их положения в решетке. Этот параграф посвящен описанию свойств солитонов в двумерных бинарных решетках, впервые проанализированных автором в [110].

Для описания распространения излучения в бинарной решетке мы используем уравнение (1.7), где необходимо положить  $p = 1$ . Двумерная бинарная решетка состоит из двух подрешеток с различными глубинами, так что ее профиль можно записать в виде  $R(\eta, \zeta) = p_1 \sum_{n,m=-N}^N G(nd, md) + p_2 \sum_{n,m=-(N-1)}^N G(nd - d/2, md - d/2)$ , где параметры  $p_1$  и  $p_2$  описывают глубины центральной и смещенной на  $d/2$  подрешеток. Расстояние между волноводами в каждой такой подрешетке обозначается  $d$ , в то время как профили волноводов описываются функцией  $G(\eta_k, \zeta_k) = \exp[-(\eta - \eta_k)^2 / w_\eta^2 - (\zeta - \zeta_k)^2 / w_\zeta^2]$ , где  $w_\eta$  и  $w_\zeta$  - ширины волноводов по осям  $\eta, \zeta$ . В соответствии с экспериментом мы полагаем  $N = 3$  (при этом вся бинарная решетка содержит 85 волноводов),  $d = 6.4$  (что соответствует расстоянию между волноводами в подрешетках  $64 \mu\text{m}$ ),  $w_\eta = 1.1$  и  $w_\zeta = 0.3$  (что соответствует волноводам с размерами  $11 \mu\text{m} \times 3 \mu\text{m}$ ). Далее бинарную решетку с  $p_1 > p_2$  мы будем называть  $D$ -решеткой. В такой решетке центральный, угловой и поверхностный волноводы, в которые будет запускаться пучок, принадлежат к более глубокой подрешетке. Решетку с  $p_1 < p_2$  будем называть  $S$ -решеткой, поскольку в этом случае упомя-

нутые выше волноводы будут принадлежать к мелкой подрешетке. В дальнейшем мы используем глубины модуляции  $p_1 = 3.00$ ,  $p_2 = 2.86$  в случае  $D$ -решетки и  $p_1 = 2.86$ ,  $p_2 = 3.00$  в случае  $S$ -решетки (при этом  $p_{1,2} \sim 3$  соответствует глубине модуляции показателя преломления  $\delta n \sim 3.3 \times 10^{-4}$ ).

Зависимости мощности от постоянной распространения немонотонны для солитонов, локализованных в центральном, поверхностном и угловом волноводах, как в случае  $S$ -решетки, так и в случае  $D$ -решетки (рис. 1.16). В соответствии с критерием Вахитова-Колоколова, ветви решений, где производная  $dU/db \leq 0$  соответствуют неустойчивым солитонам, в то время как солитоны, принадлежащие к участкам с  $dU/db > 0$ , полностью устойчивы. Так же как и в обычных решетках, солитоны в бинарных решетках существуют для постоянных распространения, больших некоторой отсечки  $b_{co}$ , и при уровнях мощности, превышающих пороговую мощность  $U_{th}$ . Однако в отличие от обыкновенных решеток пороговые мощности для солитонов в бинарных  $S$  и  $D$  решетках заметно отличаются - пороговая мощность в  $D$ -решетке намного ниже аналогичной величины в  $S$ -решетке [рис. 1.16(a)]. Например, для солитона, локализованного в центральном канале  $D$ -решетки, имеем  $U_{th} \approx 0.550$ , в то время как в  $S$ -решетке  $U_{th} \approx 0.929$ . Такая заметная разница в порогах весьма неожиданна, учитывая, что относительная разница показателей преломления составляет лишь  $|p_2 - p_1|/p_2 \sim 5\%$ . При этом разница

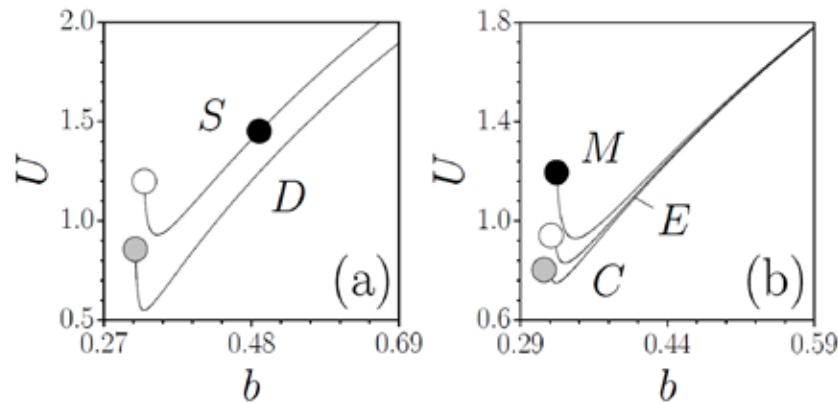


Рис. 1.16. Мощность как функция постоянной распространения для (a) солитонов локализованных в центральном волноводе  $D$ - и  $S$ -решеток, а также (b) для солитонов, локализованных в центральном ( $M$ ), поверхностном ( $E$ ), и угловом ( $C$ ) волноводах в  $S$ -решетке. Черный, белый и серый кружки на панели (a) соответствуют солитонам, изображенным на рис. 1.17(g), 1.17(d) и 1.17(a), в то время как такие кружки на панели (b) соответствуют солитонам с рис. 1.17(d), 1.17(e), и 1.17(f).

порогов быстро увеличивается с увеличением  $|p_2 - p_1|$ . Заметим, что отсечки по постоянной распространения в  $D$ - и  $S$ -решетках немного различаются ( $b_{co}$  меньше в  $D$ -

решетке), поскольку решетки хоть и содержат большое число волноводов, но все же остаются ограниченными. В обеих решетках угловые солитоны характеризуются наименьшей пороговой мощностью, в то время как сложнее всего возбудить центральные солитоны [рис. 1.16(b)].

Типичные профили солитонов приведены на рис. 1.17. В обеих решетках солитоны уширяются при уменьшении амплитуды, когда  $b \rightarrow b_{co}$ . Однако, поведение профилей в решетках двух типов вблизи отсечки заметно различается - в то время как солитоны в  $D$ -решетке очень сильно расширяются и покрывают собой практически всю решетку [рис. 1.17(a)-1.17(c)], поле солитонов в  $S$ -решетке проникает лишь в несколько соседних волноводов более глубокой подрешетки, окружающих волновод в мелкой подрешетке, на котором центрирован солитон [рис. 1.17(d)-1.17(f)]. Ожидается, разница в профилях солитонов становится все более заметной при увеличении контраста показателя преломления  $|p_2 - p_1|$  между подрешетками. В решетках обоих типов увеличение постоянной распространения сопровождается локализацией светового поля практически в одном волноводе [рис. 1.17(g)-1.17(k)].

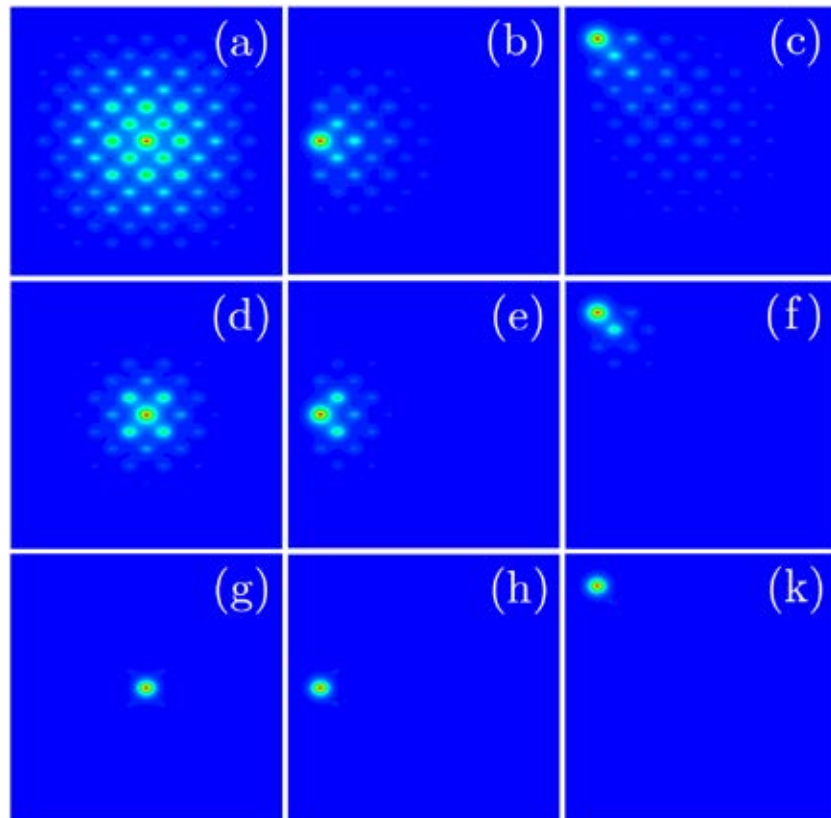


Рис. 1.17. Профили солитонов в  $D$ -решетке при (a)  $b=0.314$ , (b)  $b=0.315$ , (c)  $b=0.311$ . Профили солитонов в  $S$ -решетке при (d)  $b=0.327$ , (e)  $b=0.325$ , (f)  $b=0.322$ , и (g)-(k)  $b=0.491$ .



Экспериментальные результаты были получены в массивах волноводов длиной 105 mm , записанных фемтосекундными лазерными импульсами в плавленом кварце. Благодаря тому, что глубина модуляции показателя преломления в таких волноводах увеличивается с уменьшением скорости их записи, используя различные скорости, для двух подрешеток удалось записать два типа бинарных массивов, соответствующих  $D$  - и  $S$  -решеткам, обсуждавшимся выше. Центральный, угловой и поверхностный волноводы в таких массивах возбуждались пучками от Ti:Sa лазера, генерирующего 200 fs импульсы с частотой повторения 1 kHz на длине волны 800 nm , в то время как выходные

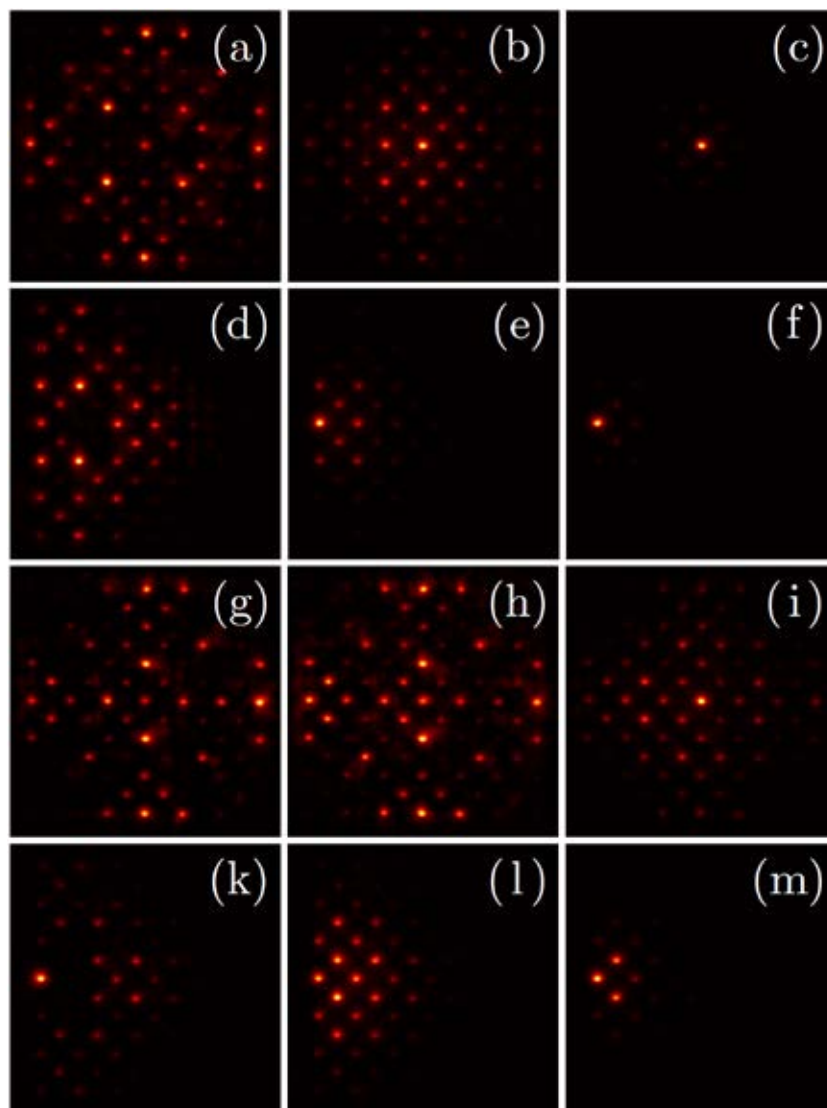


Рис. 1.18. Выходные распределения интенсивности для возбуждения центрального (первый и третий ряды) и поверхностного канала (второй и четвертый ряды) в  $D$  -решетке (a)-(f) и  $S$  -решетке (g)-(m). Первая колонка соответствует пиковой входной мощности 200 kW , вторая колонка соответствует мощности 1 MW , а третья - мощности 2 MW .

распределения интенсивности записывались с помощью CCD камеры. Эти распределения для случаев, когда исходный пучок вводился в центральный и поверхностный каналы бинарной решетки, показаны на рис. 1.18 при разных уровнях мощности. Рис. 1.18(a)-1.18(f) соответствуют  $D$ -решетке, в то время как рис. 1.18(g)-1.18(m) получены для  $S$ -решетки. Первая колонка соответствует практически линейному режиму распространения при пиковой мощности 200 kW. Вторая и третья колонки иллюстрируют разные степени локализации и формирование солитонов бинарной решетки для пиковых мощностей в 1 и 2 MW, соответственно. Несмотря на то, что стационарные решения, показанные на рис. 1.17, с мощностью близкой к пороговой, намного шире в случае  $D$ -решетки, при динамическом возбуждении в слабо нелинейном режиме пучки со сравнимыми мощностями обычно испытывают несколько большее расширение в  $S$ -решетке [сравните рис. 1.18(a) с 1.18(g) и рис. 1.18(d) с 1.18(k)]. В то же время, эксперимент показывает, что формирование солитонов в  $D$ -решетке достигается при меньших пиковых мощностях по сравнению с  $S$ -решеткой, в полном соответствии с теорией. Увеличение входной мощности пучка в  $D$ -решетке всегда сопровождается монотонным увеличением локализации выходного распределения интенсивности, как для возбуждения волновода в глубине, так и на поверхности массива. Напротив, в  $S$ -решетке, после этапа начального сжатия выходного распределения, при достижении входной мощностью определенного уровня наступает резкая делокализация [рис. 1.18(h) и 1.18(l)], так что переход к формированию солитона требует значительного повышения мощности. Резкая делокализация возможна при таком уровне мощности, когда полный показатель преломления в волноводе в мелкой подрешетке, благодаря нелинейной добавке к показателю преломления, достигает показателя преломления в соседних волноводах, принадлежащих к глубокой подрешетке. При этом волноводы в мелкой и глубокой подрешетках оказываются сильно связаны, и скорость энергообмена между ними возрастает. Заметим, что из-за импульсного характера излучения для  $S$ -решетки такое согласование эффективных показателей преломления подрешеток всегда может произойти на хвостах отдельных импульсов, даже если пиковая мощность в центре импульса существенно превосходит порог для формирования солитонов. Из-за этого выходные распределения для  $S$ -решетки отличаются более заметным "фоном". Заметим, что в сильно нелинейном режиме при одинаковом уровне мощности солитоны лучше локализованы в  $D$ -решетке [ср. рис. 1.18(f) и 1.18(m)].

Таким образом, даже небольшая разница в показателях преломления двух подрешеток, формирующих бинарную решетку, приводит к существенной разнице в порогах формирования солитонов, центрированных на мелких и глубоких волноводах. Профили солитонов и даже динамика линейной дифракции также существенно различаются для возбуждений мелких и глубоких каналов.

## §1.7. Трехмерные оптические пули в периодических решетках

Одним из наиболее сложных объектов для наблюдения в эксперименте являются так называемые оптические пули - полностью трехмерные солитоны, локализованные за счет нелинейности среды как в пространстве, так и во времени. Такие солитоны формируются, когда нелинейное самовоздействие в среде одновременно компенсирует дифракционное и дисперсионное расплывание локализованного волнового пакета. Предсказанные более двадцати лет назад [111], оптические пули не наблюдались в эксперименте вплоть до недавнего времени, в основном благодаря их неустойчивости в некоторых средах, включая кубичные, а также из-за трудностей в подборе материала с достаточно низкими оптическими потерями, где дифракционная и дисперсионная длины были бы сравнимы уже для субпикосекундных импульсов. Данный параграф посвящен описанию механизма стабилизации оптических пуль в периодических двумерных решетках показателя преломления, предложенного автором данной диссертации [114,115], а также описанию первого эксперимента по наблюдению таких объектов [35].

Для описания распространения волновых пакетов в среде с фокусирующей нелинейностью, аномальной дисперсией групповых скоростей и периодической модуляцией показателя преломления используем нелинейное уравнение Шредингера для безразмерной комплексной амплитуды поля  $q$  :

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\beta}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - q |q|^2 - p R(\eta, \zeta) q. \quad (1.8)$$

Здесь нормировки амплитуды поля  $q$ , поперечных  $\eta, \zeta$  и продольной  $\xi$  координат, а также глубины решетки  $p$  совпадают с нормировками, введенными нами ранее для уравнения (1.1). При этом нормированное бегущее время  $\tau = (t - z v_{gr}^{-1}) / t_0$ , где  $t_0$  - характерная длительность импульса,  $v_{gr}$  - групповая скорость света на центральной частоте  $\omega_0$ , а дисперсионный коэффициент  $\beta = -\text{sgn}(k_2) L_{dif} / L_{dis}$  определяется соотношением дифракционной и дисперсионной  $L_{dis} = t_0^2 / |k_2|$  длин, где  $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$  также определяется на центральной частоте  $\omega_0$ . В дальнейшем мы полагаем, что дисперсионный коэффициент  $\beta = 1$  (аномальная дисперсия групповых скоростей), что всегда можно реализовать подбором характерной длительности импульса  $t_0$ , и что профиль показателя преломления описывается функцией  $R(\eta, \zeta) = \cos(\Omega \eta) \cos(\Omega \zeta)$  с  $\Omega = 4$ . Среди интегралов уравнения (1.8), т.е. величин, сохраняющихся в процессе распространения, приведем полную энергию волнового пакета  $U$  и его гамильтониан  $H$  :

$$U = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta d\zeta d\tau, \quad (1.9)$$

$$H = (1/2) \int \int \int_{-\infty}^{\infty} (|\partial q / \partial \eta|^2 + |\partial q / \partial \zeta|^2 + |\partial q / \partial \tau|^2 - |q|^4 - 2pR|q|^2) d\eta d\zeta d\tau.$$

Солитонные решения уравнения (1.8) ищем в виде  $q = w(\eta, \zeta, \tau) \exp(ib\xi)$ . Здесь будут рассмотрены лишь простейшие фундаментальные солитоны, для которых функция  $w$  не меняет знак. Масштабные преобразования в уравнении (1.8) позволяют установить простое соотношение между энергией пули  $U$ , ее постоянной распространения  $b$  и гамильтонианом  $H = -bU + (1/2) \iiint w^4 d\eta d\zeta d\tau$ . Это соотношение может быть использовано, например, для того, чтобы определить постоянную распространения  $b$  по известному профилю решения, если последний получен методом прямого распространения, а не релаксационным методом. Заметим, что для солитонных решений уравнения (1.8) в однородной кубичной среде (при  $p=0$ ) величины  $b, U, H$  связаны соотношениями  $b = \kappa U^{-2}$ ,  $H = \kappa U^{-1}$ , где константа  $\kappa \approx 44.3$ . Последнее автоматически означает, что

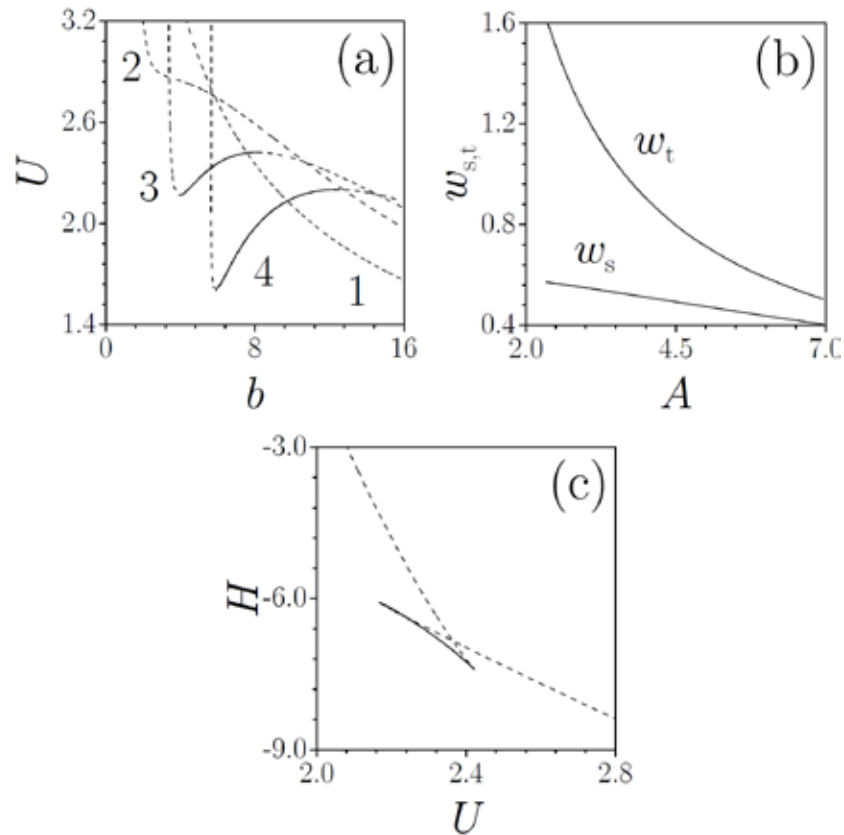


Рис. 1.19. (а) Энергия оптической пули как функция ее постоянной распространения для  $p=0$  (кривая 1),  $p=10$  (кривая 2),  $p=15$  (кривая 3) и  $p=20$  (кривая 4). (б) Зависимости пространственной  $w_s$  и временной  $w_t$  ширины пули с устойчивой ветви от амплитуды  $A$  при  $p=20$ . (с) Гамильтониан как функция энергии при  $p=15$ . На всех панелях устойчивые ветви показаны сплошными линиями, а неустойчивые пунктирными.

для пуль в однородной среде производная  $dU/db < 0$ , и, согласно критерию Вахитова-Колоколова, такие решения всегда сильно неустойчивы - для них возможен так называемый суперкритический коллапс [118]. Зависимости энергии от постоянной распространения для солитонов в решетке с  $p > 0$  приведены на рис. 1.19(a), в то время как зависимости пространственной  $w_s$  и временной  $w_t$  ширины солитона от его пиковой амплитуды  $A$  показаны на рис. 1.19(b). Видно, что пространственная ширина решеточного солитона всегда меньше его временной ширины. Из-за наличия решетки существует отсечка по постоянной распространения  $b_{co}$ , определяемая нижней границей полубесконечной запрещенной зоны. Заметим, что для оптических

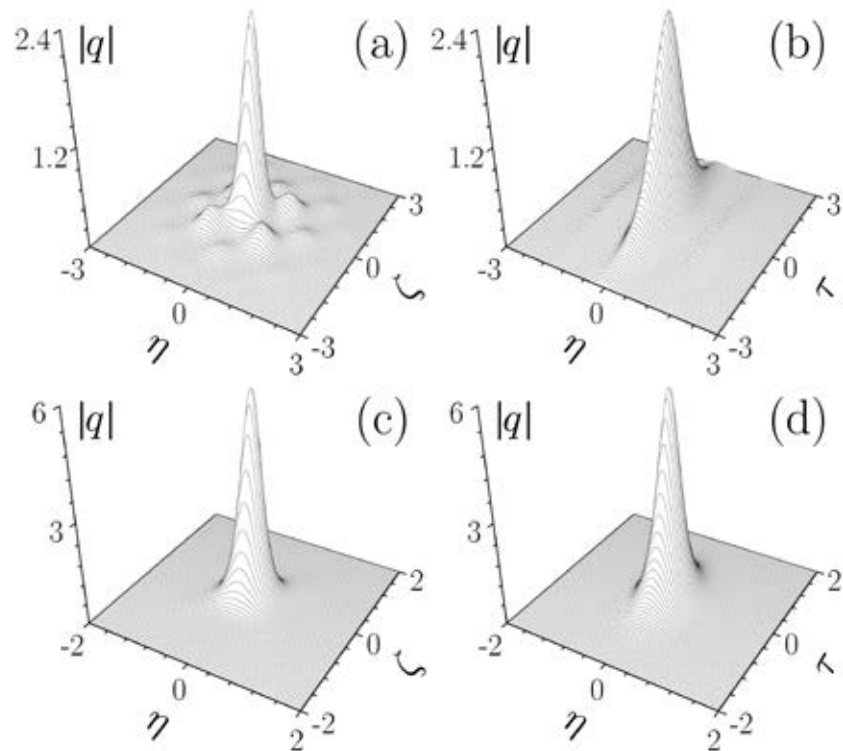


Рис. 1.20. Поперечные сечения профилей оптических пуль при  $\tau = 0$  (a),(c) и при  $\zeta = 0$  (b),(d). Панели (a),(b) соответствуют  $U = 1.60$ ,  $b = 5.965$ , в то время как панели (c),(d) соответствуют  $U = 2.17$ ,  $b = 10.702$ . Во всех случаях  $p = 20$ .

пуль не существует порога существования по энергии в отличие от двумерных решеточных солитонов. Кроме того, такие пули могут быть устойчивы лишь при промежуточных значениях энергии в ограниченном диапазоне постоянных распространения, где  $dU/db > 0$ , и только если глубина решетки достаточно велика [см. участки кривых на рис. 1.19(a) для  $p = 15, 20$ , показанные сплошными линиями]. Последнее свойство резко отличается от свойств двумерных солитонов, которые могут быть устойчивы даже в мелких решетках показателя преломления и, как правило, для полубесконечного ин-

тервала постоянных распространения  $b > b_{cr}$ . Для сравнения, на рис. 1.19(a) также приведена зависимость  $U(b)$  для однородной среды. Видно, что увеличение глубины решетки приводит к постепенной деформации изначально монотонно убывающей зависимости  $U(b)$ , ее перегибу и, наконец, формированию участка стабильности с  $dU/db > 0$ . На участке, близком к отсечке, оптические пули характеризуются широкими пространственными профилями и являются неустойчивыми. Однако, в достаточно глубокой решетке такие пули стабилизируются, когда их ширина уменьшается вплоть до нескольких периодов решетки. Дальнейшее увеличение постоянной распространения и пиковой амплитуды сопровождается сужением пули вплоть до одного канала решетки, причем в этом режиме нелинейные эффекты доминируют над модуляцией показателя преломления и в результате снова происходит дестабилизация солитона.

Зависимости гамильтониана от энергии показаны на рис. 1.19(c). Такие  $H(U)$  диаграммы бывают весьма полезны при анализе существования и устойчивости солитонов в консервативных системах и широко используются в теории катастроф [123]. Оказывается, что зависимости  $H(U)$  для пуль в периодических решетках могут иметь два излома вместо одного (диаграммы такого типа в теории катастроф называются "ласточкин хвост"), что достаточно необычно как для двумерных, так и для трехмерных гамильтоновых систем. Устойчивость соответствующего решения меняется в точке излома кривой  $H(U)$ .

Типичный профиль оптической пули с малой амплитудой, постоянная распространения которой близка к отсечке, показан на рис. 1.20(a) и 1.20(b). Видно, что солитон занимает несколько каналов решетки и существенно более вытянут в направлении оси  $\tau$ , чем вдоль пространственной оси (например  $\eta$ ). Типичный солитон с достаточно высокой амплитудой, который сосредоточен практически в одном канале решетки, показан на рис. 1.20(c) и 1.20(d). Постоянная распространения такого солитона находится внутри области устойчивости близко к ее правой границе. Пространственная и временная ширины для такого солитона достаточно близки. При наличии малых исходных возмущений оптические пули, принадлежащие к области устойчивости, испытывают лишь небольшие осцилляции, в то время как солитоны с неустойчивых ветвей либо коллапсируют, либо полностью расплываются. Заметим, что стабилизация пуль возможна не только в периодических решетках показателя преломления [114], но и в более сложных решетках, например индуцированных оптически недифрагирующими пучками Бесселя [115].

Возможность существования устойчивых оптических пуль в периодических решетках, предсказанная в рамках простейшей модели (1.8) в работах [114,115], позволила осуществить их экспериментальное наблюдение [35]. В эксперименте использовался гексагональный массив, состоящий из 91 слабо связанного одномодового кварцевого

волновода [рис. 1.21(a)]. Расстояние между соседними волноводами в массиве составляло  $d = 33.2 \mu\text{m}$ , радиус отдельных каналов с увеличенным показателем преломления составлял  $r = 9.8 \mu\text{m}$  при глубине модуляции показателя преломления  $\delta n \approx 1.2 \times 10^{-3}$ . Для возбуждения центрального волновода в массиве использовался высокоинтенсивный волновой пакет с центральной длиной волны  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$  и длительностью 170 fs. Выходные распределения интенсивности регистрировались с помощью инфракрасной камеры, в то время как временной профиль и спектр выходного волнового пакета анализировались на основе результатов его взаимодействия с пробным импульсом с длительностью 60 fs на длине волны 800 nm в кристалле ВВО толщины  $25 \mu\text{m}$ , расположенном за массивом волноводов. В эксперименте использовались массивы различной длины от 30 до 100 mm. Выходное распределение интенсивности на рис. 1.21(b) иллюстрирует дискретную дифракцию волнового пакета в линейном случае в массиве длиной 50 mm. Регулярность этого распределения свидетельствует о практически идеальной



Рис. 1.21. (a) Фотография массива, использовавшегося в эксперименте. (b) Выходное распределение интенсивности в массиве длиной 50 mm в линейном режиме.

периодичности модуляции показателя преломления и отсутствию дефектов в массиве, что необходимо для достоверного наблюдения оптических пульс. Дисперсия групповых скоростей являлась аномальной на длине волны  $1.55 \mu\text{m}$ , что и требуется для формирования солитонов в фокусирующей среде, однако из-за значительного сокращения длительности импульсов в процессе динамической генерации пульс также необходим учет дисперсии высших порядков. Более того, степень связи между соседними волноводами, определяющая скорость дискретной дифракции и зависящая от перекрытия мод отдельных волноводов, также может существенно меняться для разных спектральных компонент импульса. Поэтому для моделирования распространения волновых пакетов в такой системе была разработана специфическая дискретная модель, детали которой приведены в [35], оперирующая с амплитудами поля в волноводах в спектральном пространстве и учитывающая реальную дисперсионную кривую  $k(\omega)$  периодического массива, дисперсию константы связи между волноводами  $C(\omega)$ , рамановский сдвиг частоты и другие эффекты высшего порядка. Экспериментальные результаты приведены на рис.

1.22 для массива длиной 40 mm. Выходные пространственные распределения интенсивности, кросс-корреляционные функции (иллюстрирующие временные распределения) для центрального волновода, а также экспериментальные трехмерные пространственно-временные профили выходных волновых пакетов показаны для трех разных уровней пиковой мощности. При низком уровне пиковой мощности 0.2 MW свет испытывает значительное расплывание в массиве, сопровождающееся временным уширением импульса в центральном волноводе [рис. 1.22(a)-1.22(c)]. При увеличении входной

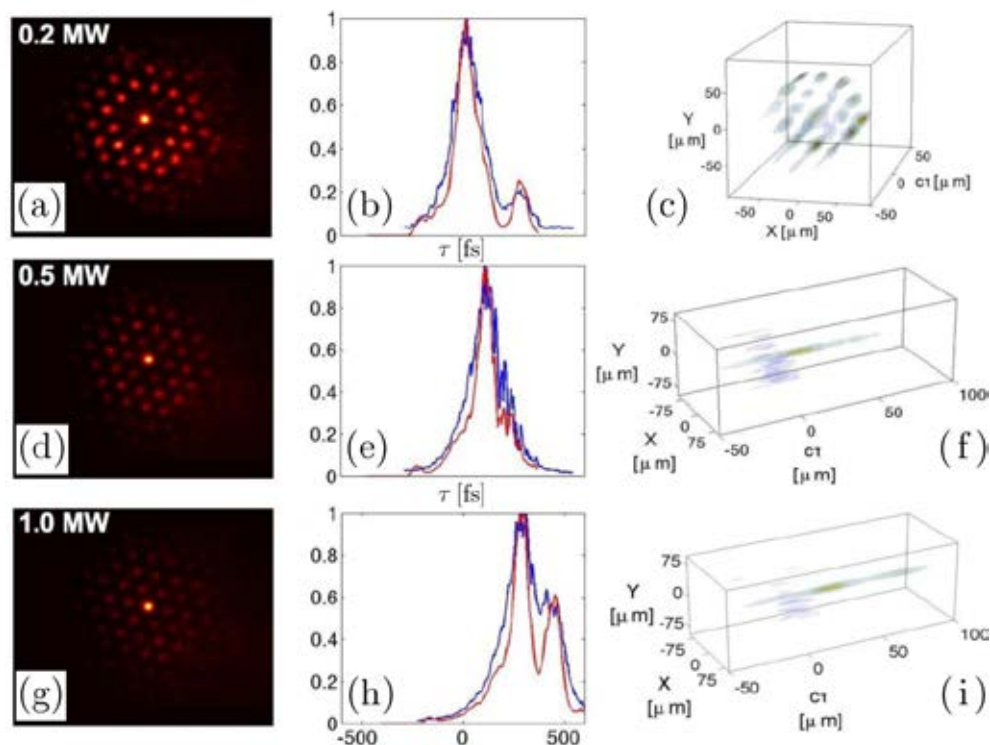


Рис. 1.22. Экспериментальное наблюдение световых пучков в 40 mm массиве волноводов. Пространственное распределение интенсивности (первая колонка), нормированная временная кросс-корреляционная функция в центральном волноводе (вторая колонка, красная кривая) и пространственно-временные распределения поля (третья колонка). Три ряда соответствуют разным уровням мощности.

пиковой мощности вплоть до 0.4 MW наблюдается резкая пространственная локализация света в центральном волноводе, сопровождающаяся уменьшением длительности выходного импульса до значений ниже предела разрешения (60 fs) используемой здесь кросс-корреляционной техники [рис. 1.22(d)-1.22(f)]. Для еще больших пиковых мощностей порядка 1.0 MW пространственная локализация становится еще более четко выраженной, в то время как во временных распределениях начинают наблюдаться несколько пиков, указывающих на формирование нескольких световых пучков, следующих друг за другом с определенной задержкой [рис. 1.22(g)-1.22(i)]. В процессе распростра-



нения широкий 170 fs импульс, запущенный в центральный волновод, испытывает существенное самосжатие, сопровождающееся распадом на отдельные солитоны с длительностями от 15 до 30 fs, стимулированным эффектами высшего порядка (в основном рамановским эффектом). Образовавшиеся солитоны распространяются практически без искажений на расстояния вплоть до 40 mm, оставаясь при этом локализованными не только во времени, но и в пространстве. При этом они испытывают заметный сдвиг центральной частоты в спектре в низкочастотную область из-за рамановского самопреобразования спектра, который проявляется также в увеличивающейся с увеличением входной пиковой мощности временной задержкой, наблюдаемой на рис. 1.22(b), 1.22(e) и 1.22(h). Таким образом, оптические пули в реальном массиве волноводов существуют скорее как квазистационарные состояния, локализованные в пространстве и времени, параметры которых медленно меняются под действием эффектов высшего порядка. На больших трассах распространения рамановский сдвиг частоты может привести к разрушению пуль, поскольку из-за увеличения длины волны существенно возрастает связь между отдельными волноводами, увеличивается энергия, при которой пуля может быть устойчива, и в один момент текущая энергия волнового пакета оказывается недостаточной для поддержания устойчивого распространения.

В заключение, в данном параграфе показано, что поперечная модуляция показателя преломления приводит к подавлению коллапса даже в кубичной нелинейной среде и формированию устойчивых световых пуль, которые наблюдались экспериментально.

## Глава 2. Солитоны в оптических решетках, индуцированных недифрагирующими пучками Бесселя, параболическими пучками и пучками Матъе

Методика оптического наведения решеток, впервые упомянутая в работах [46, 47], предоставляет весьма широкие возможности для экспериментального исследования распространения солитонов в пространственно-неоднородных средах. Прежде всего, это обусловлено возможностью стирать (с помощью освещения кристалла интенсивным зеленым светом) и повторно наводить любую решетку в одном и том же фоторефрактивном кристалле. Данное преимущество оптически-индуцированных структур очевидно при их сравнении с неперестраиваемыми структурами, такими как массивы волноводов, записанные лазерными импульсами или изготовленные посредством внедрения примесей в поверхность материала, которые не могут быть изменены после их создания. Более того, поскольку в фоторефрактивном кристалле нелинейный отклик возникает из-за того, что изменения внутреннего поля кристалла (внутреннего пространственного заряда), возникающие при генерации свободных носителей заряда под действием света и последующем их захвате на дефектах в кристалле, отражаются на его показателе преломления благодаря электрооптическому эффекту, то нелинейность таких сред весьма высока, и эксперименты могут проводиться с непрерывным излучением при весьма низких уровнях мощности  $\sim 1 \mu W$ , которые зависят от величины приложенного к кристаллу статического поля. Возможность оптической индукции различных распределений показателя преломления связана с сильной анизотропией нелинейности фоторефрактивных кристаллов, из-за которой обыкновенно поляризованная волна, наводящая решетку, практически не испытывает самовоздействия. Последнее означает, что любой недифрагирующий в линейном случае пучок может быть использован для создания необходимого поперечного распределения показателя преломления внутри фоторефрактивного кристалла, которое будет оставаться неизменным вдоль оси  $\xi$  распространения пучка. В первых работах по решеточным солитонам использовались лишь простейшие решетки, наведенные с помощью интерференции нескольких плоских волн, которые являются элементарными недифрагирующими модами однородной среды (см. обзоры [53,54]). Так, пара пересекающихся плоских волн создает квазиодномерную гармоническую решетку, три интерферирующие плоские волны наводят гексагональную решетку, четыре волны создают двумерную квадратную решетку и т.д. Однако, помимо пучков, получающихся в результате интерференции плоских волн, существуют и другие, более сложные, семейства недифрагирующих пучков.

Эти семейства определяются неизменными в процессе эволюции решениями уравнения Гельмгольца, описывающего распространение излучения в однородной линей-

ной среде. Теория групп предсказывает, что существует четыре системы координат (декартова, полярная цилиндрическая, эллиптическая цилиндрическая и параболическая цилиндрическая системы), где уравнение Гельмгольца может быть разделено на два уравнения, одно из которых описывает поперечное распределение поля, а другое - эволюцию комплексной амплитуды пучка вдоль координаты распространения [124]. В каждой из этих четырех систем координат можно построить недифрагирующие пучки, используя фундаментальные решения уравнения Гельмгольца, имеющие свой специфический вид и симметрию. Так, в декартовой системе координат фундаментальные решения представлены плоскими волнами, полярная цилиндрическая система координат позволяет построить недифрагирующие пучки Бесселя, пучки Матье связаны с эллиптическими цилиндрическими координатами, и, наконец, параболические пучки возникают при анализе фундаментальных решений в параболической цилиндрической системе координат. Все эти пучки наблюдались экспериментально. Так, пучки Бесселя были предсказаны и получены в работе [125], пучки Матье обсуждались и наблюдались в работах [126,127], а параболические пучки в работе [128]. Необходимо отметить, что далее обсуждаются только пучки, распространяющиеся по прямолинейным траекториям, поскольку в принципе возможно также построение недифрагирующих пучков, движущихся по параболическим траекториям [129].

Важно, что поле любого недифрагирующего пучка в однородной среде, распространяющегося вдоль оси  $\xi$ , может быть записано с использованием интеграла Уиттекера [128]:

$$q_{\text{nd}}(\eta, \zeta, \xi) = \exp(-ik_t^2 \xi / 2) \int_0^{2\pi} G(\phi) \exp[ik_t(\eta \cos \phi + \zeta \sin \phi)] d\phi, \quad (2.1)$$

где  $k_t = (k_\eta^2 + k_\zeta^2)^{1/2}$  - безразмерное поперечное волновое число, определяющее характерный масштаб пучка (увеличение  $k_t$  сопровождается уменьшением поперечного масштаба),  $\phi$  - азимутальный угол в спектральном пространстве,  $\eta, \zeta$  - поперечные координаты,  $G(\phi)$  - комплексный угловой спектр пучка. Фурье-образ поля  $q_{\text{nd}}$  имеет вид бесконечно узкого кольца радиуса  $k_t$ , причем угловой спектр  $G(\phi)$  как раз и определяет амплитуды спектральных компонент на этом кольце. С физической точки зрения уравнение (2.1) описывает суперпозицию плоских волн, которые имеют одинаковые поперечные волновые числа  $k_t = (k_\eta^2 + k_\zeta^2)^{1/2}$  (при этом компоненты волнового вектора  $k_\eta, k_\zeta$  естественно могут различаться) и, как следствие, испытывают одинаковые фазовые набег  $\sim k_t^2 \xi / 2$  при распространении на расстояние  $\xi$ , т.е. в недифрагирующем пучке не происходит дефазировки отдельных спектральных компонент (плоских волн), которая могла бы привести к его расплыванию. Решение (2.1) является недифрагирующим для про-

извольного углового спектра  $G(\phi)$ , т.е. используя интеграл (2.1) можно получить поле любого известного недифрагирующего пучка. Например, суперпозиция  $M$  плоских волн  $G(\phi) = \sum_{m=1}^M \delta(\phi - \phi_m)$  дает пучки с калейдоскопическими распределениями интенсивности, включая гексагональные и квадратные. Угловой спектр  $G(\phi) = \exp(im\phi)$  соответствует пучку Бесселя порядка  $m$  с таким же топологическим зарядом, в то время как угловой спектр вида  $G(\phi) = ce_m(\phi, \kappa) + i se_m(\phi, \kappa)$ , где  $ce_m(\phi, \kappa)$  и  $se_m(\phi, \kappa)$  - специальные угловые функции Матье, а  $\kappa$  - специфический параметр, определяющий масштаб решетки, задает профиль пучка Матье порядка  $m$ .

Как было упомянуто выше, любой недифрагирующий пучок вида (2.1) может использоваться для индукции пространственно-неоднородного распределения показателя преломления в фоторефрактивном кристалле (в дальнейшем для краткости мы будем называть такие распределения решетками, хотя они могут сильно отличаться от простейших периодических распределений). При этом профиль решетки и глубина модуляции показателя преломления определяются интенсивностью светового пучка  $|q_{nd}|^2$ , т.е. могут легко контролироваться. Весьма важной представляется возможность создания решеток с совершенно новыми типами симметрии, определяемыми топологией соответствующих недифрагирующих пучков, поскольку в таких решетках возможны новые режимы распространения и взаимодействия оптических солитонов. Замечу, что различные недифрагирующие пучки широко используются также в других областях оптики, например, для захвата и сортировки микрочастиц [130], удвоения частоты [131], в атомной оптике [132] и даже в конденсатах Бозе-Эйнштейна [133].

Возможность использования недифрагирующих пучков Бесселя нулевого порядка для индукции радиально симметричных решеток показателя преломления была впервые предложена автором данной диссертации в работе [134]. Описанию свойств таких солитонов посвящен первый параграф этой главы. В частности, в нем показывается, что солитоны могут существовать не только в центральном канале решетки Бесселя, но также и в любом из ее колец, причем благодаря радиальной симметрии решетки солитоны в ее кольцах могут свободно вращаться, не теряя мощности на излучение. При этом результат взаимодействия солитонов, вращающихся в одном или различных кольцах, существенно зависит от их разности фаз и скорости вращения и может использоваться для переключения света светом. Экспериментальное наблюдение таких солитонов было проведено в работе [135], авторы которой реализовали постепенный переход от дифракции к формированию солитонов как в центральном канале решетки, так и в ее кольцах. Возможность вращения солитонов в решетках Бесселя также была подтверждена экспериментально [135,136]. Впоследствии свойства солитонов в различных вариантах радиально симметричных или радиально периодических решеток исследовались в целом ряде работ [137-146].

Помимо радиально симметричных недифрагирующих пучков, для создания решетки показателя преломления могут использоваться также пучки Бесселя порядка  $n > 0$  с азимутально-модулированными распределениями интенсивности. Такие решетки характеризуются наличием  $2n$  локальных максимумов показателя преломления (каналов) по азимуту. При этом в фокусирующей среде фундаментальные солитоны могут поддерживаться любым из таких каналов, причем возможно даже формирование мультиполей высшего порядка с  $2n$  противофазными пиками, как было впервые показано автором диссертации в работе [147]. Описанию таких солитонов посвящен второй параграф данной главы. В этом параграфе также показано, что если фундаментальный солитон в модулированной решетке запущен тангенциально по отношению к кольцу главных максимумов, то возможно его азимутальное переключение между каналами и даже возврат в исходный канал после одного полного оборота. Необходимо отметить, что солитоны в азимутально-модулированных решетках Бесселя наблюдались экспериментально в работе [148]. В дефокусирующей среде мультипольные и вихревые солитоны в модулированной решетке Бесселя были исследованы в работе [149].

Помимо фундаментальных и мультипольных солитонов, решетки Бесселя могут поддерживать также вихревые солитоны, характеризующиеся специфическими распределениями фазы и наличием фазовых дислокаций с различными топологическими зарядами. При этом в фокусирующей нелинейной среде такие солитоны могут быть устойчивы только в том случае, если решетка показателя преломления приводит к значительной азимутальной модуляции распределения интенсивности солитона, как это происходит в обычных периодических решетках [89,96,97,98]. Радиально симметричные решетки, индуцированные в фокусирующей среде, вообще говоря, не могут поддерживать устойчивые вихревые солитоны, за исключением, может быть, низкоамплитудных вихрей, профили которых близки к профилям линейных мод системы и для которых азимутальная модуляционная неустойчивость подавлена [150]. Однако проблема модуляционной неустойчивости вихревых солитонов в принципе не возникает в том случае, если нелинейность среды является дефокусирующей. При этом решетка Бесселя может обеспечить локализацию света в радиальном направлении и существование устойчивых светлых вихревых солитонов с радиально-симметричными профилями. Описанию свойств таких солитонов, впервые полученных автором в работе [151], посвящен третий параграф данной главы. Эксперименты с оптически-индуцированными радиально симметричными решетками в дефокусирующей среде были проведены впоследствии в работе [152].

Хотя простейшие вихревые солитоны с единичными топологическими зарядами и характерными распределениями интенсивности с четырьмя максимумами, совпадающими с максимумами показателя преломления, были реализованы в эксперименте дос-

таточно давно [97,98], все попытки наблюдать такие компактные вихревые солитоны с более высокими зарядами в квадратных решетках не увенчались успехом, причем даже в теории вместо компактных вихревых структур с зарядами  $m > 1$  в таких решетках удавалось найти лишь сложные распределения с восемью и более максимумами интенсивности [153]. Причины этого стали поняты лишь после работы автора [154], где было показано, что решетка показателя преломления с определенной дискретной вращательной симметрией (т.е. симметрией по отношению к повороту на определенный угол) всегда накладывает ограничения на максимально возможный заряд вихревых солитонов, обладающих такой же дискретной симметрией модуля поля. Объяснению этого интересного эффекта посвящен четвертый параграф данной главы. В частности, в нем показано, что квадратные решетки показателя преломления не могут поддерживать вихревые солитоны с четырьмя максимумами интенсивности и зарядами  $m > 1$ . В то же время, существование вихревых солитонов с более высокими топологическими зарядами возможно в азимутально-модулированных решетках Бесселя с вращательными симметриями  $2n > 4$  (здесь  $n$  - порядок пучка Бесселя наводящего решетку). Автором диссертации было впервые выведено правило устойчивости для вихревых солитонов в оптических решетках. Эти предсказания использовались впоследствии при экспериментальном наблюдении вихревых солитонов с зарядом 2 в гексагональных решетках [155]. Факт наличия ограничения на топологический заряд вихрей в решетках использовался в работе [156] для вывода законов преобразования заряда оптического вихря при его падении из среды с одним типом вращательной симметрии на среду с другим типом симметрии. Впоследствии была также разработана подробная математическая теория вихрей в системах с дискретной вращательной симметрией, оперирующая с угловым псевдомоментом вихря, который сохраняется при его распространении [157].

Если в статических решетках показателя преломления профили солитонов всегда остаются неизменными в процессе распространения (если только такие солитоны устойчивы), то деформация профиля решетки должна немедленно сказываться на профиле солитонного пучка. В этом отношении особенно интересны периодические деформации решетки, когда ее исходный профиль полностью воспроизводится на расстоянии  $\xi = nT$ , где  $T$  - период осцилляций. Метод оптической индукции допускает создание таких решеток, например, в том случае, когда решетка индуцируется двумя недифрагирующими пучками с различающимися постоянными распространения (и, как следствие, различающимися характерными поперечными масштабами). В этом случае период осцилляций амплитуды оптически индуцированной решетки определяется разностью постоянных распространения создающих ее пучков. Идея генерации таких динамических решеток была впервые предложена автором диссертации в работе [158], где для наведения решетки использовались два пучка Бесселя разного порядка с

совпадающими центрами и разными постоянными распространения, подобранными таким образом, чтобы максимумы интенсивности в обоих пучках находились на одинаковом удалении  $r$  от оси. Интерференция этих пучков приводит к формированию вращающихся решеток, которые могут захватывать фундаментальные и мультипольные солитоны и поворачивать их на необходимый угол, как описано в пятом параграфе данной главы. Это предложение получило экспериментальное подтверждение в работе [159].

Помимо пучков Бесселя для оптической индукции решеток могут использоваться недифрагирующие пучки Матье и параболические пучки. Солитоны в таких решетках были впервые исследованы в работах автора [160,161] и описываются в шестом и седьмом параграфах данной главы. В обоих случаях топология решетки существенно влияет на симметрию и устойчивость соответствующих солитонов. В частности, решетки Матье, которые при изменении одного из параметров преобразуются либо в решетки Бесселя, либо в квазиодномерные периодические решетки, поддерживают солитоны, профили которых постепенно меняются от радиально симметричных до сильно вытянутых по одной из поперечных координат. Аналогично, в параболических решетках возможно устойчивое распространение мультипольных солитонов с искривленными параболическими осями, ответвляющимися от соответствующих линейных мод решетки при увеличении пиковой амплитуды. Впоследствии вихревые и мультипольные солитоны в решетках Матье исследовались в работах [162,163].

Таким образом, в основу данной главы вошли результаты оригинальных исследований солитонов в бесселевых и параболических решетках, а также решетках Матье, опубликованные в работах автора [134,147,151,154,158,160,161,165].

## **§2.1. Вращающиеся солитоны в бесселевых решетках показателя преломления**

В данном параграфе обсуждаются свойства солитонов в радиально симметричных решетках, индуцированных пучками Бесселя [134]. Свойства солитонов в среде с пространственно-неоднородным показателем преломления кардинально зависят от симметрии решетки. Например, периодические решетки приводят к появлению разрешенных и запрещенных зон и определяют симметрию профилей солитонов для постоянных распространения вблизи границ разных зон (см. главу 1). Однако, радиально-симметричные решетки, индуцированные пучками Бесселя, уже не являются строго периодическими, вдобавок их амплитуда убывает при  $r \rightarrow \infty$  и спектр собственных значений для мод в таких решетках кардинально отличается от спектра периодических решеток [линейный спектр уже совершенно другой даже для радиально периодических ре-

шетоков вида  $\cos^2(\Omega r)$ , хотя при  $r \rightarrow \infty$  профиль такой решетки очень близок к профилю квазиодномерной периодической решетки]. Последнее напрямую отражается на областях существования и порогах по мощности, требуемых для формирования солитонов.

Для описания распространения излучения в бесселевой решетке в фокусирующей нелинейной среде будем использовать двумерное уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) + \sigma q |q|^2 - p R(\eta, \zeta) q, \quad (2.2)$$

где функция  $R(\eta, \zeta) = J_0[(2k_t)^{1/2}(\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}]$  описывает профиль радиально симметричной решетки Бесселя нулевого порядка, в то время как параметр  $k_t$  характеризует поперечный масштаб пучка (радиусы колец в решетке). Параметр  $\sigma = -1$  соответствует фокусирующей нелинейности. Здесь рассматривается случай простейшей решетки нулевого порядка, характеризующейся максимумом показателя преломления на оси при  $r = (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2} = 0$ , окруженным множественными кольцами, амплитуда которых уменьшается как  $r^{-1/2}$  при  $r \rightarrow \infty$ . Отметим, что решетка, амплитуда которой определяется амплитудой пучка Бесселя, а не его интенсивностью, была здесь выбрана из-за ее большего контраста и меньшей скорости убывания на периферии. Такая решетка может быть индуцирована оптически с помощью суперпозиции пучка Бесселя и плоской волны (подобные пучки генерируются при освещении специального конического элемента аксикона или узкой круговой щели с заданной функцией пропускания, находящейся в фокальной плоскости линзы) [125]. Радиально-симметричные решетки также могут быть изготовлены технологически [164]. Как и в одномерном уравнении Шредингера, первый член в круглых скобках в правой части уравнения (2.2) описывает дифракционное распывание пучка, второй член описывает его нелинейное самовоздействие, а третий член - рефракцию в среде с пространственно неоднородным показателем преломления.

Профили простейших солитонов в центральном канале бесселевой решетки ищутся в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(r) \exp(ib\xi)$ , где  $b$  - постоянная распространения, а функция  $w(r)$  описывает радиальное распределение поля. Используя масштабные преобразования  $q(r, \xi, p) \rightarrow \chi q(\chi r, \chi^2 \xi, \chi^2 p)$ , можно подобрать поперечный масштаб таким образом, что  $k_t = 10$  и варьировать лишь параметры  $b$  и  $p$ . Свойства солитонов, центры которых совпадают с осью решетки, представлены на рис. 2.1. При низких мощностях они существенно расширяются в радиальном направлении, покрывая несколько колец решетки, а при высоких мощностях свет концентрируется в центральном канале [рис. 2.1(b)]. В мелких решетках мощность солитона является немонотонной функцией постоянной распространения, но при превышении глубиной решетки критического значения



$p_{\text{cr}} \approx 3.91$ , она монотонно увеличивается с ростом  $b$  [рис. 2.1(a)]. Так же, как и в периодических решетках, существует отсечка по постоянной распространения, ниже которой солитоны найти не удастся, и которая растет с увеличением глубины решетки [рис. 2.1(c)]. При  $b \rightarrow b_{\text{co}}$  мощность солитона  $U \rightarrow 0$  поскольку решетка поддерживает линейные моды с центром в точке  $r=0$ , ширина которых существенно возрастает по мере уменьшения глубины решетки.

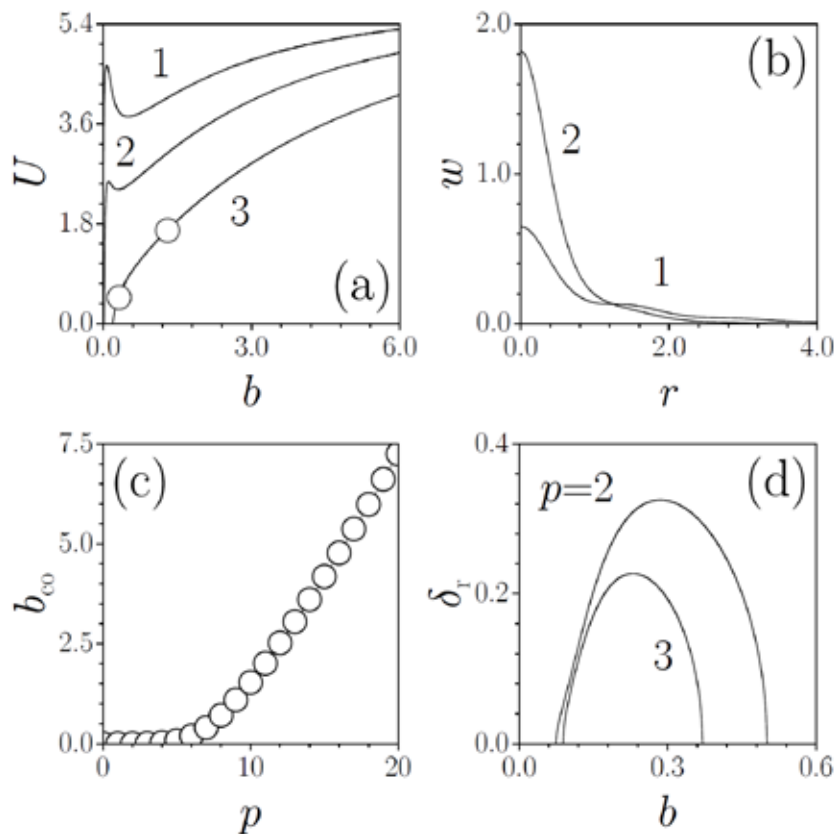


Рис. 2.1. (a) Мощность солитона в зависимости от постоянной распространения для  $p=2$  (кривая 1),  $p=3.5$  (кривая 2) и  $p=6$  (кривая 3). (b) Профили солитонов, соответствующие точкам на панели (a). (c) Отсечка как функция глубины решетки. (d) Действительная часть инкремента нарастания возмущения как функция  $b$ .

При анализе устойчивости радиально симметричных солитонов возмущенные решения ищутся в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = [w(r) + u(r) \exp(in\phi + \delta\xi) + v^*(r) \exp(-in\phi + \delta^*\xi)] \exp(ib\xi)$ , где  $u, v$  - компоненты возмущения, которые могут расти с инкрементом  $\delta = \delta_r + i\delta_i$ ,  $\phi$  - азимутальный угол, а  $n \in \mathbb{Z}$  - азимутальный индекс возмущения. Линеаризация уравнения (2.1) приводит к задаче на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{aligned}
i\delta u &= -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) u + bu - w^2(v + 2u) - pRu, \\
i\delta v &= +\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) v - bv + w^2(u + 2v) + pRv.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Численное решение системы (2.3) показывает, что солитонные семейства являются устойчивыми, если выполняется условие  $dU/db > 0$ , в соответствии с критерием Вахитова-Колоколова. При этом для  $p < p_{\text{cr}}$  существует область постоянных распространения, в которой  $dU/db \leq 0$  и солитоны неустойчивы. Неустойчивость может вызываться только возмущениями с азимутальным индексом  $n = 0$ . Типичные зависимости действительной части инкремента возмущений от  $b$  показаны на рис. 2.1(d). Заметим, что область неустойчивости существенно расширяется при  $p \rightarrow 0$  и исчезает при  $p \rightarrow p_{\text{cr}}$ .

Солитоны могут существовать не только в центральном канале бесселевой решетки, но и в различных ее кольцах. Возможность формирования таких солитонов, которые уже не являются радиально симметричными, обусловлена наличием множества радиальных максимумов показателя преломления, вблизи которых концентрируется свет. Пример солитона, поддерживаемого первым кольцом бесселевой решетки, приведен на рис. 2.2(a) (кольцо, в котором находится солитон, показано белой кривой). Их мощность всегда является немонотонной функцией постоянной распространения, причем существует нижний порог по мощности. Если вдали от отсечки  $b_{\text{co}}$  по постоянной распространения такие солитоны сильно локализованы и их центр практически совпадает с максимумом решетки, то при  $b \rightarrow b_{\text{co}}$  они становятся сильно эллиптическими, растягиваясь не только вдоль кольца, где находится центр солитона, но и проникая в несколько соседних колец. Интересно, что отсечка и порог по мощности существенно меняются для солитонов, локализованных в разных кольцах решетки. Анализ устойчивости показывает, что солитоны неустойчивы лишь вблизи отсечки  $b_{\text{co}}$  и становятся устойчивыми с ростом  $b$ . При этом устойчивые солитоны являются достаточно узкими, и их поле сосредоточено практически в одном кольце. Одним из наиболее важных свойств таких солитонов является возможность их вращения в кольце решетки без потерь на излучение, благодаря отсутствию азимутальной модуляции показателя преломления [рис. 2.2(b) и 2.2(c)]. Вращение может быть инициировано запуском солитона в тангенциальном направлении или наложением специфического распределения фазы  $\exp(i\nu\phi)$  на исходный профиль солитона. Если параметр  $\nu$  не превосходит критического значения  $\nu_{\text{cr}}$ , то начинается вращательное движение солитона без видимых потерь даже на расстояниях  $\xi > 10^3$ , в то время как для  $\nu > \nu_{\text{cr}}$  солитон покидает исходное кольцо и начинает двигаться поперек решетки до тех пор, пока полностью не разрушится из-за потерь на излучение. Чем больше глубина решетки и мощность солитона, тем выше критическое значение  $\nu_{\text{cr}}$  и максимально возможная скорость углового вращения солитона. Воз-

возможность вращения солитонов в решетке может быть интересна для практических приложений, где требуется контроль выходного положения пучка и угла его распространения.

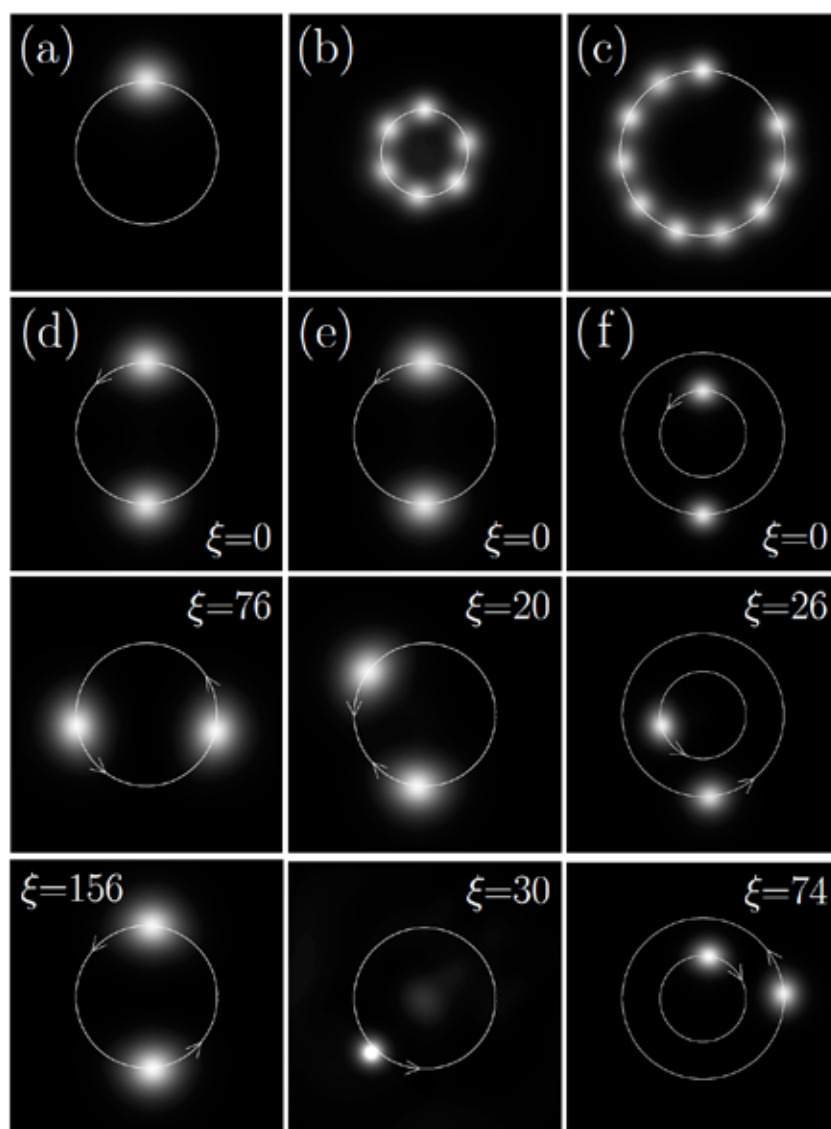


Рис. 2.2. (a) Профиль солитона в первом кольце бесселевой решетки при  $b = 3$ ,  $p = 5$ . Распределения интенсивности на разных расстояниях иллюстрирующие вращение солитонов с  $b = 3$ ,  $p = 5$  в первом (b) и втором (c) кольцах решетки. Панель (d) и панели ниже иллюстрируют взаимодействие противофазных солитонов, поле одного из которых было умножено на  $\exp(i\nu\phi)$  с  $\nu = 0.1$ . Панель (e) и панели идущие ниже иллюстрируют взаимодействие синфазных солитонов при тех же условиях что и на (d). (f) Взаимодействие противофазных солитонов в первом и втором кольце решетки. Поле солитона в первом кольце было изначально умножено на  $\exp(i\nu\phi)$  с  $\nu = 0.2$ . Все солитоны на панелях (d)-(f) получены при  $b = 5$ ,  $p = 5$ . Направления вращения указаны стрелками.

Весьма интересна также динамика взаимодействия солитонов в радиально симметричных решетках. Примеры таких взаимодействий показаны на рис. 2.2(d)-2.2(f). В простейшем случае один из солитонов покоится, в то время как другой солитон вращается в том же кольце, что приводит к их столкновению. Для небольшой скорости вращения результат взаимодействия зависит от разности фаз солитонов. Противофазные солитоны отталкиваются, так что после столкновения может сформироваться пара вращающихся солитонов с практически неизменным расстоянием между их

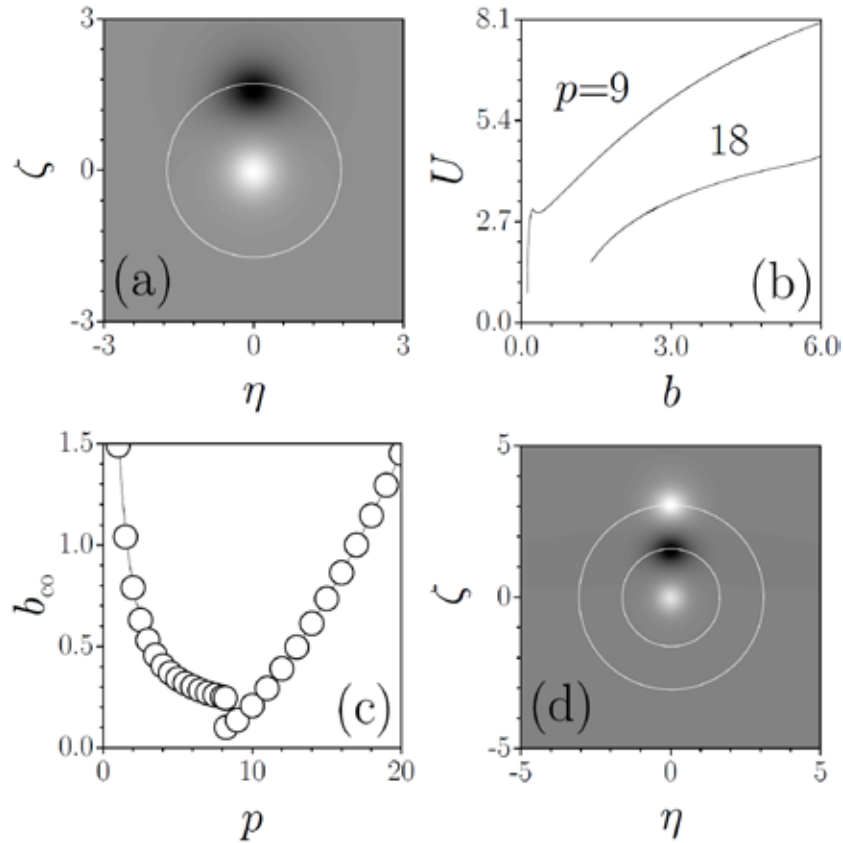


Рис. 2.3. (a) Профиль дипольного солитона при  $b=2$ ,  $p=6$ . (b) Зависимость мощности дипольного солитона от постоянной распространения. (c) Отсечка по постоянной распространения для дипольных солитонов как функция глубины решетки. (d) Профиль трипольного солитона при  $b=2$ ,  $p=6$ .

центрами [рис. 2.2(d)]. Последнее указывает на возможность существования в радиально-симметричных решетках устойчивых вращающихся солитонных комплексов, скомпонованных из противофазных пучков. Синфазные солитоны, как правило, сливаются в результате столкновения в один высокоинтенсивный пучок с меньшей угловой скоростью вращения, чем у одного из исходных солитонов [рис. 2.2(e)]. Если же исходная скорость вращения велика, то взаимодействующие солитоны практически всегда сливаются после столкновения. Любопытная динамика распространения наблюдается в

том случае, когда два противофазных солитона находятся в разных кольцах решетки [рис. 2.2(f)]. В этом случае солитон во внутреннем кольце может изменить направление своего вращения после взаимодействия (осуществляющегося при перекрытии хвостов пучков) с солитоном из внешнего кольца. Это приводит к вращению солитонов в противоположных направлениях, причем направление вращения для каждого из солитонов меняется после периодически повторяющихся столкновений.

Радиально симметричные решетки могут поддерживать солитоны высших порядков. Пример дипольного солитона, включающего два противофазных пика в центральном канале и первом кольце бесселевой решетки, показан на рис. 2.3(a). Интересно, что мощность дипольных солитонов может быть монотонно растущей функцией постоянной распространения в достаточно глубоких решетках [рис. 2.3(b)]. Вблизи отсечки по постоянной распространения [рис. 2.3(c)] дипольные солитоны могут быть осцилляторно неустойчивы, но они стабилизируются с увеличением  $b$ . Помимо дипольных солитонов удается найти также устойчивые квадрупольные солитоны. Заметим, что радиально-симметричные структуры могут поддерживать солитоны с пиками интенсивности находящимися не только в одном кольце решетки, но и в разных кольцах [пример такого трипольного солитона приведен на рис. 2.3(d)], однако последние зачастую бывают неустойчивы и при наличии возмущений распадаются на составляющие фундаментальные солитоны, которые начинают вращаться. При этом устойчивые мультиполи могут вращаться как целое, не теряя своей внутренней структуры [165].

Таким образом, в радиально-симметричных решетках Бесселя могут существовать солитоны, свойства которых радикально отличаются от свойств солитонов в периодических системах - в частности, в них возможно устойчивое вращение не только фундаментальных солитонов, но и мультиполей, как было показано в недавних экспериментах [135,136]. При этом взаимодействие солитонов в кольцах решетки может приводить к формированию новых структур, изменению направления вращения индивидуальных солитонов и другим нетривиальным динамическим эффектам.

## **§2.2. Солитонные комплексы и азимутальное переключение в модулированных решетках Бесселя**

Если пучки Бесселя нулевого порядка могут быть использованы для индукции радиально-симметричных решеток, то пучки Бесселя высшего порядка с угловой зависимостью поля  $q_{nd} \sim \cos(n\phi)$ , которые также являются недифрагирующими, могут индуцировать решетки показателя преломления модулированные по азимуту. Очевидно, что азимутальная модуляция показателя преломления будет препятствовать угловым смещениям солитонов, а также приведет к появлению потенциальных ям, определяющих

возможные равновесные положения солитонов в решетке. В этом параграфе обсуждаются возможности формирования сложных солитонных комплексов и азимутальное переключение солитонов в таких решетках [147].

Как и ранее, распространение излучения в оптически индуцированной решетке описывается уравнением (2.2), однако, поскольку для индукции решетки теперь используется пучок Бесселя высшего порядка  $q_{\text{nd}}(\eta, \zeta, \xi) \sim J_n[(2k_t)^{1/2}r] \cos(n\phi) \exp(-ik_t\xi)$ , то профиль решетки задается функцией  $R(\eta, \zeta) = J_n^2[(2k_t)^{1/2}r] \cos^2(n\phi) \sim |q_{\text{nd}}|^2$ , где  $n$  - порядок пучка Бесселя. Из-за специфической структуры поля в пучках Бесселя высшего порядка такая решетка характеризуется стопроцентной глубиной модуляции в азимутальном направлении, причем максимум показателя преломления для  $n > 0$  достигается на некотором расстоянии от оси системы. Типичные профили решеток с  $n = 2, 3$  показаны на рис. 2.4(a) и 2.4(b). Заметим, что ближнее к оси пучка кольцо из  $2n$  каналов обеспечивает максимальную глубину модуляции показателя преломления, так что далее будут рассматриваться солитоны, поддерживаемые лишь этим главным кольцом каналов. Поскольку мультипольные солитоны могут быть устойчивы в фокусирующей кубичной нелинейной среде только в том случае, если поле меняет знак в соседних каналах решетки, то естественно ожидать, что решетка, индуцированная пучком Бесселя порядка  $n$ , может поддерживать устойчивые мультипольные солитонные комплексы, состоящие из  $2n$  противофазных пучков, локализованных на главном кольце каналов решетки. Типичные профили дипольного и квадрупольного солитонов, поддерживаемых решетками с  $n = 1$  и  $n = 2$ , приведены на рис. 2.4(c) и 2.4(d). Свойства таких солитонов весьма похожи для разных  $n$ . Так, в решетках с малой глубиной они всегда существуют ниже некоторой пороговой мощности, однако при увеличении глубины решетки они становятся беспороговыми и переходят в линейные моды решетки при  $U \rightarrow 0$  [рис. 2.5(a)]. С этим связана немонотонная зависимость отсечки по постоянной распространения от глубины решетки, представленная на рис. 2.5(b). Так, левая ветвь на этом рисунке соответствует модам, существующим только при мощностях выше пороговой, в то время как правая ветвь соответствует солитонам, переходящим в линейные моды при  $b \rightarrow b_{\text{co}}$ . Заметим, что солитоны, соответствующие левой ветви, близко к отсечке становятся очень широкими, в то время как солитоны с правой ветви практически не расплываются. Анализ устойчивости показывает, что все мультипольные солитоны в азимутально-модулированных решетках осцилляторно неустойчивы вблизи отсечки [рис. 2.5(c)], но стабилизируются с ростом постоянной распространения. Ширина области неустойчивости, а также максимально возможный инкремент нарастания возмущений уменьшаются с увеличением глубины решетки, так что в достаточно глубоких решетках такие мультиполи могут быть устойчивы во всей области их существования. Заметим, что стабилизация солитонов с большим числом пиков требует более глубоких решеток показателя

преломления. Примеры более сложных устойчивых мультипольных солитонов приведены на рис. 2.4(e) и 2.4(f).

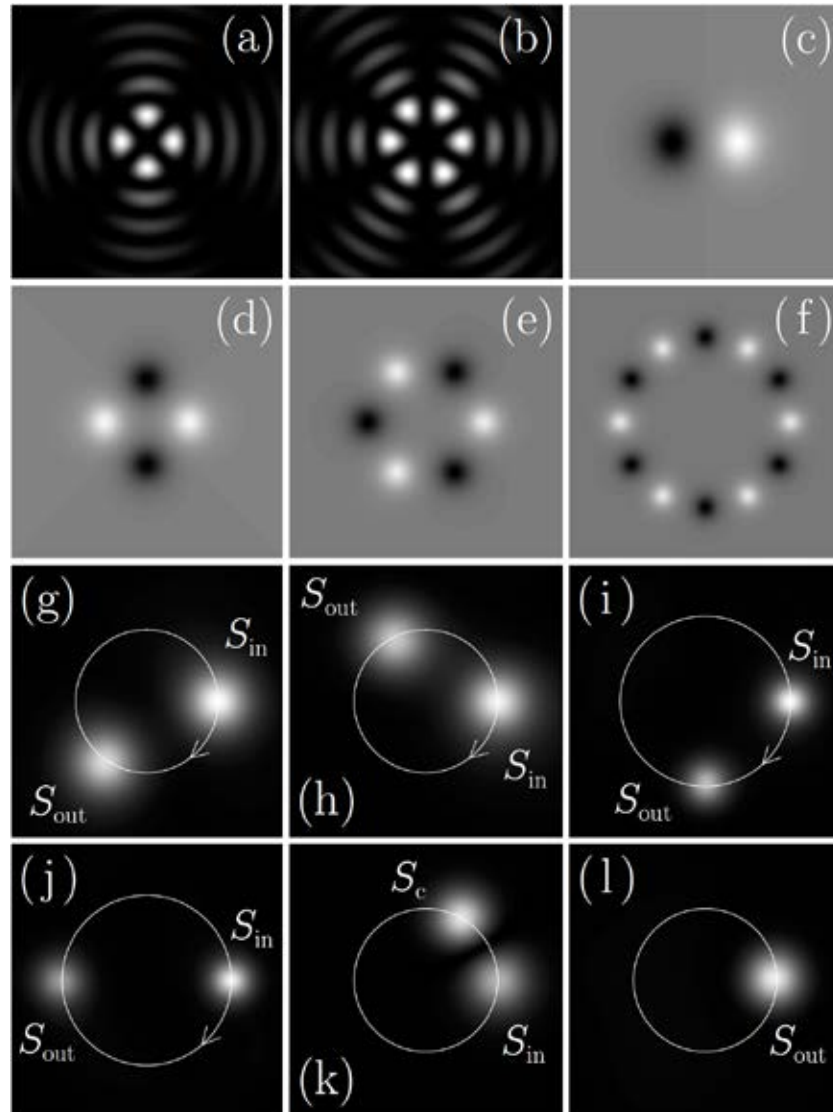


Рис. 2.4. Азимутально-модулированные решетки с  $n=2$  (a) и  $n=3$  (b). Мультипольные солитоны при (c)  $b=2, p=10$ , (d)  $b=2, p=16$ , (e)  $b=3, p=20$  и (f)  $b=5, p=40$ . Азимутальное переключение солитона с мощностью  $U=8.26$  во второй (g) и четвертый (h) каналы бesselевой решетки с  $n=3, p=2$  для  $\nu_\zeta=0.49$  и  $\nu_\zeta=0.63$ . Азимутальное переключение солитона с мощностью  $U=8.61$  в третий (i) и шестой (j) каналы бesselевой решетки с  $n=6, p=5$  для  $\nu_\zeta=0.80$  и  $\nu_\zeta=0.93$ . Входной и выходной солитоны обозначены символами  $S_{in}$  и  $S_{out}$ , а направление движения солитона обозначено стрелкой. Входное (k) и выходное (l) распределения интенсивности, иллюстрирующие взаимодействие солитона  $S_{in}$  с мощностью  $U=8.26$  с контрольным пучком  $S_c$  мощности  $U=10.64$  в бesselевой решетке с  $n=5, p=2$ . Выходной солитон обозначен символом  $S_{out}$ . Для панелей (g)-(l) параметр насыщения  $S=0.1$ .

Азимутально-модулированные решетки Бесселя позволяют реализовать новый тип переключения световых пучков. Так, пучок, запущенный в один из каналов главного кольца решетки в тангенциальном направлении к данному кольцу, начинает перемещаться из одного канала в другой, постепенно меняя свою траекторию в поперечной плоскости. При определенных условиях он даже может вернуться в исходный канал после одного полного оборота. В среде с кубической нелинейностью возмущения солитона при его переключении между каналами оказываются слишком сильны и могут привести к неустойчивости, однако даже слабое насыщение нелинейности позволяет стабилизировать процесс переключения. Насыщение нелинейности учитывается в уравнении (2.2) заменой нелинейного слагаемого  $q|q|^2$  на  $q|q|^2/(1+S|q|^2)$ , где коэффициент насыщения  $S \ll 1$ . В этом случае пучок не испытывает расплывания в областях между каналами решетки. Процесс переключения стимулируется наложением на исходный покоящийся солитон линейного распределения фазы [множитель  $\exp(-i\nu_\eta\eta - i\nu_\zeta\zeta)$ ]. Далее рассматривается случай, когда пучок запущен в крайний левый канал решетки и  $\nu_\eta = 0$ .

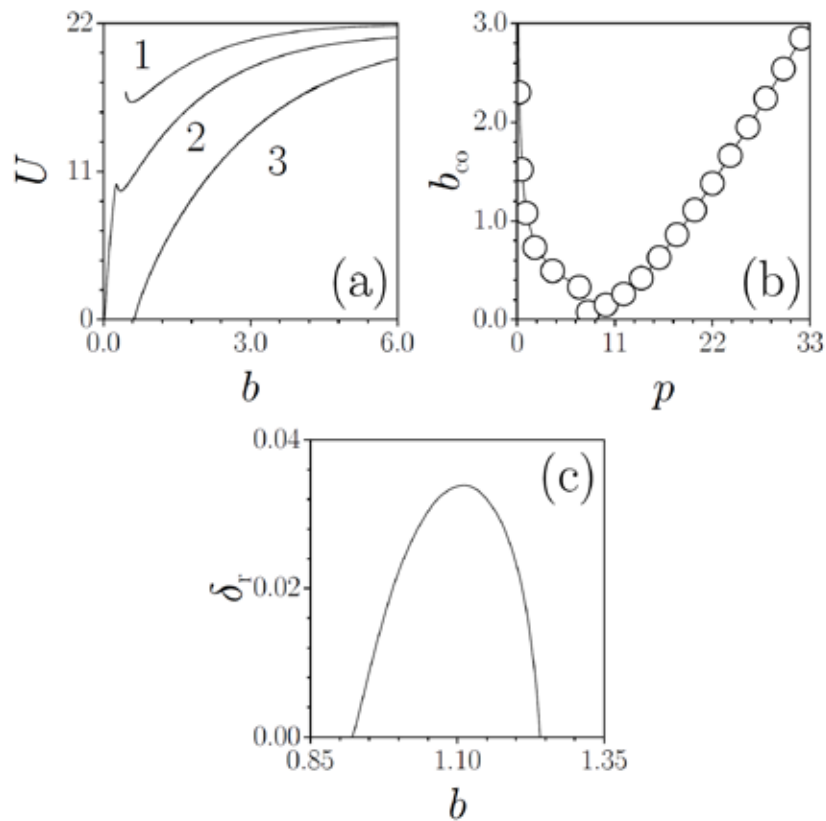


Рис. 2.5. (а) Мощность как функция постоянной распространения для квадрупольного солитона в решетке с  $n=2$  и  $p=4$  (кривая 1),  $p=8$  (кривая 2) и  $p=16$  (кривая 3). (б) Отсечка в зависимости от глубины решетки. (с) Действительная часть инкремента нарастания как функция  $b$  при  $p=16$ .



Солитон покидает исходный канал, если параметр  $\nu_\zeta$  превышает некоторое критическое значение, а поскольку он преодолевает потенциальный барьер при азимутальном переключении между каналами и излучает энергию, то он может быть захвачен в различных каналах главного кольца. Динамика переключения контролируется исходным углом запуска  $\nu_\zeta$  и мощностью солитона [см. рис. 2.4(g)-2.4(j)]. Как правило, для переключения более мощного пучка в заданный канал требуется больший исходный угол.

Заметим, что азимутальная модуляция показателя преломления существенно влияет на динамику взаимодействия солитонов, запущенных в разные каналы решетки. Если два солитона обладают одинаковыми мощностями, то в результате их взаимодействия возможно формирование дипольного или четного солитонов. Однако, если солитоны обладают разными мощностями, то возможно их слияние в процессе взаимодействия, вне зависимости от исходной разности фаз между солитонами. Так, на рис. 2.4(k), 2.4(l) показано, как мощность контрольного пучка  $S_c$  перекачивается в сигнальный пучок  $S_{in}$ , несмотря на то, что пучки были противофазны. Изменение мощности контрольного пучка может привести к обратному процессу, когда вся мощность на выходе будет сосредоточена в контрольном пучке.

Резюмируя, решетки, созданные азимутально-модулированными пучками Бесселя могут поддерживать устойчивые мультипольные солитоны. В таких решетках возможно специфическое азимутальное переключение солитонов, при этом модуляция показателя преломления кардинально меняет характер взаимодействия солитонов. Заметим, что нелинейная локализация в таких решетках исследовалась экспериментально в работе [148].

### **§2.3. Вихревые солитоны в радиально-симметричных решетках Бесселя**

Как было упомянуто ранее, одним из наиболее серьезных препятствий для экспериментального наблюдения светлых радиально-симметричных вихревых солитонов в большинстве однородных фокусирующих сред является их сильная азимутальная неустойчивость, приводящая к их распаду. Хотя квадратные периодические решетки показателя преломления и позволяют стабилизировать вихревые солитоны, они же существенно искажают их распределения интенсивности. Тем не менее, азимутальная неустойчивость может быть полностью подавлена в дефокусирующей среде, и, хотя такая однородная среда и не поддерживает светлые солитоны, наличие радиально симметричной бесселевой решетки показателя преломления может привести к радиальной локализации поля и формированию устойчивых светлых вихревых солитонов [151], как будет показано в этом параграфе.

Для описания распространения излучения используем версию уравнения (2.2) с  $\sigma = +1$ , что соответствует дефокусирующей нелинейности. Для оптической индукции решетки используется пучок Бесселя первого порядка  $J_1[(2k_t)^{1/2}r] \exp(-ik_t \xi + i\phi)$ , который характеризуется единичным топологическим зарядом [поле  $\sim \exp(i\phi)$ , где  $\phi$  - азимутальный угол], а также радиально симметричным распределением интенсивности, и который создает решетку показателя преломления  $R(\eta, \zeta) = J_1^2[(2k_t)^{1/2}r]$ , где  $r^2 = \eta^2 + \zeta^2$  (в дальнейшем мы полагаем  $k_t = 2$ ). Заметим, что такие пучки формируются при помощи аксикона или с использованием соответствующих голограмм [167, 168]. Пучок Бесселя первого порядка был выбран в данном случае потому, что его интенсивность обращается в ноль на оси, так что наиболее интенсивным оказывается первое кольцо решетки, в котором и может быть захвачен вихревой солитон. Профили вихревых солитонов ищутся в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(r) \exp(im\phi) \exp(ib\xi)$ , где смысл величин  $w, b$  уже обсуждался ранее в параграфе 2.1 при рассмотрении фундаментальных солитонов, в то время как новый параметр  $m$  определяет топологический заряд. При этом простейшие фундаментальные солитоны соответствуют  $m = 0$ . Вихревой солитон характеризуется наличием фазовой дислокации (т.е. точки, в которой фаза не определена) при  $r = 0$ , где интенсивность солитона должна обращаться в ноль. Набег фазы вдоль любого замкнутого контура, окружающего фазовую дислокацию, равняется  $2\pi m$ . Поскольку наиболее разрушительными для кольцевых солитонов, как правило, являются азимутальные возмущения, они должны быть учтены при линейном анализе устойчивости, в рамках которого поле возмущенного вихревого солитона записывается в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = [w(r) + u(r) \exp(\delta\xi + in\phi) + v^*(r) \exp(\delta^*\xi - in\phi)] \exp(ib\xi + im\phi)$ , где малые возмущения  $u, v$ , соответствующие разным азимутальным индексам  $n$ , могут нарастать с инкрементом  $\delta$  в случае неустойчивости решения. Линеаризация уравнения (2.1) при  $\sigma = +1$  приводит к следующей задаче на собственные значения  $\delta$  и собственные функции  $u, v$ :

$$\begin{aligned} i\delta u &= -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m+n)^2}{r^2} \right) u + bu + w^2(v+2u) - pRu, \\ i\delta v &= +\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{(m-n)^2}{r^2} \right) v - bv - w^2(u+2v) + pRv, \end{aligned} \quad (2.4)$$

которая решалась численно.

Отметим, что решетка Бесселя первого порядка в дефокусирующей среде поддерживает простейшие фундаментальные солитоны с  $m = 0$ , т.е. такая решетка приводит к радиальной локализации излучения. При нарастании нелинейности такие солитоны ответвляются от простейшей линейной моды (которая, в отличие от блоховских мод в

периодических решетках, является пространственно локализованной), однако теперь, в отличие от случая фокусирующей среды, рост нелинейности сопровождается уменьшением, а не увеличением постоянной распространения солитона. Мощность фундаментальных солитонов  $U \rightarrow 0$  при  $b \rightarrow b_{co}$ , однако теперь солитоны существуют при  $b < b_{co}$ . Интересно, что, поскольку солитоны пространственно локализованы, и их поле  $q \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ , где решетка также убывает, то их постоянная распространения должна быть положительной. Следовательно, область существования солитонов в бесселевой решетке ограничена, так что  $0 \leq b \leq b_{co}$ . Заметим, что поле фундаментального солитона хоть и не обращается в ноль в центре решетки, но тем не менее наблюдается провал интенсивности при  $r \rightarrow 0$ , поскольку в этой точке решеточная добавка к показателю преломления среды обращается в ноль. С увеличением глубины решетки отсечка по постоянной распространения растет, так что область существования фундаментальных солитонов расширяется. Ожидаемо, фундаментальные солитоны, которые крайне редко разрушаются

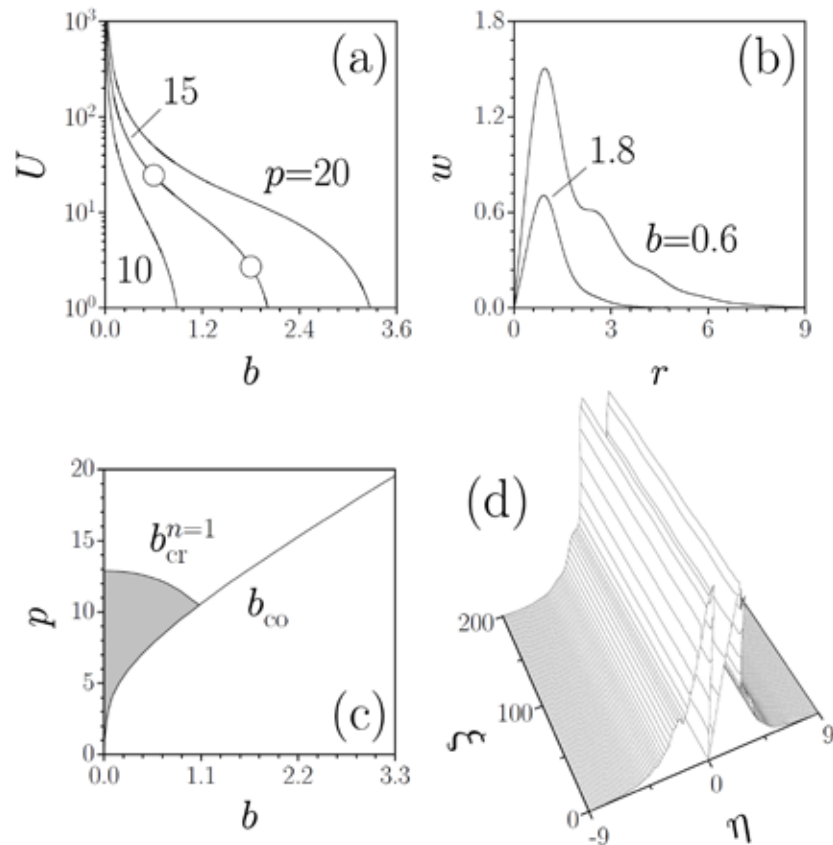


Рис. 2.6. (a) Мощность вихревого солитона с  $m = 1$  в зависимости от постоянной распространения. (b) Профили вихревых солитонов, соответствующие точкам на панели (a). (c) Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) на плоскости  $(b, p)$  для солитонов с  $m = 1$ . (d) Устойчивое распространение вихревого солитона с  $m = 1$ ,  $b = 0.7$ ,  $p = 15$  при наличии исходного шума. На рисунке показан срез интенсивности в точке  $\zeta = 0$ .

под действием азимутальных возмущений, оказались устойчивы во всей области их существования.

Существенно более сложная картина наблюдается в случае вихревых солитонов. Профили таких солитонов с топологическим зарядом  $m=1$  показаны на рис. 2.6(b). Как и фундаментальные солитоны, вихревые солитоны ответвляются от более сложных линейных мод решетки. При этом в достаточно глубоких решетках поле вихревого солитона с низкой мощностью локализовано практически в одном центральном кольце решетки. Амплитуда вихревого солитона обращается в ноль в точке  $r=0$ . По мере уменьшения постоянной распространения, пиковая амплитуда вихревого солитона нарастает, а его профиль постепенно расширяется, накрывая все большее число колец решетки [рис. 2.6(b)]. При этом на профиле солитона хорошо заметны осцилляции, возникающие из-за радиальной модуляции показателя преломления. Мощность вихревых солитонов монотонно растет с уменьшением постоянной распространения, так что  $U \rightarrow \infty$  при  $b \rightarrow 0$  [рис. 2.6(a)]. В этом пределе пиковая амплитуда солитона практически перестает расти с уменьшением  $b$ , зато его хвост становится все более пологим, превращаясь при  $b=0$  в слабо модулированный при больших  $r$  пьедестал, наличие которого характерно также для темных вихревых солитонов в однородной дефокусирующей среде. Ограниченная область существования вихревых солитонов  $b \in [0, b_{co}]$  расширяется с увеличением глубины решетки [рис. 2.6(c)]. Следует отметить, что при фиксированной глубине решетки ширина области существования максимальна для фундаментальных солитонов и достаточно быстро уменьшается с ростом топологического заряда  $m$ .

Линейный анализ устойчивости показывает, что кольцевые вихревые солитоны в дефокусирующей среде могут быть устойчивы. Область устойчивости изображена на рис. 2.6(c). Устойчивость достигается для постоянных распространения, превышающих некоторое критическое значение  $b_{cr}^n$ , которое, вообще говоря, различно для разных азимутальных индексов возмущения  $n$ . Например, численный счет показывает, что вихревые солитоны с  $m=1$  могут разрушаться только под действием возмущений с азимутальным индексом  $n=1$  (эта неустойчивость, как правило, осцилляторная и соответствует комплексным инкрементам с  $\delta_r \ll \delta_i$ ), поэтому граница устойчивости на рис. 2.6(c) показана только для этого индекса. Точная структура серой области неустойчивости на рис. 2.6(c) достаточно сложна, поскольку в ней даже для мелких решеток могут существовать отдельные узкие окна устойчивости вблизи верхней отсечки по постоянной распространения, которые мы здесь не показываем. Вне серой области на рис. 2.6(c) вихревые солитоны становятся полностью устойчивыми во всей области их существования. Следовательно, увеличение глубины решетки приводит к стабилизации таких солитонов. Критическая глубина решетки, выше которой вихревые солитоны стабилизируют-

ся, составляет  $p_{cr} \approx 12.9$  для  $m=1$ . Устойчивое распространение вихревого солитона с  $m=1$  при наличии исходного шума показано на рис. 2.6(d).

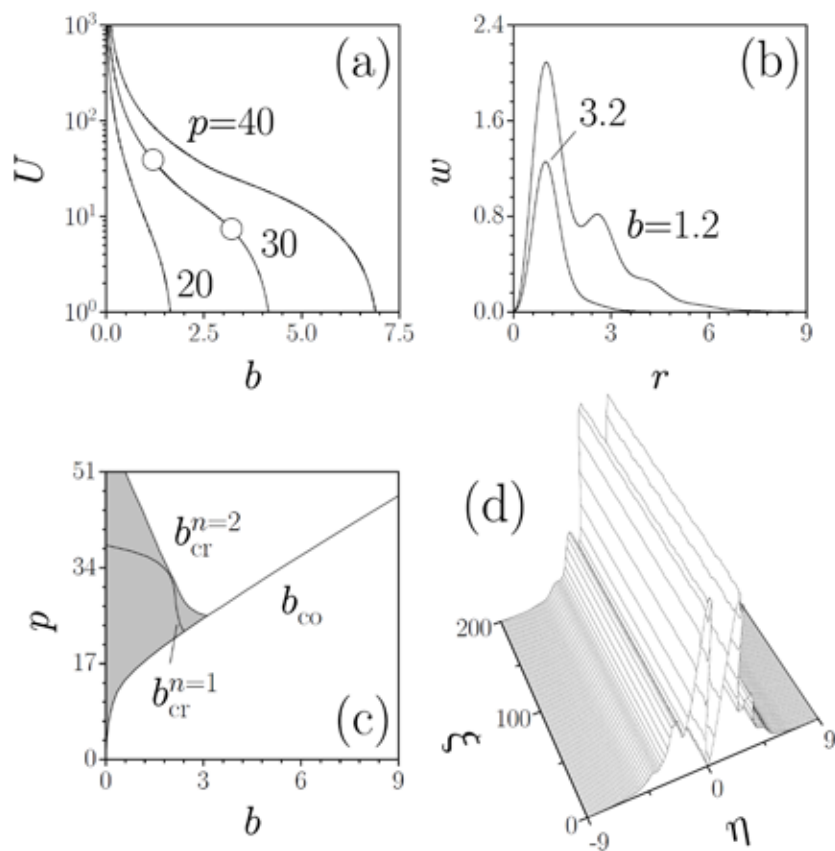


Рис. 2.7. (a) Мощность вихревого солитона с  $m=2$  в зависимости от постоянной распространения. (b) Профили вихревых солитонов, соответствующие точкам на панели (a). (c) Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) на плоскости  $(b, p)$  для солитонов с  $m=2$ . (d) Устойчивое распространение солитона с  $m=2, b=1.6, p=40$  при наличии исходного шума. На рисунке показан срез интенсивности в точке  $\zeta=0$ .

Свойства вихревых солитонов с зарядом  $m=2$  представлены на рис. 2.7. Они близки к свойствам солитонов с единичным зарядом. Следует отметить более быстрое убывание поля вихря с  $m=2$  при  $r \rightarrow 0$ . Радиальный максимум интенсивности такого солитона также расположен в первом кольце бесселевой решетки. При сравнимых мощностях вихревой солитон с большим зарядом шире, чем солитон с меньшим зарядом. Наибольшее различие между солитонами с разными зарядами заключается в их устойчивости. Оказывается, что вихри с зарядом  $m=2$  могут быть неустойчивы уже по отношению к возмущениям с азимутальными индексами  $n=1, 2$ , т.е. спектр возмущений, приводящих к распаду вихря, расширяется с ростом топологического заряда. Более того, для стабилизации вихревых солитонов с  $m=2$  необходимы заметно более глубокие решетки показателя преломления. Области устойчивости и неустойчивости для вихревых

солитонов с  $m = 2$  приведены на рис. 2.7(с), где изображены также критические значения постоянной распространения  $b_{\text{cr}}^{n=1}$  и  $b_{\text{cr}}^{n=2}$ . Видно, что даже для  $p = 50$  все еще существует узкая область неустойчивости вблизи нижней границы области существования. При этом большая часть области неустойчивости ассоциирована с возмущениями с азимутальным индексом  $n = 2$ . Пример устойчивого распространения вихревого солитона с  $m = 2$  приведен на рис. 2.7(d). Заметим, что увеличивая глубину решетки, удается найти устойчивые солитоны и с более высокими топологическими зарядами, а также солитоны, поле которых может менять знак в радиальном направлении.

Подытоживая, достаточно глубокие радиально-симметричные решетки в дефокусирующей среде поддерживают устойчивые светлые вихревые солитоны. Радиальная локализация света в таких средах наблюдалась в работе [152].

## §2.4. Влияние дискретной симметрии решетки на топологический заряд вихревых солитонов

Еще в первых экспериментах с вихревыми солитонами в простейших квадратных решетках показателя преломления было замечено, что если солитон обладает такой же дискретной вращательной симметрией, как и решетка, то его топологический заряд всегда равен единице, и все попытки сформировать вихревые солитоны с подобной симметрией и большими топологическими зарядами привели лишь к возбуждению динамических осциллирующих структур [97,98]. Это неожиданная особенность, поскольку в однородной среде не существует никаких ограничений на заряд вихревого солитона. Хотя вихревые солитоны с топологическими зарядами, превосходящими единицу, и могут существовать в квадратных решетках, для них характерно наличие множественных пиков интенсивности и их симметрия, как правило, существенно отличается от симметрии решетки. Вышесказанное приводит к выводу, что модуляция показателя преломления среды накладывает определенные ограничения на возможный заряд вихревых солитонов. Обсуждению этих ограничений, которые были объяснены в работе автора [154], и посвящен данный параграф.

Мы рассматриваем солитоны в азимутально-модулированных решетках Бесселя и используем уравнение (2.2) с решеткой вида  $R_n(\eta, \zeta) = J_n^2[(2k_t)^{1/2}r] \cos^2(n\phi)$ , записанное для фокусирующей среды ( $\sigma = -1$ ). Данный тип решетки был выбран нами потому, что он обладает дискретной вращательной симметрией, которая может быть выше, чем у квадратной периодической решетки. Вращательная симметрия зависит от порядка  $n$  пучка, индуцирующего решетку. Так, решетки низшего порядка с  $n = 0$  обладают угловой инвариантностью [профиль решетки  $R_0(\eta, \zeta) = R_0(r)$  не меняется при повороте на любой произвольный угол  $\phi$ ]. Согласно теории групп группа симметрии решетки нуле-

вого порядка обозначается как  $\mathcal{O}(2)$ . Азимутальная модуляция  $R_n \sim \cos^2(n\phi)$  меняет группу симметрии решетки, которая ассоциируется с преобразованиями вращения. Так, дискретная вращательная симметрия такой решетки характеризуется группой симметрии  $\mathcal{C}_{2n,v}$ , соответствующей дискретным вращениям на угол  $\varepsilon_n = \pi/n$  вокруг оси перпендикулярной плоскости  $(\eta, \zeta)$  и пересекающей ее в точке  $\eta, \zeta = 0$  [так что имеет место равенство  $R_n(r, \phi) = R_n(r, \phi + \varepsilon_n)$ ], а также зеркальным отражениям решетки относительно нескольких плоскостей, в которых лежит ось вращения [168]. Симметрия решетки естественным образом определяет симметрию профилей вихревых солитонов  $q(\eta, \zeta, \xi) = [w_r(\eta, \zeta) + iw_i(\eta, \zeta)] \exp(ib\xi)$ , где  $w_r, w_i$  - действительная и мнимая части поля, которые теперь не обладают радиальной симметрией, а топологический заряд комплексного поля солитона  $q$  определяется циркуляцией градиента его фазы  $\arctan(w_i/w_r)$  вокруг фазовой дислокации, расположенной в точке  $\eta, \zeta = 0$ . Таким образом рассматривается случай, когда решетка поддерживает солитон с единственной фазовой дислокацией и дискретные вращения допускаются только вокруг оси проходящей через точку дислокации, т.е. аргументы, приведенные ниже, неприменимы к комплексам из нескольких вихрей с пространственно разделенными дислокациями и сложными фазовыми распределениями. С точки зрения теории групп, такие вихревые солитоны в решетке представляют из себя дважды вырожденные пары решений (если существует вихревой солитон с зарядом  $+m$ , то можно найти также и солитон с зарядом  $-m$ ), принадлежащие к двумерным представлениям группы симметрии  $\mathcal{C}_{2n,v}$  (или ее подгрупп), которые характеризуются так называемым индексом представления  $m$ , в точности совпадающим с топологическим зарядом солитона. Согласно теории групп индекс представления всегда ограничен в решетке с определенной вращательной симметрией порядка  $N$  (см. детали в работе [169]), что приводит также и к ограничению на возможный заряд вихревого солитона, которое для четного  $N$  выражается неравенством  $0 \leq m < N/2$ . Для бесселевой решетки порядка  $n$  с группой симметрии  $\mathcal{C}_{2n,v}$  порядок симметрии является четным и равным  $N = 2n$ . Это позволяет вывести следующее правило зарядов для вихревых солитонов в решетках Бесселя:

$$0 \leq m \leq n-1. \quad (2.5)$$

Поскольку это правило выводится лишь с использованием аргументов, базирующихся на симметрии системы (решетки), то оно применимо для любых азимутально-модулированных решеток, вне зависимости от деталей их профилей и метода их создания. Заметим, что формула (2.5) объясняет ограничение на заряд вихревых солитонов в квадратных периодических решетках, порядок симметрии которых равен  $N = 4$  и, следовательно, в таких решетках вихревой солитон может иметь лишь единичный заряд. В

то же время решетки Бесселя допускают симметрию более высокого порядка, и в них возможно существование солитонов с более высокими зарядами.

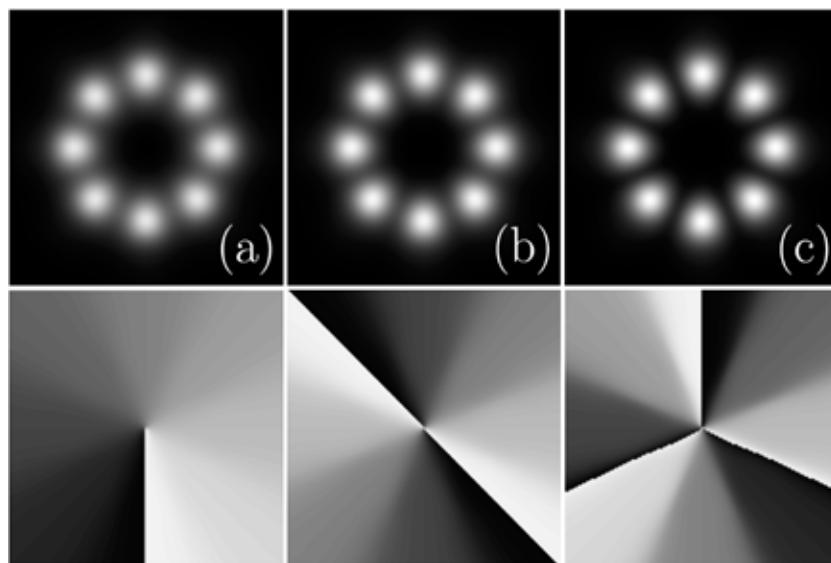


Рис. 2.8. Модуль поля (верхний ряд) и распределение фазы (нижний ряд) для вихревых солитонов с зарядами  $m=1$  (a),  $m=2$  (b) и  $m=3$  (c) в решетке Бесселя с  $n=4$  и  $p=28$ . Все солитоны соответствуют постоянной распространения  $b=1.6$ .

Правило зарядов (2.5) было полностью подтверждено с помощью численного интегрирования уравнения (2.2). Ни для одного значения  $n$  не удалось найти стационарного вихревого солитона, заряд которого не удовлетворял бы условию (2.5). Примеры вихревых солитонов с зарядами 1, 2, 3 в решетке Бесселя с  $n=4$  приведены на рис. 2.8. В среде с фокусирующей нелинейности такие солитоны характеризуются наличием  $2n$  максимумов интенсивности в главном кольце решетки. С увеличением постоянной распространения, а также с ростом топологического заряда, локализация отдельных светлых пятен в профиле солитона возрастает. При этом радиус солитона остается практически неизменным, поскольку он определяется в основном радиусом главного кольца решетки. Фазовые профили вихревых солитонов показаны во втором ряду рис. 2.8. Они несколько отличаются от фазовых распределений  $\exp(im\phi)$ , характерных для солитонов в однородной среде, поскольку при наличии решетки фаза изменяется с ростом азимутального угла  $\phi$  нелинейно. Свойства вихревых солитонов в решетке с  $n=4$  проиллюстрированы на рис. 2.9. Зависимость мощности солитона с  $m=1$  от постоянной распространения представлена на рис. 2.9(a). Характер этой зависимости существенно меняется при увеличении глубины решетки - если в мелкой решетке зависимость  $U(b)$  немонотонна, то в глубоких решетках мощность всегда растет при увеличении постоянной распространения. Увеличение глубины решетки, как правило, приводит к увеличению глу-



бины азимутальной модуляции профиля солитона, однако в мелких решетках при росте постоянной распространения солитон с наименьшим зарядом может постепенно превратиться в светлое немодулированное кольцо, радиус которого меньше, чем радиус главного кольца решетки [см. кривую с перегибом на рис. 2.9(a)]. Последнее, однако, происходит только если глубина решетки недостаточно велика для того, чтобы обеспечить концентрацию света в областях с повышенным показателем преломления. Как и для всех остальных типов решеточных солитонов, для вихревых солитонов существует отсечка по постоянной распространения. Для солитона с зарядом  $m=1$  отсечка монотонно растет с увеличением глубины решетки [рис. 2.9(b)], при этом при  $b \rightarrow b_{co}$  такой солитон сильно расширяется в мелких решетках и остается хорошо локализован в глубоких решетках. Однако, для вихревых солитонов с более высокими зарядами отсечка может быть сложной разрывной функцией глубины решетки [рис. 2.9(c)], так же, как это происходит для мультипольных солитонов.

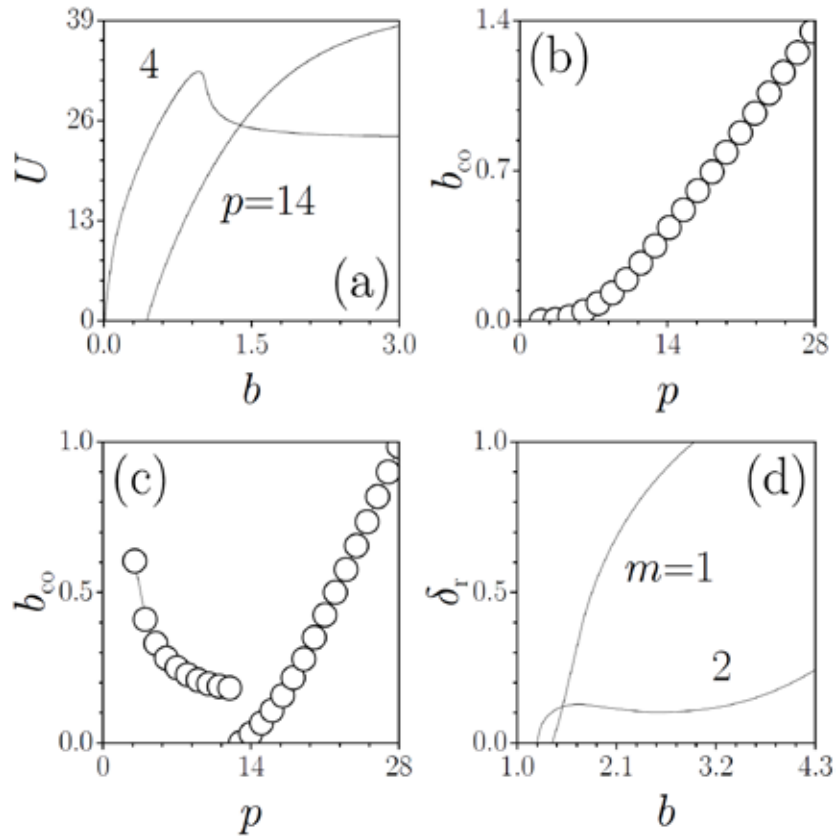


Рис. 2.9. (a) Мощность вихревого солитона с  $m=1$  как функция постоянной распространения. Отсечка по постоянной распространения в зависимости от глубины решетки для  $m=1$  (b) и  $m=3$  (c). (d) Действительная часть инкремента нарастания возмущения при  $p=28$ . Во всех случаях  $n=4$ .

При линейном анализе устойчивости солитонов подстановка возмущенного решения  $q = (w_r + iw_i + u + iv) \exp(ib\xi)$ , где  $u, v \ll w_r, w_i$ , в уравнение (2.2) и его линеаризация приводят к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right) + bv - 2w_r w_i u - (3w_i^2 + w_r^2)v - pRv, \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} &= +\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) - bu + 2w_r w_i v - (3w_r^2 + w_i^2)u + pRu.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Результаты анализа устойчивости на основе этой системы уравнений для вихревых солитонов в решетке с  $n = 4$  приведены на рис. 2.9(d). Несколько неожиданным результатом является то, что вихревые солитоны с низшими зарядами  $m = 1, 2$  оказались неустойчивыми, в то время как солитон с зарядом  $m = 3$  может быть устойчив. В мелких решетках солитоны с  $m = 3$  характеризуются множественными чередующимися областями устойчивости и неустойчивости, в то время как в достаточно глубоких решетках они устойчивы во всей области существования. Линейный анализ устойчивости, проведенный для солитонов в решетках с различными глубинами, созданных пучками Бесселя с порядком вплоть до  $n = 20$ , позволил сформулировать также необходимое условие устойчивости для вихревых солитонов. Так, они могут быть устойчивы, только если заряд удовлетворяет условию

$$n/2 < m \leq n-1\tag{2.7}$$

с единственным исключением для  $n = 2$ , когда вихревой солитон с  $m = 1$  может быть устойчив. Заметим, что, например, для устойчивого солитона с  $m = 3$  в решетке с  $n = 4$  разница фаз  $\delta\phi$  между соседними пиками интенсивности в профиле солитона удовлетворяет условию  $\pi/2 < \delta\phi < \pi$ , т.е. с интуитивной точки зрения, между соседними пиками должны действовать силы отталкивания, которые компенсируются решеткой, что ведет к устойчивому распространению. Прямое решение уравнения (2.2) с начальными условиями вида  $q|_{\xi=0} = (w_r + iw_i)(1 + \rho)$ , где  $\rho(\eta, \zeta)$  - случайное малое возмущение, полностью подтверждает результаты линейного анализа устойчивости. В процессе распространения неустойчивые вихревые солитоны теряют свою структуру после постепенно нарастающих осцилляций интенсивности отдельных светлых пятен в профиле, в то время как устойчивые солитоны распространяются без видимых искажений на тысячи дифракционных длин.

Таким образом, в этом параграфе показано, что вращательная симметрия показателя преломления накладывает жесткие ограничения не только на максимальный топологический заряд вихревого солитона, но и определяет, какие солитоны могут быть устойчивы.

## §2.5. Вращающиеся солитоны в динамических решетках Бесселя

В предыдущих параграфах рассматривались статические решетки показателя преломления, которые остаются неизменными вдоль продольной координаты  $\xi$ . Солитоны в таких решетках распространяются в направлении оси  $\xi$ , а положение их центра и распределение поля не меняются в процессе эволюции, если только они не были изначально запущены под некоторым углом к оси решетки. В последнем случае возможно переключение пучков между каналами решетки благодаря потерям на излучение. При этом солитон, как правило, захватывается в окрестности локальных максимумов показателя преломления. Однако, сама решетка показателя преломления также может изменяться вдоль оси  $\xi$  (с помощью оптической индукции такие решетки легко создаются при интерференции двух и более недифрагирующих пучков с различными поперечными масштабами), и возникает интересный вопрос, может ли такая динамическая решетка сама захватывать солитоны, изначально распространяющиеся параллельно оси  $\xi$ , и каким образом изменения в ее профиле отражаются на траектории распространения световых пучков. Описанию эволюции солитонов в динамических решетках, впервые проанализированному автором в работе [158], и посвящен этот параграф.

При описании распространения излучения в динамической решетке в фокусирующей нелинейной среде используем уравнение (2.2), где функция  $R(\eta, \zeta, \xi)$ , описывающая решетку показателя преломления, теперь зависит и от продольной координаты  $\xi$ . Мы будем рассматривать решетки, индуцированные оптически несколькими интерферирующими пучками Бесселя  $J_m[(2k_m)^{1/2}r] \exp(im\phi - ik_m\xi)$  с различными поперечными волновыми числами  $k_m$  и топологическими зарядами  $m$ . Распределение показателя преломления определяется интенсивностью интерференционной картины нескольких пучков  $R(\eta, \zeta, \xi) \sim \sum_l J_l^2 + 2 \sum_n \sum_{m>n} J_n J_m \cos[(n-m)\phi + (k_m - k_n)\xi]$ . В простейшем случае двух пучков, поперечные масштабы  $k_n, k_m$  которых подобраны таким образом, что первый максимум обеих функции  $J_n[(2k_n)^{1/2}r]$  и  $J_m[(2k_m)^{1/2}r]$  достигается при одинаковом значении радиуса  $r = 1$ , формируется спиралевидная или вращающаяся решетка показателя преломления. Скорость ее вращения определяется разностью поперечных волновых чисел  $k_m - k_n$ , в то время как поперечный профиль решетки азимутально модулирован, причем азимутальная модуляция определяется разностью топологических зарядов пучков Бесселя  $n - m$ . Заметим, что поперечное распределение показателя пре-

ломления только вращается с ростом  $\xi$ , но в остальном оно остается неизменным. Для вращающейся решетки можно ввести два продольных масштаба - полный период вращения  $T_{\text{rot}} = 2\pi(m-n)/(k_m - k_n)$ , а также расстояние  $T = 2\pi/(k_m - k_n)$ , на котором профиль решетки воспроизводится [последнее является следствием симметрии решетки по отношению к дискретным вращениям на углы  $2\pi/(m-n)$ ]. В простейшем случае  $m-n=1$  эти два масштаба равны  $T_{\text{rot}} = T$ . Из-за уменьшения интенсивности пучков при  $r \rightarrow \infty$  для профиля интенсивности характерно наличие нескольких наиболее четко выраженных вращающихся каналов.

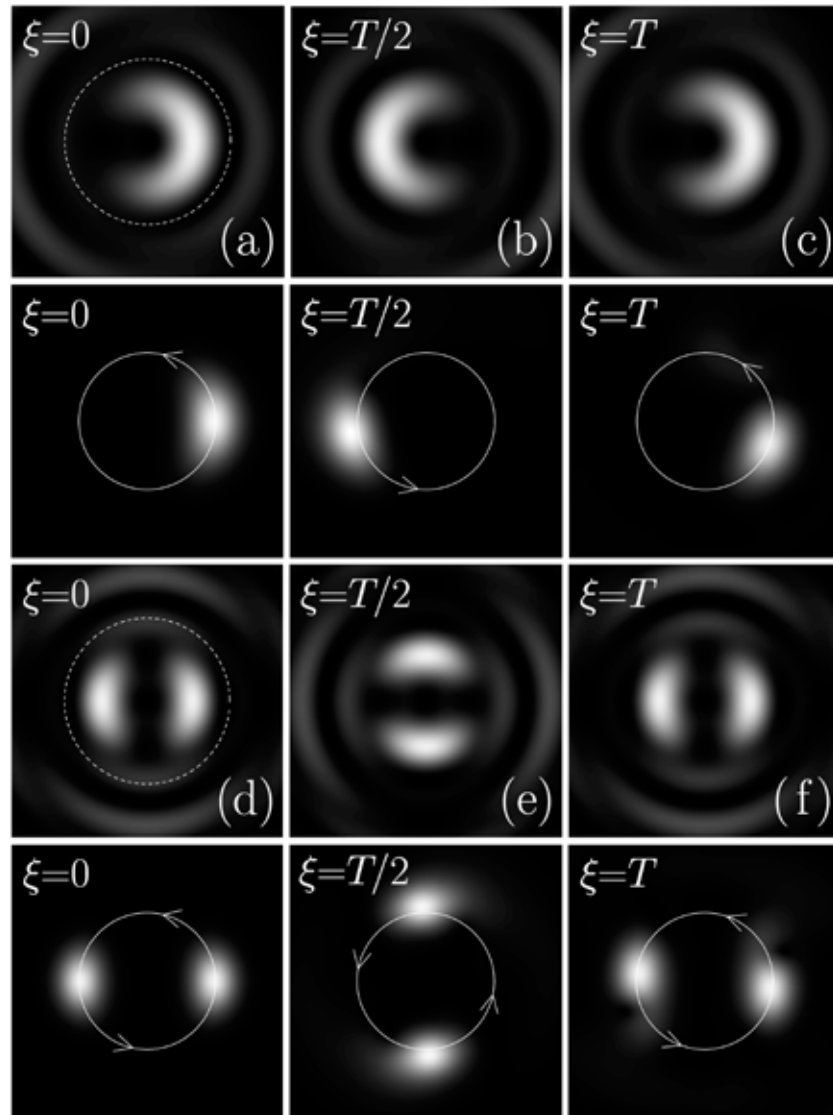


Рис. 2.10. Распространение фундаментального солитона с  $U = 1.5$  в решетке с  $m = 2$ ,  $p = 32$  (a)-(c) и дипольного солитона с  $U = 1.5$  в решетке с  $m = 3$ ,  $p = 50$  (d)-(f). Первый и третий ряды показывают профили решетки на разных расстояниях, а второй и четвертый ряды показывают соответствующие распределения модуля поля. Траектории распространения показаны белыми кружками, а направление вращения - стрелками.

В дальнейшем мы фиксируем заряд  $n = 1$  и варьируем  $m$ . Для  $m = 2$  в профиле решетки четко различим один глубокий канал [рис. 2.10(a)-2.10(c)]. В этом случае при исследовании захвата мы используем простейший фундаментальный солитон, который поддерживается стационарной решеткой  $R(\eta, \zeta, \xi = 0)$  и который бы распространялся в ней без искажений в отсутствие вращения. Такой солитон характеризуется исходной мощностью  $U$ , которая растет с увеличением постоянной распространения и постепенно приближается к мощности  $U_{\max} = 5.85$  солитона Таунса. Во вращающейся динамической решетке этот солитон уже не является стационарным, но если решетка достаточно глубока, то он может быть захвачен ею и будет вращаться с периодом, определяемым периодом вращения решетки (рис. 2.10). Заметим, что этот тип движения солитона качественно отличается от традиционно исследуемого в литературе постепенного замедления и захвата солитонов в стационарных решетках, поскольку в нашем случае решетка передает момент изначально неподвижному солитону, и угловая скорость вращения решетки остается неизменной. В таких решетках солитоны могут, в принципе, совершать тысячи оборотов и распространяться на расстояния, значительно превышающие длины доступных экспериментальных образцов. При этом центр солитона совершает небольшие осцилляции в канале вращающейся решетки. В случае решетки, созданной пучком с зарядом  $m = 3$  [рис. 2.10(d)-2.10(f)], два наиболее четко выраженных канала решетки могут быть использованы для захвата диполя. Как и в случае фундаментального солитона, исходный профиль диполя был получен в стационарной решетке, после чего он был запущен в динамическую решетку. Максимальная мощность диполя составляет  $2U_{\max}$  - в этом пределе он превращается в два практически невзаимодействующих узких противофазных солитона. Дипольные солитоны также могут устойчиво вращаться. Помимо диполей решетка с двумя каналами может захватывать и фундаментальные солитоны в любом из ее каналов.

Заметим, что вращающиеся солитоны не разрушаются благодаря фокусирующей нелинейности среды - ее отключение, как правило, сопровождается резким ростом потерь на излучение и практически полным разрушением пучка после всего лишь нескольких оборотов. В нелинейном режиме потери на излучение хоть и присутствуют, но являются небольшими. Для подтверждения этой особенности была вычислена мощность  $U_\xi$ , сосредоточенная в основных каналах решетки [внутри области, ограниченной пунктирной линией на рис. 2.10(a) и 2.10(d)] на разных расстояниях  $\xi$  [рис. 2.11(a)]. Потери на излучение несколько выше на начальных стадиях распространения, однако они резко падают с увеличением расстояния и уже для  $\xi > 150$  остаются на уровне процента при распространении на сто дифракционных длин (около 50 оборотов). Аналогичные результаты были получены не только для фундаментальных, но и для дипольных солитонов. Потери на излучение падают с ростом глубины решетки и исходной мощности

солитона. Предположим, что солитон захвачен решеткой в том случае, если потери на излучение при одном обороте не превышают 5%. Поскольку потери монотонно уменьшаются с ростом входной мощности, этот критерий может быть использован для определения критической мощности  $U_{cr}$  захвата солитона. Критическая мощность падает с увеличением глубины решетки [рис. 2.11(b) и 2.11(c)].

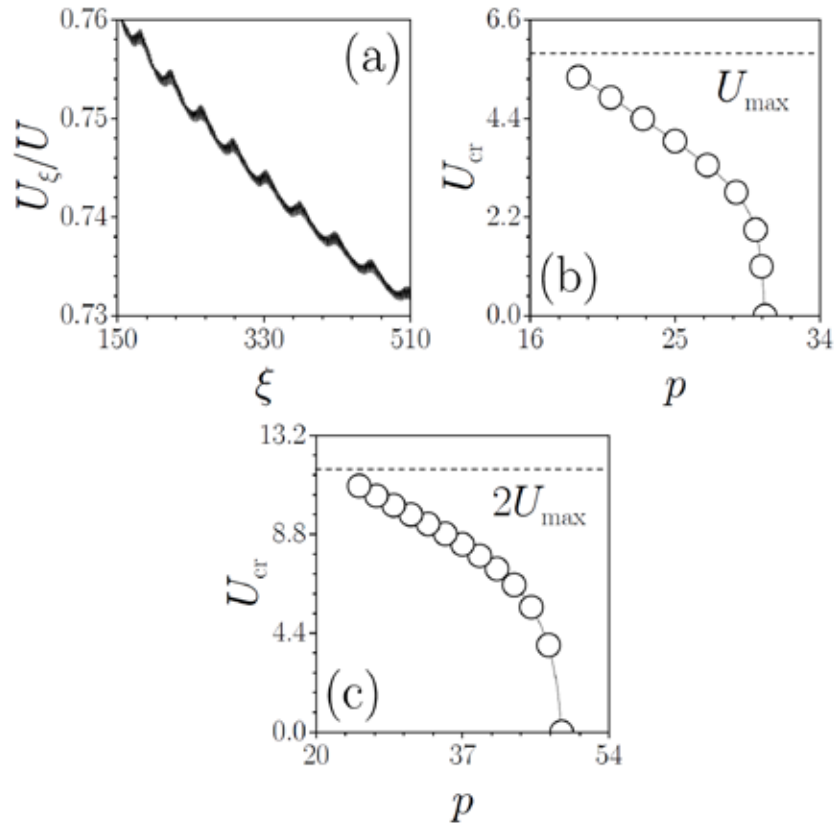


Рис. 2.11. (а) Мощность, нормированная на входную мощность  $U = 1.5$ , для фундаментального солитона, захваченного решеткой с  $m = 2$ ,  $p = 32$ , как функция расстояния распространения. Критическая мощность как функция глубины решетки для фундаментального солитона в решетке с  $m = 2$  (b) и для дипольного солитона в решетке с  $m = 3$  (c).

При этом глубокие решетки могут захватывать даже маломощные пучки, близкие к линейным. С уменьшением глубины решетки критическая мощность  $U_{cr}$  постепенно приближается к  $U_{max}$  для фундаментальных солитонов и к  $2U_{max}$  для дипольных солитонов. Это означает, что когда глубина решетки становится меньше критической, то она не способна захватывать солитоны. Эта критическая глубина ( $p \sim 18$  для быстро вращающихся решеток, которые мы здесь рассматриваем) резко падает в решетках с меньшей скоростью вращения, индуцированных более широкими пучками Бесселя. С другой стороны, максимально возможная скорость вращения солитонов определяется лишь ми-

нимальным поперечным масштабом пучков, которые можно экспериментально сгенерировать. Такие решетки в принципе способны совершать десятки вращений при распространении даже на один миллиметр. Заметим также, что период вращения решетки, а следовательно, и выходное положение солитона, захваченного в ней, зависят от топологических зарядов  $m, n$  пучков, генерирующих решетку. Так, увеличение  $m$  при  $n = 1$  приводит не только к быстрому уменьшению обоих характерных масштабов  $T$  и  $T_{\text{rot}}$ , но и существенному усложнению профиля решетки, что позволяет захватывать комплексы со сложными поперечными распределениями интенсивности.

Таким образом, в данном параграфе показано, что динамические решетки показателя преломления открывают новые возможности для формирования спиральных траекторий солитонов и управления их параметрами. Захват и вращение солитонов в подобных решетках наблюдались экспериментально в работе [159].

## §2.6. Солитоны в решетках, созданных недифрагирующими пучками Матье

Топология решеток, индуцированных различными недифрагирующими пучками, определяет симметрию, области существования и устойчивость солитонов, поддерживаемых такими решетками. Если в периодических решетках профили солитонов имеют много общего с профилями блоховских волн, то, например, в решетках Бесселя возможно существование радиально симметричных фундаментальных и вихревых солитонов, свойства которых в пределе низких интенсивностей существенно зависят от глубины решетки. Решетки, созданные недифрагирующими пучками Матье, которые являются фундаментальными решениями в эллиптической цилиндрической системе координат, занимают особое место, поскольку при изменении так называемого межфокального параметра в угловом спектре решетки они переходят либо в квазиодномерные периодические решетки, либо в решетки Бесселя. Этот параграф посвящен исследованию того, как свойства солитонов в решетке Матье, включая их подвижность и устойчивость, изменяются при постепенном изменении ее симметрии [160].

Для описания распространения излучения в решетке Матье, индуцированной в нелинейной среде, используем уравнение (2.2), причем рассмотрим оба знака нелинейности  $\sigma = \pm 1$ . Профиль решетки определяется распределением интенсивности в недифрагирующем пучке Матье  $R(\eta, \zeta) \sim |q_{\text{nd}}|^2$ . Наиболее наглядно поле недифрагирующего пучка Матье записывается с помощью интеграла Уиттекера (2.1), в котором угловой спектр пучка  $G(\phi)$  задается четными  $se_m(\phi, k_t \alpha^2 / 2)$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$  или нечетными  $se_m(\phi, k_t \alpha^2 / 2)$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  специальными угловыми функциями Матье (кроме того, может использоваться любая их комбинация),  $k_t = 2$  - поперечное волновое число, а  $\alpha$  -

межфокальный параметр [126]. Экспериментально такие пучки генерируются, например, при освещении узкой круговой щели с функцией пропускания  $G(\phi)$ , помещенной в фокальную плоскость линзы или с использованием голограмм [127]. При этом изменение функции пропускания щели или голограммы (последнее легко достигается в управляемых оптических модуляторах света) отражается в необходимом изменении топологии пучка. Примеры решеток, индуцированных простейшими четными ( $m=0$ ) и нечетными ( $m=1$ ) пучками Матье, приведены на рис. 2.12. Для малых значений межфокального параметра  $\alpha \rightarrow 0$  (этот параметр фактически определяет расстояние между фокусами эллиптической системы координат, фундаментальным недифрагирующим решением в которой является данный пучок Матье), два фокуса сливаются в одну точку, т.е. система координат преобразуется в полярную. При этом четная решетка Матье постепенно превращается в радиально-симметричную, а нечетная в азимутально-модулированную решетки Бесселя [рис. 2.12(a) и 1.12(b)]. В то же время, при  $\alpha \rightarrow \infty$ , когда фокусы эллиптической системы координат бесконечно удалены друг от друга, решетка Матье переходит в квазиодномерную периодическую решетку [рис. 2.12(c) и 2.12(d)]. Таким образом, изменение межфокального параметра отражается в плавном изменении топологии решетки.

Профили простейших солитонов, поддерживаемых решеткой Матье показаны на рис. 2.12(e)-2.12(h). В фокусирующей среде ( $\sigma = -1$ ) фундаментальные солитоны могут быть найдены, например, в центральном канале четной решетки Матье с  $m=0$ . При  $\alpha=0$  такие солитоны радиально-симметричны, однако с ростом межфокального параметра при фиксированной мощности  $U$  и глубине решетки  $p$  солитоны становятся сильно эллиптическими, их пиковая амплитуда падает и они расширяются в вертикальном направлении (вдоль оси  $\zeta$ ), перекрывая несколько максимумов решетки. При этом профиль солитона становится сильно модулированным [рис. 2.12(e)]. Решетки Матье в фокусирующей среде поддерживают также дипольные солитоны, поле которых меняет знак между двумя центральными максимумами решетки [такой солитон изображен на рис. 2.12(f) для нечетной решетки с  $m=1$ ]. В дефокусирующей среде ( $\sigma = +1$ ) в решетке Матье могут существовать солитоны, свойства которых имеют много общего со свойствами солитонов из ограниченных запрещенных зон в периодических решетках (см. главу 1). Существование этих солитонов обусловлено, с одной стороны, брэгговским отражением от практически периодичной в направлении оси  $\zeta$  (по крайней мере при больших  $\alpha$ ) решетки, в то время как в направлении оси  $\eta$  локализация достигается за счет полного внутреннего отражения, как в обычных волноводах [см. пример профиля такого солитона в четной решетке на рис. 2.12(g)]. Возможны также синфазные комбинации солитонов этого типа в нечетных решетках [рис. 2.12(h)].



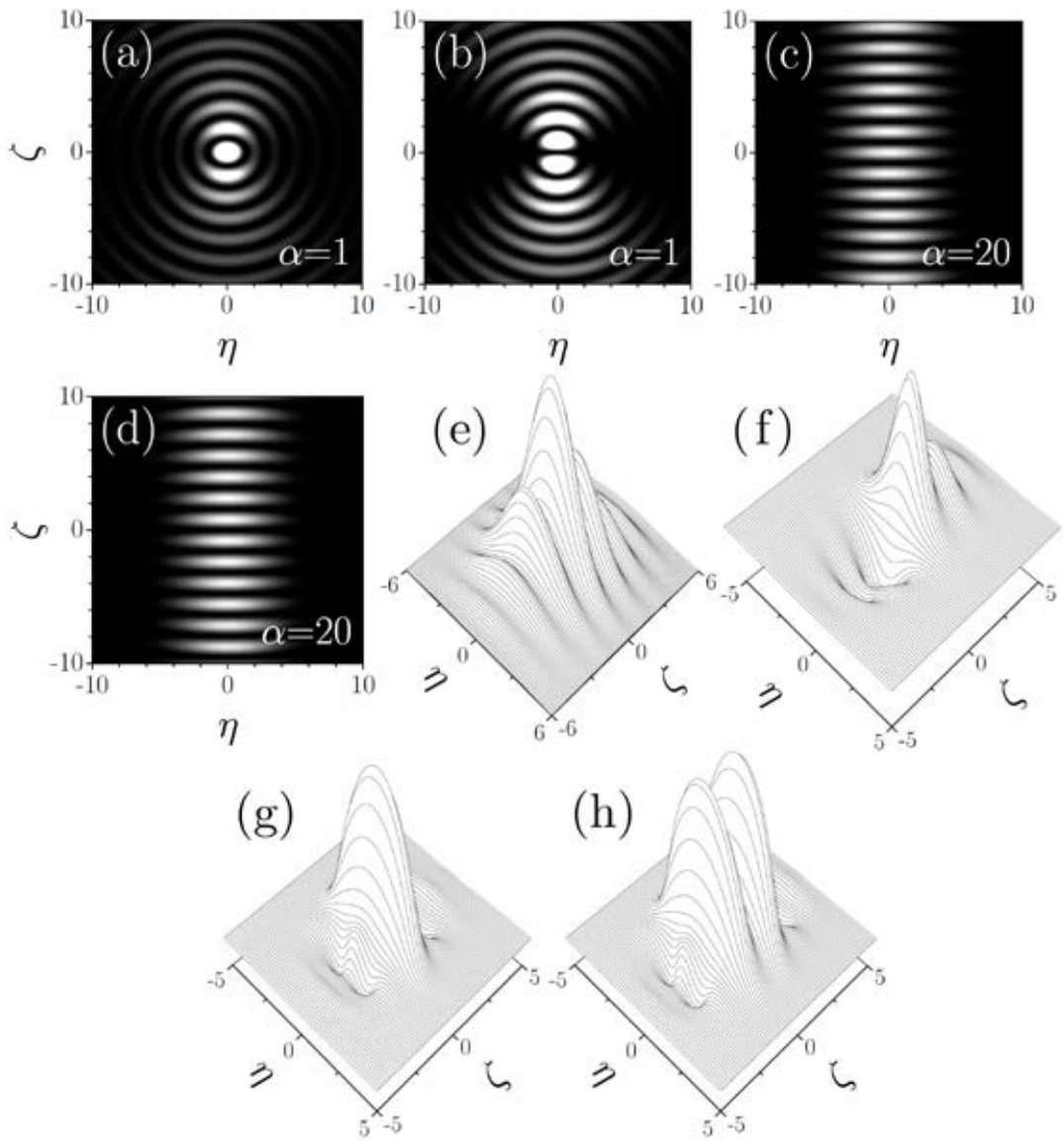


Рис. 2.12. Профили четных (a),(c) и нечетных (b),(d) решеток Матье. Профили фундаментального солитона при  $b=2.9$ ,  $\alpha=500$ ,  $p=5$  в четной решетке (e), и дипольного солитона при  $b=2.84$ ,  $\alpha=30$ ,  $p=5$  в нечетной решетке (f). Профили фундаментального солитона при  $b=3.2$ ,  $\alpha=12$ ,  $p=15$  в четной решетке (e), и четного солитона при  $b=3.2$ ,  $\alpha=12$ ,  $p=15$  в нечетной решетке (f). Панели (e),(f) соответствуют фокусирующей среде, а панели (g),(h) соответствуют дефокусирующей среде.

Изменение топологии решетки Матье непосредственно отражается на устойчивости солитонов. Свойства фундаментальных солитонов в фокусирующей среде представлены на рис. 2.13. При малых  $\alpha$  (практически радиально-симметричная решетка) мощность солитона монотонно падает с уменьшением постоянной распространения [рис. 2.13(a)] и обращается в ноль в отсечке, которая растет с ростом глубины решетки и межфокального параметра [рис. 2.13(b)]. При увеличении  $b$  солитон сужается и его мощность  $U \rightarrow U_T \approx 5.85$ . Однако, при некотором критическом значении межфокально-

го параметра  $\alpha$  появляется солитонная ветвь, для которой производная  $dU/db$  отрицательна, и которая неустойчива согласно критерию Вахитова-Колоколова. Солитоны, принадлежащие к этой ветви решений, сильно растягиваются в направлении оси  $\zeta$ , что приводит к росту полной мощности при уменьшении пиковой амплитуды (или постоянной распространения). Такое преобразование профилей согласуется с тем, что при  $\alpha \gg 1$  линейные моды решетки Матье постепенно превращаются в блоховские волны, периодичные по оси  $\zeta$ . В другом предельном случае  $\alpha \rightarrow 0$ , солитоны трансформируются в хорошо локализованные линейные моды практически радиально симметричной решетки при стремлении их амплитуды к нулю. Область неустойчивости фундаментальных солитонов в решетке Матье постепенно расширяется с ростом  $\alpha$  [рис. 2.13(c)].

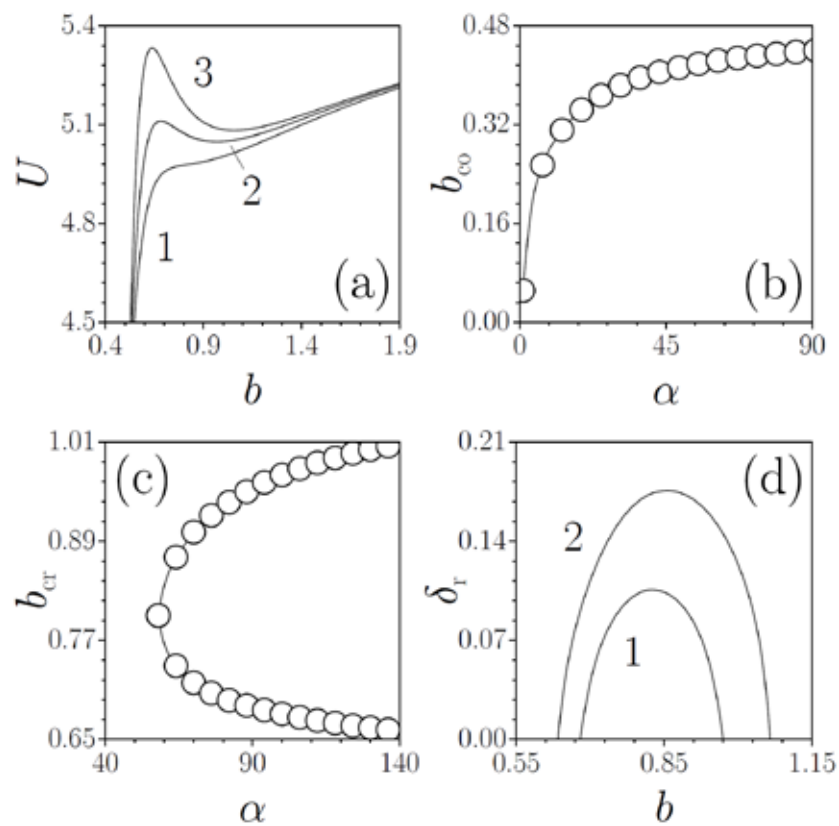


Рис. 2.13. (a) Мощность фундаментального солитона в четной решетке Матье как функция постоянной распространения для  $\alpha = 50$  (кривая 1),  $\alpha = 100$  (кривая 2) и  $\alpha = 300$  (кривая 3). (b) Отсечка как функция межфокального параметра. (c) Область неустойчивости для фундаментального солитона на плоскости  $(\alpha, b_{cr})$ . (d) Действительная часть инкремента нарастания возмущения как функция постоянной распространения при  $\alpha = 100$  (кривая 1) и  $\alpha = 300$  (кривая 2). Во всех случаях  $p = 1$  и рассмотрена фокусирующая нелинейность.

Результаты прямого анализа устойчивости, приведенные на рис. 2.13(d) в виде зависимостей инкрементов нарастания возмущений от  $b$ , согласуются с предсказанием критерия Вахитова-Колоколова.

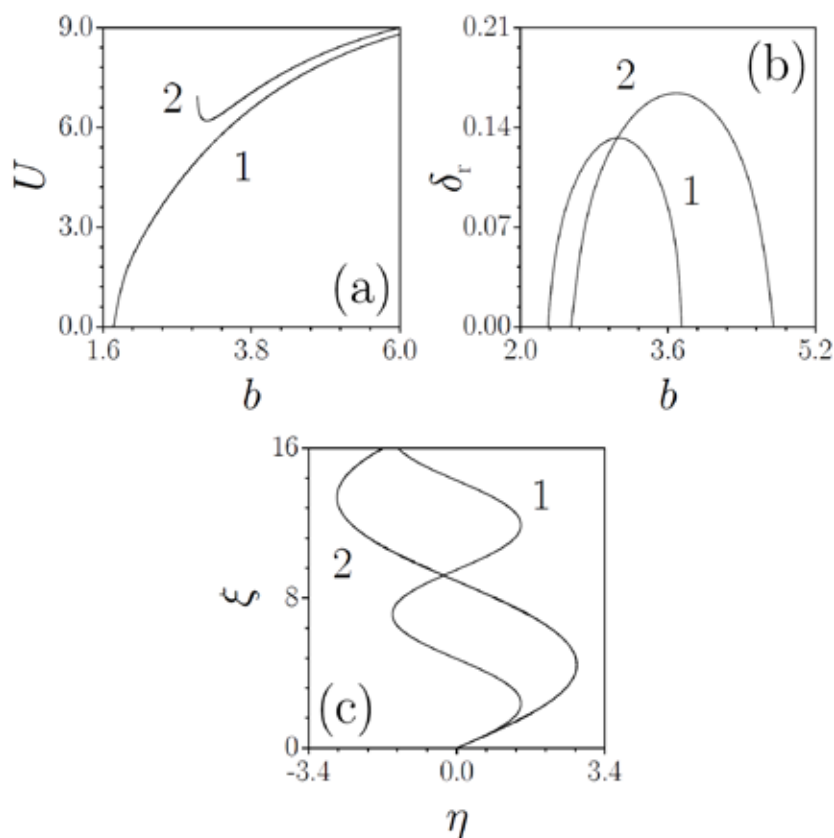


Рис. 2.14. (a) Мощность дипольного солитона в нечетной решетке Матье как функция постоянной распространения для  $\alpha = 4$  (кривая 1) и  $\alpha = 300$  (кривая 2). (b)  $\delta_r$  как функция  $b$  для дипольных солитонов при  $\alpha = 5.5$  (кривая 1) и  $\alpha = 7$  (кривая 2). (c) Траектория центра фундаментального солитона на плоскости  $(\eta, \xi)$ , соответствующего постоянной распространения  $b = 4$  и запущенного с фазовым градиентом  $\nu = 1$  в четные решетки с  $\alpha = 30$  (кривая 1) и  $\alpha = 100$  (кривая 2). Во всех случаях  $p = 5$  и рассматривается фокусирующая нелинейность.

Влияние топологии решетки Матье на дипольные солитоны оказывается еще более сильным. Если при малых  $\alpha$  дипольные солитоны не требуют пороговой мощности для их существования и сильно расширяются в отсечке, то при больших  $\alpha$  появляется порог по мощности и солитоны прекращают существовать в отсечке без каких-либо кардинальных изменений профиля [рис. 2.14(a)]. При этом зависимость отсечки от межфокального параметра оказывается разрывной - отсечка скачкообразно возрастает при превышении  $\alpha$  некоторого критического значения. Дипольные солитоны являются устойчивыми, если их постоянная распространения достаточно велика [рис. 2.14(b)], в то

время как вблизи отсечки находится область осцилляторной неустойчивости. Однако, критическое значение постоянной распространения для стабилизации резко растет с увеличением межфокального параметра, так что при  $\alpha \rightarrow \infty$ , когда решетка преобразуется в квазиодномерную периодическую решетку, дипольные солитоны теряют устойчивость во всей области их существования. Данная неустойчивость связана с отсутствием какой-либо возвращающей силы в случае даже малого сдвига противофазных (т.е., отталкивающихся) пиков в дипольном солитоне в разных направлениях вдоль горизонтальной оси  $\eta$ . Фундаментальные солитоны и их синфазные комбинации могут быть устойчивыми в решетках Матье.

Изменение топологии решетки также отражается на подвижности солитонов. Если решетки с маленькими значениями  $\alpha$ , близкие к радиально-симметричным, практически не дают солитонам, захваченным в центре решетки, смещаться в поперечном направлении, то в квазиодномерных решетках с  $\alpha \gg 1$  наложение даже небольшого градиента фазы вдоль оси  $\eta$  на исходное распределение поля [множитель  $\exp(i\eta)$ ] приводит к большим смещениям и периодическим осцилляциям центров как фундаментальных, так и дипольных солитонов [см. рис. 2.14(с), показывающий траекторию центра солитона на плоскости  $(\eta, \xi)$ ]. Амплитуда этих осцилляций монотонно растет с увеличением параметра  $\alpha$  при фиксированном градиенте фазы. В то же время, решетки Матье с  $\alpha \rightarrow 0$ , близкие к бесселевым решеткам, допускают вращательные движения солитонов.

Резюмируя, в данном параграфе продемонстрировано, что топология показателя преломления кардинально влияет на свойства солитонов - на примере решетки Матье было показано, как изменение топологии приводит к стабилизации/дестабилизации солитонов и росту их подвижности.

## **§2.7. Солитоны в параболических решетках показателя преломления**

Последним характерным типом недифрагирующих пучков, представляющих собой фундаментальные недифрагирующие решения в параболической цилиндрической системе координат, являются параболические пучки. Они могут индуцировать специфические решетки показателя преломления, каналы которых искривлены по параболе в поперечной плоскости. Исследованию влияния кривизны каналов решетки на профили и устойчивость фундаментальных солитонов и солитонных комплексов, впервые проведенному автором в работе [161], посвящен данный параграф. Заметим, что искривление каналов решетки не только трансформирует структуру известных стационарных решений, но и приводит к появлению новых типов солитонов, из-за наличия так называемой геометрической составляющей потенциала, определяемой кривизной каналов и

влияющей на локализацию света точно так же, как и реальная модуляция показателя преломления [170-172].

Для описания распространения излучения в параболической решетке показателя преломления индуцированной оптически в фоторефрактивном кристалле мы используем следующую упрощенную модель, учитывающую насыщение нелинейного отклика, но не учитывающую его анизотропию [45,47,49]:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - Eq(S|q|^2 + pR)(1 + S|q|^2 + pR)^{-1}. \quad (2.8)$$

Здесь, как и ранее,  $\eta = x/r_0$ ,  $\zeta = y/r_0$  - нормированные поперечные координаты,  $r_0$  - характерный поперечный масштаб пучка, продольная координата  $\xi = z/L_{\text{dif}}$  нормирована на дифракционную длину  $L_{\text{dif}} = kr_0^2$ , где  $k = 2\pi n_0/\lambda$  - волновое число в среде,  $n_0$  - невозмущенный показатель преломления среды,  $\lambda$  - длина волны,  $q = AI_0^{-1/2}$  - комплексная амплитуда поля,  $I_0$  - характерная интенсивность волны,  $S = I_0/(I_{\text{dark}} + I_{\text{bg}})$  - параметр насыщения нелинейности,  $I_{\text{dark}}$  и  $I_{\text{bg}}$  - так называемая темновая интенсивность и интенсивность подсветки кристалла, функция  $pR = I_{\text{latt}}/(I_{\text{dark}} + I_{\text{bg}})$  описывает профиль решетки показателя преломления,  $I_{\text{latt}}$  - интенсивность пучка, индуцирующего оптическую решетку,  $E = (1/2)(kr_0 n_0)^2 r_{\text{eff}} E_0$  - безразмерное статическое электрическое поле, приложенное к кристаллу,  $r_{\text{eff}}$  - коэффициент электрооптического тензора, соответствующий используемой поляризации пучка. Необходимо подчеркнуть, что в предположении  $S|q|^2, pR \ll 1$  [т.е. в режиме, когда интенсивности солитона и решеточного пучка малы по сравнению с  $(I_{\text{dark}} + I_{\text{bg}})$ , что реализуется увеличением интенсивности подсветки кристалла] и при  $E \gg 1$  уравнение (2.8) сводится к уравнению (2.2), которое рассматривалось нами ранее и которое зачастую является более употребительным, поскольку оно описывает также эволюцию света в технологически изготовленных решетках в кубичных средах и в конденсатах Бозе-Эйнштейна [133]. Заметим, что перенормировкой амплитуды параметр насыщения  $S$  можно свести к единице, так что далее полагаем  $S = 1$ . Поскольку решетка показателя преломления индуцируется недифрагирующим пучком, не испытывающим самовоздействия из-за того, что его поляризация ортогональна поляризации солитона, то  $R \sim |q_{\text{nd}}|^2$ , где поле недифрагирующего параболического пучка  $q_{\text{nd}}$  может быть записано через интеграл Уиттекера со спектром  $G(\phi) = 0$  для  $\phi \in [-\pi, 0)$  и  $G(\phi) = (\pi |\sin \phi|)^{-1/2} \exp(i\alpha \ln |\tan \phi/2|)$  для  $\phi \in [0, \pi)$ . При этом мы полагаем, что  $\max[R(\eta, \zeta)] = 1$ , а интенсивность параболического пучка определяет безразмерную глубину решетки  $p$ . Такая параболическая решетка характеризуется наличием последовательности искривленных каналов, из которых крайний левый (для выбранного здесь вида углового спектра) является наиболее широким и глубоким [рис. 2.15(a)]. Рас-

стояние между соседними каналами, а также их глубина, постепенно уменьшаются при  $\eta \rightarrow +\infty$ . Параметр  $\alpha$ , фигурирующий в угловом спектре параболического пучка, определяет кривизну каналов. Увеличение  $\alpha$  ведет к уменьшению кривизны, при этом вариация поперечного волнового числа  $k_t$  в интеграле (2.1) эквивалентно перемасштабированию решетки как целого. В дальнейшем используем значения  $\alpha = 2$ ,  $k_t = 4$ ,  $E = 10$ . Заметим, что наращивание внешнего статического поля  $E$  ведет, как правило, расширению области существования солитонов.

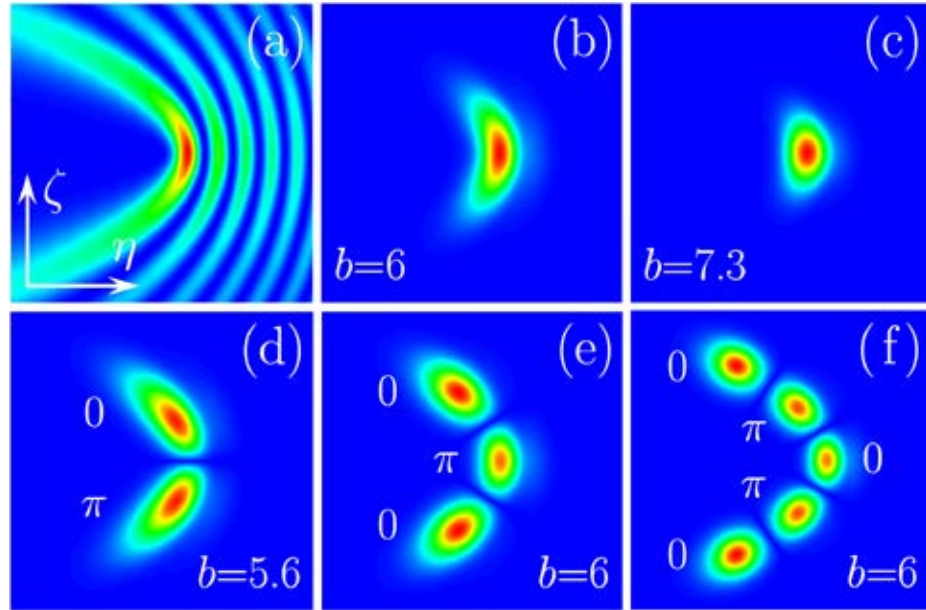


Рис. 2.15. (a) Параболическая решетка показателя преломления. Распределения модуля поля для фундаментальных солитонов (b), (c), а также дипольного (d), трипольного (e) солитонов и солитона с пятью пиками (f). Значения постоянных распространения, а также фазы отдельных пиков указаны на рисунках. Во всех случаях  $p = 4$ .

Параболические решетки поддерживают широкий спектр линейных мод, включая фундаментальные и мультипольные, которые в основном локализованы в крайнем левом канале решетки. Фундаментальная мода обладает наибольшей постоянной распространения, в то время как с ростом порядка моды (числа пиков в ее профиле) постоянная распространения  $b$  уменьшается. Солитонные семейства ответвляются от линейных мод решетки с увеличением мощности. Примеры различных солитонных решений, поле которых имеет вид  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ , представлены на рис. 2.15(b)-2.15(f). Профили фундаментальных солитонов вблизи нижней отсечки по постоянной распространения  $b_{\text{low}}$  эллиптически [рис. 2.15(b)], но с ростом постоянной распространения, сопровождающимся ростом мощности [рис. 2.16(a)], профиль солитона постепенно становится радиально-симметричным, поскольку при достаточно больших амплитудах соли-

тона влиянием решетки в уравнении (2.8) можно пренебречь. Помимо нижней отсечки  $b_{\text{low}}$  по постоянной распространения, в которой  $U \rightarrow 0$ , существует также верхняя отсечка  $b_{\text{upp}} < E$ , где мощность солитона в параболической решетке остается конечной (в отличие от случая однородной среды с насыщением, где мощность обращается в бесконечность). Вблизи верхней отсечки солитон смещается из первого канала вглубь параболической решетки. Нижняя отсечка для фундаментального солитона монотонно растет с увеличением  $p$ , в то время как верхняя отсечка лишь незначительно уменьшается [рис. 2.16(b)]. Максимально возможная мощность фундаментального солитона падает с

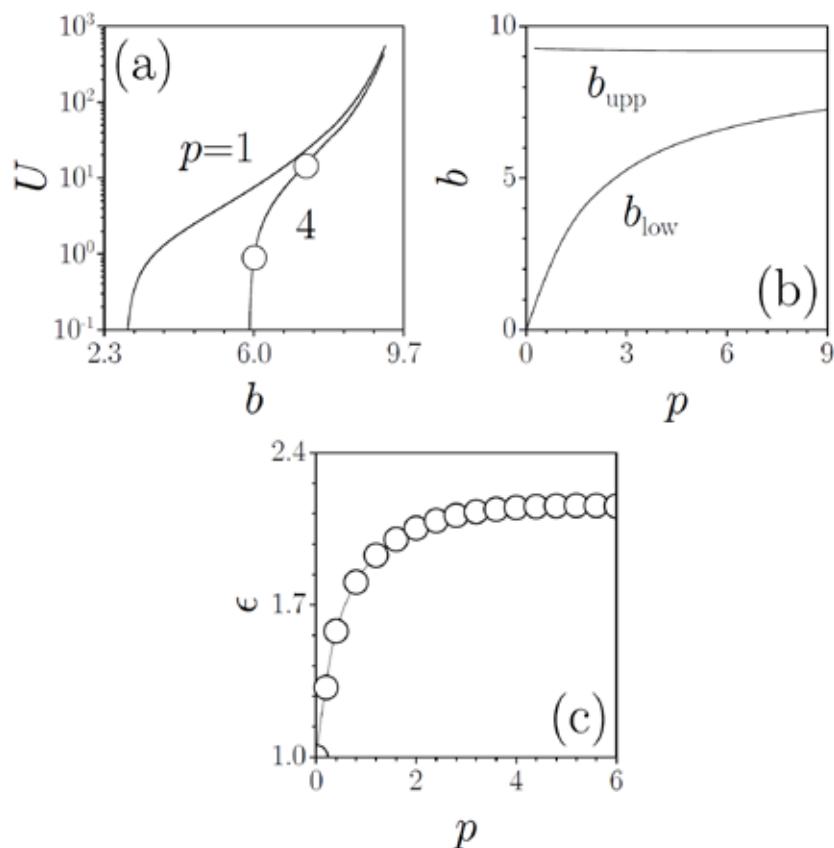


Рис. 2.16. (а) Мощность фундаментального солитона в параболической решетке как функция постоянной распространения. Точки соответствуют солитонам на рис. 2.15. (б) Верхняя и нижняя отсечки в зависимости от глубины решетки. (с) Эллиптичность фундаментального солитона в зависимости от глубины решетки.

увеличением глубины решетки, а эллиптичность профиля растет при  $b \rightarrow b_{\text{low}}$ . Отметим, что эллиптичность низкоамплитудных солитонов  $\epsilon = w_\eta / w_\zeta$  вводится как отношение интегральных ширин солитона

$$w_\eta^2 = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 |q|^2 d\eta d\zeta, \quad w_\zeta^2 = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta^2 |q|^2 d\eta d\zeta, \quad (2.9)$$

по осям  $\eta$  и  $\zeta$ . Она сначала растет с увеличением глубины решетки [рис. 2.16(c)], а потом начинает уменьшаться, поскольку решетка постепенно "замывается" при  $p \rightarrow \infty$  благодаря насыщению фоторефрактивного отклика в уравнении (2.8). Полная ширина солитона  $(w_\eta^2 + w_\zeta^2)^{1/2}$  сначала уменьшается с ростом  $b$ , а затем начинает расти из-за насыщения нелинейности. Отметим, что фундаментальные солитоны в параболических решетках устойчивы во всей области их существования.

Помимо фундаментальных солитонов в параболических решетках было найдено множество мультипольных решений [рис. 2.15(d)-2.15(f)]. Простейший диполь, состоящий из двух противофазных пиков, изображен на рис. 2.15(d). Профили таких солитонов являются сильно асимметричными. Как и в случае фундаментальных солитонов, увеличение мощности диполя приводит к его сдвигу вглубь решетки и появлению верхней границы области существования по постоянной распространения. Из-за отталкивания противофазных пиков, отсечка по постоянной распространения для диполя оказывается несколько меньше, чем для фундаментальных солитонов, при этом она медленно растет с ростом глубины решетки  $p$ . Для всех мультипольных солитонов нижняя отсечка  $b_{\text{low}}$  ниже, чем для фундаментальных солитонов, но качественно область существования для мультипольных солитонов похожа на таковую для фундаментальных. Несмотря на сильное искривление "осей" мультипольных солитонов, которое диктуется симметрией параболической решетки, эти решения остаются устойчивыми в большей части области их существования. Неустойчивость возможна лишь вблизи верхней отсечки, где небольшие возмущения могут привести к существенным осцилляциям отдельных пиков в солитоне, в то время как при малых и промежуточных уровнях мощности мультиполи остаются устойчивыми, независимо от сложности их профилей. Это свойство необычно, поскольку в нелинейных оптических системах сильно асимметричные солитонные семейства, как правило, являются динамически неустойчивыми. Заметим также, что в параболических решетках можно найти мультипольные солитоны, пики которых локализованы в разных каналах решетки. Такие решения не ответвляются от линейных мод решетки и зачастую существуют выше некоторого порога по мощности.

Благодаря специфической геометрии параболических решеток солитоны в них могут перемещаться по нетривиальным траекториям. Например, при наличии градиента фазы [множитель  $\exp(i\nu\zeta)$ ], наложенного на фундаментальный солитон, последний начинает осциллировать в наиболее глубоком канале параболической решетки, причем интегральный центр движется по траектории, близкой к параболической [рис. 2.17(c)]. Максимальный сдвиг в вертикальном направлении  $d_\zeta$  монотонно растет с увеличением градиента фазы  $\nu$  [рис. 2.17(a)], так же, как и период осцилляций  $d_\xi$  по оси  $\xi$  [рис.



2.17(b)]. При больших градиентах становится заметной ангармоничность осцилляций центра, а при превышении градиентом критического значения солитон покидает основной канал решетки.

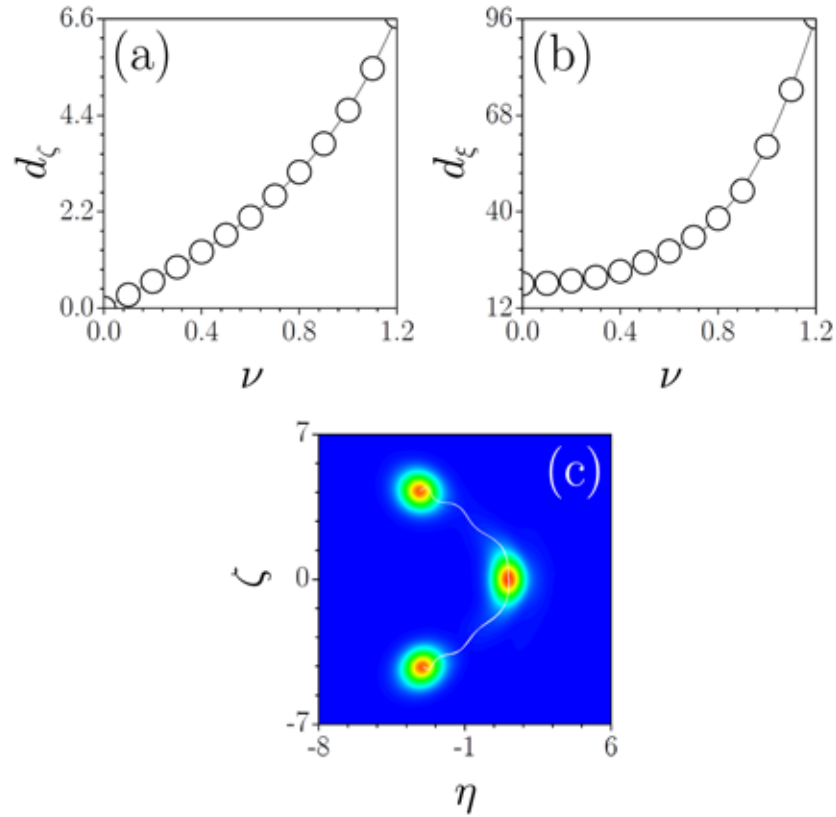


Рис. 2.17. Максимальное смещение солитона  $d_\zeta$  вдоль оси  $\zeta$  (a) и период осцилляций  $d_\xi$  (b) в зависимости от исходного градиента фазы  $\nu$ . (c) Распределения интенсивности на разных расстояниях  $\xi = 0$ ,  $\xi = d_\xi/4$  и  $\xi = 3d_\xi/4$ , иллюстрирующие динамику распространения солитона в параболической решетке при  $\nu = 1$ . Белая линия показывает траекторию центра солитона. Исходный солитон соответствует  $b = 6.5$  и  $p = 2$ .

Таким образом, параболические решетки могут поддерживать устойчивые фундаментальные солитоны и солитонные комплексы с сильно искривленными осями. Кроме того, в таких решетках возможны колебательные движения солитонов по параболическим траекториям.

### Глава 3. Поверхностные солитоны на границе периодических нелинейных сред

Наличие границы раздела между двумя оптическими средами с различными показателями преломления существенно усложняет динамику распространения световых пучков даже в линейном случае, поскольку преломление на границе сопровождается не только сменой направления распространения пучка, но также и его частичным отражением, пространственным и фазовым сдвигом, изменением темпа дифракционного расплывания. Еще более интересные эффекты наблюдаются для высокоинтенсивных пучков, для которых нелинейная добавка к показателю преломления влияет на преломление/отражение на границе раздела. Одним из первых нелинейных поверхностных эффектов, исследованных в литературе, были гистерезисные скачки отражения и преломления высокоинтенсивной волны при ее падении из линейной среды на границу раздела с нелинейной средой при малой разнице диэлектрических проницаемостей двух сред и малых углах скольжения [173,174]. Такие скачки происходят между режимами полного внутреннего отражения и полного прохождения волны при изменении ее интенсивности или угла падения, как было показано в эксперименте [175]. Помимо взаимодействия волн постоянной интенсивности с границами раздела нелинейных сред, на таких границах также очень широко исследовалось преломление локализованных световых пучков, как для случая кубичной нелинейности [176-183], так и в квадратично-нелинейных средах [184,185] и средах с насыщением [186]. Оказалось, что если нелинейная добавка к показателю преломления компенсирует разность линейных показателей преломления двух сред, то пучки, падающие на границу раздела под небольшим углом, могут возбуждать стационарные нелинейные поверхностные волны - т.е. солитоны, локализованные непосредственно на границе раздела сред и распространяющиеся вдоль нее без искажений [180]. Такие поверхностные солитоны, впервые предсказанные в работах [187,188], впоследствии были детально исследованы для границ раздела однородных сред, включая линейные-нелинейные и нелинейные-нелинейные границы, а также границы трех и более материалов, как с кубичными, так и с квадратичными, насыщающимися и нелокальными нелинейностями. Соответствующая литература приведена в обзорах и монографиях [54,189-193]. Заметим, что проблема существования нелинейных поверхностных волн также тесно связана с распространением волн в планарных волноводах, простейший из которых реализуется с использованием прослойки нелинейного материала, заключенной между двумя линейными или нелинейными средами с более низкими показателями преломления.

Несмотря на большое число теоретических публикаций по поверхностным солитонам на границе раздела двух однородных сред, экспериментальное подтверждение их

существования так и не было получено. Связано это с наличием высокого порога по мощности. Он возникает из-за необходимости компенсации разницы показателей преломления двух сред за счет нелинейности и линейно возрастает с увеличением разницы показателей преломления. Поскольку в большинстве однородных сред светоиндуцированная нелинейная добавка к показателю преломления не превышает максимальных значений  $\sim 10^{-3} - 10^{-2}$ , то оказалось достаточно сложно подобрать две среды с достаточно малыми потерями, где фокусирующая нелинейность могла бы скомпенсировать разницу линейных показателей преломления при допробойных уровнях мощности.

Заметим, однако, что в некоторых материалах с нелокальной нелинейностью порог для существования поверхностных солитонов может и отсутствовать. Последнее возможно, например, в фоторефрактивных средах, где диффузионная компонента нелинейного отклика начинает играть заметную роль при уменьшении ширины пучка и может приводить к самоискривлению траектории его распространения в процессе распространения [194-198]. Если траектория пучка отклоняется по направлению к границе кристалла, то поверхностный солитон может сформироваться даже в случае большого скачка показателя преломления на границе (как, например, на границе раздела фоторефрактивный кристалл - воздух). Возможность формирования таких волн на границе фоторефрактивных кристаллов с чисто диффузионной нелинейностью была впервые отмечена в работах [199,200], а их экспериментальное наблюдение представлено в [201]. Поверхностные волны в фоторефрактивных кристаллах при наличии дрейфовой (возникающей при наличии внешнего статического поля) и диффузионной компонент нелинейного отклика были впервые проанализированы в работах автора диссертации [202,203] и недавно наблюдались экспериментально в [204]. Наконец, формирование беспороговых поверхностных волн возможно в термальной нелинейной среде, одна из плоских границ которой теплоизолирована [205]. В такой среде специфическое распределение показателя преломления, возникающее при перераспределении тепла в образце, также приводит к концентрации света вблизи теплоизолированной границы.

Несмотря на то, что в локальных однородных нелинейных средах поверхностные солитоны до сих пор не наблюдались из-за трудностей с подбором сред с близкими показателями преломления, недавно было замечено, что вариация эффективного показателя преломления пространственно неоднородных материалов, изготавливаемых либо при помощи гравировки параллельных полосок на их поверхностях или при ее неоднородном (например, периодическом) легировании различными примесями, может быть весьма малой. Если подобная обработка была проведена только для части образца, то появляется граница раздела между модифицированной и однородной частями материала, причем изменения показателя преломления на такой границе могут быть достаточно малы, и, следовательно, порог для формирования солитонов на границе будет

достаточно низок. При этом нелинейность материала по обе стороны от границы остается практически одинаковой и однородной, что является преимуществом с практической точки зрения. Вышеизложенный подход привел к предсказанию одномерных поверхностных солитонов на границе раздела фокусирующей однородной среды и полубесконечного массива слабо связанных волноводов [206]. Такие солитоны наблюдались в полупроводниковых массивах волноводов длиной 1 см, изготовленных из AlGaAs, при уровнях мощности  $\sim 1.7$  kW [207]. В эксперименте четко фиксировался переход от асимметричной картины дискретной дифракции при малых мощностях к локализации в первом поверхностном канале массива при увеличении мощности.

Отличительной особенностью поверхностных волн на границе решетки является одновременная локализация энергии в однородной и периодической средах. Благодаря этому в свойствах таких волн можно проследить нетривиальное смешение свойств солитонов в однородной и периодической средах. В частности, из-за того, что периодическая модуляция показателя преломления кардинально меняет характер дифракции, локализованные поверхностные волны могут формироваться даже на границах дефокусирующих сред. Такие волны были впервые предсказаны автором диссертации в работе [208]. Обсуждению их свойств посвящен первый параграф данной главы. В нем будет показано, что из-за пространственной ограниченности массива возникает порог для существования поверхностных солитонов. Их постоянные распространения могут принадлежать к любой из запрещенных зон решетки, что позволяет сформировать поверхностные солитоны с различными симметриями. С другой стороны, локализация в однородной среде требует положительности постоянной распространения, что накладывает существенные ограничения на их области существования. Границы раздела дефокусирующей однородной и периодической сред поддерживают также кинки - нелинейные волны, интенсивность которых асимптотически приближается к нулю в глубине решетки и к ненулевому значению в глубине однородной среды [209]. Экспериментальное наблюдение поверхностных солитонов из ограниченных запрещенных зон было представлено одновременно в работах [210, 211], в которых использовались полубесконечные массивы, изготовленные в фотовольтаических кристаллах с дефокусирующей нелинейностью. В таких массивах поверхностные солитоны наблюдались при уровнях мощности  $\sim 200$   $\mu$ W. Впоследствии свойства поверхностных солитонов в полубесконечных одномерных массивах рассматривались в целом ряде публикаций. Так, различные моды высших порядков в дискретных массивах были найдены в [212], одномерные поверхностные солитоны в дискретных и непрерывных бинарных массивах были получены в [213, 214], солитоны в массивах с квадратичной нелинейностью исследовались в [215-217]. Помимо скалярных солитонов, границы периодических решеток поддерживают векторные комплексы, компоненты которых зачастую могут иметь постоянные распро-

странения из разных запрещенных зон спектра решетки [218,219]. Зависимость пороговой мощности, необходимой для формирования приповерхностного солитона, от расстояния между центром солитона и границей массива исследовалась экспериментально и теоретически в [220,221]. Заметим, что при определенных условиях удается даже получить аналитические выражения для профилей поверхностных солитонов [222,223]. Наконец, были исследованы экзотичные полихроматические [224] и дефектные [225] поверхностные моды.

Как было упомянуто выше, в некоторых нелинейных материалах, где существует механизм, ведущий к искривлению траектории пучка по направлению к границе, существование поверхностных волн возможно даже в линейном случае. Если в пространственно-однородных решетках показателя преломления пучок, запущенный параллельно оси решетки, не меняет направления своего распространения, то в решетках с медленно варьирующимися в поперечном направлении параметрами, траектория центра солитона может быть не прямолинейной. В частности, постепенное увеличение частоты или амплитуды решетки в поперечном направлении может привести к тому, что солитон начинает ускоряться, двигаясь в решетке вдоль приблизительно параболической траектории. Впервые этот эффект для оптических солитонов был продемонстрирован автором диссертации [226], в то время как в работе [227] похожие идеи были сформулированы для конденсатов Бозе-Эйнштейна в чирпированных потенциалах. Если же модулированная решетка показателя преломления является полубесконечной и граничит с однородной средой, то солитоны, запущенные в такую решетку, могут отклоняться по направлению к границе и захватываться вблизи нее, формируя поверхностные волны. Описанию свойств таких поверхностных волн, впервые исследованных в работе автора [228], посвящен второй параграф данной главы. В частности, обсуждаются минимальная скорость поперечной модуляции параметров решетки, необходимая для формирования поверхностных волн, а также динамика распространения и столкновения локализованных пучков с границей решетки. Теоретическое предсказание поверхностных волн [228] позволило наблюдать их в модулированных массивах волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами [229]. Последняя работа была также выполнена при участии автора диссертации.

В двумерном случае, где сама конфигурация границы раздела между решеткой и однородной средой может быть нетривиальной, свойства поверхностных солитонов зависят от того, в какой именно точке границы раздела они локализованы. Впервые свойства двумерных солитонов на границе раздела простейших квадратных периодических решеток с фокусирующей нелинейностью были исследованы автором диссертации в работе [230]. Описанию свойств таких солитонов посвящен третий параграф этой главы. В нем показано, что поверхностные солитоны могут формироваться не только на прямой

границе раздела квадратной решетки и однородной среды, но также и в угловых точках решетки. Более того, пороговая мощность для формирования поверхностных солитонов зависит от того, в какой точке поверхности он локализован. В частности, пороговая мощность минимальна для угловых солитонов. В третьем параграфе обсуждаются также результаты экспериментального исследования поверхностных солитонов в массивах волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами, проведенного при участии автора [230]. Необходимо отметить, что одновременно с [230] поверхностные солитоны наблюдались в полубесконечных решетках показателя преломления индуцированных оптически в фоторефрактивных кристаллах [231]. Для того чтобы замедлить искажение резкой границы оптически-индуцированной решетки, неизбежно возникающее при блокировке части наводящего ее пучка, авторы [231] использовали необыкновенную поляризацию как для солитонного пучка, так и для пучка, индуцирующего решетку, т.е. последний также распространялся в нелинейном режиме. Впоследствии свойства двумерных поверхностных солитонов рассматривались в рамках упрощенной дискретной модели [232], в решетках с разными периодами по двум осям, приводящими к анизотропной связи между волноводами [233]. В работе автора [234] была предсказана возможность формирования периодических массивов поверхностных солитонов в результате развития модуляционной неустойчивости квазиодномерных приповерхностных пучков. Такие массивы солитонов наблюдались экспериментально в работе [235]. Детальное теоретическое исследование было проведено также для оптических поверхностных пульс на границе раздела периодической и однородной сред [236-238].

Возможная геометрия границы раздела между однородной и периодической средой определяется, помимо прочих факторов, симметрией решетки. Если для квадратной решетки с двумя главными осями наиболее естественным представляется случай, когда решетка "обрезается" вдоль главных осей и занимает половину или четверть пространства [230], то для гексагональных решеток с тремя главными осями граница может быть построена большим числом способов. Например, возможна ситуация, когда решетка занимает угловые секторы  $\pi n / 3$ ,  $n = 1, \dots, 5$  пространства, что напрямую влияет на количество волноводов, окружающих угловой волновод, и, следовательно, на темпы дифракционного расплывания для угловых возбуждений. В четвертом параграфе данной главы представлен теоретический и экспериментальный анализ свойств поверхностных солитонов в угловых гексагональных решетках, впервые проведенный автором в работе [239], и прослежена зависимость пороговой мощности от угла раствора решетки.

В вышеупомянутых работах граница разделяла однородную и периодическую нелинейные среды. Однако, граница может также формироваться при контакте двух различных периодических решеток. Области существования поверхностных солитонов, ло-

кализованных в обеих решетках, в этом случае определяются перекрытием блоховских спектров обеих решеток. Так, поверхностная волна может быть локализована только в том случае, если ее постоянная распространения принадлежит к запрещенным зонам в спектре обеих решеток, которые сдвинуты из-за разных глубин или периодов решеток. При определенном соотношении глубин и периодов решеток, на таких границах возможны экзотические поверхностные волны, имеющие разные симметрии по обе стороны от границы, поскольку постоянная распространения волны попадает в разные зоны в правой и левой решетках. Впервые одномерные солитоны на границах раздела двух периодических сред были исследованы теоретически в работе [240], а их экспериментальное исследование было представлено в [241]. Автором данной диссертации были впервые исследованы двумерные поверхностные солитоны на границе квадратной и гексагональной решеток с различными типами симметрии решеток [242]. Теоретическому и экспериментальному анализу свойств таких солитонов посвящен пятый параграф данной главы.

В простейшей ситуации оптические солитоны являются скалярными, т.е. они характеризуются только одной компонентой светового поля. Однако даже в изотропной нелинейной среде солитоны могут существовать в виде векторных объектов, характеризующихся несколькими, взаимодействующими благодаря нелинейности среды, полями. Впервые солитоны этого типа были упомянуты Манаковым в работе [17]. Впоследствии векторные солитоны были исследованы во множестве сред и геометрий. Так, они формируются при нелинейном взаимодействии двух ортогонально поляризованных компонент поля в изотропных средах или средах со слабым двулучепреломлением, при нелинейном взаимодействии взаимно некогерентных световых пучков или пучков с различными несущими частотами и т.д. Подробное описание всего многообразия векторных солитонов в однородных средах приведено в монографиях [2,11]. Векторные солитоны даже в однородной среде могут иметь существенно более сложные многогорбые профили интенсивности, чем скалярные [243,244]. Впервые пространственные векторные солитоны наблюдались в полупроводниковых материалах [245]. Они могут формироваться и в периодических системах [48,64,246], причем возможны решения, компоненты которых соответствуют постоянной распространения, принадлежащим к разным запрещенным зонам в спектре решетки [247,248]. Наличие границы между периодической и однородной средами существенно меняет свойства векторных солитонов, если они локализованы на границе, как было показано теоретически в работах [218,219,249]. Однако, первое экспериментальное наблюдение векторных поверхностных солитонов было выполнено в работе автора в двумерных массивах, записанных фемтосекундными лазерными импульсами [250]. Обсуждению их свойств посвящен шестой параграф этой главы. В частности, показано, что семейства эллиптически поляризованных векторных

солитонов ответвляются от семейств скалярных солитонов, обсуждается устойчивость таких векторных мод.

Помимо фундаментальных солитонов, границы раздела периодических сред могут поддерживать солитонные комплексы, которые, как правило, не существуют на границах раздела однородных сред. Среди них можно выделить поверхностные мультипольные и вихревые солитоны, впервые исследованные автором диссертации в работах [251,252]. Свойства вихревых поверхностных солитонов описываются в заключительном седьмом параграфе этой главы. Показано, что вихревые поверхностные солитоны обладают распределениями интенсивности и фазы, весьма отличающимися от таковых в однородной среде. Экспериментальное наблюдение вихревых поверхностных солитонов было недавно представлено в работе [253].

Таким образом, данная глава базируется на результатах оригинальных исследований одномерных и двумерных поверхностных солитонов на границах раздела периодических и однородных сред, опубликованных в работах автора [197,198,202,203,208,209,226,228,229,230,239,242,250,251,252].

### **§3.1. Одномерные поверхностные решеточные солитоны в дефокусирующей среде**

В данном параграфе обсуждается формирование и устойчивость одномерных поверхностных солитонов, локализованных на границе полубесконечной решетки показателя преломления с дефокусирующей нелинейностью [208,209]. Необходимо отметить, что пространственно-локализованные светлые солитоны в принципе не могут существовать на границе раздела линейной и дефокусирующей или двух дефокусирующих сред, если эти среды пространственно однородны. Однако, наличие модуляции показателя преломления, качественно меняющей характер дифракции хотя бы для одной из контактирующих сред, может привести к одновременной локализации излучения по обе стороны от границы раздела. Для описания распространения излучения вдоль границы раздела однородной и периодической сред с дефокусирующей нелинейностью, используем одномерное уравнение Шредингера в стандартной нормировке (см. главу 1):

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \sigma q |q|^2 - p R(\eta) q, \quad (3.1)$$

где  $\sigma = +1$  соответствует дефокусирующей нелинейности, функция  $R(\eta)$  описывает профиль показателя преломления. Здесь мы полагаем что среда слева от границы однородна, т.е.  $R(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$ , в то время как при  $\eta \geq 0$  наличествует периодическая мо-



дуляция  $R(\eta) = 1 - \cos(\Omega\eta)$  с безразмерной пространственной частотой  $\Omega$ . Поскольку в реальных экспериментах полубесконечные решетки создавались с помощью мелкой гравировки поверхности, ее неоднородного легирования, оптической индукции или записи волноводов сфокусированными импульсами в цельном образце, то нелинейность среды пространственно однородна. Отметим, что поле волны  $q$  и его производная  $\partial q/\partial\eta$  непрерывны на границе раздела.

Мы будем искать поверхностные волны, локализованные на границе раздела и экспоненциально затухающие вглубь однородной и периодических сред. Поскольку амплитуда волны экспоненциально падает в глубине решетки, то нелинейным членом в уравнении (3.1) можно пренебречь при  $\eta \rightarrow +\infty$ . При этом экспоненциально затухающие хвосты возможны, если постоянная распространения попадает в запрещенную часть спектра решетки. В противном случае, линейный хвост поверхностной волны можно было бы аппроксимировать периодической блоховской волной, являющейся решением уравнения (3.1) при  $\sigma = 0$ . Зонная структура чисто периодической решетки  $R(\eta)$ , полученная с помощью метода из параграфа 1.3, показана на рис. 3.1(а) для  $\Omega = 4$ . Формирования поверхностных солитонов при наличии нелинейности среды можно ожидать для постоянных распространения из белых областей - запрещенных зон. В дефокусирующей среде такие солитоны могут быть найдены для любой ограниченной запрещенной зоны. Эта картина, характерная для бесконечной решетки, существенно меняется при появлении границы раздела.

Для экспоненциальной локализации в однородной среде постоянная распространения  $b$  должна быть положительной, следовательно половина спектра, изображенного на рис. 3.1(а) при  $b < 0$  также отсекается этим условием. Это означает, что поверхностные солитоны в дефокусирующей среде не могут существовать при слишком мелких решетках показателя преломления, поскольку верхняя граница первой запрещенной зоны пересекает уровень  $b = 0$  при ненулевой глубине решетки  $p$ . Эти простые аргументы, базирующиеся лишь на анализе асимптотик поверхностных волн, показывают, что их свойства являются нетривиальной комбинацией свойств солитонов в однородных и периодических средах.

Профили поверхностных солитонов ищутся в виде  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$ . Примеры таких волн, с постоянными распространения, принадлежащими к первой ограниченной запрещенной зоне решетки, приведены на рис. 3.2(а)-3.2(с). Отчетливо видна экспоненциальная локализация как в однородной, так и в периодической частях среды. Анализ линейных асимптотик приводит к заключению, что поверхностные солитоны могут существовать, когда глубина решетки превосходит критическое значение  $p_{cr}^{(1)} \approx 1.32$ , при котором постоянная распространения для верхней границы запрещенной зоны равняется  $b = 0$ . В реальности критическая глубина решетки оказывается даже несколько

больше  $p_{\text{cr}}^{(1)} \approx 1.61$ , поскольку при наличии границы раздела максимально возможная постоянная распространения солитона  $b_{\text{upp}}$  не достигает верхней границы запрещенной зоны, как это произошло бы в неограниченной решетке [см. рис. 3.1(с), где приведена типичная зависимость мощности поверхностного солитона от его постоянной распространения]. Заметим, что мощность солитона падает с ростом  $b$  почти во всей области его существования, за исключением узкой области вблизи верхней отсечки, которая неразличима в масштабе рисунка. Четко видно существования порога по мощности, типичное для поверхностных солитонов.

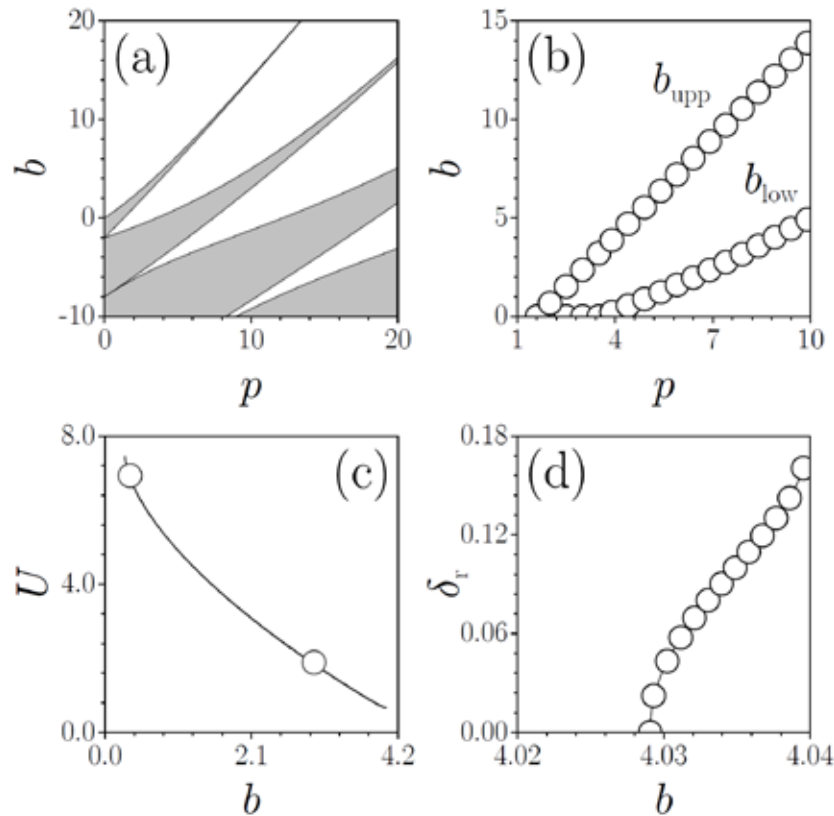


Рис. 3.1. (а) Спектр периодической решетки с  $\Omega = 4$ . (б) Область существования поверхностных солитонов из первой ограниченной зоны на плоскости  $(p, b)$ . (с) Мощность поверхностного солитона как функция постоянной распространения при  $p = 4$ . (д) Действительная часть инкремента нарастания возмущения в зависимости от постоянной распространения при  $p = 4$ .

Поверхностные солитоны существенно расширяются в область решетки вблизи верхней границы их области существования, оставаясь при этом хорошо локализованными в однородной среде. При этом их амплитуда уменьшается при  $b \rightarrow b_{\text{upp}}$  [рис. 3.2(с)]. Наоборот, при  $b \rightarrow 0$  такие солитоны могут сильно расширяться в область однородной среды [рис. 3.2(а)], оставаясь хорошо локализованными в решетке. В целом, ло-

кализация в области решетки зависит от того, насколько близко постоянная распространения солитона находится к центру запрещенной зоны. Заметим, что если в мелких решетках нижняя отсечка  $b_{\text{low}}$  для существования солитонов равна нулю, то в достаточно глубоких решетках она определяется нижней границей запрещенной зоны, которая становится положительной при  $p_{\text{cr}}^{(2)} \approx 3.56$ . Если  $p_{\text{cr}}^{(1)} \leq p \leq p_{\text{cr}}^{(2)}$  и  $b_{\text{low}} = 0$ , то поле солитона в нижней отсечке глубоко проникает в однородную среду, в то время как для  $p > p_{\text{cr}}^{(2)}$  и  $b \rightarrow b_{\text{low}}$  оно глубоко проникает в решетку. Полная область существования поверхностных солитонов из первой запрещенной зоны представлена на рис. 3.1(b). Интегральная ширина таких солитонов  $w_\eta = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \eta |q|^2 d\eta$  обращается в бесконечность вблизи нижней отсечки, и существенно увеличивается у верхней отсечки.

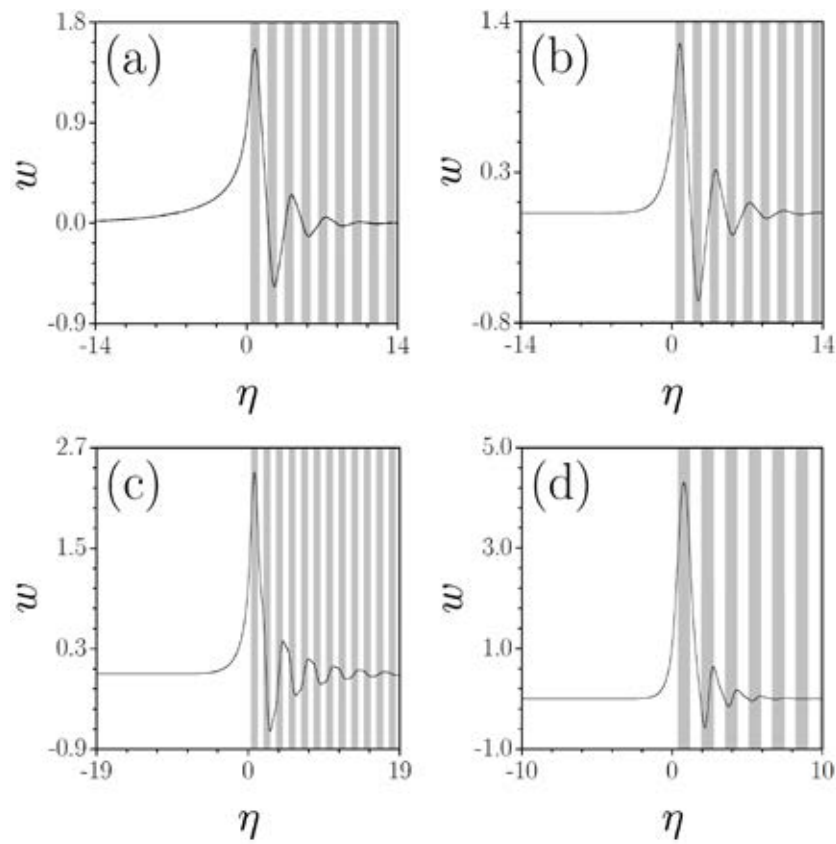


Рис. 3.2. Профили солитонов с постоянными распространения из первой запрещенной зоны при (a)  $b = 0.02$ ,  $p = 2$ , (b)  $b = 0.6$ ,  $p = 2$ , (c)  $b = 0.35$ ,  $p = 4$ . Профиль солитона с постоянной распространения из второй запрещенной зоны при (d)  $b = 3$ ,  $p = 4$ . В областях, закрашенных серым,  $R(\eta) > 0$ , а в белых областях  $R(\eta) \leq 0$ .

При анализе устойчивости поверхностных солитонов с возмущенными профилями  $q(\eta, \xi) = [w(\eta) + u(\eta) \exp(\delta\xi) + iv(\eta) \exp(\delta\xi)] \exp(ib\xi)$  решалась стандартная задача на собственные значения (инкременты нарастания)  $\delta$  и собственные функции (возмущения)  $u, v$ :

$$\begin{aligned}\delta u &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} + bv - pRv + w^2 v, \\ \delta v &= +\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - bu + pRu - 3w^2 u.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Анализ устойчивости показал, что поверхностные солитоны устойчивы в области, где  $dU/db < 0$ , и неустойчивы в узкой области вблизи верхней отсечки [см. рис. 3.1(d), где показана типичная зависимость инкремента нарастания возмущения от постоянной

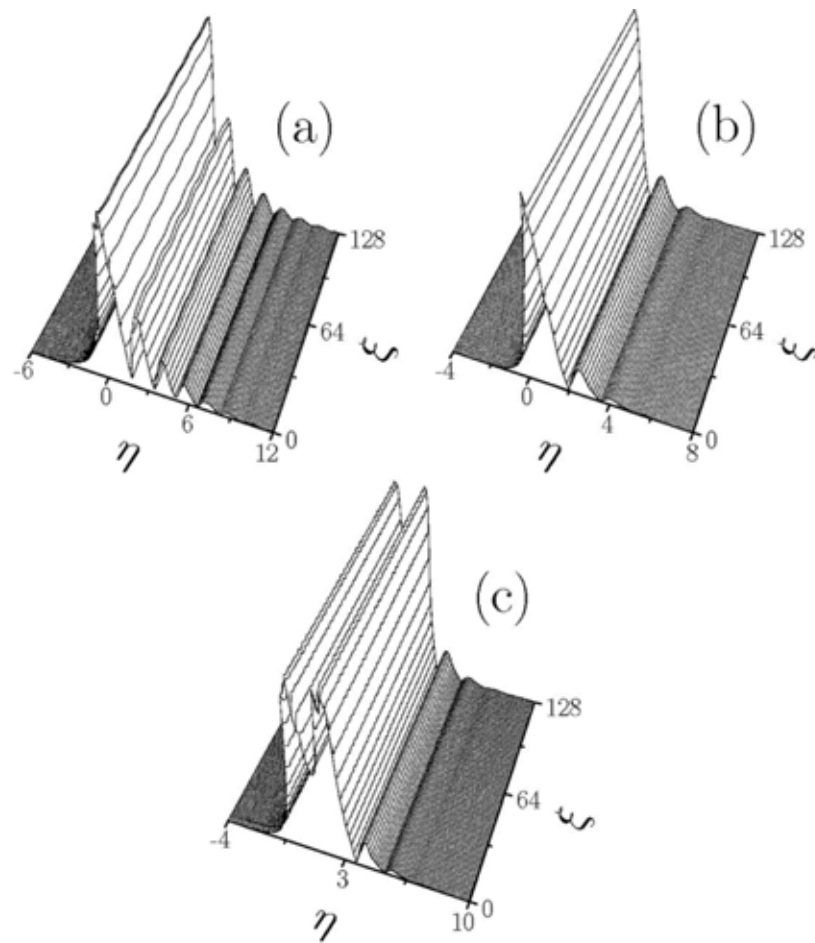


Рис. 3.3. Устойчивое распространение возмущенных фундаментальных поверхностных солитонов, соответствующих (а)  $b = 0.6$ ,  $p = 2$  и (б)  $b = 3$ ,  $p = 4$ . Устойчивое распространение четного поверхностного солитона при (с)  $b = 2$ ,  $p = 4$ .

распространения]. Помимо узкой области экспоненциальной неустойчивости у верхней отсечки, существует также область слабой осцилляторной неустойчивости у нижней отсечки, которая типична для солитонов из ограниченных запрещенных зон и связана с

возможностью резонансного туннелирования мощности солитона в высшие запрещенные зоны. Для подтверждения результатов линейного анализа устойчивости уравнение (3.1) численно интегрировалось с начальными условиями вида  $q(\eta, \xi = 0) = w(\eta)[1 + \rho(\eta)]$ , где  $\rho(\eta)$  - малое возмущение с широким пространственным спектром. Примеры устойчивого распространения поверхностных солитонов из первой запрещенной зоны приведены на рис. 3.3(a) и 3.3(b). Даже при наличии возмущений, такие решения устойчиво распространяются, сохраняя свою внутреннюю структуру. Заметим, что поверхностные солитоны могут быть возбуждены с помощью запуска гауссовского пучка в первый канал решетки.

Помимо солитонов из первой ограниченной зоны, удалось найти поверхностные солитоны, постоянные распространения которых принадлежат к более низким запрещенным зонам. Пример профиля солитона из второй запрещенной зоны показан на рис. 3.2(d). Их свойства схожи со свойствами солитонов из первой ограниченной зоны, однако критические глубины решеток  $p_{cr}^{(1)}, p_{cr}^{(2)}$ , определяющие области существования, намного выше. Были также обнаружены поверхностные солитонные комплексы. Пример устойчивого распространения четного поверхностного солитона, включающего два наиболее интенсивных синфазных пика, приведен на рис. 3.3(c). Области существования и устойчивости четного солитона практически полностью совпадают с таковыми для фундаментальных солитонов. В то же время, поверхностные солитоны с противофазными пиками (диполи) неустойчивы в дефокусирующей среде.

Таким образом, границы раздела периодической и однородной дефокусирующих сред поддерживают устойчивые локализованные солитоны, степень локализации которых в каждой из сред определяется положением постоянной распространения внутри сложной ограниченной области существования. Экспериментальное подтверждение существования поверхностных солитонов представлено в статьях [210, 211].

### **§3.2. Поверхностные солитоны на границах модулированных решеток показателя преломления**

Медленное поперечное изменение параметров решетки (ее глубины или частоты) качественно отражается на динамике распространения оптического излучения. Модулированная решетка не периодична, т.е. блоховские волны уже не являются собственными модами в такой решетке, и в ней появляется выделенное направление, в котором начинают искривляться любые пучки, даже если они были запущены параллельно каналам решетки [226]. Если при этом среда является фокусирующей, то такие пучки могут двигаться вдоль решетки по приблизительно параболическим траекториям, сохраняя свою структурную целостность. При наличии границы раздела между решеткой и

однородной средой эти пучки могут возбуждать поверхностные волны [228,229], которые рассматриваются в данном параграфе.

Для описания распространения излучения на границе частотно-модулированной решетки показателя преломления используем уравнение (3.1), записанное для случая фокусирующей нелинейности ( $\sigma = -1$ ). Профиль полубесконечной решетки описывается функцией  $R(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$  и  $R(\eta) = 1 - \cos[\Omega(\eta)\eta]$  при  $\eta \geq 0$ . В дальнейшем мы рассматриваем линейный закон изменения безразмерной пространственной частоты решетки  $\Omega(\eta) = \Omega_0(1 + \alpha\eta)$ , где параметр  $\alpha > 0$  определяет скорость ее нарастания. Одной из уникальных черт частотно-модулированной решетки является то, что она может поддерживать линейные поверхностные волны если параметр  $\alpha > 0$ . В линейном пределе ( $\sigma = 0$ ) уравнение (3.1) может быть сведено к уравнению

$$i \frac{dq_k}{d\xi} = \frac{1}{2} k^2 q_k - p \int_{-\infty}^{\infty} R_k(k - k') q_k(k') dk' \quad (3.3)$$

для пространственного Фурье-спектра пучка, где

$$\begin{aligned} q_k &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} q(\eta, \xi) \exp(-ik\eta) d\eta, \\ R_k &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} R(\eta) \exp(-ik\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Подстановка Фурье-спектра для поля  $q(\eta, \xi) = [\exp(ik\eta) + \exp(-ik\eta)] \exp(ib\xi)$ , соответствующего симметричной паре плоских волн с волновыми числами (пространственными частотами)  $\pm k$  и постоянными распространения  $b$ , в уравнение (3.3) позволяет получить дисперсионное соотношение, а именно, связь постоянной распространения  $b$  плоской волны с ее пространственной частотой  $k$ , которая имеет вид:

$$b(k) = -k^2 / 2 + 2pR_k(0) + 2pR_k(2k). \quad (3.5)$$

Первый член в уравнении (3.5) соответствует обычной дифракции (выпуклый фазовый фронт), которую бы испытывала волна, распространяющаяся в однородной среде, второй член дает постоянный фазовый сдвиг, не зависящий от  $k$ , а последний член возникает из-за брэгговского взаимодействия волн в решетке. Заметим, что знак и величина дифракции в решетке определяется производной  $d^2b / dk^2$  [53,54]. Стационарное распространение пучка со спектром конечной ширины возможно лишь в том случае, если постоянные распространения  $b(k)$  для волн с частотами  $k$  из некоторого спектрального

диапазона  $\delta k$  (определяющего пространственную ширину линейного пучка) становятся одинаковы. Такой пучок практически не испытывает дифракции, поскольку дефазировка различных спектральных компонент в процессе распространения подавлена. Это условие может выполняться для различных профилей показателя преломления. Так, для решетки с линейно модулированной частотой Фурье-спектр имеет вид  $R_k(k) = (4/\pi\alpha\Omega_0)^{1/2} \cos[(\Omega_0^2 + k^2)/4\alpha\Omega_0 - \pi/4]$ , что указывает на возможность существования ограниченной спектральной области вблизи точки  $k=0$  с приблизительно одинаковыми постоянными распространения  $b(k)$  для различных спектральных компонент при определенных значениях параметров  $\alpha, p$ .

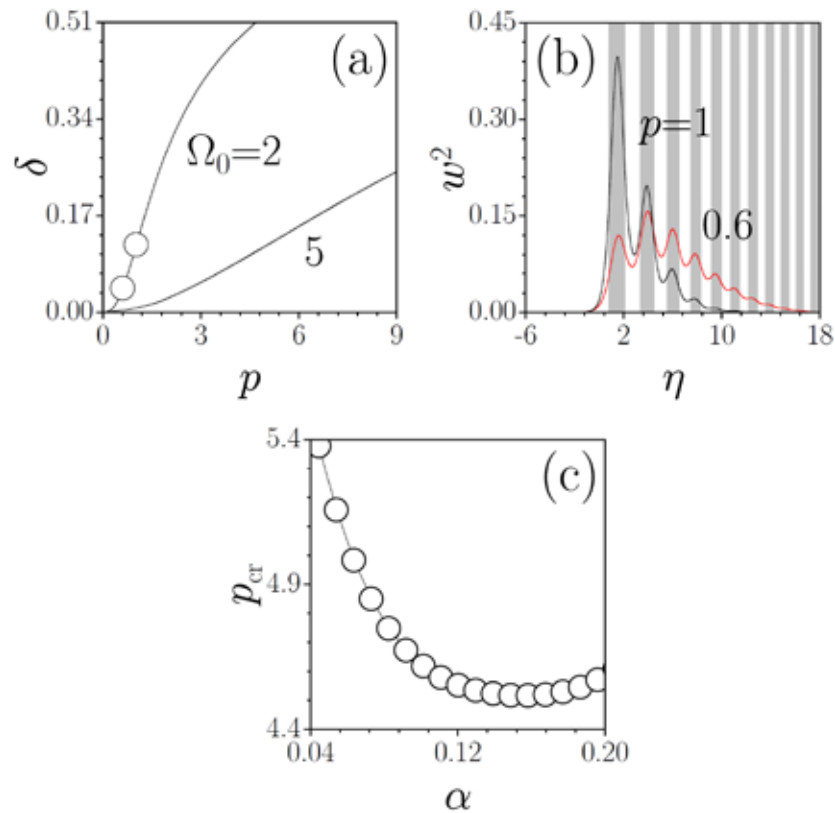


Рис. 3.4. (а) Нормированная постоянная распространения в зависимости от глубины решетки при  $\alpha = 0.05$ . (б) Профили линейных мод при  $\Omega_0 = 2$ ,  $\alpha = 0.05$ , соответствующие точкам на панели (а). В белых областях  $R(\eta) < 1$ , а в серых областях  $R(\eta) \geq 1$ . (с) Критическая глубина решетки в зависимости от  $\alpha$  при  $\Omega_0 = 5$ .

Профили линейных мод на границе модулированной решетки представлены на рис. 3.4. Рис. 3.4(а) показывает зависимость нормированной постоянной распространения  $\delta = (b - p)/p$  линейной моды низшего порядка (не имеющей нулей) от глубины решетки  $p$  для различных значений частоты  $\Omega_0$  - постоянная распространения растет с увеличением глубины решетки. Профили линейных мод показаны на рис. 3.4(б). Их

примечательной особенностью является то, что при фиксированном  $\alpha$  максимум моды сдвигается из глубины решетки к ее поверхности при увеличении  $p$ . То же самое происходит при фиксированной глубине решетки  $p$  с ростом параметра  $\alpha$ . Можно ввести критическую глубину решетки  $p_{cr}$ , при превышении которой максимум линейной моды оказывается локализован в поверхностном канале. Критическая глубина монотонно растет с увеличением частоты решетки  $\Omega_0$ , и является немонотонной функцией параметра  $\alpha$  [рис. 3.4(с)], так что существует некая оптимальная скорость модуляции частоты, при которой критическая глубина минимальна.

Профили и свойства нелинейных поверхностных волн  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$  [полученных при решении уравнения (3.1) с  $\sigma = -1$ ] на границе модулированной решетки представлены на рис. 3.5. Если в строго периодической решетке всегда существует пороговая мощность для формирования поверхностных солитонов, то в модулированной решетке мощность солитона, локализованного в первом канале решетки, может обращаться в ноль в отсечке, если параметр  $\alpha$  превосходит некоторое критическое значение  $\alpha_{cr}$  [рис. 3.5(b)]. При этом пороговая мощность монотонно уменьшается с ростом  $\alpha$  и обращается в ноль при  $\alpha > \alpha_{cr}$ . Интересно, что даже при  $\alpha < \alpha_{cr}$  беспороговое формирование солитонов возможно в тех каналах, где находится центр линейной моды. Во всех случаях увеличение мощности сопровождается увеличением локализации солитона. Анализ устойчивости показывает, что при  $\alpha > \alpha_{cr}$  поверхностные солитоны в модулированных решетках устойчивы при любой постоянной распространения.

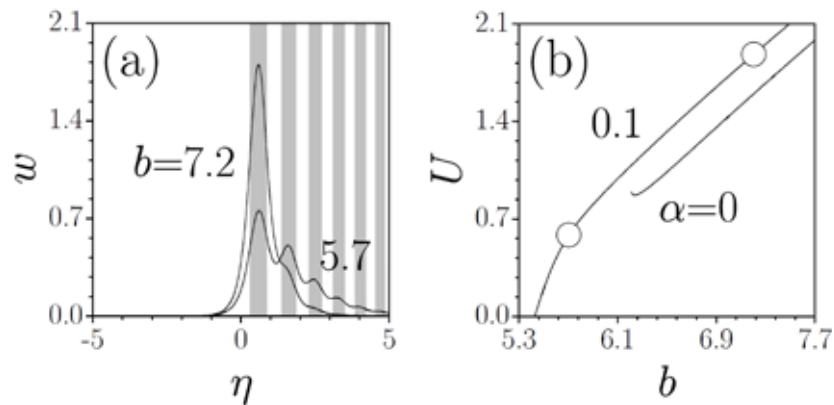


Рис. 3.5. (а) Профили поверхностных солитонов при  $\Omega_0 = 5$ ,  $p = 5$ ,  $\alpha = 0.1$ . (б) Мощность поверхностного солитона в зависимости от постоянной распространения при  $\Omega_0 = 5$ ,  $p = 5$ . Точки соответствуют солитонам на панели (а).

Одним из наиболее интересных явлений в модулированных ограниченных решетках является притяжение солитонов к поверхности решетки, поскольку оно позволяет возбуждать поверхностные волны даже с помощью пучков, запущенных вдали от гра-



ницы. Качественный анализ этого эффекта может быть произведен при использовании метода эффективных частиц (см. параграф 1.1), в котором солитон с профилем  $\chi \operatorname{sech}[\chi(\eta - \eta_0)]$  и форм-фактором  $\chi$  рассматривается как эффективная частица, движущаяся в потенциале  $\Pi(\eta) = 2p[\pi\Omega(\eta)/2\chi]\{1 - \cos[\Omega(\eta)\eta]\}/\sinh[\pi\Omega(\eta)/2\chi]$  при  $\eta \geq 0$ , который в первом приближении при  $\alpha \ll 1$  может рассматриваться как зависящий от локальной частоты решетки  $\Omega(\eta) = \Omega_0(1 + \alpha\eta)$ . В таком потенциале, наиболее глубокая яма находится вблизи границы раздела, в то время как глубина других ям убывает практически экспоненциально при удалении от границы благодаря фактору  $\sinh[\pi\Omega(\eta)/2\chi]$  в знаменателе приведенной выше формулы. Интуитивно можно ожидать, что эффективная частица (солитон) будет смещаться при распространении в сторону наиболее глубокой приповерхностной ямы, где может произойти ее захват.

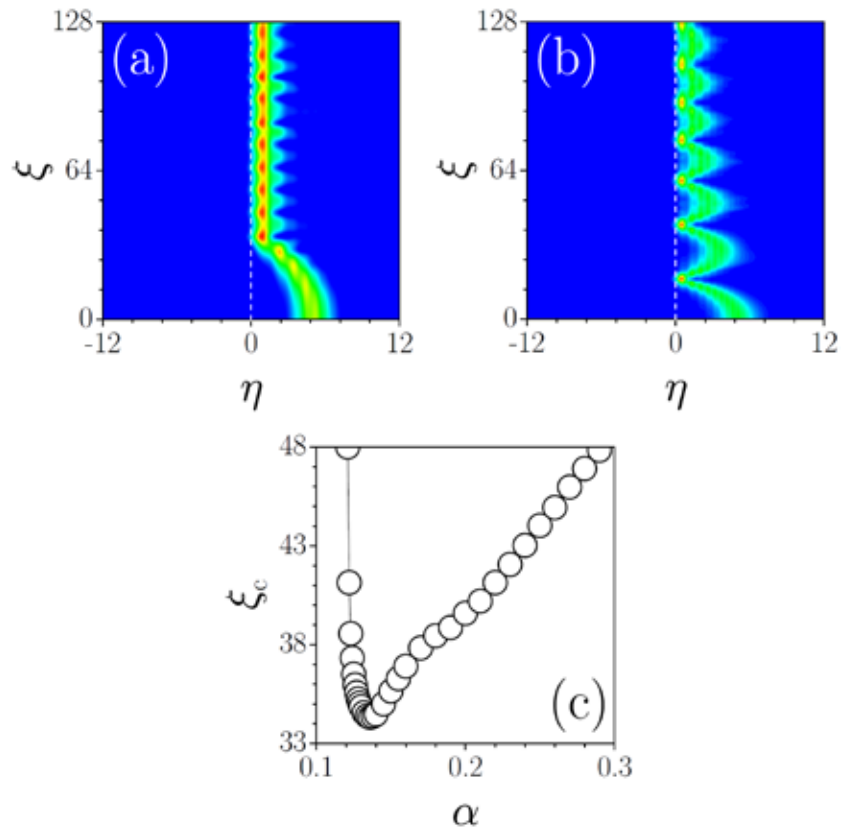


Рис. 3.6. Динамика возбуждения поверхностной волны при (а)  $\Omega_0 = 3$ ,  $p = 1$ ,  $\alpha = 0.15$  и (б)  $\Omega_0 = 6$ ,  $p = 4.5$ ,  $\alpha = 0.15$ . (с) Трасса распространения до столкновения с поверхностью в зависимости от  $\alpha$  при  $\Omega_0 = 3$ ,  $p = 1$ . Во всех случаях исходный солитон с форм-фактором  $\chi = 1$  запускался в точке  $\eta_0 = 5$ . Пунктирные линии на панелях (а) и (б) указывают границу решетки.

Рис. 3.6 иллюстрирует этот эффект на примере солитона  $q(\eta, 0) = \chi \operatorname{sech}[\chi(\eta - \eta_0)]$ , запущенного в частотно-модулированную решетку на расстоянии  $\eta_0 = 5$  от ее границы.

В решетке с низкой частотой  $\Omega_0$  солитон искривляется по направлению к границе благодаря градиенту эффективного потенциала  $\Pi(\eta)$  и сразу захватывается в поверхностном канале, возбуждая поверхностную волну [рис. 3.6(a)]. Поскольку скорость искривления траектории и мобильность солитона растут с увеличением частоты решетки, при определенных условиях он может отражаться от границы высокочастотной решетки и периодически возвращаться к ней. В этом случае формирование поверхностного солитона происходит после множественных актов отражения [рис. 3.6(b)]. Трасса распространения  $\xi_c$ , на которой происходит первое столкновение солитона с границей раздела, монотонно уменьшается с увеличением глубины решетки. Однако,  $\xi_c$  является немонотонной функцией скорости изменения частоты  $\alpha$  [рис. 3.6(c)]. Это связано с тем, что при небольших  $\alpha$  градиент эффективного потенциала недостаточно велик для того, чтобы стимулировать смещение солитона, в то время как при больших значениях  $\alpha$  влияние решетки усредняется для широких пучков, накрывающих многие каналы решетки и не чувствующих мелких деталей в профиле показателя преломления. Заметим, что увеличение входной мощности пучка сначала приводит к росту скорости его дрейфа к границе, но, когда мощность превосходит некоторое критическое значение, происходит захват пучка в решетке в точке его запуска.

Экспериментальное наблюдение поверхностных солитонов на границе раздела однородной среды и модулированной решетки было выполнено в массивах волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами. Поскольку глубина модуляции показателя преломления зависит от скорости записи волноводов, то решетки с амплитудной модуляцией, в которых показатель преломления нарастает по направлению к границе по закону  $R(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} \exp[-(\eta - md)^8 / w_\eta^8] \exp(-\alpha m)$ , были получены при линейном уменьшении скорости записи по направлению к границе. Было изготовлено два типа массивов с расстояниями между волноводами  $13 \mu\text{m}$  и  $40 \mu\text{m}$ . Ширина волноводов составляла  $3 \mu\text{m}$ , нелинейность в образце была фокусирующей и однородной с  $n_2 = 2.7 \times 10^{-20} \text{ m}^2/\text{W}$ . Для экспериментов с пучками низкой интенсивности использовался массив с периодом  $13 \mu\text{m}$ , глубиной модуляции показателя преломления  $\sim 7.6 \times 10^{-4}$  и излучение на длине волны  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Пучок запускался в поверхностный канал. Динамика распространения света в массиве регистрировалась напрямую с использованием флуоресценции, вызванной пучком. В немодулированном массиве наблюдалась дискретная дифракция, сопровождающаяся проникновением света в глубину массива [рис. 3.7(a)], хотя небольшая часть излучения оставалась в приповерхностном канале из-за того, что ограничение массива при  $\eta = 0$  приводит к появлению слабого дефекта показателя преломления в поверхностном канале, слегка отличающемся от каналов в глубине решетки. Уже при слабой амплитудной модуляции с  $\alpha = 0.014$  свет частично возвращается к границе массива и испытывает приповерхностные осцилля-

ции [рис. 3.7(b)]. Частота этих осцилляций постепенно увеличивается с ростом  $\alpha$ , а степень проникновения излучения вглубь решетки уменьшается как показано на рис. 3.8(c) и 3.8(d) для  $\alpha = 0.028$  и  $\alpha = 0.042$ . Последнее указывает на формирование поверхностной волны даже в линейном режиме.

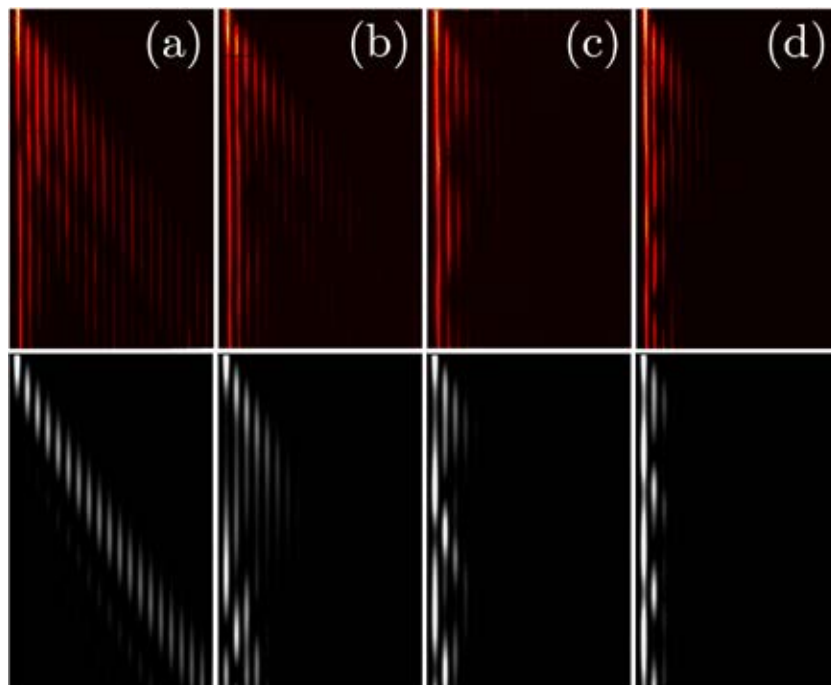


Рис. 3.7. Сравнение экспериментальных (верхний ряд) и теоретических (нижний ряд) распределений интенсивности для пучка низкой интенсивности, запущенного в первый канал решетки. Верхняя и нижняя границы каждой панели соответствуют входной и выходной плоскостям образца, соответственно. Скорость модуляции  $\alpha = 0$  (a),  $\alpha = 0.014$  (b),  $\alpha = 0.028$  (c),  $\alpha = 0.042$  (d).

Для экспериментов с высокоинтенсивными пучками использовался массив с периодом  $40 \mu\text{m}$ , глубиной модуляции показателя преломления  $\sim 2.6 \times 10^{-4}$ , и излучение на длине волны  $\lambda = 800 \text{ nm}$ . На рисунке 3.8 проводится сравнение выходных распределений интенсивности (нижние части панелей) и теоретически вычисленной динамики распространения (верхние части панелей) для немодулированного (левая колонка) и модулированного массивов (правая колонка). В отсутствие модуляции амплитуды каналов при входной мощности  $50 \text{ kW}$  пучок смещается вглубь массива [рис 3.8(a), верхний ряд]. При увеличении мощности до  $500\text{--}700 \text{ kW}$  (второй и третий ряды) намечается тенденция к локализации в поверхностном канале, а формирование поверхностной волны очевидно при мощности  $\sim 1200 \text{ kW}$  (последний ряд). Эта картина свидетельствует о наличии порога по мощности для формирования поверхностных солитонов в немодулированных массивах. Она полностью меняется в модулированном массиве с

$\alpha = 0.048$ . В этом случае локализованная поверхностная мода существует уже при низких мощностях  $\sim 50$  kW [рис. 3.8(b), верхний ряд], т.е. такие моды являются беспороговыми и дальнейший рост мощности ведет лишь к увеличению концентрации света в поверхностном канале.

Таким образом, модуляция параметров полубесконечной решетки приводит к таким интересным эффектам, как притяжение излучения к границе решетки и формирование беспороговых поверхностных волн.

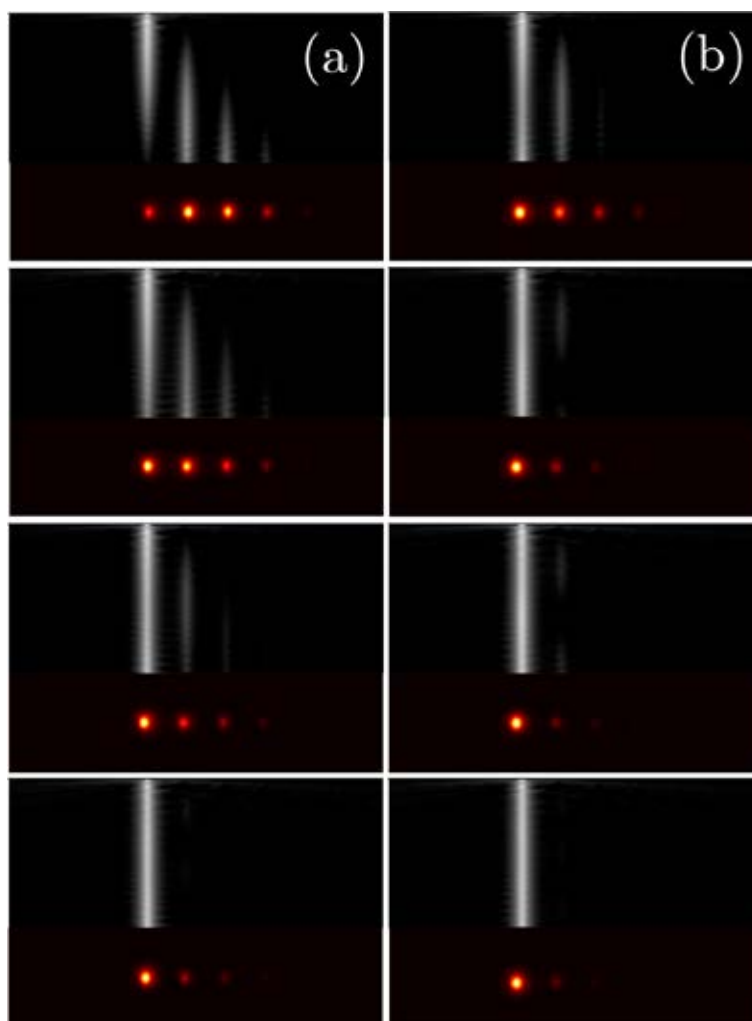


Рис. 3.8. Сравнение экспериментальных и теоретических распределений интенсивности для пучка, запущенного в первый канал решетки. Результаты численного моделирования динамики распространения внутри образца наложены на фотографии выходных распределений интенсивности. Колонка (a) соответствует немодулированному массиву, а колонка (b) - модулированному массиву с  $\alpha = 0.048$ . Входная мощность равна 50 kW (первый ряд), 500 kW (второй ряд), 700 kW (третий ряд) и 1200 kW (четвертый ряд).

### §3.3. Двумерные поверхностные волны на границе периодической и однородной сред

В данном параграфе приведен теоретический анализ динамики формирования и устойчивости двумерных поверхностных волн, а также обсуждается их экспериментальное возбуждение на границе раздела периодической решетки и однородной среды. Если в одномерном случае возможен лишь один тип фундаментальных поверхностных солитонов, то в двумерной решетке, граница которой может иметь более сложный профиль, характеризующийся наличием углов или даже дефектов, возможны специфические поверхностные состояния, такие, как угловые солитоны, которые не были известны ранее [230].

Для теоретического описания распространения излучения на границе двумерной периодической решетки с фокусирующей нелинейностью используем уравнение (2.2) при  $\sigma = -1$ . В эксперименте глубина модуляции показателя преломления в волноводах, записанных фемтосекундными лазерными импульсами была фиксирована и составляла порядка  $\delta n \sim 3 \times 10^{-4}$ , что для излучения на длине волны  $\lambda = 800$  nm и характерного поперечного масштаба  $r_0 = 10$   $\mu\text{m}$  эквивалентно глубине решетки  $p = 3$ . В теории, для полноты анализа, величина  $p$  будет варьироваться. Профиль показателя преломления описывается функцией  $R(\eta, \zeta) = \sum_{i,k=1,N} Q(\eta - \eta_i, \zeta - \zeta_k)$ , где величины  $\eta_i, \zeta_k$  задают координаты центров отдельных волноводов, разделенных расстоянием  $d$ , в то время как  $N$  - количество волноводов вдоль каждой из осей решетки. Профили волноводов эллиптические из-за процедуры их записи и описываются функцией  $Q(\eta, \zeta) = \exp[-(\eta/w_\eta)^2 - (\zeta/w_\zeta)^2]$ . В дальнейшем полагаем  $N = 5$ ,  $d = 5$ ,  $w_\eta = 1.4$ ,  $w_\zeta = 0.4$ , что соответствует массиву из 25 волноводов с поперечными сечениями  $14 \times 4$   $\mu\text{m}^2$  и периодом 50  $\mu\text{m}$ . Длина массива волноводов составляла 74.4 mm.

Фундаментальные солитоны, локализованные на плоской границе (т.е. в центральном волноводе в крайнем ряду массива) или в угловом волноводе массива ищутся в виде  $q = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ , их типичные профили показаны на рис. 3.9. При малых амплитудах солитоны, локализованные на границе, имеют многогорбые распределения интенсивности [рис. 3.9(a)], увеличение амплитуды (нелинейности) сопровождается концентрацией света в одном поверхностном канале [рис. 3.9(b)]. Похожая эволюция профиля наблюдается и для угловых солитонов [рис. 3.9(c)]. Несмотря на ограниченное число волноводов в рассматриваемом массиве, профили солитонов остаются очень близки к таковым в полубесконечном массиве даже при малых амплитудах. Последнее является следствием того факта, что при наличии границы отсечка по постоянной распространения  $b_{co}$ , ниже которой поверхностные солитоны не существуют, не совпадает с нижней границей полубесконечной запрещенной зоны, а превосходит ее.

Поэтому семейство поверхностных солитонов не отвлекается от блоховских волн при увеличении амплитуды (в отличие от двумерных солитонов в бесконечных решетках), и расширение поверхностных солитонов вблизи отсечки на самом деле ограничено 5–10

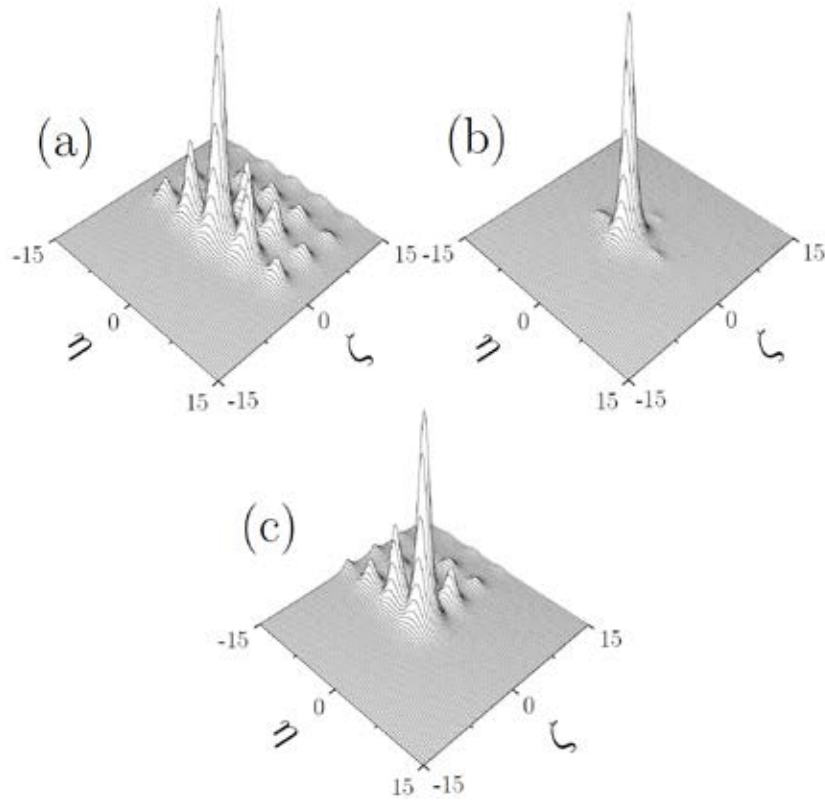


Рис. 3.9. Профили поверхностных солитонов, локализованных на плоской границе (a),(b) и в углу (c) массива. Солитоны соответствуют  $b=0.57$  (a),  $b=0.72$  (b) и  $b=0.57$  (c). Во всех случаях  $p=3$ .

волноводами. Заметим, что из-за эллиптичности волноводов профили низкоамплитудных поверхностных солитонов более вытянуты в направлении оси  $\eta$ . Как и солитоны на границах однородных сред, решеточные поверхностные солитоны существуют только при уровнях мощности, превышающих пороговую [рис. 3.10(a)]. Зависимость  $U(b)$  не-монотонная. Ее вид предполагает существование еще одного семейства решений для которого кривая  $U(b)$  смыкается при  $b=b_{co}$  с кривой, показанной на рис. 3.10(a). Такое семейство, характеризующееся более широким профилем, действительно может быть найдено, но оно всегда неустойчиво. С ростом постоянной распространения мощность солитона приближается к  $U_T=5.85$ , поскольку в этом пределе влиянием решетки можно пренебречь. Зависимости  $U(b)$  для солитонов, локализованных на границе и в углу решетки, качественно схожи, однако пороговые мощности различаются - угловой солитон всегда требует меньшей мощности для его существования. Это является прямым

следствием меньшего числа соседних волноводов для углового канала и, следовательно, меньшей скорости туннелирования мощности из него в линейном случае. Естественно, что для подавления более медленного туннелирования достаточно меньшей нелинейной добавки к показателю преломления. Отсечка для существования поверхностных солитонов растет с увеличением глубины решетки [рис. 3.10(b)], а пороговая мощность уменьшается. Часть солитонной ветви, для которой  $dU/db \leq 0$ , является экспоненциально неустойчивой, в то время как часть где  $dU/db > 0$  устойчива. При этом критическая величина постоянной распространения, при которой наступает стабилизация, совпадает для ограниченного и полубесконечного массивов.

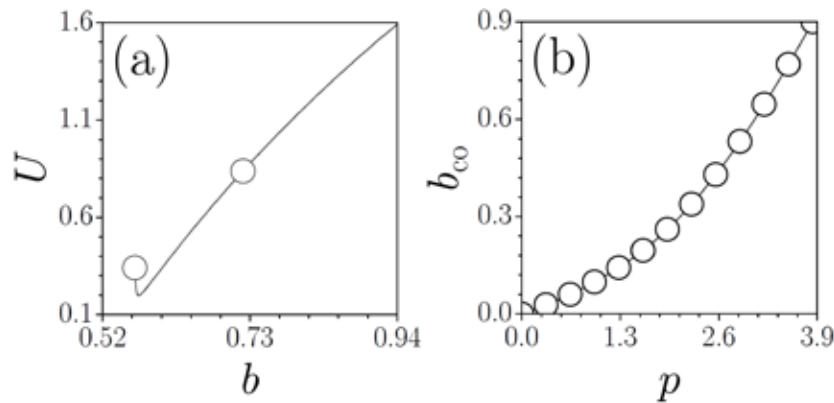


Рис. 3.10. (а) Мощность солитона локализованного на прямой границе решетки как функция постоянной распространения при  $p = 3$ . Точки соответствуют солитонам на рис. 3.9(а) и 3.9(б). (б) Отсечка по постоянной распространения для такого солитона в зависимости от глубины решетки.

Для записи волноводов использовались пучки Ti:Sa лазера, генерирующего импульсы длительностью 150 fs с частотой повторения 100 kHz (энергия импульсов составляла порядка  $0.3 \mu\text{J}$ ), на длине волны 800 nm, которые фокусировались в образце из плавленого кварца с помощью  $20\times$  объектива. В эксперименте использовался кварц высокой чистоты. Волноводы записывались со скоростью  $1250 \mu\text{m/s}$  с помощью специальной системы позиционирования фокуса пучка. Уровень оптических потерь в записанных волноводах не превышал  $0.4 \text{ dB/cm}$ . Для того чтобы избежать оптического повреждения поверхности волноводы начинались на глубине 0.5 mm от поверхности, что позволяет уменьшить интенсивность излучения непосредственно на поверхности образца, для которой порог оптического пробоя значительно ниже чем в объеме среды.

Для формирования солитонов использовались импульсы, генерируемые тем же лазером, но с существенно меньшей частотой повторения 1 kHz. Пучок фокусировался в волновод на границе или в углу образца с помощью  $4\times$  микроскопического объектива, в

то время как выходные распределения регистрировались с помощью CCD камеры. На рис. 3.11 показаны усредненные по времени выходные распределения интенсивности для разных уровней мощности, которые согласуются с результатами численного моделирования распространения пучков  $q|_{\xi=0} = A \exp(-\eta^2 - \zeta^2)$ , запущенных в соответствующие волноводы [амплитуда пучка равнялась  $A = 0.3$  на панелях (a)(d),  $0.37$  на панелях (b),(e) и  $0.6$  на панелях (e),(f)]. При уровнях мощности  $1.2$  MW ниже пороговой выходные распределения существенно расширяются из-за дискретной дифракции и практически вся мощность туннелируется из входного в соседние каналы [рис. 3.11(a),3.11(d)].

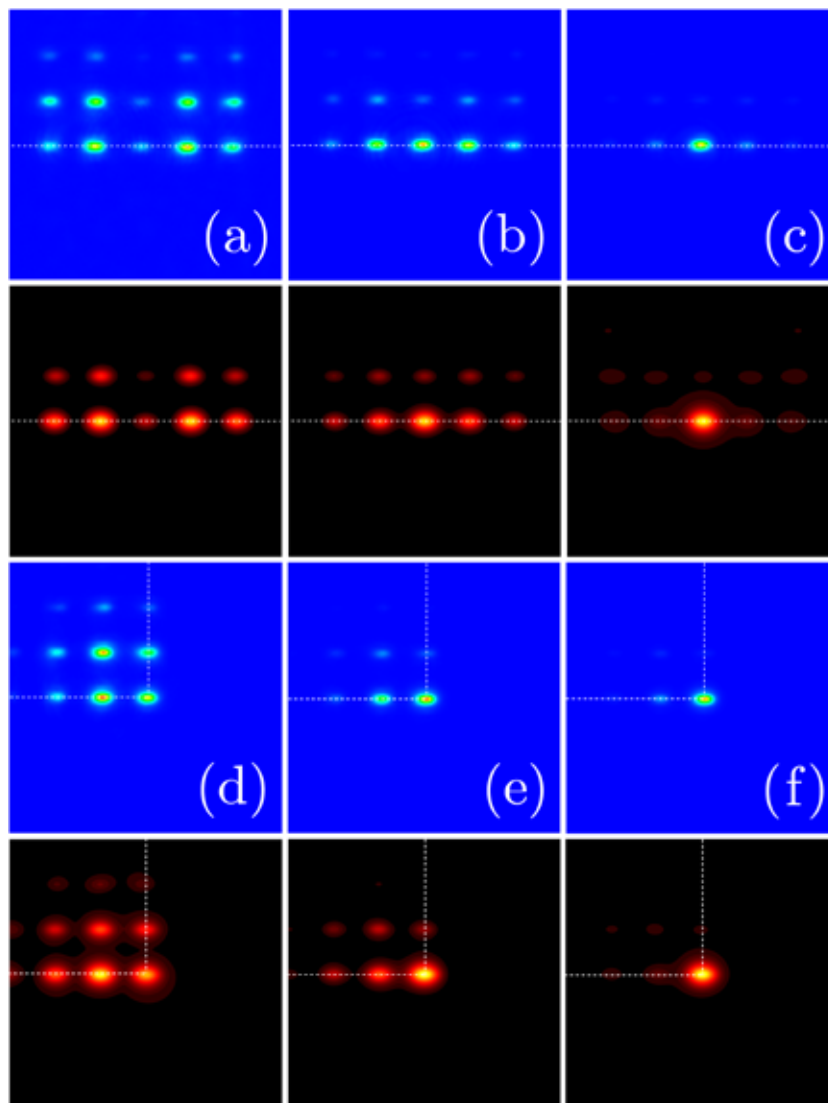


Рис. 3.11. Возбуждение поверхностных солитонов на прямой границе (первые два ряда) и в углу массива (третий и четвертый ряды). Первый и третий ряды - эксперимент, второй и четвертый ряды - теория. Входная мощность  $1.2$  MW (a),(d),  $1.8$  MW (b),(e), и  $4.8$  MW (c),(f). Пунктирные линии показывают границу массива.



Выходные распределения интенсивности слабо асимметричны, поскольку, несмотря на эллиптические профили волноводов, расстояние между их центрами достаточно велико, что приводит к сравнимой скорости туннелирования мощности в вертикальном и горизонтальном направлениях. Благодаря высокой однородности волноводов в массиве выходные распределения интенсивности оказываются практически идентичными для возбуждения волноводов в различных углах/сторонах массива. При мощности 1.8 MW наблюдается тенденция к локализации в поверхностном канале, что соответствует результатам численного счета при уровнях мощности немного превышающих пороговую [рис. 3.11(b), 3.11(e)]. Заметим, что поскольку в эксперименте используется импульсное излучение (что приводит к дифракции на хвостах импульсов), то локализация в эксперименте визуальна наступает при несколько больших уровнях мощности, чем в теоретической модели, рассматривающей непрерывное излучение. Влияние хвостов импульсов на выходное распределение интенсивности мало при высоких уровнях мощности, когда происходит формирование поверхностных солитонов, проиллюстрированное на рис. 3.11(c) и 3.11(f).

Таким образом, в двумерных решетках солитоны могут формироваться не только на границе, но и в углах периодической структуры, причем пороговая мощность для формирования солитонов зависит от того, в какой точке поверхности они локализованы, и убывает с уменьшением числа соседних волноводов.

### **§3.4. Двумерные поверхностные волны в секторных гексагональных массивах волноводов**

Возможная геометрия границы решетки во многом определяется симметрией профиля показателя преломления в ее глубине. В предыдущем параграфе были описаны свойства солитонов на плоских границах или в углах квадратной решетки. Такие границы получаются, когда решетка ограничивается по линиям, параллельным осям решетки. В решетках с вращательной симметрией более высокого порядка (с большим числом осей) граница может быть сформирована большим числом способов. В данном параграфе описываются свойства и представлены экспериментальные результаты для солитонов на границах гексагональных решеток, занимающих различные угловые секторы  $\pi n/3$ ,  $n = 1, \dots, 5$ . Естественно ожидать, что пороговая мощность солитона в угловом канале будет зависеть от ширины углового сектора, занимаемого решеткой [239].

Распространение излучения на границе гексагональных решеток с фокусирующей нелинейностью описывается уравнением (2.2). В такой решетке волноводы, разделенные расстоянием  $d$ , формируют гексагональную структуру, причем присутствуют только те волноводы, которые находятся внутри одного углового сектора  $\alpha$ , ограниченного

какими-либо двумя из осей решетки. Так, в гексагональной решетке можно сформировать пять типов границ (углов), соответствующих  $\alpha = n\pi/3$ , где  $n = 1, \dots, 5$  (случай  $n = 6$  соответствует ситуации, когда решетка занимает все пространство). Решетка  $R(\eta, \zeta)$  составлена из эллиптических волноводов с гауссовскими профилями показателя преломления  $\exp[-(\eta/w_\eta)^2 - (\zeta/w_\zeta)^2]$ , где ширины волноводов  $w_\eta = 0.45$ ,  $w_\zeta = 0.9$ , и расстояние между ними  $d = 4$ , что соответствует реальным поперечным сечениям  $4.5 \times 9 \mu\text{m}^2$  и периоду  $40 \mu\text{m}$ . В эксперименте глубина решетки модуляции показателя преломления составляла порядка  $3.1 \times 10^{-4}$ , что соответствует  $p = 2.8$ . Различные виды границ с разными углами  $\alpha$  были изготовлены в одном образце, фотография которого приведена на рис. 3.12. Угловые волноводы, в которые фокусировался входной пучок, показаны красными кружками.

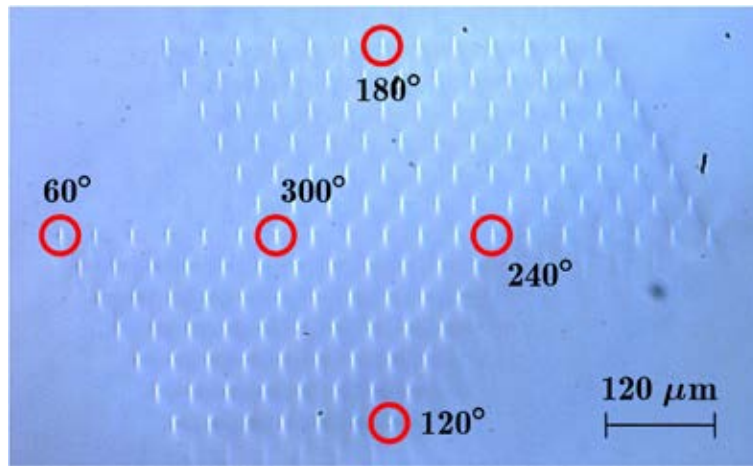


Рис. 3.12. Фотография массива, записанного лазерными импульсами. Возбуждаемые волноводы показаны красными кружками.

Угол раствора решетки  $\alpha$  заметно влияет на динамику распространения уже в линейном режиме. Темп дискретной дифракции заметно увеличивается с ростом  $\alpha$  и достигает своего максимального значения в неограниченной решетке. Это связано с большим числом волноводов, окружающих угловой канал в решетке с большим углом  $\alpha$ , что приводит к увеличению скорости туннелирования мощности из углового канала. Помимо этого, наблюдается тенденция к смещению светового пучка из углового канала вглубь массива, однако скорость этого смещения уменьшается с ростом  $\alpha$ , в отличие от темпа дискретной дифракции. При этом интегральный центр пучка всегда смещается вглубь массива вдоль биссектрисы углового сектора. Изначально, сдвиг интегрального центра  $S$  вдоль биссектрисы растет пропорционально  $\xi^2$ , но на больших расстояниях зависимость  $S(\xi)$  становится линейной. Для углов  $\alpha = \pi/3$  и  $2\pi/3$  скорость дрейфа центра пучка  $dS/d\xi$  на достаточно больших расстояниях практически одинакова и состав-

ляет  $dS/d\xi = 0.223$ , однако она уменьшается до  $dS/d\xi = 0.168$  при  $\alpha = \pi$  и составляет всего  $dS/d\xi = 0.031$  для  $\alpha = 5\pi/3$ . Дрейф центра пучка может использоваться как характеристика анизотропии распределения поля, к которой приводит специфическая геометрия границы решетки.

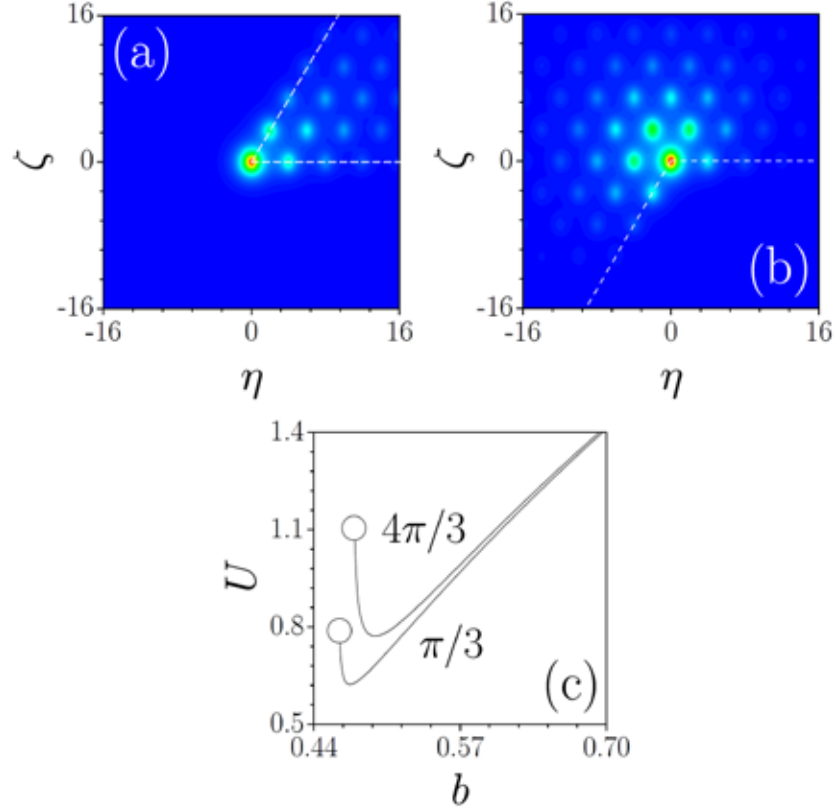


Рис. 3.13. Профили поверхностных солитонов при (a)  $b = 0.463$ ,  $\alpha = \pi/3$  и (b)  $b = 0.476$ ,  $\alpha = 4\pi/3$ , соответствующие точкам на зависимости  $U(b)$  (c). Белые пунктирные линии указывают положение границы. Во всех случаях  $p = 2.8$ .

Угол раствора решетки заметно влияет и на свойства солитонов. Для любого  $\alpha$  угловые солитоны могут быть найдены только при постоянных распространения  $b \geq b_{co}$  (рис. 3.13). Мощность таких солитонов всегда превышает пороговую  $U_{th}$ , поскольку зависимость  $U(b)$  немонотонна [рис. 3.13(c)]. В сегменте  $b_{co} < b \leq b_{cr}$  производная  $dU/db \leq 0$ , что говорит о неустойчивости этой ветви, в то время как при  $b > b_{cr}$  фундаментальные солитоны устойчивы, поскольку  $dU/db > 0$ . При  $b \rightarrow b_{co}$  они заметно расширяются в область решетки, практически не проникая в однородную среду, и это расширение тем заметней, чем шире соответствующий угловой сектор [рис. 3.13(a) и 3.13(b)]. При больших постоянных распространения солитоны хорошо локализованы. Отметим, что пороговая мощность угловых солитонов монотонно увеличивается с ростом угла раствора  $\alpha$ , поскольку большая нелинейность требуется, чтобы скомпенсировать более сильное ди-

фракционное расплывание в решетке с большим  $\alpha$ . Так, пороговая мощность возрастает от  $U_{th} = 0.622$  при  $\alpha = \pi/3$  до  $U_{th} = 0.741$  при  $\alpha = \pi$  и  $U_{th} = 0.809$  при  $\alpha = 5\pi/3$ . При этом разница в пороговых мощностях наиболее заметна для  $\alpha = \pi/3$  и  $\alpha = 2\pi/3$ .

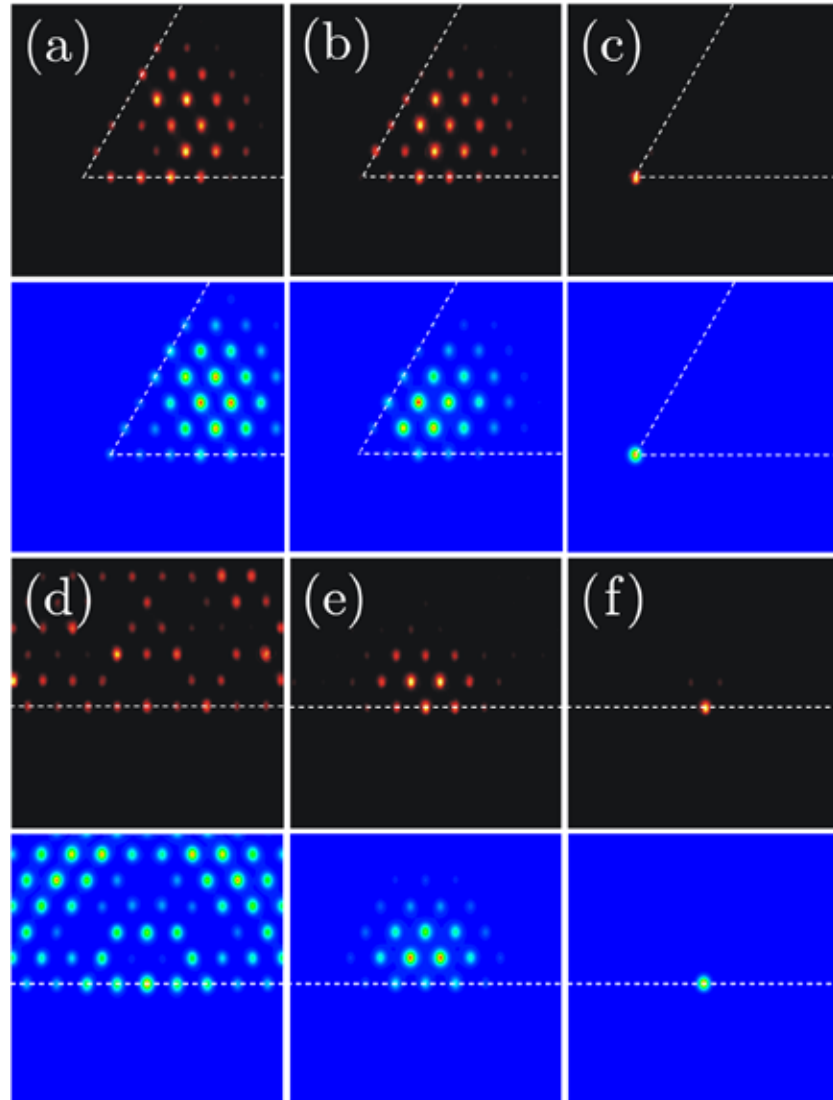


Рис. 3.14. Сравнение экспериментальных (первый и третий ряды) и теоретических (второй и четвертый ряды) выходных распределений интенсивности для возбуждения углового волновода в массивах с  $\alpha = \pi/3$  (первый и второй ряды) и  $\alpha = \pi$  (третий и четвертый ряды). Входная мощность 0.15 MW (a), 1.3 MW (b), 3.2 MW (c), 0.15 MW (d), 2.5 MW (e), 3.5 MW (f).

Угловые солитоны в гексагональных решетках наблюдались в массивах, записанных фемтосекундными лазерными импульсами. Скорость записи волнопроводов составляла  $2000 \mu\text{m/s}$ , длина массива равнялась  $105 \text{ mm}$ , оптические потери в одном волноводе не превышали  $0.4 \text{ dB/cm}$ . Для возбуждения солитонов использовался Ti:Sa лазер, ге-

нерирующий 150 fs импульсы с частотой повторения 1 kHz на длине волны 800 nm. На рис. 3.14 показано сравнение экспериментально измеренных и теоретически вычисленных выходных распределений интенсивности для возбуждения углового канала в массивах с углом раствора  $\alpha = \pi/3$  и  $\alpha = \pi$ . В первом случае, благодаря малому углу раствора массива, свет сильно смещается в его глубину в соответствии с теоретическими оценками для скорости дрейфа [рис. 3.14(a)]. При увеличении входной мощности выходное распределение постепенно смещается к угловому волноводу [рис. 3.14(b)], так что при определенной мощности происходит формирование поверхностного солитона [рис. 3.14(c)]. При этом реальная мощность, требуемая для возбуждения солитона в массиве с  $\alpha = \pi/3$  действительно оказывается ниже, чем таковая для больших углов раствора. Последнее становится очевидным при сравнении динамики возбуждения для  $\alpha = \pi/3$  и  $\alpha = \pi$ . В последнем случае, в линейном режиме свет также сильно проникает в решетку, но смещение интегрального центра распределения интенсивности намного меньше, чем при  $\alpha = \pi/3$  [рис. 3.14(d)]. С ростом мощности наблюдается локализация света у поверхностного канала [рис. 3.14(e)] и формирование солитона [рис. 3.14(f)], но при большем уровне мощности  $\sim 3.5$  MW, чем в случае  $\alpha = \pi/3$ . Набор выходных распределений интенсивности для еще большего угла раствора  $\alpha = 4\pi/3$  и разных входных уровней мощности показан на рис. 3.15, где пороговая мощность  $\sim 3.7$  MW, требуемая для формирования солитона, оказывается еще выше, чем в предыдущих случаях.

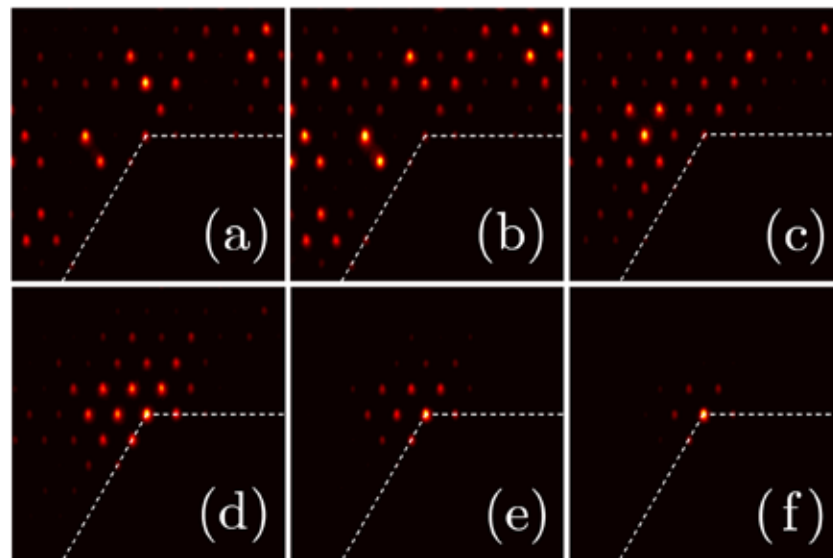


Рис. 3.15. Выходные распределения интенсивности для возбуждения углового волновода в массиве с  $\alpha = 4\pi/3$ . Входная мощность составляет 0.15 MW (a), 1 MW (b), 2 MW (c), 2.3 MW (d), 2.7 MW (e) и 3.7 MW (f).

Таким образом, показано, что геометрия поверхности заметно влияет не только на динамику распространения света в линейном режиме, но и на пороги по мощности, требуемые для формирования поверхностных солитонов.

### §3.5. Двумерные солитоны на границе раздела различных периодических сред

До сих пор нами обсуждались солитоны на границах периодической и однородной сред. Однако, поверхностные волны могут формироваться на границе двух периодических решеток. При этом граница может определяться не только скачком среднего показателя преломления, но и изменением топологии решетки. Данный параграф посвящен поверхностным волнам на границе раздела квадратной и гексагональной решеток с разными глубинами модуляции показателя преломления [242].

Для теоретического описания свойств солитонов на границе раздела двух решеток используется та же модель, что и в параграфе 3.4. Однако, глубина модуляции показателя преломления теперь может принимать разные значения:  $p = p_s$  в области квадратной решетки и  $p = p_h$  в гексагональной решетке. Отдельные каналы, как и ранее, имеют эллиптические профили  $\exp[-(\eta/w_\eta)^2 - (\zeta/w_\zeta)^2]$ , причем расстояние между соседними каналами одинаково в квадратной и гексагональной решетках и равняется  $d$ . Здесь мы используем те же параметры волноводов, что и в параграфе 3.4. Глубина решетки  $p = 1$  соответствует реальной глубине модуляции показателя преломления  $\sim 1.1 \times 10^{-4}$ . Для того, чтобы влияние границы на динамику распространения было максимально, возбуждаются волноводы, принадлежащие к первому ряду гексагональной или квадратной решеток - эти волноводы отмечены на микроскопической фотографии массива на рис. 3.16(с). Заметим, что, несмотря на одинаковое расстояние  $d$  между центрами соседних волноводов, количество волноводов на единицу площади выше в гексагональной решетке, т.е. при  $p_s = p_h$  среднее значение показателя преломления в этой решетке несколько больше.

Профили поверхностных солитонов, локализованных в первом ряду одной из решеток, ищем в виде  $q = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ . Зависимости их мощности от постоянной распространения приведены на рис. 3.16(а) и 3.16(б). Если волноводы в обеих решетках имеют одинаковую глубину  $p_s = p_h = 3$ , то пороговые мощности для солитонов в квадратной и гексагональной решетках отличаются незначительно и равны  $U_{th}^s = 0.652$  и  $U_{th}^h = 0.685$ , соответственно [рис. 3.16(а)]. При этом поверхностный солитон всегда глубже проникает в гексагональную решетку благодаря ее повышенному среднему показателю преломления. Асимметрия профиля солитона наиболее четко выражена вблизи отсечки по постоянной распространения и становится еще более заметной, если глубина волноводов в

гексагональной решетке выше, чем в квадратной, т.е.  $p_s = 3$ ,  $p_h = 3.2$ . В этом случае на профиле низкоамплитудного солитона из первого ряда квадратной решетки становятся четко различимы три пика интенсивности [рис. 3.17(a)], два из которых расположены в гексагональной решетке. При этом, если центр солитона находится в гексагональной решетке, то он сильно расширяется в этой решетке, но не проникает в квадратную решетку [рис. 3.17(c)]. Если же показатель преломления выше в квадратной решетке, т.е.  $p_s = 3.2$ ,  $p_h = 3.0$ , то поле солитона из первого ряда гексагональной решетки "затягивается" в квадратную решетку [рис. 3.17(d)], в то время как солитон, изначально локализованный в квадратной решетке, не проникает в гексагональную часть даже при малых амплитудах [рис. 3.17(f)].

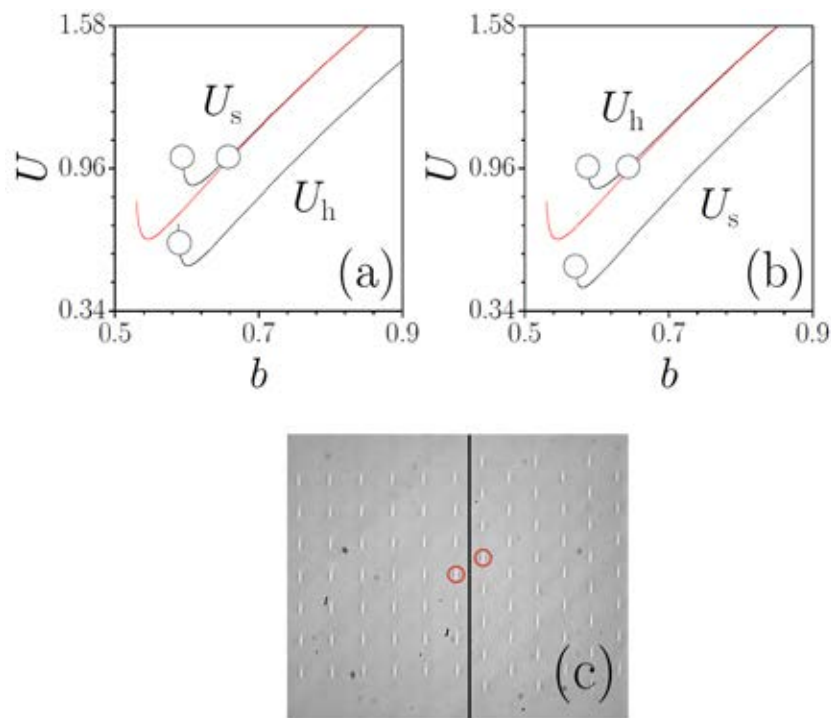


Рис. 3.16. Зависимости  $U(b)$  для случаев (a)  $p_s = 3$ ,  $p_h = 3.2$  и (b)  $p_s = 3.2$ ,  $p_h = 3$ . Кривые, обозначенные символами  $U_s(U_h)$ , соответствуют солитонам, локализованным в квадратной (гексагональной) решетке. Точки на панелях (a) и (b) соответствуют профилям, показанным соответственно на рис. 3.17(a)-3.17(c) и 3.17(d)-3.17(f). Красные кривые на панелях (a),(b) показывают зависимости  $U_s(b)$  при  $p_s = p_h = 3$ . (c) Фотография границы квадратного и гексагонального массивов. Возбуждаемые волноводы обозначены кружками.

Изменение показателя преломления хотя бы в одном из массивов отражается на порогах по мощности. Если в решетках с  $p_s = p_h = 3$  пороги были сравнимы, то при  $p_h = 3.2 > p_s = 3.0$  пороговая мощность для солитонов в гексагональной решетке падает

до  $U_{\text{th}} = 0.537$ , а в квадратной решетке увеличивается до  $U_{\text{th}} = 0.887$  [рис. 3.16(a)]. Если  $p_s = 3.2 > p_h = 3.0$ , то солитон проще сформировать в квадратном массиве, где  $U_{\text{th}}^s = 0.441$ , в то время как в гексагональном массиве пороговая мощность существенно выше и составляет  $U_{\text{th}}^h = 0.873$  [рис. 3.16(b)]. Таким образом, формирование поверхностной волны в более мелком/глубоком массиве всегда требует существенно большей/меньшей мощности, чем формирование солитона в массивах одинаковой глубины. Эта особенность является следствием затягивания светового поля из мелкого в глубокий массив. Для подавления затягивания необходимо более существенное увеличение нелинейной добавки к показателю преломления при росте разницы глубин массивов. Если же солитон возбуждается в более глубоком массиве, то его поле практически не проникает в мелкий массив и пороговая мощность падает при дальнейшем увеличении глубины этого массива.

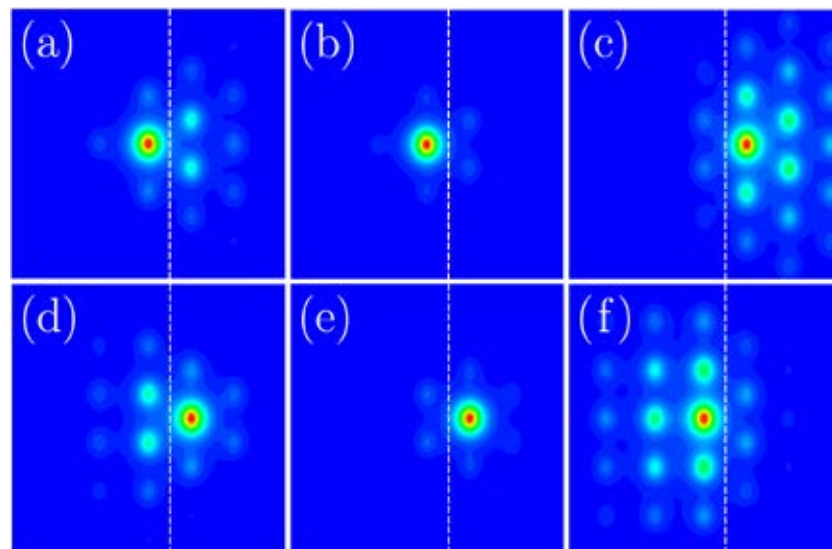


Рис. 3.17. Распределение поля в поверхностных солитонах при (a)  $b = 0.594$ , (b)  $0.657$ , (c)  $0.589$ , (d)  $0.587$ , (e)  $0.643$  и (f)  $0.570$ . Панели (a)-(c) соответствуют случаю  $p_s = 3$ ,  $p_h = 3.2$ . Панели (d)-(f) соответствуют случаю  $p_s = 3.2$ ,  $p_h = 3$ .

Экспериментальное наблюдение солитонов на границе раздела двух решеток представлено на рис. 3.18. Все параметры массива (за исключением глубины модуляции показателя преломления) совпадают с введенными в параграфе 3.4. Так, рис. 3.18(a)-3.18(c) иллюстрируют выходные распределения интенсивности для трех типов массивов [с  $p_s = p_h$  на рис. 3.18(a),  $p_s > p_h$  на рис. 3.18(b) и  $p_s < p_h$  на рис. 3.18(c)] в том случае, когда входной пучок с мощностью  $3.2 \text{ MW}$  фокусируется в волновод в первом ряду квадратного массива. Отметим, что увеличение глубины одного из массивов достигалось с помощью уменьшения скорости записи волноводов в нем до  $1800 \text{ } \mu\text{m/s}$  по сравнению с



обычной скоростью записи  $2000 \mu\text{m}/\text{s}$ . В отличие от распределений на рис. 3.18(a) и 3.18(b), где происходит формирование сильно локализованного поверхностного солитона, на рис. 3.18(c) достигнута лишь частичная локализация, и очевидна тенденция к затягиванию света в более глубокую гексагональную часть массива. Если входной пучок такой же мощности фокусируется в первый канал в гексагональной части массива, то сильная локализация наблюдается при равных показателях преломления  $p_s = p_h$  [рис. 3.18(d)] или в случае более глубокого гексагонального массива с  $p_s < p_h$  [рис. 3.18(f)], в то время как для  $p_s > p_h$  снова наблюдается промежуточное, частично

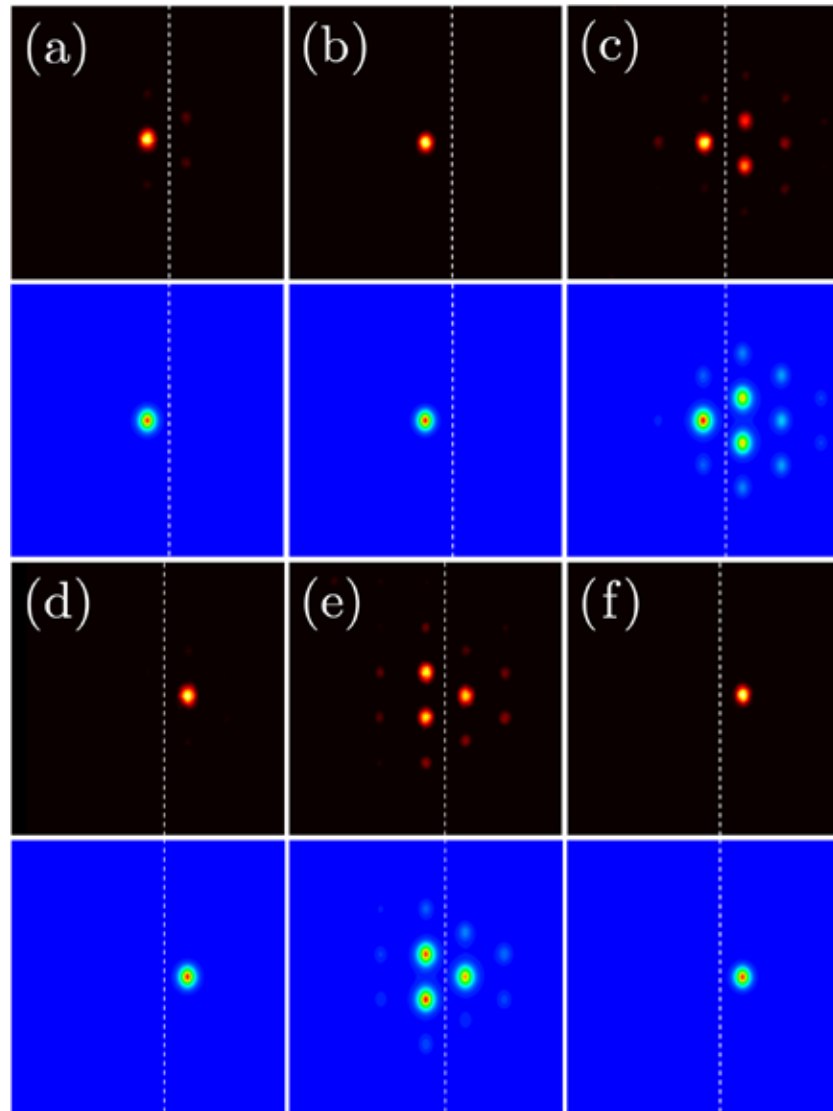


Рис. 3.18. Сравнение экспериментальных (первый и третий ряды) и теоретических (второй и четвертый ряды) выходных распределений интенсивности при возбуждении волновода в первом ряду квадратного (a)-(c) и гексагонального (d)-(f) массивов. В первой колонке  $p_s = p_h$ , во второй  $p_s > p_h$ , и в третьей  $p_s < p_h$ .

локализованное состояние [рис. 3.18(e)], и свет затягивается в квадратный массив. В этом случае эффект от увеличенного показателя преломления  $p_s$  оказывается явно заметнее, чем увеличение эффективного показателя преломления в гексагональном массиве благодаря большей плотности волноводов.

Детали изменения выходных распределений интенсивности при постепенном увеличении мощности пучка представлены на рис. 3.19, где возбуждался волновод в первом ряду квадратного массива при  $p_s < p_h$ . При низких уровнях мощности свет практически полностью сосредоточен в квадратном массиве, поскольку он испытывает отражение на границе [рис. 3.19(a)]. При увеличении мощности свет начинает проникать в гексагональную область [рис. 3.19(b)-3.19(d)], поскольку нелинейность постепенно выравнивает эффективные показатели преломления. На рисунках 3.19(e), 3.19(f) заметна тенденция к локализации света на границе и формирование частично локализованной поверхностной волны.

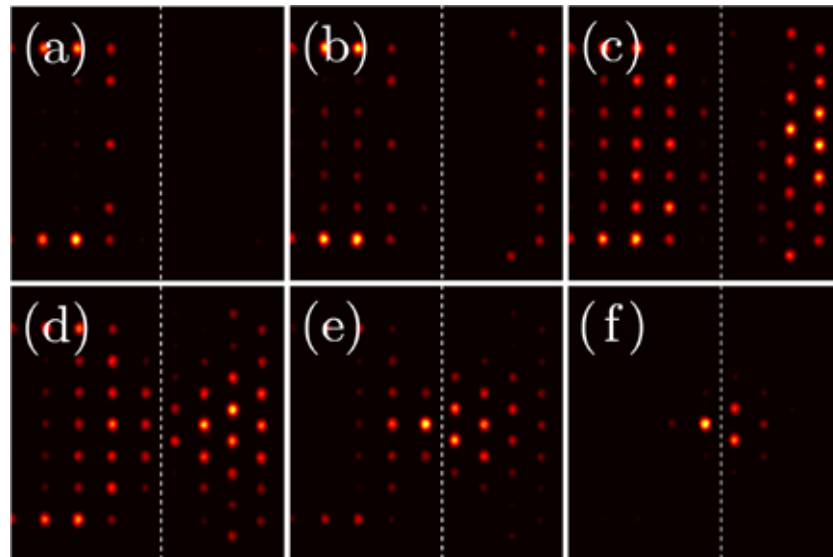


Рис. 3.19. Выходные распределения интенсивности при возбуждении волновода в первом ряду квадратного массива с  $p_s < p_h$ . Входная мощность 62 kW (a), 1.4 MW (b), 2 MW (c), 2.3 MW (d), 2.7 MW (e) и 3.2 MW (f).

Резюмируя, в данном параграфе показано, что симметрия и глубина модуляции показателя преломления по разные стороны от границы раздела оказывает существенное влияние на распространение излучения. Увеличение глубины одной из решеток существенно понижает порог формирования поверхностного солитона в этой решетке, но в то же время повышает порог для формирования солитона по другую сторону от границы.

### §3.6. Векторные поверхностные солитоны на границе периодической решетки

Векторные солитоны интересны тем, что их компоненты (взаимно некогерентные поля, поля с ортогональными поляризациями и т.д.) совместно создают нелинейную добавку к показателю преломления, которая влияет на распространение каждой из компонент поля. Например, компонента с достаточно большой пиковой интенсивностью может создавать волновод, в котором распространяются низкоинтенсивные компоненты поля, имеющие даже многогорбые распределения интенсивности. При этом устойчивость всего векторного солитонного комплекса, как правило, определяется соотношением мощностей отдельных его компонент. Данный параграф посвящен теоретическому и экспериментальному исследованию свойств двумерных векторных солитонов с двумя ортогонально поляризованными компонентами поля на границе раздела между периодическим нелинейным массивом и однородной средой [250].

Для описания формирования поверхностных векторных солитонов при непрерывном излучении используем систему двух связанных нелинейных уравнений Шредингера для безразмерных амплитуд  $q_x$  и  $q_y$  двух взаимно когерентных, ортогонально поляризованных вдоль осей  $x$  и  $y$  световых волн, распространяющихся в направлении оси  $z$  вдоль границы раздела периодического массива волноводов и однородной среды:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q_x}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q_x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q_x}{\partial \zeta^2} \right) - q_x \left( |q_x|^2 + \frac{2}{3} |q_y|^2 \right) - \frac{1}{3} q_x^* q_y^2 - p_x R_x(\eta, \zeta) q_x, \\ i \frac{\partial q_y}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q_y}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q_y}{\partial \zeta^2} \right) - q_y \left( |q_y|^2 + \frac{2}{3} |q_x|^2 \right) - \frac{1}{3} q_y^* q_x^2 - p_y R_y(\eta, \zeta) q_y. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь нормировки поперечных и продольной координат совпадают с нормировками, введенными ранее для скалярных (т.е. однокомпонентных) солитонов. В соответствии с экспериментальными данными в массивах волноводов, записанных лазерными импульсами, в нашем случае функциональные профили показателя преломления  $R_x$  и  $R_y$  для компонент поля  $q_x$  и  $q_y$  слегка различаются, несмотря на то, что исходные образцы полностью однородны и свойства их изотропны. Последнее является следствием эллиптичности записываемых в образце волноводов. При этом глубины модуляции показателя преломления оказываются также различны:  $p_x \neq p_y$ . Мы описываем профили волноводов функциями  $\exp[-(\eta/d_x)^2 - (\zeta/d_y)^2] + (1/2) \exp[-(\eta/d_x)^2 - (\zeta/ad_y)^2]$ , где  $a=2$  для компоненты поля  $q_x$  и  $a=4$  для компоненты поля  $q_y$ . Период такого квадратного массива равен  $d$ . Члены в первых скобках в правых частях уравнений (3.6) описывают дифракцию компонент поля. Слагаемые во вторых скобках описывают фазовую самомо-

дуляцию и кроссмодуляцию. Третий член в каждом из уравнений ответственен за четырехволновое смешение в отсутствие фазовой расстройки, и, наконец, четвертый член описывает влияние пространственно-неоднородного профиля показателя преломления. Заметим, что фазовая расстройка между компонентами поля  $q_x$  и  $q_y$  неизбежно появляется при их распространении благодаря разным профилям показателя преломления  $p_x R_x$  и  $p_y R_y$ , а также в результате различных нелинейных фазовых набегов. В дальнейшем мы полагаем  $d_x = 0.8$ ,  $d_y = 0.45$  и  $d = 4$ , что соответствует волноводам с поперечными сечениями  $8 \times 4.5 \mu\text{m}^2$  и периоду массива  $40 \mu\text{m}$ . Мы также используем глубины решеток  $p_x = 1.65$ ,  $p_y = 1.75$ , причем значение  $p_x R_x = 2.5$  соответствует реальной глубине модуляции показателя преломления  $\sim 2.8 \times 10^{-4}$ . Векторные солитоны удобно характеризовать полной мощностью

$$U = U_x + U_y = \int \int_{-\infty}^{\infty} (|q_x|^2 + |q_y|^2) d\eta d\zeta, \quad (3.7)$$

которая является одним из интегралов (т.е. сохраняется в процессе распространения) системы уравнений (3.6).

Одним из простейших решений системы (3.6) является скалярный солитон, для которого поле одной из компонент равно нулю. Свойства таких солитонов полностью совпадают со свойствами солитонов, обсуждавшихся в параграфе 3.3. Поле векторного солитона может быть записано в виде  $q_x = w_x \exp(ib\xi)$ ,  $q_y = w_y \exp(ib\xi)$  (в этом случае компоненты поля синфазны или противофазны, что соответствует линейной поляризации) или в виде  $q_x = w_x \exp(ib\xi)$ ,  $q_y = iw_y \exp(ib\xi)$  (в этом случае сдвиг фаз между компонентами составляет  $\pi/2$ , что соответствует эллиптической поляризации). При этом в обоих случаях  $w_x, w_y$  являются действительными функциями, описывающими распределение поля в каждой компоненте. Решения системы (3.6), соответствующие линейной поляризации, могут быть найдены только в частном случае  $p_x R_x = p_y R_y$ , поэтому в дальнейшем мы рассматриваем эллиптически поляризованные семейства солитонов, так как  $p_x R_x \neq p_y R_y$ . Их свойства представлены на рис. 3.20 и 3.21. Примеры профилей векторных солитонов, локализованных на плоской границе или в углу массива, показаны на рис. 3.21. Полная мощность (в дальнейшем обозначим ее  $U_e$ , учитывая состояние поляризации) таких солитонов монотонно растет с увеличением постоянной распространения  $b$  (рис. 3.20). Как и в скалярном случае, для векторных солитонов характерно наличие отсечки по постоянной распространения  $b_e^{\text{co}}$  и порога существования по мощности. При постоянных распространения, заметно превосходящих отсечку, поле обеих компонент векторного солитона сосредоточено практически в одном волноводе (средняя колонка на рис. 3.21). При уменьшении  $b$  амплитуда поля  $w_y$  уменьшается, и эта компонента начинает глубоко проникать в решетку (первая и последняя колонки на

рис. 3.21), хотя  $w_x$  компонента при этом остается хорошо локализованной. Этот интересный эффект связан с различием профилей показателей преломления для  $w_x, w_y$  компонент и несколько большей глубиной решетки  $p_y > p_x$ . В скалярном случае солитон с поляризацией вдоль оси  $y$  существовал бы при постоянных распространения, превышающих отсечку  $b_y^{\text{co}}$ , которая должна быть выше чем отсечка  $b_x^{\text{co}}$  для скалярного солитона, поляризованного вдоль оси  $x$ . Более того, мощность  $U_y$  солитона, поляризованного вдоль оси  $y$ , увеличивалась бы вблизи отсечки при  $b \rightarrow b_y^{\text{co}}$ , как это происходит для всех скалярных поверхностных солитонов. Однако, в векторном случае

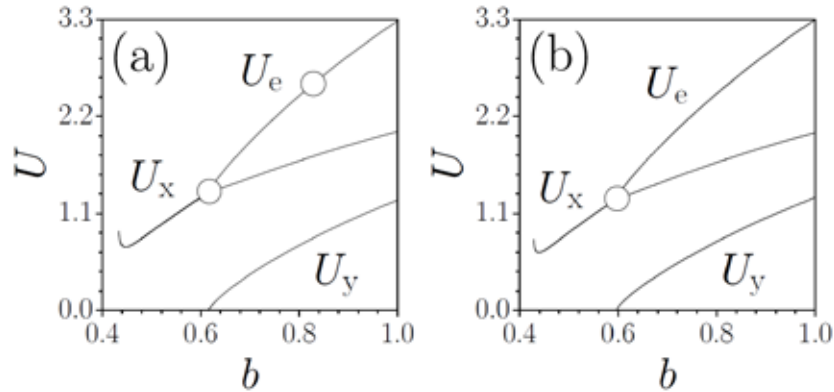


Рис. 3.20. Мощность как функция постоянной распространения для векторных солитонов, локализованных на плоской границе (а) и в углу (б) массива волноводов. Точки соответствуют солитонам на рис. 3.21.

компонента поля  $w_x$ , которая остается все еще хорошо локализованной при  $b \rightarrow b_y^{\text{co}}$ , создает благодаря кроссмодуляции нелинейный волновод для компоненты  $w_y$ , так что эффективный показатель преломления определяется величиной  $p_y R_y + (2/3)w_x^2$ . Из-за этого мощность  $U_y$  компоненты  $w_y$  не увеличивается при  $b \rightarrow b_e^{\text{co}} \approx b_y^{\text{co}}$ , как это происходило бы в скалярном случае, а обращается в ноль (рис. 3.20), причем профиль  $w_y$  компоненты приближается к профилю линейной моды эффективного волновода  $p_y R_y + (2/3)w_x^2$ . Следовательно, при определенном уровне мощности  $U_e$  эллиптически поляризованный векторный солитон превращается в скалярный солитон с ненулевой компонентой поля  $w_x$ . Другими словами, семейство векторных солитонов отщепляется от семейства скалярных солитонов по мере роста постоянной распространения. Отметим, что при  $b < b_e^{\text{co}}$  свойства солитона с единственной компонентой  $w_x$  аналогичны свойствам скалярного солитона, т.е. для этой компоненты существует ее собственный порог по мощности и отсечка  $b_x^{\text{co}} < b_e^{\text{co}}$  (рис. 3.20). Такая картина характерна как для векторных солитонов на плоской границе массива, так и для солитонов, локализованных в его углу, хотя для по-

следних пороговая мощность несколько ниже. Векторные солитоны устойчивы при достаточно больших уровнях мощности.

В эксперименте использовались массивы из  $7 \times 7$  волноводов, записанные сфокусированными лазерными импульсами. Длина образца составляла 105 mm. Для возбуждения солитонов использовался Ti:Sa лазер. Исходный пучок расщеплялся на два пучка с одинаковой мощностью. Один из пучков проходил через полуволновую пластину для того, чтобы создать необходимую разность фаз, после чего оба пучка фокусировались в один из волноводов массива. Для обеспечения точного перекрытия импульсов в двух пучках использовалась регулируемая линия задержки. Выходные компоненты солитона с различной поляризацией выделялись с помощью поляризатора и регистрировались на CCD камере.

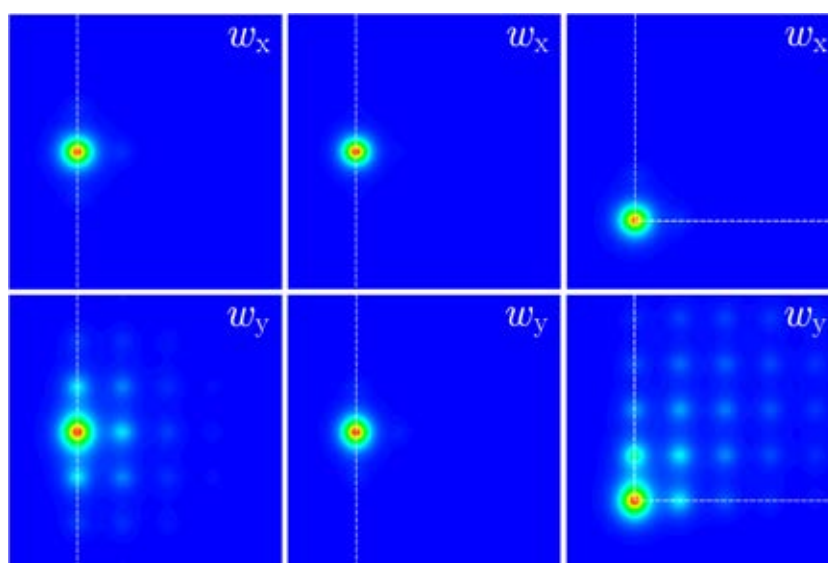


Рис. 3.21. Профили векторных поверхностных солитонов при  $b = 0.616$  (левая колонка)  $b = 0.830$  (средняя колонка), и  $b = 0.598$  (правая колонка). Левая и центральная колонки соответствуют солитонам на прямой границе, правая - угловым солитонам. Верхний ряд показывает профиль  $w_x$  компоненты, нижний - профиль  $w_y$  компоненты.

Экспериментальные выходные распределения интенсивности для солитонов на плоской границе и в углу массива изображены в первом и втором рядах на рис. 3.22 и 3.23. Первые колонки на обоих рисунках соответствуют линейной дискретной дифракции, когда свет уходит от поверхности и проникает вглубь массива. Вторые колонки показывают распределения интенсивности для входной пиковой мощности 500 kW в том случае, когда одна из компонент входного пучка заблокирована. Изменения выходного распределения из-за нелинейных эффектов очевидны (в частности, заметна тенденция к смещению центра выходного распределения к границе), хотя входная мощность все

еще недостаточно велика, чтобы достичь формирования поверхностного солитона. Эта картина полностью изменяется, когда обе компоненты разблокированы и

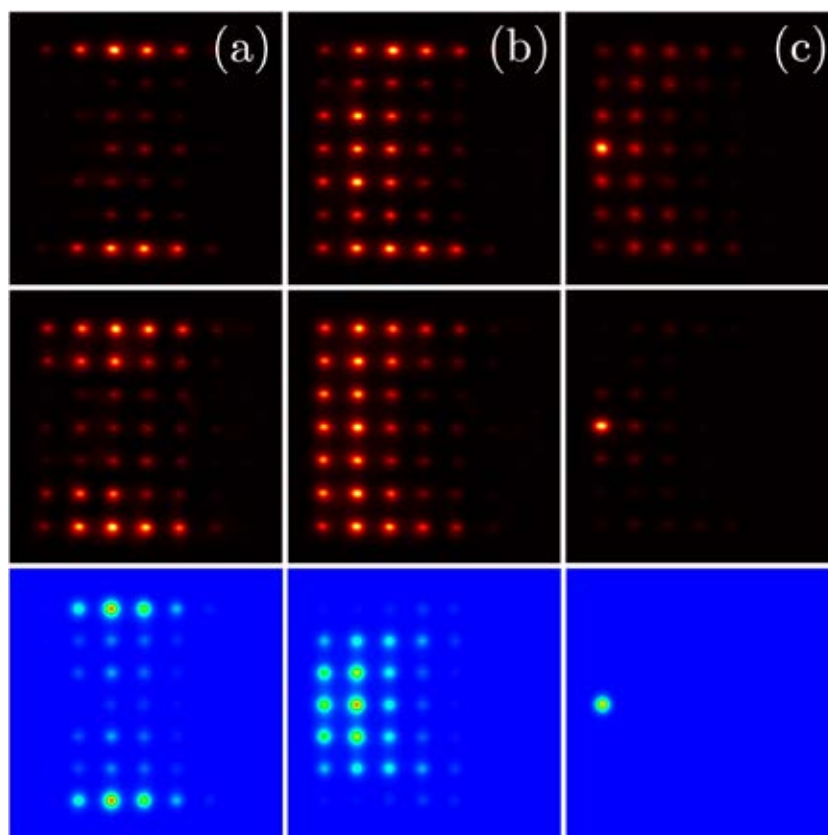


Рис. 3.22. Экспериментальные выходные распределения интенсивности для  $q_x$  (первый ряд) и  $q_y$  (второй ряд) компонент поля для случая, когда возбужден волновод на плоской границе массива. Теоретически вычисленные распределения для  $q_y$  компоненты показаны в третьем ряду. Колонка (а) соответствует линейному распространению, колонка (b) показывает распространение при мощности 500 kW , когда одна из компонент заблокирована, а колонка (b) соответствует случаю, когда мощность каждой из компонент составляет 500 kW , и они обе взаимодействуют в образце.

взаимодействуют через кроссмодуляцию и четырехволновое смешение (третьи колонки). Несмотря на то, что пиковая мощность для каждой из компонент не менялась по сравнению со второй колонкой, обе компоненты хорошо локализованы в поверхностных волноводах, поскольку общая нелинейная добавка к показателю преломления достаточна для формирования поверхностного солитона. Для сравнения с экспериментом, последний ряд на рис. 3.22 и 3.23 показывает численные результаты для компоненты поля  $q_y$  при тех же уровнях входной мощности. Отметим хорошее качественное согласие между теорией и экспериментом.

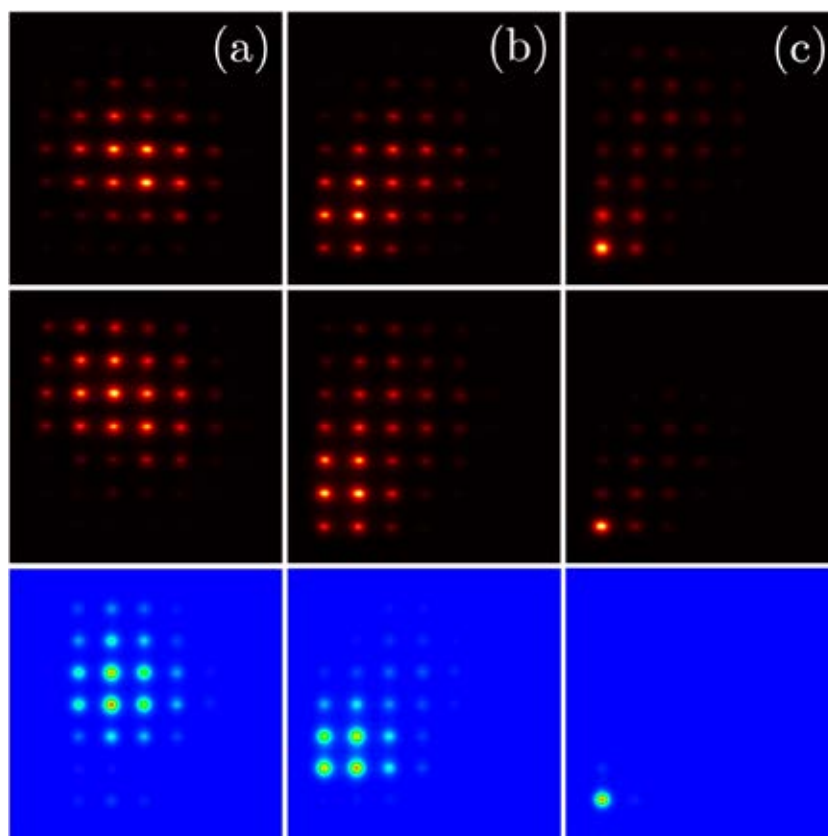


Рис. 3.23. Экспериментальные выходные распределения интенсивности для  $q_x$  (первый ряд) и  $q_y$  (второй ряд) компонент поля для случая, когда возбужден волновод в углу массива. Теоретически вычисленные распределения для  $q_y$  компоненты показаны в третьем ряду. Колонка (a) соответствует линейному распространению, колонка (b) показывает распространение при мощности 500 kW, когда одна из компонент заблокирована, а колонка (c) соответствует случаю, когда мощность каждой из компонент составляет 500 kW и они обе взаимодействуют в образце.

Таким образом, представлены результаты теоретического и экспериментального анализа векторных поверхностных солитонов, семейства которых ответвляются от семейств скалярных солитонов при увеличении мощности и постоянной распространения. Векторные солитоны могут содержать компоненты с сильно различающейся степенью локализации.

### §3.7. Вихревые поверхностные солитоны

В предшествующих параграфах, за исключением параграфа 3.1, где был приведен один пример четного поверхностного солитона, нами обсуждались простейшие фундаментальные поверхностные солитоны, характеризующиеся одним глобальным максимумом интенсивности в приповерхностном канале решетки. Однако, в периодических



средах могут формироваться более сложные устойчивые солитонные структуры, в частности - мультипольные и вихревые. В неограниченных квадратных решетках показателя преломления профили простейших мультипольных и вихревых солитонов обычно симметричны (так, решеточный вихревой солитон с единичным топологическим зарядом в квадратной решетке характеризуется наличием четырех одинаковых максимумов интенсивности). Однако, наличие границы раздела между периодической решеткой и однородной средой, или между двумя разными решетками может привести к существенным искажениям профилей вихревых солитонов, локализованных на таких границах, и повлиять на их устойчивость. В этом параграфе исследуются свойства поверхностных вихревых солитонов [252].

Мы рассматриваем поверхностные вихревые солитоны в среде с насыщением нелинейности, распространение которых описывается уравнением

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{q|q|^2}{1+S|q|^2} - R(\eta, \zeta)q \quad (3.8)$$

для безразмерной амплитуды светового поля. Здесь  $S$  - параметр насыщения, а профиль решетки описывается функцией  $R(\eta, \zeta) = \delta p H(\eta) + (p/4)[1 - \cos(\Omega\eta)][1 - \cos(\Omega\zeta)]$ , где  $p$  - глубина решетки,  $\Omega$  - ее частота, функция  $H(\eta) \equiv 0$  при  $\eta \leq 0$  и  $H(\eta) \equiv 1$  при  $\eta > 0$ ,  $\delta p$  - величина скачка показателя преломления на границе. Топология такой решетки, приведенной на рис. 3.24(с), не меняется по разные стороны от границы, но средний показатель преломления испытывает скачок  $\delta p$  на границе. Такие распределения показателя преломления могут быть изготовлены технологически (например с помощью ионной имплантации) или индуцированы оптически в фоторефрактивных кристаллах. В последнем случае интерференция четырех плоских волн и неоднородная некогерентная подсветка кристалла может быть использована для создания скачка показателя преломления при  $\eta = 0$  в периодической решетке; при этом пучок подсветки должен распространяться в направлении, перпендикулярном оси  $\xi$ , для того, чтобы избежать его дифракционного искажения вдоль оси  $\xi$ . Похожие границы раздела могут быть сформированы в фоторефрактивных кристаллах при приложении к кристаллу пространственно-неоднородного статического поля. В дальнейшем мы используем модель (3.8), поскольку она точно описывает распространение излучения в технологически изготовленных решетках, а также правильно предсказывает качественные свойства солитонов в фоторефрактивных кристаллах.

Профили вихревых солитонов ищутся в виде  $q = [w_r(\eta, \zeta) + iw_i(\eta, \zeta)] \exp(ib\xi)$ , где функции  $w_r, w_i$  описывают профиль действительной и мнимой частей поля. Топологи-

ческий заряд  $m$  поверхностного вихревого солитона определяется как циркуляция градиента фазы  $\arctan(w_i/w_r)$  комплексного поля  $q$  вокруг фазовой дислокации, где амплитуда поля обращается в ноль. Вдали от границы раздела свойства вихревых солитонов в решетке, изображенной на рис. 3.24(с), не отличаются от свойств обычных решеточных солитонов. Такие солитоны характеризуются наличием одной дислокации, находящейся между четырьмя пиками интенсивности, положения которых совпадают с положениями локальных максимумов решетки. Однако картина качественно меняется в том случае, когда максимумы интенсивности вихревого солитона находятся по разные стороны от границы. В простейшем случае фазовая дислокация вихревого солитона находится близко к точке  $\eta = \zeta = 0$ . Типичные распределения модуля поля в таком солитоне представлены на рис. 3.24(а) и 3.24(б). Фазовая дислокация находится между локальными максимумами показателя преломления решетки. Максимумы интенсивности солитона при  $\eta > 0$  имеют меньшую амплитуду, чем максимумы при  $\eta < 0$ , т.е. профиль поверхностного вихревого солитона становится асимметричным при наличии границы. Асимметрии профиля еще сильнее возрастает для больших скачков показателя преломления  $\delta p$  на границе. Фаза поверхностного вихревого солитона растет нелинейно при

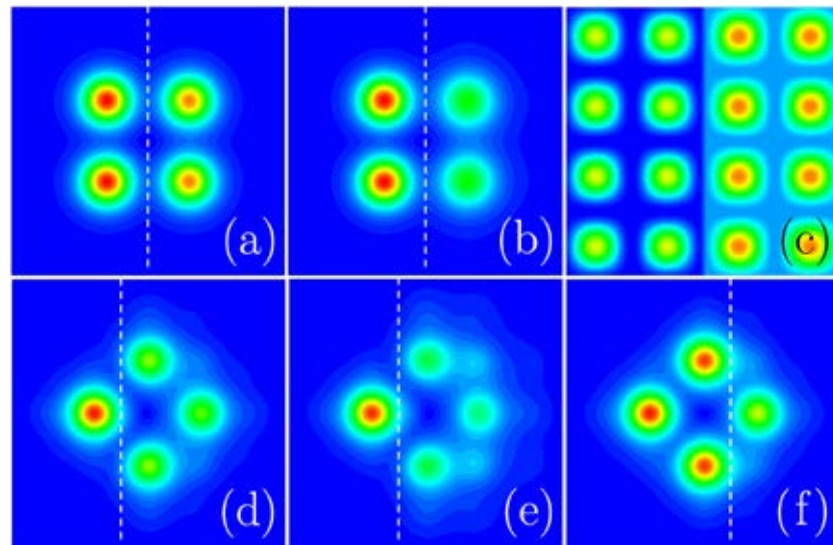


Рис. 3.24. Распределения модуля поля для поверхностных вихревых солитонов при  $b=8$ ,  $p=4.5$ ,  $S=0.05$  и (а)  $\delta p=1$ , (б)  $\delta p=4$ . (с) Профиль решетки при  $p=4.5$  и  $\delta p=1$ . Распределения модуля поля для сильно асимметричных вихревых солитонов при  $b=3$ ,  $p=4$ ,  $S=0.2$  и (d)  $\delta p=0.8$ , (е)  $\delta p=1.3$ , (f)  $\delta p=0.6$ . Во всех случаях  $\Omega=4$ . Вертикальные пунктирные линии указывают положение границы раздела.

движении по кольцу, окружающему дислокацию. Так, скорость роста фазы максимальна между максимумами интенсивности и минимальна в окрестности максимумов. Уве-

личение глубины периодической части решетки  $p$  приводит к более сильной концентрации поля в четырех каналах решетки.

При фиксированных значениях  $\delta p$  и  $p$  существуют нижняя  $b_{\text{low}}$  и верхняя  $b_{\text{upp}}$  отсечки по постоянной распространения, т.е. поверхностные солитоны формируются при  $b_{\text{low}} \leq b \leq b_{\text{upp}}$ . В отличие от кольцевых вихревых солитонов в однородной нелинейной среде, для поверхностных солитонов соотношение мощностей

$$U_{r,i} = \int \int_{-\infty}^{\infty} w_{r,i}^2 d\eta d\zeta, \quad (3.9)$$

сосредоточенных в действительной и мнимой компонентах поля, варьируется при изменении  $b$ ,  $p$  и  $\delta p$ . Вблизи верхней и нижней отсечек одно из отношений  $U_r/U_i$  или

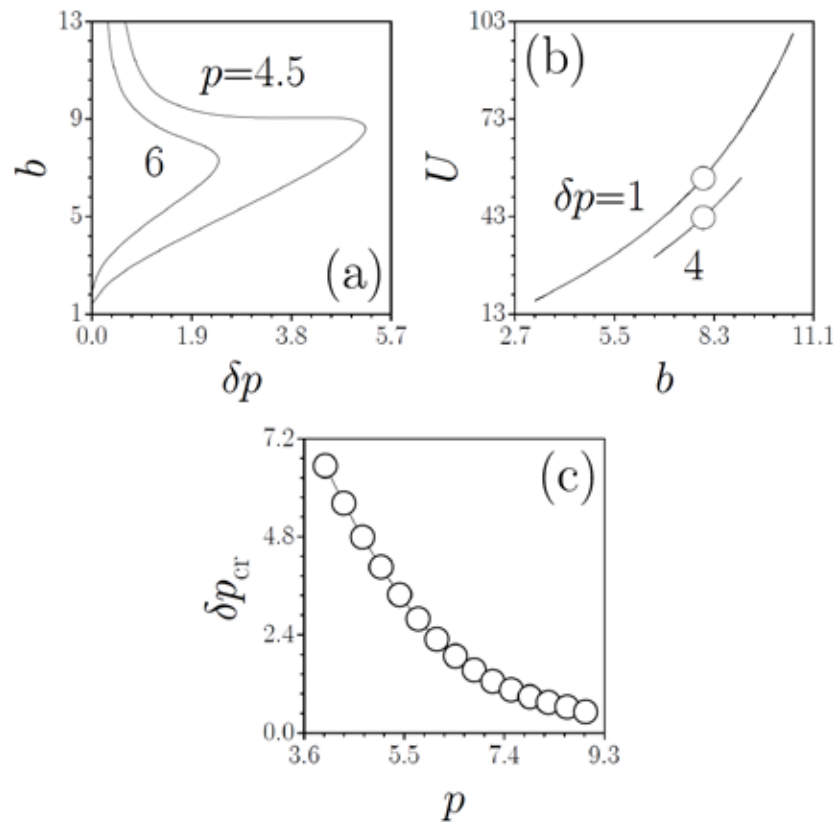


Рис. 3.25. (а) Область существования поверхностных вихревых солитонов на плоскости  $(\delta p, b)$ . (б) Мощность солитона как функция постоянной распространения при  $p = 4.5$ . Точки соответствуют солитонам на рис. 3.24(а) и 3.24(б). (с) Критическое значение  $\delta p_{\text{cr}}$  в зависимости от глубины решетки. Во всех случаях  $\Omega = 4$ ,  $S = 0.05$ .

$U_i/U_r$  резко устремляется к нулю. Область существования поверхностных вихревых солитонов представлена на рис. 3.25(а), ее ширина максимальная при  $\delta p \rightarrow 0$  (в этом слу-

чае  $b_{\text{upp}} = b_{\text{low}} + 1/S$ , т.е. существование верхней отсечки обусловлено насыщением нелинейности) и быстро падает с ростом  $\delta p$ . При этом вихревые солитоны не существуют при  $\delta p > \delta p_{\text{cr}}$ , хотя ширина области существования монотонно увеличивается с ростом глубины периодической части решетки  $p$ . Несмотря на то, что зависимости  $U_{r,i}(b)$  немонотонны вблизи отсечек, полная мощность вихревого солитона  $U = U_r + U_i$  монотонно растет с увеличением постоянной распространения [рис. 3.25(b)]. Максимально возможная мощность солитона уменьшается с ростом  $\delta p$ . Вблизи нижней отсечки по постоянной распространения поверхностные солитоны, как правило, локализованы намного слабее, чем вблизи верхней отсечки, особенно при  $\delta p \sim 1$ , когда поле низкоамплитудных вихревых солитонов накрывает несколько каналов решетки. Более того, расширение солитона в области  $\eta > 0$  может быть намного заметней, чем в области  $\eta < 0$ . Вихревые солитоны с сильно асимметричными профилями при  $\delta p \gg 1$  обычно хорошо локализованы вблизи обеих отсечек. Интересно, что критическое значение скачка показателя преломления  $\delta p_{\text{cr}}$  уменьшается с ростом глубины решетки [рис. 3.25(c)], т.е. асимметрия профилей таких солитонов может быть наиболее выражена в мелких решетках.

Поверхностные вихревые солитоны даже с сильно асимметричными профилями могут быть устойчивы в значительной части области существования. При анализе устойчивости возмущенные решения в виде  $q = (w_r + iw_i + u_r + iu_i) \exp(ib\xi)$ , где  $u_r(\eta, \zeta, \xi)$ ,  $u_i(\eta, \zeta, \xi)$  - действительная и мнимая части малого возмущения, подставлялись в уравнение (3.8), и производилась его линеаризация. В результате была получена система уравнений для возмущений, позволяющая найти инкременты нарастания возмущений

$$\left( \frac{3w_{r,i}^2 + w_{i,r}^2 + S(w_r^2 + w_i^2)^2}{[1 + S(w_r^2 + w_i^2)]^2} u_{r,i} + \frac{2w_r w_i}{[1 + S(w_r^2 + w_i^2)]^2} u_{i,r} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) u_{r,i} - b u_{r,i} + R u_{r,i} = \pm \frac{\partial}{\partial \xi} u_{i,r} \quad (3.10)$$

Здесь мы предполагаем, что возмущения могут расти как  $u_{r,i} \sim \exp(\delta\xi)$ . При этом наличие возмущений с  $\text{Re } \delta > 0$  означает неустойчивость решения, в то время как при  $\text{Re } \delta = 0$  солитон является устойчивым. Результаты анализа устойчивости поверхностных вихревых солитонов приведены на рис. 3.26. Такие солитоны устойчивы в большей части их существования при промежуточной  $p \sim 1$  и большой глубине периодической решетки. Существуют лишь две узкие области неустойчивости вблизи нижней и верхней отсечек по постоянной распространения [рис. 3.26(c)]. Область неустойчивости у верхней отсечки очень узкая и не различима в масштабе рисунка, а ширина области неустойчивости у нижней отсечки уменьшается с ростом  $\delta p$ . Все неустойчивости для вихревых поверхно-

стных солитонов соответствуют комплексным инкрементам, т.е. они осцилляторные. Характерные зависимости действительной части инкремента от постоянной распространения приведены на рис. 3.26(a), 3.26(b). Увеличение глубины  $p$  периодической решетки приводит к дальнейшему сужению областей неустойчивости. Устойчивость вихревых солитонов с сильно асимметричными профилями является интересным и неожиданным результатом. Результаты линейного анализа устойчивости были подтверждены прямым распространением возмущенных солитонных решений  $q|_{\xi=0} = (w_r + iw_i)(1 + \rho)$ , где  $\rho(\eta, \zeta)$  - широкополосное малое возмущение. Устойчивые возмущенные солитоны сохраняют свою структуру при распространении на огромные расстояния, в то время как неустойчивые семейства разрушаются из-за увеличивающихся осцилляций отдельных максимумов интенсивности в их профилях.

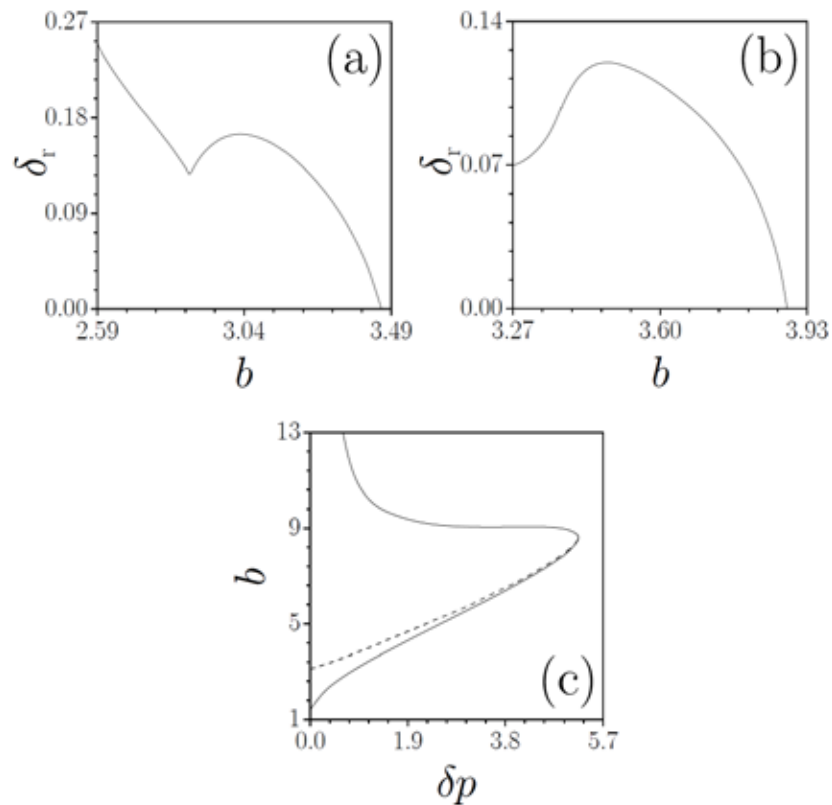


Рис. 3.26. Действительная часть инкремента нарастания возмущения как функция постоянной распространения при  $p = 4.5$  и  $\delta p = 0.5$  (a),  $\delta p = 1$  (b). (c) Области устойчивости и неустойчивости для поверхностных вихревых солитонов на плоскости  $(\delta p, b)$  при  $p = 4.5$ . Солитоны неустойчивы между нижней границей зоны и пунктирной линией. Во всех случаях  $\Omega = 4$ ,  $S = 0.05$ .

Помимо простейших вихревых солитонов, фазовая дислокация которых попадает между максимумами решетки, удастся найти другие типы вихревых решений. Примеры

соответствующих профилей приведены на рис. 3.24(d)-3.24(f). Фазовая дислокация в таких солитонах находится близко к одному из максимумов решетки, хотя и не совпадает с ним в точности. Такие солитоны намного более чувствительны к изменениям скачка показателя преломления на границе решеток  $\delta p$  и, как правило, формируются только при  $\delta p < p$ , т.е. область их существования заметно отличается от показанной на рис. 3.25(a). Эти солитоны обладают сильно асимметричными профилями [см., например, рис. 3.24(e)] и являются устойчивыми в определенной области параметров. Здесь была рассмотрена фокусирующая нелинейность, однако асимметричные вихревые солитоны могут быть найдены и на границах дефокусирующих решеток.

Таким образом, в этот параграфе показано, что граница раздела двух периодических решеток может поддерживать устойчивые поверхностные вихревые солитоны с асимметричными профилями. Экспериментальное наблюдение поверхностных вихревых солитонов было проведено в работе [253].

## Глава 4. Солитоны в однородных и периодических нелокальных нелинейных средах

В главах 1-3 нами рассматривались солитоны в средах с поперечной модуляцией показателя преломления и локальной, кубичной или насыщающейся нелинейностью. Однако некоторые механизмы нелинейности (например, тепловой, стрикционный и т.д.) приводят к нелокальности отклика. В нелокальных средах нелинейная добавка к показателю преломления в данной точке зависит от всего распределения интенсивности в поперечной плоскости, а не только от интенсивности пучка в этой же точке (см. обзор [254]). Распространение излучения в нелокальной нелинейной среде зачастую удается описать с использованием функции отклика. В одномерном случае распространение пучка вдоль оси  $\xi$  для целого ряда нелокальных сред [254] описывается уравнением Шредингера для безразмерной амплитуды поля  $q$ :

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta - \lambda) |q(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (4.1)$$

где  $\eta, \xi$  - поперечная и продольная координаты, нормированные на ширину пучка и дифракционную длину, соответственно,  $\sigma = +1$  соответствует дефокусировке,  $\sigma = -1$  соответствует фокусировке, а функция отклика  $\mathcal{P}(\eta)$  удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta) d\eta = 1. \quad (4.2)$$

Конкретный вид функции отклика зависит от механизма его возникновения. Функция отклика  $\mathcal{P}(\eta)$  имеет свой характерный поперечный масштаб  $d$ . При этом можно выделить три разных режима взаимодействия излучения со средой распространения. В первом случае ширина пучка  $w_\eta$  существенно превосходит характерную ширину функции отклика среды  $d$  и функция отклика может быть аппроксимирована дельта функцией  $\delta(\eta)$ . Последующее вычисление интеграла в уравнении (4.1) приводит к локальной нелинейности  $\sigma q |q|^2$ . Если же при  $w_\eta \gg d$  разложить поле симметричного пучка в ряд Тейлора, пользуясь тем, что поле меняется медленно на масштабе  $d$ , и сохранить только два первых члена в разложении, то получается слабо нелокальная нелинейность вида  $\sigma q (1 + \gamma \partial^2 / \partial \eta^2) |q|^2$ , где малый параметр  $\gamma = (1/2) \int_{-\infty}^{\infty} \eta^2 \mathcal{P}(\eta) d\eta$ . В наиболее интересном случае, когда ширина пучка сравнима с характерной шириной функции отклика  $w_\eta \sim d$ , для описания распространения излучения уравнение (4.1) приходится использовать без каких-либо упрощений. Наконец, возможна ситуация, когда  $w_\eta \ll d$ , т.е. световой пучок

очень узкий. При этом разложить в ряд Тейлора в окрестности максимума пучка можно уже саму медленно меняющуюся функцию отклика среды. Если она симметрична, и сохранены лишь два первых члена в разложении, то нелинейный член в уравнении (4.1) приобретает вид  $\sigma(\gamma + \beta\eta^2)Uq$ , где  $\gamma = \mathcal{P}_{\eta=0}$ ,  $\beta = (1/2)\mathcal{P}_{\eta=0}''$  - константы, определяемые коэффициентами разложения функции  $\mathcal{P}$  в ряд, а  $U$  - мощность пучка. Поведение пучков в этом квазилинейном режиме было впервые исследовано в работе [255]. Отметим, что зачастую нелокальность нелинейного отклика проявляется лишь для достаточно узких световых пучков.

Сильная нелокальность нелинейного отклика характерна для целого ряда сред. Она нередко возникает при наличии процессов переноса в среде, например, благодаря диффузии в парах атомов, накачиваемых резонансным лазерным излучением [256, 257]. Диффузия приводит к переносу возбужденных атомов из области интенсивного взаимодействия пучка с парами на периферию, что ведет к стабилизации пучка и формированию солитона. Другим широко известным процессом переноса, приводящим к нелокальным эффектам, является теплообмен между различными областями материала, возникающий при его нагреве поглощаемым лазерным излучением [258-262]. Формирование пространственных солитонов в средах с фокусирующей тепловой нелинейностью наблюдалось в работах [263,264]. Отметим, что локальный нагрев среды световым пучком приводит к перераспределению тепла во всем образце и профиль температуры, по достижении стационарного состояния, зависит от условий на границе образца, т.е., в конечном счете, характерный масштаб тепловой нелинейности определяется размером образца. Таким образом, граничные условия влияют на траекторию распространения пучка, даже если он запущен вдали от границ. Диффузионная нелинейность фоторефрактивных кристаллов, возникающая при генерации свободных зарядов под воздействием светового пучка и их последующем переносе, также является нелокальной [194-196,265]. Вклад этой компоненты нелинейности в полный отклик фоторефрактивного кристалла быстро возрастает по мере уменьшения радиуса входного пучка и его приближения к диффузионной длине. В двумерном случае даже дрейфовая компонента нелинейного отклика фоторефрактивного кристалла может, при определенных условиях, быть нелокальной [266]. Возможность формирования солитонов в среде с нелокальной нелинейностью обсуждалась при описании самовоздействия интенсивных ленгмюровских волн, распространяющихся в бесстолкновительной намагниченной плазме перпендикулярно постоянному магнитному полю, а также при описании теплового самовоздействия пучков электромагнитных волн в плазме [267-269]. В последнем случае характерным пространственным масштабом функции отклика является длина теплопроводности плазмы. Нелокальность может возникать благодаря силам электростатического взаимодействия между молекулами нематических жидких кристаллов. При



этом поле светового пучка, распространяющегося в кристалле, вызывает изменение ориентации молекул жидкого кристалла, которое сопровождается изменением его показателя преломления. Благодаря электростатическому взаимодействию между удаленными молекулами, изменение ориентации зачастую происходит в области, существенно превышающей ширину светового пучка. Формирование пространственных солитонов в таких сильно нелокальных средах наблюдалось в работах [270-272]. Эксперименты с пространственными солитонами проводились также в жидких кристаллах, допированных различными красителями [273,274]. Заметим, что степень нелокальности оптического отклика жидкого кристалла определяется шириной образца, а также может контролироваться приложенным напряжением, как продемонстрировано в работе [275]. Наконец, нелокальная нелинейность характерна для таких экзотических сред, как конденсаты диполярных атомов в оптических решетках [276].

Нелокальность нелинейного отклика может качественно изменить характер распространения излучения в среде. В первую очередь, значительная нелокальность подавляет модуляционную неустойчивость волн постоянной интенсивности. Этот эффект, предсказанный в работе [277], впоследствии наблюдался экспериментально в нематических жидких кристаллах [278]. Пожалуй, наиболее интересным явлением, возможным благодаря нелокальной нелинейности, представляется качественное изменение характера взаимодействия солитонов. В то время как характер взаимодействия синфазных солитонов в нелокальной среде принципиально не меняется по сравнению с локальной средой, противофазные светлые солитоны, которые всегда отталкиваются в средах с кубичной или насыщающейся локальной нелинейностью, могут притягиваться в нелокальной среде. Более того, знак их взаимодействия определяется теперь не столько разностью фаз, сколько расстоянием между центрами [264]. В частности, притяжение удаленных солитонов сменяется отталкиванием при сближении центров [270]. Последнее напрямую указывает на возможность формирования солитонных комплексов, состоящих из нескольких противофазных солитонов, несмотря на то, что среда является пространственно однородной и рассматриваются скалярные состояния. Возможность формирования таких комплексов в одномерном случае была предсказана в работе [268], а экспериментальное наблюдение простейших дипольных солитонов в нематических жидких кристаллах представлено в [274]. Однако, устойчивость одномерных солитонных комплексов в нелокальной среде не исследовалась вплоть до работы автора [279]. В ней не только были получены ранее неизвестные солитонные комплексы, но и было показано, что вид функции отклика накладывает ограничения на максимально возможное число компонент комплекса. Свойства солитонных комплексов в нелокальных нелинейных средах обсуждаются в первом параграфе этой главы на примере модели отклика нематических жидких кристаллов. Впоследствии было показано, что аналогичные ог-

раничения на число солитонов в комплексе действуют и для другой реалистичной модели, описывающей распространение излучения в среде с тепловой нелинейностью [280], в то время как для гипотетической гауссовской функции отклика, использовавшейся в ряде работ, все комплексы являются устойчивыми.

Нелокальность влияет не только на характер взаимодействия светлых солитонов, но и на взаимодействие темных солитонов - последние также могут испытывать притяжение в нелокальной среде, в то время как в локальных средах они всегда отталкиваются [281]. В нелокальной нелинейной среде на профиле интенсивности темного солитона появляются затухающие осцилляции, окружающие центральный провал интенсивности. Из-за наличия таких немонотонных хвостов темные солитоны могут формировать связанные состояния. Экспериментально притяжение между темными солитонами наблюдалось в парафиновом масле с дефокусирующей тепловой нелинейностью [282]. Заметим, что темные солитоны являются предельным случаем семейства так называемых серых солитонов, которые движутся в поперечной плоскости с некоторой скоростью, определяющей "серость" солитона. Так, темный солитон соответствует нулевой скорости движения, в то время как в локальной нелинейной среде максимальная скорость солитона определяется асимптотическим значением интенсивности вдали от его центра. Свойства серых солитонов в нелокальной нелинейной среде впервые были исследованы в работе автора [283]. Оказалось, что нелокальность накладывает ограничения на максимально возможную скорость движения серых солитонов, которая может быть существенно ниже, чем в локальной нелинейной среде. Более того, серые солитоны, также как и темные, могут формировать комплексы, распространяющиеся с фиксированной скоростью. Описанию этих явлений посвящен второй параграф этой главы. Заметим, что формирование серых солитонов наблюдалось в работе [284] при анализе взаимодействия наклонных пучков, имеющих провал интенсивности и соответствующее распределение фазы.

Нелокальность нелинейного отклика позволяет подавить неустойчивость двумерных солитонов, которая ведет к их коллапсу или затуханию в локальной кубичной среде. Эта возможность была предсказана для простейших фундаментальных солитонов еще в работе [285]. Впоследствии, стабилизация двумерных солитонов слабой нелокальностью обсуждалась для конденсатов Бозе-Эйнштейна [286], а также для сред с гипотетической гауссовской функцией отклика [287]. Интересно, что нелокальная нелинейность может стабилизировать даже полностью трехмерные световые пули [288]. Более того, как и в одномерной нелинейной среде, в двумерном случае противозазные солитоны могут притягиваться, и возможно формирование солитонных комплексов, профили которых существенно более многообразны по сравнению с одномерным случаем. Впервые сложные двумерные солитонные комплексы, включая кольцевые солитоны,

наблюдались в работе [289] при участии автора. Эксперимент был проведен в свинцовых стеклах с фокусирующей тепловой нелинейностью, которые использовались ранее и для наблюдения фундаментальных солитонов [263]. Хотя в такой среде стационарные солитонные комплексы, строго говоря, неустойчивы, их неустойчивость настолько слаба и развивается на таких больших трассах, что они могут быть легко зарегистрированы в эксперименте. Теоретическому описанию свойств таких солитонов и их экспериментальному наблюдению посвящен третий параграф этой главы. Заметим, что впоследствии были предложены различные методы стабилизации двумерных солитонных комплексов в нелокальных нелинейных средах. Они включают учет насыщения нелокальной нелинейности, которое характерно для паров металлов [257,290], изготовление образцов с прямоугольными поперечными сечениями, где определенным образом ориентированные комплексы становятся устойчивыми [290], вращение комплексов [291,292], векторные взаимодействия между фундаментальными и мультипольными компонентами поля [293], добавление слабой дефокусирующей локальной нелинейности [294,295] и т.д. Кроме того, множество устойчивых солитонных комплексов было построено для среды с гауссовской функцией отклика [296].

Нелокальная нелинейность может также приводить к подавлению азимутальной модуляционной неустойчивости кольцевых вихревых солитонов. Впервые на эту возможность было указано в работах [297,298]. Стабилизация возможна благодаря тому, что локальное увеличение поля не приводит к возрастанию показателя преломления в этой точке, поскольку последний определяется распределением интенсивности волны во всей поперечной плоскости. В работе [298], где использовалась реалистичная физическая модель, описывающая ориентационный нелинейный отклик нематического жидкого кристалла, устойчивость была обнаружена лишь для простейшего вихревого солитона с единичным топологическим зарядом, в то время как для гауссовской функции отклика в работе [297] вихревые солитоны были устойчивы для любого топологического заряда, если только степень нелокальности нелинейного отклика была достаточно высока. Последовательный анализ устойчивости вихревых солитонов, впервые проведенный автором данной диссертации в работе [299], показал, что как в средах с тепловой, так и в средах с ориентационной нелинейностью максимальный топологический заряд устойчивого вихревого солитона равен двум. В среде с тепловой нелинейностью анализ устойчивости проводился для цилиндрического образца, поскольку для вихревых солитонов в квадратных или прямоугольных образцах характерно расщепление одной фазовой дислокации с зарядом  $m$  на  $m$  дислокаций с единичными топологическими зарядами [300]. Описанию свойств и устойчивости вихревых солитонов в тепловой нелинейной среде посвящен четвертый параграф этой главы. Заметим, что вих-

ревые солитоны с единичным топологическим зарядом наблюдались экспериментально в работе [263].

До сих пор нами обсуждались свойства солитонов в однородных нелокальных средах. Однако в таких средах также может быть создана периодическая модуляция показателя преломления. Наиболее просто она реализуется в квазиодномерной конфигурации для достаточно узких образцов с нематическими жидкими кристаллами. Для создания модуляции показателя преломления используется периодическая система электродов, параллельных направлению распространения пучка в кристалле, нанесенная на две противоположные поверхности образца, на которых можно задавать требуемую разность потенциалов. Поскольку показатель преломления жидкого кристалла меняется в зависимости от напряженности низкочастотного электрического поля, приложенного к нему, то эта техника приводит к формированию решетки показателя преломления, амплитуда которой определяется напряженностью внешнего электрического поля [44,301-304]. Аналогичный подход используется для создания границ раздела между двумя частями жидкого кристалла с небольшой контролируемой разностью показателей преломления [301]. Фундаментальные дискретные солитоны в таких периодических решетках с нелокальной нелинейностью наблюдались в работе [302], а векторные осциллирующие состояния - в работе [303]. Поскольку в сильно нелокальной нелинейной среде ширина профиля показателя преломления, индуцированного световым пучком, может существенно превышать ширину самого пучка, то нелокальность приводит к своеобразному сглаживанию профиля полного показателя преломления. Последнее может привести к увеличению поперечной подвижности солитонов в периодической нелокальной среде. Описанию этого интересного эффекта, впервые предсказанного в работе автора [305], посвящен пятый параграф этой главы. Помимо подвижности фундаментальных солитонов, в нем также исследуются свойства нелокальных солитонных комплексов при наличии периодической модуляции показателя преломления. Заметим, что подвижность солитонов в решетках показателя преломления, созданных в жидких кристаллах, была продемонстрирована экспериментально в работе [44]. Впоследствии стационарные одномерные и двумерные солитоны в периодических нелокальных средах изучались в работах [306,307].

Автором диссертации были также впервые проанализированы солитоны в слоистых средах с нелокальной тепловой нелинейностью, составленных из материалов с одинаковыми показателями преломления, но различными знаками термооптического коэффициента [308]. Чередование знаков приводит к формированию специфической решетки, которая является нелинейной (см. также главу 5), поскольку светоиндуцированная добавка к показателю преломления меняет знак между соседними слоями. В такой решетке возможно формирование устойчивых солитонных комплексов, причем не

только в центральных слоях, но и близко к периферии образца. Последнее невозможно в однородной тепловой среде с теплоизолированными границами, где асимметричный профиль температуры (т.е. показателя преломления), индуцируемый пучками, запущенными не на оси, приводит к их отклонению по направлению к центру образца. Описанию свойств таких солитонов посвящен шестой параграф этой главы.

Весьма необычными являются также свойства поверхностных солитонов на границе раздела периодической и однородной нелокальных нелинейных сред. Такие границы могут быть реализованы экспериментально в жидких кристаллах [44,302]. Особенно интересно влияние скачка среднего показателя преломления при переходе границы на свойства мультиполей. В работе автора [309], результаты которой послужили основой для седьмого параграфа этой главы, показано, что профили мультиполей на таких границах асимметричны, а их устойчивость определяется величиной скачка среднего показателя преломления. Более того, благодаря притяжению противофазных пиков за счет нелокальности, граница раздела периодической и однородной сред может поддерживать нетривиальные комплексы, в которых эти пики находятся по разные стороны от границы.

Таким образом, в основу данной главы вошли оригинальные результаты исследований устойчивости одномерных и двумерных мультиполей, серых и вихревых солитонов в однородных нелокальных нелинейных средах, а также результаты исследования подвижности и устойчивости фундаментальных солитонов и мультиполей в периодических нелокальных средах, опубликованные в работах автора [279,283,289,290,299,305,308,309].

#### **§4.1. Одномерные мультипольные солитоны в нелокальной нелинейной среде**

В локальной нелинейной среде знак силы взаимодействия между солитонами определяется исключительно их разностью фаз, в то время как величина силы взаимодействия зависит от расстояния между центрами солитонов. Синфазные солитоны притягиваются, а противофазные солитоны отталкиваются в такой среде. Действительно, в случае сближения синфазных солитонов конструктивная интерференция их перекрывающихся полей приводит к возрастанию нелинейной добавки к показателю преломления в области между ними, что энергетически выгодно и стимулирует дальнейшее сближение. Наоборот, в случае противофазных солитонов деструктивная интерференция перекрывающихся полей ведет к понижению показателя преломления и, следовательно, отталкиванию. Однако, в нелокальной нелинейной среде нелинейная добавка к показателю преломления в любой точке определяется сверткой полного распределения

интенсивности в поперечной плоскости и функции отклика среды (4.1). В результате, нелинейная добавка к показателю преломления является ненулевой даже в области между противозазными солитонами и зависит от расстояния между их центрами, что приводит к притяжению для больших расстояний и отталкиванию для малых, а следовательно - к возможности формирования солитонных комплексов даже в однородной среде. Устойчивость таких комплексов исследуется в этом параграфе [279].

Рассматривается распространение щелевого лазерного пучка вдоль оси  $\xi$  в среде с нелокальной фокусирующей нелинейностью, которое может быть описано с помощью системы связанных уравнений для безразмерной амплитуды светового поля  $q$  и нормированной нелинейной добавки к показателю преломления  $n$  :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - qn, \\ n - d \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} &= |q|^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Система уравнений (4.3) может быть использована для описания нелинейного отклика жидкого кристалла [270,275] в том случае, если поле светового пучка вызывает малое изменение (обозначим его  $\phi$ ) исходного угла ориентации  $\theta_0$  (этот угол измеряется между директором жидкого кристалла и волновым вектором пучка) молекул жидкого кристалла. В этом случае  $\eta = x/r_0$  - поперечная координата, нормированная на характерную ширину пучка  $r_0$ ,  $\xi = z/L_{\text{dif}}$  - нормированная продольная координата,  $L_{\text{dif}} = k_0 r_0^2$  - дифракционная длина,  $q = [(n_\alpha^4 r_0^2 k_0^2 \varepsilon_0 / 4 E_b^2 \varepsilon_\alpha) \theta_0 \sin(2\theta_0) [1 - 2\theta_0 \cot(2\theta_0)]^{-1}]^{1/2} A$  - нормированная амплитуда поля,  $A$  - медленно меняющаяся огибающая поля, параметры  $n_\alpha^2 = n_\parallel^2 - n_\perp^2$  и  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_0(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)$  характеризуют анизотропию кристалла,  $\varepsilon_0$  - диэлектрическая постоянная, параметр  $E_b \approx V_b / D$  описывает напряженность внешнего низкочастотного электрического поля, приложенного к кристаллу толщины  $D$  (заметим, что это поле может быть использовано для контроля исходного угла ориентации  $\theta_0$  молекул кристалла),  $n = \phi r_0^2 k_0^2 n_\alpha^2 \sin(2\theta_0) / 2$  - нормированная нелинейная добавка к показателю преломления, пропорциональная углу оптически индуцированного поворота  $\phi$  молекул кристалла, параметр  $d = (2K / \varepsilon_\alpha E_b^2 r_0^2) \theta_0 \sin^{-1}(2\theta_0) [1 - 2\theta_0 \cot(2\theta_0)]^{-1}$  определяет степень нелокальности нелинейного отклика,  $K$  - постоянная упругости.

Для типичных жидких кристаллов, использовавшихся в экспериментах с оптическими солитонами, постоянные  $\varepsilon_\alpha = 14.5\varepsilon_0$ ,  $n_\parallel = 1.77$ ,  $n_\perp = 1.53$ ,  $D \sim 80 \mu\text{m}$ . При этом для лазерного пучка шириной  $r_0 = 4 \mu\text{m}$  на длине волны  $\lambda = 514 \text{ nm}$  расстояние распространения  $\xi = 1$  соответствует реальной длине  $\sim 0.2 \text{ mm}$ . Степень нелокальности нелинейно-

го отклика  $d \sim 4$  достигается при приложенном напряжении  $V_b \sim 3.1$  V . Солитоны в таких кристаллах могут формироваться при уровнях мощности  $\sim 1$  mW .

Отметим, что в пределе при  $d \rightarrow 0$  система уравнений (4.3) может быть сведена к единственному кубическому уравнению Шредингера, описывающему солитоны в локальной среде. В другом предельном случае при  $d \rightarrow \infty$  отклик среды является сильно нелокальным. В жидких кристаллах степень нелокальности нелинейности можно контролировать, варьируя напряжение, приложенное к кристаллу. Уравнения, качественно схожие с (4.3), возникают также при описании распространения излучения в плазме [267-269]. Среди интегралов уравнения (4.3), сохраняющихся при эволюции, можно отметить мощность  $U$  и гамильтониан  $H$  :

$$\begin{aligned} U &= \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta, \\ 2H &= \int_{-\infty}^{\infty} |\partial q / \partial \eta|^2 d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta-\lambda) |q(\lambda)|^2 d\lambda, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где экспоненциальная функция  $\mathcal{P}(\eta) = (1/2d^{1/2}) \exp(-|\eta|/d^{1/2})$ , удовлетворяющая условию нормировки (4.2), описывает отклик нелокальной среды. Заметим, что с использованием этой функции отклика система (4.3) может быть напрямую сведена к уравнению (4.1).

Солитонные решения системы (4.3) ищутся в виде  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$ , где  $w(\eta)$  - действительная функция и  $b$  - постоянная распространения. При этом предполагается, что показатель преломления  $n$ , возникающий за счет нелинейности, не зависит от продольной координаты  $\xi$ . При анализе устойчивости возмущенное решение записывается в виде  $q(\eta, \xi) = [w(\eta) + u(\eta) \exp(\delta\xi) + iv(\eta) \exp(\delta\xi)] \exp(ib\xi)$ , где действительная и мнимая части возмущения  $u, v \ll w$ , а  $\delta = \delta_r + i\delta_i$  - инкремент нарастания возмущения. Линеаризация системы уравнений (4.3) приводит к линейной задаче на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} + bv - nv, \\ \delta v &= \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - bu + nu + w\Delta n, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где  $\Delta n = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta-\lambda) w(\lambda) u(\lambda) d\lambda$  - возмущение показателя преломления, сопровождающее возмущение поля солитона. Задача (4.5) была решена нами численно.

Свойства фундаментальных солитонов представлены на рис. 4.1. Видно, что ширина профиля показателя преломления больше, чем ширина самого солитона, в отличие от случая локальной среды [рис. 4.1(a)]. Ширина солитона увеличивается, а пиковая амплитуда уменьшается с увеличением степени нелокальности  $d$  нелинейного отклика при фиксированной мощности  $U$ . Мощность фундаментального солитона монотонно падает с уменьшением  $b$  и обращается в ноль при  $b \rightarrow 0$  [рис. 4.1(b)]. Фундаментальные солитоны устойчивы во всей области их существования, что подтверждается тем фактом, что при фиксированной мощности  $U$  они соответствуют минимально возможному гамильтониану  $H$  [рис. 4.1(c)].

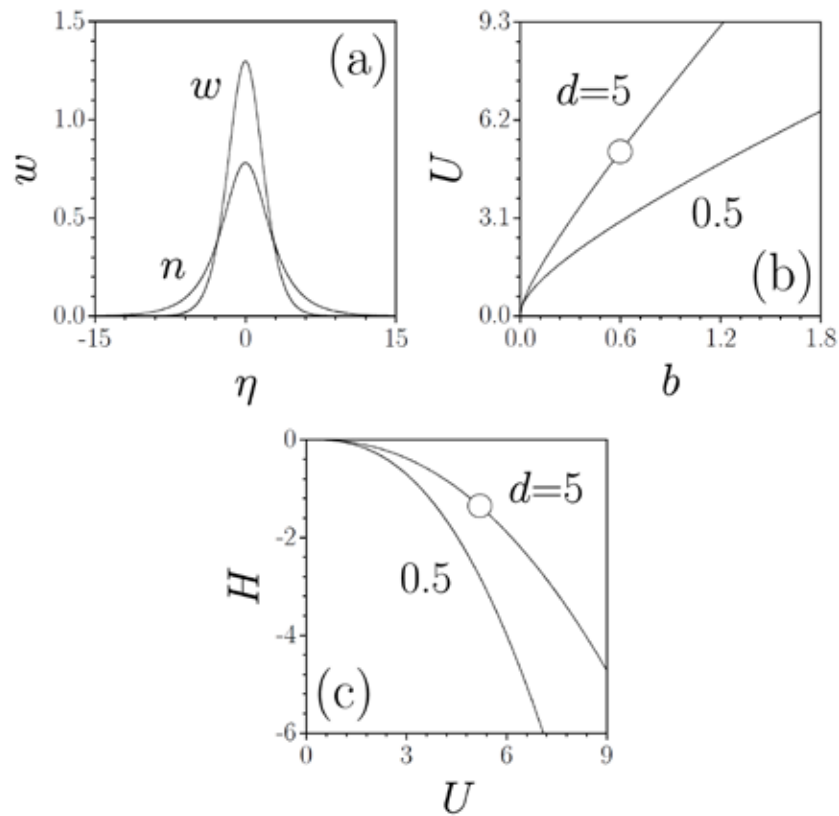


Рис. 4.1. (а) Профиль фундаментального солитона и профиль показателя преломления, соответствующие точкам на зависимостях  $U(b)$  (b) и  $H(U)$  (c).

В нелокальной среде возможно формирование мультипольных солитонов, которые формально могут рассматриваться как результат нелинейной суперпозиции нескольких противофазных фундаментальных солитонов, силы взаимодействия между которыми зависят от расстояния между центрами солитонов и меняют знак при определенном расстоянии. Как уже было упомянуто выше, нелинейная добавка к показателю преломления в нелокальной среде не обращается в ноль между противофазными пиками - наоборот, на профиле показателя преломления заметен лишь маленький провал в той



точке, где интенсивность мультипольного солитона обращается в ноль [см. рис. 4.2(a), где показан профиль дипольного солитона]. Этот провал наиболее четко выражен при малой степени нелокальности, и практически исчезает для  $d \gg 1$ . Мощность дипольного солитона также монотонно возрастает с увеличением  $b$  [рис. 4.2(b)]. При малых мощностях отдельные противофазные составляющие в профиле дипольного солитона хорошо разделены и их амплитуда постепенно уменьшается при  $b \rightarrow 0$  [рис. 4.2(c)]. Одним из наиболее интересных результатов является то, что одномерные дипольные солитоны в нелокальной среде устойчивы во всей области их существования, т.е. для них  $\delta_r(b) = 0$  даже при  $d \sim 0.1$  и при малых мощностях, когда пики в солитоне хорошо разделены.

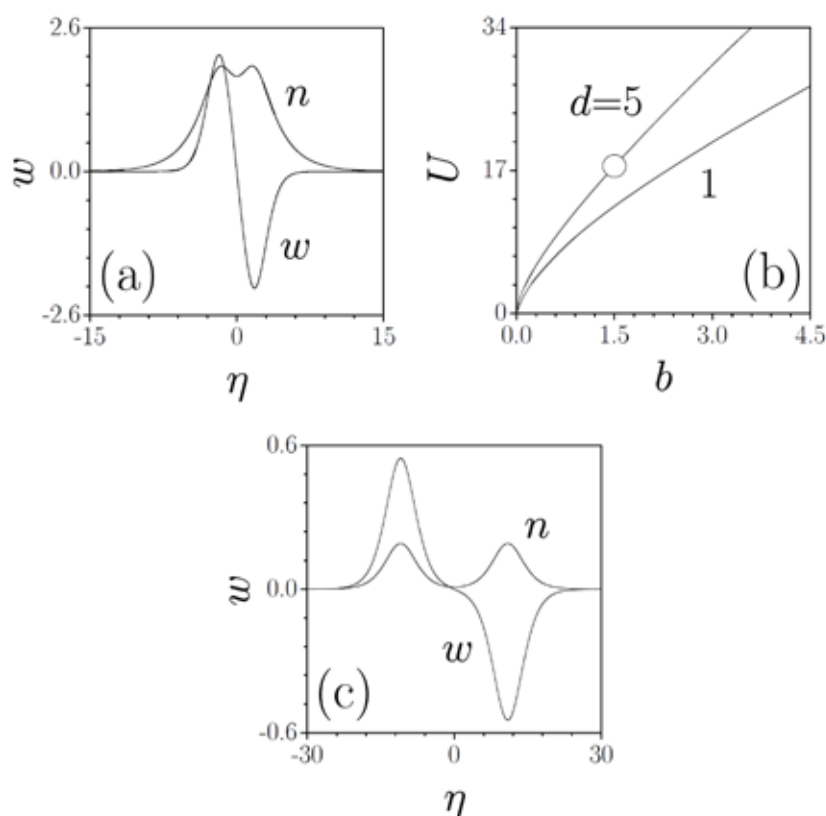


Рис. 4.2. (a) Профили диполя и показателя преломления при  $b=1.5$ ,  $d=5$ , соответствующие точке на зависимости  $U(b)$ , приведенной на панели (b). (b) Профиль маломощного диполя при  $b=0.13$ ,  $d=5$ .

Для ответа на важный вопрос о влиянии числа пиков в мультипольном солитоне на его устойчивость, линейный анализ устойчивости был проведен для мультиполей, включающих вплоть до десяти пиков. Результаты этого анализа, а также типичные профили мультиполей высшего порядка приведены на рис. 4.3. Для всех мультиполей мощность монотонно растет с постоянной распространения. Ширина распределения показателя преломления ожидаемо увеличивается с ростом числа пиков в солитоне,

причем на этом распределении заметны небольшие провалы в точках, где интенсивность мультиполя нулевая [рис. 4.3(a) и 4.3(c)]. Триполи и квадрупольно неустойчивы при низких мощностях [рис. 4.3(b) и 4.3(d)], но стабилизируются, когда мощность (или постоянная распространения) превосходит критическое значение. При

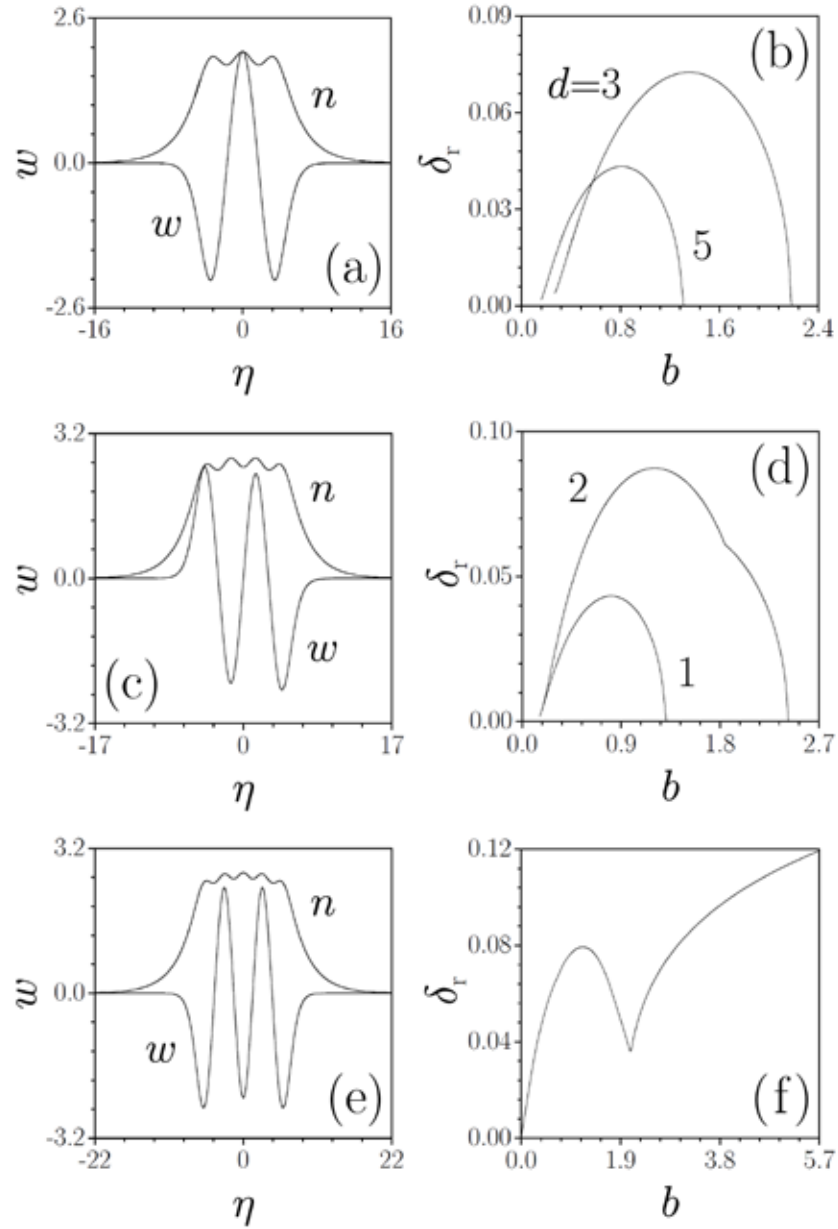


Рис. 4.3. (a) Профиль триполя при  $b=1.5$ ,  $d=5$ . (b) Зависимости  $\delta_r(b)$  для триполя при разных  $d$ . (c) Профиль квадрупольно при  $b=2$ ,  $d=5$ . (d) Зависимости  $\delta_r(b)$  для триполя (кривая 1) и квадрупольно (кривая 2) при  $d=5$ . (e) Профиль солитона с пятью противофазными пиками при  $b=2$ ,  $d=8$  и (f) зависимость  $\delta_r(b)$  для такого солитона при  $d=8$ .

этом ширина области неустойчивости и максимальный инкремент возмущения уменьшаются с ростом степени нелокальности  $d$ , причем при фиксированном  $d$  ширина об-

ласти неустойчивости для триполю уже, чем для квадруполь. Оказалось, что солитоны, включающие пять и более противофазных пиков, осцилляторно неустойчивы во всей области существования. Типичный профиль солитона с пятью пиками и зависимость  $\delta_r(b)$  для него приведены на рис. 4.3(e) и 4.3(f). Эта картина имеет место для широкого диапазона нелокальностей  $d \in [0, 100]$ . Во всех случаях инкремент возмущения увеличивается при  $b \rightarrow \infty$ . Результаты линейного анализа устойчивости были подтверждены распространением мультиполей с возмущенными входными профилями.

Оказалось, что устойчивость мультиполей определяется характером нелокального отклика среды, т.е. профилем функции отклика  $\mathcal{P}(\eta)$ . Так, в отличие от сред с экспоненциальной функцией отклика  $\mathcal{P}(\eta) = (1/2d^{1/2}) \exp(-|\eta|/d^{1/2})$ , возникающей при решении системы уравнений (4.3), в средах с модельной гауссовской функцией отклика  $\mathcal{P}(\eta) = (\pi d)^{-1/2} \exp(-\eta^2/d)$  никакого ограничения на количество пиков в устойчивом солитонном комплексе не существует. Заметим, что аналогичное ограничение на число пиков было найдено также в тепловых нелинейных средах.

Таким образом, в этом параграфе показано, что нелокальность нелинейного отклика приводит к формированию нового класса мультипольных решений даже в однородной нелинейной среде, причем устойчивость таких решений определяется характером нелокального отклика. Экспериментальное наблюдение простейших одномерных мультипольных солитонов в нелокальной среде было представлено в работе [274].

## §4.2. Серые солитоны в нелокальной нелинейной среде

Как было продемонстрировано в предыдущем параграфе, нелокальность нелинейного отклика качественно меняет характер взаимодействия светлых солитонов в фокусирующей среде. Возникает естественный вопрос о влиянии нелокальности на свойства солитонов в дефокусирующей среде, где простейшие солитонные решения представлены серыми солитонами с ненулевыми асимптотиками, локализованный провал интенсивности в которых движется с некоторой скоростью в поперечной плоскости. Семейство серых солитонов вырождается в темные солитоны при нулевой скорости. В локальной среде темные солитоны всегда отталкиваются. Заметим, что поскольку такие солитоны имеют ненулевые асимптотики, то при исследовании взаимодействия нескольких удаленных темных солитонов их суперпозиция может быть построена единственным возможным способом, при котором разность фаз между солитонами фактически равна  $\pi$ , поэтому в локальных средах связанные состояния темных (а тем более движущихся серых) солитонов невозможны. Этот параграф посвящен анализу существования и устойчивости связанных состояний серых солитонов в нелокальной среде [283].

Для описания распространения излучения в дефокусирующей нелокальной среде используем следующую систему связанных уравнений для амплитуды поля и нелинейной добавки к показателю преломления:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - qn, \\ d \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} - n &= |q|^2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Эта система уравнений имеет тот же вид, что и система (4.3), за исключением смены знака добавки к показателю преломления во втором уравнении, которая теперь записывается в виде  $n = -\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta - \lambda) |q(\lambda)|^2 d\lambda$  с такой же экспоненциальной функцией отклика  $\mathcal{P}(\eta) = (1/2d^{1/2}) \exp(-|\eta|/d^{1/2})$ , как и для фокусирующей среды. При  $d \rightarrow 0$ , когда  $\mathcal{P}(\eta) \rightarrow \delta(\eta)$ , получаем кубическое уравнение Шредингера с дефокусировкой. Заметим, что дефокусирующие нелокальные нелинейности характерны для целого ряда материалов, включая слабо поглощающие жидкости [282] или жидкие кристаллы с тепловой нелинейностью [310].

Профили серых солитонов в системе уравнений (4.6) могут быть найдены численно в бегущей системе координат  $\zeta = \eta - \alpha\xi$  в виде  $q(\zeta, \xi) = [u(\zeta) + iv(\zeta)] \exp(ib\xi)$ , где функции  $u$  и  $v$  описывают вещественную и мнимую части поля,  $b$  - стандартная постоянная распространения, а  $\alpha$  - скорость солитона. В случае фундаментальных солитонов предполагается, что действительная часть поля антисимметрична  $u(-\zeta) = -u(\zeta)$ , а мнимая часть поля  $v(-\zeta) = v(\zeta)$  является симметричной функцией координаты  $\zeta$ . При  $d = 0$  система уравнений (4.6) имеет решение

$$\begin{aligned} u(\zeta) &= (-b - \alpha^2)^{1/2} \tanh[(-b - \alpha^2)^{1/2} \zeta], \\ v(\zeta) &= \alpha, \\ n(\zeta) &= -(u^2 + v^2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

описывающее серый солитон, который движется в поперечной плоскости со скоростью  $\alpha$ , причем  $\alpha^2 < -b$ . Величина постоянной распространения  $b$  определяет асимптотические значения интенсивности солитона  $|q(\eta \rightarrow \pm\infty, \xi)|^2 = -b$  и показателя преломления  $n(\eta \rightarrow \pm\infty) = b$ , в то время как скорость  $\alpha$  определяет "серость" солитона или его минимальную интенсивность  $g = \min |q|^2 = \alpha^2$ . Рассмотрим влияние скорости  $\alpha$  и степени нелокальности нелинейности  $d$  на свойства солитонов с одинаковыми асимптотическими значениями интенсивности при  $\eta \rightarrow \pm\infty$ , положив  $b = -1$ . Учитывая ненулевые асим-

потоки поля, для характеристики солитонов удобно ввести перенормированные мощность  $U_r$  и момент  $M_r$ :

$$U_r = \int_{-\infty}^{\infty} |-b - |q|^2| d\eta, \quad (4.8)$$

$$M_r = (i/2) \int_{-\infty}^{\infty} (q \partial q^* / \partial \eta - q^* \partial q / \partial \eta) |1 + b |q|^2| d\eta.$$

Нелокальность приводит к качественным изменениям свойств серых солитонов. Типичные распределения интенсивности  $w = u^2 + v^2$  для фундаментальных серых солитонов приведены на рис. 4.4(a) и 4.4(b). Асимптотические значения интенсивности и показателя преломления при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  совпадают в нелокальной и локальной средах. Минимальная интенсивность (т.е. серость) солитона  $g = \min |q|^2$  монотонно увеличивается с ростом его скорости  $\alpha$ , но, в отличие от локальной среды, где профили солитонов монотонны, в нелокальной среде хорошо заметны осцилляции профиля,

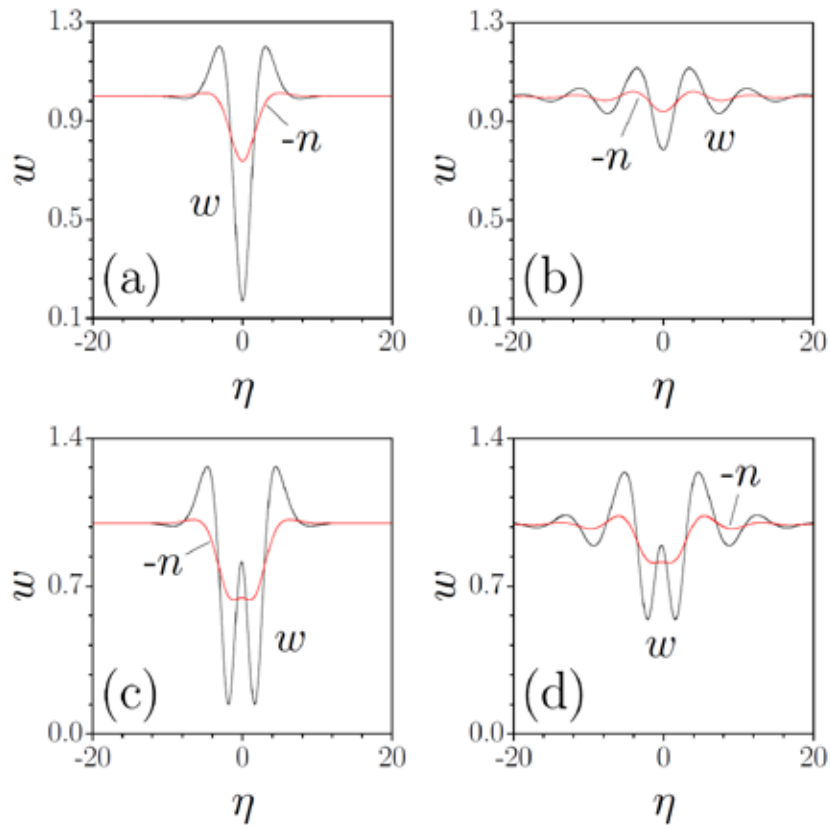


Рис. 4.4. Распределения интенсивности и показателя преломления для простейших серых солитонов при  $\alpha = 0.3$  (a) и  $\alpha = 0.61$  (b), а также для связанных состояний двух серых солитонов при  $\alpha = 0.3$  (c) и  $\alpha = 0.58$  (d). Во всех случаях  $d = 5$ .

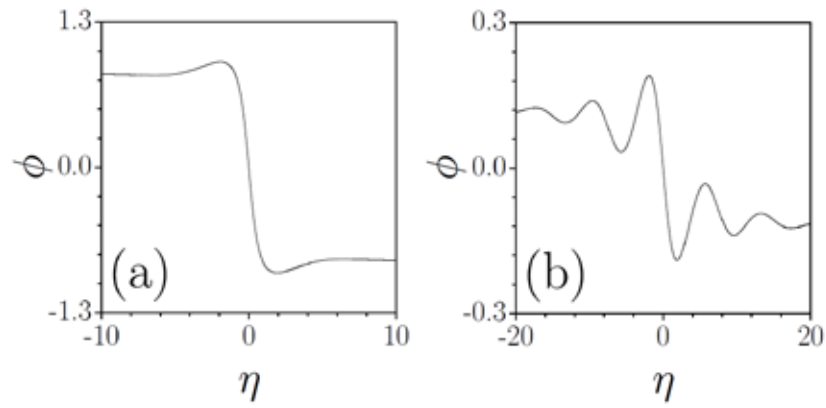


Рис. 4.5. Поперечные распределения фазы для солитонов с рис. 4.4(a) и 4.4(b).

огибающие основной провал интенсивности [рис. 4.4(b)]. Их амплитуда растет с увеличением степени нелокальности, причем они заметны даже при  $\alpha \rightarrow 0$ , когда серый солитон превращается в темный. Распределения фазы на рис. 4.5(a) и 4.5(b) показывают, что, несмотря на множественные осцилляции интенсивности, профили на рис. 4.4(a) и 4.4(b) действительно соответствуют простейшим серым солитонам. Увеличение амплитуды осцилляций сопровождается резким ростом мощности  $U_r$ , которая является немонотонной функцией скорости  $\alpha$  [рис. 4.6(a)], в отличие от локальной среды, где мощность  $U_r = 2(-b - \alpha^2)^{1/2}$  монотонно убывает с ростом  $\alpha$  и обращается в ноль при  $\alpha \rightarrow -b = 1$ .

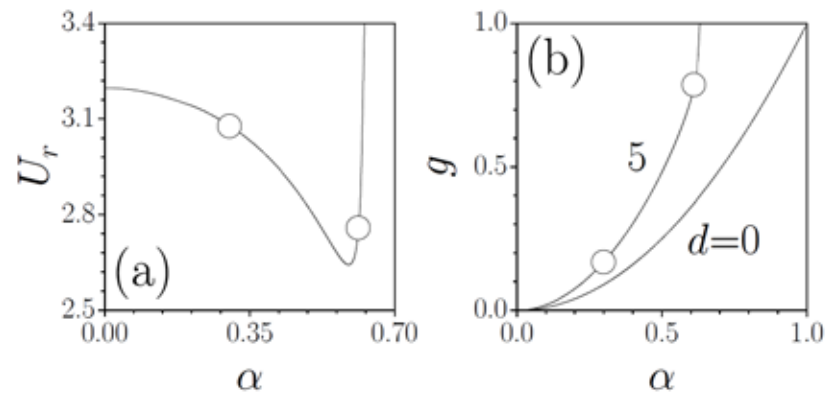


Рис. 4.6. (a) Перенормированная мощность простейшего серого солитона как функция его скорости при  $d = 5$ . (b) Сравнение зависимостей серости солитона от скорости для локальной и нелокальной сред. Точки соответствуют солитонам, показанным на рис. 4.4(a) и 4.4(b).

Так же как и в локальной среде, в нелокальной среде существует максимальная скорость серого солитона  $\alpha_m$ , при достижении которой он исчезает [при этом

$g(\alpha \rightarrow \alpha_m) = 1$ ] и превращается в волну постоянной интенсивности. Однако, максимальная скорость солитона в нелокальной среде оказывается существенно ниже, чем в локальной [см. рис. 4.6(b)], т.е. нелокальность нелинейного отклика накладывает существенные ограничения на мобильность солитонов, несмотря на однородность среды. Рис. 4.7(a) показывает, как максимальная скорость солитона уменьшается с ростом степени нелокальности  $d$ . При этом скорость солитона монотонно растет и обращается в единицу, когда  $d$  достигает критического значения [рис. 4.7(b)]. Заметим, что в отличие от перенормированной мощности, момент  $M_r$  монотонно растет с увеличением скорости  $\alpha$ , что, согласно теории устойчивости серых солитонов, подробное описание которой может быть найдено в обзоре [311], означает устойчивость всего семейства решений. Это заключение подтверждается результатами прямого распространения, которые показывают, что семейство серых солитонов устойчиво, даже при скоростях распространения близких к  $\alpha_m$  [см. рис. 4.8(a), 4.8(b)].

Свойства солитонов остаются качественно схожими для разных значений постоянной распространения  $b$ , т.е. для любого  $b$  существует максимальная скорость солитона, которая монотонно уменьшается с ростом степени нелокальности  $d$ . При этом увеличение  $|b|$  сопровождается ростом максимально возможной скорости при заданном значении  $d$ . Так, при  $d=5$  максимальная скорость  $\alpha_m = 0.631$  для  $b=-1$ , для  $b=-2$  она составляет уже  $\alpha_m = 0.758$ , а для  $b=-4$  получаем  $\alpha_m = 0.913$ . Заметим, что в нелокальной среде рост максимальной скорости при увеличении  $|b|$  несколько замедлен по сравнению с локальной средой, где  $\alpha_m = (-b)^{1/2}$ .

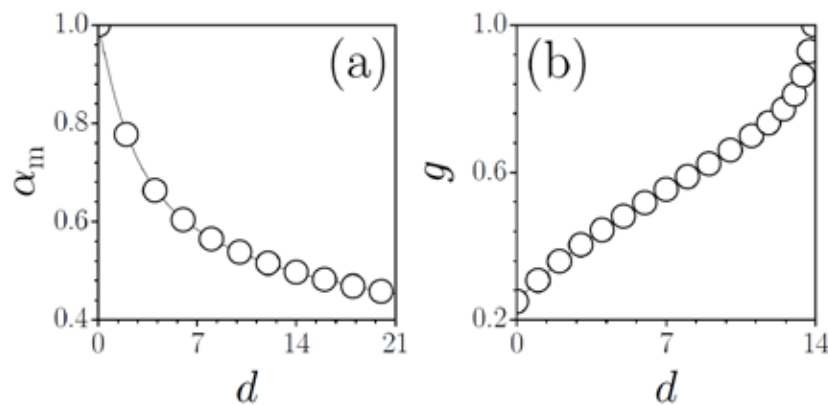


Рис. 4.7. (a) Максимальная скорость серого солитона как функция степени нелокальности. (b) Скорость солитона при  $\alpha = 0.5$  в зависимости от степени нелокальности.

Наличие осциллирующих хвостов в распределениях интенсивности серых солитонов указывает на возможность формирования связанных состояний для одинаковых скоростей. Простейшее связанное состояние двух серых солитонов изображено на рис.

4.4(c) и 4.4(d). В распределении интенсивности четко виден максимум между двумя серыми солитонами, при этом профиль показателя преломления схож с профилем волновода, удерживающим вместе два солитона. Так же как и для простейших солитонов, при увеличении скорости  $\alpha$  осцилляции на профиле связанного состояния становятся все более заметными. Существует максимально возможная скорость распространения связанного состояния, которая практически равна максимальной скорости простейшего солитона. Эта максимальная скорость также быстро уменьшается с ростом степени нелокальности  $d$ . В отличие от простейших солитонов, перенормированная мощность связанного состояния  $U_r$  монотонно растет с увеличением  $\alpha$ , и при  $\alpha \rightarrow \alpha_m$  касательная к зависимости  $U_r(\alpha)$  становится вертикальной. Прямое распространение возмущенных связанных состояний двух серых солитонов показало, что они устойчивы при малых и средних скоростях  $\alpha$  [рис. 4.8(c) и 4.8(d)], однако при  $\alpha \rightarrow \alpha_m$  возможна слабая неустойчивость. Помимо связанных состояний двух солитонов, мы нашли также более сложные комплексы из трех и четырех солитонов, которые также могут быть устойчивы.

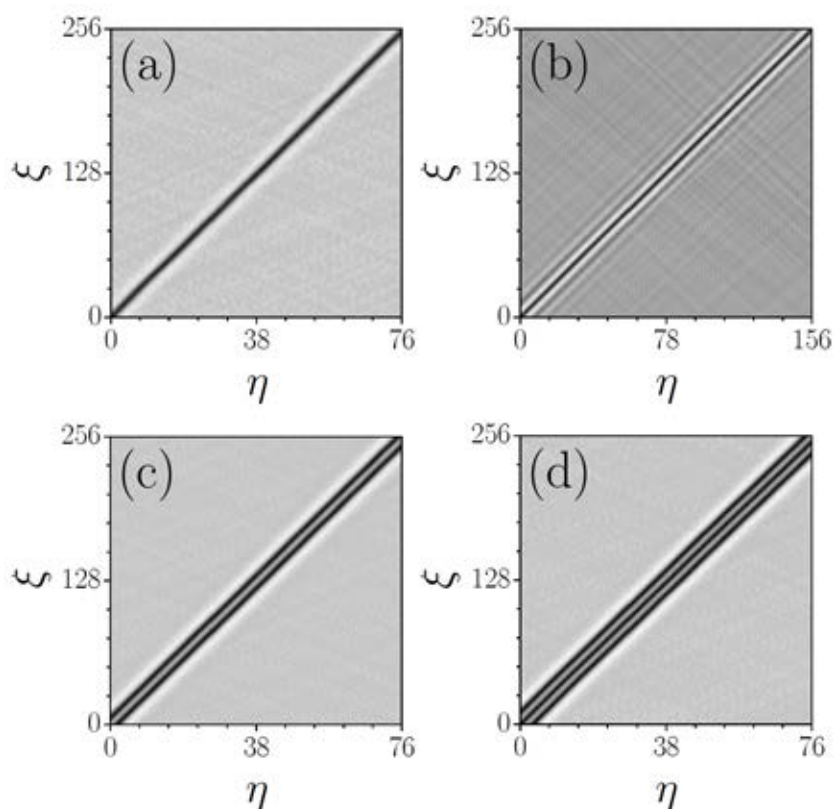


Рис. 4.8. Динамика устойчивого распространения возмущенных серых солитонов в нелокальной нелинейной среде при  $d = 5$ . (a) Простейший солитон с  $\alpha = 0.3$ , (b) простейший солитон с  $\alpha = 0.61$ , (c) связанное состояние двух солитонов с  $\alpha = 0.3$ , (d) связанное состояние трех солитонов с  $\alpha = 0.3$ .



В заключение, в этом параграфе показано, что нелокальность нелинейного отклика накладывает ограничения на максимальную скорость движения серых солитонов. Она же качественно изменяет характер взаимодействия серых солитонов и приводит к существованию их связанных состояний. Простейшие серые солитоны в нелокальной среде наблюдались экспериментально в работе [284].

### **§4.3. Двумерные мультипольные солитоны в среде с тепловой нелинейностью**

Нелокальность нелинейного отклика оказывает существенное влияние на свойства двумерных солитонов. В среде с нелинейностью керровского типа даже слабая нелокальность отклика приводит к стабилизации двумерных (и даже трехмерных) фундаментальных солитонов. Такие солитоны оказываются тем более устойчивы в средах с сильно нелокальной тепловой нелинейностью, где характерный масштаб функции отклика среды определяется размерами всего образца. Как уже упоминалось, в средах с тепловой нелинейностью граничные условия существенно влияют на распределение температуры и профиль нелинейной добавки к показателю преломления. В стационарном режиме нагрева пучок, запущенный в центре образца, вызывает изменение показателя преломления даже вблизи его границ. Последнее указывает на необычайно большой радиус взаимодействия солитонов в среде с тепловой нелинейностью. Особый интерес при этом представляет возможность формирования мультипольных солитонов в таких средах, исследованию которой посвящен данный параграф [289].

Самовоздействие излучения в среде с тепловой нелинейностью описывается системой, включающей уравнение шредингеровского типа для медленно меняющейся амплитуды поля, которое связано со стационарным уравнением теплопроводности. Эта система уравнений описывает, например, распространение пучков в свинцовых стеклах, которые использовались нами для наблюдения мультипольных солитонов. В таких средах световой пучок испытывает слабое поглощение в процессе распространения, первоначально вызывая лишь локальный нагрев образца. Благодаря теплопроводности происходит перераспределение тепла во всем образце, так что в стационарном состоянии формируется профиль температуры, определяемый тепловым источником и зависящий от условий на границах образца. Линейный термооптический эффект приводит к изменению показателя преломления образца, пропорциональному изменению температуры, что влияет на динамику распространения нагревающего среду светового пучка. В безразмерном виде система соответствующих стационарных уравнений записывается как

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - nq, \\
\frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial \zeta^2} &= -|q|^2.
\end{aligned}
\tag{4.9}$$

Здесь  $q = (k_0^2 r_0^4 \alpha \beta / \kappa n_0)^{1/2} A$  - безразмерная амплитуда поля, величина  $n = k_0^2 r_0^2 \delta n / n_0$  пропорциональна нелинейной добавке  $\delta n$  к невозмущенному показателю преломления  $n_0$ ,  $\alpha$  - коэффициент поглощения,  $\beta = dn/dT$  - термооптический коэффициент,  $\kappa$  - коэффициент теплопроводности, поперечные координаты  $\eta, \zeta$  нормированы на характерную ширину пучка  $r_0$ , а продольная координата  $\xi$  нормирована на дифракционную длину  $k_0 r_0^2$ . Так, в свинцовых стеклах  $n_0 = 1.8$ , термооптический коэффициент  $\beta = 14 \times 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , коэффициент поглощения  $\alpha \approx 0.01 \text{ cm}^{-1}$  и коэффициент теплопроводности  $\kappa = 0.7 \text{ W/(mK)}$ . В таких стеклах могут формироваться солитоны с шириной  $\sim 50 \text{ }\mu\text{m}$  при уровнях мощности  $\sim 1 \text{ W}$ . При этом типичная нелинейная добавка к показателю преломления составляет  $\delta n \sim 10^{-4}$ .

Мы ищем солитонные решения системы (4.9) в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ , где  $w(\eta, \zeta)$  - действительная функция и  $b$  - постоянная распространения. Интенсивность солитона обращается в ноль на границах окна интегрирования, соответствующих границам образца, в то время как показатель преломления  $n \rightarrow n_b$ , где значение  $n_b$  определяется температурой на границах, которая поддерживается постоянной. Поскольку, с математической точки зрения, добавка постоянной составляющей  $n_b$  к показателю преломления эквивалентна простому сдвигу постоянной распространения  $b$  на то же самое значение, в дальнейшем мы полагаем  $n_b = 0$ . При этом свойства солитонов определяются исключительно значением  $b$  и шириной окна интегрирования. В дальнейшем мы используем окно  $\eta, \zeta \in [-20, +20]$ , что приблизительно соответствует размерам образцов. Система уравнений (4.9) допускает различные семейства стационарных решений, включая фундаментальные и мультипольные солитоны. Типичные профили диполя, триполя и специфического кольцевого солитонов приведены на рис. 4.9(b), 4.9(d) и 4.9(f). Все мультипольные солитоны представляют собой набор противофазных пиков. В сильно нелокальной нелинейной среде, где показатель преломления определяется полным распределением интенсивности в поперечной плоскости, возможна ситуация, когда показатель преломления растет в области перекрытия противофазных солитонов, приводя к формированию стационарных мультиполей. Заметим, что ширина профиля показателя преломления в среде с тепловой нелинейностью кардинально превосходит ширину мультиполя. При этом показатель преломления наиболее быстро меняется в окрестности максимума интенсивности поля и практически линейно уменьшается по мере приближения к границам образца. Для всех типов мультиполей их мощность  $U$

монотонно растет с увеличением постоянной распространения  $b$  [рис. 4.10(a)], что сопровождается уменьшением интегральной ширины  $W$  солитона [рис. 4.10(b)]. При этом расстояние между соседними пиками уменьшается с ростом  $b$ .

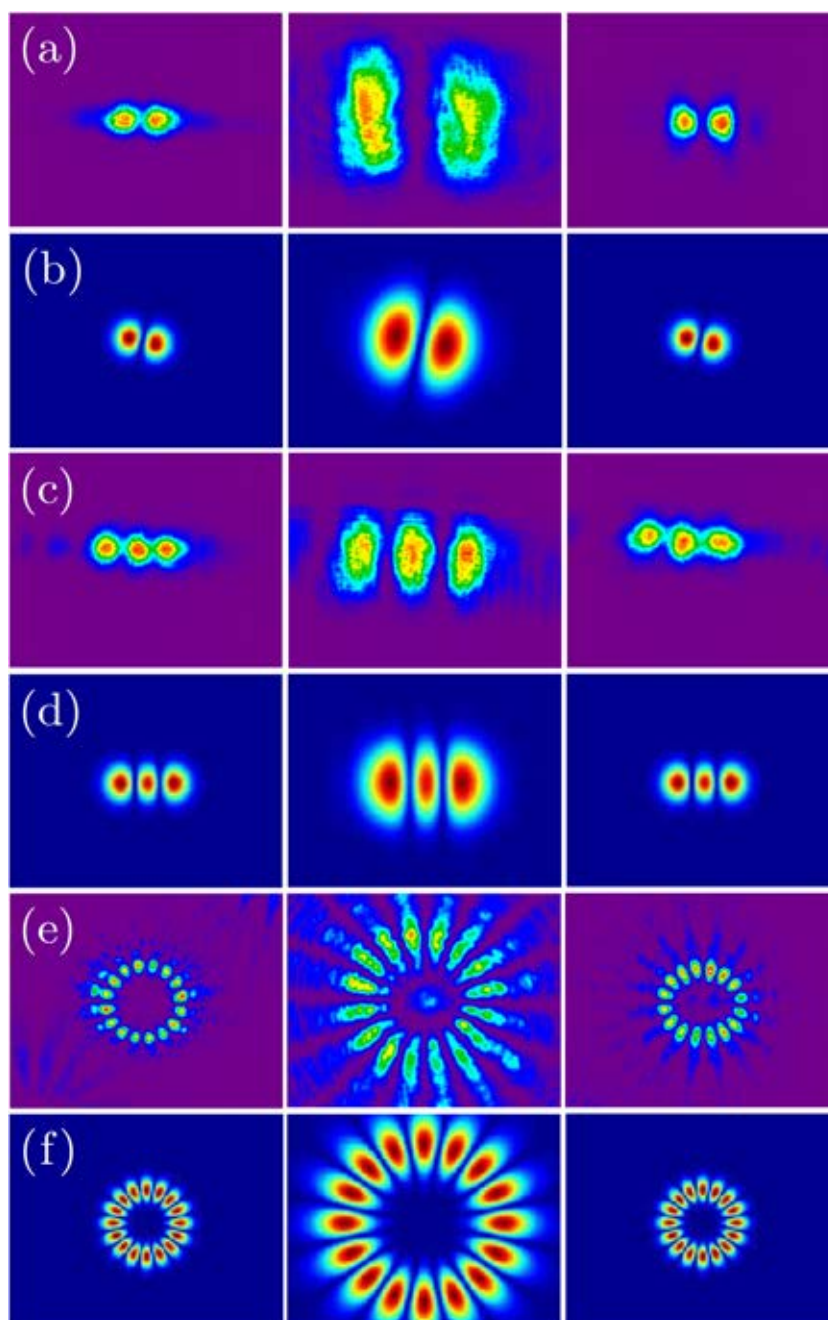


Рис. 4.9. Сравнение экспериментальных [ряды (a),(c),(e)] и теоретических [ряды (b),(d),(f)] результатов для дипольных (a),(b), трипольных (c),(d), и кольцевых (e),(f) солитонов. Левая колонка показывает входные пучки, центральная - выходные распределения при низком уровне мощности, правая - выходные распределения при высоком уровне мощности.

Экспериментальное наблюдение мультиполей было осуществлено в образцах с поперечным сечением  $2 \times 2 \text{ mm}^2$  и длиной  $84 \text{ mm}$ , изготовленных из свинцового стекла. Боковые поверхности образца поддерживались при комнатной температуре за счет интенсивного теплоотвода. В эксперименте использовалось непрерывное излучение с мощностью  $1.8 \text{ W}$  на длине волны  $488 \text{ nm}$ . Для формирования дипольных солитонов использовался гауссовский пучок, половина которого проходила через волновую пластинку, создающую разность фаз  $\pi$  между двумя частями пучка. Для формирования трипольных солитонов использовался аналогичный подход, но через пластинку проходила лишь центральная треть пучка. Для формирования сложных кольцевых солитонов исходный пучок отражался от специально изготовленной голограммы, и лишь затем фокусировался на входную поверхность образца. Как входные, так и выходные распределения интенсивности регистрировались с помощью ССD камеры. Сравнение типичных экспериментальных результатов с результатами численного моделирования приведены на рис. 4.9. Левая колонка в каждом ряду соответствует входному распределению интенсивности. При низких мощностях  $\sim 10 \text{ mW}$  входные пучки испытывают значительную линейную дифракцию и уширяются на выходе образца (средняя колонка). При высокой мощности  $1.8 \text{ W}$  происходит формирование солитонов, которые распространяются в среде без заметных искажений профилей (правая колонка).

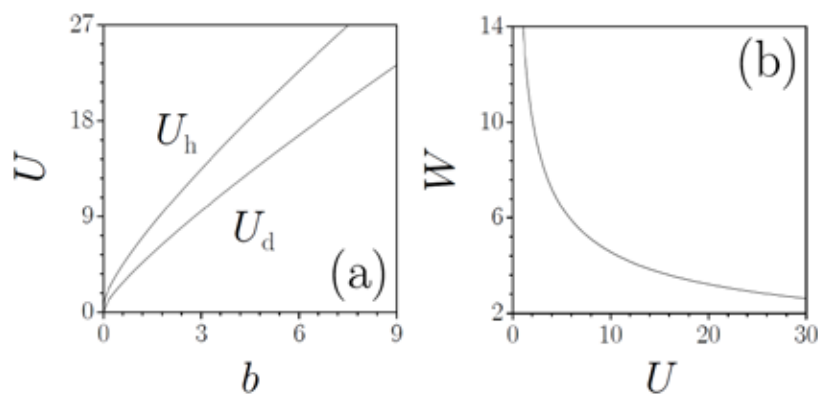


Рис. 4.10. (а) Мощность как функция постоянной распространения для дипольных  $U_d$  и гексапольных  $U_h$  солитонов. (б) Интегральная ширина дипольного солитона в зависимости от его мощности.

Моделирование распространения мультипольных солитонов на огромные расстояния, значительно превышающие достижимые в реальном эксперименте, показывает, что мультипольные комплексы осцилляторно-неустойчивы. Малые возмущения исходных профилей приводят к постепенно нарастающим осцилляциям интенсивности отдельных пиков, и, в конечном счете, к разрушению мультипольной структуры пучка.

Рис. 4.11 показывает динамику распространения возмущенных диполей для двух значений постоянной распространения. При большой мощности [рис. 4.11(b)] происходит преобразование диполя в фундаментальный солитон, в то время как при меньшей мощности диполь сохраняет свою внутреннюю структуру [рис. 4.11(a)]. Следовательно, скорость развития неустойчивости резко уменьшается с уменьшением мощности солитона, и уже при промежуточных значениях мощности мультиполи (включая кольцевые солитоны) становятся метастабильными, поскольку они распространяются при наличии возмущений без заметных искажений на сотни дифракционных длин, что значительно превышает доступную в эксперименте длину образца.

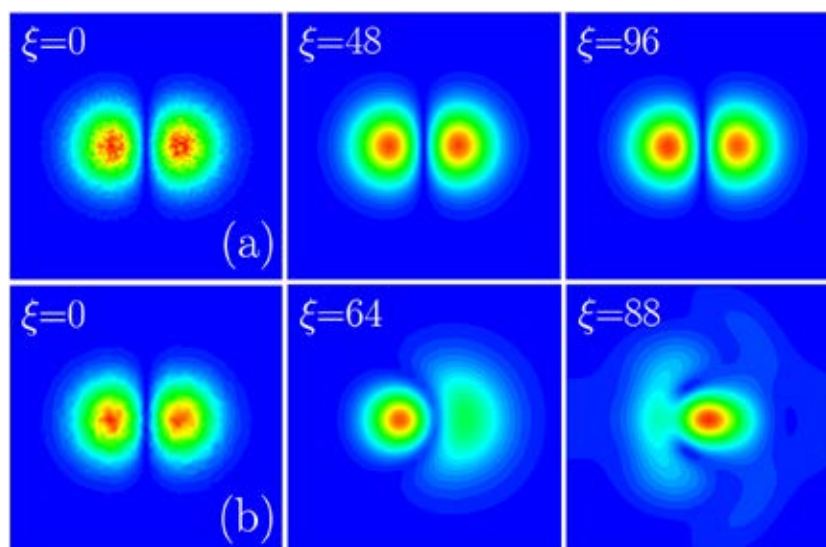


Рис. 4.11. Динамика распространения возмущенных диполей, соответствующих  $b = 3$  (a) и  $b = 12$  (b).

Таким образом, нелокальные среды с тепловой нелинейностью могут поддерживать метастабильные двумерные мультипольные солитоны с практически произвольным числом пиков интенсивности.

#### §4.4. Устойчивость вихревых солитонов в средах с тепловой нелинейностью

Вихревые солитоны, как правило, азимутально-неустойчивы в локальных фокусирующих средах. Причина этой неустойчивости кроется в том, что локальное увеличение интенсивности солитона в какой-либо области по азимуту ведет к увеличению показателя преломления, что стимулирует лавинообразный рост интенсивности, приводящий в конечном итоге к распаду вихревого солитона на фундаментальные. Среди механиз-

мов стабилизации радиально-симметричных вихревых солитонов в однородных средах стоит отметить векторные взаимодействия с фундаментальными солитонами или наличие дефокусирующей нелинейности высшего порядка. В обоих случаях стабилизация достигается благодаря наличию механизма, который приводит к сглаживанию возникших возмущений на профиле вихревого солитона, причем стабилизация обычно возможна только для вихревых солитонов с небольшими топологическими зарядами. В нелокальной среде вихревые солитоны также могут быть устойчивыми, благодаря эффективному сглаживанию локальных возмущений интенсивности. Остается, однако, открытым вопрос о максимальном топологическом заряде устойчивого вихревого солитона в нелокальной среде. Его обсуждению посвящен этот параграф [299].

Рассмотрим распространение лазерного пучка вдоль оси  $\xi$  в цилиндрическом образце с фокусирующей тепловой нелинейностью, которое описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \phi^2} \right) - qn, \\ \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial n}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \phi^2} &= -|q|^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь  $r$  - радиальная координата,  $\phi$  - азимутальный угол. Нормировки амплитуды поля  $q$  и показателя преломления  $n$  совпадают с введенными в параграфе 4.3. Система (4.10) решается с граничными условиями  $q, n|_{r \rightarrow R} = 0$ , где  $R$  - радиус образца. Предполагается, что боковая поверхность образца поддерживается при фиксированной температуре. Похожая геометрия использовалась в работе [312], где было впервые указано на возможность подавления азимутальной неустойчивости в нелокальной среде. Отметим, что световой пучок, запущенный на оси цилиндрического образца, нагревает его и приводит к формированию стационарного распределения температуры после достаточно длительного промежутка времени, пропорционального  $R^2$  и обратно пропорционального теплопроводности материала. В среде с положительным термооптическим коэффициентом  $\beta > 0$  нагрев ведет к увеличению показателя преломления в центре образца, как для простейших, так и для вихревых световых пучков.

Профиль показателя преломления, индуцированный радиально-симметричным пучком, может быть записан в виде

$$n(r, \xi) = - \int_0^R \mathcal{P}_0(r, \rho) |q(\rho, \xi)|^2 d\rho, \quad (4.11)$$

с функцией отклика среды  $\mathcal{P}_0(r, \rho) = \rho \ln(\rho/R)$  при  $r < \rho$  и  $\mathcal{P}_0(r, \rho) = \rho \ln(r/R)$  при  $r \geq \rho$ . Как видно из этого выражения, в среде с тепловой нелинейностью функция отклика определяется только геометрией образца и его размерами, в отличие от гауссовской функции отклика или функции отклика в жидких кристаллах (см. параграф 4.1), включающих единственный характерный поперечный масштаб  $d$  (степень нелокальности). В дальнейшем мы используем радиус  $R = 40$ , что адекватно размерам типичных образцов.

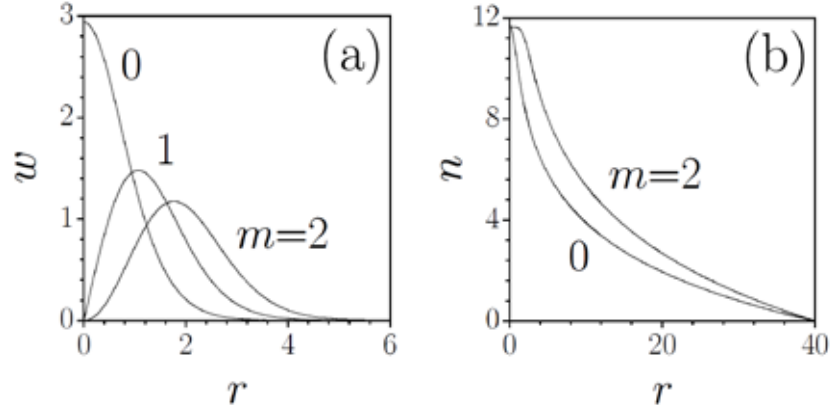


Рис. 4.12. (а) Профили солитонов с топологическими зарядами  $m = 0, 1, 2$  при  $b = 10$ . (б) Профили показателя преломления для солитонов с  $m = 0, 2$  при  $b = 10$ .

Профили радиально симметричных вихревых солитонов в системе (4.11) ищутся в виде  $q = w(r) \exp(ib\xi + im\phi)$ , где  $m$  - топологический заряд солитона. При линейном анализе устойчивости поле возмущенных вихревых солитонов записывается в виде  $q = [w(r) + u(r, \xi) \exp(ik\phi) + v^*(r, \xi) \exp(-ik\phi)] \exp(ib\xi + im\phi)$ , где  $u, v$  - профили компонент возмущения, амплитуда которых может расти с инкрементом  $\delta$ ,  $k$  - азимутальный индекс возмущения. Линейная задача на собственные значения  $\delta$  и собственные функции  $u, v$  имеет вид:

$$\begin{aligned} i\delta u &= -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{(m+k)^2}{r^2} u \right) - w \Delta n_k - un + bu, \\ i\delta v &= +\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} - \frac{(m-k)^2}{r^2} v \right) + w \Delta n_k + vn - bv, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где

$$\Delta n_k = -\int_0^R \mathcal{P}_k(r, \rho) w(\rho) [u(\rho) + v(\rho)] d\rho. \quad (4.13)$$

является возмущением показателя преломления среды, соответствующим азимутальному индексу  $k$ , в то время как функция  $\mathcal{P}_k(r, \rho) = -(\rho/2k)[(r/\rho)^k - (r\rho/R^2)^k]$  при  $r < \rho$  и  $\mathcal{P}_k(r, \rho) = -(\rho/2k)[(\rho/r)^k - (r\rho/R^2)^k]$  при  $r \geq \rho$ . Линейная задача (4.12), (4.13) решалась численно.

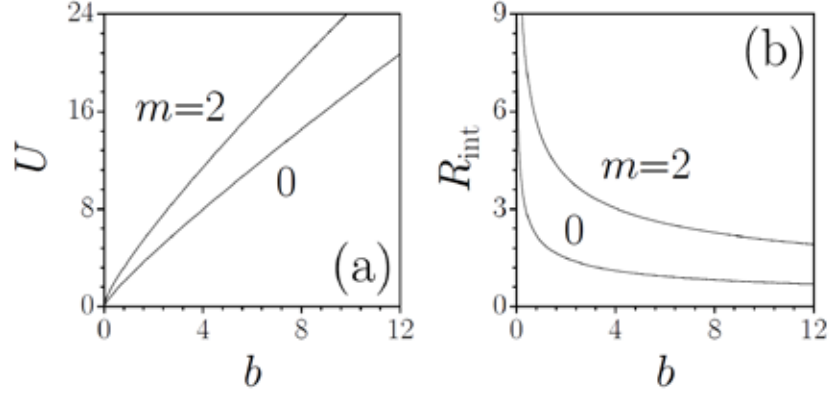


Рис. 4.13. Мощность (а) и интегральный радиус (б) солитонов как функция постоянной распространения для различных топологических зарядов.

Профили солитонов с различными топологическими зарядами показаны на рис. 4.12. Помимо фундаментальных солитонов, в цилиндрических образцах с тепловой нелинейностью могут существовать вихревые солитоны с любым топологическим зарядом при  $b > 0$ . При фиксированной постоянной распространения радиус вихревого солитона растет с увеличением его заряда, а его пиковая амплитуда уменьшается. Мощность и интегральный радиус

$$U = 2\pi \int_0^\infty r w^2 dr, \quad R_{\text{int}} = 2\pi U^{-1} \int_0^\infty r^2 w^2 dr \quad (4.14)$$

также растут с увеличением топологического заряда при фиксированном  $b$ . Несмотря на сильную локализацию профилей солитонов, распределения показателя преломления (температуры) намного шире - тепловая добавка к показателю преломления отлична от нуля во всем поперечном сечении образца [рис. 4.12(b)]. При этом для  $m > 0$  на зависимости  $n(r)$  ясно различим плоский участок в окрестности точки  $r=0$  где показатель преломления не убывает несмотря на то, что поле солитона  $q \rightarrow 0$ . Ширина этого участка увеличивается с ростом топологического заряда. Увеличение постоянной распространения сопровождается ростом мощности [рис. 4.13(a)] и уменьшением интегрального радиуса пучка [рис. 4.13(b)]. Помимо обычных вихревых солитонов, поле которых не меняет знак с ростом  $r$ , мы нашли также солитоны, для которых функция  $w(r)$  обраща-



ется в ноль в некоторых радиальных точках - такие "многокольцевые" солитоны, однако, оказались неустойчивыми. В то время как фундаментальные солитоны с  $m = 0$  в цилиндрических образцах всегда устойчивы, вихревые солитоны могут быть устойчивы только при  $m \leq 2$  во всей области их существования независимо от радиуса образца  $R$ . Заметим, что такое же ограничение на заряд устойчивого солитона действует и в жидкокристаллических средах, где функция отклика включает модифицированные функции Бесселя первого и второго рода [298], но в среде с модельной гауссовской функцией отклика удастся найти устойчивые вихревые солитоны с любым топологическим зарядом [297]. Это наблюдение указывает на важность конкретных деталей функции отклика среды для устойчивости солитонов высших порядков. Приведенное ограничение на заряд устойчивого вихревого солитона напоминает ограничение на число пиков в устойчивом мультиполе в одномерной среде, обсуждавшееся в параграфе 4.1. Как уже упоминалось ранее, стабилизация вихревых солитонов связана с тем фактом, что в нелокальной среде локальное увеличение интенсивности приводит к перераспределению показателя преломления во всей поперечной плоскости.

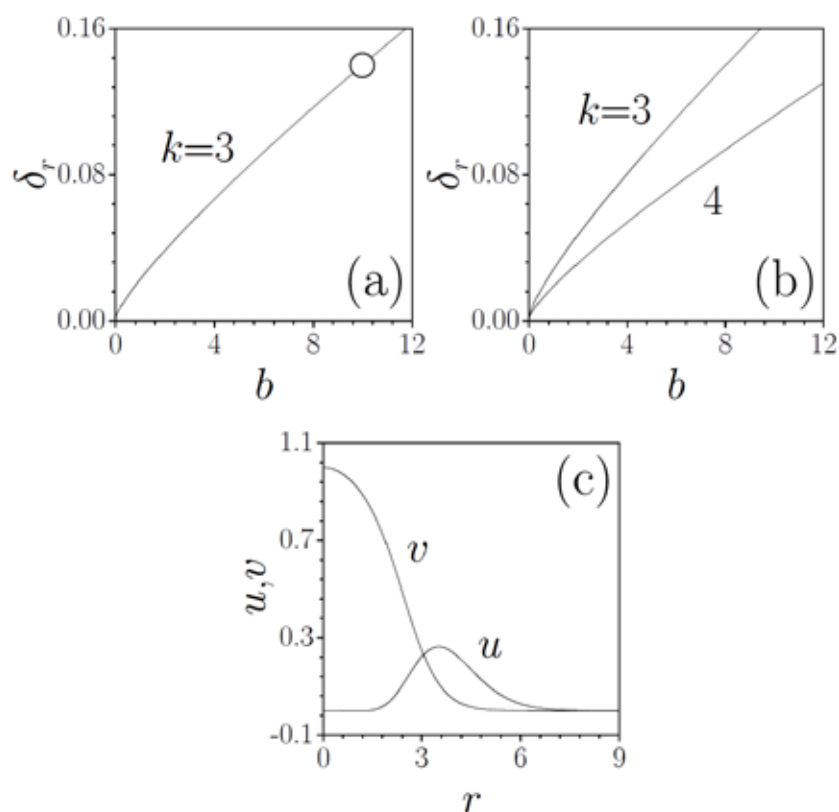


Рис. 4.14. Действительная часть инкремента нарастания возмущения как функция постоянной распространения для вихревых солитонов с  $m = 3$  (а) и  $m = 4$  (б) для различных значений  $k$ . Точка на панели (а) соответствует профилю возмущения на панели (с).

Интересно, что в среде с тепловой нелинейностью распад вихревых солитонов с зарядами  $m > 2$  может быть вызван лишь возмущениями со строго определенными азимутальными индексами, в отличие от локальных сред, где возмущения с широким спектром азимутальных индексов могут быть деструктивными. Например, вихревой солитон с  $m = 3$  неустойчив только по отношению к возмущениям с азимутальным индексом  $k = 3$  [рис. 4.14(a)], а солитоны с  $m = 4, 5$  разрушаются лишь возмущениями с  $k = 3, 4$  [рис. 4.14(b)]. Все эти неустойчивости осцилляторные с  $\delta_r, \delta_i \neq 0$ , причем действительная часть инкремента всегда монотонно растет с увеличением  $b$ .

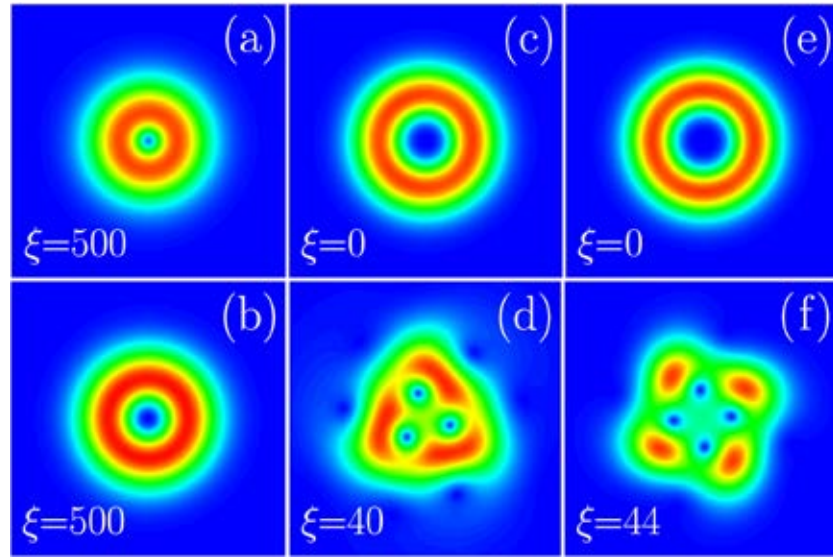


Рис. 4.15. Динамика распространения возмущенных вихревых солитонов. Распределение модуля поля показаны на разных расстояниях для (a)  $m = 1$ , (b)  $m = 2$ , (c), (d)  $m = 3$ , (e), (f)  $m = 4$ .

Прямое распространение возмущенных вихревых солитонов подтверждает предсказание линейного анализа устойчивости. Вихревые солитоны с зарядами  $m = 1, 2$  распространяются устойчиво [рис. 4.15(a) и 4.15(b)], а с зарядами  $m = 3, 4$  разрушаются, но весьма специфически образом - см. рис. 4.15(c)-4.15(f), где динамика распространения таких солитонов показана для мультипликативных возмущений исходного профиля  $[1 + 0.01 \cos(3\phi)]$  (для  $m = 3$ ) и  $[1 + 0.01 \cos(4\phi)]$  (для  $m = 4$ ) вихревого солитона. В приведенных примерах фазовая дислокация на оси расщепляется на несколько дислокаций с единичными зарядами, которые вращаются вокруг оси образца и постепенно смещаются к его периферии, так что вихревые солитоны в итоге превращаются в единственный фундаментальный солитон в центре образца. Заметим, что в локальной среде распад вихревого солитона обычно ведет к формированию нескольких фундаментальных солитонов, разлетающихся по касательной к исходному кольцу интенсивности. Динамика

распада в нелокальной среде согласуется с профилем возмущения, приведенным на рис. 4.14(с) для  $m=3$  и  $k=3$ . Экспоненциальный рост компоненты  $v$  такого возмущения должен привести к увеличению поля на оси образца, в то время как компонента  $u$  ответственна за появление азимутальной модуляции.

Таким образом, вихревые солитоны в цилиндрической нелокальной среде с тепловой нелинейностью могут быть устойчивы только если их топологический заряд удовлетворяет условию  $m \leq 2$ . Отметим, что пока в таких средах экспериментально наблюдались лишь вихревые солитоны с единичными зарядами [263].

#### §4.5. Одномерные решеточные солитоны в нелокальной нелинейной среде

В параграфах 4.1-4.4 нами обсуждались свойства солитонов в однородных нелокальных средах. Однако, периодическая модуляция линейного показателя преломления легко создается и в нелокальной среде, в частности, в жидких кристаллах, где периодическая система электродов на поверхности жидкокристаллического образца может быть использована для контроля глубины модуляции показателя преломления за счет изменения приложенной разности потенциалов. Данный параграф посвящен влиянию нелокальности нелинейного отклика на свойства фундаментальных и мультипольных солитонов в среде с периодической модуляцией показателя преломления [305]. При этом особенно интересно влияние нелокальности на мобильность солитонов: в отличие от локальной среды, где рост мощности приводит к уменьшению мобильности солитонов, нелокальная нелинейность должна сглаживать полный профиль показателя преломления, что потенциально может способствовать увеличению мобильности.

Распространение излучения вдоль оси  $\xi$  фокусирующей нелокальной нелинейной среды с мелкой поперечной модуляцией показателя преломления описываем системой связанных уравнений для амплитуды поля  $q$  и нелинейной добавки к показателю преломления  $n$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - qn - pR(\eta)q, \\ n - d \frac{\partial^2 n}{\partial \eta^2} &= |q|^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

где для случая распространения в жидких кристаллах нормировки всех величин совпадают с таковыми из параграфа 4.1. Параметр  $p$  в уравнении (4.15) описывает глубину модуляции показателя преломления, а функция  $R(\eta) = \cos(\Omega\eta)$  - профиль решетки пока-

зателя преломления с пространственной частотой  $\Omega$ . Глубина модуляции  $p$  мала по сравнению с невозмущенным показателем преломления. Среди интегралов системы уравнений (4.15), которые мы будем использовать при анализе, упомянем мощность  $U$  и гамильтониан  $H$ :

$$2H = \int_{-\infty}^{\infty} [|\partial q / \partial \eta|^2 - 2pR(\eta)|q|^2] d\eta - \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta - \lambda) |q(\lambda)|^2 d\lambda, \quad (4.16)$$

где  $\mathcal{P}(\eta) = (1/2d^{1/2}) \exp(-|\eta|/d^{1/2})$  - функция отклика среды. В дальнейшем, пользуясь масштабными преобразованиями, мы фиксируем частоту решетки показателя преломления  $\Omega = 4$  и варьируем параметры  $b, p, d$ . Анализ устойчивости солитонных решений системы (4.15) приводит к модифицированной с учетом решетки версии задачи на собственные значения (4.5):

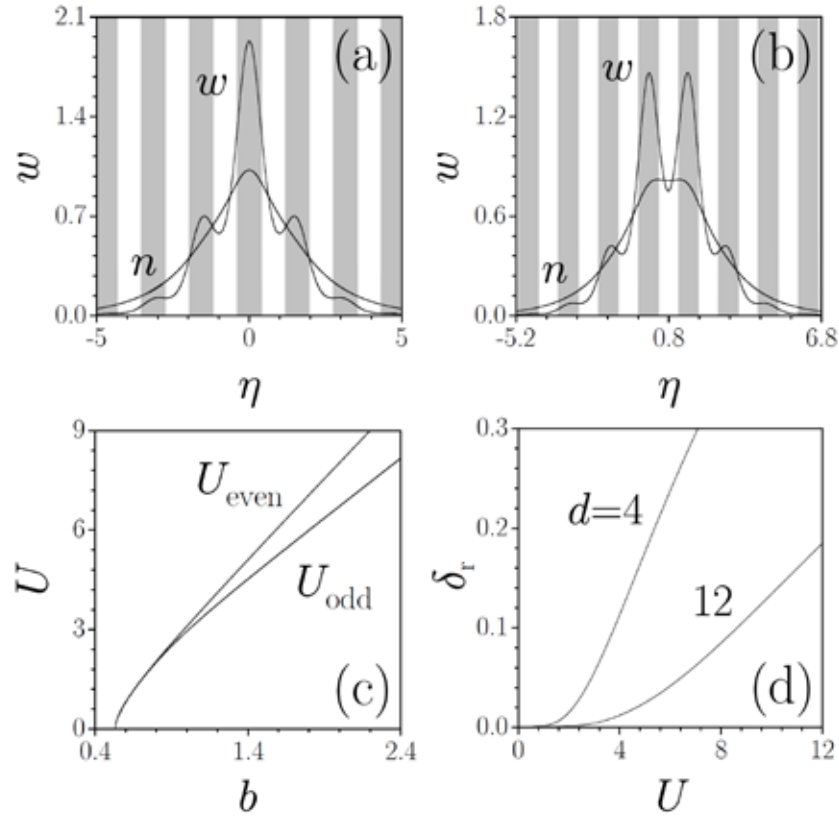


Рис. 4.16. Профили нечетного (a) и четного (b) солитонов с мощностью  $U = 4$  и соответствующие распределения нелинейного показателя преломления. (c) Мощность как функция постоянной распространения для нечетного и четного солитонов. Степень нелокальности на панелях (a)-(c)  $d = 2$ . (d) Действительная часть инкремента нарастания возмущения для четного солитона как функция мощности. Во всех случаях  $p = 3$ . В серых областях на панелях (a),(b)  $R(\eta) \geq 0$ , а в белых  $R(\eta) < 0$ .

$$\begin{aligned}\delta u &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} + bv - nv - pRv, \\ \delta v &= \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - bu + nu + w\Delta n + pRu,\end{aligned}\tag{4.17}$$

где  $\Delta n = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(\eta - \lambda) w(\lambda) u(\lambda) d\lambda$ .

Начнем со свойств четных и нечетных солитонов. Максимум интенсивности нечетного солитона совпадает с одним из локальных максимумов решетки, в то время как нечетные солитоны центрированы между двумя максимумами решетки [рис. 4.16(a) и 4.16(b)]. Заметим, что существование четного солитона обусловлено лишь наличием решетки, поскольку в однородной нелокальной среде такие решения не существуют. Мощность как четного, так и нечетного солитонов монотонно растет с увеличением постоянной распространения и обращается в ноль в отсечке  $b_{co}$ , которая совпадает для обоих типов решений [рис. 4.16(c)]. При этом отсечка (совпадающая с нижней границей полубесконечной запрещенной зоны в спектре решетки) монотонно растет с увеличением глубины решетки  $p$  и не зависит от степени нелокальности нелинейности  $d$ . При фиксированной мощности и глубине решетки  $p$ , солитоны становятся шире, а их пиковая амплитуда уменьшается с увеличением  $d$ . Нечетные солитоны всегда устойчивы, а четные неустойчивы во всей области их существования. Однако, в отличие от локальной среды, инкремент нарастания возмущения для четных солитонов резко уменьшается с увеличением степени нелокальности [рис. 4.16(d)], так что даже при мощности  $U \sim 4$  возмущенные четные солитоны могут распространяться без искажений на значительные расстояния. Следовательно, нелокальность нелинейного отклика приводит к подавлению неустойчивостей, нарушающих симметрию солитонных решений. Были также найдены семейства мультипольных решений, примеры которых приведены на рис. 4.17. Мощность мультипольных солитонов является немонотонной функцией постоянной распространения (вблизи отсечки, не совпадающей с нижней границей запрещенной зоны, производная  $dU/db$  может быть отрицательна) [рис. 4.17(c)]. В отличие от отсечки для четных и нечетных солитонов, отсечка для мультипольных солитонов растет с увеличением степени нелокальности среды. Линейный анализ свидетельствует о наличии экспоненциальных и осцилляторных неустойчивостей мультиполей вблизи отсечки [рис. 4.17(d)], но при  $b > b_{cr}$  они обретают устойчивость. При этом ширина области неустойчивости ожидаемо уменьшается с ростом глубины решетки  $p$  и неожиданно увеличивается с ростом степени нелокальности  $d$ .

Как следует из рис. 4.16(a) и 4.16(b), в нелокальной нелинейной среде профиль показателя преломления  $n$  достаточно гладкий уже при  $d \sim 1$  и его ширина заметно превосходит ширину солитона, т.е. нелинейная добавка к показателю преломления скорее сглаживает полный показатель преломления  $n + pR$ , чем увеличивает его контраст, как

это происходило бы в локальной среде. Последнее указывает на возможность повышенной мобильности светлых солитонов в нелокальных средах. Этот вывод подтверждается рис. 4.18, где показана зависимость высоты барьера Пайерлса-Набарро [313], определяемая как разность  $\delta H = H_{\text{even}} - H_{\text{odd}}$  гамильтонианов четного и нечетного солитонов одинаковой мощности, от мощности  $U$ . При движении вдоль решетки профиль солитона испытывает трансформации между состояниями, близкими к профилям нечетного и

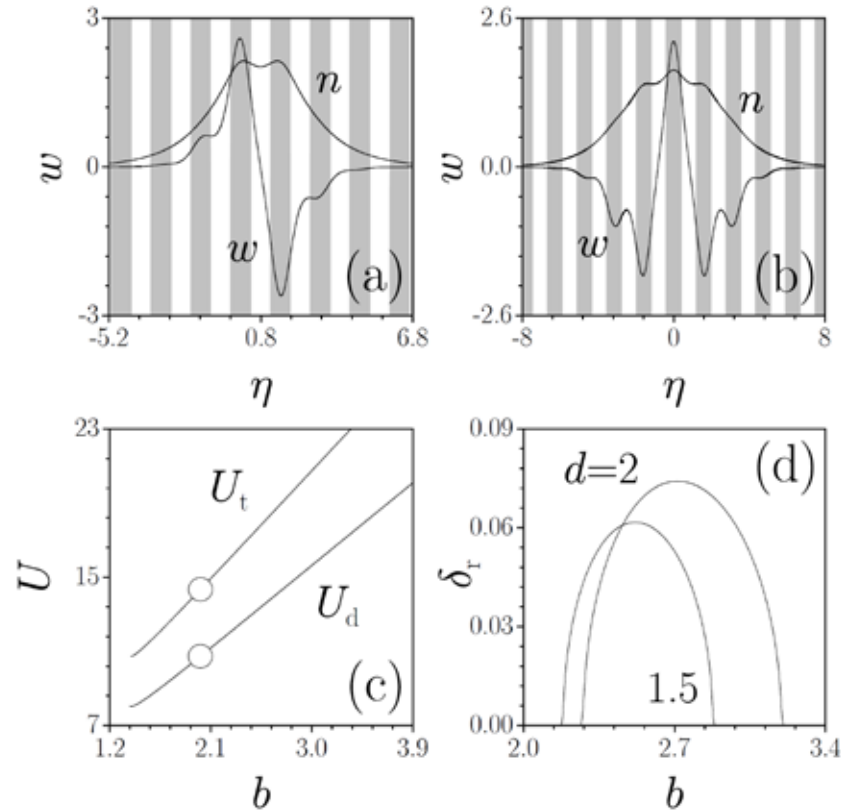


Рис. 4.17. Профили и распределения показателя преломления для диполя (а) и триполя (b), которые соответствуют точкам на зависимости  $U(b)$  на панели (с) при  $p = 3$ ,  $d = 2$ . (d) Действительная часть инкремента нарастания возмущения для диполя как функция  $b$  при  $p = 2.5$ .

четного стационарных солитонов, что сопровождается изменениями гамильтониана. В рамках метода эффективных частиц движение солитона эквивалентно преодолению потенциального барьера Пайерлса-Набарро, который растет с увеличением мощности  $U$  и глубины решетки  $p$  [рис. 4.18(a)], и, следовательно, требует большей кинетической энергии для его преодоления. Однако, увеличение степени нелокальности кардинально уменьшает высоту потенциального барьера [рис. 4.18(b)], т.е. в сильно нелокальной среде солитоны могут двигаться вдоль решетки практически без излучения.

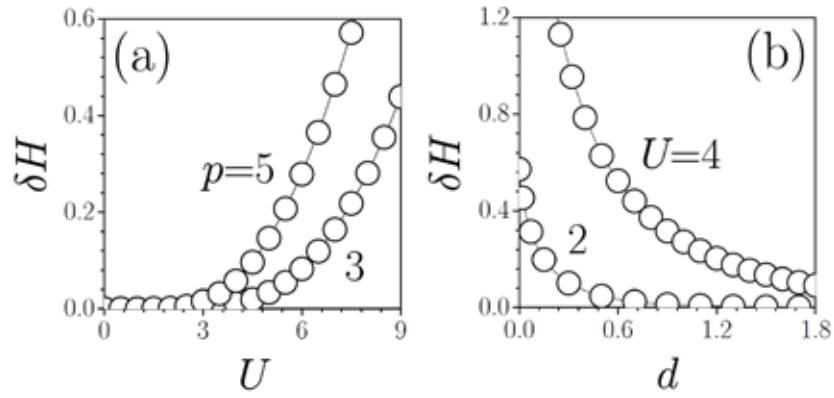


Рис. 4.18. Высота барьера Пайерлса-Набарро как функция мощности солитона при  $d=4$  (a) и как функция степени нелокальности нелинейного отклика при  $p=3$  (b).

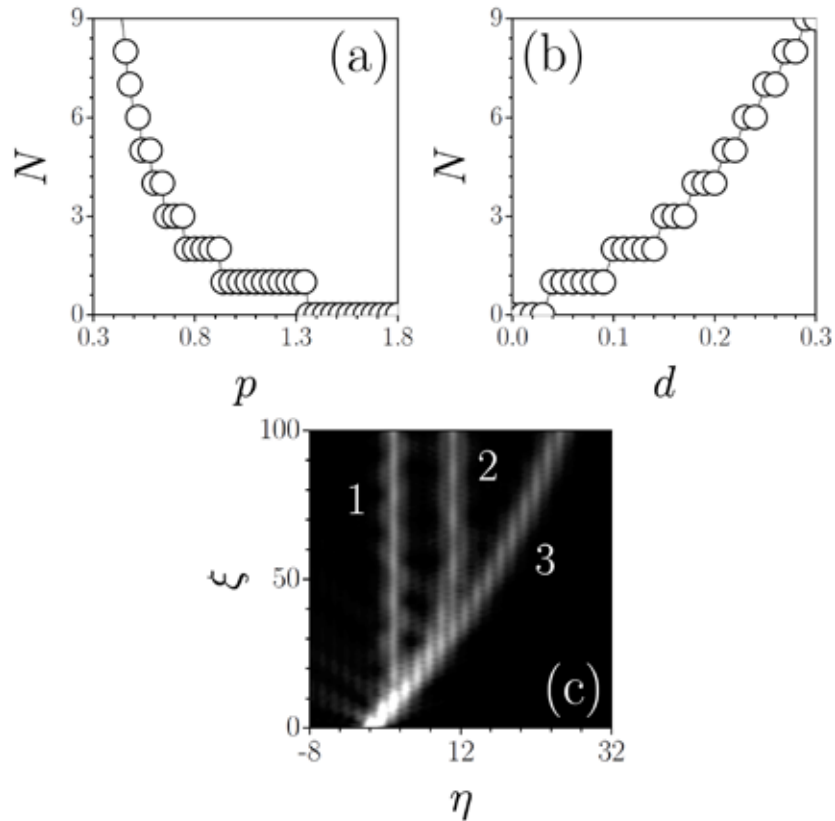


Рис. 4.19. Номер выходного канала (a) как функция глубины решетки при  $d=0.08$  и (b) как функция степени нелокальности при  $p=1$ . (c) Динамика распространения солитонов при  $d=0.1$  (кривая 1),  $0.26$  (кривая 2) и  $0.4$  (кривая 3). Во всех случаях  $p=1$ ,  $\chi=1.2$ ,  $\alpha=0.5$ .

Повышение подвижности солитонов в сильно нелокальной среде подтверждается прямым численным решением системы (4.15). Мы использовали начальные условия  $q(\eta, \xi=0) = \chi \operatorname{sech}(\chi\eta) \exp(i\alpha\eta)$ , где  $\alpha$  - исходная скорость (угол запуска) солитона. В об-

щем случае движение солитона вдоль решетки сопровождается потерями на излучение, которые приводят к его захвату [рис. 4.19(с)]. Однако эти потери резко падают с ростом нелокальности. Например, солитон с исходным форм-фактором  $\chi = 1.2$ , который захватывается в десятом канале решетки при  $d = 0$ , теряет при этом порядка 40% исходной мощности. В нелокальной среде с  $d = 0.3$  потери мощности на такой же трассе распространения составляют всего 10%. Будем считать, что солитон захвачен в канале решетки с номером  $N$  если  $2\pi(N - 1/2)/\Omega < \eta_{\max} < 2\pi(N + 1/2)/\Omega$  при  $\xi \rightarrow \infty$ , где  $\eta_{\max}$  - положение интегрального центра солитона. Номер выходного канала падает с увеличением глубины решетки  $p$  [рис. 4.19(a)], но резко растет с увеличением степени нелокальности  $d$  [рис. 4.19(b)]. Заметим, что степень нелокальности легко контролируется в жидких кристаллах, поскольку она зависит не только от толщины образца, но и от постоянной составляющей напряжения, приложенной к кристаллу.

Таким образом, нелокальность нелинейного отклика приводит к подавлению неустойчивостей для четных состояний, а также к радикальному повышению подвижности солитонов в периодической решетке показателя преломления. Подвижность солитонов в жидких кристаллах исследовалась экспериментально в работе [44].

#### **§4.6. Одномерные солитоны в слоистой среде с тепловой нелинейностью**

Характер нелинейного отклика среды с тепловой нелинейностью определяется знаком термооптического коэффициента  $\beta = dn/dT$ . Так, среда с  $\beta > 0$  является фокусирующей, а среда с  $\beta < 0$  является дефокусирующей. Интересно, что в однородном образце с  $\beta > 0$  и термостатированной границей появляется тенденция к концентрации света в приосевой области (т.е. все пучки, запущенные не на оси системы искривляются к оси и осциллируют в некоторой области вокруг нее), в то время как при  $\beta < 0$  свет концентрируется преимущественно вблизи границ образца. В однородной среде с тепловой нелинейностью стационарный солитон, вообще говоря, не может сформироваться в любой точке среды, как это происходит в материалах с локальным нелинейным откликом или даже в тех нелокальных средах, где характерный масштаб функции отклика существенно меньше, чем размер образца. Тем не менее, в композитной среде, где термооптический коэффициент является функцией поперечной координаты, можно ожидать формирования солитонов в различных точках внутри образца, определяемых положениями максимумов  $\beta$ , если только существуют фокусирующие области с  $\beta > 0$ . Заметим, что поперечная модуляция термооптического коэффициента приводит к модуляции нелинейности среды, а не ее линейного показателя преломления. Этот параграф посвящен описанию свойств солитонов в композитных нелокальных средах [308].



Мы рассматриваем распространение светового пучка вдоль оси  $\xi$  в среде с тепловой нелинейностью, которое может быть описано связанными уравнениями для амплитуды поля  $q$  и нормированного изменения температуры среды  $T$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - \sigma(\eta) q T, \\ \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} &= -|q|^2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Здесь функция  $\sigma(\eta) = \sigma_a \operatorname{sgn}[\cos(\pi\eta/d)] + \sigma_b$ , пропорциональная термооптическому коэффициенту  $\beta(\eta)$ , определяет периодический профиль тепловой нелинейности,  $\sigma_b$  - постоянная составляющая нелинейности,  $d$  - ширина слоев с различными термооптическими коэффициентами, параметр  $\sigma_a = \pm 1$  определяет тип нелинейности в центральном слое при  $\sigma_b = 0$  (при этом нелинейность фокусирующая, если  $\sigma_a = +1$ , и дефокусирующая, если  $\sigma_a = -1$ ). Нормированное изменение температуры среды  $T$  описывается обычным стационарным уравнением теплопроводности (в размерном виде имеем  $\kappa \Delta_{\perp} \delta T = -\alpha I$ , где  $I$  - интенсивность пучка,  $\delta T$  - реальное изменение температуры среды,  $\Delta_{\perp}$  - оператор Лапласа). Предполагается, что коэффициенты теплопроводности  $\kappa$ , поглощения  $\alpha$ , а также линейный показатель преломления не меняются в разных слоях. Мы также полагаем, что противоположные границы тепловой среды при  $\eta = \pm L/2$  поддерживаются при одинаковой постоянной температуре и решаем систему уравнений (4.18) с граничными условиями  $q, T|_{\eta \rightarrow \pm L/2} = 0$ .

Солитонные решения ищем в виде  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$ . Анализ их устойчивости может быть произведен с помощью решения следующей задачи на собственные значения  $\delta$  и собственные функции (возмущения)  $u, v$ :

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} - \sigma T v + b v, \\ \delta v &= \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} + \sigma T u + \sigma \Delta T w - b u, \end{aligned} \quad (4.19)$$

где  $\Delta T = -2 \int_{-L/2}^{+L/2} \mathcal{P}(\eta, \lambda) w(\lambda) u(\lambda) d\lambda$  - профиль возмущения температуры, а функция отклика тепловой среды задается выражением  $\mathcal{P}(\eta, \lambda) = L^{-1}(\eta + L/2)(\lambda - L/2)$  при  $\eta \leq \lambda$  и  $\mathcal{P}(\eta, \lambda) = L^{-1}(\eta - L/2)(\lambda + L/2)$  при  $\eta \geq \lambda$ . Необходимо отметить качественное различие между этой функцией отклика и функцией отклика жидкокристаллической среды, введенной в параграфе 4.1. В тепловой среде  $\mathcal{P}(\eta, \lambda)$  уже не определяется только лишь раз-

ностью аргументов  $\eta - \lambda$  и включает ширину образца  $L$ . В дальнейшем мы фиксируем ширину слоев  $d=1$  и всего образца  $L=51.2$ .

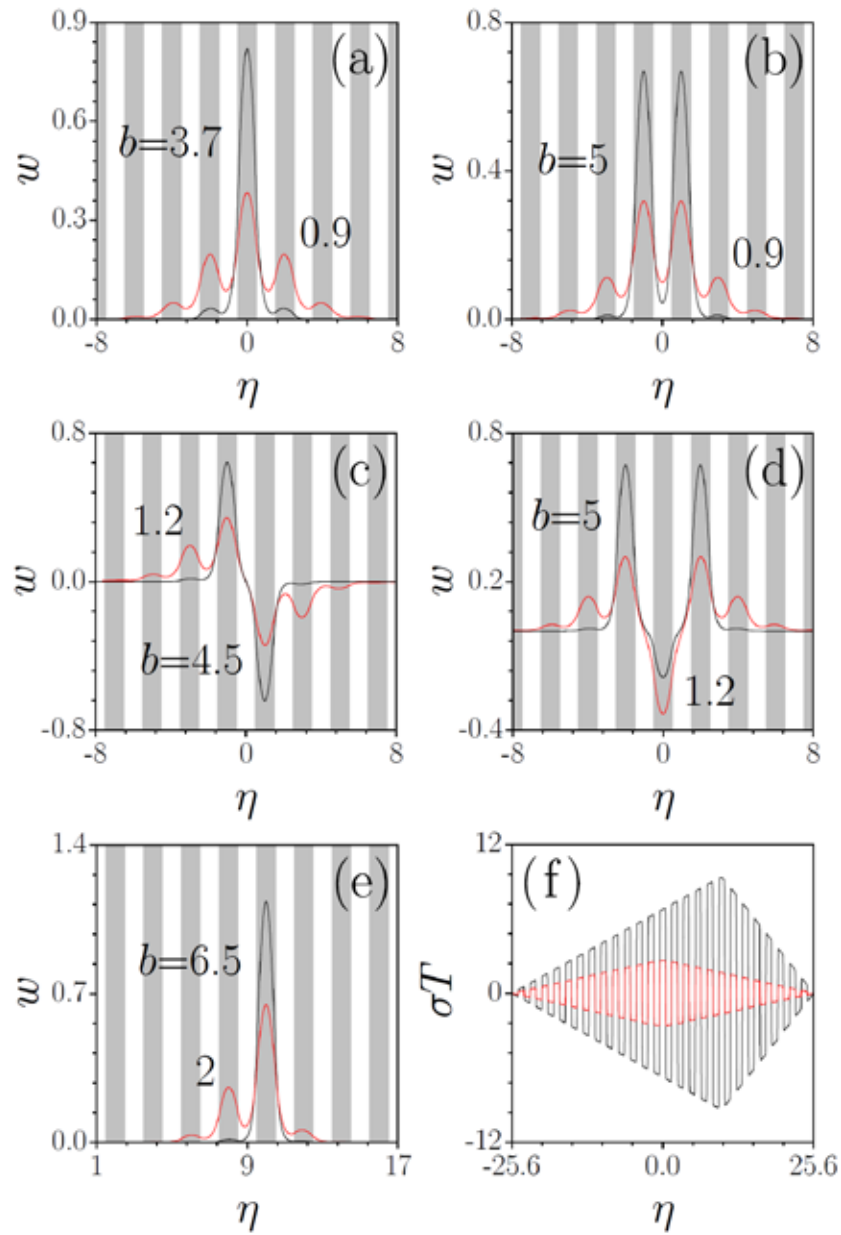


Рис. 4.20. Профили нечетного (а), четного (b), дипольного (c) и трипольного (d) солитонов при  $\eta_c = 0$ . (e) Профили смещенных нечетных солитонов при  $\eta_c = 10$ . (f) Профиль показателя преломления  $\sigma T$  для фундаментального солитона с  $b=0.9, \eta_c=0$  (красная линия) и  $b=6.5, \eta_c=10$  (черная линия). В серых областях  $\sigma > 0$ , а в белых областях  $\sigma < 0$ . Во всех случаях  $\sigma_b = 0$ .

Рассмотрим сначала случай  $\sigma_b = 0$ . Несмотря на нулевое среднее значение термооптического коэффициента, в такой среде существует множество решений, включая нечетные, четные, дипольные, трипольные и т.д., локализованные в центре образца [рис.

4.20(a)-4.20(d)]. Заметим, что четные солитоны, состоящие из двух синфазных пиков, не могут существовать в однородной тепловой среде. Для всех этих решений увеличение пиковой интенсивности сопровождается локализацией в областях с фокусирующей нелинейностью, где  $\sigma > 0$ , в то время как при малых амплитудах солитоны накрывают множество слоев и их профили глубоко модулированы. Пучки, распространяющиеся в неоднородной тепловой среде, индуцируют решетку показателя преломления во всем образце, амплитуда которой меняется в поперечном сечении [рис. 4.20(f)]. В малой области вблизи центра пучка профиль решетки  $\sigma T$  приблизительно параболический, но вдали от прогреваемой пучком области амплитуда решетки  $\sigma T$  уменьшается практически линейно по направлению к границе. Нелинейная решетка поддерживает стационарные солитоны не только в центре образца, но и в любом фокусирующем слое, даже если он находится близко к границе. Профиль такого смещенного солитона приведен на рис. 4.20(e) - в однородной тепловой среде существование такого солитона невозможно и соответствующий пучок искривлялся бы к оси образца, вместо того, чтобы прямолинейно распространяться.

Мощность нечетного солитона, расположенного в центральном слое, обращается в ноль при  $b \rightarrow 0$  [рис. 4.21(a)], однако для смещенных солитонов, локализованных в слоях с координатами центра  $\eta_c$  [если  $\sigma_a > 0$  то координата центра может принимать значения  $\eta_c = 2nd$ , а при  $\sigma_a < 0$  имеем  $\eta_c = (2n+1)d$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ], появляется отсечка по постоянной распространения и порог по мощности. Солитоны с  $\eta_c = 0$  становятся очень широкими у отсечки, а солитоны с  $\eta_c > 0$ , наоборот, остаются хорошо локализованными, хотя их профиль становится асимметричным [рис. 4.20(e)]. Упомянем, что отсечка для нечетного солитона, локализованного в слое с координатой  $\eta_c + d$ , совпадает с отсечкой для четного солитона, центрированного на слое с координатой  $\eta_c$ , причем профили таких солитонов становятся очень близки при  $b \rightarrow b_{co}$ . Зависимости  $U(b)$  для солитонов высшего порядка качественно похожи на зависимости для нечетных солитонов [рис. 4.21(b)]. Отсечки для нечетных и дипольных солитонов увеличиваются по мере удаления слоя, где находится солитон, от центра образца и обращаются в бесконечность при  $|\eta_c| \rightarrow L/2$  [рис. 4.21(c)].

Устойчивость солитонов определяется положением их центра. Нечетные солитоны устойчивы при любом значении  $b$  и  $\eta_c$ . Четные солитоны, всегда неустойчивые в линейных решетках в локальной среде, могут быть устойчивы в слоистой среде в ограниченном диапазоне постоянных распространения  $0 < b < b_{cnp}$ , но только при  $\eta_c = 0$ . Узкая область устойчивости для таких солитонов заметна на рис. 4.21(d), показывающем зависимости инкремента нарастания возмущения  $\delta_r$  от  $b$ . Все смещенные от центра четные солитоны неустойчивы. Для дипольных солитонов характерно наличие узкой области неустойчивости вблизи отсечки, но они стабилизируются при достаточно высокой

мощности. Ограничение на число пиков в устойчивом мультиполе, которое обсуждалось нами в параграфе 4.1, не действует в слоистой среде, где любое, сколь угодно сложное, мультипольное решение может быть устойчиво.

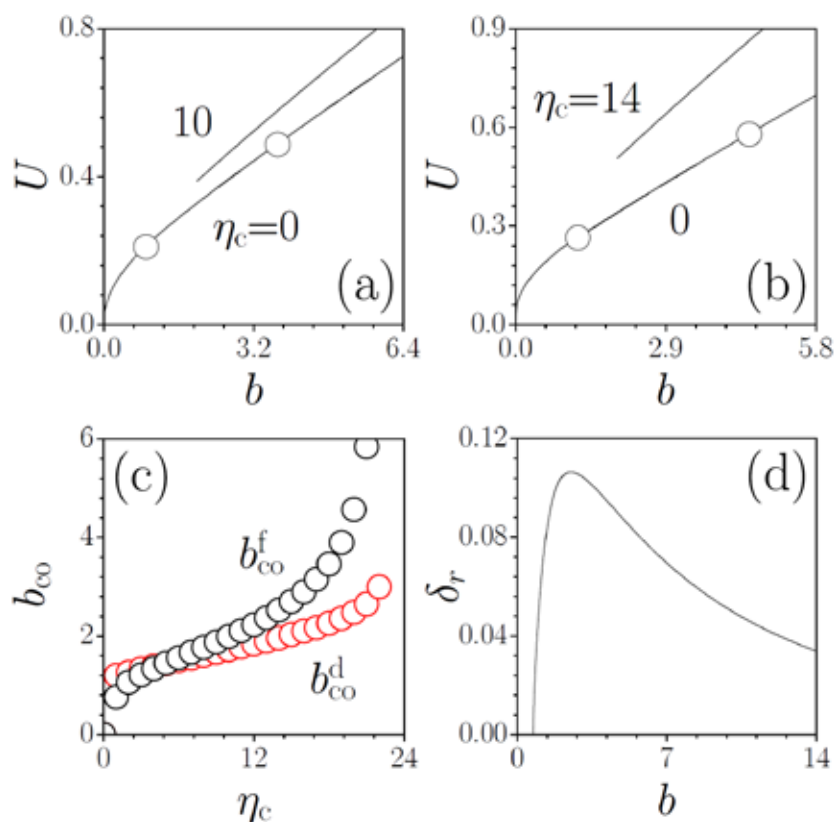


Рис. 4.21. Мощность в зависимости от постоянной распространения для нечетных (а) и дипольных (б) солитонов. Точки на панелях (а) и (б) соответствуют солитонам на рис. 4.20(а) и 4.20(с). (с) Отсечки для нечетных и дипольных солитонов как функции  $\eta_c$ . (д) Зависимость  $\delta_r(b)$  для четного солитона при  $\eta_c = 0$ . Во всех случаях  $\sigma_b = 0$ .

При ненулевой постоянной составляющей нелинейности  $\sigma_b \neq 0$  устойчивые нечетные, четные и мультипольные солитоны могут быть найдены даже для дефокусирующей в среднем нелинейности, если только  $|\sigma_b| < |\sigma_a|$ . По мере уменьшения  $\sigma_b$  профиль показателя преломления  $\sigma T$  становится асимметричным по отношению к оси  $\eta = 0$ . При фиксированном значении  $b$  нелинейная решетка становится глубже для меньших значений  $\sigma_b$  [рис. 4.22(б)], что приводит к большей локализации солитона [рис. 4.22(а)]. В случае  $\sigma_b > |\sigma_a|$ , когда нелинейность является фокусирующей во всем образце, все равно удастся найти устойчивые нечетные и мультипольные солитоны, сдвинутые от центра образца. Наличие постоянной составляющей нелинейности качественно не меняет устойчивость солитонов. Увеличение  $\sigma_b$  приводит лишь к расширению ограниченной области неустойчивости вблизи отсечки для мультипольных солитонов [на

рис. 4.22(с) изменение ширины этой области по мере роста  $\sigma_b$  показано для диполей], но если  $\sigma_b$  становится меньше критического значения, то мультиполи могут быть устойчивы во всей области их существования.

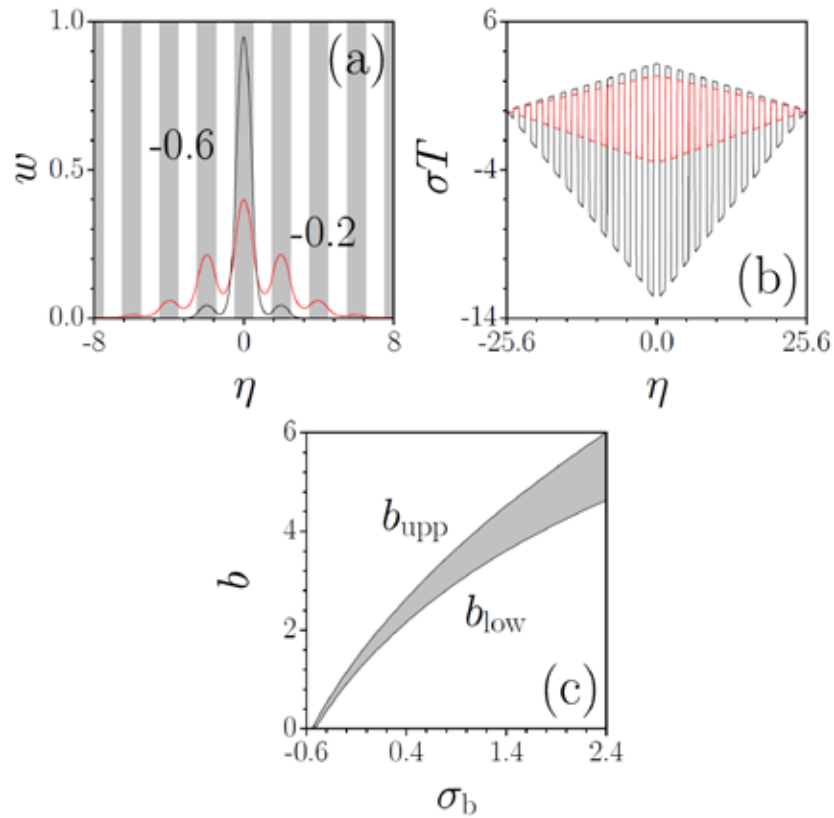


Рис. 4.22. Профили (а) и распределения показателя преломления (б) для нечетных солитонов при  $b = 0.5$ ,  $\eta_c = 0$ ,  $\sigma_b = -0.2$  (красные кривые) и  $\sigma_b = -0.6$  (черные кривые). (с) Область неустойчивости (закрашена серым) для дипольных солитонов с  $\eta_c = 1$  на плоскости  $(\sigma_b, b)$ .

В заключение, периодическая модуляция термооптического коэффициента в тепловой среде делает возможным существование устойчивых смещенных нечетных и мультипольных солитонов.

#### §4.7. Поверхностные солитоны в нелокальной нелинейной среде

Границы нелокальных нелинейных сред также могут поддерживать поверхностные солитоны. Ранее такие солитоны исследовались на границе однородной линейной и однородной нелинейной среды с диффузионной компонентой показателя преломления [314,315]. В указанной геометрии нелокальность нелинейного отклика приводит к повышению порога по мощности формирования поверхностных солитонов, особенно при

наличии диффузии через границу, но она не меняет качественно устойчивости солитонов. При этом были исследованы лишь фундаментальные поверхностные солитоны. Возникает интересный вопрос - могут ли границы двух нелокальных сред поддерживать более сложные солитонные комплексы? В этом параграфе обсуждаются свойства поверхностных мультиполей на границе полубесконечной периодической решетки, созданной в нелокальной нелинейной среде [309].

Для описания распространения оптического излучения вдоль оси  $\xi$  на границе полубесконечной решетки показателя преломления в фокусирующей нелокальной нелинейной среде используем систему уравнений (4.15), где, как и ранее,  $p$  - глубина решетки показателя преломления, в то время как ее профиль описывается функцией  $R(\eta)$ . Теперь мы полагаем, что  $R(\eta) = 0$  при  $\eta < 0$  и  $R(\eta) = 1 - \cos(\Omega\eta)$  при  $\eta \geq 0$ . Такие границы раздела между периодической и однородной нелокальной средой формируются, например, при приложении разности потенциалов к периодической системе электродов, нанесенной на поверхность жидкокристаллического образца [42]. В принципе, в жидких кристаллах приложенное напряжение может привести также к периодической модуляции степени нелокальности, но для простоты мы будем использовать модель (4.15). Профили поверхностных солитонов в полубесконечной решетке ищутся в стандартном виде  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$ , а для линейного анализа их устойчивости используется задача на собственные значения и собственные функции (4.17) с видоизмененной функцией  $R(\eta)$ . Напомним, что нелинейный отклик среды характеризуется функцией  $\mathcal{P}(\eta) = (1/2d^{1/2}) \exp(-|\eta|/d^{1/2})$ , где  $d$  - степень нелокальности. В дальнейшем мы фиксируем частоту решетки  $\Omega = 2$  и варьируем параметры  $b, p, d$ .

Профили простейших поверхностных солитонов, локализованных на границе полубесконечной решетки, представлены на рис. 4.23(a) и 4.23(b). Мощность солитонов монотонно растет с увеличением  $b$  практически во всей области существования, за исключением узкого интервала вблизи отсечки  $b_{\text{low}}$  для существования солитонов [рис. 4.24(a)]. При  $b \rightarrow b_{\text{low}}$  солитон начинает расширяться вглубь решетки, а осцилляции на его профиле становятся более выраженными. В среде с сильной нелокальностью нелинейного отклика ширина профиля показателя преломления существенно превосходит ширину солитона, при этом даже для сильно модулированного распределения интенсивности осцилляции на профиле показателя преломления практически не видны уже при  $d \sim 3$ . Асимметрия профиля показателя преломления наиболее заметна при  $b \rightarrow b_{\text{low}}$  и  $d \rightarrow 0$ . Отсечка по постоянной распространения достаточно быстро растет с увеличением глубины решетки  $p$  [рис. 4.24(b)], а также медленно увеличивается при росте степени нелокальности  $d$ . Как и для границы раздела двух однородных нелокальных сред [314,315], увеличение степени нелокальности нелинейного отклика приводит к росту пороговой мощности  $U_{\text{th}}$ , необходимой для формирования поверхностного солитона.

Так, для  $p=1$  пороговая мощность равна  $U_{th} = 0.409$  при  $d=0.5$ , в то время как при заметно большем значении  $d=5$  имеем  $U_{th} = 1.166$ . Последний факт объясняется тем, что при увеличении степени нелокальности среды профиль нелинейного показателя преломления, индуцированный пучком данной мощности, становится шире, а пиковое значение  $n$  уменьшается. Поскольку поверхностный солитон формируется благодаря нелинейно-индуцированному дефекту показателя преломления в поверхностном канале, то для создания дефекта такой же величины в среде с повышенной нелокальностью требуется большая мощность пучка. Поверхностные солитоны устойчивы в области, где  $dU/db > 0$ , и неустойчивы вблизи отсечки, где  $dU/db \leq 0$ , т.е. для них применим критерий Вахитова-Колоколова.

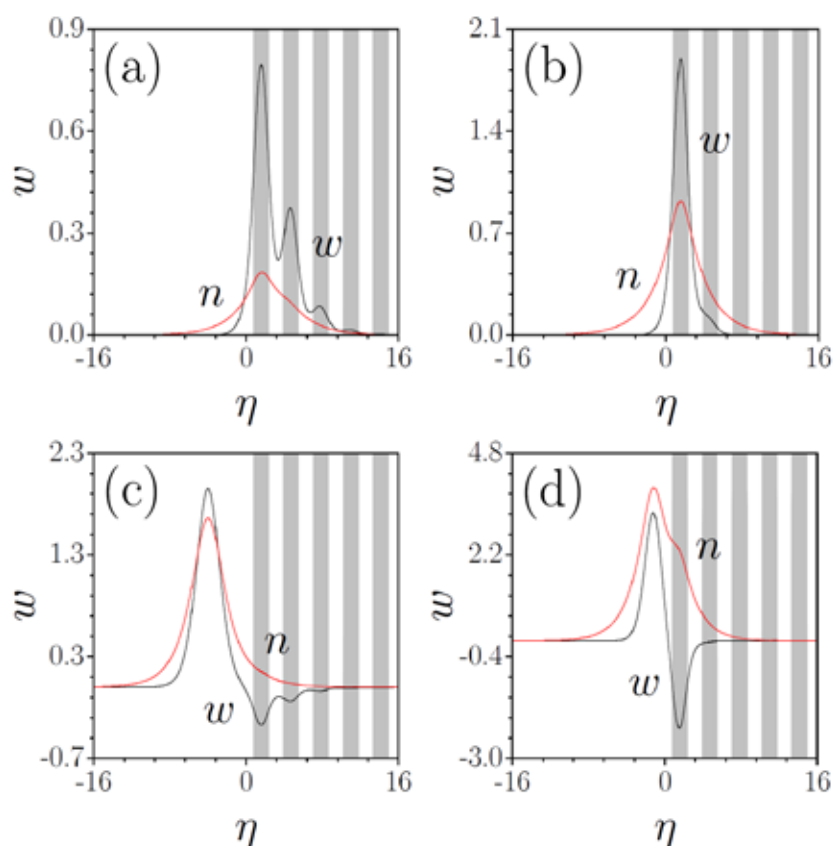


Рис. 4.23. Профили фундаментальных поверхностных солитонов, соответствующих  $b=1.34$  (а) и  $b=2$  (б) при  $p=1$ ,  $d=5$ . Профили дипольных поверхностных солитонов, соответствующие  $b=1.3$  (с) и  $b=3.2$  (д) при  $p=1$ ,  $d=3$ . В серых областях  $R(\eta) \geq 1$ , а в белых областях  $R(\eta) < 1$ .

Нелокальность нелинейного отклика приводит к существованию уникальных семейств мультипольных солитонов, противофазные пики в которых могут находиться по разные стороны от границы раздела периодической и однородной сред. Примеры ди-

польных солитонов такого типа приведены на рис. 4.23(с) и 4.23(д). Дипольные солитоны формируются благодаря специфической зависимости знака силы взаимодействия между противофазными пучками от расстояния между ними в нелокальной нелинейной среде - при уменьшении расстояния притяжение сменяется отталкиванием, так что возможно равновесное состояние. Из-за наличия полубесконечной решетки показателя преломления профили поверхностных дипольных солитонов асимметричны. На правом, заходящем в решетку, крыле солитона поле сильно модулировано, в то время как его левое крыло остается гладким. Асимметрия профиля становится более заметной при увеличении глубины решетки и степени нелокальности нелинейного отклика. Подчеркнем, что нам не удалось найти похожие солитоны не только на границе раздела периодической решетки и однородной локальной нелинейной среды, но и на границе раздела двух однородных нелокальных сред, определяемой скачкообразным изменением показателя преломления  $R(\eta)$ .

Для дипольных поверхностных солитонов характерно наличие как нижней  $b_{low}$ , так и верхней  $b_{upp}$  отсечек по постоянной распространения. При  $b \rightarrow b_{low}$  асимметрия профиля солитона увеличивается, поскольку амплитуда поля, сконцентрированного в решетке, уменьшается, и оно начинает все сильнее проникать в решетку [рис. 4.23(с)]. Тем не менее, притяжение между правым и левым пучками в солитоне все еще достаточно сильно для того, чтобы удерживать левый пучок вблизи границы. При  $b \rightarrow b_{upp}$  асимметрия солитона уже не так заметна [рис. 4.23(д)]. Как и фундаментальные солитоны, дипольные солитоны существуют лишь при мощности, превышающей пороговую [рис. 4.24(с)], причем  $U_{th}$  также растет с увеличением степени нелокальности. Интересно, что область существования дипольных солитонов постепенно сужается с увеличением глубины решетки  $p$  [рис. 4.24(д)]. В то же время, верхняя отсечка  $b_{upp}$  сначала уменьшается, а потом начинает расти с увеличением степени нелокальности (при этом нижняя отсечка, которая при  $p = 1$  составляет  $b_{low} \approx 1.3$ , практически не зависит от  $d$ ), что приводит к заметному расширению области существования солитонов в сильно нелокальной среде [рис. 4.24(е)].

Линейный анализ устойчивости показывает, что дипольные поверхностные солитоны устойчивы в определенной части области их существования при  $b_{low} < b < b_{cr}$ . При  $b_{cr} \leq b < b_{upp}$  диполи осцилляторно неустойчивы. Типичная зависимость инкремента нарастания возмущения от постоянной распространения представлена на рис. 4.24(ф). По мере роста глубины решетки или степени нелокальности критическое значение постоянной распространения  $b_{cr}$  приближается к верхней границе области существования диполей  $b_{upp}$  [см. рис. 4.24(д) и 4.24(е)]. В режиме сильной нелокальности узкая область неустойчивости возникает вблизи нижней отсечки  $b_{low}$  и постепенно расширяется с ростом  $d$ . Примеры устойчивого распространения возмущенного фундаментального и ди-



польного солитонов приведены на рис. 4.25. Сильное возмущение может привести к незначительным осцилляциям расстояния между противофазными составляющими дипольного солитона, но даже при таких возмущениях диполи не теряют свою структуру.

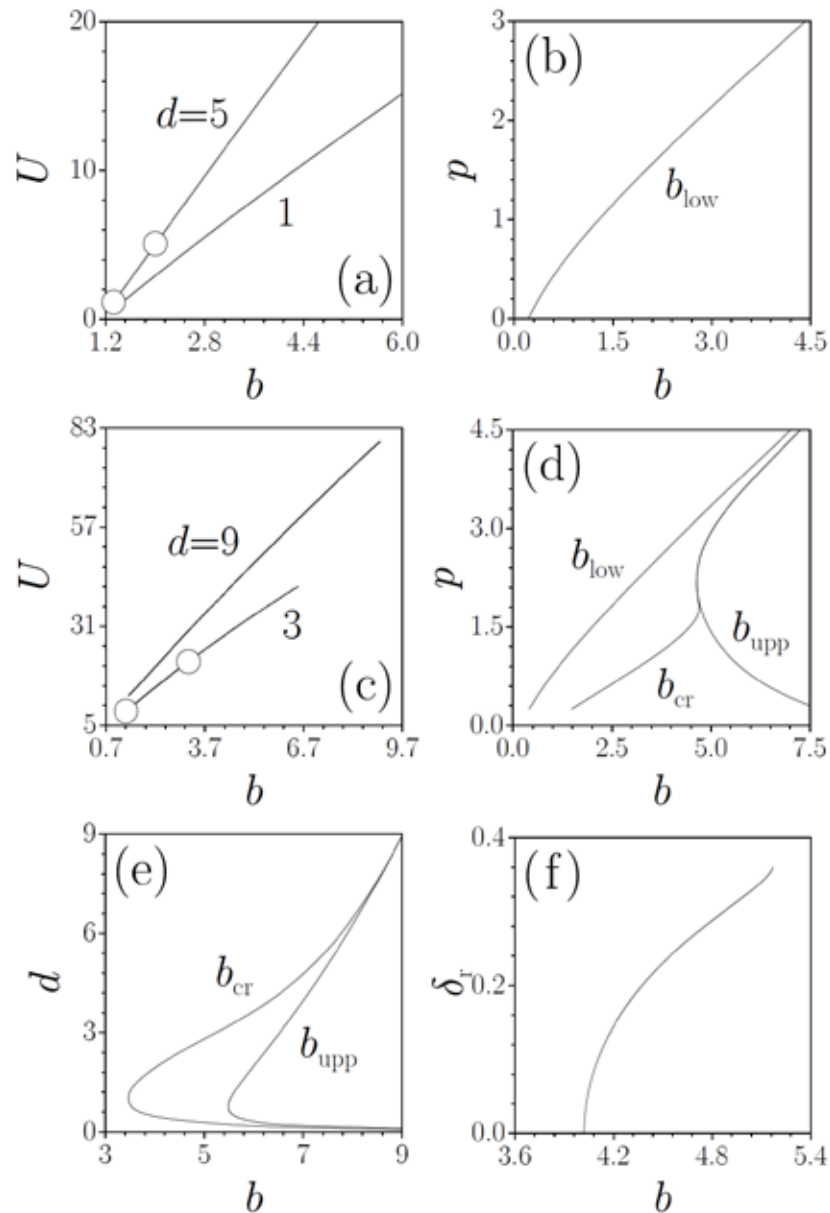


Рис. 4.24. (a) Мощность как функция постоянной распространения для фундаментальных поверхностных солитонов при  $p=1$ . (b) Область существования фундаментальных солитонов на плоскости  $(b, p)$  при  $d=1$ . (c) Зависимость  $U(b)$  для дипольных поверхностных солитонов при  $p=1$ . Области существования и устойчивости для дипольных солитонов на плоскости  $(b, p)$  при  $d=1$  (d) и на плоскости  $(b, d)$  при  $p=1$  (e). (f) Инкремент нарастания возмущения в зависимости от постоянной распространения для дипольного солитона при  $p=1.25$ ,  $d=1$ . Точки на панелях (a),(c) соответствуют солитонам на рис. 4.23.

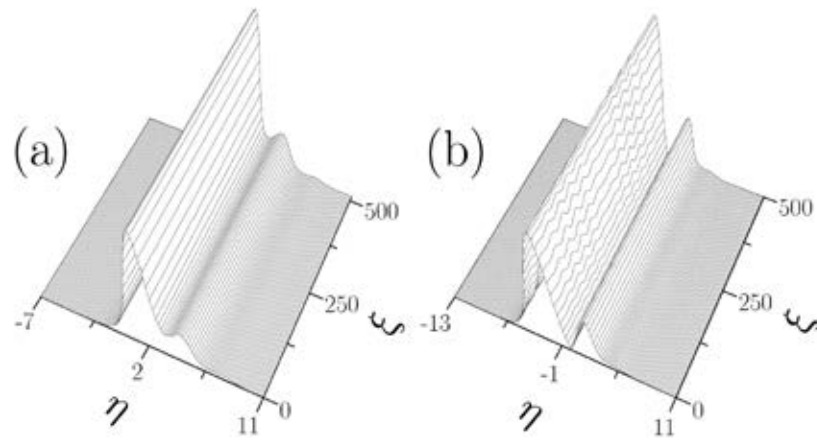


Рис. 4.25. Динамика распространения фундаментального поверхностного солитона при  $b=1.4$ ,  $p=1$ ,  $d=5$  (а) и дипольного поверхностного солитона при  $b=1.6$ ,  $p=1$ ,  $d=3$  (б). На рисунках показано распределение модуля поля. В обоих случаях исходный профиль солитона был возмущен.

Таким образом, граница раздела между периодической и однородной нелокальной средами поддерживает новые типы устойчивых мультипольных солитонов, пики интенсивности в которых находятся по разные стороны от границы раздела.

## Глава 5. Солитоны в средах с пространственно-неоднородной нелинейностью

Исследование солитонов в пространственно-неоднородных средах является одним из актуальных направлений в нелинейной оптике, а также в физике конденсатов Бозе-Эйнштейна, причем целый ряд теоретически предсказанных эффектов и типов солитонов все еще ожидает экспериментального подтверждения. Зачастую экспериментальный прогресс ограничивается достигнутым уровнем развития технологии изготовления неоднородных структур с требуемыми свойствами, в особенности для многомерных задач, где нелинейные возбуждения в обычных средах с кубичной нелинейностью оказываются неустойчивыми. До настоящего времени наиболее активно обсуждались два основных подхода к стабилизации и управлению свойствами одномерных и многомерных солитонов: использование линейных, периодических в поперечном направлении решеток [53,54], либо воздействие внешних факторов, периодически меняющихся вдоль трассы распространения, если речь идет об оптических солитонах, или во времени, в случае конденсатов [316]. Хотя нелинейность необходима для существования солитонов в линейных периодических потенциалах, основные их особенности, в сравнении с однородной средой, определяются именно свойствами линейного потенциала, такими как его зонная структура и деталями модуляции показателя преломления.

Недавно возникло важное направление в исследовании солитонов в неоднородных средах, связанное с анализом их существования, устойчивости и динамики в нелинейных решетках (см. обзор [317]). Нелинейные решетки формируются в случае периодической поперечной модуляции локального нелинейного коэффициента среды и часто сосуществуют с периодической модуляцией линейного показателя преломления. В конденсатах Бозе-Эйнштейна одномерные и двумерные нелинейные решетки могут быть наведены с использованием пространственно-неоднородных внешних полей, приводящих к изменению локальной нелинейности благодаря резонансу Фешбаха, изменяющему длину рассеяния для бинарных столкновений между атомами, которая, в свою очередь, характеризует нелинейность конденсата [318,319]. В оптических средах нелинейные решетки могут быть изготовлены как метаматериалы, включающие компоненты с различными величинами и знаками коэффициента нелинейности. Заметим, что распространение излучения в метаматериалах, в которых показатель преломления и нелинейность могут быть не только глубоко модулированы, но даже меняют знак, привлекает пристальное внимание в последние несколько лет [320,321]. Помимо этого, периодические поперечные изменения некогерентной внешней подсветки или статического поля, приложенного к фоторефрактивному кристаллу, приводят к поперечной модуляции его нелинейности [30,31]. Особенно перспективны для создания чисто не-

линейных и смешанных линейных-нелинейных решеток волоконные фотонные кристаллы, где отдельные каналы могут быть заполнены жидкостями с высокими тепловыми или электронными нелинейностями и показателями преломления, близкими к показателю преломления оболочки из плавленого кварца [8,10,322,323]. Такие образцы уже использовались для наблюдения солитонов из ограниченных запрещенных зон в среде с дефокусирующей тепловой нелинейностью [307] и целого ряда нелинейных эффектов при использовании жидкостей с фокусирующими инерционными нелинейностями [324]. Заметим также, что в процессе записи волноводов в плавленом кварце с помощью фемтосекундных лазерных импульсов при определенных уровнях мощности и скорости записи происходит не только локальное увеличение показателя преломления, но и уменьшение коэффициента нелинейности, приводящее в итоге к формированию смешанной решетки с противофазной модуляцией нелинейности и показателя преломления [325]. В рамках метода эффективных частиц наличие линейной решетки показателя преломления для солитона эквивалентно присутствию внешнего потенциала. Влияние модуляции нелинейности также учитывается в рамках этого подхода, но теперь эффективный потенциал нелинеен, и его глубина определяется не только профилем нелинейного коэффициента, но и параметрами самого солитона. Такие эффективные нелинейные потенциалы часто называются псевдопотенциалами [326].

Первые исследования солитонов в чисто нелинейных решетках были проведены в одномерных системах. В частности, в работе [327] исследовалась устойчивость и мобильность солитонов в средах с гармонической модуляцией нелинейности, и было предсказано наличие пороговой мощности, что кардинально отличается от свойств солитонов в однородной среде. Детальное исследование устойчивости [328] одномерных солитонов в решетках с полиномиальной нелинейностью вида  $[1 + R(ax)]|q|^{p-1}q$  показало, что при  $p < 5$ , солитоны, локализованные вблизи максимумов нелинейной решетки  $R(ax)$ , устойчивы, а солитоны, локализованные на ее минимумах - неустойчивы. В критическом случае  $p = 5$  устойчивые узкие солитоны возможны только на максимумах решетки, если она удовлетворяет специальному условию, в то время как в надкритическом режиме  $p > 5$  модуляция нелинейности не может стабилизировать солитоны. С использованием канонических преобразований и теории групп Ли был построен целый ряд аналитических решений уравнения Шредингера, описывающего распространение солитонов в средах с неоднородной нелинейностью [329]. При этом суть метода заключается в приведении уравнения с неоднородными коэффициентами к уравнению с однородными коэффициентами с известным аналитическим решением. Разновидности этого метода, а также прямая подстановка использовалась для нахождения точных периодических решений в различных нелинейных псевдопотенциалах [330]. В дальнейшем этот метод был обобщен на случай эволюционных уравнений, где коэффициенты зависят не

только от поперечных, но и от продольной координаты [331]. Интенсивное исследование солитонов проводилось в рамках модели Кронига-Пенни, в которой нелинейность среды остается постоянной в пределах одного слоя и меняется скачкообразно при переходе к соседнему слою [332]. Основным преимуществом такой модели является возможность построения аналитических решений с помощью сшивания профилей на разных слоях. Солитоны в нелинейных решетках рассматривались не только в локальной, но и в нелокальной нелинейной среде (см. работу автора [308] и параграф 4.6 диссертации).

Особенно интересные эффекты возникают при наличии одновременной модуляции показателя преломления и нелинейности. Впервые смешанные решетки были введены при описании эволюции бозонно-фермионной смеси атомов в одномерной оптической решетке [333], где линейная фермионная компонента, взаимодействуя с бозонной, влияла на эффективные линейные и нелинейные свойства среды для этой компоненты. В рамках этой модели предсказано существование порога возбуждения одномерных солитонов, зависящего от профиля эффективной нелинейности среды. Свойства солитонов из ограниченных запрещенных зон в смешанных решетках рассматривались в работе [334], и в пределе низких мощностей были получены аналитические решения. В работах [335,336] при построении профилей сложных мультипольных солитонов в смешанных решетках использовалась модель Кронига-Пенни, причем была проведена наглядная классификация возможных решений с их отображением на фазовой плоскости  $(q, \partial q / \partial \eta)$ . Этот подход позволяет аналитически построить не только светлые [335], но и темные солитоны [336]. В работе [337] упомянута возможность конкуренции между линейной и нелинейной частью потенциала при рассмотрении влияния слабой синусоидальной модуляции показателя преломления и нелинейности на динамику светлых солитонов. Автором данной диссертации было впервые показано, что в среде с достаточно глубокой противофазной модуляцией показателя преломления и нелинейности конкуренция рефракции и нелинейного самовоздействия приводит к кардинальным изменениям профилей и устойчивости солитонов по мере роста их мощности [338]. В частности, профиль интенсивности нечетных солитонов может приобретать двугорбую структуру, сопровождаемую потерей устойчивости, а профиль четных - сливаться в один устойчивый пучок. При этом смена устойчивости солитона сопровождается кардинальным повышением его подвижности, так что в определенном диапазоне параметров солитоны в смешанных решетках могут двигаться практически без излучения. Описанию этих свойств посвящен первый параграф данной главы. Впоследствии была построена полуаналитическая теория, использующая функцию Мельникова, которая позволяет предсказать стационарные положения и устойчивость солитонов в смешанных линейных-нелинейных решетках, профили которых описываются комбинацией

произвольного числа тригонометрических функций [339,340]. Солитоны в смешанных решетках с дефокусирующей нелинейностью анализировались в работе [341]. Заметим, что, помимо периодических законов поперечной модуляции нелинейности, рассматривались также среды со случайными профилями нелинейного коэффициента. При этом в основном изучалось влияние характеристик случайного псевдопотенциала на мобильность солитонов [342]. Наконец, анализ смешанных решеток производился в рамках упрощенных дискретных моделей, где модуляция нелинейности приводит к появлению нетривиальных слагаемых в эволюционном уравнении, описывающем туннелирование света между соседними волноводами [343-346]. В дискретных моделях был получен целый ряд новых решений, включая солитоны на пьедестале постоянной интенсивности, кинки с осциллирующими хвостами и т.п.

Фундаментальные солитоны в смешанных решетках исследовались также в двумерном случае при описании распространения излучения в нелинейных волоконных фотонных кристаллах с небольшой глубиной модуляции линейного показателя преломления. Устойчивость нелинейных мод достигается, в основном, за счет модуляции линейного показателя преломления, так же, как и для обычных двумерных солитонов в линейных решетках [347]. Уже доступны первые экспериментальные данные по формированию пространственных солитонов в волоконных фотонных кристаллах [307,324]. Отметим, что солитоны могут формироваться в фотонных кристаллах с дефектами, в которых эффективный показатель преломления в центральной области повышен, из-за чего в ней формируется линейная дефектная мода. Трансформация этих мод за счет нелинейности материала фотонного кристалла была исследована в работах [348-350], причем были получены не только фундаментальные солитоны, но также мультипольные и вихревые решения. Последние, однако, оказываются неустойчивыми в кристалле с дефектом, поскольку с ростом мощности свет концентрируется в дефектной области, где кристалл практически однороден, и перестает чувствовать модуляцию показателя преломления. Автором данной диссертации были впервые получены устойчивые вихревые солитоны в двумерных смешанных решетках с противофазной модуляцией показателя преломления и нелинейности [351], свойства которых обсуждаются во втором параграфе этой главы. Как и в случае одномерных солитонов, увеличение мощности вихревого солитона приводит к трансформации профиля и смене его устойчивости в смешанной решетке. Модуляция нелинейности обуславливает сосуществование нескольких ветвей вихревых решений при одинаковых значениях постоянной распространения (мультистабильность). Солитонные комплексы и вихревые солитоны исследовались также в фотонных кристаллах без дефектов [352]. Обнаружена сложная картина бифуркаций различных семейств вихревых солитонов, из которых только простейшие оказываются устойчивыми. Заслуживает упоминания возможность использо-

вания волоконных фотонных кристаллов с двумя дефектными каналами для конструирования оптических переключателей, где скорость туннелирования света между дефектами определяется расстоянием между ними и входной мощностью [353]. Различные типы солитонов в двумерной дискретной модели, описывающей распространение излучения в смешанных решетках, были найдены в работе [354], причем авторы показали, что в двумерных решетках подвижность солитонов остается ограниченной, в отличие от одномерного случая [338].

Одной из наиболее сложных задач в теории солитонов в нелинейных решетках является стабилизация двумерных солитонов за счет модуляции лишь нелинейного коэффициента в кубичной среде, без привлечения дополнительных линейных потенциалов. Возможность такой стабилизации не очевидна априори, поскольку в однородной кубичной среде двумерные солитоны всегда неустойчивы [118]. Более того, первоначальные исследования показали [355], что гладкая квазиодномерная модуляция нелинейного коэффициента в уравнении Шредингера не может на практике стабилизировать двумерные солитоны, поскольку стабилизация хоть и достигается формально, но при таких жестких ограничениях на профиль решетки, и для настолько узких и высокоинтенсивных солитонов, что этот результат представляет лишь чисто математический интерес. Последующие попытки стабилизировать солитоны в двумерных нелинейных синусоидальных или бесселевых решетках также не увенчались успехом. Однако, автором диссертации было впервые доказано, что устойчивость фундаментальных солитонов в нелинейных решетках все таки возможна, при условии, что нелинейный коэффициент в решетке меняется не плавно, а скачкообразно при переходе между различными областями [356]. Устойчивое распространение солитонов было продемонстрировано в периодическом массиве нелинейных цилиндров, внедренных в линейную среду - при этом линейный показатель преломления был всюду одинаков. Оказалось, что диапазон мощностей, в котором солитоны могут быть устойчивы, расширяется при увеличении периода нелинейной решетки. Ступенчатая модуляция кубичной нелинейности, достаточная для стабилизации фундаментальных солитонов, тем не менее, не может стабилизировать мультиполи и вихревые решения. Однако, последние могут быть устойчивы в чисто нелинейных решетках при наличии насыщения нелинейности. Описанию свойств солитонов в двумерных нелинейных решетках посвящен третий параграф этой главы. Авторами [357] рассмотрено распространение пробного пучка в резонансной трехуровневой среде в режиме самоиндуцированной прозрачности, при наличии контрольного пучка. В этой системе пробный пучок распространяется, испытывая квазиодномерную модуляцию нелинейности, зависящую от параметра отстройки от резонанса и интенсивности контрольного пучка. Наконец, существование устойчивых двумерных

пространственно-временных солитонов было предсказано в среде с резкой пространственной вариацией нелинейности и дисперсии групповых скоростей [358].

Обобщение концепции солитонов в нелинейных решетках на случай взаимодействия нескольких полей также представляется весьма интересным, поскольку векторные взаимодействия могут привести к формированию совершенно новых типов решений или к стабилизации солитонных структур, которые являются неустойчивыми в скалярном случае. В работе [359] были исследованы векторные солитоны в конденсатах Бозе-Эйнштейна с пространственно-неоднородной синусоидальной нелинейностью. Основное внимание уделено светлым солитонам с одинаковой симметрией в компонентах, хотя была упомянута возможность формирования комплексов с четными и нечетными компонентами, а также комплексов связанных светлых и темных солитонов. Существование и устойчивость векторных солитонов с различными симметриями компонент поля в нелинейных решетках было впервые изучено автором диссертации и обсуждается в четвертом параграфе этой главы [360]. В частности, будет показано, что четные солитоны, которые неустойчивы в нелинейных решетках в скалярном случае, могут быть стабилизированы за счет кроссмодуляционного взаимодействия с устойчивыми фундаментальными или мультипольными компонентами. В четвертом параграфе также обсуждается влияние интенсивности кроссмодуляционного взаимодействия на области устойчивости векторных солитонов. Впоследствии профили векторных солитонов в различных нелинейных решетках были получены аналитически, с использованием теории групп Ли [361]. Другой подход к построению векторных солитонов в нелинейных решетках, основанный на преобразовании системы связанных уравнений Шредингера с неоднородными коэффициентами в систему с однородными коэффициентами, был использован в работе [362]. Динамика взаимодействия векторных солитонов была исследована в [363]. Устойчивость двумерных векторных солитонов в волоконных фотонных кристаллах предсказана в [364].

Помимо периодических профилей, интерес представляют и другие законы модуляции нелинейности, поскольку они могут приводить к существованию солитонов с совершенно неожиданными свойствами. Так, в соответствии с общепринятым мнением, существование светлых солитонов в среде с дефокусирующей нелинейностью полагалось невозможным при отсутствии модуляции линейного показателя преломления. В пятом параграфе этой главы показано, что существование светлых солитонов в дефокусирующей среде возможно, если коэффициент дефокусирующей нелинейности достаточно быстро возрастает при удалении от центра среды, как было предсказано автором диссертации [365]. Этот, на первый взгляд, странный факт связан с невозможностью линеаризации эволюционного уравнения на малоинтенсивных хвостах солитона в среде с растущей на периферии нелинейностью. Именно в этом состоит радикальное отличие



от среды с однородной нелинейностью, где дефокусировка приводит к отрицательным постоянным распространения, а требование локализации солитона предсказывает осциллирующие, а не экспоненциально затухающие хвосты при линеаризации уравнения. В таких профилях нелинейности возможно существование одномерных, двумерных, и даже трехмерных солитонов с алгебраическими, экспоненциальными, и даже суперэкспоненциальными асимптотиками, в зависимости от конкретного закона модуляции. При этом для определенных профилей нелинейности удастся получить аналитические решения.

Таким образом, в основу данной главы вошли результаты оригинальных исследований одномерных и двумерных солитонов в периодических смешанных линейных-нелинейных решетках, фундаментальных и мультипольных солитонов в чисто нелинейных двумерных решетках, одномерных векторных солитонов в периодических решетках, а также одно- и многомерных светлых солитонов в средах с нарастающей к периферии дефокусирующей нелинейностью, опубликованные в работах [317, 338, 351, 356, 360, 365].

### **§5.1. Устойчивость, преобразование профилей и дрейф одномерных солитонов в смешанных линейных-нелинейных решетках**

Модуляция нелинейности среды может существенно повлиять на траекторию распространения пучка. При этом влияние пространственной неоднородности нелинейности будет тем сильнее, чем выше интенсивность пучка, в то время как при малых интенсивностях неоднородность нелинейности не окажет существенного воздействия на динамику распространения. В этом состоит наиболее существенное отличие между псевдопотенциалами, созданными модуляцией нелинейности, от обычных потенциалов, созданных модуляцией показателя преломления, поскольку последние действуют даже на линейные пучки. В среде с пространственно-неоднородной нелинейностью оптическое излучение будет затягиваться в ту область, где нелинейный коэффициент выше, подобно тому, как в линейных решетках свет концентрируется в областях с повышенным показателем преломления. Наиболее интересная ситуация возможна в том случае, когда линейная и нелинейная решетки конкурируют. Это возможно когда линейная и нелинейная решетки, действуя по отдельности, стимулируют концентрацию света в разных пространственных областях. Данный параграф посвящен анализу свойств и подвижности солитонов в противофазных, конкурирующих линейной и нелинейной решетках [338]. Подобные решетки могут быть изготовлены при записи массивов волноводов фемтосекундными лазерными импульсами или при заполнении каналов фотонного кристалла специально подобранными нелинейными жидкостями.

Для описания распространения светового пучка в фокусирующей среде с противofазной периодической модуляцией нелинейности и показателя преломления используем кубическое уравнение Шредингера для безразмерной амплитуды поля  $q$  :

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - [1 - \sigma R(\eta)] |q|^2 q - pR(\eta)q. \quad (5.1)$$

Все нормировки совпадают с таковыми для уравнения (1.1). Параметр  $\sigma$  описывает глубину модуляции нелинейности (в дальнейшем в основном рассматривается случай  $\sigma < 1$ , поскольку изготовление непрерывных решеток, где нелинейность меняла бы знак в определенной области пространства, представляется сложным при существующих технологиях). Профиль решетки показателя преломления описывается функцией  $R(\eta) = \cos^2(\Omega\eta)$ . Нелинейный коэффициент  $\gamma(\eta) = 1 - \sigma R(\eta)$  приобретает максимальное значение в точках, где линейный показатель преломления минимален. Мы ищем солитонные решения в виде  $q = w(\eta) \exp(ib\xi)$ , которые характеризуются постоянной распространения  $b$  и мощностью  $U$ . При подстановке возмущенных профилей солитонов  $q = [w(\eta) + u(\eta) \exp(\delta\xi) + iv(\eta) \exp(\delta\xi)] \exp(ib\xi)$  в уравнение (5.1), получаем при линеаризации задачу на собственные значения и собственные функции

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v}{d\eta^2} + bv - (1 - \sigma R)vw^2 - pRv, \\ \delta v &= +\frac{1}{2} \frac{d^2 u}{d\eta^2} - bu + 3(1 - \sigma R)uw^2 + pRu, \end{aligned} \quad (5.2)$$

которая решалась численно. Напомним, что решение неустойчиво, если действительная часть  $\delta_r$  инкремента  $\delta = \delta_r + i\delta_i$  положительна, и устойчиво, если она отрицательна или равна нулю. Далее рассматриваются достаточно глубокие линейные решетки с  $p = 4$  и  $\Omega = 2$ , в которых подвижность хорошо локализованных солитонов с шириной порядка нескольких периодов решетки сильно ограничена в отсутствие модуляции нелинейности. Основными варьируемыми параметрами являются глубина модуляции нелинейности  $\sigma$  и мощность  $U$ .

Решетки с пространственно-неоднородной нелинейностью поддерживают нечетные, четные и мультипольные солитоны, примеры профилей которых приведены на рис. 5.1. Нечетные солитоны характеризуются одним глобальным максимумом интенсивности и переходят в блоховские волны в пределе малых амплитуд (т.е. они существуют при  $b \geq b_{cl}$ , где  $b_{cl}$  - нижняя граница полубесконечной запрещенной зоны). Мощность таких солитонов растет с увеличением постоянной распространения только при

$\sigma \leq 0.8$ . Для  $\sigma > 0.8$  эффекты самофокусировки в пространственно-неоднородном профиле нелинейности становятся доминирующими по сравнению с линейной рефракцией, и при увеличении мощности поле солитона начинает концентрироваться в областях

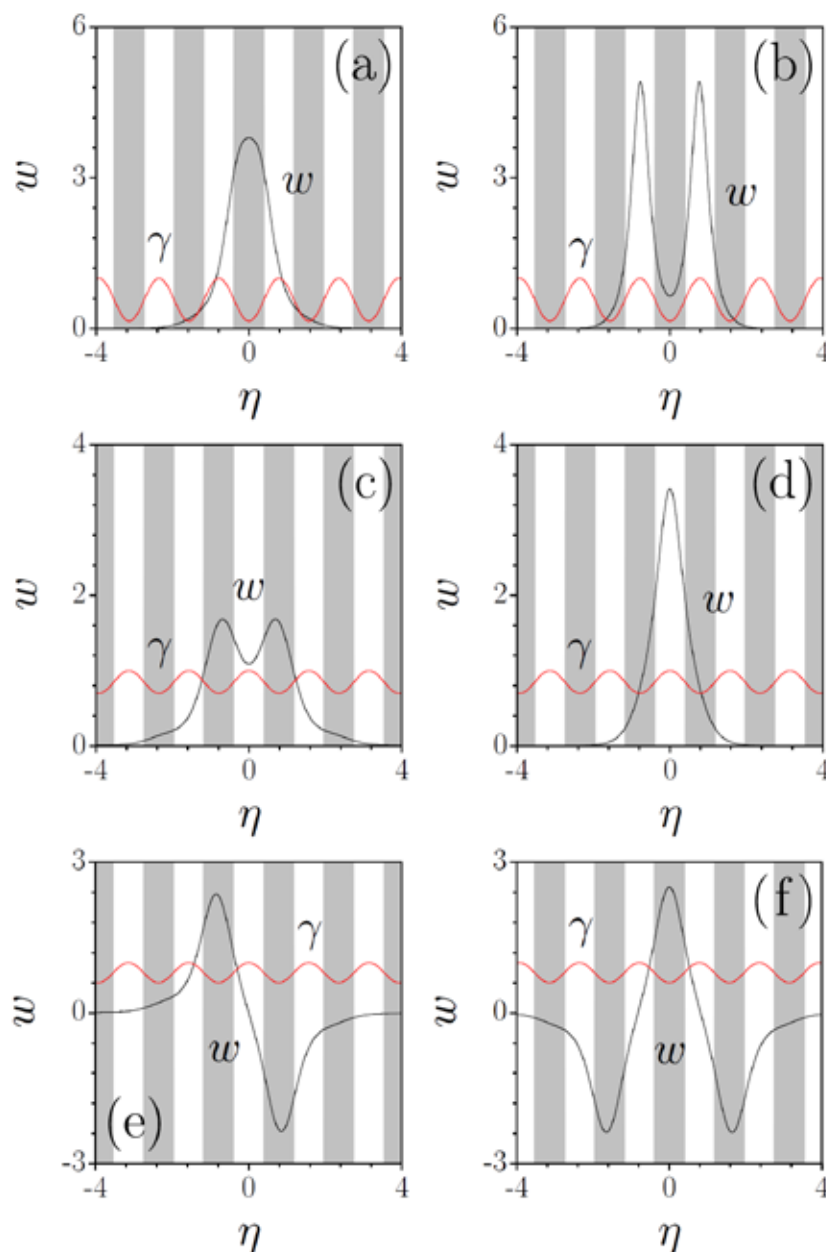


Рис. 5.1. Профили нечетных солитонов при  $\sigma=0.85$  и (a)  $b=5.5$ , (b)  $b=12$ . Профили четных солитонов при  $\sigma=0.3$  и (c)  $b=3.7$ , (d)  $b=7$ . Профили диполя (e) и триполя (f) при  $b=4$ ,  $\sigma=0.4$ . В серых областях  $R \geq 1/2$ , в то время как в белых областях  $R < 1/2$ . Красные кривые показывают профиль нелинейности  $\gamma = 1 - \sigma R$ .

с повышенной нелинейностью. Этот процесс сопровождается преобразованием одногорбого распределения интенсивности [рис. 5.1(a)] в двугорбое [рис. 5.1(b)], с максимум-

мами в окрестности локальных минимумов линейной решетки  $R$ . При этом зависимость  $U(b)$  становится немонотонной [рис. 5.2(a)]. При таких значениях  $\sigma$  четные солитоны, которые при малых уровнях мощности обладают двугорбым распределением интенсивности [рис. 5.1(c)], наоборот, преобразуются в солитоны с единственным пиком между двумя максимумами линейной решетки  $R$  [рис. 5.1(d)], причем для них зависимость мощности от постоянной распространения тоже оказывается немонотонной [рис. 5.2(b)]. По мере роста глубины модуляции нелинейности  $\sigma$  преобразования профилей происходят при все меньших значениях постоянной распространения. Для дипольных [рис. 5.1(e)] и трипольных [рис. 5.1(f)] солитонов при  $\sigma \neq 0$  существует как нижняя  $b_{cl}$ , так и верхняя  $b_{cu}$  отсечки по постоянной распространения, в отличие от среды с модуляцией лишь показателя преломления, где верхней отсечки не существует. Касательная к зависимости  $U(b)$  для мультипольных солитонов становится вертикальной в обеих отсечках  $b = b_{cl}, b_{cu}$ , при этом вблизи верхней отсечки пики в профиле солитона смещаются на минимумы линейной решетки. Область существования дипольных солитонов сужается с ростом глубины модуляции нелинейности, и они перестают существовать при  $\sigma \geq 0.847$  [рис. 5.2(e)]. Область существования трипольных солитонов еще уже - они могут быть найдены лишь при  $\sigma < 0.762$ .

Система с противофазной модуляцией показателя преломления и нелинейности относится к достаточно редкому классу систем, где критерий Вахитова-Колоколова непригоден для характеристики устойчивости простейших нечетных солитонов. Например, несмотря на то, что при  $\sigma < 0.8$  производная  $dU/db > 0$  для всего семейства нечетных солитонов, такие солитоны становятся неустойчивыми при превышении постоянной распространения некоторого критического значения  $b_0$  [см. типичную зависимость  $\delta_r(b)$  на рис. 5.2(d)]. Эта неустойчивость приводит к дрейфу центра солитона и его последующему захвату в области, где функция  $R$  принимает минимальное значение. Ширина области устойчивости  $b_{cl} \leq b \leq b_0$  для нечетных солитонов уменьшается с ростом  $\sigma$ , причем область устойчивости может даже полностью исчезнуть [рис. 5.2(c)]. Четные солитоны, наоборот, становятся устойчивыми при  $b \geq b_0$  [рис. 5.2(d)] и ширина области их устойчивости увеличивается с ростом  $\sigma$  таким образом, что все семейство четных солитонов становится устойчивым при том же  $\sigma$ , когда семейство нечетных солитонов становится неустойчивым. Во всех случаях  $b_e \geq b_0$ , т.е. существует диапазон постоянных распространения, где оба семейства решений одновременно неустойчивы [рис. 5.2(c)]. Мультипольные солитоны также могут быть устойчивы в среде с модуляцией нелинейности, хотя область их устойчивости постепенно сужается с ростом  $\sigma$  [рис. 5.2(e)], в основном из-за уширения области неустойчивости вблизи верхней отсечки [см. рис. 5.2(f) с типичной зависимостью инкремента возмущения от постоянной распространения для дипольных солитонов].

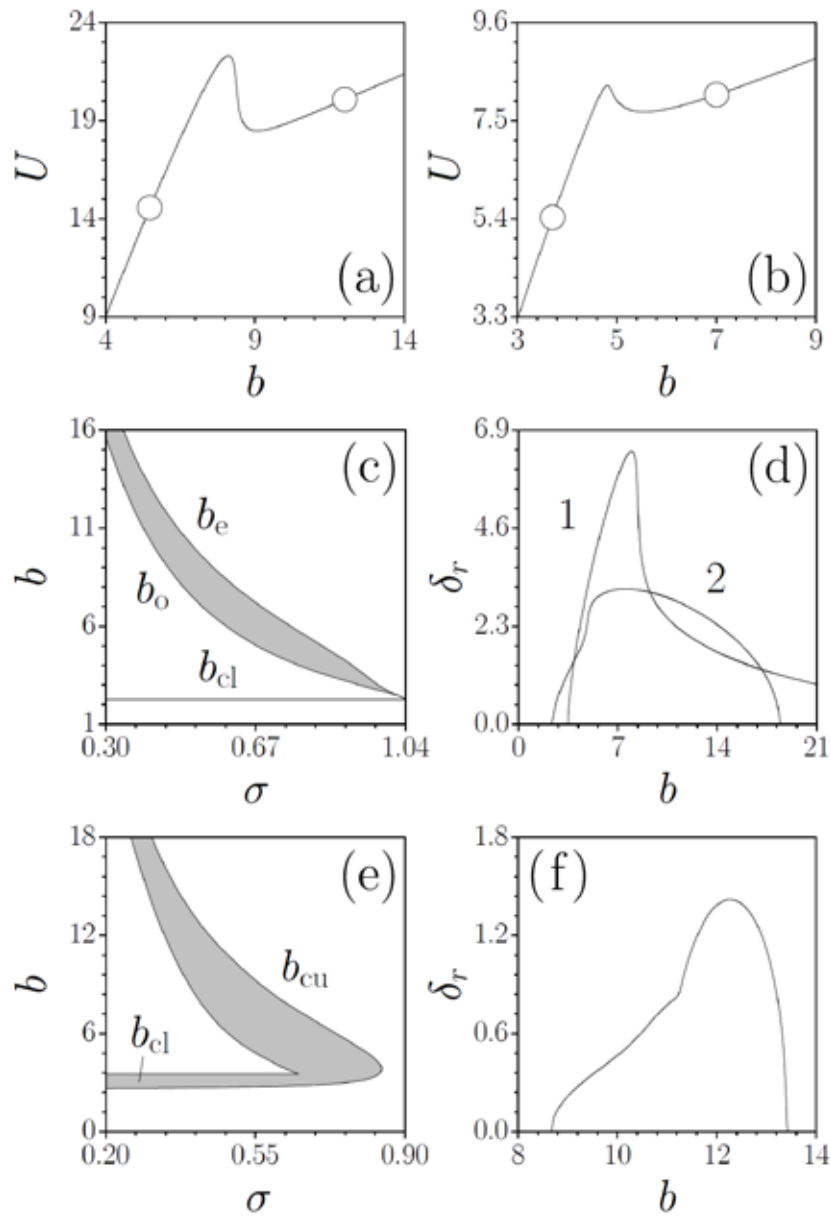


Рис. 5.2. Зависимости  $U(b)$  для (а) нечетного солитона при  $\sigma = 0.85$  и (б) четного солитона при  $\sigma = 0.3$ . Точки соответствуют солитонам на рис. 5.1(а)-5.1(д). (с) Критические значения  $b$  для стабилизации нечетных и четных солитонов как функции  $\sigma$ . В серой области как четный, так и нечетный солитоны неустойчивы. (д) Зависимость  $\delta_r(b)$  для нечетных солитонов при  $\sigma = 0.85$  (кривая 1) и для нечетных солитонов при  $\sigma = 0.3$  (кривая 2). (е) Области неустойчивости (закрашены серым) и устойчивости (белая области внутри серой) на плоскости  $(\sigma, b)$  для дипольных солитонов. (ф) Зависимость  $\delta_r(b)$  при  $\sigma = 0.4$  для дипольных солитонов.

Стационарные солитоны, обсуждавшиеся выше, могут быть возбуждены с использованием гауссовских пучков  $A \exp(-\eta^2)$ , однако динамика возбуждения может существенно отличаться от динамики в линейных решетках. Если центр пучка совпадает с

максимумом функции  $R$  и  $\sigma < 0.8$ , то при малой мощности формируется обычный нечетный солитон. Если же мощность слишком велика, то возбужденный неустойчивый нечетный солитон покидает исходный канал и движется вдоль решетки до тех пор, пока он не будет захвачен в области между какими-то двумя локальными максимумами  $R$  и не сформирует устойчивый одногорбый четный солитон. Для еще больших уровней мощности можно даже возбудить два разлетающихся солитона.

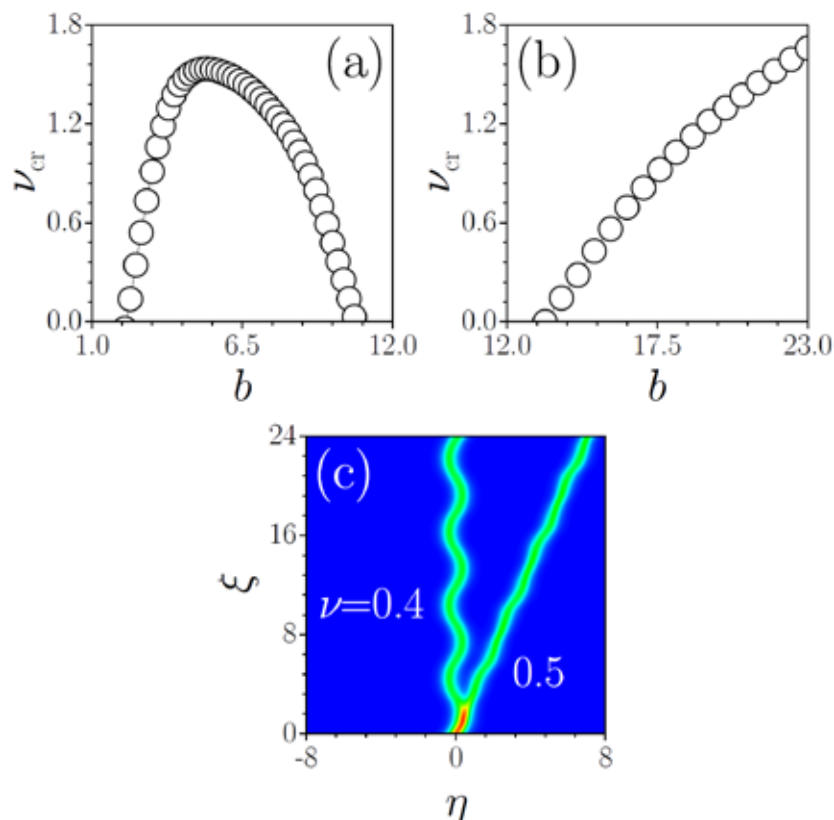


Рис. 5.3. Критический угол как функция постоянной распространения для (а) нечетных и (б) четных солитонов. (с) Динамика распространения нечетного солитона с  $b = 9.8$ , запущенного в решетку под разными углами. Распределения модуля поля для разных углов наложены друг на друга. Во всех случаях  $\sigma = 0.4$ .

Подвижность солитонов в смешанных решетках напрямую связана с их устойчивостью. Для приведения солитона в движение мы умножаем исходное распределение поля на  $\exp(i\nu\eta)$ . В обычных решетках с  $\sigma = 0$  существует критическое значение угла  $\nu_{cr}$ , при котором солитон покидает исходный канал, и это критическое значение монотонно растет с увеличением мощности  $U$  или постоянной распространения (см. главу 1). Оказывается, что в решетках с модуляцией нелинейности критический угол является немонотонной функцией  $b$  [рис. 5.3(a)], причем  $\nu_{cr}$  становится нулевым не только в точке  $b = b_{cl}$  (что естественно), но и в точке  $b = b_o$ , где нечетный солитон становится неустойчи-

вым. В этой области неустойчивости  $b > b_0$  даже малый исходный угол достаточен для приведения солитона в движение, причем такие солитоны практически не теряют мощность на излучение. Подвижность солитонов повышена даже в области устойчивости  $b < b_0$ , когда угол превосходит критическое значение  $\nu_{cr}$ , и захвата движущегося солитона в соседних каналах не происходит [рис. 5.3(с)]. Похожий эффект наблюдается также и для четных солитонов - они становятся подвижны при  $b < b_e$ , а  $\nu_{cr}$  монотонно растет с увеличением  $b$  при  $b > b_e$  [рис. 5.3(б)].

Таким образом, модуляция нелинейности может кардинально уменьшить потери на излучение и увеличить подвижность солитонов даже при достаточно глубокой модуляции линейного показателя преломления. Модуляция нелинейности приводит также к необычным преобразованиям профилей солитонов по мере роста их мощности.

## §5.2. Вихревые солитоны в смешанных линейных-нелинейных решетках

Простейшие вихревые солитоны в решетках с периодической модуляцией показателя преломления характеризуются наличием четырех основных максимумов интенсивности и нетривиальными распределениями фазы. Глубокая модуляция интенсивности обеспечивает устойчивость этих решений в фокусирующей нелинейной среде при достаточно высоких уровнях мощности. С другой стороны, наличие периодической модуляции нелинейности, конкурирующей с линейной решеткой, может привести к значительным изменениям профилей солитонов при больших уровнях мощности. Анализ возможности существования устойчивых вихревых солитонов в смешанных решетках и преобразованиям их профилей и посвящен настоящий параграф [351].

Для описания динамики формирования вихревых солитонов в фокусирующей среде с противофазной модуляцией нелинейности и линейного показателя преломления используем двумерное обобщение модели (5.1):

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - [1 - \sigma R(\eta, \zeta)] |q|^2 q - p R(\eta, \zeta) q. \quad (5.3)$$

Здесь мы рассматриваем гармонический линейный потенциал, описываемый функцией  $R(\eta, \zeta) = \sin^2(\Omega\eta) \sin^2(\Omega\zeta)$ . Как и ранее, нелинейный коэффициент  $1 - \sigma R$  принимает максимальные значения в точках, где глубина линейной решетки минимальна. Профили вихревых солитонов ищем в виде  $q = (w_r + iw_i) \exp(ib\xi)$ , где  $w_r$  и  $w_i$  - действительная и мнимая части поля соответственно. Топологический заряд определяется циркуляцией градиента фазы  $\arctan(w_i / w_r)$  по замкнутому контуру, окружающему фазовую дислока-

цию. В этом параграфе мы рассмотрим лишь те вихревые солитоны, у которых дислокация расположена между четырьмя ближайшими локальными максимумами профиля показателя преломления  $R(\eta, \zeta)$  и топологический заряд  $m = 1$ . Зафиксируем глубину  $p = 8$  и частоту  $\Omega = 2$  решетки и исследуем влияние глубины модуляции нелинейности  $\sigma$  на свойства солитонов. Анализ устойчивости производится с помощью подстановки  $q = [w_r + iw_i + u \exp(\delta\xi) + iv \exp(\delta\xi)] \exp(ib\xi)$  поля возмущенного солитона в уравнение (5.3) и его линеаризации, что приводит к задаче на собственные значения и собственные функции:

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right) + bv - (1 - \sigma R)v(w_r^2 + 3w_i^2) - 2(1 - \sigma R)w_r w_i u - pRv, \\ \delta v &= +\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) - bu + (1 - \sigma R)u(3w_r^2 + w_i^2) + 2(1 - \sigma R)w_r w_i v + pRu. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Профили вихревых солитонов в смешанной решетке приведены на рис. 5.4. При малых и промежуточных уровнях мощности, когда влияние модуляции нелинейности еще не так сильно, в распределении модуля поля четко видны четыре максимума, положения которых практически совпадают с локальными максимумами линейной решетки [рис. 5.4(а)]. Фаза поля изменяется на  $2\pi$  при обходе вдоль замкнутого контура, окружающего дислокацию в точке  $\eta, \zeta = 0$ , при этом фаза нарастает нелинейно - в областях, где интенсивность поля максимальна, изменения фазы более медленные. Вихревые солитоны существуют при мощностях, превышающих некоторое пороговое значение, и для постоянных распространения, превосходящих отсечку  $b_{co}$ . Мощность вихревого солитона является немонотонной функцией постоянной распространения  $b$  [рис. 5.5(а)]. С ростом глубины линейной решетки  $p$  отсечка  $b_{co}$  быстро возрастает, а пороговая мощность уменьшается. Увеличение глубины модуляции нелинейности  $\sigma$  приводит к росту пороговой мощности, несмотря на то, что вблизи отсечки амплитуда вихревого солитона уменьшается (хотя и не обращается в ноль, как это бы случилось с волной, ответвляющейся от линейных блоховских мод решетки), а сам он занимает несколько каналов решетки.

Наращение мощности приводит к более заметной локализации отдельных пиков в профиле солитона. Если глубина модуляции нелинейности недостаточно велика ( $\sigma < 0.5$  при  $p = 8$ ), то четыре пика, формирующие вихревой солитон, всегда остаются в окрестности максимумов линейной решетки. Однако при  $\sigma > 0.5$  конкуренция между линейной и нелинейной решетками может привести к существенным искажениям профилей и концентрации поля в областях с повышенной нелинейностью [тенденция к сдвигу пиков интенсивности в области с повышенной нелинейностью видна на рис.



5.4(b)]. Трансформации профиля сопровождаются уменьшением мощности солитона для постоянных распространения, превышающих некоторое критическое значение  $b_{cr}$  [рис. 5.5(a)]. Последнее означает, что модуляция нелинейности приводит к ограничению максимальной мощности вихревого решения. В диапазоне глубин модуляции  $0.5 < \sigma < 0.9$  максимальная мощность слабо возрастает с увеличением  $\sigma$ . Критическое значение постоянной распространения  $b_{cr}$  быстро уменьшается с ростом глубины модуляции нелинейности [рис. 5.5(c)], и при  $\sigma > 1.3$  мощность вихревого солитона начинает падать с ростом постоянной распространения прямо от отсечки. Нужно, однако, учитывать, что значения  $\sigma > 1$  соответствуют переходу к дефокусировке вблизи максимумов показателя преломления, что достаточно тяжело реализовать на практике.

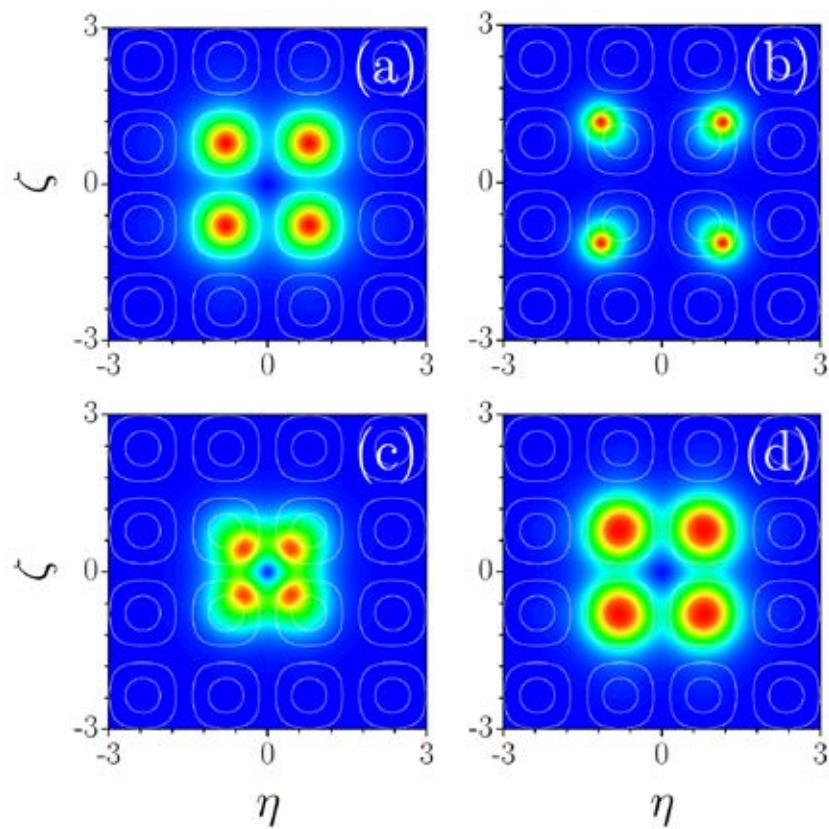


Рис. 5.4. Распределения модуля поля для вихревых солитонов при (a)  $b = 5$ ,  $\sigma = 0.7$ , (b)  $b = 9.6$ ,  $\sigma = 0.7$ , (c)  $b = 6$ ,  $\sigma = 1$ , нижняя ветвь, (d)  $b = 6$ ,  $\sigma = 1$ , верхняя ветвь. Белые линии указывают положения максимумов линейной решетки.

При  $\sigma > 0.9$  и  $b > b_{cr}$  четыре пика в профиле вихревого солитона начинают сливаться в слабо модулированную кольцевую структуру, т.е. в этом случае высокоинтенсивные солитоны скорее сжимаются [рис. 5.4(c)], чем растягиваются, как это происходило при меньших глубинах модуляции  $\sigma$  [рис. 5.4(b)]. Интересно, что при  $\sigma > 0.9$  и  $b > b_{cr}$  удается найти еще одну ветвь вихревых решений, которая выглядит как продолжение основ-

ной ветви, начинающейся от отсечки, в область еще больших мощностей [рис. 5.5(b)]. Следовательно, в смешанной решетке сосуществуют два типа вихревых солитонов с единичным топологическим зарядом. Распределения модуля поля для вихревых солитонов с нижней и верхней ветвью практически совпадают в точке  $b = b_{cr}$ , но начинают

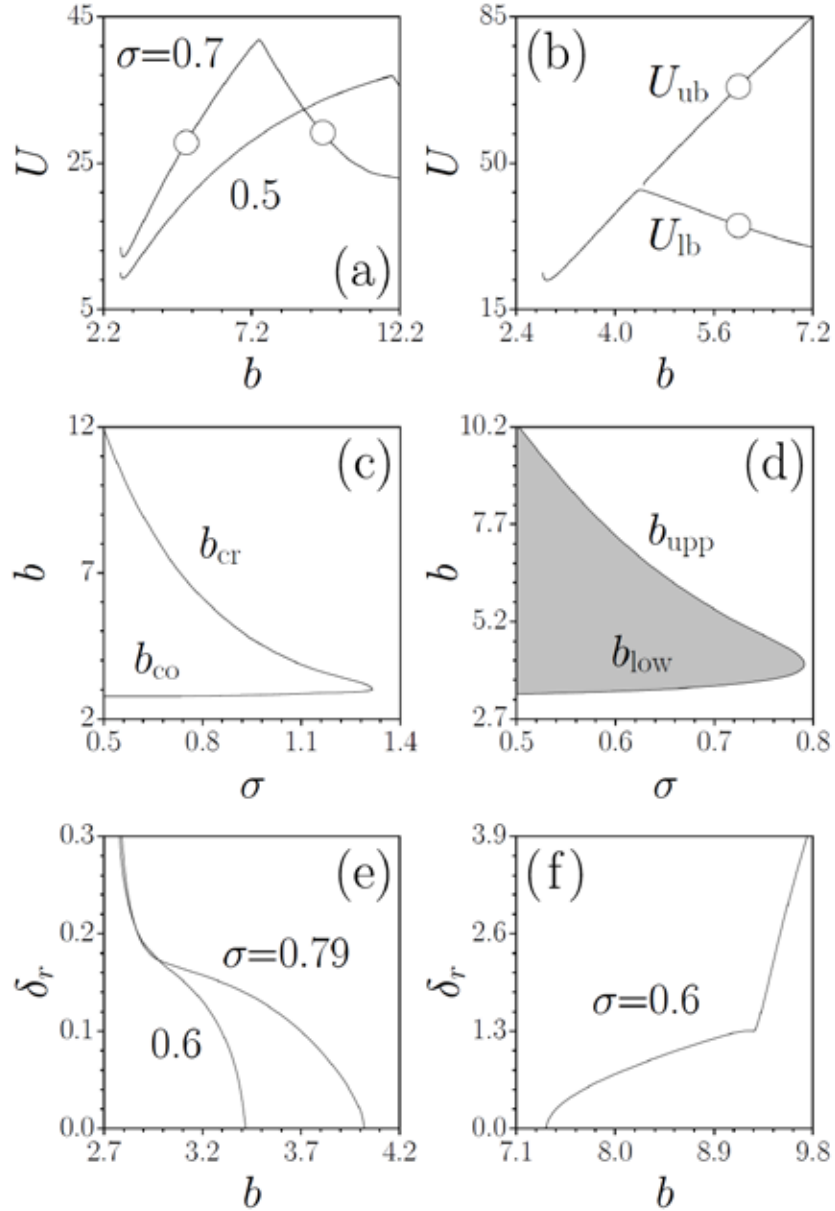


Рис. 5.5. Мощность как функция постоянной распространения при (a)  $\sigma = 0.5, 0.7$  и (b)  $\sigma = 1$ . Точки на панели (a) соответствуют солитонам на рис. 5.4(a) и 5.4(b), в то время как точки на панели (b) соответствуют солитонами на рис. 5.4(c) и 5.4(d). (c) Отсечка и критическая постоянная распространения в зависимости от  $\sigma$ . (d) Область устойчивости вихревых солитонов (серая) на плоскости  $(\sigma, b)$ . Зависимости  $\delta_r(b)$  в области вблизи отсечки (e) и для значений  $b$  вблизи точки изгиба зависимости  $U(b)$  (f).

заметно различаться при удалении от точки "ветвления", поскольку отдельные пики в солитонах с верхней ветви начинают расширяться [рис. 5.4(d)], а не сливаются в кольцевую структуру, как происходит на нижней ветви [сравните профили на рис. 5.4(c) и 5.4(d), полученные при одинаковых постоянных распространения].

Поперечная модуляция нелинейности качественно влияет на устойчивость вихревых солитонов. Как и в линейных решетках, характерно наличие узкой области неустойчивости вблизи отсечки [рис. 5.5(e)]. Однако при наличии модуляции нелинейности появляется еще одна область неустойчивости, связанная с преобразованиями профилей решений. Инкремент нарастания неустойчивости может стать ненулевым уже для  $b < b_{cr}$ , т.е. до точки смены характера зависимости  $U(b)$  [рис. 5.5(f)]. При этом именно в точке  $b = b_{cr}$  наклон зависимости  $\delta_r(b)$  резко возрастает и осцилляторная неустойчивость сменяется экспоненциальной неустойчивостью. Таким образом, вихревые солитоны в смешанных решетках оказываются устойчивыми в ограниченном диапазоне постоянных распространения  $b_{low} \leq b \leq b_{upp}$  [рис. 5.5(d)], причем поскольку постоянная распространения  $b_{low}$ , соответствующая нижней границе области устойчивости, увеличивается с ростом  $\sigma$ , а постоянная распространения для верхней границы области неустойчивости  $b_{upp}$  уменьшается, то область устойчивости исчезает при  $\sigma \approx 0.79$ . Следовательно, простейшие вихревые солитоны могут быть устойчивы в смешанных решетках, только если глубина модуляции нелинейности не превышает максимального значения, которое растет с ростом глубины линейной решетки  $p$ . Заметим, что солитоны с верхней ветви рис. 5.5(b) всегда неустойчивы. Прямое распространение возмущенных вихревых солитонов подтверждает результаты линейного анализа устойчивости. Низкоамплитудные солитоны при  $b < b_{low}$  разрушаются в результате увеличивающихся осцилляций пиков интенсивности и, как правило, преобразуются в фундаментальные солитоны. Вихревые солитоны из области устойчивости  $b_{low} < b < b_{upp}$  сохраняют свою структуру в процессе распространения. Наконец, в решениях с  $b > b_{upp}$  отдельные пики под действием возмущений сдвигаются в промежутки между каналами линейной решетки и там коллапсируют.

Резюмируя, введение противофазной модуляции нелинейности и показателя преломления ограничивает мощность и область устойчивости вихревых солитонов, приводит к необычным искажениям их профилей и существованию новых типов решений.

### §5.3. Двумерные солитоны в нелинейных решетках

Коллапс двумерных солитонов в кубичной нелинейной среде легко подавляется за счет периодической поперечной модуляции линейного показателя преломления. При этом линейная решетка качественно изменяет характер распространения излучения даже в линейном случае, поскольку линейными модами в среде с модуляцией показате-

ля преломления являются блоховские моды, а не плоские волны. При этом солитонные семейства ответвляются от блоховских волн по мере роста пиковой амплитуды. Нелинейные же решетки не влияют на распространение излучения в линейном режиме и их роль сводится к модуляции профилей решений с достаточно высокой интенсивностью, причем, по мере роста пиковой интенсивности, влияние поперечной модуляции нелинейного коэффициента должно становится менее заметным из-за сужения солитона. Тем не менее, специально подобранные профили нелинейности позволяют подавить неустойчивость двумерных солитонов в кубичной среде даже в отсутствие линейной решетки, и этот параграф посвящен описанию соответствующей физической системы [356].

Мы рассматриваем распространение излучения в периодической решетке цилиндров с кубичной нелинейностью, внедренных в линейную среду с таким же линейным показателем преломления, которое описывается следующим уравнением Шредингера для комплексной амплитуды поля:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) + \sigma(\eta, \zeta) q |q|^2 (1 + S |q|^2)^{-1}. \quad (5.5)$$

Здесь предполагается, что нелинейный коэффициент  $\sigma = -1$  внутри цилиндров радиуса  $w_r$ , в то время как в области между ними  $\sigma = 0$ . Нелинейные цилиндры формируют периодическую структуру с периодом  $w_s$  вдоль обеих осей  $\eta$  и  $\zeta$ . В дальнейшем мы полагаем  $w_r = 1$  (последнее всегда можно сделать с использованием масштабных преобразований) и варьируем период  $w_s$ . При этом цилиндры не перекрываются, если  $w_s > 2$ , и частично перекрываются, если  $2^{1/2} \leq w_s \leq 2$ , так что предельный случай  $w_s = 2^{1/2}$  соответствует однородной нелинейной среде. Параметр  $S \geq 0$  учитывает возможное насыщение нелинейного отклика, однако, наибольший интерес представляет случай  $S = 0$ , который рассматривается первым. Одним из наиболее важных свойств модели, описанной выше, является резкий скачкообразный переход от нелинейной среды внутри цилиндров к линейной среде между ними при одинаковом линейном показателе преломления.

Солитонные решения уравнения (5.5) ищем в виде  $q = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$ , а их устойчивость анализируем с помощью решения задачи на собственные значения (инкременты возмущения)  $\delta$  и собственные функции (профили возмущения)  $u, v$ :

$$\begin{aligned} \delta u &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} \right) + bv + \sigma(\eta, \zeta) v \frac{w^2 + Sw^4}{(1 + Sw^2)^2}, \\ \delta v &= +\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right) - bu - \sigma(\eta, \zeta) u \frac{3w^2 + Sw^4}{(1 + Sw^2)^2}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Примеры профилей фундаментальных солитонов приведены на рис. 5.6, а их свойства обсуждаются на рис. 5.7(a)-5.7(c). В отличие от случая однородной кубической среды, где  $\sigma(\eta, \zeta) \equiv -1$  и где мощность неустойчивых солитонов Таунса  $U_T \approx 5.85$  не зависит от постоянной распространения [пунктирная линия на рис. 5.7(a) и 5.7(b)], мощность солитонов в среде с неоднородной нелинейностью является немонотонной функцией  $b$  [рис. 5.7(a)]. Мощность резко возрастает при  $b \rightarrow 0$ , когда профиль солитона заметно расширяется [рис. 5.6(a)]. Заметим, что в отличие от линейных решеток, где солитоны отличаются от блоховских волн и имеют модулированные профили у отсечки, в нелинейной решетке профили солитонов при  $b \rightarrow 0$  остаются практически немодулированными. Увеличение  $b$  приводит к концентрации света практически в одном канале нелинейной решетки [рис. 5.6(b)]. Локализация сопровождается сменой знака производной  $dU/db$  зависимости  $U(b)$ . Таким образом, в нелинейной решетке солитоны существуют при мощностях выше пороговой  $U_{th}$ . Пороговая мощность уменьшается с увеличением периода нелинейной решетки  $w_s$  и асимптотически приближается к некоторому минимальному значению при  $w_s \rightarrow \infty$ , когда солитон фактически поддерживается уединенным нелинейным цилиндром [рис. 5.7(b)].

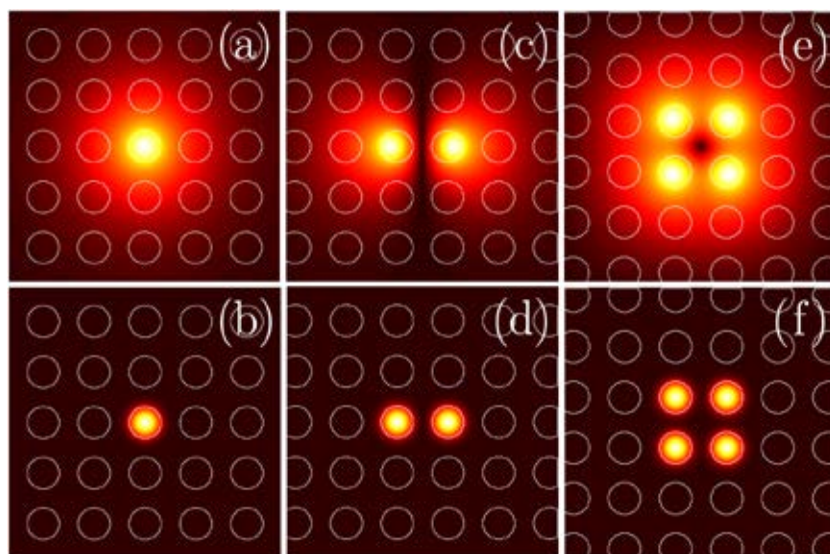


Рис. 5.6. Распределения модуля поля для фундаментальных (a),(b), дипольных (c),(d) и вихревых (e),(f) солитонов. Панели (a),(c),(e) соответствуют  $b = 0.05$ , а панели (b),(d),(f) соответствуют  $b = 7$ . Во всех случаях  $w_s = 3$ ,  $S = 0.1$ .

Согласно критерию устойчивости Вахитова-Колоколова, немонотонная зависимость  $U(b)$  является указанием на то, что солитоны в нелинейной решетке могут быть устойчивы. Линейный анализ устойчивости, проведенный на основе системы уравнений (5.6), действительно показал, что ветвь фундаментальных солитонов, для которой

$dU/db > 0$ , является линейно устойчивой [рис. 5.7(c) демонстрирует, что вещественная часть инкремента  $\delta_r$  обращается в ноль в точности в той точке, где  $dU/db$  меняет знак]. Область неустойчивости вблизи отсечки является наиболее узкой (в терминах постоянной распространения), когда  $w_s \rightarrow \infty$  и вполне ожидаемо расширяется на всю область  $b \in [0, \infty)$  существования солитонов при  $w_s \rightarrow 2^{1/2}$ , когда происходит переход к однородной кубичной среде, где солитоны неустойчивы. Таким образом, резкая модуляция кубичной нелинейности среды действительно может привести к стабилизации двумерных солитонов. Включение насыщения нелинейности ( $S > 0$ ) приводит к стабилизации солитонов даже при  $w_s \rightarrow 2^{1/2}$ , поскольку коллапс в однородной среде с насыщением подавлен. При  $S > 0$  появляется также верхняя граница области существования, где мощность солитона становится бесконечной [рис. 5.7(d)]. Верхняя граница определяется параметром  $S$  и радиусом нелинейных цилиндров.

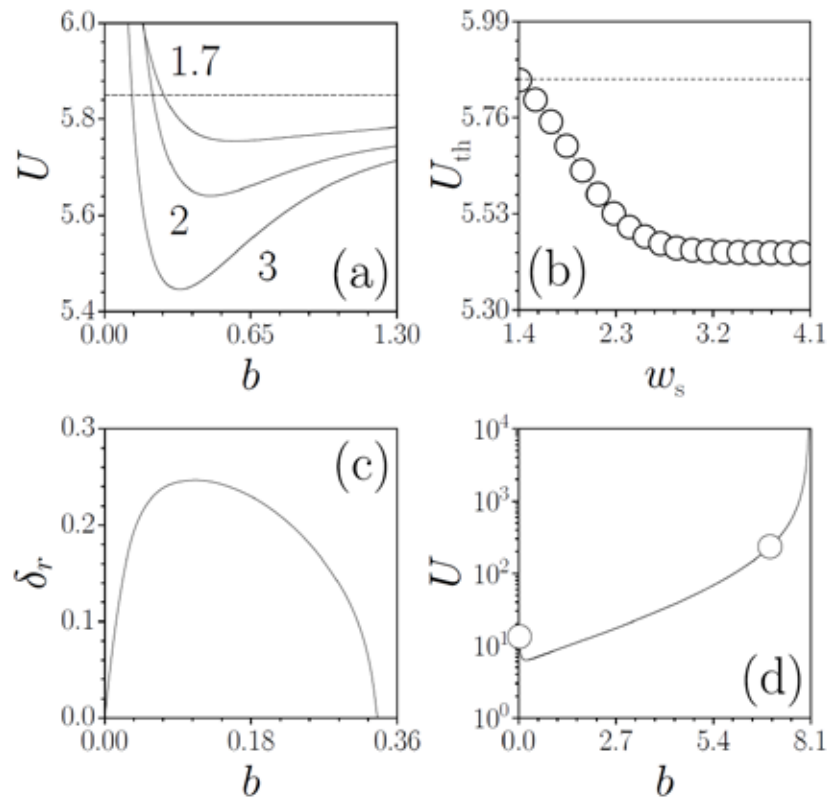


Рис. 5.7. (a) Мощность фундаментального солитона как функция  $b$  для нескольких значений  $w_s$ . (b) Пороговая мощность как функция периода  $w_s$ . Горизонтальные пунктирные линии на панелях (a) и (b) соответствуют мощности солитона Таунса  $U_T \approx 5.85$ . (c) Действительная часть инкремента нарастания возмущения в зависимости от  $b$  при  $w_s = 3$ . (d) Мощность солитона как функция  $b$  в среде с насыщением при  $w_s = 3$ .  $S = 0$  для панелей (a)-(c) и  $S = 0.1$  для панели (d). Точки на панели (d) соответствуют солитонам на рис. 5.6(a) и 5.6(b).

Помимо фундаментальных солитонов, нелинейные решетки поддерживают также мультипольные и вихревые солитоны, примеры профилей которых приведены на рис. 5.6(c)-5.6(f). Для дипольных солитонов отталкивание противофазных пиков компенсируется за счет специфической нелинейной добавки к показателю преломления в среде с неоднородной нелинейностью. Максимумы противофазных пиков, формирующих дипольный солитон, немного сдвинуты от центров нелинейных цилиндров. Этот сдвиг практически не заметен при больших мощностях [рис. 5.6(d)]. Простейший вихревой солитон в нелинейной решетке характеризуется наличием четырех пиков интенсивности (по аналогии с вихревым солитоном в линейной решетке) и фазовой дислокацией, находящейся в области между нелинейными цилиндрами [рис. 5.6(e)]. Такие солитоны сильно расширяются при  $b \rightarrow 0$ , причем модуляция их профиля уменьшается, и они начинают напоминать широкие вихревые солитоны в однородной нелинейной среде. При

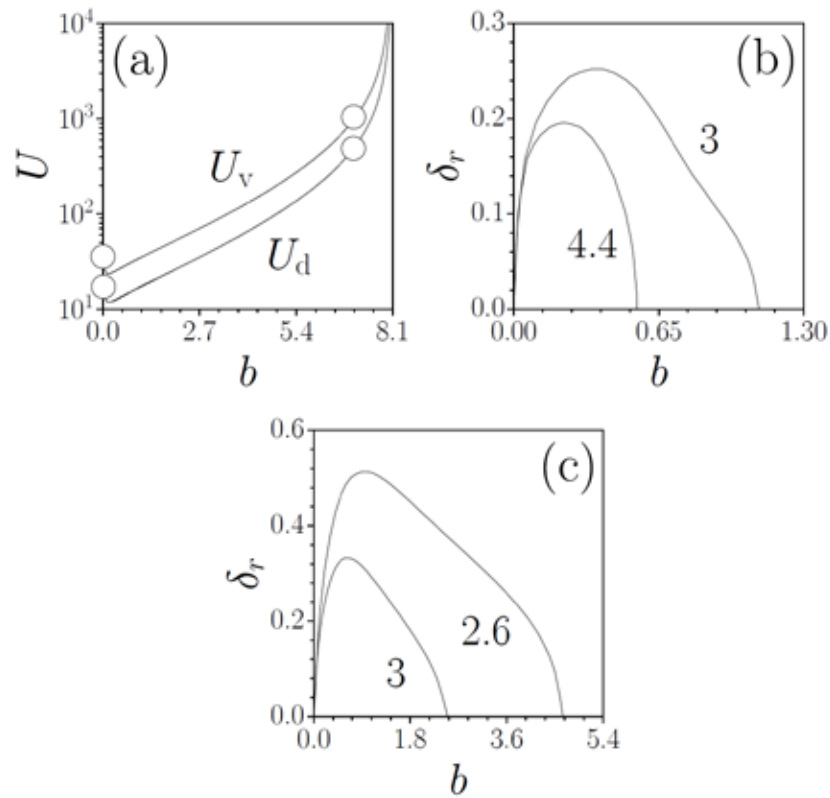


Рис. 5.8. (a) Зависимости  $U(b)$  для диполей ( $U_d$ ) и вихревых ( $U_v$ ) солитонов при  $w_s = 3$ . Действительная часть инкремента нарастания возмущений в зависимости от  $b$  для диполей (b) и вихревых солитонов (c) при разных периодах  $w_s$  нелинейной решетки. Точки на панели (a) соответствуют профилям на рис. 5.6(c)-5.6(f). Во всех случаях  $S = 0.1$ .

больших пиковых амплитудах профиль вихревого солитона, наоборот, состоит из четырех очень хорошо локализованных пиков. В среде с кубичной нелинейностью все мульт-

типоли и вихревые солитоны в нелинейных решетках оказались неустойчивы, в отличие от фундаментальных солитонов, однако, они становятся устойчивыми при наличии насыщения нелинейности. Зависимости  $U(b)$  для дипольного и вихревого солитонов приведены на рис. 5.8(a). Решения обоих типов существуют при мощностях выше пороговой, причем пороговая мощность для вихревого солитона превышает мощность для диполя, которая, в свою очередь, выше пороговой мощности для фундаментального солитона. Верхняя отсечка, в которой мощность обращается в бесконечность, одинакова для всех типов солитонов. Как для вихревых, так и для дипольных солитонов, были найдены области осцилляторной неустойчивости при малых амплитудах. Соответствующие зависимости  $\delta_r(b)$  приведены на рис. 5.8(b) и 5.8(c). При увеличении постоянной распространения как диполи, так и вихревые солитоны в среде с насыщением становятся устойчивы. При фиксированном периоде решетки  $w_s$  ширина области неустойчивости для вихревых солитонов существенно больше, чем ширина области неустойчивости для диполей. Увеличение периода решетки приводит к сужению области неустойчивости. Чисто нелинейные решетки могут поддерживать более сложные устойчивые солитонные комплексы.

Таким образом, периодическая модуляция нелинейности может быть использована для стабилизации двумерных солитонов в кубичной среде, а также может поддерживать устойчивые вихревые и мультипольные солитоны в среде с насыщением нелинейности. В двумерном случае стабилизация фундаментальных солитонов может быть достигнута даже в квазиодномерных нелинейных решетках, однако модуляция нелинейности (ни двумерная, ни трехмерная) не позволяет стабилизировать световые пули.

## §5.4. Векторные солитоны в нелинейных решетках

Множество солитонных решений существенно расширяется при наличии векторных взаимодействий между несколькими компонентами светового поля. Как было показано в предыдущем параграфе, при наличии нелинейных решеток возможно формирование скалярных солитонных комплексов. Не все они устойчивы (в частности, комплексы содержащие синфазные пики, разрушаются при распространении), однако, их векторные взаимодействия с устойчивыми структурами в среде с модуляцией нелинейности могут привести к стабилизации и формированию векторных солитонов, которые не существуют в однородной нелинейной среде. Этот параграф посвящен исследованию устойчивости векторных комплексов в нелинейных решетках, а также анализу влияния на их свойства параметра кроссмодуляционного взаимодействия [358].



Распространение двух связанных пучков в среде с периодической модуляцией кубической нелинейности будем описывать следующей системой уравнений Шредингера для безразмерных комплексных амплитуд пучков  $q_1$  и  $q_2$ :

$$\begin{aligned} i \frac{\partial q_1}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_1}{\partial \eta^2} + \sigma(\eta) q_1 (|q_1|^2 + C |q_2|^2), \\ i \frac{\partial q_2}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q_2}{\partial \eta^2} + \sigma(\eta) q_2 (C |q_1|^2 + |q_2|^2). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь предполагается периодический закон изменения нелинейного коэффициента  $\sigma = \sigma_m \cos^2(\Omega \eta) - 1$ , где  $\sigma_m$  - глубина модуляции нелинейности (при  $\sigma_m = 0$  нелинейность является однородной и фокусирующей),  $\Omega$  - пространственная частота нелинейной решетки,  $C$  - кроссмодуляционный коэффициент. Величина параметра  $C$  определяется нелинейным материалом, в котором распространяется излучение, состоянием поляризации и длинами волн компонент, а также целым рядом других факторов. Например, в обычной керровской среде  $C = 1$  для взаимно некогерентных световых пучков,  $C = 2$  для пучков с различными несущими частотами и т.д. Заметим, что в отличие от параграфа 3.6 здесь рассматривается некогерентное взаимодействие световых пучков (т.е. член, ответственный за четырехволновое смешение, опущен, что оправдано при большой расстройке фазовых скоростей или для взаимно некогерентных пучков от разных лазеров). В дальнейшем мы фиксируем частоту решетки  $\Omega = 2$  и глубину модуляции нелинейности  $\sigma_m = 1$  и исследуем влияние параметра кроссмодуляции  $C$  на формирование и устойчивость солитонов.

Профили векторных солитонов ищем в виде  $q_{1,2}(\eta, \xi) = w_{1,2}(\eta) \exp(ib_{1,2}\xi)$ . Заметим, что в случае некогерентного взаимодействия, рассматриваемого здесь, семейства солитонов зависят от двух постоянных распространения  $b_{1,2}$ . Среди интегралов системы уравнений (1) необходимо отметить полную мощность и мощности, сосредоточенные в разных компонентах решения  $U = U_1 + U_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (|q_1|^2 + |q_2|^2) d\eta$ . Информативными параметрами являются также относительные мощности  $S_{1,2} = U_{1,2} / U$ . Анализ устойчивости проводится с помощью подстановки  $q_{1,2} = [w_{1,2} + (u_{1,2} + iv_{1,2}) \exp(\delta\xi)] \exp(ib_{1,2}\xi)$  поля возмущенного векторного солитонного комплекса в систему уравнений (5.7), и ее линеаризации при учете малости возмущений  $u_{1,2}, v_{1,2} \ll w_{1,2}$ , что позволяет получить задачу на собственные значения и собственные функции

$$\begin{aligned}\delta u_{1,2} &= -\frac{1}{2} \frac{d^2 v_{1,2}}{d\eta^2} + [\sigma(w_{1,2}^2 + Cw_{2,1}^2) + b_{1,2}] v_{1,2}, \\ \delta v_{1,2} &= +\frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1,2}}{d\eta^2} - [\sigma(3w_{1,2}^2 + Cw_{2,1}^2) + b_{1,2}] u_{1,2} - 2\sigma Cw_1 w_2 u_{2,1},\end{aligned}\tag{5.8}$$

которая решалась численно.

Напомним сначала основные свойства одномерных скалярных ( $q_1 \neq 0, q_2 = 0$ ) солитонов в нелинейных решетках. Профили фундаментальных, четных и дипольных скалярных солитонов представлены на рис. 5.9(a). При малых мощностях фундаментальные и четные солитоны существенно расширяются, накрывая много периодов решетки, в то время как локализация наступает при увеличении  $U$ . В нелинейной периодической решетке мощность фундаментального и четного солитонов  $U \rightarrow 0$  при  $b \rightarrow 0$  [рис. 5.9(b)]. Дипольные солитоны, однако, существуют только при мощностях выше некоторой пороговой мощности и их уширение вблизи отсечки не так заметно. Скалярные фундаментальные солитоны всегда устойчивы, четные солитоны неустойчивы, а дипольные солитоны становятся устойчивыми при превышении постоянной распространения некоторого критического значения.

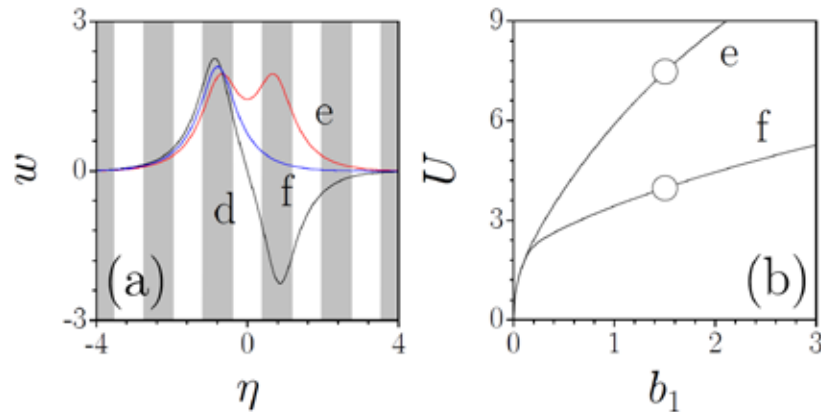


Рис. 5.9. (a) Профили фундаментального (f), дипольного (d) и четного (e) скалярных солитонов при  $b_1 = 1.5$ . В серых областях  $\sigma(\eta) < -1/2$ , а в белых областях  $\sigma(\eta) > -1/2$ . (b) Мощность как функция постоянной распространения  $b_1$  для дипольного и четного солитонов. Точки соответствуют солитонам на панели (a).

Связанные фундаментальные и дипольные солитоны могут формировать асимметричные векторные комплексы, представленные на рис. 5.10(a). При изучении их свойств мы фиксируем одну из постоянных распространения, например,  $b_2$ , и варьируем  $b_1$ . Фундаментальный-дипольный солитон становится сильно асимметричным при уменьшении постоянной распространения  $b_1$  дипольной компоненты. При этом амплитуда

левого пика дипольной компоненты  $w_1$  постепенно уменьшается, а правый пик смещается вправо. Увеличение  $b_1$  приводит к постепенному выравниванию амплитуд противофазных пиков в дипольной компоненте, в то время как на профиле второй компоненты  $w_2$  появляются два практически одинаковых максимума. В результате фундаментальный-дипольный солитон преобразуется в четный-дипольный солитон. При фиксированном значении  $b_2$  фундаментальный-дипольный векторный солитон существует в ограниченной области  $b_1^{\text{low}} \leq b_1 \leq b_1^{\text{upp}}$ . При  $C = 1$  мощность дипольной компоненты всегда меньше, чем мощность фундаментальной компоненты [рис. 5.10(b)], однако относительная мощность  $S_1$  приближается к  $S_2$  при  $b_1 \rightarrow b_1^{\text{upp}}$ , до тех пор, пока не происходит

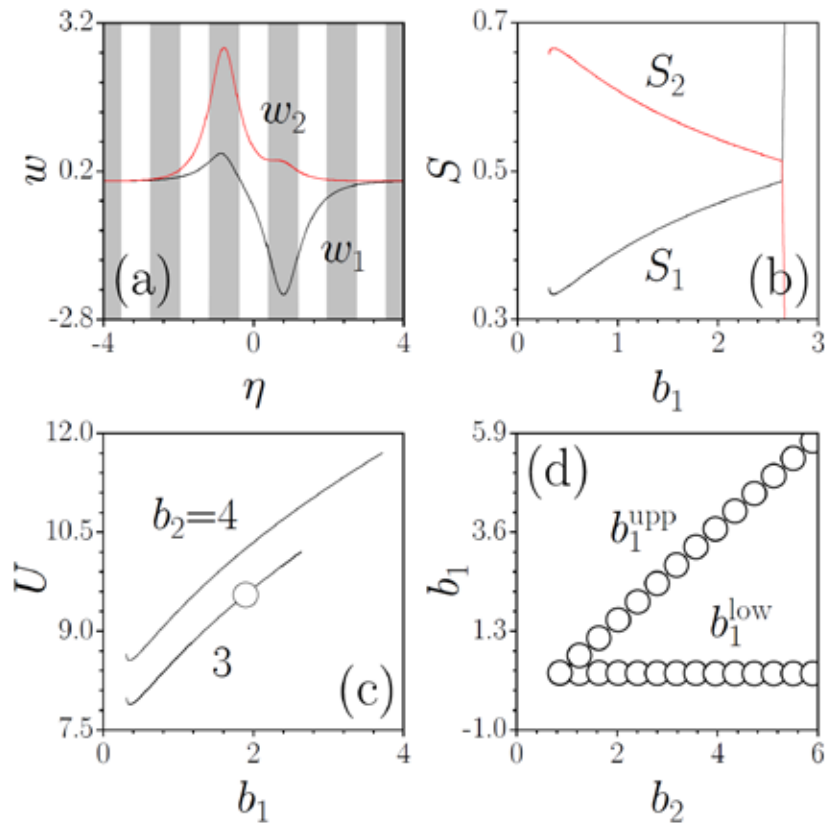


Рис. 5.10. (a) Профиль фундаментального-дипольного солитона при  $b_1 = 1.9$ ,  $b_2 = 3$ . (b) Относительные мощности компонент солитона в зависимости от  $b_1$  при  $b_2 = 3$ . (c) Полная мощность как функция  $b_1$ . Точка соответствует профилю, показанному на панели (a). (d) Область существования векторного комплекса на плоскости параметров  $(b_2, b_1)$ . Во всех случаях  $C = 1$ .

переход на четную-дипольную ветвь решений. Полная мощность возрастает с увеличением  $b_1$  во всей области существования, за исключением узкого интервала вблизи нижней отсечки  $b_1^{\text{low}}$ , где  $dU/db_1 < 0$  [рис. 5.10(c)]. Область существования фундаментально-дипольного солитона практически линейно расширяется с увеличением  $b_2$  [рис.

5.10(d)], однако, такие решения не могут быть найдены при слишком маленьких постоянных распространения  $b_2$ . При  $C = 1$  фундаментальные-дипольные солитоны устойчивы практически во всей области существования за исключением узкой области, где  $dU/db_1 < 0$ . Однако, при  $C < 1$  появляется широкая область неустойчивости вблизи нижней отсечки  $b_1^{\text{low}}$ , а при  $C > 1$  векторные солитоны становятся неустойчивыми у обеих отсечек. Область устойчивости при этом постепенно сужается с ростом кроссмодуляционного параметра  $C$ , так что это семейство солитонов становится неустойчивым при  $C = 1.4$ . Изменения глубины модуляции нелинейности  $\sigma_m$  не приводят к качественным изменениям свойств векторных солитонов. При фиксированных  $b_1$ ,  $b_2$  и  $C = 1$ , мощность векторного солитона растет с увеличением глубины модуляции нелинейности  $\sigma_m$ . Область существования по  $b_1$  также расширяется, а солитоны могут быть найдены в обоих предельных случаях  $\sigma_m \rightarrow 0$  и  $\sigma_m \gg 1$ .

Второй тип векторных солитонов, который мы рассмотрим, состоит из связанных дипольной и четной компонент [рис. 5.11(a)]. При  $C = 1$  область существования таких солитонов достаточно узка. С увеличением  $b_1$  амплитуда дипольной компоненты возрастает, а амплитуда четной компоненты постепенно уменьшается, так что при  $b_1 = b_1^{\text{upp}}$  векторный солитон переходит в скалярный дипольный солитон. Наоборот, при уменьшении  $b_1$  четная компонента становится доминирующей, и при  $b_1 = b_1^{\text{low}}$  наблюдается переход векторного в четный скалярный солитон [рис. 5.11(b)]. Такие изменения структуры солитона характерны при  $C \leq 1.02$ , в то время как при  $C > 1.02$  наблюдается в точности обратная картина, когда компонента  $w_1$  уменьшается с ростом  $b_1$ . Нижняя отсечка  $b_1^{\text{low}}$  линейно растет с увеличением  $b_2$ , но, когда  $b_2$  становится меньше некоторой критической величины, такой тип солитонов перестает существовать [рис. 5.11(c)].

Кроссмодуляционное взаимодействие с устойчивой дипольной компонентой может привести к стабилизации четной компоненты (и формированию устойчивого векторного комплекса), которая неустойчива в скалярном случае. При  $C = 1$  векторный комплекс устойчив при значениях  $b_1$  близких к верхней отсечке  $b_1^{\text{upp}}$ . Область устойчивости на плоскости параметров  $(b_1, b_2)$  изображена на рис. 5.11(d). Векторные солитоны существуют в узкой области слева от красной кривой. Область их существования сужается с ростом  $b_2$ , но при этом четный-дипольный солитон остается устойчивым в большей части области его существования вблизи верхней отсечки. Интересно, что фундаментальный-дипольный солитон преобразуется в четный-дипольный солитон в точности при том значении  $b_1$ , при котором четный-дипольный солитон становится устойчивым. Ширина области существования четных-дипольных солитонов минимальна вблизи точки  $C = 1.02$  [рис. 5.11(e)]. Поскольку при  $C > 1.02$  дипольная компонента пропадает при  $b_1 \rightarrow b_1^{\text{upp}}$ , то стабилизация векторного комплекса в этом режиме возможна вблизи нижней отсечки  $b_1^{\text{low}}$ , в отличие от случая  $C \leq 1.02$ , когда устойчивость наблюдается при

$b_1 \rightarrow b_1^{\text{upp}}$ . На рис. 5.11(f) изображена типичная зависимость действительной части инкремента нарастания возмущений от  $b_1$ . Уменьшение глубины модуляции нелинейности  $\sigma_m$  приводит к значительному расширению области существования четных-дипольных солитонов при  $C=1$ . Если величина  $\sigma_m$  мала, то синфазные пики в четной

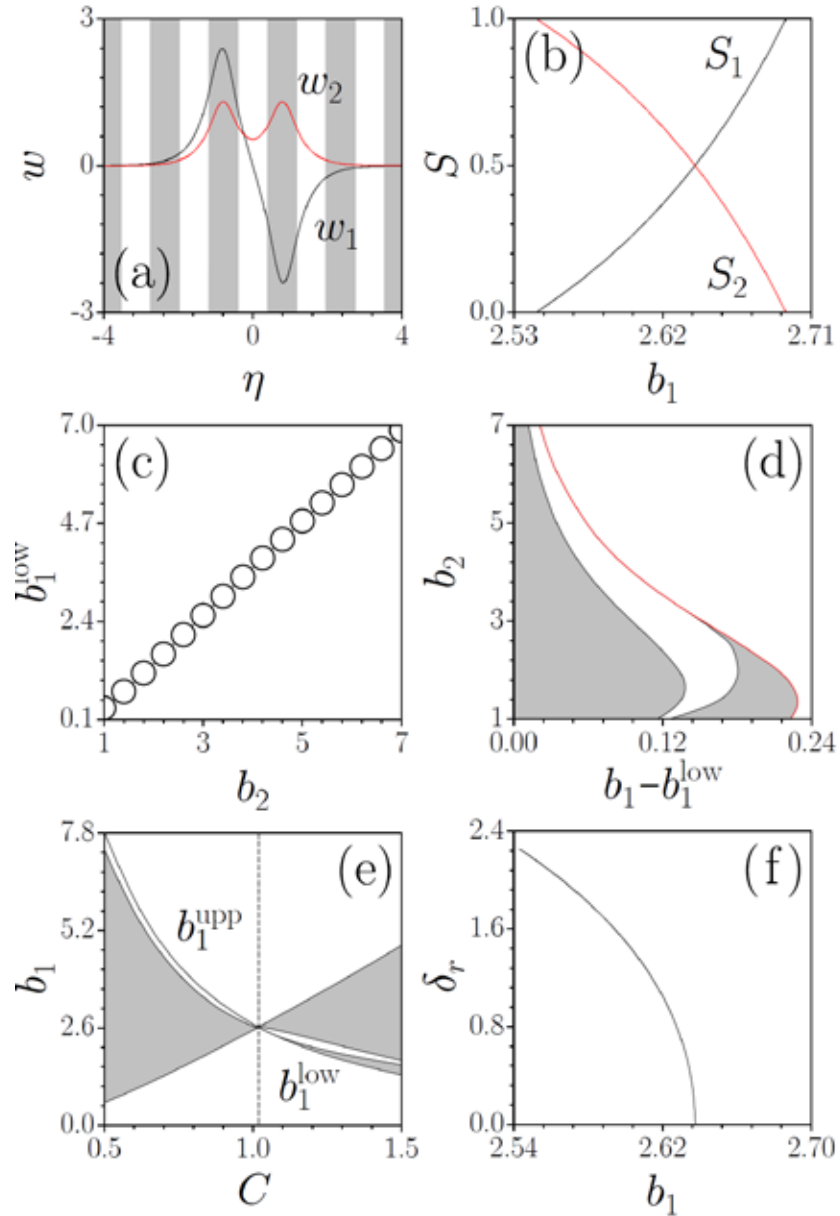


Рис. 5.11. (a) Профиль четного-дипольного солитона при  $b_1 = 2.67$ ,  $b_2 = 3$ ,  $C = 1$ . (b) Относительная мощность компонент в зависимости от  $b_1$  при  $b_2 = 3$ ,  $C = 1$ . (c) Нижняя отсечка  $b_1^{\text{low}}$  для четного-дипольного солитона в зависимости от  $b_2$  при  $C = 1$ . Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) на плоскости параметров  $(b_1, b_2)$  при  $C = 1$  (d) и на плоскости параметров  $(C, b_1)$  при  $b_2 = 3$  (e). (f) Зависимость  $\delta_r(b_1)$  при  $b_2 = 3$ ,  $C = 1$ .

компоненте становятся менее выражены и могут слиться в один пик при  $b_1 \rightarrow b_1^{\text{low}}$ . Область устойчивости остается достаточно узкой для всех значений  $\sigma_m$ . При  $C = 1$  и  $b_2 = 3$  область существования четных-дипольных солитонов исчезает при  $\sigma_m \approx 1.7$ .

Таким образом, векторные взаимодействия световых полей в нелинейных решетках приводят к формированию устойчивых солитонных комплексов со сложной внутренней структурой поля. Области параметров, в которых такие солитоны устойчивы, определяются силой кроссмодуляционного взаимодействия.

## §5.5. Светлые солитоны в дефокусирующих средах с пространственно-неоднородной нелинейностью

Однородные среды с дефокусирующей нелинейностью могут поддерживать лишь темные солитоны с ненулевыми асимптотиками поля. Ситуация качественно меняется при наличии модуляции линейного показателя преломления. В частности, в дефокусирующей среде с периодической решеткой показателя преломления возможно формирование экспоненциально локализованных солитонов с постоянными распространения из ограниченных запрещенных зон. Экспоненциально локализованные солитоны существуют потому, что в среде с периодическим показателем преломления сила и даже знак дифракции зависят от параметров решетки, а также от направления распространения пучка. Нелинейные решетки не влияют на характер дифракции в пределе малой интенсивности, и поэтому все попытки получить светлые солитоны в средах с ограниченной, периодической или локализованной дефокусирующей нелинейностью не увенчались успехом. В этом параграфе показано, что светлые солитоны, тем не менее, могут существовать в среде с неоднородной дефокусирующей нелинейностью, если нелинейный коэффициент достаточно быстро растет при удалении от центра среды [365]. С математической точки зрения, существование этих солитонов связано с нелинеаризуемостью эволюционного уравнения, описывающего распространение излучения, на хвостах решения из-за роста нелинейного коэффициента.

Возможность формирования локализованных солитонов будет продемонстрирована ниже для одно-, двух- и трехмерных геометрий. Для описания эволюции нелинейных структур используем уравнение Шредингера для безразмерной амплитуды поля  $q$  в случае оптической среды размерности  $D = 1, 2$  или для волновой функции в случае конденсата Бозе-Эйнштейна любой размерности  $D = 1, 2, 3$ :

$$i\partial q / \partial \xi = -(1/2)\nabla^2 q + \sigma(\mathbf{r})|q|^2 q. \quad (5.9)$$

Здесь  $\xi$  - нормированная длина распространения в оптической среде или нормированное время в конденсате Бозе-Эйнштейна,  $\mathbf{r} = (\eta, \zeta, \tau)$  - вектор, задающий координату точки в поперечной плоскости,  $\nabla^2 = \partial^2/\partial\eta^2 + \partial^2/\partial\zeta^2 + \partial^2/\partial\tau^2$ , параметр  $\sigma(\mathbf{r}) > 0$  описывает силу дефокусирующей нелинейности, которая изменяется в радиальном направлении. В оптике поперечная модуляция нелинейности может быть реализована с использованием различных технологий [317], среди которых особого упоминания заслуживает пространственно-неоднородное легирование фоторефрактивных кристаллов, таких как  $\text{LiNbO}_3$ , атомами  $\text{Cu}$  или  $\text{Fe}$ , приводящее к значительному увеличению локальной нелинейности. В конденсатах Бозе-Эйнштейна практически произвольные профили нелинейности могут быть созданы за счет резонанса Фешбаха в неоднородном внешнем поле. Далее мы полагаем, что нелинейность увеличивается с радиусом по закону

$$\sigma(\mathbf{r}) = (\sigma_0 + \sigma_2 r^2/2) \exp(\alpha r^2), \quad (5.10)$$

где  $\sigma_0, \sigma_2 > 0$ . Скорость нарастания нелинейности  $\alpha > 0$  может быть зафиксирована с помощью масштабных преобразований, так что далее полагаем  $\alpha = 1/2$ . Для любой размерности системы  $D$ , уравнение (5.9) с нелинейностью (5.10) допускает аналитическое решение, описывающее профиль локализованного фундаментального солитона:

$$q(r, \xi) = (\alpha^2/\sigma_2)^{1/2} \exp(ib\xi - \alpha r^2/2), \quad (5.11)$$

где постоянная распространения  $b = -(D\alpha/2 + \sigma_0\alpha^2/\sigma_2)$ . В частном случае  $\sigma_2 = 0$  удается найти аналитические решения для вихревого солитона с топологическим зарядом  $m = 1$  при  $D = 2$ , и для дипольного солитона при  $D = 1$ :

$$q(r, \xi) = (2\sigma_0)^{-1/2} \alpha r \exp(ib\xi + i\phi - \alpha r^2/2), \quad (5.12)$$

где постоянная распространения  $b = -\alpha(1 + D/2)$ , а множитель  $\exp(i\phi)$ , где  $\phi$  - азимутальный угол, присутствует лишь для вихревого солитона при  $D = 2$  и должен быть опущен для дипольного решения при  $D = 1$ .

Аналитические решения (5.11) и (5.12), представленные выше, получены для частных значений постоянной распространения. Предварительный анализ полных солитонных семейств возможен на основе вариационного подхода, детали которого описаны в монографии [316] и работах [366, 367]. В рамках этого подхода профиль солитона аппроксимируется функцией  $q = A \exp(ib\xi - \alpha r^2/2)$  (ее выбор диктуется, в частности, видом

аналитических решений), где амплитуда  $A$  является единственным варьируемым параметром. Используя лагранжиан уравнения (5.9), можно показать, что стационарное распространение в рамках вариационного приближения при  $\sigma_2 = 0$ ,  $\sigma_0 = 1$  достигается при мощности солитона

$$U \equiv \int |q(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = -(\pi/\alpha)^{D/2} (b + \alpha D/2) \quad (5.13)$$

для любой размерности  $D$ . Сравнение этого результата с численно полученными зависимостями мощности фундаментального солитона от постоянной распространения, представленными на рис. 5.12(с) и 5.14(с), показывает, что численные зависимости и кривая (5.13) практически неразличимы.

Подчеркнем, что резкий супер-экспоненциальный рост дефокусирующей нелинейности в формуле (5.10) на самом деле не является необходимым условием существования локализованных солитонов. Фактически, светлые солитоны с конечной мощностью возможны даже при сравнительно медленном нарастании нелинейности  $\sigma(r) \sim r^{D+\varepsilon}$  с произвольным  $\varepsilon > 0$ , где  $D$  - размерность системы. Более того, для экспоненциального профиля нелинейности  $\sigma(\eta) = a + \sinh^2(\eta)$ , где  $a < 1$ , удается найти точное одномерное фундаментальное солитонное решение  $w = (1-a)^{-1/2} \operatorname{sech}(\eta)$  при  $b = -(1+a)/[2(1-a)]$ , а для профиля нелинейности  $\sigma(\eta) = \cosh^2(\eta)$  можно выписать дипольное решение  $w = 3^{1/2} \sinh(\eta) \operatorname{sech}^2(\eta)$ , соответствующее  $b = -5/2$ . Заметим, что во всех случаях асимптотики солитона диктуются скоростью нарастания нелинейности.

Численные результаты приводятся ниже для модели (5.10) с  $\sigma_2 = 0$  и  $\sigma_0 = 1$ . Солитоны ищутся в виде  $q(\mathbf{r}, \xi) = w(r) \exp(ib\xi)$ , и их линейная устойчивость анализируется с помощью решения соответствующей задачи на собственные значения и собственные функции. Численное интегрирование подтвердило факт существования локализованных солитонов в среде с растущей дефокусирующей нелинейностью. Независимо от размерности, хвосты солитонов всех типов в модели (5.10) затухают при  $r \rightarrow \infty$  по закону  $w|_{r \rightarrow \pm\infty} \approx (\alpha r / 2^{1/2}) \exp(-\alpha r^2 / 2)$ , в согласии с аналитическим решением (5.12). В такой среде локализация может быть еще более сильно выражена, чем в однородной фокусирующей среде, где солитоны имеют экспоненциальные асимптотики. Необходимо отметить, что асимптотическое выражение, приведенное выше, не содержит постоянной распространения  $b$ , в отличие от асимптотик обычных светлых солитонов.

Примеры одномерных солитонов, профили которых  $w(\eta)$  могут иметь различное число нулей  $k$ , представлены на рис. 5.12(а) и 5.12(б). Эти солитоны существуют при отрицательных постоянных распространения. Амплитуда солитона увеличивается с ростом  $|b|$ , причем их ширина сначала быстро падает, а затем перестает меняться при



$|b| \simeq 20$ . Для всех типов солитонов мощность монотонно возрастает с увеличением  $|b|$  [рис. 5.12(с)]. Солитоны более высокого порядка с большим числом нулей  $k$  обладают при данном  $b$  меньшей мощностью, что естественно, поскольку фундаментальные солитоны, представляющие собой низшее стационарное состояние в системе, должны соответствовать минимуму  $-b$  (а также гамильтониана) при фиксированной мощности. Заметим, что профили солитонов с разным числом нулей  $k$  совпадают на достаточно большом удалении от центра среды. Одномерные солитоны в среде с дефокусирующей нелинейностью могут быть устойчивыми. Линейный анализ показывает, что солитоны с

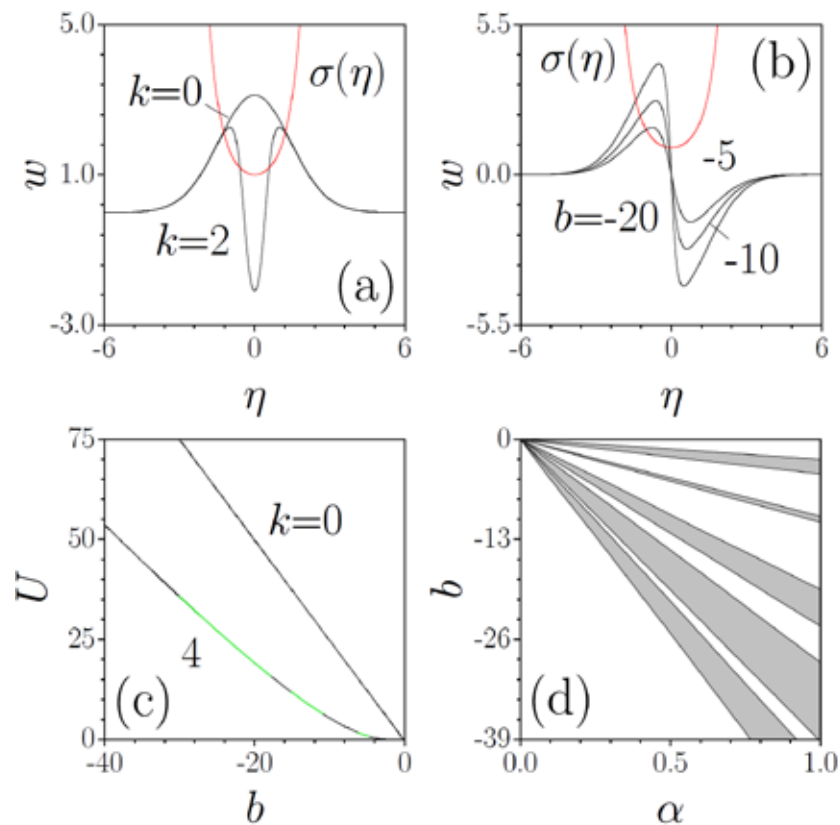


Рис. 5.12. (а) Профили одномерных солитонов с различным числом нулей при  $b = -10$  и (б) профили диполей при различных значениях  $b$ . (с) Зависимости  $U(b)$  для солитонов с различными  $k$ . Здесь и на рис. 5.14(с) устойчивые и неустойчивые ветви показаны черными и зелеными линиями соответственно. Панели (а)-(с) получены при  $\alpha = 0.5$ . (д) Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) на плоскости параметров  $(\alpha, b)$  для одномерных солитонов с  $k = 5$ .

$k = 0, 1, 2$  устойчивы по крайней мере вплоть до  $b = -40$  [это, в частности, означает также устойчивость аналитического решения (5.12), устойчивость решения (5.11) также была проверена численно]. Для солитонов с  $k \geq 3$  характерно чередование областей устойчивости и неустойчивости. Структура областей устойчивости и неустойчивости становится

более сложной при увеличении числа нулей  $k$  в профиле солитона, как показано на рис. 5.12(d) для  $k = 5$ . При этом мы не нашли ограничений на максимальное число пиков в устойчивом одномерном солитоне, так что даже сложные структуры с  $k \geq 10$  могут быть устойчивы. Прямое моделирование эволюции возмущенных солитонов подтверждает результаты линейного анализа устойчивости. В то время как устойчивые солитоны распространяются без искажений на расстояния, значительно превышающие  $\xi = 10^3$ , неустойчивые солитоны обычно превращаются в нерегулярные осциллирующие распределения поля, которые, тем не менее, остаются хорошо локализованными, как показано в верхнем ряду рис. 5.13.

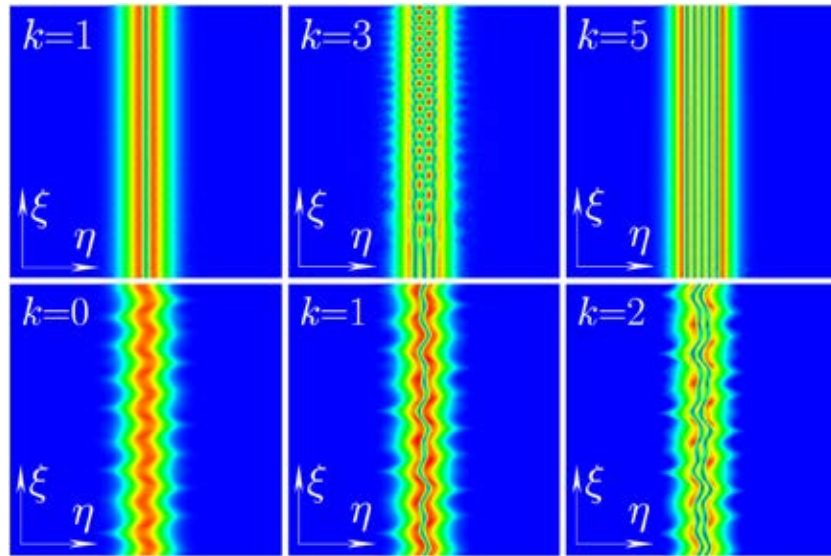


Рис. 5.13. Верхний ряд показывает устойчивое распространение возмущенного одномерного солитона с  $k = 1$ ,  $b = -10$  (слева), распад солитона с  $k = 3$ ,  $b = -10$  (центр), и устойчивое распространение солитона с  $k = 5$ ,  $b = -13$  (справа). Нижний ряд иллюстрирует осцилляции одномерных солитонов с  $k = 0, 1, 2$ ,  $b = -20$ , возникающие после их умножения на  $\exp(i\nu\eta)$  с  $\nu = 1.5$ .

Отметим, что в первых исследованиях солитоны определялись как объекты, которые сохраняют их структуру и мощность в процессе движения в поперечной плоскости и упругого взаимодействия с другими солитонами, без потерь на излучение [2] (хотя в настоящее время понятие солитона охватывает существенно более широкий класс самосогласованных нелинейных структур). Солитоны в среде с неоднородной нелинейностью могут быть приведены в движение при умножении исходного распределения поля на  $\exp(i\nu\eta)$ . В результате, как одномерные, так и двумерные солитоны начинают регулярно осциллировать вблизи центра образца, где нелинейность минимальна (соответствующие примеры с динамикой распространения приведены в нижнем ряду рис. 5.13 для

одномерных солитонов с  $k = 0, 1, 2$ ). Используя приближение эффективных частиц, удастся вывести уравнение движения, описывающее траекторию интегрального центра солитона  $\mathbf{R}(\xi)$ :

$$d^2\mathbf{R}/d\xi^2 = -2\alpha(\alpha/\pi)^{D/2}U_D \exp(2\alpha R^2)\mathbf{R}, \quad (5.14)$$

где  $D=1,2$  и  $U_D$  - мощность соответствующего солитона. Как следует из уравнения (5.14), квадрат частоты малоамплитудных осцилляций центра солитона описывается формулой  $\omega_D^2 = 2\alpha(\alpha/\pi)^{D/2}U_D + (3\alpha/2)\nu^2$ , которая дает исключительно точную оценку.

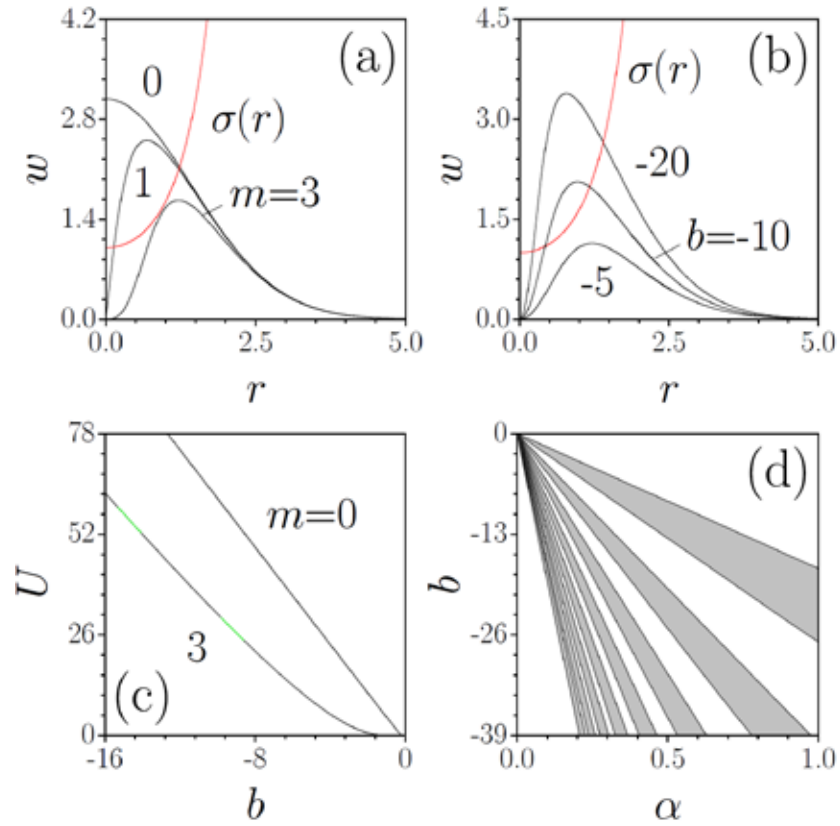


Рис. 5.14. (a) Профили двумерных солитонов с различными зарядами при  $b = -10$  и (b) при  $m = 2$  и различных значениях  $b$ . (c) Зависимость  $U(b)$  для различных  $m$ . Панели (a)-(c) получены при  $\alpha = 0.5$  (d) Области устойчивости (белые) и неустойчивости (серые) для двумерных солитонов с  $m = 2$  на плоскости параметров  $(\alpha, b)$ .

Более того, мы наложили более сложное возмущение на дипольный солитон, придав противофазным составляющим в профиле пучка противоположные по знаку скорости при  $\xi = 0$ , что привело к осцилляциям и периодически повторяющимся столкновениям двух противофазных пиков. Эти столкновения оказались упругими. Таким образом, в

рассматриваемой системе одномерные и двумерные солитоны действительно ведут себя подобно упруго взаимодействующим частицам и сохраняют свою внутреннюю структуру даже при значительных осцилляциях центра.

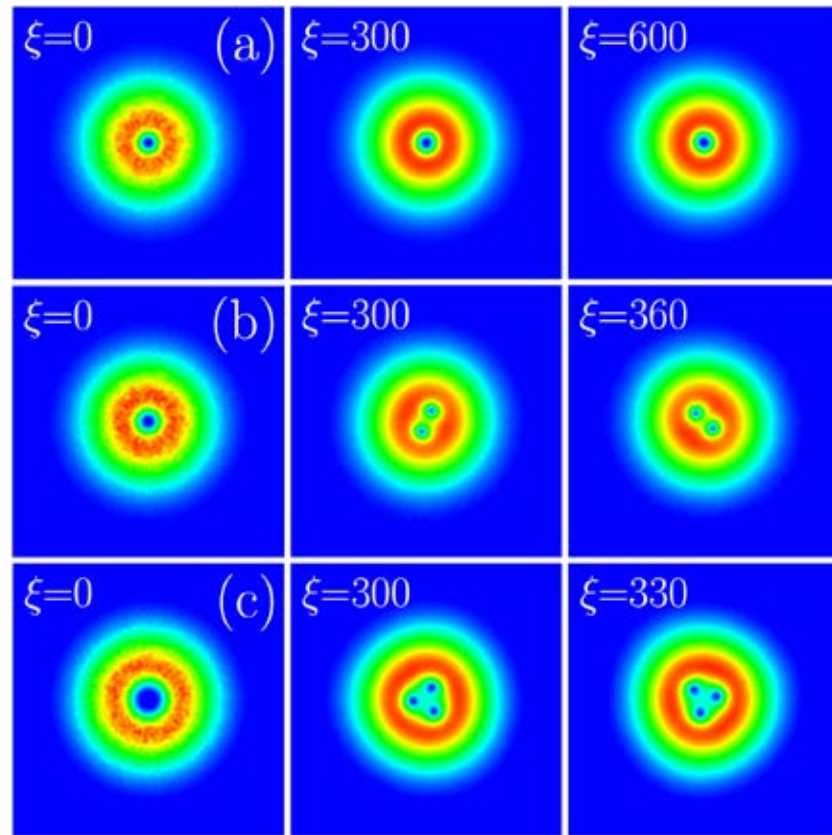


Рис. 5.15. (а) Устойчивое распространение возмущенного вихревого солитона при  $m = 2$ ,  $b = -17$ . (б) Распад неустойчивого вихревого солитона с  $m = 2$ ,  $b = -11$  на пару вращающихся вихревых структур. (с) Преобразование неустойчивого вихревого солитона с  $m = 3$ ,  $b = -9$  во вращающуюся структуру с тремя дислокациями.

Двумерная версия модели позволяет найти вихревые солитоны с любыми целочисленными топологическими зарядами  $q(r, \xi) = w(r) \exp(im\phi + ib\xi)$ . Примеры профилей таких солитонов приведены на рис. 5.14(a) и 5.14(b). Вихревые солитоны с различными топологическими зарядами  $m$  демонстрируют различное асимптотическое поведение при  $r \rightarrow 0$ , однако при  $r \rightarrow \infty$  их профили совпадают в отличие от вихревых солитонов в однородной среде, которые становятся заметно шире с увеличением топологического заряда. Увеличение  $|b|$  приводит к постепенному сужению профиля вихревого солитона [рис. 5.14(b)]. При фиксированной постоянной распространения мощность вихревого солитона уменьшается с ростом топологического заряда  $m$  [рис. 5.14(c)]. Благодаря дефокусирующему характеру нелинейности, азимутальные неустойчивости, которые разрушают вихревые солитоны в фокусирующей среде, подавлены в рассматриваемой

здесь системе. Солитоны с  $m=0$  и  $m=1$  [включая аналитическое решение (5.12)] полностью устойчивы, в то время как для вихревых солитонов с  $m > 1$  характерно наличие сложной системы областей устойчивости и неустойчивости. Последняя может быть найдена при подстановке профиля возмущенного солитона  $q = [w(r) + u(r) \exp(in\phi + \delta\xi) + v^*(r) \exp(-in\phi + \delta^*\xi)] \exp(im\phi + ib\xi)$ , где  $n$  - азимутальный индекс возмущения, в уравнение (5.9), его линеаризации и решении соответствующей задачи на собственные значения и собственные функции. Типичная структура областей устойчивости показана на рис. 5.14(d) для вихревых солитонов с  $m=2$ , которые разрушаются под воздействием возмущений с азимутальным индексом  $n=2$  при определенных значениях постоянной распространения  $b$  (заметим, что для солитонов с зарядами  $m > 2$  наиболее разрушительными оказываются возмущения с индексами  $n = m, m \pm 1$ ). Интересно, что области устойчивости и неустойчивости распределены эквидистантно по постоянной распространения  $b$ . Области устойчивости были найдены для вихревых солитонов с любыми топологическими зарядами  $m$ . Пример устойчивого распространения возмущенного вихревого солитона, который сохраняет его структуру при распространении на сколь угодно большие расстояния, показан на рис. 5.15(a). Неустойчивый вихревой солитон с  $m \geq 2$ , как правило, распадается на  $m$  вихревых структур с единичными топологическими зарядами, которые не удаляются на бесконечность, а остаются вблизи центра образца, совершая вращательное движение. Примеры этого интересного режима распространения для вихревых солитонов с  $m=2$  и  $m=3$  приведены на рис. 5.15(b) и 5.15(c).

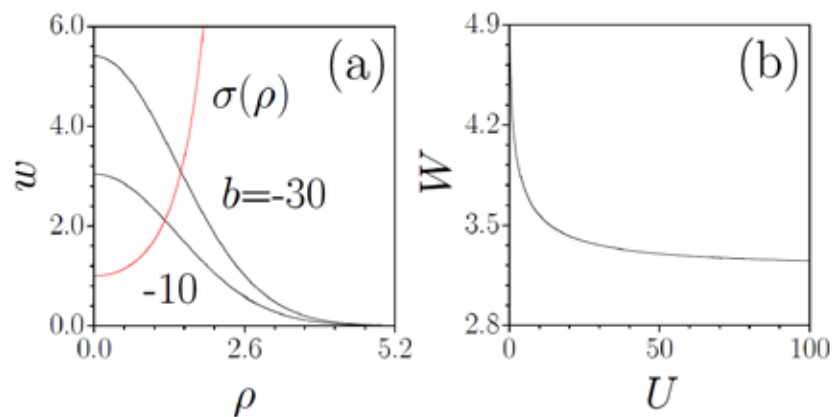


Рис. 5.16. (a) Профили сферически симметричных фундаментальных солитонов при  $\alpha = 0.5$ . (b) Зависимость ширины солитона от числа частиц  $U$ .

Светлые солитоны удается найти также в трехмерной версии модели (5.9),(5.10). Заметим, что в этом случае модель описывает динамику конденсата Бозе-Эйнштейна в среде с неоднородной нелинейностью, но она уже не может быть использована для оп-

тических сред. Примеры сферически симметричных фундаментальных солитонов приведены на рис. 5.16(a). Величина  $U$ , которая характеризует число частиц в конденсате, увеличивается практически линейно с ростом  $|b|$ , в соответствии с формулой (5.13). При этом интегральная ширина солитона  $W$  сначала резко уменьшается с ростом  $U$ , а потом асимптотически приближается к некоторому постоянному значению [рис. 5.16(b)]. Трехмерные фундаментальные солитоны устойчивы во всей области их существования. Пример устойчивого распространения такой структуры приведен на рис. 5.17.

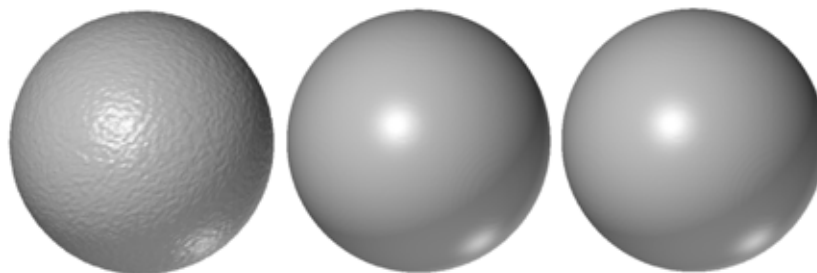


Рис. 5.17. Устойчивое распространение трехмерного солитона при  $b = -10$ ,  $\alpha = 0.5$ . Поверхности постоянной амплитуды, проведенные по уровню  $0.1 \max |q|$ , показаны при разных значениях эволюционной координаты  $\xi = 0$  (слева),  $\xi = 300$  (центр) и  $\xi = 600$  (справа).

В заключение, в этом параграфе показано, что пространственно-неоднородная дефокусирующая нелинейность может поддерживать светлые солитоны во всех трех измерениях, при условии, что нелинейный коэффициент достаточно быстро растет к периферии материала. При этом возможно существование не только фундаментальных, но и устойчивых мультипольных и вихревых солитонов.

## Глава 6. Контроль распространения световых пучков в динамически модулированных решетках

Современный уровень развития технологий позволяет изготавливать волноводные структуры не только с заданными поперечными распределениями показателя преломления, но также и с параметрами, варьирующимися в продольном направлении. Ярким примером здесь служат фотонные кристаллы [8,10,368], в которых, благодаря глубокой продольной модуляции показателя преломления, возникает целый ряд интересных эффектов, ведущих к важным приложениям. Изготовление волноводных структур с мелкой продольной модуляцией показателя преломления вполне доступно, в частности, такая модуляция реализуется посредством неоднородного в продольном направлении легирования поверхности фоторефрактивного кристалла различными примесями, с использованием варьирующейся в направлении распространения излучения некогерентной внешней подсветки кристалла или приложенного к нему статического электрического поля [81], а также варьированием скорости записи волноводов с помощью высокоинтенсивных фемтосекундных лазерных импульсов [40] и т.д.

Продольная модуляция показателя преломления приводит к целому ряду резонансных явлений, исследованию которых посвящена данная глава диссертации. В поперечно-неоднородном статическом профиле показателя преломления, как правило, существуют определенные точки (локальные максимумы показателя преломления), в окрестности которых могут формироваться устойчивые солитоны. Смещение центра солитона от положения устойчивого равновесия приводит к осцилляциям его центра в окрестности этого устойчивого положения. Амплитуда осцилляций определяется исходным смещением или углом запуска солитона, а также профилем показателя преломления. В частности, в статических периодических потенциалах осцилляции наблюдаются, если угол запуска пучка не превосходит критического значения, в то время как в параболических потенциалах нет ограничений на этот угол. Если же профиль показателя преломления вдобавок периодически изменяется вдоль продольной координаты [например, если глубина решетки  $p \sim 1 + \mu \cos(\Omega_\zeta \xi)$ ], и частота модуляции  $\Omega$  подобрана таким образом, что движущийся солитон получает дополнительный поперечный импульс на строго определенных участках траектории, то амплитуда его осцилляций будет нарастать. С физической точки зрения динамика процесса эквивалентна параметрической раскачке маятника, т.е. при определенных продольных частотах модуляции его длины наступает параметрический резонанс, сопровождаемый экспоненциальным ростом амплитуды осцилляций. Описанию этого эффекта, впервые предсказанного для оптических солитонов в работе автора [369], посвящен первый параграф данной главы.

Параметрическая раскачка осцилляций солитонов важна для контроля их подвижности, выходных положений и углов распространения.

Периодические и ограниченные системы волноводов используются для визуализации целого ряда эффектов, которые были изначально предсказаны в квантовой механике, благодаря математической аналогии эволюционных уравнений, описывающих динамику светового поля в оптической среде и волновой функции квантовой системы. Одним из ярких примеров здесь служат осцилляции Раби. В модели Раби, описывающей резонансное взаимодействие двухуровневой квантовой системы с электромагнитным полем, включение внешнего поля первоначально приводит к увеличению населенности верхнего энергетического уровня, которое затем сменяется стимулированным излучением и возвратом на нижний уровень. Этот процесс повторяется периодически. В оптической системе продольная модуляция показателя преломления также эквивалентна внешнему воздействию, которое связывает различные собственные моды системы и в условиях резонанса стимулирует переходы (энергообмен) между ними. Теория резонансной модовой конверсии, приводящая к системе связанных уравнений для амплитуд мод, во многом аналогичной системе уравнений, описывающей динамику двухуровневой квантовой системы, была построена для линейных волноводов [370]. В принципе, это явление может наблюдаться в технологически изготовленных волоконных решетках [371]. В работе автора [372] переходы между различными модами, стимулированные гармонической продольной модуляцией показателя преломления вида  $p \sim 1 + \mu \cos(\Omega_\xi \xi)$ , были впервые проанализированы для нелинейной среды и для сложных поперечных профилей показателя преломления, включающих десятки волноводов и поддерживающих коллективные моды с широкими профилями. Описанию этих переходов посвящен второй параграф этой главы. В нем будет показано, что переходы могут осуществляться лишь между модами с одинаковой четностью, а также будут продемонстрированы каскадные переходы в системах, поддерживающих до трех мод одинаковой четности. Экспериментально осцилляции Раби наблюдались для блоховских волн в одномерных [373] и двумерных [374] периодических массивах волноводов, модулированных в продольном направлении.

Интересный класс решеток, периодических как в поперечном, так и в продольном направлении, возникает при оптическом наведении решетки в фоторефрактивном кристалле тремя плоскими волнами, две из которых имеют равные по модулю углы распространения противоположного знака (здесь углы отсчитываются от оси  $\xi$ ) и одинаковые амплитуды, в то время как угол распространения третьей волны отличен от угла распространения первых двух волн. В результате интерференции трех волн, одна из которых имеет постоянную распространения, отличную от постоянной распространения двух других волн, формируется глубоко модулированный динамический профиль пока-



зателя преломления, где существует некоторое выделенное направление, контролируемое направлением распространения третьей "несбалансированной" плоской волны. В работе автора [375] было впервые показано, что такая динамическая решетка передает поперечный импульс солитонам, изначально запущенным параллельно оси  $\xi$ , так что они начинают двигаться под некоторым углом, вообще говоря, не совпадающим с выделенным направлением в динамической решетке. Описанию распространения солитонов в динамических решетках посвящен третий параграф этой главы. Отметим, что дрейф солитонов в динамических решетках наблюдался экспериментально в работе [376].

В периодической линейной решетке дифракция определяется дефазировкой блоховских волн, возбуждаемых входным пучком и представляющих собой собственные моды периодической среды. Дискретная дифракция в периодической среде необычна и характеризуется наличием двух ярко выраженных боковых максимумов интенсивности, расходящихся под постоянным углом. Так как зависимость постоянной распространения  $b$  блоховских волн от пространственной частоты  $k$  является периодической, ее вторая производная  $d^2b/dk^2$ , определяющая скорость дифракционного расплывания блоховского волнового пакета, периодически обращается в ноль. Последнее позволяет подавить дифракцию широких пучков с узким угловым спектром, возбуждающих лишь блоховские волны с частотами  $k$  из достаточно узкого спектрального диапазона, внутри которого  $d^2b/dk^2 = 0$ . При этом широкий пучок должен быть запущен в решетку под соответствующим углом.

Оказывается, что продольная модуляция показателя преломления решетки может качественно влиять и на распространение узких световых пучков, запущенных параллельно оси решетки. Впервые качественное изменение динамики поперечного движения благодаря модуляции потенциала по эволюционной координате (в оптике - вдоль оси распространения) было обнаружено при анализе движения заряженной частицы в пространственно периодическом внешнем электрическом поле [377], которое гармонически изменялось во времени. Оказалось, что волновая функция частицы остается локализованной при строго определенных частотах временной модуляции поля. Этот резонансный эффект получил название динамической локализации. В работе [378] было показано, что динамическая локализация возможна при различных законах временной модуляции. Впоследствии было предсказано, что похожие эффекты могут наблюдаться не только в периодических, но и в локализованных потенциалах. Так, авторы [379], исследуя туннелирование между двумя соседними потенциальными ямами, обнаружили, что если их глубины меняются во времени противофазно (т.е. глубина одной ямы растет, а другой одновременно падает), то при определенных частотах модуляции можно достичь чисто линейной локализации волнового пакета в одной из ям. Этот эффект получил название когерентного подавления туннелирования.

Поскольку эффект динамической локализации был предсказан для заряженных частиц, движение которых невозможно наблюдать непосредственно, то для экспериментального изучения эффекта понадобилось более двадцати лет, причем оптический эксперимент был проведен в двух периодически изгибающихся в продольном направлении волноводах [380] и в массиве аналогичной геометрии [381]. При динамической локализации узкий пучок, запущенный в центральный канал массива, сначала расплывается на несколько каналов, а затем происходит его точное восстановление в исходном канале. Этот процесс периодический и он наблюдается лишь при адекватно подобранной амплитуде изгиба каналов. В идеальных условиях динамическая локализация приводит к полному восстановлению профиля пучка, без потерь на излучение. Впоследствии динамическая локализация в линейном режиме исследовалась в целом ряде работ, в том числе экспериментальных [382-385]. Она также была продемонстрирована в двумерных массивах волноводов [386,387]. Заметим, что концепция динамической локализации напрямую связана с идеей контроля дифракции в зигзагообразных массивах волноводов, впервые сформулированной в работе [387]. При наличии нелинейности такие массивы волноводов поддерживают специфические солитоны, ширина и амплитуда которых периодически осциллирует в процессе распространения [389]. Эти солитоны наблюдались экспериментально в массивах изогнутых волноводов [390].

Другой перспективный способ контроля дифракции световых пучков за счет продольной модуляции показателя преломления был предложен в работах [391,392]. В них рассматривались широкие пучки с узким угловым пространственным спектром, распространяющиеся в мелкой синусоидальной решетке показателя преломления, амплитуда которой испытывает стопроцентную модуляцию по продольной координате. Оказывается, что для определенных частот продольной модуляции возможна такая трансформация дисперсионных характеристик  $b(k)$ , при которой на зависимостях  $b(k)$  появляются плоские участки, где производные  $db/dk$ ,  $d^2b/dk^2 \approx 0$ . Если узкий пространственный спектр исходного широкого пучка содержится в пределах такого плоского участка, то собственные моды, возбуждаемые пучком, практически не испытывают дефазировки в процессе распространения, и он распространяется без расплывания. Необходимо отметить принципиальную разницу между эффектом подавления дифракции и динамической локализацией - при динамической локализации пучок заметно расплывается в определенных точках массива, зато периодически точно восстанавливает свой исходный профиль, в то время как при подавлении дифракции пучок лишь слабо осциллирует при распространении и весьма медленно расплывается, поскольку подавление дифракции не может быть абсолютным (плоские участки дисперсионной зависимости  $b(k)$  имеют конечную ширину).

Эффект подавления дифракции, обсуждавшийся в работах [391,392] для периодических решеток, по своим проявлениям аналогичен когерентному подавлению туннелирования, впервые обнаруженному для двухъямных потенциалов [379]. При этом подавление туннелирования возможно не только для широких световых пучков, но и для узких возбуждений, ширина которых совпадает с шириной одного канала в периодической решетке, а пространственный спектр является широким. В частности, резонансное подавление туннелирования было предсказано в массивах волноводов с небольшими противофазными, периодическими вдоль оси распространения, осцилляциями ширины или глубины отдельных каналов. Первый подход был предложен в работе [393], а второй сформулирован автором данной диссертации в его работе [394]. Причем в работе автора эффект подавления туннелирования впервые наблюдался экспериментально в одномерном массиве волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами. Более того, впервые было исследовано влияние фокусирующей нелинейности, которая в условиях резонанса неожиданно приводит к ухудшению локализации при промежуточных уровнях мощности и релокализации при дальнейшем повышении уровня мощности. Обсуждению эффекта подавления туннелирования посвящен четвертый параграф этой главы.

Подавление туннелирования является резонансным эффектом, возникающим лишь для дискретного набора частот продольной модуляции показателя преломления. Он сопровождается резонансным увеличением усредненной по трассе распространения мощности, сконцентрированной в возбужденном канале массива, при приближении частоты модуляции к резонансной. Нарастивание входной мощности (нелинейности) может привести к частичной делокализации в резонансе, однако оно же сопровождается заметным уширением резонансных кривых, как было показано в работе [395]. Уширение резонансных кривых интересно с практической точки зрения, так как оно указывает на резкое понижение пороговой мощности для динамического возбуждения солитонов по мере приближения частоты продольной модуляции к резонансной. Впервые эффект уширения резонансов в массивах с продольной модуляцией наблюдался в работе автора [396], его описанию посвящен пятый параграф этой главы. В частности, показано, что уширение резонансов пропорционально входной мощности пучка.

Резонансное подавление туннелирования между волноводами открывает широкие возможности для контроля дифракции и распространения пучков в двумерных массивах волноводов. В частности, противофазная периодическая модуляция показателя преломления в соседних волноводах возможна в сотовых массивах, как предсказано в работе автора [397]. В сотовых массивах скорость расплывания пучка в различных направлениях может контролироваться с помощью разбиения массива на кластеры волноводов, в одних из которых показатель преломления осциллирует в соседних каналах

противофазно, приводя к подавлению туннелирования, а в других - синфазно, что практически не влияет на скорость туннелирования. Например, при специальном подборе кластеров дифракция может быть сделана сильно анизотропной или практически одномерной. Двумерные модулированные массивы могут передавать без дифракционного искажения вихревые структуры, а также сложные изображения, сформированные из множества световых пучков, что было подтверждено экспериментально в работе [398]. Шестой параграф посвящен описанию эффекта подавления туннелирования в двумерных массивах волноводов.

Как уже упоминалось в главе 1, одним из основных препятствий для наблюдения полностью трехмерных оптических пульс, как правило, является отсутствие материалов с достаточно большой дисперсией групповых скоростей. Это ограничение преодолевается переходом к сверхкоротким импульсам (десятки и единицы фемтосекунд), но для таких импульсов уже существенны дисперсионные эффекты высших порядков, которые в итоге разрушают пули. Поскольку оптические пули формируются, когда длины фазовой самомодуляции, дисперсии и дифракции оказываются примерно равны, то использование более длинных импульсов означает необходимость ослабления дифракционного расплывания. Именно такую возможность и предоставляют массивы волноводов, модулированные в продольном направлении, поскольку в них эффективный дифракционный коэффициент уменьшается по мере приближения частоты модуляции к резонансной, причем в резонансе дифракция оказывается практически полностью подавленной. Возможность формирования оптических пульс при пониженных уровнях мощности в продольно модулированных массивах волноводов была одновременно предсказана в работе автора [399] для сотовых массивов с противофазной модуляцией показателя преломления в соседних каналах и в работе [400] для массива периодически изгибающихся каналов. Описанию динамики формирования и распространения световых пульс в модулированных массивах посвящен последний, седьмой параграф этой главы.

В основу данной главы положены результаты оригинальных исследований резонансных явлений в продольно модулированных решетках показателя преломления, таких как раскочка осцилляций солитонов, стимулированное преобразование направляемых мод, дрейф пучков в динамических решетках, подавление туннелирования и формирование одно-, двух- и трехмерных солитонов, опубликованные в работах [369,372,375,394,396,397,399].

## §6.1. Параметрическая раскачка осцилляций одномерных солитонов в продольно-модулированных решетках

Контроль подвижности и управление траекториями распространения солитонов в пространственно-неоднородных средах представляет очевидный интерес для практических приложений. Поскольку траектория движения интегрального центра солитона в среде с неоднородным показателем преломления определяется градиентом показателя преломления (см. параграф 1.1), то, варьируя этот градиент по трассе распространения, можно влиять на траекторию движения солитона. В частности, при периодическом изменении градиента с определенной частотой возможна резонансная раскачка осцилляций, подобная параметрической раскачке маятника. Динамика этого процесса в периодических и параболических профилях показателя преломления обсуждается в этом параграфе [369].

Для описания распространения излучения в фокусирующей кубичной среде, показатель преломления которой модулирован как в продольном, так и поперечном направлении, используем уравнение Шредингера для нормированной комплексной амплитуды поля:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - q|q|^2 - pQ(\xi)R(\eta)q. \quad (6.1)$$

Здесь все нормировки совпадают с нормировками, введенными в параграфе 1.1. Изменение показателя преломления в продольном направлении описывается гармонической функцией  $Q(\xi) = 1 - \mu \cos(\Omega_\xi \xi)$ , где  $\mu < 1$  - глубина, а  $\Omega_\xi$  - частота продольной модуляции. Рассматриваются два вида поперечной модуляции показателя преломления: периодическая с  $R(\eta) = \cos(\Omega_\eta \eta)$  и параболическая с  $R(\eta) = 1 - (\Omega_\eta \eta)^2 / 2$ , где  $\Omega_\eta$  - пространственная частота. Поскольку продольная модуляция показателя преломления является гладкой и ее глубина мала по сравнению с невозмущенным показателем преломления, то отраженными волнами можно пренебречь.

Используя метод эффективных частиц, подробно описанный в параграфе 1.1, можно вывести уравнение движения для центра солитона  $\eta_{\text{int}}(\xi) = U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 \eta d\eta$  в продольно-модулированной решетке:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \eta_{\text{int}} = pQ(\xi)U^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dR/d\eta |q|^2 d\eta, \quad (6.2)$$

где  $U$  - мощность солитона или "масса" соответствующей ему эффективной частицы, которая сохраняется в процессе распространения. Предполагая, что решетка показателя преломления достаточно мелкая и слабо влияет на профиль пучка, используем автономную подстановку  $q(\eta, \xi) = q_0 \operatorname{sech}[\chi(\eta - \eta_{\text{int}})] \exp[i\alpha(\eta - \eta_{\text{int}}) + i\phi]$  в правой части уравнения (6.2), где  $q_0$  - амплитуда,  $\chi$  - форм-фактор или обратная ширина пучка,  $\alpha$  - угол распространения,  $\phi$  - фаза пучка. Поскольку  $q_0 \approx \chi$  в предельных случаях узких ( $\Omega_\eta \ll \chi$ ) и широких ( $\Omega_\eta \gg \chi$ ) солитонов, то в дальнейшем параметр  $q_0$  можно исключить. В результате для бипериодической решетки получим уравнение движения параметрически раскачиваемого нелинейного маятника:

$$\frac{d^2}{d\xi^2} \eta_{\text{int}} + [1 - \mu \cos(\Omega_\xi \xi)] \frac{\Omega_0^2}{\Omega_\eta} \sin(\Omega_\eta \eta_{\text{int}}) = 0, \quad (6.3)$$

где параметр  $\Omega_0 = [p\Omega_\eta^2(\pi\Omega_\eta/2\chi) \sinh^{-1}(\pi\Omega_\eta/2\chi)]^{1/2}$  определяет частоту малоамплитудных осцилляций солитонного центра при  $\mu = 0$ . В дальнейшем мы полагаем, что солитон запущен в решетку в точке  $\eta = 0$ , так что  $\eta_{\text{int}}|_{\xi=0} = 0$  и  $d\eta_{\text{int}}/d\xi|_{\xi=0} = \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  - исходный угол распространения. Для малоамплитудных осцилляций с  $\Omega_\eta \eta_{\text{int}} \ll 1$  при  $\mu \neq 0$  в среде с параболическим профилем показателя преломления уравнение (6.3) сводится к уравнению Матье.

Как уже упоминалось ранее, при  $\mu = 0$  движение солитона подобно движению эффективной частицы в периодическом потенциале. При превышении исходным углом критического значения  $\alpha_{\text{cr}} = 2\Omega_0/\Omega_\eta$ , осцилляции частицы в исходной потенциальной яме сменяются ее движением поперек решетки. Траектория движения описывается формулой  $\eta_{\text{int}} = (2/\Omega_\eta) \arcsin[m \operatorname{sn}(\Omega_\eta \alpha_{\text{cr}} \xi / 2, m)]$  при  $\alpha_0 < \alpha_{\text{cr}}$ , где  $m = \alpha_0 / \alpha_{\text{cr}}$ , и формулой  $\eta_{\text{int}} = (2/\Omega_\eta) \arcsin[\operatorname{sn}(\Omega_\eta \alpha_0 \xi / 2; m)]$  при  $\alpha_0 > \alpha_{\text{cr}}$ , где  $m = \alpha_{\text{cr}} / \alpha_0$  (см. также параграф 1.1). Для малых исходных углов первая из приведенных формул описывает обычные гармонические осцилляции малой амплитуды  $\eta_{\text{int}} = (\alpha_0 / \Omega_0) \sin(\Omega_0 \xi)$ , в то время как при  $\alpha_0 \gg \alpha_{\text{cr}}$  получаем движение эффективной частицы с практически постоянной скоростью  $\eta_{\text{int}} = \alpha_0 \xi$ . При  $\alpha_0 \rightarrow \alpha_{\text{cr}}$  осцилляции центра становятся ангармоническими, и, согласно уравнению (6.3), их частота  $\Omega_0 / [4K(m)]$ , где  $K(m)$  - эллиптический интеграл первого рода, становится функцией исходного угла запуска  $\alpha_0$  и резко падает при  $\alpha \rightarrow \alpha_{\text{cr}}$ .

При наличии продольной модуляции показателя преломления, т.е. когда  $\mu \neq 0$ , уравнение (6.3) предсказывает раскачку малых осцилляций солитона с экспоненциально растущей амплитудой при выполнении условия параметрического резонанса  $\Omega_\xi = 2\Omega_0$ . Интересно, что по мере роста амплитуды осцилляций, их текущая частота уменьшается, в согласии с формулами, приведенными выше, и система выходит из па-

раметрического резонанса. Последнее приводит к уменьшению амплитуды осцилляций и параллельному увеличению их текущей частоты, т.е. условия параметрического резонанса снова начинают выполняться. Следовательно, в периодической решетке раскачка и затухание осцилляций периодически сменяют друг друга вдоль продольной координаты  $\xi$ . Однако, в параболическом потенциале, где частота осцилляций  $\Omega_0 = p^{1/2}\Omega_\eta$  эффективной частицы не зависит от их амплитуды, условия параметрического резонанса никогда не нарушаются, и рост амплитуды осцилляций ограничивается лишь радиационными потерями.

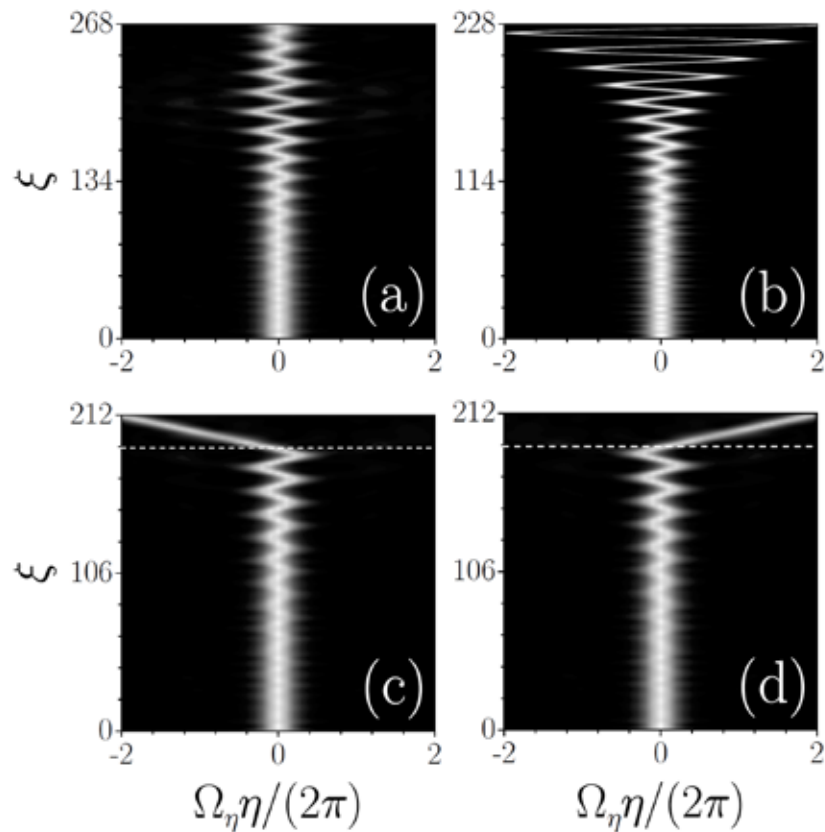


Рис. 6.1. Параметрическая раскачка осцилляций центра солитона в бипериодической решетке (a) и в параболическом потенциале (b). Панели (c) и (d) иллюстрируют возможность контроля выходного угла распространения солитона. На панели (c)  $\alpha_0 = 0.01\alpha_{cr}$  а на панели (d)  $\alpha_0 = -0.01\alpha_{cr}$ . Пунктирные линии показывают границу решетки и однородной среды. Во всех случаях  $p = 0.25$ ,  $\mu = 0.25$ ,  $\Omega_\eta = 1$ ,  $\chi = 1$ , и выполнено условие  $\Omega_\xi = 2\Omega_0$  параметрического резонанса.

Реальная динамика распространения солитона в продольно-модулированных решетках несколько отличается от динамики в идеализированной модели эффективных частиц, поскольку последняя не учитывает потери мощности на излучение при углах распространения, близких к критическому, или превышающих его. Однако, существует

достаточно широкий диапазон параметров, в котором поведение солитона хорошо описывается моделью эффективных частиц. Чтобы продемонстрировать это, мы решали уравнение (6.1) с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = \chi \operatorname{sech}(\chi\eta) \exp(i\alpha_0\eta)$ , где  $\alpha_0 \sim 0.01\alpha_{\text{cr}}$  и  $\alpha_{\text{cr}} = 2\Omega_0/\Omega_\eta$ . Частота продольной модуляции  $\Omega_\xi \approx 2\Omega_0$  для периодического и параболического профилей показателя преломления выбиралась с учетом различия частот свободных колебаний. Типичная динамика раскачки колебаний в периодическом и параболическом профилях показателя преломления представлена на рис. 6.1(a) и 6.1(b) соответственно. Четко заметен выход из параметрического резонанса в периодической решетке и неограниченная раскачка осцилляций в параболическом потенциале.

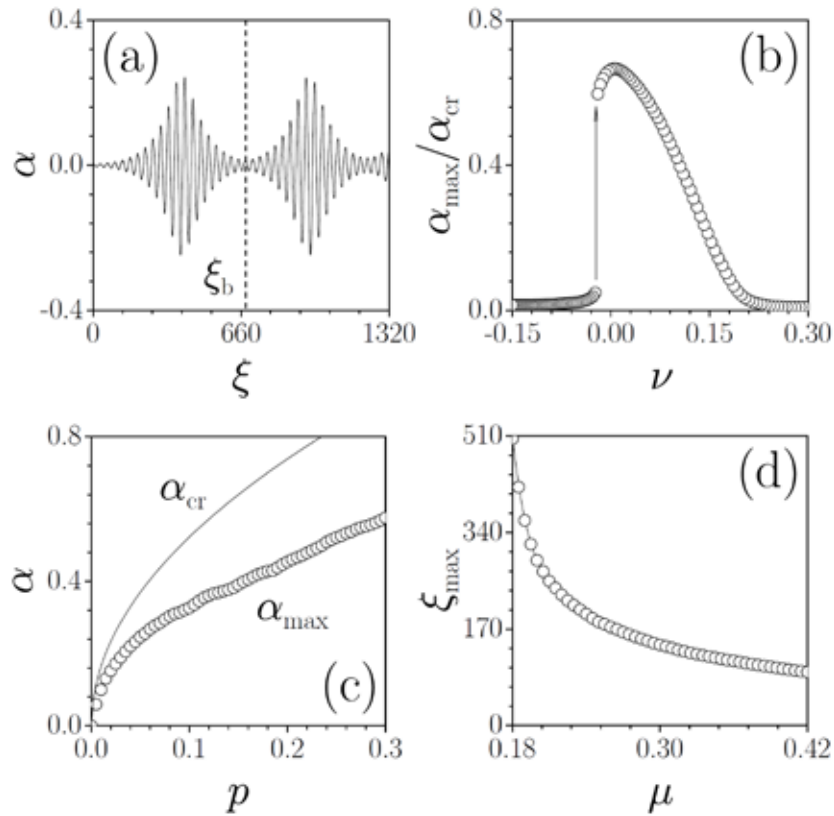


Рис. 6.2. (a) Зависимость текущего угла распространения солитона от продольной координаты при  $p = 0.05$ ,  $\mu = 0.25$ . (b) Максимальный угол распространения солитона как функция отстройки при  $p = 0.25$ ,  $\mu = 0.25$ . (c) Критический и максимальный углы в зависимости от глубины решетки при  $\mu = 0.25$ . (d) Зависимость расстояния  $\xi_{\max}$  от глубины продольной модуляции показателя преломления при  $p = 0.25$ . Во всех случаях  $\Omega_\eta = 1$ ,  $\chi = 1$ . Для панелей (a),(c),(d) выполняется условие резонанса  $\Omega_\xi = 2\Omega_0$ .

Были определены зависимости интегрального центра  $\eta_{\text{int}}$  и текущего угла распространения  $\alpha = d\eta_{\text{int}}/d\xi$  солитона от координаты  $\xi$ . В бипериодической решетке максимальное значение угла достигается на определенном расстоянии  $\xi_{\max} < \xi_b$ , где  $\xi_b$  - специфици-



ческий период биений, обозначенный на рис. 6.2(a). Зависимость угла  $\alpha_{\max}$  от нормированной отстройки частоты продольной модуляции  $\nu = (\Omega_\xi - 2\Omega_0) / 2\Omega_0$  изображена на рис. 6.2(b). Эта резонансная зависимость напоминает классическую асимметричную резонансную кривую для осциллятора с "мягкой" нелинейностью. Отметим резкий скачок максимального угла распространения с увеличением отстройки  $\nu$ , характерный для нелинейных параметрически возбуждаемых систем. Зависимость максимального угла  $\alpha_{\max}$  от глубины решетки  $p$  представлена на рис. 6.2(c). При модуляции с нулевой отстройкой  $\nu = 0$  и для  $p \geq 0.1$  выход системы из параметрического резонанса происходит, когда текущий угол распространения  $\alpha$  достигает значений  $\sim 0.6\alpha_{\text{cr}}$ . При этом максимальный угол растет с увеличением глубины решетки примерно как  $\alpha_{\max} \sim p^{1/2}$ . Рис. 6.2(d) иллюстрирует зависимость длины распространения  $\xi_{\max}$ , на которой текущий угол распространения достигает его максимального значения, от глубины  $\mu$  продольной модуляции показателя преломления. В интервале значений  $0.18 \leq \mu \leq 0.42$  расстояние  $\xi_{\max}$  экспоненциально падает с увеличением глубины продольной модуляции, в то время как максимальный угол распространения  $\alpha_{\max}$  практически не изменяется. Для больших  $\mu$  колебания становятся хаотическими. Заметим также, что значительный рост амплитуды осцилляций возможен лишь при  $\Omega_\eta / \chi \leq 1$ , в то время как при  $\Omega_\eta / \chi \gg 1$  распространение пучка сопровождается значительными искажениями его профиля, а  $\alpha_{\max}$  резко падает с ростом  $\Omega_\eta / \chi$ . Такие же искажения профиля наблюдаются в глубоких решетках показателя преломления с  $p > 0.5$  и при  $\mu > 0.5$ , что приблизительно определяет диапазон параметров, в котором справедлива модель эффективных частиц, и возможна заметная раскачка солитона.

Параметрическая раскачка колебаний может быть использована для контроля выходного положения и угла распространения солитона. Эта возможность иллюстрируется на рис. 6.1(c) и 6.1(d), показывающих динамику распространения солитона в среде, где сегмент с бипериодической модуляцией показателя преломления сменяется однородной нелинейной средой. Поскольку малые осцилляции центра солитона параметрически усиливаются, то небольшие изменения исходного угла распространения приводят к значительному изменению выходных углов. Так, на рис. 6.1(c) и 6.1(d) исходные углы были весьма малы, но противоположны по знаку, т.е.  $\alpha_0 = \pm 0.01\alpha_{\text{cr}}$ . Аналогично, значительные изменения выходных углов распространения могут быть достигнуты даже при небольших изменениях продольной глубины модуляции показателя преломления.

Таким образом, продольная модуляция показателя преломления может привести к резонансной параметрической раскачке поперечных осцилляций солитонов, что открывает перспективы для детектирования (путем усиления) малых смещений центров солитонов, контроля их выходных положений и углов распространения.

## §6.2. Резонансные преобразования мод в нелинейных продольно-модулированных потенциалах

Среды с пространственно-неоднородными профилями показателя преломления поддерживают собственные моды, которые могут быть локализованными (моды волноводов) или периодическими (блоховские волны в периодических решетках). Если в системе сосуществует несколько мод с разными постоянными распространения, то периодическая модуляция показателя преломления в продольном направлении может стимулировать энергообмен между модами с одинаковой симметрией - например между четными модами локализованных волноводов. Этот резонансный эффект описывается уравнениями, аналогичными таковым для динамики населенностей двухуровневой квантовой системы во внешнем периодическом поле. В этом параграфе изучается влияние нелинейности на резонансные преобразования мод и иллюстрируется возможность каскадных преобразований в многомодовых системах [372].

При описании эффекта резонансного преобразования мод будем использовать кубичное уравнение Шредингера (6.1) с различными поперечными профилями показателя преломления  $R(\eta)$  с достаточно мелкой гармонической продольной модуляцией  $Q(\xi) = 1 + \mu \cos(\Omega_\xi \xi)$  с  $\mu < 1$ . Рассмотрим сначала простейший случай волновода с гауссовским профилем показателя преломления  $R(\eta) = \exp[-(\eta/W)^2]$ . Такой волновод поддерживает три линейных моды при  $p = 2.3$  и  $W = 2$ . Профили линейных стационарных мод  $w_n(\eta)$  и соответствующие им постоянные распространения  $b_n$  могут быть найдены при решении уравнения  $bw = (1/2)d^2w/d\eta^2 + pR(\eta)w$ , которое получается при подстановке  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(ib\xi)$  в линейную версию уравнения (6.1) с  $\mu = 0$ . Для наглядности, на рис. 6.3(a) профиль показателя преломления изображен в виде потенциальной ямы, а линейные симметричные моды, поддерживаемые им, изображены как собственные функции, соответствующие различным "энергетическим" уровням. Мы используем моду  $w_3(\eta)$  в качестве начального условия в линейном варианте уравнения (6.1) при наличии продольной модуляции показателя преломления с  $\mu \neq 0$ . При этом оказывается, что продольная модуляция показателя преломления на частоте  $\Omega_\xi \approx b_1 - b_3$ , где  $b_{1,3}$  - постоянные распространения линейных мод с одинаковой четностью, может стимулировать преобразование мод  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$ , качественно похожее на осцилляции Раби. Преобразование мод является периодическим процессом, т.е. на определенном расстоянии происходит восстановление исходного распределения поля, которое, правда, не является полным из-за потерь на излучение, видимых на рис. 6.3(b). Рис. 6.3(c) и 6.3(d) показывают осцилляции амплитуды поля  $q_c = q|_{\eta=0}$  в центре волновода. Для мелкой продольной модуляции с  $\mu \ll 1$  решение ищется как суперпозиция двух мод  $q(\eta, \xi) = C_1(\xi)w_1(\eta) \exp(ib_1\xi) + C_3(\xi)w_3(\eta) \exp(ib_3\xi)$ , где  $C_{1,3}(\xi)$  - комплексные весовые коэф-

коэффициенты [например, переход  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  соответствует начальным условиям  $C_3(0)=1, C_1(0)=0$ ]. Подстановка поля в уравнение (6.1) и приравнивание коэффициентов при синхронно осциллирующих членах  $\exp(ib_{1,3}\xi)$  позволяет получить следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} i\langle w_1 w_1 \rangle \frac{dC_1}{d\xi} &= \frac{1}{2} p\mu \langle w_1 R w_3 \rangle C_3, \\ i\langle w_3 w_3 \rangle \frac{dC_3}{d\xi} &= \frac{1}{2} p\mu \langle w_3 R w_1 \rangle C_1, \end{aligned} \quad (6.4)$$

в которой угловые скобки  $\langle \rangle$  обозначают пространственное интегрирование, например,  $\langle w_1 R w_3 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\eta) R(\eta) w_3(\eta) d\eta$ . Заметим, что переход возможен лишь между модами одинаковой четности, поскольку для мод с разной четностью интеграл перекрытия  $\langle w_i R w_k \rangle$  в правой части (6.4) обращается в ноль для симметричного профиля показателя преломления  $R(\eta)$ . Используя систему уравнений (6.4), получаем частоту осцилляций Раби  $\Omega_R = (\mu p / 2) \langle w_1 R w_3 \rangle / \langle w_1 w_1 \rangle^{1/2} \langle w_3 w_3 \rangle^{1/2}$ , пропорциональную абсолютной глубине  $\mu p$  продольной модуляции показателя преломления. Стимулированное преобразование мод возможно и в волноводах с периодически изменяющейся шириной, но в этом случае потери на излучение заметно возрастают.

Как уже упоминалось, стимулированное преобразование мод является резонансным процессом. Преобразование наиболее эффективно, а потери на излучение минимальны на резонансной частоте модуляции  $\Omega_\xi = b_1 - b_3$ . При наличии небольшой отстройки от резонанса преобразование мод является неполным - в этом случае весовой коэффициент исходной моды  $C_i$  принимает минимальное значение на некотором расстоянии  $\xi = \xi_{tr}$ , но не обращается в ноль, а также заметны остаточные осцилляции амплитуды поля  $q_c$  в центре волновода. Контраст  $V = (q_c^{\max} - q_c^{\min}) / (q_c^{\max} + q_c^{\min})$  этих осцилляций характеризует качество преобразования мод. Зависимость контраста осцилляций амплитуды поля  $V$  от нормированной отстройки частоты модуляции  $\nu$  от резонанса (в процентах) приведена на рис. 6.3(е). Эффективное преобразование мод возможно лишь в узком диапазоне частот продольной модуляции, что говорит о возможности селективного преобразования мод даже в многомодовых системах с плотно расположенными уровнями. Длина преобразования моды  $\xi_{tr} = \pi / \Omega_R$  монотонно уменьшается с ростом глубины продольной модуляции  $\mu$  [рис. 6.3(ф)], в согласии с аналитическим выражением для частоты Раби, полученным выше. При  $\xi = \xi_{tr}$  профиль моды  $w_3(\eta)$  с постоянной распространения  $b_3$  в точности переходит в профиль моды  $w_1(\eta)$  с постоянной распространения  $b_1$ .

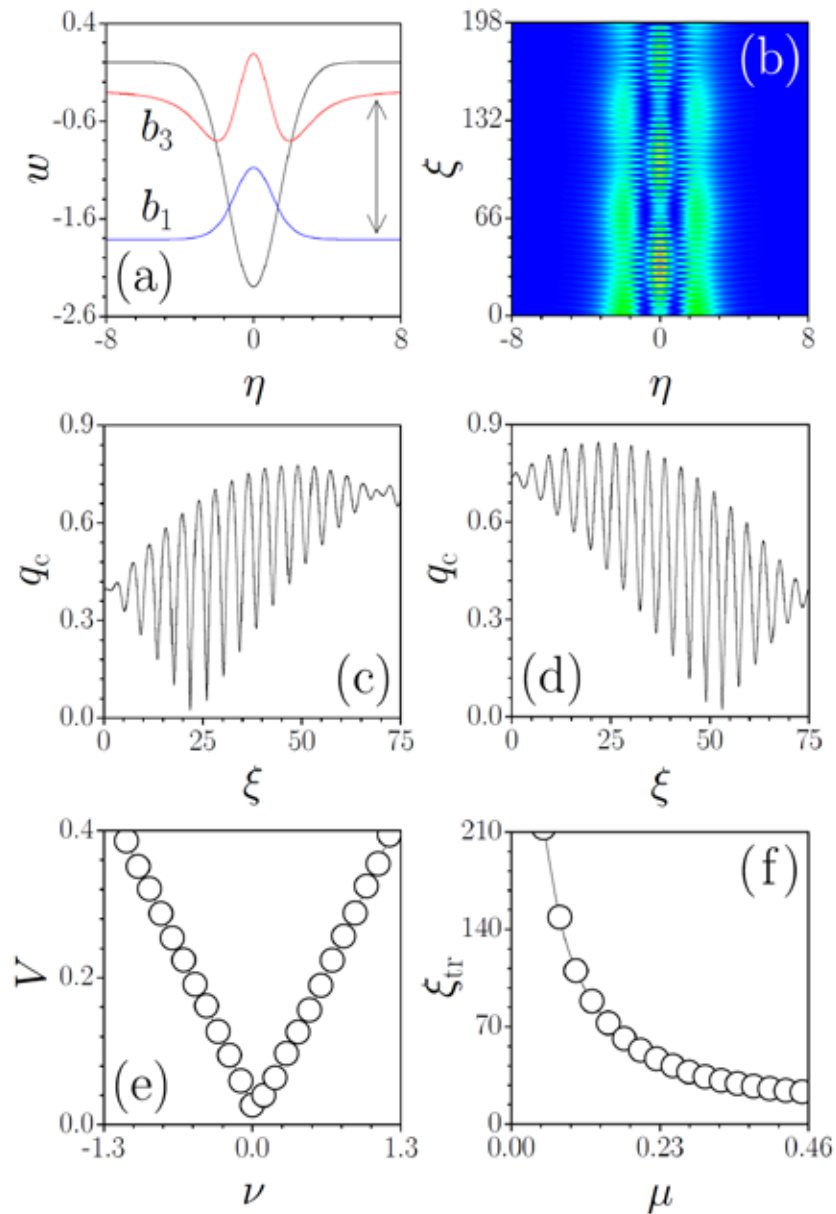


Рис. 6.3. (а) Линейные моды трехмодового гауссовского волновода. Черная кривая показывает потенциальную яму, а профиль каждой моды сдвинут в вертикальном направлении в соответствии с энергетическими уровнями в яме. Стрелки показывают направления перехода. (b) Динамика распространения при  $\Omega_\xi = 0.95(b_1 - b_3)$ ,  $\mu = 0.15$  и начальном условии, соответствующем третьей моде  $w_3(\eta)$ . Амплитуды поля  $q_c$  в зависимости от расстояния  $\xi$  для резонансных переходов  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  (c) и  $w_1(\eta) \rightarrow w_3(\eta)$  (d) при  $\Omega_\xi = b_1 - b_3$ ,  $\mu = 0.15$ . (e) Контраст осцилляций поля в центре волновода как функция отстройки  $\nu$  для перехода  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  при  $\mu = 0.15$ . (f) Расстояние преобразования мод  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  как функция глубины продольной модуляции  $\mu$  при  $\Omega_\xi = b_1 - b_3$ .

Возможность каскадного преобразования мод продемонстрирована на рис. 6.4, где мы рассматриваем пятимодовый гауссовский волновод с  $W = 2$ ,  $p = 6$ . На входе задается

симметричная мода пятого порядка  $w_5(\eta)$  [рис. 6.4(a)]. При частоте продольной модуляции  $\Omega_\xi = b_5 - b_3$  она трансформируется в третью моду  $w_5(\eta) \rightarrow w_3(\eta)$  на расстоянии  $\xi_{tr}^{(1)} \approx 32$  [рис. 6.4(b)]. В этой точке частота модуляции изменяется на  $\Omega_\xi = b_3 - b_1$ , чтобы стимулировать переход  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$ , который завершается на расстоянии  $\xi_{tr}^{(2)} \approx 87$ , после чего продольная модуляция показателя преломления отключается, чтобы избежать обратного преобразования  $w_1(\eta) \rightarrow w_3(\eta)$ . Низкий контраст остаточных осцилляций поля в центре волновода при  $\xi > \xi_{tr}^{(2)}$  указывает на высокое качество каскадного преобразования мод с использованием промежуточного уровня. Соответствующая динамика распространения приведена на рис. 6.4(c). Заметим, что прямое преобразование мод  $w_5(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  также возможно при частоте модуляции  $\Omega_\xi = b_5 - b_1$ , однако этот процесс сопровождается большими потерями на излучение.

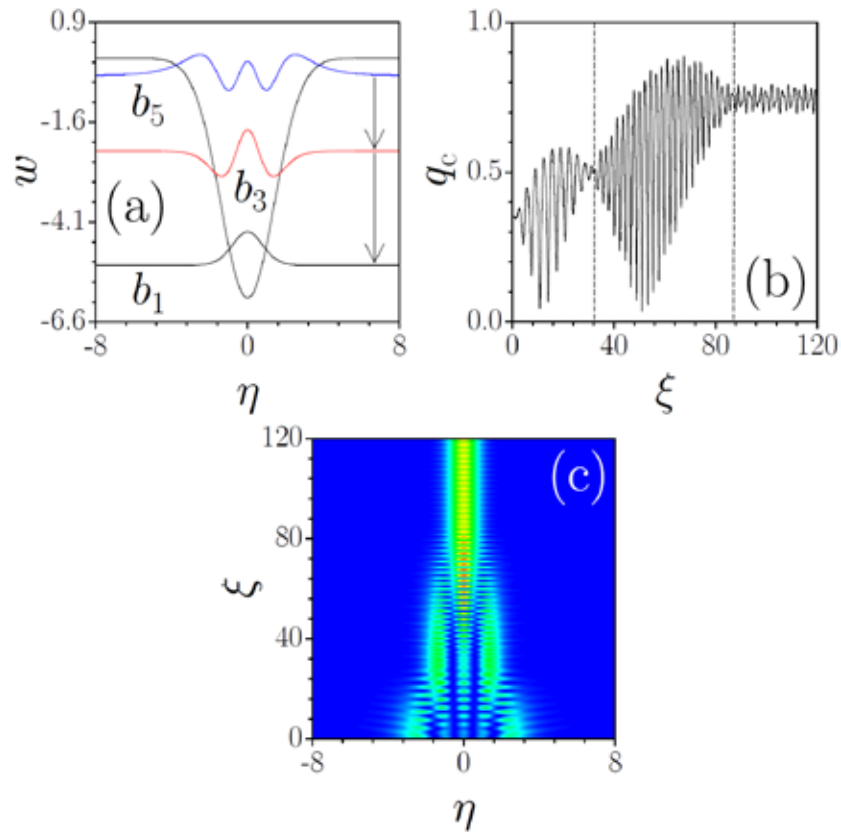


Рис. 6.4. (a) Линейные моды пятимодового гауссовского волновода. (b) Амплитуда  $q_c$  в зависимости от расстояния  $\xi$  для каскадного преобразования мод  $w_5 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$  при  $\mu = 0.1$ . Пунктирные линии соответствуют расстояниям  $\xi_{tr}^{(1)}$  и  $\xi_{tr}^{(2)}$ . (c) Динамика преобразования мод  $w_5 \rightarrow w_3 \rightarrow w_1$ , соответствующая панели (b).

Стимулированное преобразование мод возможно также в нелинейном режиме. При наличии нелинейности постоянные распространения и профили мод становятся функциями мощности  $U = \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta$ . На рис. 6.5(a) показан сдвиг постоянных распро-

странения с увеличением мощности, приводящий к изменению частоты перехода  $b_3(U) - b_1(U)$  в нелинейном трехмодовом гауссовском волноводе с  $W = 2$ ,  $p = 2.3$ . Профили мод были получены при решении уравнения  $bw = (1/2)d^2w/d\eta^2 + pR(\eta)w + w^3$ , следующего из уравнения (6.1) при  $\mu = 0$ . При наличии продольной модуляции с  $\mu > 0$  третья мода выбиралась в качестве начального условия. Варьируя частоту продольной модуляции, удается получить преобразование мод даже при умеренных уровнях мощности  $U < 3$ . Динамика преобразования мод  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  показана на рис. 6.5(b) и 6.5(c) для мощности  $U = 1$ . Исходные и конечные состояния системы изображены кружками на рис. 6.5(a) для различных значений входной мощности, в то время как направление

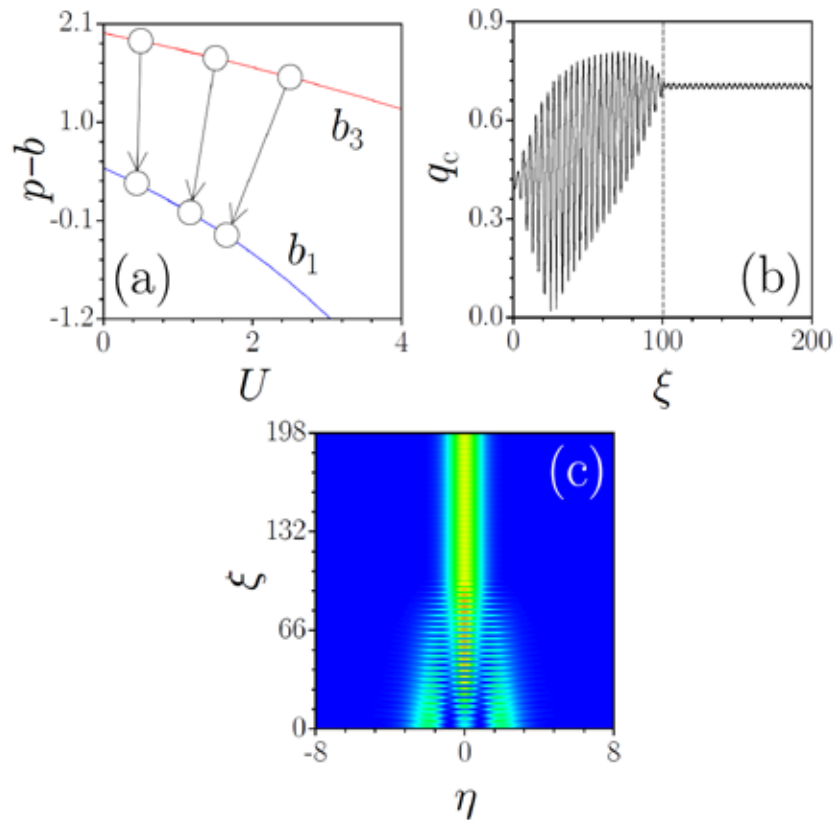


Рис. 6.5. (а) Зависимости постоянных распространения первой и третьей мод гауссовского волновода от мощности. Стрелки указывают направления переходов  $w_3 \rightarrow w_1$  при  $\mu = 0.15$ , где исходные и конечные состояния отмечены кружками. (б) Зависимость амплитуды  $q_c$  от расстояния  $\xi$  при  $U = 1$ ,  $\Omega_\xi = 1.603$ ,  $\mu = 0.15$ . Пунктирная линия соответствует расстоянию, на котором продольная модуляция показателя преломления была отключена. (с) Динамика перехода  $w_3 \rightarrow w_1$  соответствующая панели (б). Во всех случаях  $W = 2$ ,  $p = 2.3$ .

преобразования отображается стрелками. Отчетливо видно, что увеличение  $U$  сопровождается ростом потерь на излучение. При этом частота продольной модуляции, соот-

ветствующая наиболее эффективному преобразованию, также растет с увеличением мощности и остается близкой к разности постоянных распространения  $b_3(U) - b_1(U)$ .

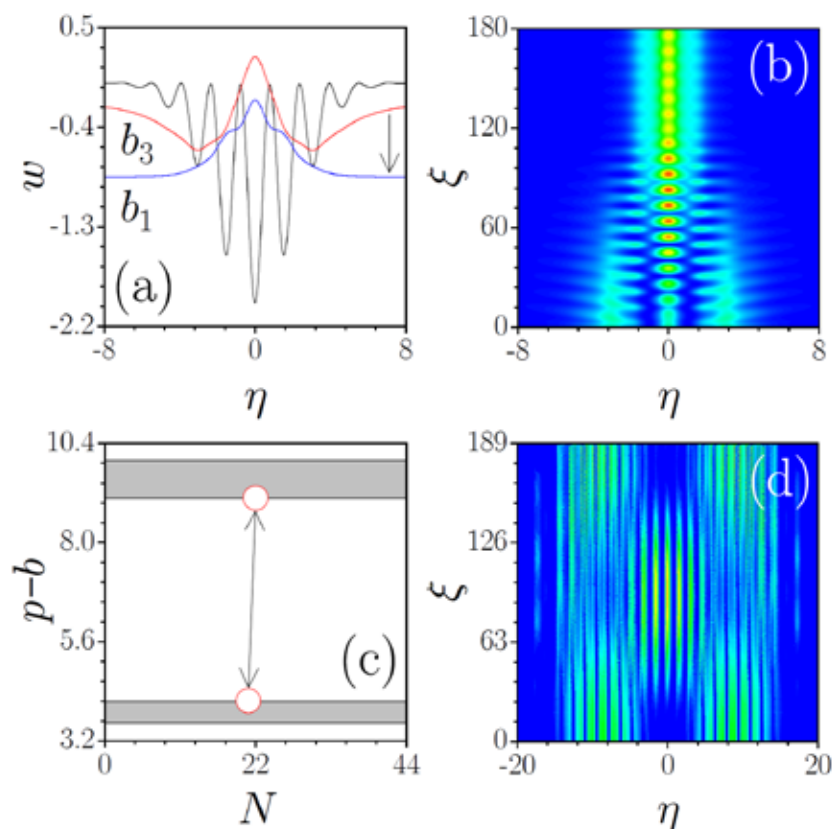


Рис. 6.6. (a) Линейные моды трехмодового композитного волновода при  $\Omega = 4$ ,  $W = \pi$ ,  $p = 2$ . (b) Динамика нелинейного перехода  $w_3 \rightarrow w_1$  в таком волноводе при  $U = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega_\xi = 0.662$ . Продольная модуляция отключается на расстоянии  $\xi = \xi_{\text{tr}} = 122.8$ . (c) Спектр постоянных распространения в широком ограниченном массиве волноводов с  $\Omega_\eta = 4$ ,  $W = 8\pi$ ,  $p = 10$  (постоянные распространения сконцентрированы в серых областях). (d) Динамика перехода, соответствующая стрелке на панели (c), при  $U = 1$ ,  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega_\xi = 4.92$ .

Стимулированное преобразование мод возможно при использовании различных механизмов каналирования излучения. В качестве одного из примеров приведем преобразование мод в периодической решетке с пространственной частотой  $\Omega_\eta$  и широкой гауссовской огибающей  $R(\eta) = (1/2)[1 + \cos(\Omega_\eta \eta)] \exp(-\eta^2 / W^2)$ . Соответствующий профиль показателя преломления (в виде потенциальной ямы) и нелинейные моды с мощностью  $U = 1$  приведены на рис. 6.6(a). Рис. 6.6(b) иллюстрирует динамику высококачественного стимулированного преобразования мод  $w_3(\eta) \rightarrow w_1(\eta)$  в таком волноводе, возможного, несмотря на то, что существование мод обусловлено как полным внутренним, так и брэгговским отражением. Также была рассмотрена возможность преобразования

мод между разрешенными зонами в достаточно больших, но конечных массивах волноводов, профиль показателя преломления которых описывается функцией  $R(\eta) = (1/2)[1 + \cos(\Omega_\eta \eta)] \exp(-\eta^8 / W^8)$  при  $\Omega_\eta = 4$ ,  $p = 10$ ,  $W = 8\pi$ . Этот массив поддерживает 44 локализованные линейные моды, постоянные распространения  $b_k$  которых формируют разрешенные зоны [в этих зонах интервал между постоянными распространения весьма мал, так что мы показываем эти зоны на рис. 6.6(c) как непрерывные], разделенные запрещенной зоной. Динамика преобразования нелинейной моды с  $U = 1$  и постоянной распространения на дне верхней разрешенной зоны в моду с постоянной распространения с верхней границы нижней разрешенной зоны [в соответствии со стрелкой на рис. 6.6(c)] представлена на рис. 6.6(d).

Подводя итоги, периодическая продольная модуляция показателя преломления приводит к периодическому резонансному преобразованию мод одинаковой четности в линейных или нелинейных волноводных структурах, аналогичному осцилляциям Раби в двухуровневых системах. Подобные переходы экспериментально наблюдались для блоховских волн в периодических массивах волноводов [373].

### **§6.3. Контролируемый дрейф солитонов в динамических решетках показателя преломления**

При оптической индукции одномерных периодических решеток показателя преломления в фоторефрактивных кристаллах, как правило, используются симметричные пары пересекающихся плоских волн. В результате формируется симметричная решетка, ось которой совпадает с осью  $\xi$ , а амплитуда остается неизменной в продольном направлении. Профили статических солитонов в таких решетках исследовались в параграфе 1.3. Однако, при наличии третьей плоской волны, с углом распространения, отличающемся от углов распространения первых двух волн, оптически индуцированная решетка становится динамически модулированной вдоль  $\xi$  и в ней появляется выделенное направление. Естественно ожидать, что такая решетка может передавать поперечный импульс солитонам, изначально запущенным вдоль оси  $\xi$ , вызывая их дрейф. При этом скорость дрейфа практически не меняется в процессе распространения, в отличие от ситуации, когда солитон запускается под сверхкритическим углом в статическую решетку и захватывается в более или менее удаленном канале из-за потерь на излучение. В этом параграфе исследуется влияние параметров волн, индуцирующих динамическую решетку, и параметров солитона на скорость его дрейфа [375].

Рассмотрим распространение одномерного пучка вдоль оси  $\xi$  фоторефрактивного кристалла, к которому приложено статическое внешнее поле. Предполагается, что обыкновенно-поляризованные плоские волны наводят решетку показателя преломле-



ния, влияющую на распространение необыкновенно поляризованного солитонного пучка. Для описания динамики распространения пучка используем модель, введенную в параграфе 2.7 и учитывающую насыщение фокусирующего фоторефрактивного отклика:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - Eq(S|q|^2 + pR)(1 + S|q|^2 + pR)^{-1}, \quad (6.5)$$

где параметр  $E$  характеризует напряженность внешнего электрического поля, а  $S$  - параметр насыщения. Нормировки всех величин в уравнении (6.5) совпадают с нормировками, введенными в параграфе 2.7. Предполагаем, что оптическая решетка индуцируется тремя плоскими волнами  $a \exp(\pm i\alpha\eta) \exp(-i\alpha^2\xi/2)$ ,  $b \exp(i\beta\eta) \exp(-i\beta^2\xi/2)$ , где  $a, b$  - действительные амплитуды волн, а  $\pm\alpha, \beta$  - их углы распространения. Одна из волн предполагается слабой, т.е. ее амплитуда  $b < a$ . В дальнейшем мы фиксируем  $a = 0.5$ ,  $\alpha = 4$  и варьируем параметры слабой "контрольной" волны  $b, \beta$ . Профиль решетки определяется интенсивностью интерференционной картины трех плоских волн и описывается функцией  $R(\eta, \xi) = 4a^2 \cos^2(\alpha\eta) + b^2 + 4ab \cos(\alpha\eta) \cos[\beta\eta + (\alpha^2 - \beta^2)\xi/2]$ . Он изображен на рис. 6.7. При  $b = 0$  решетка является статической, в то время как при  $b > 0$  она продольно модулирована. Глубина и пространственная частота модуляции решетки вдоль оси  $\xi$  растут с увеличением амплитуды  $b$  и угла распространения  $\beta$  контрольной волны.

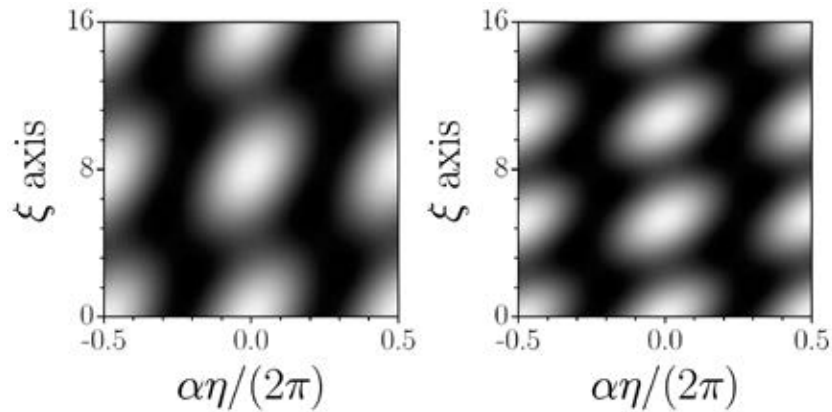


Рис. 6.7. Профили динамических решеток показателя преломления при  $\beta = 4.192$  (слева) и  $\beta = 4.284$  (справа) для  $b = 0.3$ .

Поскольку при  $b = 0$  решетка статична, то она поддерживает солитонные решения  $q(\eta, \xi) = w(\eta) \exp(i\lambda\xi)$ , распространяющиеся вдоль оси решетки. Их свойства уже были описаны в диссертации, поэтому лишь кратко напомним, что для фундаментальных со-

литонов существует верхняя  $\lambda_{\text{upp}} = E$  и нижняя  $\lambda_{\text{low}}$  отсечки по постоянной распространения, где нижняя отсечка  $\lambda_{\text{low}}$  определяется исключительно амплитудой  $a$  и углами  $\pm\alpha$  распространения двух плоских волн, формирующих решетку (рис. 6.8). Вблизи отсечек профиль солитона заметно расширяется и накрывает значительное число периодов решетки. Мощность солитона монотонно растет с увеличением постоянной распространения. В дальнейшем мы рассматриваем распространение достаточно широких солитонов с мощностью  $U \sim 1$  в динамических решетках с  $b \neq 0$ . Профили этих солитонов, запущенных в динамическую решетку вдоль оси  $\xi$ , практически не искажаются в процессе распространения, если амплитуда контрольной волны удовлетворяет неравенству  $b < a$ . Однако, интегральный центр солитона начинает сдвигаться в направлении распространения контрольной волны, как показано на рис. 6.8(с). Хотя на траектории движения центра солитона заметны осцилляции, можно ввести средний угол дрейфа  $\phi = \eta_{\text{int}} / \xi$ , который может контролироваться амплитудой  $b$  и углом распространения  $\beta$  контрольной волны.

Для аналитического описания динамики распространения солитонов уравнение (6.5) можно упростить при выполнении условий  $S|q|^2, R(\eta, \xi) \ll 1$  и  $E \gg 1$ , и, после перенормировки, свести к кубическому уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - q|q|^2 - R(\eta, \xi)q. \quad (6.6)$$

В определенном диапазоне параметров рефракционный вклад мал, и для анализа эволюции параметров солитонных решений уравнения (6.6) можно использовать теорию возмущений, базирующуюся на обратной задаче рассеяния. Тогда текущий угол распространения  $\phi$  солитона  $q(\eta, \xi) = \chi \operatorname{sech}[\chi(\eta - \phi\xi)] \exp[i\phi\eta - i(\chi^2 - \phi^2)\xi/2]$  в уравнении (6.6) удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \chi^2 \int_{-\infty}^{\infty} R(\eta, \xi) \operatorname{sech}^2(\chi\eta) \tanh(\chi\eta) d\eta. \quad (6.7)$$

Здесь  $\chi$  - амплитуда солитона, а его мощность  $U = 2\chi$ . Подстановка профиля динамической решетки  $R(\eta, \xi)$  в уравнение (6.7) приводит к следующему выражению для текущего угла распространения солитона, изначально запущенного параллельно оси  $\xi$ , т.е. при  $\phi|_{\xi=0} = 0$ :

$$\phi \sim \frac{2\pi ab}{\chi} \left( \frac{\beta - \alpha}{(\beta + \alpha) \sinh[\pi(\beta - \alpha)/2\chi]} - \frac{\beta + \alpha}{(\beta - \alpha) \sinh[\pi(\beta + \alpha)/2\chi]} \right) \left( 1 - \cos \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} \xi \right) \quad (6.8)$$

Эта формула справедлива при выполнении условий  $\beta - \alpha \ll \alpha, \beta$ ,  $\beta + \alpha \gg 1$ , и  $\alpha \neq \beta$ . В этом случае автомодельная подстановка  $q(\eta, \xi) = \chi \operatorname{sech}[\chi(\eta - \phi\xi)] \exp[i\phi\eta - i(\chi^2 - \phi^2)\xi/2]$  все еще аккуратно описывает профиль солитона в динамической решетке. Согласно формуле (6.8), текущий угол распространения солитона  $\phi$  периодически осциллирует между нулем и максимальным значением, что согласуется с осцилляциями интегрального центра, наблюдаемыми в полной модели (6.5) и видимыми на рис. 6.8(с). Средний угол дрейфа может быть найден из формулы (6.8), если в ней опустить член  $\cos[(\beta^2 - \alpha^2)\xi/2]$ , осциллирующий при распространении. Этот угол линейно растет с увеличением амплитуд  $a, b$  волн, создающих решетку, а также монотонно увеличивается вместе с амплитудой  $\chi$ . При этом  $\phi$  уменьшается по мере роста разницы  $\beta - \alpha$  углов распространения контрольной и основной волн, поскольку передача момента от решетки к солитону становится менее эффективной из-за быстрых продольных осцилляций показателя преломления.

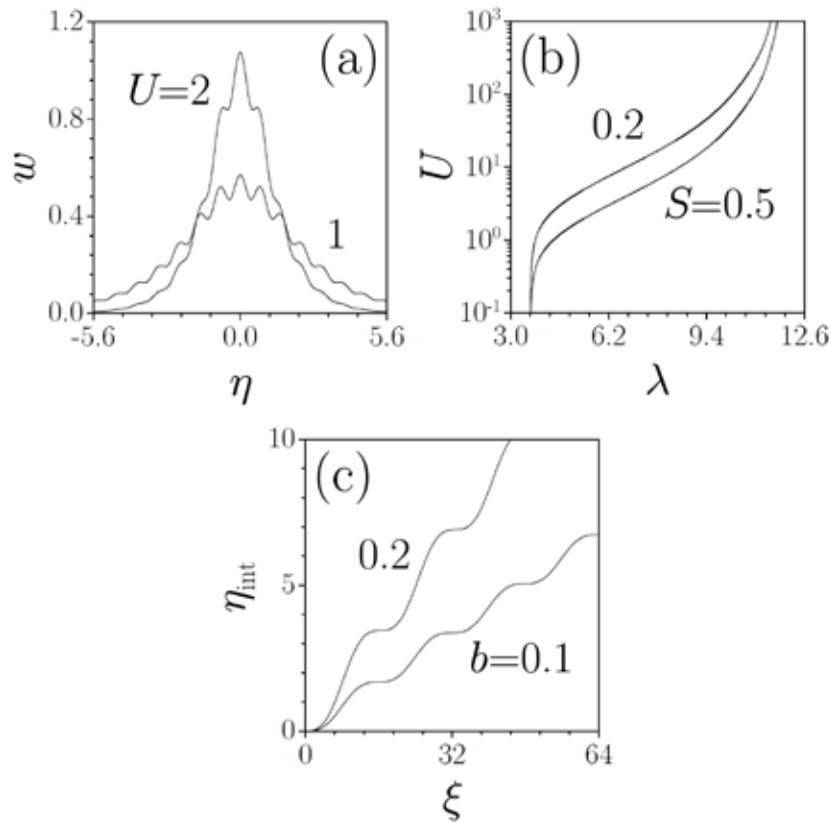


Рис. 6.8. (а) Профили солитонов, поддерживаемые статической решеткой, при  $E = 12$ ,  $S = 0.2$ . (б) Мощность солитона в статической решетке как функция постоянной распространения при  $E = 12$ . (с) Траектория движения интегрального центра солитона с  $U = 1$  в динамической решетке с  $\beta = 4.1$ ,  $E = 12$ ,  $S = 0.2$ .

Эти закономерности, полученные при анализе упрощенной модели (6.6), были проверены в рамках полной модели (6.5), описывающей распространение излучения в фоторефрактивных кристаллах, таких как SBN. Мы используем безразмерные параметры, соответствующие пучку с характерной шириной  $\sim 10 \mu\text{m}$  на длине волны  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ , запущенному в кристалл SBN с эффективным электрооптическим коэффициентом  $r_{\text{eff}} = 1.8 \times 10^{-10} \text{ m/V}$ , при наличии статического поля с напряженностью  $\sim 10^6 \text{ V/m}$ . В качестве входного пучка при прямом интегрировании (6.5) использовалось точное солитонное решение, полученное при  $b = 0$ . Вычислялся средний угол дрейфа солитона для различных параметров солитона и контрольной волны. Результаты, приведенные на рис. 6.9, полностью согласуются с аналитическими оценками. Так, средний угол дрейфа монотонно уменьшается при увеличении разности  $\beta - \alpha$  углов распространения контрольной и основной волн, что естественно, поскольку солитон не

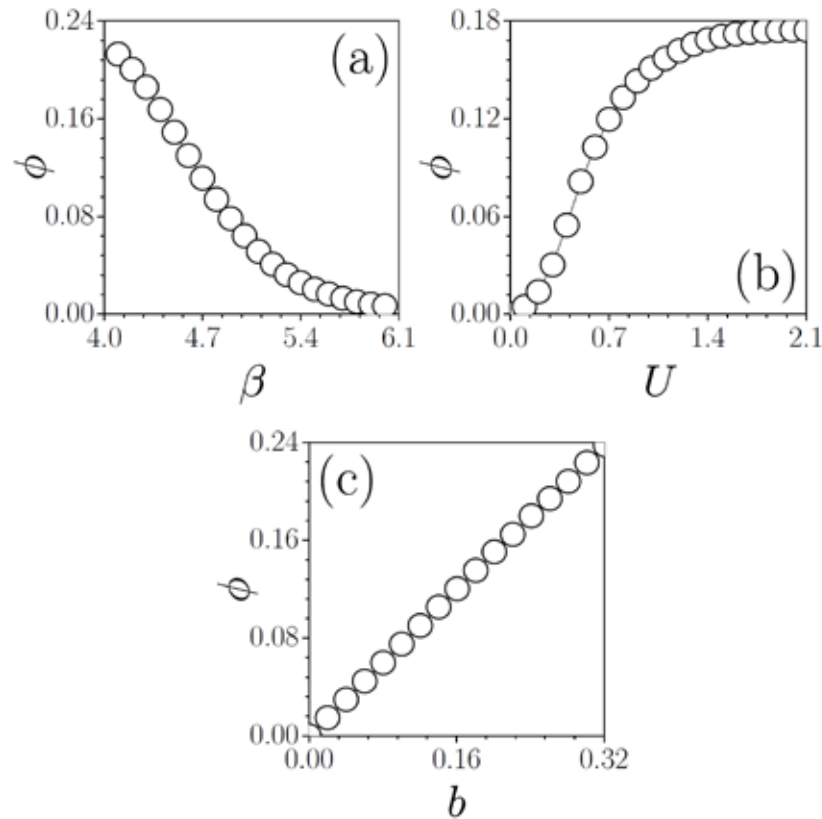


Рис. 6.9. Средний угол дрейфа солитона как функция (а) угла  $\beta$  контрольной волны при  $U = 1$ ,  $b = 0.2$ , (b) мощности  $U$  при  $\beta = 4.5$ ,  $b = 0.2$ , (c) амплитуды контрольной волны  $b$  при  $U = 1$ ,  $\beta = 4.5$ . Во всех случаях  $E = 12$ ,  $S = 0.2$ .

чувствует быстрых осцилляций профиля решетки. Заметим, что при  $\beta = \alpha$  решетка становится стационарной и не может передавать момент солитонам. Угол дрейфа умень-

шается при  $\beta \rightarrow \alpha$ , но это уменьшение заметно лишь в области, где разность  $\beta - \alpha$  очень мала, и поэтому не отражено на рис. 6.9(a). Для такой маленькой разности углов  $\beta - \alpha$  траектория центра значительно отличается от прямой линии. Дрейф наиболее четко выражен для узких солитонов с большой мощностью  $U$  [рис. 6.9(b)]. Этот неожиданный, на первый взгляд, эффект на самом деле полностью согласуется со свойствами солитонов в решетках. В статической решетке узкие солитоны менее мобильны благодаря более сильному взаимодействию с решеткой. Однако теперь изначально покоящийся солитон приводится в движение динамической решеткой, поэтому более сильное взаимодействие означает и более эффективную передачу импульса. Наконец, средний угол дрейфа линейно растет с увеличением амплитуды  $b$  контрольной волны [рис. 6.9(c)]. Заметим, что траектория распространения центра может сильно отличаться от линейной также для узких пучков и в сильно искаженных решетках, для которых  $b \sim a$ ,  $\beta - \alpha \sim \beta, \alpha$ .

Резюмируя, динамические решетки могут передавать поперечный момент изначально покоящимся солитонам и вызывать их устойчивый дрейф, скорость которого определяется мощностью солитона, а также амплитудой и углом распространения контрольной плоской волны. Дрейф солитонов в динамических решетках наблюдался экспериментально в работе [376].

#### **§6.4. Подавление туннелирования в одномерных продольно-модулированных массивах волноводов**

Так называемая "дискретная" дифракция в массивах слабо связанных волноводов является следствием того, что лишь экспоненциальные хвосты сильно локализованной линейной моды, поддерживаемой уединенным волноводом, проникают в соседние каналы. Из-за тенденции к концентрации света в областях с повышенным показателем преломления, начинается туннелирование света из исходного волновода в соседние. Скорость туннелирования света определяется расстоянием между центрами волноводов, их профилями и глубиной модуляции показателя преломления. При наличии всего лишь двух волноводов, туннелирование приводит к периодическим осцилляциям мощности между волноводами (которые могут рассматриваться как результат интерференции симметричной и антисимметричной мод пары волноводов, возбужденных входным пучком), в то время как в неограниченном массиве ширина пучка линейно растет с расстоянием, и распределение интенсивности становится модулированным (благодаря дефазировке блоховских волн, возбужденных исходным световым пучком). Продольная модуляция показателя преломления приводит к заметным осцилляциям ширины мод отдельных волноводов, что существенно влияет на скорость туннелирования света меж-

ду ними. Оказывается, что даже слабая противофазная модуляция показателя преломления в соседних волноводах может привести к подавлению туннелирования света, если ее частота совпадает с одной из резонансных частот. Этот параграф посвящен теоретическому и экспериментальному исследованию подавления туннелирования в массивах волноводов [394].

Для качественного объяснения эффекта подавления туннелирования мы воспользуемся упрощенной "дискретной" моделью распространения излучения в периодическом массиве волноводов, которая следует из уравнения Шредингера в предположении слабой связи между соседними волноводами (детали вывода этой модели приведены в работе [37]):

$$i \frac{dq_m}{d\xi} = -(-1)^m \mu \sin(\Omega\xi) q_m - C(q_{m+1} + q_{m-1}) - \sigma q_m |q_m|^2. \quad (6.9)$$

Дискретная модель описывает динамику безразмерной амплитуды поля  $q_m$  в волноводе с номером  $m$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ . Первый член в правой части уравнения (6.9) ответственен за продольную модуляцию показателя преломления с глубиной  $\mu$  и пространственной частотой  $\Omega$ , причем модуляция является противофазной в соседних волноводах, второй член описывает туннелирование света между соседними волноводами, скорость которого определяется постоянной связи  $C$ , в то время как последний член описывает самодействие в нелинейной среде. Используя преобразование амплитуды поля  $h_m = q_m \exp[i(-1)^m \mu \cos(\Omega\xi)/\Omega]$ , уравнение (6.9) можно привести к виду

$$i \frac{dh_m}{d\xi} = -C(h_{m+1} + h_{m-1}) \exp[2(-1)^m i \mu \cos(\Omega\xi)/\Omega] - \sigma h_m |h_m|^2. \quad (6.10)$$

Из этого уравнения следует, что продольная противофазная модуляция показателя преломления фактически аналогична модуляции константы связи  $C$  между волноводами. Используем известное разложение  $\exp[2i\mu \cos(\Omega\xi)/\Omega] = \sum_k i^k J_k(2\mu/\Omega) \exp(ik\Omega\xi)$  для экспоненциального множителя константы связи в (6.10). В приведенном разложении только член с  $k=0$  не зависит от  $\xi$ , и в первом приближении именно он определяет скорость туннелирования мощности между соседними волноводами (вклад осциллирующих членов в разложении быстро падает по мере роста  $k\Omega$ ). Константа связи  $CJ_0(2\mu/\Omega)$  в уравнении (6.10) обращается в ноль, если  $(2\mu/\Omega) = \nu_j$ , где  $\nu_j \approx 2.4, 5.5, \dots$  - корни функции Бесселя нулевого порядка. Следовательно, при фиксированной глубине продольной модуляции  $\mu$  существует целый набор резонансных частот, при которых

туннелирование между соседними волноводами оказывается подавленным даже в линейном случае при  $\sigma = 0$ . Заметим, что подавление туннелирования хоть и не может быть полным из-за наличия осциллирующих членов в разложении экспоненциального множителя в (6.10), которые не обращаются в ноль при  $(2\mu/\Omega) = \nu_j$ , но приводит к замедлению энергообмена между волноводами в сотни раз, как будет показано ниже.

В простейшей двухканальной линейной системе, где при  $\xi = 0$  свет запускается в первый волновод, получаем аналитическое решение  $|h_1(\xi)|^2 = [1 + \cos(2\kappa\xi)]/2$  уравнения (6.10), в котором фигурирует новая константа связи  $\kappa = CJ_0(2\mu/\Omega)$ . Усредненная по трассе распространения  $\xi = L$  мощность  $U_m = L^{-1} \int_0^L |h_1(\xi)|^2 d\xi$  в первом канале системы равна  $U_m = [1 + \text{sinc}(2\kappa L)]/2$ . Зависимость усредненной мощности  $U_m$  от частоты продольной модуляции имеет резонансные пики при  $\kappa \rightarrow 0$ , т.е.  $\Omega \rightarrow 2\mu/\nu_j$ , указывающие на то, что при соответствующих частотах модуляции свет остается локализованным исключительно во входном волноводе. В нелинейном случае при  $\sigma \neq 0$  подавление туннелирования ведет к понижению критической мощности  $U_{cr} = 4\kappa/\sigma$  (т.е. мощности, необходимой для подавления туннелирования за счет нелинейной добавки к показателю преломления), которая пропорциональна модифицированной константе связи  $\kappa = CJ_0(2\mu/\Omega)$ . Аналитическое решение уравнения (6.10) для нелинейной двухканальной системы имеет вид  $|h_1(\xi)|^2 = [1 + \text{cn}(2\kappa\xi, k)]/2$ , где  $k = U^2/U_{cr}^2$  и  $U$  - входная мощность. В этом случае также можно вычислить зависимость  $U_m(\Omega)$ , имеющую резонансные пики на тех же частотах, что и в линейном пределе.

Для количественного анализа эффекта подавления туннелирования, мы используем непрерывную модель, описывающую распространение световых пучков в пространственно-неоднородной среде:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - |q|^2 q - pR(\eta, \xi)q. \quad (6.11)$$

В соответствии с экспериментом, профиль показателя преломления описывается функцией  $R(\eta, \xi) = \sum_{m=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} [1 + (-1)^m \mu \sin(\Omega\xi)] \exp[-(\eta - md)^6 / w_\eta^6]$ , где  $\mu$  - глубина продольной модуляции,  $w_\eta$  - ширина супергауссовских волноводов,  $d$  - расстояние между волноводами и  $n$  - полное число волноводов в массиве. Уравнение (6.11) решалось с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = A \exp(-\eta^2 / W^2)$ , где  $A, W$  - амплитуда и ширина входного пучка соответственно. Для характеристики степени подавления туннелирования удобно использовать мощность, сосредоточенную во входном канале и усредненную по трассе распространения  $L$ :

$$U_m = L^{-1} \int_0^L d\xi \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, \xi)|^2 d\eta / \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, 0)|^2 d\eta. \quad (6.12)$$

Экспериментальные образцы модулированных массивов были записаны фемтосекундными лазерными импульсами. Поскольку глубина модуляции показателя преломления зависит от скорости записи волновода, то, варьируя последнюю, можно реализовать противофазную гармоническую модуляцию глубин соседних волноводов. Средняя скорость записи волноводов составляла  $\sim 1750 \mu\text{m/s}$ , волноводы имели ширину  $3 \mu\text{m}$  ( $w_\eta = 0.3$ ). Было изготовлено два типа массивов. Первый тип массивов с длиной  $L = 40 \text{ mm}$  и периодом  $14 \mu\text{m}$  ( $d = 1.4$ ) использовался для экспериментов при низких мощностях на длине волны видимого излучения  $\lambda = 633 \text{ nm}$ . Второй массив с длиной  $L = 105 \text{ mm}$  и периодом  $36 \mu\text{m}$  ( $w_s = 3.6$ ) использовался для анализа распространения высокоинтенсивных пучков на длине волны  $\lambda = 800 \text{ nm}$ . В первом случае флуоресценция, сопровождающая распространение пучка, позволяла прямо наблюдать эволюцию во всем образце. Во втором случае период массива был увеличен для того, чтобы нелинейность могла подавить дискретную дифракцию даже в отсутствие продольной модуляции.

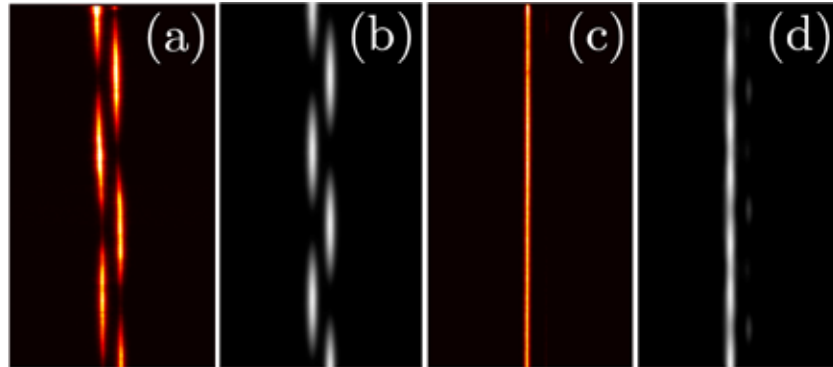


Рис. 6.10. Экспериментально измеренные [(a),(c)] и рассчитанные теоретически [(b),(d)] распределения интенсивности для маломощных световых пучков в двухканальной системе. Верхняя граница каждой панели соответствует входной плоскости образца, а нижняя граница - выходной. Панели (a),(b) соответствуют немодулированной паре волноводов, а панели (c),(d) - модулированной паре с  $\Omega/\Omega_b = 1.25$  и  $\mu = 0.2$ .

Вначале подавление туннелирования было проиллюстрировано в простейшей линейной системе двух волноводов. Была оценена частота биений в немодулированной системе двух волноводов при  $\lambda = 633 \text{ nm}$  [рис. 6.10(a) и 6.10(b)], составляющая  $\Omega_b = 0.386 \text{ mm}^{-1}$  при глубине поперечной модуляции показателя преломления  $\delta n \sim 4 \times 10^{-4}$ . С использованием этих данных была вычислена оптимальная частота про-



дольной модуляции показателя преломления  $\Omega_r = 1.25\Omega_b$  при  $\mu = 0.2$ , для которой достигается максимальное значение усредненной по трассе мощности  $U_m$  во входном канале. Рис. 6.10(c) иллюстрирует экспериментальное наблюдение подавления туннелирования на резонансной частоте, когда свет остается в исходном канале лишь благодаря мелкой продольной модуляции показателя преломления. Результаты численного моделирования для таких же параметров приведены на рис. 6.10(d).

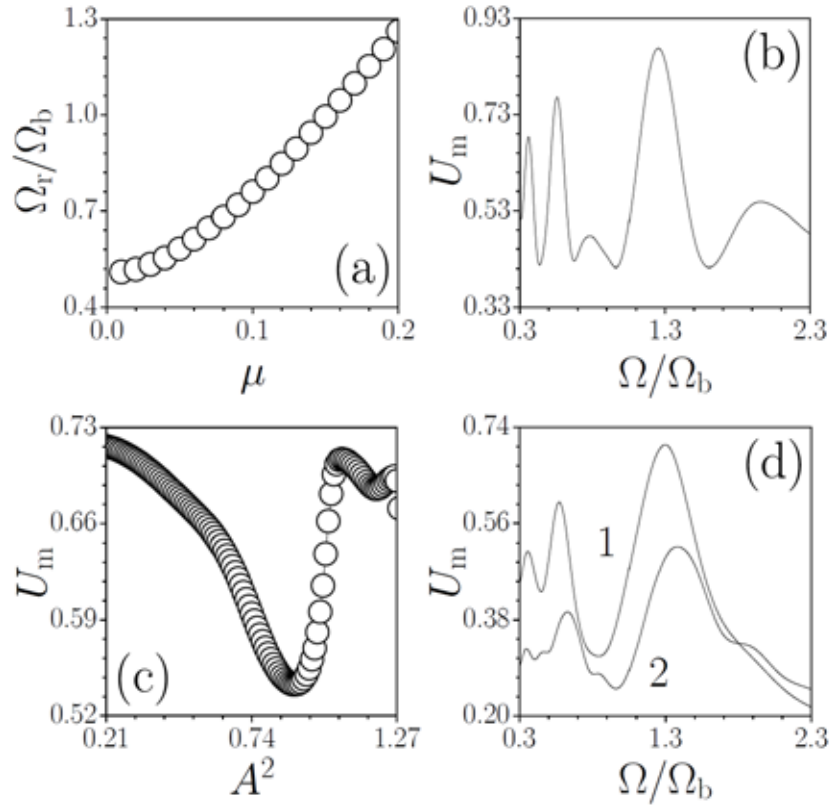


Рис. 6.11. (a) Зависимость нормированной резонансной частоты  $\Omega_r/\Omega_b$  от глубины продольной модуляции  $\mu$  в линейной двухканальной системе. (b) Усредненная мощность  $U_m$  как функция  $\Omega/\Omega_b$  в линейной двухканальной системе при  $\mu = 0.2$ . (c) Зависимость  $U_m$  от входной интенсивности  $A^2$  в двухканальной системе при  $\mu = 0.1$  и  $\Omega/\Omega_b = 0.76$ . (d) Усредненная мощность  $U_m$  в поверхностном (кривая 1) и центральном (кривая 2) канале линейного массива волноводов как функция  $\Omega/\Omega_b$  при  $\mu = 0.2$ .

Численное решение уравнения (6.11) для двухканальной системы показывает, что частота главного резонанса  $\Omega_r$  растет с увеличением глубины продольной модуляции  $\mu$  [рис. 6.11(a)], а при  $\mu \rightarrow 0$  она приближается к  $\Omega_b/2$ . На зависимости усредненной мощности  $U_m$  от частоты модуляции  $\Omega$  различимо несколько резонансных пиков [рис. 6.11(b)]. Эта зависимость согласуется с аналитическими результатами, полученными в рамках дискретной модели. Так, главный резонанс на рис. 6.11(b) соответствует первому

корню функции  $J_0(2\mu/\Omega)$ , в то время как остальные корни соответствуют менее четко выраженным резонансам с меньшими частотами. Наличие нелинейности замедляет осцилляции интенсивности в каналах. Если частота продольной модуляции соответствует резонансной или находится ниже нее, то значительное увеличение входной амплитуды поля  $A$  дополнительно сдвигает частоту осцилляций интенсивности вниз от резонанса, что приводит к делокализации в фокусирующей среде [см. рис. 6.11(с), где зависимость  $U_m(A^2)$  приведена для  $\Omega = \Omega_r$ ]. Однако, при дальнейшем повышении входной интенсивности, свет снова локализуется во входном канале, поскольку нелинейная добавка к показателю преломления становится определяющей, и малые продольные осцилляции показателя преломления уже не могут повлиять на динамику распространения пучка. Для  $\mu = 0.1$ , когда резонансная частота  $\Omega_r = 0.76\Omega_b$ , минимальная локализация достигается при  $A^2 = 0.7, 0.82, 0.9$  для частот продольной модуляции  $\Omega = 0.66\Omega_b, 0.71\Omega_b, 0.76\Omega_b$  соответственно. Однако, для всех этих частот релокализация за счет солитонного механизма происходит при примерно одинаковой входной интенсивности  $A^2 \simeq 1.05$ . Наоборот, если частота модуляции изначально превосходит резонансную частоту  $\Omega > \Omega_r$ , то нелинейность приводит к сдвигу частоты осцилляций интенсивности поля к резонансу, и по мере роста нелинейности наблюдается улучшение локализации. Так, для  $\mu = 0.1$  максимальная локализация достигается при пиковых интенсивностях  $A^2 = 0.46$  и  $0.7$  для частот модуляции  $\Omega = 0.81\Omega_b$  и  $0.86\Omega_b$  соответственно. Заметим, что эти интенсивности существенно ниже критической интенсивности  $A^2 \simeq 1.4$ , необходимой для формирования солитонов в немодулированной системе с  $\mu = 0$ .

Качественно похожая картина наблюдается для возбуждения каналов в центре и на границе продольно-модулированного массива с  $n = 13$  волноводами, как в экспериментальном образце. Резонансные зависимости, полученные при  $A \rightarrow 0$ , представлены кривыми 1 и 2 на рис. 6.11(d). Главный резонанс более четко выражен если возбуждается волновод на границе массива. Помимо главного резонанса, более слабые резонансы появляются на дробных частотах  $\sim \Omega_r/k$ , где  $k = 2, 3, \dots$ . Данные численного интегрирования были использованы при подборе частоты модуляции в экспериментальных образцах. Так, для  $\mu = 0.2$  частота продольной модуляции, соответствующая главному резонансу, составляет  $\Omega_r \approx 1.30\Omega_b$  для поверхностного волновода и  $\Omega_r \approx 1.38\Omega_b$  для центрального. На рис. 6.12 сопоставляется динамика распространения в немодулированном и модулированном на резонансной частоте массивах для возбуждения поверхностного [панели (а), (b)] и центрального [панели (с), (d)] волноводов. В то время как в немодулированных массивах наблюдается типичная картина дискретной дифракции (асимметричная в случае поверхностного волновода), в модулированных массивах свет остается в исходном канале. Таким образом, продольная модуляция показателя преломления от-

крывает новые широкие возможности для контроля дифракции в периодических средах.

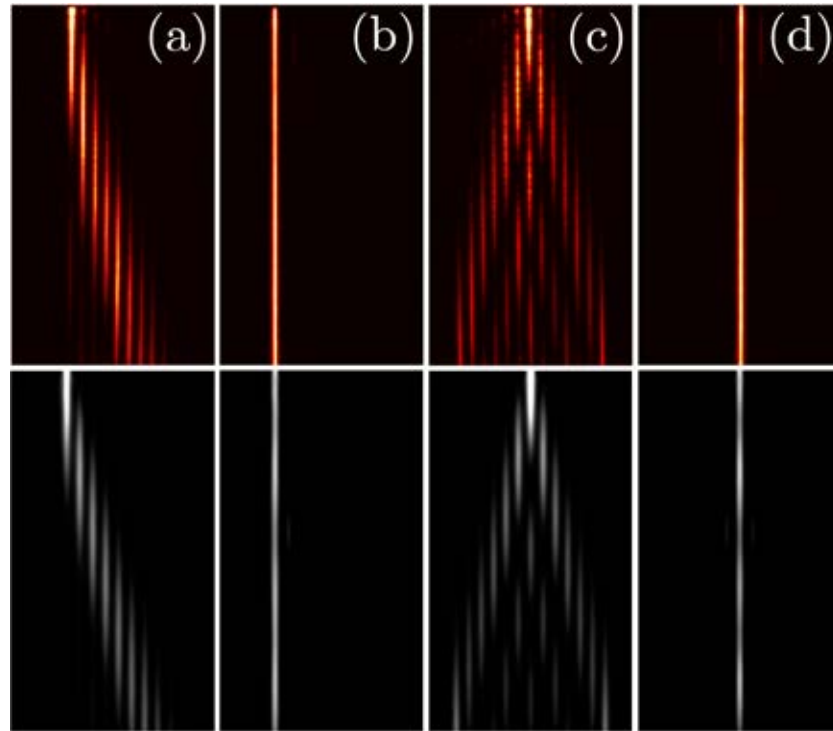


Рис. 6.12. Экспериментально измеренные (верхний ряд) и теоретически рассчитанные (нижний ряд) распределения интенсивности излучения в массиве волноводов для возбуждения поверхностного [колонки (а),(b)] и центрального [колонки (с),(d)] волноводов. Колонки (а),(с) соответствуют немодулированному массиву, а колонки (b),(d) - модулированным массивам с частотами модуляции  $\Omega/\Omega_b = 1.3$  для поверхностных возбуждений и  $\Omega/\Omega_b = 1.38$  для возбуждения центрального канала. При этом глубина модуляции в (b),(d)  $\mu = 0.2$ .

Для изучения влияния нелинейности на динамику распространения в модулированных массивов использовались образцы второго типа, с увеличенным расстоянием между волноводами. В эксперименте применялась глубина продольной модуляции  $\mu = 0.15$  и резонансная частота модуляции  $\Omega_r \approx 1.05\Omega_b$  при возбуждении поверхностного волновода и  $\Omega_r \approx 1.07\Omega_b$  для центрального волновода. На рис. 6.13 каждая панель состоит из теоретической части, иллюстрирующей динамику распространения внутри образца, наложенной на экспериментальную фотографию выходного распределения интенсивности. Колонки (а),(с) иллюстрируют обычный переход от дискретной дифракции к формированию солитона по мере увеличения мощности в немодулированном массиве. Колонки (b),(d) показывают подавление туннелирования при низких мощностях, частичную делокализацию света при промежуточных уровнях мощности, и релокализацию

при достаточно высокой входной мощности. Режимы распространения, показанные в колонках (b),(d), в точности отражают немонотонную зависимость усредненной по трассе мощности от входной интенсивности, типичный пример которой для двухканальной системы приведен на рис. 6.11(c).

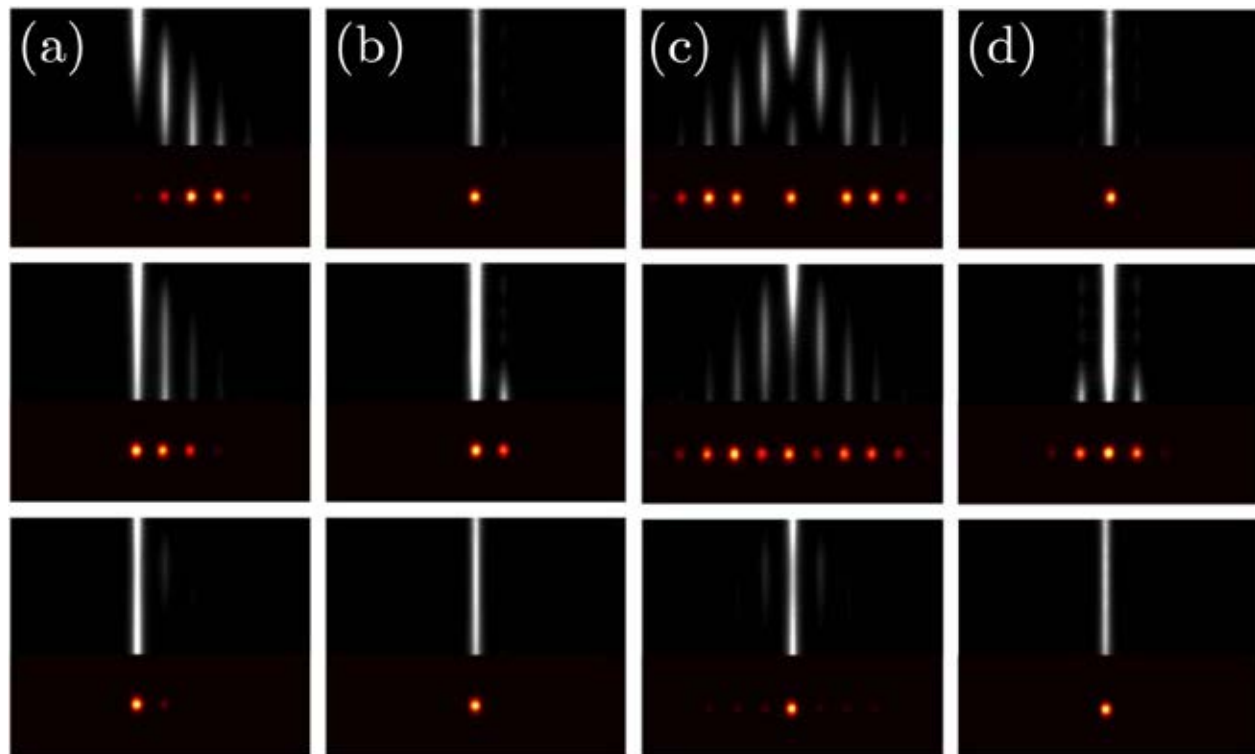


Рис. 6.13. Экспериментально измеренные и теоретически вычисленные распределения интенсивности для возбуждения поверхностного (a),(b) и центрального (c),(d) волноводов. Теоретические рисунки, иллюстрирующие динамику распространения внутри образца, наложены на фотографии выходных распределений интенсивности. Колонки (a),(c) соответствуют немодулированным массивам, а колонки (b),(d) - модулированным. При этом  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega/\Omega_b = 1.05$  для (b) и  $\mu = 0.15$ ,  $\Omega/\Omega_b = 1.07$  для (c). Входные мощности (сверху вниз) равняются (a) 0.16, 0.93 и 1.41 MW, (b) 0.16, 0.88 и 1.60 MW, (c) 0.16, 0.85 и 1.41 MW, (d) 0.16, 1.01 и 2.13 MW.

Таким образом, противофазная продольная модуляция показателя преломления в соседних волноводах многоканальных систем может приводить к подавлению туннелирования между волноводами и значительному снижению порога для формирования солитонов.

## §6.5. Уширение резонансов при подавлении туннелирования в нелинейных средах

В предыдущем параграфе было показано, что при повышении интенсивности входного пучка в массиве с резонансной продольной модуляцией показателя преломления, фокусирующая нелинейность может привести к делокализации пучка, если его входная интенсивность сравнима с интенсивностью, необходимой для формирования солитона в немодулированном массиве. С другой стороны, по мере приближения частоты продольной модуляции к резонансной, связь между волноводами должна слабеть, и мощность, необходимая для ее подавления, будет уменьшаться. Следовательно, в системе с малой отстройкой частоты продольной модуляции от резонансной даже небольшое увеличение входной мощности должно приводить к локализации пучка. Описанию этого явления и исследованию влияния нелинейности на резонансные кривые в продольно-модулированных системах и посвящен этот параграф [396].

Здесь рассматривается простейшая двухканальная система с противофазной модуляцией показателя преломления в каналах. Для описания распространения излучения в такой системе используем уравнение (6.11) с профилем показателя преломления  $R(\eta, \xi) = [1 + \mu \sin(\Omega\xi)] \exp[-(\eta + d/2)^6 / w_\eta^6] + [1 - \mu \sin(\Omega\xi)] \exp[-(\eta - d/2)^6 / w_\eta^6]$ . В соответствии с экспериментом, полагаем  $w_\eta = 0.3$  (волноводы с шириной  $3 \mu\text{m}$ ) и  $d = 3.2$  (расстояние между волноводами  $32 \mu\text{m}$ ), параметр  $p = 2.78$  соответствует глубине модуляции показателя преломления  $\sim 3.1 \times 10^{-4}$ . При численном анализе уравнение (6.11) интегрировалось с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = Aw(\eta)$ , где функция  $w(\eta)$  описывает профиль линейной моды уединенного волновода, а  $A$  - входная амплитуда.

В линейной немодулированной паре волноводов свет периодически переключается между двумя каналами, если при  $\xi = 0$  был возбужден лишь один из них. Как и ранее, удобно ввести пространственный период биений  $T_b$ , характеризующий расстояние, на котором свет возвращается в исходный канал после одного акта переключения, и соответствующую частоту биений  $\Omega_b = 2\pi / T_b$ . Для выбранных выше параметров  $T_b = 100$ . Продольная противофазная модуляция показателя преломления подавляет туннелирование для определенного набора резонансных частот  $\Omega$ . При анализе подавления туннелирования используем мощность во входном канале (6.12), усредненную по трассе распространения. Далее рассматриваем лишь главный резонанс с наибольшей частотой  $\Omega_r$ , который четко различим на зависимости  $U_m(\Omega)$  [рис. 6.14]. Частота  $\Omega_r$  растет с увеличением глубины продольной модуляции  $\mu$  [рис. 6.14(a)], при этом для умеренных  $\mu$  резонансная частота  $\Omega_r \sim \mu$ , в соответствии с предсказанием упрощенной дискретной модели, обсуждавшейся в предыдущем параграфе. В линейном случае нормированная полуширина главного резонанса  $\delta\Omega / \Omega_b$ , определенная по уровню  $U_m = 0.7$ , является

монотонно убывающей функцией длины распространения  $L$ , на которой вычисляется усредненная мощность [рис. 6.14(b)]. Чтобы проследить влияние нелинейности на ширину резонанса в чистом виде, следует проводить усреднение при  $L \rightarrow \infty$ , поскольку в этом пределе единственным фактором, модифицирующим резонансную кривую, является нелинейность, так как в линейном случае профиль резонанса описывался бы  $\delta$ -функцией при  $L \rightarrow \infty$ . Поскольку мы моделируем эксперимент с конечной длиной образца, то в расчетах длина  $L$  ограничена и, следовательно, при  $A \rightarrow 0$  ширина резонанса всегда будет конечной. Как видно из рис. 6.14(c), вблизи резонанса кривая  $U_m(\Omega)$  хорошо описывается функцией  $(\text{sinc}[\alpha L(\Omega - \Omega_r)] + 1)/2$ .

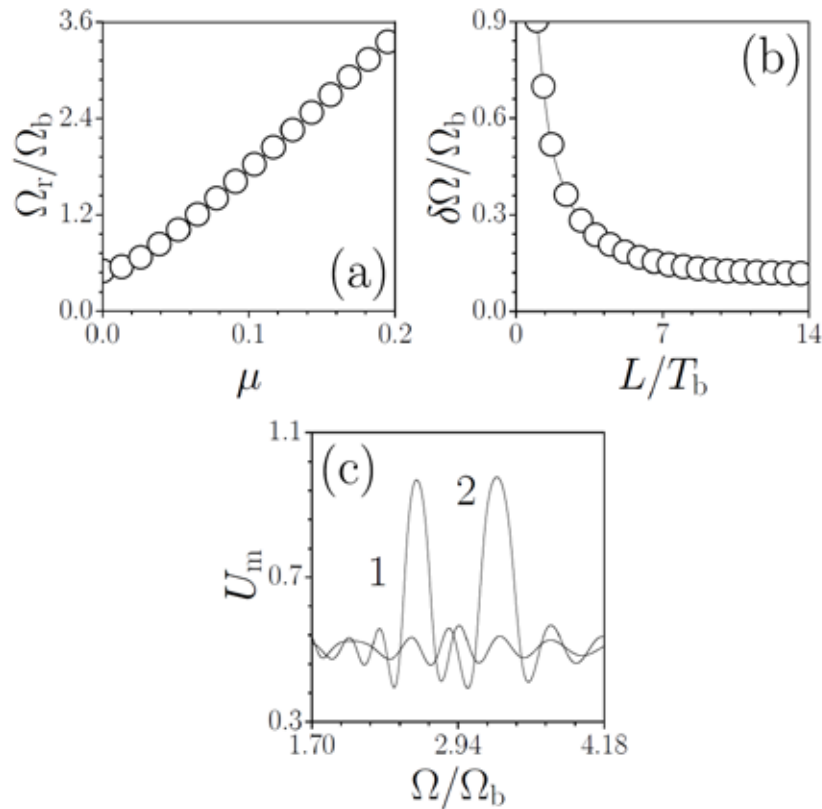


Рис. 6.14. (a) Резонансная частота в зависимости от  $\mu$ . (b) Полуширина резонансной кривой, определенная по уровню  $U_m = 0.7$  как функция длины образца при  $\mu = 0.19$ ,  $A = 0.1$ . (c) Усредненная мощность  $U_m$  как функция  $\Omega/\Omega_b$  при  $A = 0.1$ ,  $L = 8T_b$  для  $\mu = 0.15$  (кривая 1) и  $\mu = 0.19$  (кривая 2).

Влияние нелинейности на резонансные кривые показано на рис. 6.15. Резонанс уширяется по мере роста входной интенсивности  $A^2$  [рис. 6.15(a)], причем его ширина увеличивается практически  $\sim A^2$ . При  $A \rightarrow 0$  ширина резонанса приближается к минимальному значению, соответствующему линейной среде и определяемому длиной усреднения  $L$ . Трансформация резонансной кривой проиллюстрирована также на рис.

6.15(с), где кривые 1 и 2 соответствуют малому и промежуточному значению  $A$ . Уширение резонанса может быть весьма значительным (сравнимым с расстоянием между главным и вторичным резонансами) уже при входных амплитудах  $A \sim 0.25$ . Для сравнения, критическая амплитуда, необходимая для подавления туннелирования за счет нелинейности в немодулированной системе  $A_{cr} \sim 0.42$ . Типичная динамика распространения представлена на рис. 6.16. В линейной системе двух немодулированных каналов свет периодически переключается между каналами [рис. 6.16(a)]. Рис. 6.16(b)-6.16(d) показывают распространение в нелинейной модулированной системе при небольшой отстройке частоты модуляции для различных амплитуд входного пучка. Локализация заметно возрастает при увеличении амплитуды из-за уширения резонанса.

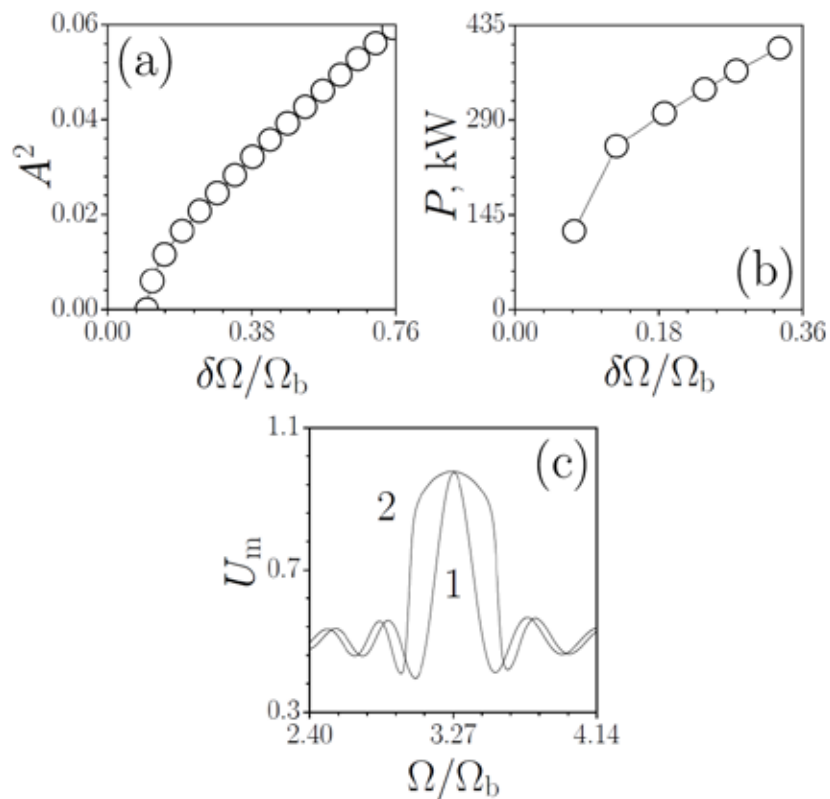


Рис. 6.15. (а) Теоретически вычисленная зависимость интенсивности  $A^2$  от ширины резонансной кривой, определенной по уровню  $U_m = 0.7$  при  $\mu = 0.19$ ,  $L = 8T_b$ . (б) Экспериментальная зависимость входной мощности, требуемой для 70% локализации света во входном канале, от нормированной отстройки от резонансной частоты. (с) Усредненная мощность  $U_m$  как функция  $\Omega/\Omega_b$  при  $\mu = 0.19$ ,  $L = 8T_b$  для входных амплитуд  $A = 0.03$  (кривая 1) и  $A = 0.15$  (кривая 2).

Для экспериментального наблюдения эффекта уширения резонанса был записан ряд образцов с использованием фемтосекундных лазерных импульсов с длительностью

140 fs и периодом повторения 100 kHz на длине волны  $\lambda = 800$  nm. Зависимость изменения показателя преломления  $\delta n$  среды от скорости записи волновода  $v$  имеет вид  $\delta n \approx \alpha \exp(-v/\beta) + \gamma$ , где  $\alpha, \beta, \gamma$  - константы, которые определяются из эксперимента. Периодическое изменение показателя преломления в продольном направлении достигается, если скорость записи меняется по закону  $v = \beta \ln(\alpha/[p + \mu \sin(\Omega z) - \gamma])$ . Длина образца составляла 105 mm, период биений равнялся  $\sim 115$  mm, что соответствует  $T_b = 100$ . Глубина продольной модуляции показателя преломления составляла  $\sim 2 \times 10^{-5}$ . Для

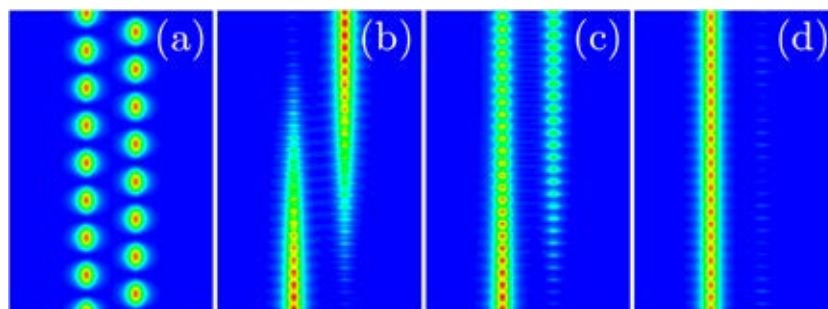


Рис. 6.16. Динамика распространения в (a) немодулированной системе при  $\mu = 0.00$ ,  $A = 0.01$  и продольно-модулированных системах при (b)  $\mu = 0.19$ ,  $A = 0.01$ , (c)  $\mu = 0.19$ ,  $A = 0.12$ , (d)  $\mu = 0.19$ ,  $A = 0.24$ . Длина распространения  $L = 8T_b$ , а частота модуляции для панелей (b)-(d)  $\Omega = 3.10\Omega_b$ . Во всех случаях входной пучок запускался в левый волновод.

указанных параметров частота продольной модуляции, соответствующая главному резонансу,  $\Omega_r \approx 0.180$  mm $^{-1}$  (т.е.  $\Omega_r \approx 3.27\Omega_b$ ). Чтобы проанализировать динамику распространения в окрестности главного резонанса, были записаны двухканальные структуры с частотами продольной модуляции  $\Omega = 0.180, 0.176, 0.173, 0.170, 0.167, 0.165$  и  $0.162$  mm $^{-1}$ . Заметим, что ширина резонансной кривой  $\delta\Omega/\Omega_b$  определялась по уровню, при котором 70% входной мощности остается в возбужденном канале на выходе образца. В системе с резонансной частотой модуляции даже минимальная мощность 50 kW оказывается достаточной для локализации света. С увеличением отстройки от резонансной частоты мощность, необходимая для 70% локализации во входном канале, растет, как показано на рис. 6.15(b). На этом рисунке кружки соответствуют измеренным значениям мощности (погрешность измерения была на уровне  $\sim 15$  kW). При малых отстройках зависимость  $P(\delta\Omega)$  нелинейная, в соответствии с предсказанием теоретической модели, а при больших отстройках мощность локализации растет пропорционально  $\delta\Omega$ . Выходные экспериментальные распределения интенсивности для различных частот модуляции представлены на рис. 6.17. Во всех случаях возбуждался левый волновод. На рис. 6.17(a) показаны выходные распределения интенсивности для резонансной частоты модуляции  $\Omega = 0.180$  mm $^{-1}$ . Видно, что свет остается локализованным в левом



канале при всех указанных уровнях мощности. При наличии небольшой отстройки от резонанса для  $\Omega = 0.173 \text{ mm}^{-1}$  [рис. 6.17(b)] при мощности 50 kW свет заметно проникает в правый волновод (первый ряд), в то время как при  $P = 250 \text{ kW}$  примерно 70% мощности остается сконцентрированной в левом канале (второй ряд). С увеличением мощности до 340 kW (третий ряд) свет практически полностью локализуется в левом канале. Для еще большей отстройки частоты модуляции от резонансной при  $\Omega = 0.167 \text{ mm}^{-1}$ , даже при мощности 250 kW, выходная интенсивность в правом канале выше, чем во входном левом канале [рис. 6.17(c)]. Заметим, что 70% входной мощности остается в исходном канале лишь для  $P \approx 340 \text{ kW}$ .

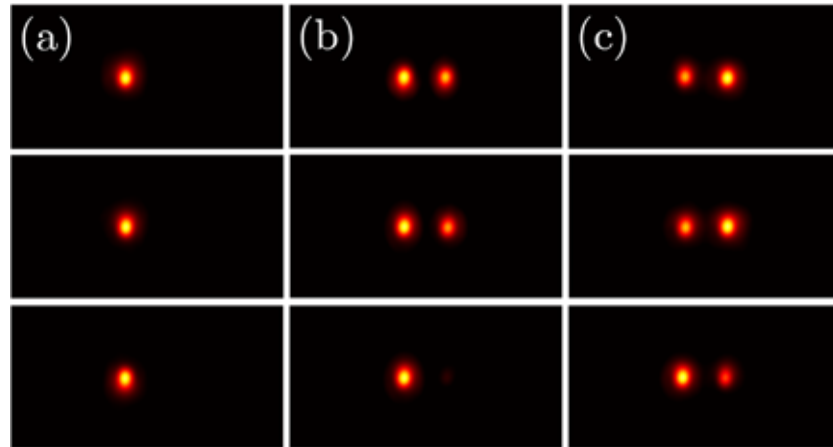


Рис. 6.17. Выходные распределения интенсивности при возбуждении левого волновода в модулированной двухканальной системе при (a)  $\Omega = 3.27\Omega_b$ , (b)  $\Omega = 3.15\Omega_b$  и (c)  $\Omega = 3.04\Omega_b$ . Входная мощность равна 50 kW для первого ряда, 250 kW для второго ряда, 340 kW для третьего ряда.

Таким образом, увеличение входной мощности приводит к уширению резонансных кривых в продольно-модулированной системе волноводов. Даже при наличии отстройки частоты продольной модуляции показателя преломления от резонансной, локализация света наступает при уровнях мощности существенно меньших, чем мощность, необходимая для формирования солитонов в немодулированной системе.

## §6.6. Подавление туннелирования и анизотропная дифракция в двумерных продольно-модулированных массивах волноводов

Важным условием подавления туннелирования в массивах волноводов является противофазность продольной модуляции показателя преломления в соседних волноводах. В одномерном массиве такая модуляция достигается достаточно легко, однако в

двумерном случае уже не так просто подобрать необходимую топологию массива. В частности, в квадратном массиве даже при противофазных осцилляциях показателя преломления в волноводах с номерами  $m, n$  и  $m, n+1$ , туннелирование между диагональными волноводами с номерами  $m, n$  и  $m+1, n+1$  не будет подавлено из-за синфазных осцилляций показателя преломления и относительно небольшого расстояния между ними. В этом параграфе показывается, что подавление туннелирования возможно в сотовых массивах, а разбиение массива на кластеры волноводов с синфазно и противофазно осциллирующими показателями преломления позволяет контролировать скорость дифракционного расплывания в различных направлениях [397].

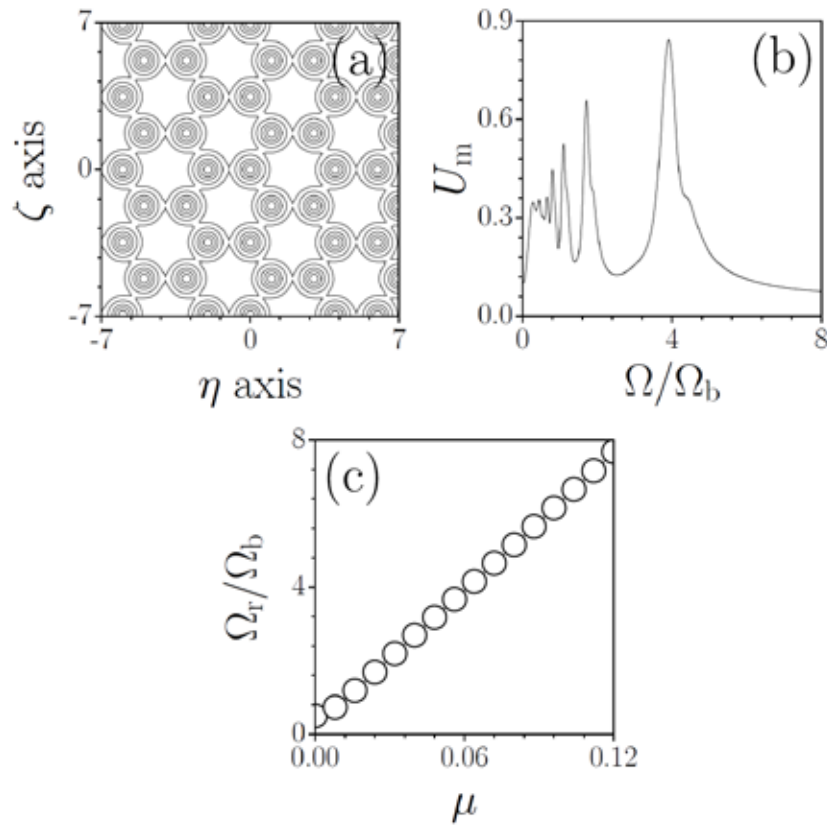


Рис. 6.18. (a) Распределение показателя преломления в сотовом массиве волноводов. (b) Усредненная мощность  $U_m$  как функция частоты модуляции при  $\mu=0.06$ ,  $A=0.01$ . (c) Резонансная частота в зависимости от глубины продольной модуляции показателя преломления  $\mu$  при  $A=0.01$ . Во всех случаях резонансные кривые вычислялись для трассы распространения  $L=4T_b$ .

Для описания распространения излучения в продольно-модулированном сотовом массиве волноводов используем двумерную версию уравнения (6.11):

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - |q|^2 q - p R(\eta, \zeta, \xi) q, \quad (6.13)$$

где функция  $R(\eta, \zeta, \xi)$  описывает структуру массива, состоящего из гауссовских волноводов  $\exp[-(\eta^2 + \zeta^2)/w_{\text{wg}}^2]$ , центры которых  $(\eta_k, \zeta_k)$  находятся в узлах сотовой решетки [см. рис. 6.18(a), где изображен профиль показателя преломления при  $\xi = 0$ ]. В дальнейшем полагаем, что глубина решетки  $p = 12$ , ширина волноводов  $w_{\text{wg}} = 0.5$ , а расстояние между волноводами  $d = 2$ . Показатель преломления в соседних каналах испытывает небольшие противофазные осцилляции, т.е. если в центральном волноводе показатель преломления осциллирует  $\sim 1 + \mu \sin(\Omega \xi)$ , где  $\mu \ll 1$  и  $\Omega$  - частота модуляции, то в окружающих каналах он изменяется  $\sim 1 - \mu \sin(\Omega \xi)$ . Очевидно, именно в сотовой решетке возможна ситуация, когда каждый волновод окружен волноводами с противофазными осцилляциями показателя преломления. В качестве начальных условий в уравнении (6.13) мы использовали  $q|_{\xi=0} = A w(\eta, \zeta)$ , где  $A$  - амплитуда и  $w(\eta, \zeta)$  - профиль линейной моды уединенного волновода с  $\max[w(\eta, \zeta)] = 1$ .

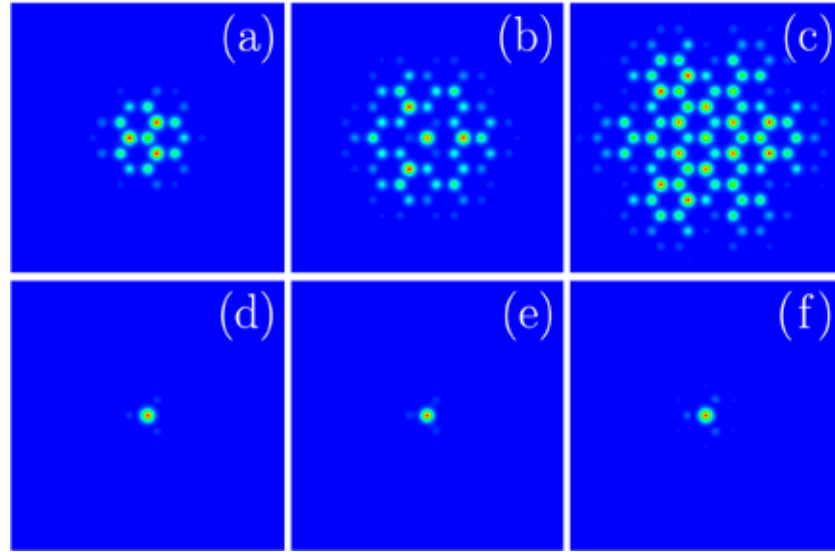


Рис. 6.19. Распределения модуля поля при (a),(d)  $\xi = T_b/4$ , (b),(e)  $T_b/2$  и (c),(f)  $3T_b/4$  для одноканального возбуждения. Панели (a)-(c) соответствуют немодулированному массиву, а панели (d)-(f) - модулированному массиву с  $\mu = 0.1$ ,  $\Omega = 6.4\Omega_b$ . Во всех случаях амплитуда входного пучка  $A = 0.01$ .

При наличии лишь двух немодулированных волноводов с такими параметрами  $p, w_{\text{wg}}, d$  наблюдается периодическое переключение света с периодом  $T_b = 67.17$ . В немодулированном массиве тот же механизм туннелирования приводит к значительной дискретной дифракции уже на расстоянии  $\xi = 3T_b/4$  (см. рис. 6.19, верхний ряд). Эта кар-

тина полностью изменяется при наличии продольной модуляции, которая в условиях резонанса приводит к практически полному подавлению туннелирования (рис. 6.19, нижний ряд). Возможность подавления туннелирования наглядно иллюстрируется зависимостью усредненной по трассе распространения мощности в центральном канале

$$U_m = L^{-1} \int_0^L d\xi \int \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, \zeta, \xi)|^2 d\eta d\zeta / \int \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, \zeta, 0)|^2 d\eta d\zeta \quad (6.14)$$

от частоты модуляции  $\Omega$ , имеющей отчетливые резонансные пики [рис. 6.18(b)]. В двумерном массиве главный резонанс на наибольшей частоте  $\Omega_r$  всегда наиболее четко выражен, т.е. в нем  $U_m$  максимальна. Частота главного резонанса в двумерном массиве растет с увеличением глубины продольной модуляции  $\mu$  практически линейно за исключением малой окрестности точки  $\mu = 0$ , где  $\Omega_r / \Omega_b \rightarrow 0.5$  [рис. 6.18(c)]. Эффективность подавления туннелирования, определяемая резонансным значением  $U_m(\Omega = \Omega_r)$ , быстро увеличивается с ростом  $\mu$  и насыщается на уровне  $U_m \approx 0.92$  при  $\mu > 0.08$ . Это

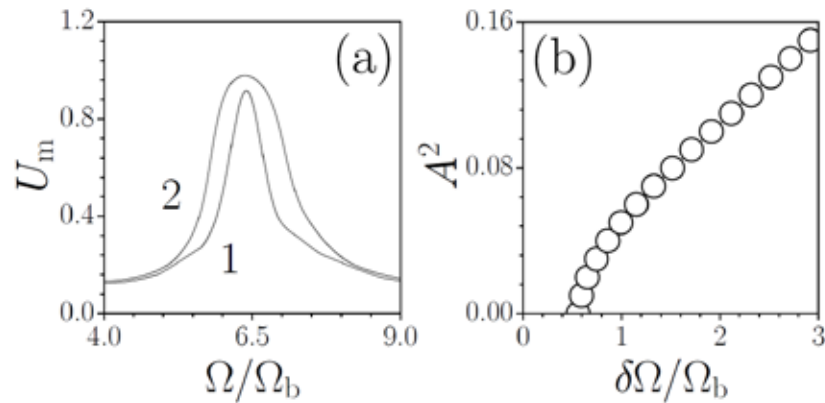


Рис. 6.20. (а) Зависимости  $U_m(\Omega)$  при  $\mu = 0.1$ ,  $A = 0.01$  (кривая 1) и  $A = 0.25$  (кривая 2). (б) Входная интенсивность  $A^2$  в зависимости от ширины резонанса, определенной по уровню  $U_m = 0.7$ , при  $\mu = 0.1$ . Во всех случаях резонансные кривые вычислены на расстоянии  $L = 4T_b$ .

предельное значение может быть увеличено за счет увеличения глубины решетки  $p$ , однако при этом возрастет и период биений. Для весьма малых глубин продольной модуляции  $\mu \sim 0.02$  эффективное подавление туннелирования невозможно даже в главном резонансе. Небольшая фокусирующая нелинейность может стимулировать подавление туннелирования [см. рис. 6.20(a), где зависимости  $U_m(\Omega)$  показаны при малых и промежуточных амплитудах входного пучка]. Увеличение входной амплитуды  $A$  сначала приводит не только к уширению резонанса, но даже к росту  $U_m(\Omega_r)$ . При этом ре-

резонансная частота не меняется при изменении  $A$ . Нелинейное уширение главного резонанса ( $\sim A^2$ ) может быть настолько велико, что его ширина  $\delta\Omega$ , определенная по уровню  $U_m = 0.7$ , становится сравнима с резонансной частотой  $\Omega_r$  [рис. 6.20(b)]. Дальнейший рост нелинейности приводит сначала к делокализации, а потом к релокализации пучка, так же, как и в одномерном случае (см. параграф 6.4).

Продольная модуляция показателя преломления открывает уникальные возможности для контроля дифракции в двумерных массивах волноводов. Эти массивы могут быть разделены на кластеры волноводов так, что в пределах кластера показатель преломления осциллирует синфазно, а в сопредельных кластерах осцилляции противофазны. Например, в сотовых массивах с тремя главными осями показатель преломления в волноводах может быть синфазно модулирован в направлении, параллельном одной из главных осей, и противофазно модулирован в поперечном направлении. В этой ситуации свет будет дифрагировать вдоль выбранной главной оси, но в поперечном направлении дифракция будет подавлена на резонансной частоте модуляции  $\Omega = \Omega_r$ . Последнее приведет к анизотропной квазиодномерной дифракции в двумерной периодической среде (рис. 6.21).

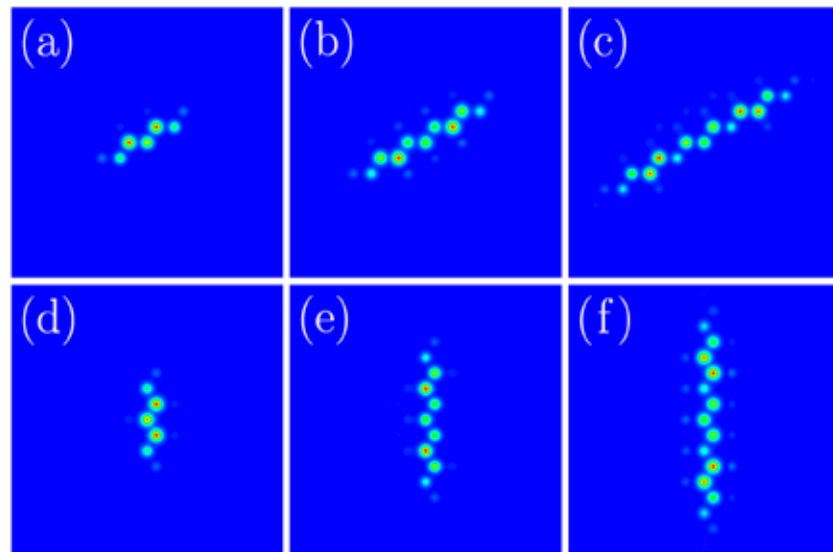


Рис. 6.21. Распределения модуля поля при (a),(d)  $\xi = T_b / 4$ , (b),(e)  $T_b / 2$  и (c),(f)  $3T_b / 4$  для одноканальных возбуждений. На панелях (a)-(c) показатель преломления волноводов осциллирует синфазно вдоль диагонали, в то время как на панелях (d)-(f) осцилляции показателя преломления синфазны в вертикальном направлении. Во всех случаях  $\mu = 0.1$ ,  $\Omega = 6.4\Omega_b$ ,  $A = 0.01$ .

Подчеркнем, что подавление туннелирования возможно не только для простейших одноканальных возбуждений, но и для геометрически более сложных исходных распре-

делений поля. Этот эффект может быть использован для передачи достаточно сложных "изображений", созданных из отдельных световых пучков, практически без искажений. В качестве примера на рис. 6.22 приведена динамика распространения линейного вихревого пучка с зарядом  $m = 1$ , поле которого сконцентрировано в шести каналах массива. В отсутствие модуляции пучок испытывает значительное расплывание уже на расстоянии  $\xi = 3T_b / 4$  [рис. 6.22(a)-6.22(c)], а в модулированном массиве при  $\Omega = \Omega_T$  он сохраняет исходное распределение интенсивности и даже топологический заряд [рис. 6.22(d)-6.22(f)]. Интересно, что вихревые пучки могут распространяться в модулированных массивах без заметных искажений даже в нелинейном режиме [рис. 6.22(g)-6.22(i)].

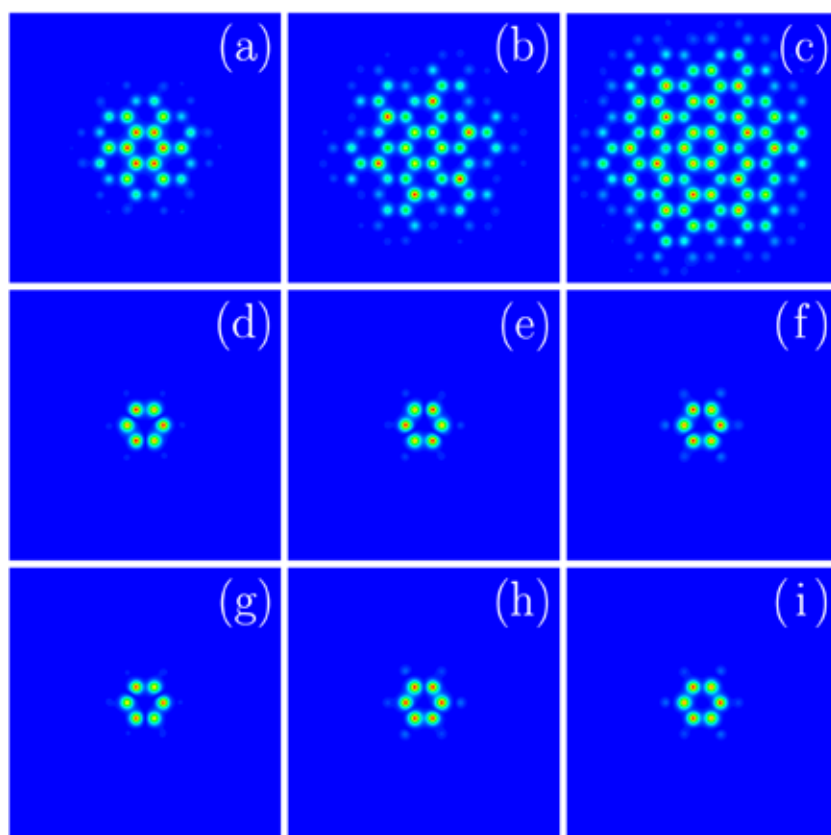


Рис. 6.22. Распределения модуля поля при (a),(d),(g)  $\xi = T_b / 4$ , (b),(e),(h)  $T_b / 2$  и (c),(f),(i)  $3T_b / 4$  при начальном условии в виде вихревого пучка с топологическим зарядом  $m = 1$ . Панели (a)-(c) соответствуют немодулированному массиву, а панели (d)-(i) - модулированному массиву с  $\mu = 0.1$ ,  $\Omega = 6.4\Omega_b$ . При этом входная амплитуда  $A = 0.01$  для панелей (a)-(f) и  $A = 0.60$  для панелей (g)-(i).

Таким образом, подавление туннелирования за счет продольной модуляции показателя преломления и одноканальная локализация может быть достигнута в сотовых массивах волноводов. Продольная модуляция позволяет реализовать анизотропную

дифракцию. Передача изображений в таких системах была экспериментально продемонстрирована в работе [398].

### §6.7. Световые пули в продольно-модулированных сотовых массивах волноводов

Полностью трехмерные световые пули в статических массивах волноводов, изготовленных в плавленом кварце, впервые наблюдались в работе автора [35] (см. параграф 1.7). Однако, небольшая дисперсия групповых скоростей в этом материале приводит к тому, что дисперсионная длина становится сравнимой с дифракционной длиной и длиной нелинейного самовоздействия (что требуется для формирования световых пуль) для импульсов с длительностью всего лишь  $\sim 20$  fs, что приводит к необходимости учета целого ряда временных эффектов высшего порядка, которые, вообще говоря, вызывают постепенное разрушение световых пуль. Минимизация влияния этих эффектов требует перехода к более длинным импульсам с одновременным ослаблением дифракции и нелинейности. Динамические, продольно-модулированные массивы волноводов предоставляют уникальную возможность для контроля дифракционного распыления пучков и формирования солитонов при пониженных уровнях мощности. В таких массивах эффективный дифракционный коэффициент зависит от близости частоты продольной модуляции показателя преломления к резонансной и может легко контролироваться. При этом динамика возбуждения световых пуль кардинально зависит от величины эффективного дифракционного коэффициента. Свойства таких пуль рассматриваются в этом параграфе [399].

Модель основана на нелинейном уравнении Шредингера для безразмерной амплитуды светового поля  $q$ , описывающего распространение волнового пакета вдоль оси  $\xi$  массива волноводов с продольно-модулированным показателем преломления:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{1}{2} \beta \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} - pR(\eta, \zeta, \xi)q - |q|^2 q. \quad (6.15)$$

Здесь  $q = (\pi L_{\text{dif}} n_2 / \lambda)^{1/2} E$ ,  $E$  - комплексная амплитуда поля,  $n_2$  - нелинейный коэффициент,  $L_{\text{dif}} = k_0 r_0^2$  - дифракционная длина в однородной среде,  $k_0 = 2\pi n_0 / \lambda$  - волновое число,  $n_0$  - невозмущенный показатель преломления,  $\eta = x / r_0$ ,  $\zeta = y / r_0$  - поперечные координаты, нормированные на характерный масштаб пучка  $r_0$ ,  $\xi = z / L_{\text{dif}}$  - продольная координата, нормированная на дифракционную длину,  $\tau = (t - z v_{\text{gr}}^{-1}) / t_0$  - нормированное бегущее время,  $t_0$  - характерная длительность импульса,  $v_{\text{gr}}$  - групповая скорость света на длине волны  $\lambda$ , коэффициент  $\beta = -\text{sgn}(k_2) L_{\text{dif}} / L_{\text{dis}}$  определяется соотношением ди-

фракционной и дисперсионной  $L_{\text{dis}} = t_0^2 / |k_2|$  длин, где  $k_2 = \partial^2 k / \partial \omega^2$  также определяется на длине волны  $\lambda$ ,  $p = k_0^2 r_0^2 \delta n / n_0$  - поперечная глубина модуляции показателя преломления. Первый член в круглых скобках в правой части уравнения описывает дифракцию, второй член - дисперсионное распывание, третий член - рефракцию в пространственно-неоднородном профиле показателя преломления, а четвертое слагаемое ответственно за фокусирующую нелинейность среды. Далее рассматривается сотовый массив волноводов с противофазной модуляцией  $1 \pm \mu \sin(\Omega \xi)$  показателя преломления с точно такими же параметрами  $p, w_{\text{wg}}, d$ , что и в параграфе 6.6. Мы фиксируем  $\mu = 0.15$  и исследуем влияние частоты продольной модуляции  $\Omega$  на динамику волнового пакета. Дисперсия материала предполагается достаточно слабой по сравнению с дифракцией и рассматривается случай  $\beta = 0.1$ .

В отсутствие дисперсии ( $\beta = 0$ ) подавление дифракции в сотовом массиве достигается для определенного набора резонансных частот. В частности для  $\mu = 0.15$  главный резонанс соответствует частоте  $\Omega_r \approx 9.61\Omega_b$ , где частота  $\Omega_b = 2\pi / T_b$  и период биений в двухканальной системе  $T_b = 67.17$ . Эффективная дифракция определяется отстройкой частоты модуляции показателя преломления от резонансной. Последнее очевидно из зависимости отношения  $R_{\text{out}} / R_{\text{in}}$  интегральных радиусов выходного и входного пучков от отстройки частоты  $(\Omega - \Omega_r) / \Omega_r$  от резонансной на расстоянии  $\xi = 2T_b$ , представленной на рис. 6.23(a). Изменения отстройки влекут за собой изменения эффективной дифракции и неизбежно отражаются на условиях формирования световых пуль в диспергирующей среде с  $\beta \neq 0$ . При исследовании динамики формирования пуль уравнение (6.15) решалось с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = Aw(\eta, \zeta)\text{sech}(\nu\tau)$ , где функция  $w(\eta, \zeta)$  описывает профиль линейной моды уединенного волновода,  $A$  - исходная амплитуда, а параметр  $\nu$  характеризует длительность импульса. В дальнейшем мы полагаем  $\nu = 0.8$  и фиксируем дистанцию распространения  $L = 4T_b$ . Для характеристики эффективности пространственной и временной локализации волнового пакета вводится усредненная по трассе распространения энергия, сконцентрированная в центральном канале массива и во временном интервале  $(-\tau_0, +\tau_0)$ , где  $\tau_0 = 1.657\nu^{-1}$  (время уменьшения амплитуды входного пакета в  $e$  раз):

$$U_m = L^{-1} \int_0^L d\xi \int_{-\tau_0}^{\tau_0} d\tau \int \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, \zeta, \tau, \xi)|^2 d\eta d\zeta / \int_{-\tau_0}^{\tau_0} d\tau \int \int_{-d/2}^{d/2} |q(\eta, \zeta, \tau, 0)|^2 d\eta d\zeta. \quad (6.16)$$

Чтобы найти оптимальную амплитуду поля для возбуждения световых пуль, были вычислены зависимости усредненной энергии от входной амплитуды  $A$  для различных отрицательных отстроек частоты  $\nu$  [рис. 6.23(b)]. При выбранной длительности входного волнового пакета для каждого  $\nu$  существует оптимальная амплитуда  $A_{\text{opt}}$ , соответ-



вующая максимуму зависимости  $U_m(A)$ . Именно при этой амплитуде световая пуля возбуждается с минимальными потерями на излучение, причем наилучшая пространственно-временная локализация достигается для резонансной частоты модуляции, как следует из сравнения кривых 1 и 2 на рис. 6.23(b). Для каждого значения отстройки возбуждение пули происходит, если амплитуда входного волнового пакета достаточно близка к оптимальной. Усредненная энергия резко уменьшается при уменьшении  $A$ , но, что неожиданно, она уменьшается также если амплитуда становится

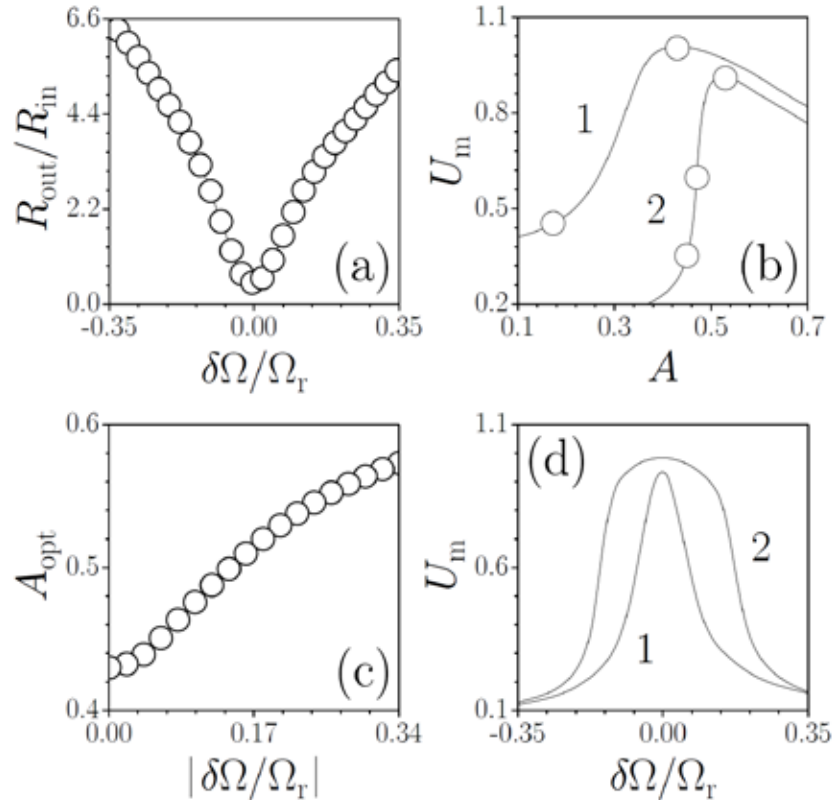


Рис. 6.23. (a) Отношение выходного и входного радиусов пучка при  $\xi = 2T_b$  как функция отстройки. (b) Зависимость  $U_m(A)$  для  $\delta\Omega/\Omega_T = 0$  (кривая 1) и  $-0.2$  (кривая 2) при  $\nu = 0.8$ ,  $\xi = 4T_b$ . Точки на кривой 1 соответствуют панелям (a),(b) на рис. 6.24, а точки на кривой 2 соответствуют панелям (a)-(c) на рис. 6.25. (c) Оптимальная входная амплитуда  $A_{\text{opt}}$  как функция отстройки при  $\nu = 0.8$ . (d) Усредненная энергия  $U_m$  в зависимости от отстройки при  $A = 0.2$  (кривая 1) и  $A = 0.5$  (кривая 2) для  $\xi = 4T_b$ . Для обеих кривых  $\nu = A(\kappa/\beta)^{1/2}$ .

слишком большой. Последнее является следствием увеличения потерь на излучение и частичной делокализации при больших интенсивностях, которая наблюдается и в чисто пространственных задачах. Как для резонансной частоты  $\Omega = \Omega_T$ , так и для небольших отстроек от нее, оптимальная амплитуда волнового пакета оказывается заметно ниже,

чем амплитуда  $A \approx 0.73$ , требуемая для возбуждения световых пуль в немодулированных массивах. Последнее доказывает важный вывод о возможности формирования световых пуль в продольно-модулированных массивах при пониженных уровнях энергии. Оптимальная амплитуда ожидается растет с увеличением отстройки [рис. 6.23(c)], поскольку рост  $|\delta\Omega/\Omega_r|$  усиливает дифракцию, которую приходится компенсировать более сильной нелинейностью.

Хорошая оценка оптимальной амплитуды может быть получена для резонансной частоты модуляции  $\Omega = \Omega_r$ . Поскольку в этом случае дифракционное расплывание практически подавлено, поле можно записать в виде  $q = w(\eta, \zeta)T(\tau)$ , где динамика временной огибающей описывается уравнением  $iT_\tau = -(\beta/2)T_{\tau\tau} - \kappa|T|^2T$ , в котором  $\kappa = \iint w^4(\eta, \zeta)d\eta d\zeta / \iint w^2(\eta, \zeta)d\eta d\zeta$ . Амплитуда стационарной световой пули с временным профилем  $\text{sech}(\nu\tau)$  равна в этом случае  $A = \nu(\beta/\kappa)^{1/2}$ . Для  $\nu = 0.8$  последняя оценка дает  $A = 0.38$ , что лишь немного меньше, чем оптимальная амплитуда  $A_{\text{opt}} = 0.43$ , полученная с помощью прямого интегрирования уравнения (6.15). Используя при численном интегрировании (6.15) пакеты с амплитудой  $A$  и длительностью  $\nu = A(\kappa/\beta)^{1/2}$ , подобранной в соответствии с вышеупомянутой оценкой, можно показать, что диапазон отстроек от резонансной частоты, для которого возможна эффективная пространственно-временная локализация растет с увеличением  $A$  [рис. 6.23(d)].

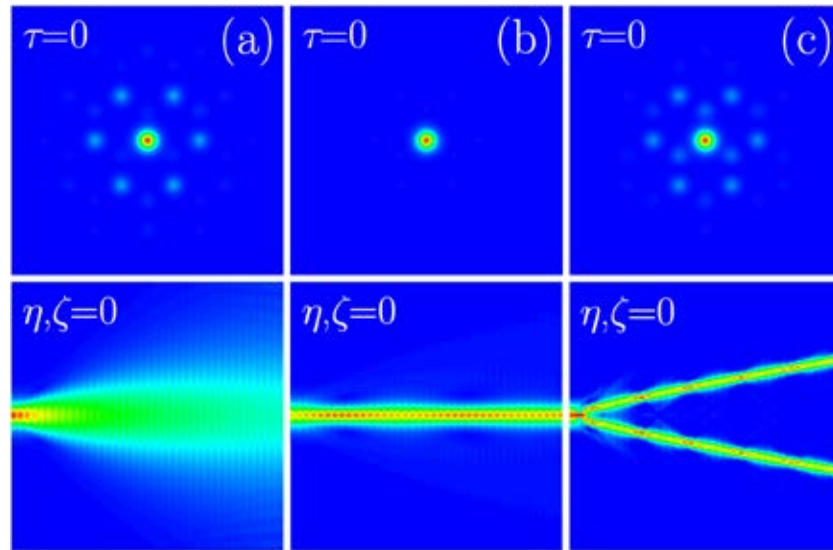


Рис. 6.24. Распределения модуля поля при  $\tau = 0$ ,  $\xi = 4T_b$  (верхний ряд) и временная динамика при  $\eta, \zeta = 0$  (нижний ряд) для одноканального возбуждения в модулированном сотовом массиве при  $\delta\Omega/\Omega_r = 0$ ,  $\nu = 0.8$  и (a)  $A = 0.2$ , (b)  $A = 0.43$  и (c)  $A = 0.8$ .

Выходные пространственные распределения поля (при  $\tau = 0$ ) и временная динамика в центральном волноводе (при  $\eta, \zeta = 0$ ) представлены на рис. 6.24 для резонансной

частоты ( $\delta\Omega/\Omega_r = 0$ ) и на рис. 6.25 для нерезонансной частоты ( $\delta\Omega/\Omega_r = -0.2$ ). Рис. 6.24(a) показывает, что если входная амплитуда слишком мала при  $\Omega = \Omega_r$ , то наблюдается существенное расплывание импульса и уменьшение его пиковой амплитуды в центральном волноводе. Однако, из-за того, что дифракция практически полностью подавлена, волновой пакет не расширяется в пространстве. Рис. 6.24(b) соответствует оптимальной амплитуде и максимальному значению  $U_m$ . В этом случае происходит формирование световой пули, хотя необходимо отметить, что волновой пакет слабо осциллирует из-за осцилляций показателя преломления в волноводах. Временная динамика может быть улучшена, если вместо оптимальной амплитуды, соответствующей максимуму  $U_m$ , взять несколько меньшее значение входной амплитуды, соответствующее аналитическому предсказанию  $A = \nu(\beta/\kappa)^{1/2}$ . Если входная амплитуда избыточно велика, то возможно расщепление импульса в центральном волноводе на два разбегающихся импульса при сохранении хорошей пространственной локализации в центральном канале, как показано на рис. 6.24(c).

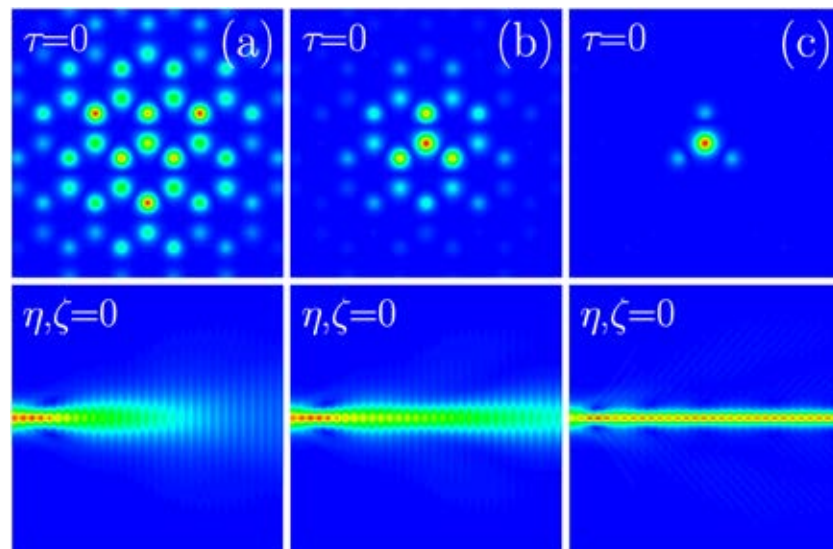


Рис. 6.25. Распределения модуля поля при  $\tau = 0$ ,  $\xi = 4T_b$  (верхний ряд) и временная динамика при  $\eta, \zeta = 0$  (нижний ряд) для одноканальных возбуждений в модулированном сотовом массиве при  $\delta\Omega/\Omega_r = -0.2$ ,  $\nu = 0.8$  и (a)  $A = 0.45$ , (b)  $A = 0.47$ , (c)  $A = 0.53$ .

В нерезонансном случае динамика распространения намного сложнее. Если исходная амплитуда слишком мала, происходит одновременное расплывание волнового пакета как во времени, так и в пространстве [рис. 6.25(a) и 6.25(b)]. Когда амплитуда близка к оптимальной и соответствует максимуму усредненной энергии, то формируется оптическая пуля [рис. 6.25(c)]. Соответствующая амплитуда заметно больше, чем требуемая для формирования солитона в резонансном случае. Заметим, что похожие

результаты получаются для других глубин продольной модуляции  $\mu$  и других длительностей входных импульсов.

Для подтверждения возможности реализации в эксперименте нашей концепции формирования световых пульс, приведем оценки параметров для массивов волноводов, записанных фемтосекундными импульсами в плавленом кварце. Используем типичные величины  $n_0 = 1.45$ ,  $\partial^2 k / \partial \omega^2 = -280 \text{ fs}^2 / \text{cm}$ ,  $n_2 = 2.2 \times 10^{-16} \text{ cm}^2 / \text{W}$  на длине волны  $\lambda = 1.55 \text{ }\mu\text{m}$ . Для  $r_0 \sim 30 \text{ }\mu\text{m}$  ширина и расстояние между волноводами составят 15 и 60  $\mu\text{m}$ , соответственно, в то время как  $p = 12$  будет соответствовать глубине модуляции показателя преломления  $\sim 6 \times 10^{-4}$ . Формирование световых пульс в таких массивах возможно на длинах порядка 20 см, для импульсов с длительностью  $\sim 90 \text{ fs}$  (что соответствует  $L_{\text{dis}} \sim 5.3 \text{ cm}$ ) и пиковой интенсивностью  $\sim 40 \text{ GW/cm}^2$ .

Резюмируя, световые пули могут формироваться при пониженных энергиях в продольно-модулированных сотовых массивах показателя преломления. Пиковая интенсивность, требуемая для формирования пульс, и динамика их возбуждения кардинально зависят от отстройки частоты модуляции показателя преломления от резонансной.

## Глава 7. Андерсоновская локализация света в разупорядоченных решетках показателя преломления

Андерсоновская локализация - это физическое явление, возникающее при распространении волн в среде с пространственными неоднородностями и состоящее в том, что, вследствие многократного рассеяния на неоднородностях и интерференции рассеянных волн, становится практически невозможным распространение бегущих волн. При этом колебания приобретают характер стоячей волны, локализованной в ограниченной области пространства. Андерсоновская локализация является универсальным явлением, характерным для волн любой природы, хотя наиболее ярко она проявляется для квазичастиц при изучении кинетических свойств (таких, как электропроводность или теплопроводность) неупорядоченных твердых тел (аморфных веществ, сильно легированных полупроводников и др.). При андерсоновской локализации подвижность квазичастиц становится нулевой и фактически реализуется фазовый переход проводник-диэлектрик. Представление о возможности локализации частиц и квазичастиц в неупорядоченных системах было впервые выдвинуто в работе [401] при анализе их рассеяния на дефектах кристаллической решетки. Было показано, что вследствие многократного рассеяния режим баллистического расплывания волновой функции сменяется локализацией, когда беспорядок в среде становится достаточно большим. Делокализованные собственные моды упорядоченной системы (блоховские функции) превращаются в пространственно локализованные моды в неупорядоченной системе, благодаря чему и становится возможной андерсоновская локализация (см. обзор [402] и монографию [403], где описываются особенности этого эффекта в электронных системах). Андерсоновская локализация исследовалась как в одномерных, так и в двумерных электронных системах [404,405]. Было показано, что при наличии беспорядка в одно- и двумерных системах все собственные моды являются пространственно локализованными, а степень их локализации зависит не только от уровня беспорядка, но и от размерности системы. Для трехмерных систем типично наличие порога по уровню беспорядка, при превышении которого наступает локализация.

Андерсоновская локализация наблюдалась для акустических и микроволн [406, 407], спиновых волн [408], а также в конденсатах Бозе-Эйнштейна [409,410]. Естественно, возможна она и для оптических волн. Теоретический анализ локализации электромагнитного излучения в узком диапазоне длин волн, ширина которого сравнима с длиной корреляции беспорядка, в трехмерной слабо поглощающей оптической среде был впервые представлен в работе [411]. Первые эксперименты с андерсоновской локализацией дали лишь косвенное подтверждение существования этого эффекта. В частности, в работах [412,413] вывод о возможности трехмерной андерсоновской локализации

делался лишь на основе анализа спектра отраженных волн от сильно рассеивающего и поглощающего полупроводникового порошка, а также по наблюдениям скорости экспоненциального затухания амплитуды волны по мере ее распространения. Аналогично, в работе [414] свидетельства локализации обнаружены при измерении флуктуаций выходных параметров пучков после прохождения через слабо или сильно рассеивающие диэлектрические среды или периодические решетки с металлическими рассеивающими элементами. Впоследствии была выдвинута концепция поперечной локализации света, которая может наблюдаться в средах, остающихся регулярными в направлении распространения излучения, в то время как беспорядок присутствует лишь в поперечной плоскости [415,416]. Именно такой беспорядок, не зависящий от эволюционной переменной, рассматривался в оригинальной работе [401]. Экспериментальные свидетельства поперечной локализации в линейном режиме распространения излучения были впервые получены в [416] при возбуждении отдельных волноводов в волоконных фотонных кристаллах с небольшим поперечным беспорядком, хотя полный статистический анализ эффекта локализации и не был произведен.

Необходимо отметить, что описание распространения излучения в среде с периодической поперечной модуляцией показателя преломления (периодическим потенциалом) в значительной степени схоже с описанием эволюции заряженных частиц в твердом теле, обладающем периодической кристаллической структурой. Именно поэтому многие эффекты, недоступные прямому наблюдению в твердых телах, наглядно демонстрируются в периодических оптических структурах. Среди этих эффектов находится и андерсоновская локализация. Впервые статический экспериментальный анализ двумерной локализации был проведен в оптически-индуцированных гексагональных решетках в фоторефрактивных кристаллах [417]. В эксперименте случайная составляющая решетки генерировалась при освещении кольцевой щели, расположенной в фокальной плоскости линзы и имеющей случайную по азимуту функцию пропускания. В результате формировалось случайное недифрагирующее световое поле с контролируемыми параметрами, которое суммировалось с регулярной гексагональной решеткой, созданной интерференцией плоских волн. Уровень беспорядка контролировался интенсивностью случайного пучка, а различные реализации решетки генерировались при изменении случайной функции пропускания щели. Статистическое усреднение выходных распределений интенсивности для пробных пучков, распространяющихся в таких решетках, демонстрирует постепенный переход от дискретной дифракции (транспорта) в регулярной решетке к экспоненциально-локализованным распределениям интенсивности при достаточно большом уровне беспорядка. Одномерная андерсоновская локализация также наблюдалась экспериментально в массивах волноводов, изготовленных с помощью гравировки на поверхности полупроводника [418]. В этой работе было показано,

что фокусирующая нелинейность материала приводит к увеличению локализации выходных распределений поля.

Эволюция световых пучков в периодической решетке с беспорядком определяется биениями между теми локализованными модами, которые возбуждаются входным пучком. Хотя в одномерном случае все моды являются локализованными, при низком уровне рандомизации их поперечный масштаб (ширина) может во много раз превышать невозмущенный период решетки. Ширина мод увеличивается при уменьшении степени беспорядка, что приводит к большему уширению пучка на начальной, баллистической стадии распространения. В случае, когда разупорядоченная решетка граничит с однородной средой, происходят кардинальные изменения спектра собственных мод и, следовательно, динамики распространения пучков вблизи границы решетки. В работе автора [419] впервые наблюдалась одномерная андерсоновская локализация на границе раздела между периодической решеткой с беспорядком и однородной средой. Оказалось, что из-за отражения на границе необходим больший уровень беспорядка для достижения той же степени локализации, что и в глубине решетки. Описанию этого интересного эффекта посвящен первый параграф этой главы. Впоследствии влияние границ раздела на локализацию теоретически исследовалось в различных двумерных системах [420-422].

Беспорядок в периодических системах может вводиться несколькими способами. Например, можно случайным образом варьировать глубину различных волноводов в периодической системе при фиксированном расстоянии между ними. Такой тип беспорядка в соответствии с терминологией, принятой в квантовой механике, называется диагональным, и именно он и рассматривался в большинстве работ по андерсоновской локализации [418, 423-425]. В другом предельном случае варьируются лишь расстояния (т.е. константы связи) между соседними волноводами при постоянной глубине модуляции показателя преломления. Исследования локализации в средах с недиагональным беспорядком начались лишь сравнительно недавно [426-428]. Наконец, в системе может присутствовать смешанный диагональный и недиагональный беспорядок [420]. В экспериментальной работе автора [429] было обнаружено, что в двумерных периодических системах недиагональный беспорядок, который введен лишь вдоль одной из осей массива (например, горизонтальной), может приводить к локализации света и в ортогональном направлении, если случайные горизонтальные сдвиги волноводов некоррелированы в соседних рядах массива. При этом степень локализации света в "регулярном" направлении неожиданно быстро возрастает с увеличением беспорядка и оказывается лишь немногим меньше, чем таковая в рандомизированном направлении. Второй параграф этой главы посвящен описанию этого эффекта "кросс-локализации".

Хотя андерсоновская локализация наблюдалась экспериментально как в одномерных [418,419], так и в двумерных [417] периодических решетках, переходный режим между одномерными и двумерными системами практически не исследовался. В работе [430], опубликованной более двадцати лет назад, было прослежено влияние локализации волновой функции системы в одном поперечном направлении (вызванной ограниченностью системы) на андерсоновскую локализацию в ортогональном направлении. Был сделан вывод о том, что при фиксированной степени беспорядка локализация оказывается слабее в двумерной системе. А в недавней работе [431], при анализе локализации в двумерном массиве с постепенно увеличивающейся анизотропией константы связи, сформулировано несколько неожиданное заключение о более сильной локализации в двумерной системе. Андерсоновская локализация в системе с эффективной дробной размерностью была экспериментально исследована в работе автора [432], где использовались массивы волноводов с нарастающим числом рядов, записанные фемтосекундными импульсами. Было обнаружено, что более сильная вертикальная локализация волновой функции в системе с одним рядом волноводов сопровождается более сильной андерсоновской локализацией в горизонтальном направлении, в то время как увеличение числа рядов в массиве приводит к явному уширению усредненных выходных распределений интенсивности, в соответствии с предсказанием, полученным в [430]. Описанию влияния размерности системы на локализацию посвящен третий параграф этой главы.

Световые пучки, падающие под небольшим углом на границу раздела однородной и периодической сред или распространяющиеся поперек периодической структуры, испытывают частичное отражение, величина которого определяется не только углом падения, но и параметрами решетки. В определенных диапазонах углов падения отражение пучка может быть практически полным, даже если решетка ограничена и содержит всего несколько десятков периодов, при этом, естественно, существуют и области прозрачности, в которых отражение минимально [433-438]. Эти эффекты наблюдаются не только в линейном, но также и в нелинейном режиме. В работе автора [439] показано, что наличие беспорядка может кардинально изменить динамику преломления и отражения световых пучков на границе раздела решетки и однородной среды. Например, наличие беспорядка может привести к резкому увеличению коэффициента пропускания в режиме, когда регулярная решетка полностью отражает падающий пучок. Наоборот, в диапазоне параметров, где решетка практически прозрачна для падающего пучка, увеличение беспорядка приводит к росту отражения. Нелинейность среды вызывает уменьшение коэффициента отражения от разупорядоченной решетки, причем ее влияние на коэффициенты отражения и пропускания наиболее сильно при небольших уровнях беспорядка. Эти эффекты описываются в четвертом параграфе этой главы.



Практически два века назад ботаник Р. Броун обнаружил, что маленькие частицы в жидкости движутся хаотически под действием случайных столкновений с молекулами. Интенсивность броуновского движения увеличивается с ростом температуры, поскольку средняя кинетическая энергия  $3kT/2$  молекул жидкости равна средней кинетической энергии  $m\langle v^2 \rangle/2$  взвешенных частиц. Испытывая случайные изменения направления движения и скорости после каждого столкновения с молекулами жидкости, броуновская частица движется вдоль сложной траектории, удаляясь с течением времени  $t$  от исходного положения. Среднеквадратичное смещение частицы  $\langle r^2 \rangle \sim kTBt$ , где  $B$  - подвижность частиц. При определенных условиях справедлива аналогия между солитонами в нелинейных оптических системах и механическими частицами. Она проявляется, например, при анализе упругого взаимодействия солитонов в полностью интегрируемых системах, а также используется в методе эффективных частиц, поскольку движение солитона в материалах с пространственно-неоднородным показателем преломления во многом эквивалентно движению механических частиц во внешнем потенциале [440]. Оказывается, что движение солитона в случайных профилях показателя преломления может быть качественно похожим на хаотическое движение броуновских частиц в жидкости, как было впервые показано в работе автора [441]. Описанию движения солитонов в спеклообразных оптически-индуцированных профилях показателя преломления посвящен пятый параграф этой главы. Мелкомасштабная случайная модуляция показателя преломления приводит к появлению случайных сил, действующих на солитон, и его хаотическому блужданию, подобному броуновскому движению. При этом среднеквадратичное смещение центра солитона линейно растет с расстоянием распространения по аналогии с законом диффузии  $\langle r^2 \rangle \sim kTBt$  для броуновских частиц. Впоследствии аналогичный эффект наблюдался в нелокальной нелинейной среде [442].

Таким образом, в основу данной главы вошли результаты оригинальных исследований андерсоновской локализации на поверхности периодических решеток с беспорядком, в двумерных решетках и решетках дробной размерности, а также результаты исследований влияния беспорядка на отражение солитонов на границе разупорядоченной решетки и однородной среды и их поперечное движение. Эти результаты опубликованы в работах [419, 426, 429, 432, 439, 441].

### **§7.1. Поверхностная андерсоновская локализация в одномерных массивах с беспорядком**

В регулярных полубесконечных решетках локализация излучения на их границе достигается за счет нелинейной добавки к показателю преломления при превышении порогового значения мощности. При этом линейные пучки, запущенные в поверхность

ный волновод, испытывают асимметричную дискретную дифракцию, приводящую к уходу света от границы вглубь решетки. Таким образом, граница раздела как бы оказывает отталкивающее воздействие на оптическое излучение. При наличии беспорядка в бесконечной решетке локализованные линейные андерсоновские моды могут формироваться в окрестности любого из волноводов решетки. Однако наличие отталкивающей границы раздела с однородной средой уменьшает вероятность формирования сильно локализованных андерсоновских мод вблизи поверхности раздела. В этом параграфе теоретически и экспериментально исследуются особенности поверхностной андерсоновской локализации [419].

Для того чтобы получить представление о том, как граница периодической среды влияет на распространение излучения, рассмотрим сначала простейшую дискретную модель, описывающую эволюцию излучения в массиве слабо связанных линейных волноводов:

$$i \frac{\partial q_m}{\partial \xi} = -C(q_{m+1} + q_{m-1}), \quad (7.1)$$

где  $C$  - постоянная связи и  $q_m$  - амплитуда поля в волноводе с номером  $m$ . При возбуждении граничного волновода с  $m=0$  поле в волноводе с номером  $m \geq 0$  описывается формулой  $q_m = i^m [J_m(2C\xi) + J_{m+2}(2C\xi)]$  [206], где  $\xi$  - координата распространения и  $J_m(2C\xi)$  - функция Бесселя порядка  $m$ . Первый член в этой формуле соответствует решению в бесконечной решетке, которое удовлетворяло бы уравнению (7.1) в отсутствие границы, а второе слагаемое появляется из-за отражения на границе. Если переписать эту формулу в виде  $q_m = i^m [(m+1)(C\xi)^{-1}] J_{m+1}(2C\xi)$ , то можно заметить, что боковые максимумы дифракционной картины, соответствующие первому максимуму функции Бесселя, сдвинуты в сторону больших значений  $\xi$  (по сравнению с максимумами в бесконечном массиве) из-за увеличения порядка функции Бесселя. Следовательно, при наличии границы раздела расширение пучка идет более медленными темпами, хотя относительная разница в положении дифракционных максимумов исчезает при  $C\xi \gg 1$ . С другой стороны, при наличии границы раздела амплитуда поля  $q_0 = (C\xi)^{-1} J_1(2C\xi)$  в возбужденном волноводе при  $C\xi \gg 1$  убывает намного быстрее, чем таковая в бесконечном массиве из-за наличия множителя  $(C\xi)^{-1}$ . Таким образом, граница периодического массива обладает эффективным отталкивающим действием [212], и для приповерхностной андерсоновской локализации необходим более высокий уровень беспорядка, чем в глубине массива.

Для подтверждения этого вывода используем непрерывную физическую модель, описывающую распространение излучения в реальных массивах волноводов со случайной модуляцией профиля показателя преломления:

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} - p R(\eta) q. \quad (7.2)$$

Здесь нормировки поля  $q$ , поперечной  $\eta$  и продольной  $\xi$  координат, а также глубины решетки совпадают с введенными ранее в параграфе 1. Распределение показателя преломления описывается функцией  $R(\eta) = \sum_{m=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} \exp[-(\eta - \eta_m - md)^6 / w_\eta^6]$ , где  $d$  - среднее расстояние между волноводами, а  $\eta_m < d/2$  - случайный сдвиг центра  $m$ -го волновода, равномерно распределенный на сегменте  $[-S_d, +S_d]$ ,  $n = 31$  - полное число волноводов в массиве. Заметим, что модель соответствует недиагональному беспорядку. В дальнейшем мы используем подход Монте-Карло, вычисляя для каждой реализации массива случайные сдвиги  $\eta_m$ , строя соответствующее распределение показателя преломления  $R(\eta)$  и решая для каждой реализации уравнение (7.2) с начальным условием

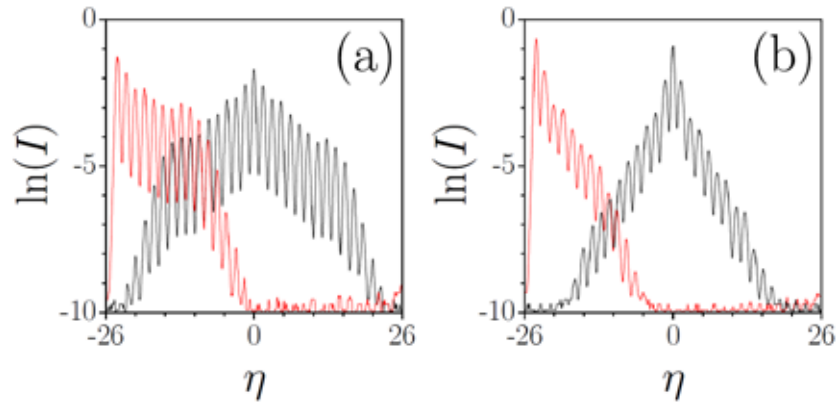


Рис. 7.1. Теоретически вычисленные усредненные выходные распределения  $\ln(I)$  для возбуждения центрального (черная кривая) и поверхностного (красная кривая) волноводов при  $S_d = 0.3$  (a) и  $S_d = 0.7$  (b).

в виде гауссовского пучка, аппроксимирующего первую моду изолированного волновода. В дальнейшем мы полагаем, что  $w_\eta = 0.3$  (ширина волноводов  $3 \mu\text{m}$ ),  $d = 1.6$  (регулярное расстояние между волноводами  $16 \mu\text{m}$ ), длина образца  $L = 69$  (что соответствует реальной длине распространения  $100 \text{ mm}$ ),  $p = 11$  (глубина модуляции показателя преломления  $\sim 7.6 \times 10^{-4}$ ). Параметр  $S_d$ , характеризующий степень беспорядка в системе, варьируется от 0 (регулярный массив) до 0.7 (сильный беспорядок, при котором центры волноводов могут испытывать сдвиги вплоть до  $7 \mu\text{m}$ ). Статистическое усреднение

выходных распределений интенсивности по  $Q = 10^3$  реализациям массивов волноводов дает информацию о степени локализации светового поля. При этом сравнивалась степень локализации при возбуждении центрального волновода ( $m = 0$ ) и поверхностных волноводов ( $m = \pm 15$ ) при различных уровнях беспорядка  $S_d$ . Рис. 7.1 показывает усредненные распределения интенсивности  $I(\eta) = Q^{-1} \sum_{k=1}^Q |q_k(\eta, \xi = L)|^2$ , построенные в логарифмическом масштабе, для возбуждения центрального и поверхностного волноводов. При небольшом беспорядке  $S_d = 0.3$  [рис. 7.1(a)] усредненное распределение интенсивности представляет собой суперпозицию треугольного распределения и двух пиков (одного, в случае возбуждения поверхностного волновода), характерных для дискретной дифракции в регулярном массиве. С увеличением беспорядка положения этих двух пиков остаются практически неизменными, но их амплитуды резко уменьшаются, так что при достаточно высоком уровне беспорядка  $S_d = 0.7$  [рис. 7.1(b)] остается лишь треугольное распределение. Оно является прямым указанием на андерсоновскую локализацию, т.е. формирование усредненного распределения интенсивности с экспоненциально спадающими хвостами благодаря наличию беспорядка.

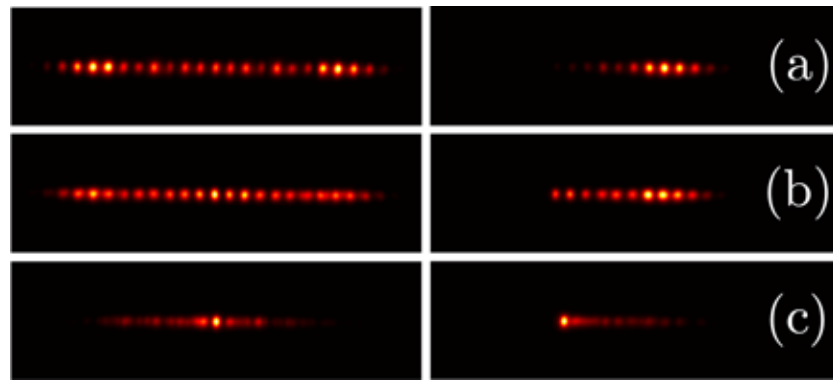


Рис. 7.2. Усредненные экспериментальные выходные распределения интенсивности для возбуждения центрального (слева) и поверхностного (справа) каналов. Уровень беспорядка  $S_d = 0 \mu\text{m}$  (a),  $S_d = 2 \mu\text{m}$  (b) и  $S_d = 7 \mu\text{m}$  (c).

Этот эффект наблюдался экспериментально в массивах волноводов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами. Пучок на длине волны  $\lambda = 633 \text{ nm}$  фокусировался в центральный или поверхностный волноводы с использованием  $20\times$  микроскопического объектива, а выходные распределения регистрировались с помощью CCD камеры. Для каждого уровня беспорядка  $S_d = 0.0 - 0.7$  было изготовлено 30 массивов волноводов, что позволило провести статистическое усреднение. Усредненные распределения интенсивности приведены на рис. 7.2. При  $S_d = 0$  наблюдается обычная картина дискретной дифракции [рис. 7.2(a)]. Увеличение степени беспорядка до  $S_d = 0.2$  (флуктуации центров  $2 \mu\text{m}$ ) приводит к частичной локализации [рис. 7.2(b)] как в цен-

тральном, так и в граничном волноводах. При сильном беспорядке с  $S_d = 0.7$  (флуктуации центров  $7 \mu\text{m}$ ) наблюдается экспоненциальная локализация в окрестности возбужденного волновода [рис. 7.2(с)]. Несмотря на визуальное сходство выходных распределений интенсивности для поверхностного и центрального волноводов, степень локализации при фиксированном  $S_d$  заметно различается. Последнее видно из сравнения наклонов  $\alpha_c, \alpha_s$  (здесь индексы  $c$  и  $s$  соответствуют центральному и поверхностному волноводам) линейно убывающей части усредненных распределений  $\ln(I)$  при разных уровнях беспорядка  $S_d$ . Параметры  $\alpha_c, \alpha_s$  характеризуют скорость экспоненциального затухания выходных распределений интенсивности, т.е. степень их локализации. Сравнение теоретически вычисленных [панель (а)] и экспериментально измеренных [панель (б)] параметров  $\alpha_c, \alpha_s$  приведено на рис. 7.3. Зависимости  $\alpha_c(S_d), \alpha_s(S_d)$  удается построить, начиная с  $S_d = 0.2$ , когда центральная часть распределения  $\ln(I)$  приобретает четко выраженную треугольную форму. Из рис. 7.3 следует, что локализация в центре массива всегда выше, чем на его границе, что является следствием эффективного отталкивания от границы. Для преодоления этого дополнительного отталкивания и достижения такой же степени локализации в граничном волноводе необходима большая степень беспорядка, чем в случае центрального волновода.

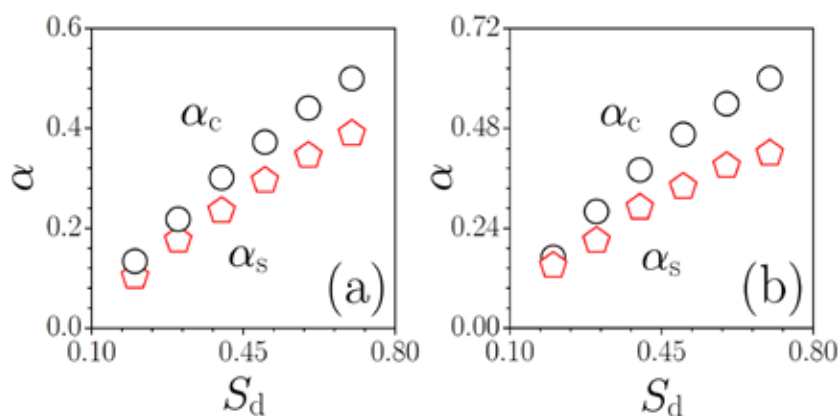


Рис. 7.3. Коэффициенты экспоненциального затухания усредненных выходных распределений интенсивности при возбуждении поверхностного (красные пятиугольники) и центрального (черные кружки) волноводов массива как функции степени беспорядка  $S_d$ . (а) Теоретические результаты и (б) экспериментальные результаты.

Динамика локализации неразрывно связана с преобразованием собственных мод разупорядоченных решеток. В регулярных решетках собственные моды (блоховские волны) делокализованы. При наличии беспорядка все моды становятся локализованными. При этом максимальная локализация соответствует модам с наибольшими постоянными распространения. Примеры мод, локализованных близко к центру решетки

и к ее границе, приведены на рис. 7.4(a) и 7.4(b). В случае недиагонального беспорядка локализованные моды формируются, как правило, на двух наиболее близких волноводах. Увеличение беспорядка приводит к росту локализации мод. Эволюция пучка в разупорядоченном массиве определяется биениями между модами, которые он возбуждает. Если пучок сразу на входе возбуждает хорошо локализованные моды, то распределение интенсивности практически не расплывается в процессе дальнейшего распространения. Естественно, что вероятность подобного возбуждения растет с увеличением уровня беспорядка, т.е. усредненные распределения интенсивности становятся более локализованными с ростом  $S_d$ . Вероятность появления локализованных мод вблизи границы решетки ниже, чем в глубине из-за вышеописанного эффекта отталкивания, что и приводит к уменьшению локализации усредненного распределения интенсивности при динамическом возбуждении.

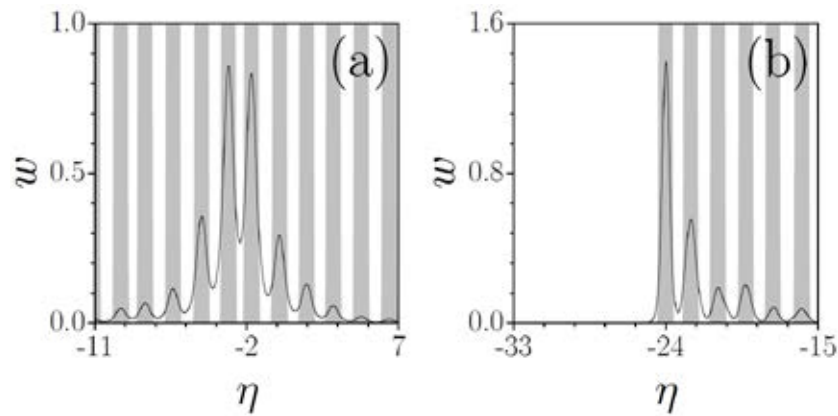


Рис. 7.4. Собственные моды периодического массива с беспорядком, локализованные вблизи центра (a) и вблизи границы (b) массива при  $S_d = 0.3$ . Серые области указывают положения волноводов в массиве.

Для наблюдения эволюции пучков в отдельных образцах массивов использовалась флуоресценция, индуцированная распространяющимся пучком. Экспериментально полученные картины дискретной дифракции в регулярном массиве показаны на рис. 7.5(a) и 7.5(b). Туннелирование между соседними волноводами ведет к "баллистическому" увеличению ширины пучка, поскольку делокализованные собственные моды дефазированы. При  $S_d = 0.3$  часть собственных мод массива уже хорошо локализована, но для их эффективного возбуждения необходимо значительное перекрытие профиля моды с входным пучком, которое не было достигнуто на рис. 7.5(c) и 7.5(d). Однако, из этих рисунков видно, что происходит замедление скорости дискретной дифракции. На рис. 7.5(e) и 7.5(f) для других реализаций массивов с  $S_d = 0.3$  наблюдается более эффектив-

ное возбуждение локализованных мод, особенно в случае поверхностного волновода. При этом большая часть мощности остается в окрестности исходного канала.

Таким образом, установлено, что для достижения равной степени андерсоновской локализации у границы требуется больший уровень беспорядка, чем в центре массива, из-за эффективного отталкивания.

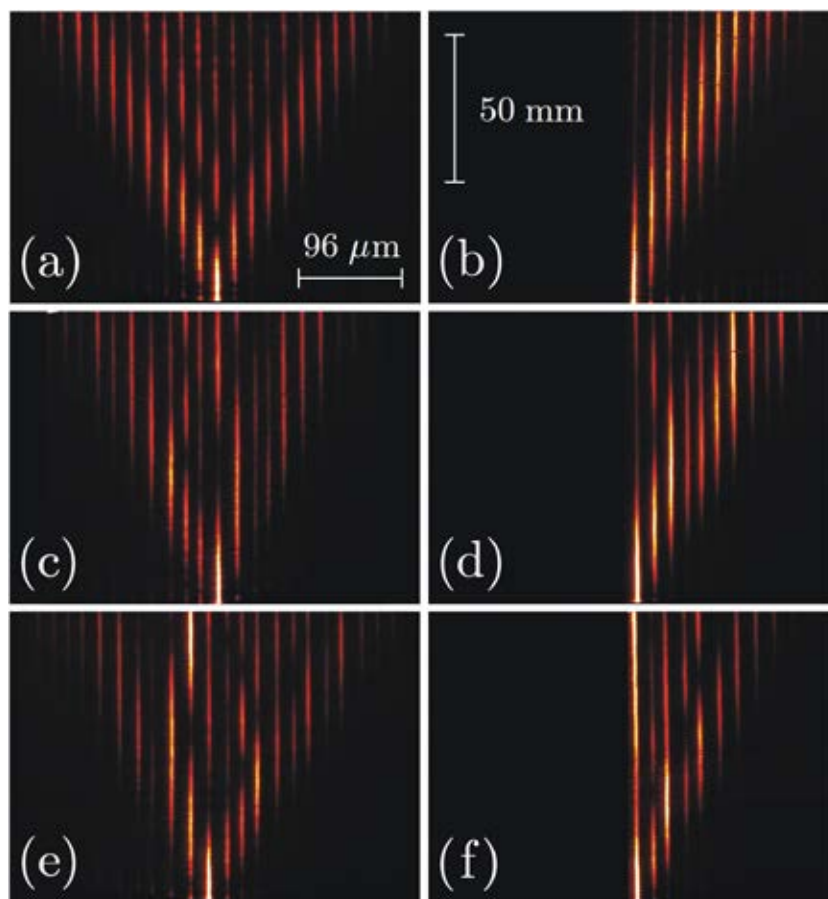


Рис. 7.5. Экспериментальные фотографии, иллюстрирующие динамику распространения в регулярном массиве (a),(b) и массиве с  $S_d = 0.3$  (c)-(f). Изображения в левой колонке получены при возбуждении центрального волновода, а изображения в правой колонке получены при возбуждении поверхностного волновода.

## §7.2. Андерсоновская кросс-локализация в двумерных массивах

Как было показано в предыдущем параграфе, в одномерном массиве волноводов с недиагональным беспорядком локализация собственных мод и выходного распределения интенсивности монотонно растет с увеличением  $S_d$ . В двумерном массиве волноводов недиагональный беспорядок может быть задан различными способами. В частности, положения волноводов могут флуктуировать лишь вдоль одной из осей массива (скажем, горизонтальной), либо вдоль обеих его осей. Причем, если в первом случае

сдвиги волноводов в разных рядах массива коррелированы (т.е. одинаковы для разных рядов), то массив остается периодическим в вертикальном направлении и локализация света в этом направлении невозможна. Однако, если сдвиги волноводов некоррелированы, то массив теряет периодичность и в вертикальном направлении, т.е. его собственные моды становятся локализованными, и появляется возможность андерсоновской локализации. Казалось бы, такой квазиодномерный беспорядок должен приводить к более сильной локализации в горизонтальном направлении, поскольку небольшие (по сравнению с периодом массива) горизонтальные флуктуации центров волноводов могут приводить лишь к изменениям второго порядка малости в расстояниях между волноводами в соседних рядах. В этом параграфе показано, что квазиодномерный недиагональный беспорядок в двумерных массивах может приводить к практически одинаково сильной локализации вдоль горизонтальной и вертикальной осей массива. Представлено также экспериментальное наблюдение этого эффекта кросс-локализации [429].

Для моделирования динамики распространения излучения в двумерных массивах с недиагональным беспорядком используем двумерный вариант уравнения (7.2), в котором также учтена фокусирующая нелинейность среды

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) + \sigma q |q|^2 - p R(\eta, \zeta) q. \quad (7.3)$$

Распределение показателя преломления в массиве волноводов с недиагональным беспорядком описывается функцией  $R(\eta, \zeta) = \sum_{km} \exp[-(\eta - \eta_k)^4 / w_\eta^4 - (\zeta - \zeta_m)^4 / w_\zeta^4]$ , где  $w_\eta, w_\zeta$  - ширины волноводов вдоль горизонтальной оси  $\eta$  и вертикальной оси  $\zeta$  соответственно. Параметр  $\sigma = -1$  соответствует фокусирующей нелинейности. Беспорядок вносится лишь в положения центров волноводов вдоль оси  $\eta$  и предполагается, что он некоррелирован для каждого ряда волноводов вдоль оси  $\zeta$ . В то время как  $\zeta_m = m d_\zeta$ , где  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $d_\zeta$  - фиксированное расстояние между волноводами вдоль оси  $\zeta$ , координаты волноводов вдоль оси  $\eta$  задаются формулой  $\eta_k = k d_\eta + r_{km}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $d_\eta$  - расстояние между волноводами в отсутствие беспорядка, и  $r_{km} < d_\eta / 2$  - случайный сдвиг волновода с номером  $k$ , равномерно распределенный на сегменте  $[-S_\eta, +S_\eta]$ . Заметим, что случайный сдвиг  $r_{km}$  зависит от индекса  $m$ , т.е. он изменяется для разных рядов. Степень беспорядка в системе контролируется максимально возможным горизонтальным сдвигом волноводов  $S_\eta$ . Очевидно, что беспорядок, заданный таким образом, является анизотропным и более сильным вдоль оси  $\eta$ . В соответствии с параметрами экспериментальных образцов, мы полагаем  $w_\eta = 0.3$ ,  $w_\zeta = 0.9$  (волноводы с поперечными размерами  $3 \times 9 \mu\text{m}^2$ ),  $d_\eta = 1.7$  и  $d_\zeta = 2.3$  (что эквивалентно периодам  $17 \mu\text{m}$  и  $23 \mu\text{m}$  вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$  соответственно),  $p = 11.3$  (глубина модуляции показателя преломления  $\sim 8 \times 10^{-4}$  на



длине волны  $\lambda = 633 \text{ nm}$ ), безразмерная длина массива  $L = 34.8$  соответствует реальной трассе распространения  $50 \text{ mm}$ . При  $S_\eta = 0.1$   $\eta$ -координата центра волновода с номером  $k$  может с одинаковой вероятностью принимать любое значение из интервала  $[kd_\eta - 1 \mu\text{m}, kd_\eta + 1 \mu\text{m}]$ . Периоды  $d_\eta, d_\zeta$  были подобраны так, чтобы в регулярном пределе получить практически изотропную дискретную дифракцию и исключить любые эффекты, связанные с эллиптичностью волноводов.

В компьютерном моделировании использовались два подхода для иллюстрации андерсоновской локализации. В рамках первого подхода, базирующегося на методе Монте-Карло, для каждого уровня беспорядка  $S_\eta$  были сгенерированы  $Q = 10^3$  реализаций массивов. Для каждой реализации уравнение (7.3) интегрировалось вплоть до  $\xi = L$  с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = Aw(\eta, \zeta)$ , где  $A$  - входная амплитуда, а функция  $w(\eta, \zeta)$  описывает профиль моды уединенного центрального волновода. Это позволяет вычислить выходную интенсивность  $I_{av}(\eta, \zeta) = Q^{-1} \sum_{k=1, Q} |q_k(\eta, \zeta, \xi = L)|^2$ , усредненную по ансамблю реализаций. В рамках второго подхода для каждого уровня беспорядка  $S_\eta$  мы строили лишь один массив с огромным числом волноводов, а усреднение выходной интенсивности проводилось для возбуждений различных, весьма удаленных друг от друга волноводов. При усреднении производилась коррекция центра распределения интенсивности в соответствии с координатами центра возбужденного волновода. Усреднение по различным волноводам (которое далее используется в эксперименте) при достаточном их удалении друг от друга дает в точности такой же результат, что и усреднение по ансамблю реализаций [сравните усредненные распределения интенсивности на панелях (а) и (б) рис. 7.6]. Эквивалентность упомянутых подходов была также продемонстрирована в работе [427]. Заметим, что в терминах статистической механики она соответствует так называемой эргодической гипотезе.

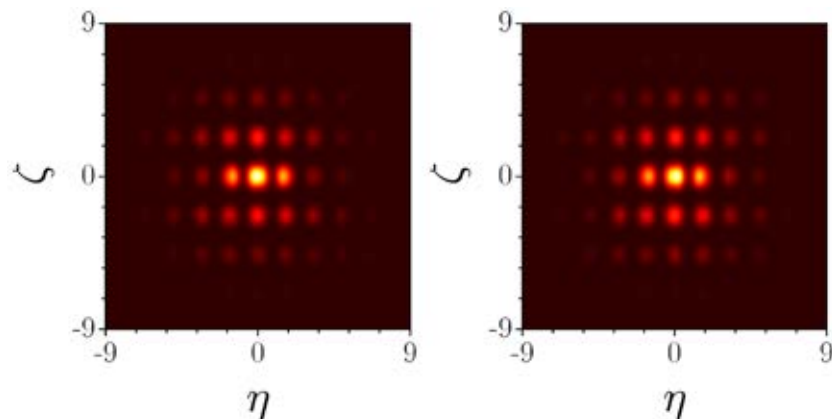


Рис. 7.6. Сравнение выходных распределений интенсивности, полученных при усреднении по ансамблю различных реализаций массивов (слева) и при усреднении по различным волноводам (справа) при  $S_\eta = 0.4$ .

Выходные теоретические распределения интенсивности, полученные при усреднении по ансамблю  $Q = 10^3$  реализаций, приведены в правой колонке рис. 7.7 для различных уровней беспорядка при  $A \rightarrow 0$ . При  $S_\eta = 0.0$  (первый ряд) наблюдается практически изотропная дискретная дифракция. Интегральные ширины выходного распределения интенсивности по осям  $\eta$  и  $\zeta$  практически совпадают. При малом уровне беспорядка  $S_\eta \sim 0.2$  (второй ряд) становится заметной тенденция к локализации - светлые

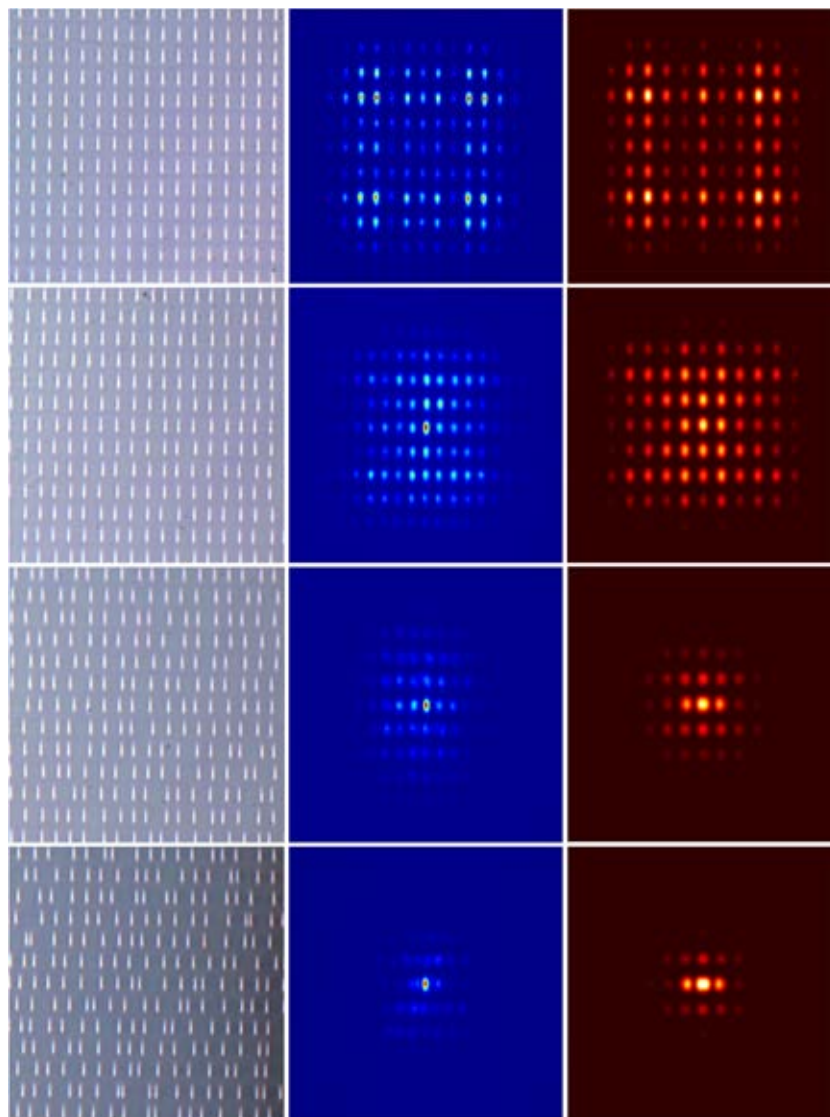


Рис. 7.7. Фотографии массивов волноводов с беспорядком (левая колонка), а также экспериментальные (центральная колонка) и теоретические (правая колонка) усредненные выходные распределения интенсивности в линейном случае. Уровень беспорядка (сверху вниз) равен  $S_\eta = 0.0, 0.2, 0.4$  и  $0.6$ .

пятна в центре распределения интенсивности становятся заметно ярче и все распределение выглядит более локализованным в горизонтальном направлении, в котором вне-

сен недиагональный беспорядок. В этом режиме  $I_{av}$  представляет собой суперпозицию локализованной центральной части и боковых максимумов, характерных для дифракции в регулярной двумерной решетке. Переход к локализации очевиден уже при промежуточных уровнях беспорядка  $S_\eta \sim 0.4$  (третий ряд), когда боковые максимумы практически полностью исчезают и остается лишь центральная экспоненциально локализованная часть распределения интенсивности. Дальнейшее увеличение беспорядка до  $S_\eta \sim 0.6$  приводит к увеличению степени локализации (четвертый ряд).

Неожиданным результатом является отчетливая тенденция к изотропии андерсоновской локализации, несмотря на сильную анизотропию беспорядка (флуктуируют только  $\eta$ -координаты центров волноводов). Эффект кросс-локализации ожидаемо возникает из-за того, что в многомерных системах введение некоррелированного беспорядка в положения волноводов вдоль хотя бы одной из осей приводит к появлению беспорядка в расстоянии между волноводами из соседних рядов во всех ортогональных направлениях, что влияет на связь между волноводами и в этих направлениях. Однако практически одинаковая степень локализации выходных распределений вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$  является неожиданной, поскольку при  $S_\eta \ll 1$  изменение расстояния между волноводами в одном ряду  $\sim S_\eta$  приводит к намного меньшему изменению расстояния между волноводами в соседних рядах  $\sim S_\eta^2 / 2d_\zeta$ , что интуитивно должно приводить к намного более слабой локализации вдоль оси  $\zeta$ . Тем не менее, сравнимая степень локализации вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$  наблюдается уже при  $S_\eta \sim 0.3$ , т.е. при  $S_\eta \ll d_\eta, d_\zeta$ . Заметим, что абсолютно аналогичный эффект обнаружен нами и в массивах круглых волноводов с одинаковыми периодами вдоль обеих осей, т.е. тенденция к изотропии локализации ни в коей мере не является следствием эллиптичности волноводов.

Явление кросс-локализации наблюдалось также в эксперименте. Массивы волноводов с контролируемой степенью беспорядка были записаны фемтосекундными лазерными импульсами. Фотографии центральных частей массивов приведены в первой колонке рис. 7.7. Видно, что флуктуации положений волноводов вдоль оси  $\eta$  увеличиваются с ростом  $S_\eta$ , в то время как расстояние между рядами волноводов вдоль оси  $\zeta$  неизменно. Для измерения выходных распределений интенсивности линейно поляризованный пучок на длине волны  $\lambda = 633$  nm запускался каждый раз в различные удаленные друг от друга волноводы. Для усреднения использовались выходные распределения интенсивности, полученные при возбуждении 25 различных волноводов. Волноводы выбирались достаточно далеко от границы образца для того, чтобы избежать поверхностных эффектов. Экспериментальные усредненные выходные распределения интенсивности, приведенные в средней колонке рис. 7.7, демонстрируют переход от дискретной дифракции к сильно локализованным распределениям по мере роста уровня беспорядка. Заслуживает упоминания сравнимая степень локализации в горизонтальном и вер-

тикальном направлениях. В то время как усредненные распределения интенсивности локализованы и характеризуются экспоненциально затухающими хвостами, распределения интенсивности в отдельных реализациях могут быть локализованы слабо или сильно (рис. 7.8), в зависимости от того, какие локализованные моды были возбуждены при фокусировке пучка в данный волновод. Последующая эволюция определяется биениями между возбужденными модами, как и в одномерном случае.

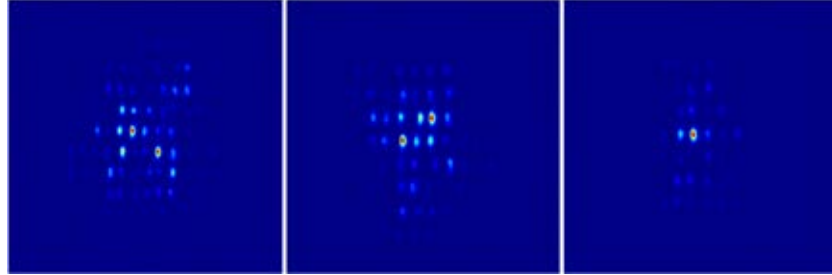


Рис. 7.8. Экспериментальные выходные распределения интенсивности, полученные при возбуждении различных волноводов в массиве с уровнем беспорядка  $S_\eta = 0.4$ . Левая и центральная панели показывают слабо локализованные распределения, а правая панель - сильно локализованное распределение.

Для того, чтобы сравнить степени локализации усредненных выходных распределений интенсивности вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$ , мы вычислили наклоны  $\alpha_\eta, \alpha_\zeta$  (или коэффициенты экспоненциального затухания) внутренних линейных частей зависимостей  $\ln[I_{av}(\eta, \zeta = 0)]$  и  $\ln[I_{av}(\eta = 0, \zeta)]$ . Теоретически вычисленные и экспериментально измеренные зависимости коэффициентов затухания от  $S_\eta$  приведены на рис. 7.9(a), 7.9(b). Как в теории, так и в эксперименте значения коэффициентов  $\alpha_\eta$  и  $\alpha_\zeta$  удается найти, начиная с  $S_\eta \approx 0.2$ . Коэффициенты экспоненциального затухания сравнимы при любом уровне беспорядка, хотя локализация по оси  $\eta$ , вдоль которой флуктуируют координаты центров волноводов, всегда остается немного выше. Коэффициенты  $\alpha_\eta$  и  $\alpha_\zeta$  монотонно растут с увеличением  $S_\eta$ . Мы не увеличивали  $S_\eta$  до значений, превышающих 0.8, чтобы избежать перекрытия волноводов в массиве.

Кроме того, было исследовано влияние фокусирующей нелинейности среды на кросс-локализацию. Для этого вычислялось обратное значение усредненного выходного форм-фактора  $\chi = U^{-2} Q^{-1} \sum_{k=1, Q} \iint |q_k|^4 d\eta d\zeta$ , где  $U = \iint |q_k|^2 d\eta d\zeta$  - мощность входного пучка, при  $S_\eta = 0.4$ ,  $Q = 10^3$  и различных входных амплитудах  $A$ . Величина  $\chi^{-1}$  характеризует ширину центральной локализованной части выходного распределения интенсивности и не учитывает низкоинтенсивное излучение, распространяющееся к периферии образца. При этом величина  $\chi^{-1}$  сначала немного возрастает с увеличением входной амплитуды (что говорит о небольшой делокализации за счет нелинейности), но ко-

гда амплитуда  $A$  достигает определенного порога, ширина локализованной части выходного распределения резко уменьшается, т.е. на длине нашего образца фокусирующая нелинейность стимулирует локализацию [рис. 7.9(с)]. Для еще больших входных амплитуд  $\chi^{-1}$  медленно уменьшается, но в этом режиме практически весь свет сконцентрирован в возбужденном волноводе, и беспорядок практически не влияет на динамику распространения.

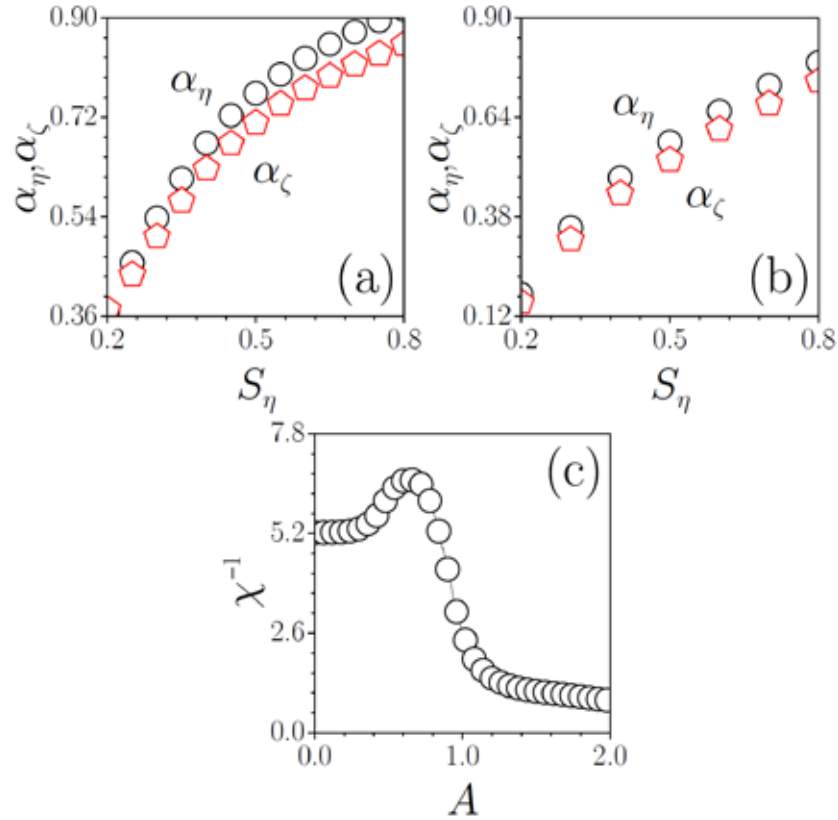


Рис. 7.9. Теоретически вычисленные (а) и экспериментально измеренные (б) коэффициенты экспоненциального затухания  $\alpha_\eta$  и  $\alpha_\zeta$  выходных усредненных распределений интенсивности в зависимости от силы беспорядка  $S_\eta$ . (с) Обратный форм-фактор для усредненного выходного распределения интенсивности как функция входной амплитуды при  $S_\eta = 0.4$ .

Подводя итоги, некоррелированные флуктуации центров волноводов вдоль одной из осей двумерного массива приводят к сравнимой андерсоновской локализации вдоль обеих осей. Фокусирующая нелинейность стимулирует локализацию.

### §7.3. Переход от одномерной к двумерной андерсоновской локализации

Диагональный или недиагональный беспорядок, привнесенный в периодическую решетку показателя преломления, вызывает кардинальное изменение спектра собственных мод и локализует все моды в одномерной или двумерной решетках. Возникает естественный вопрос: в каком случае - одномерном или двумерном - локализация, вызванная беспорядком, будет сильнее? Поскольку в двумерной решетке каждый волновод окружен большим числом соседей, чем в одномерной, то скорость оттока мощности из возбужденного волновода в двумерном случае будет больше, и можно ожидать, что для подавления этого оттока необходим больший уровень беспорядка. В этом параграфе данное предположение подтверждено как теоретически, так и экспериментально. Используя массивы волноводов с постепенно увеличивающимся числом рядов, нам удалось проследить за уменьшением степени локализации усредненных выходных распределений интенсивности при постепенном увеличении размерности системы, что ранее не наблюдалось [432].

Для описания распространения излучения в линейных массивах волноводов с постепенно увеличивающимся числом рядов используем уравнение (7.3) с  $\sigma = 0$ . Как и прежде, функция  $R(\eta, \zeta) = \sum_{k,m} \exp[-(\eta - \eta_k)^4 / w_\eta^4 - (\zeta - \zeta_m)^4 / w_\zeta^4]$  описывает профиль решетки с эллиптическими волноводами. При численном моделировании мы полагаем, что массив бесконечен вдоль горизонтальной оси  $\eta$  и имеет ограниченное число рядов в вертикальном направлении  $\zeta$ , так что координаты центров волноводов в отсутствие беспорядка задаются формулами  $\eta_k = kd_\eta$  и  $\zeta_m = md_\zeta$ , где  $d_\eta, d_\zeta$  - расстояния между центрами волноводов вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , а  $m \in [-n/2, +n/2]$  для четного числа рядов в массиве и  $m \in [-(n-1)/2, +(n-1)/2]$  для нечетного числа рядов  $n$ . Как уже обсуждалось в параграфе 1.5, эффективная размерность такой системы зависит от числа рядов волноводов. При  $n=1$  получаем одномерную систему, а двумерная система соответствует  $n \rightarrow \infty$ . В массиве с недиагональным беспорядком положения волноводов задаются формулами  $\eta_k = kd_\eta + \delta\eta_{km}$ ,  $\zeta_m = md_\zeta + \delta\zeta_{km}$ , где некоррелированные случайные сдвиги  $\delta\eta_{km}, \delta\zeta_{km}$  центров волноводов равномерно распределены на сегментах  $[-S_\eta, +S_\eta]$  и  $[-S_\zeta, +S_\zeta]$ , соответственно. Во избежание перекрытия соседних волноводов параметры  $S_\eta < d_\eta/2$  и  $S_\zeta < d_\zeta/2$ , контролирующие степень беспорядка, ограничены. В соответствии с параметрами экспериментальных образцов, записанных фемтосекундными лазерными импульсами, полагаем  $w_\eta = 0.3$  и  $w_\zeta = 0.53$  (волноводы с поперечными сечениями  $3 \times 5.3 \mu\text{m}^2$ ), в то время как  $d_\eta = 1.5$  и  $d_\zeta = 1.7$  соответствуют горизонтальному и вертикальному расстоянию между волноводами равному  $15 \mu\text{m}$  и  $17 \mu\text{m}$  соответственно. Небольшая разница между  $d_\eta$  и  $d_\zeta$  позволяет получить одинаковые скорости ди-

фракционного расплывания вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$  в регулярном случае, несмотря на эллиптичность волноводов. Параметр  $p=18$  соответствует глубине модуляции показателя преломления  $\sim 1.2 \times 10^{-3}$  при  $\lambda = 800 \text{ nm}$ , а  $100 \text{ mm}$  длина образца эквивалентна безразмерной трассе распространения  $L = 87.2$ . В дальнейшем мы фиксируем уровни беспорядка  $S_\eta = 0.5$  и  $S_\zeta = 0.3$ , что соответствует максимальным случайным сдвигам волноводов  $5 \text{ }\mu\text{m}$  в горизонтальном направлении и  $3 \text{ }\mu\text{m}$  в вертикальном направлении и ведет к практически одинаковой локализации вдоль осей  $\eta$  и  $\zeta$  в двумерном массиве волноводов.

Исследуем влияние размерности массива, т.е. степени локализации линейных мод системы в вертикальном направлении, на андерсоновскую локализацию. В численном моделировании используем метод Монте-Карло и формируем  $Q = 10^3$  реализаций случайных массивов для каждого значения параметра  $n$  (числа рядов в массиве) от 1 до 20. Для каждой реализации и заданного числа рядов в массиве уравнение (7.3) интегрировалось с начальными условиями  $q|_{\xi=0} = w(\eta, \zeta)$ , где функция  $w(\eta, \zeta)$  описывает профиль моды уединенного центрального волновода. Поскольку задача линейная, то можно положить  $\max[w(\eta, \zeta)] = 1$ . Для каждого значения  $n$  вычисляются усредненные по ансамблю реализаций массивов распределения интенсивности  $I_{\text{av}}(\eta, \zeta, \xi)$ , горизонтальная ширина  $w_{\text{hor}}(\xi)$  и форм-фактор  $\chi(\xi)$ :

$$\begin{aligned} I_{\text{av}} &= Q^{-1} \sum_{k=1, Q} |q_k|^2, \\ w_{\text{hor}}^2 &= U^{-1} Q^{-1} \sum_{k=1, Q} \iint \eta^2 |q_k|^2 d\eta d\zeta, \\ \chi^2 &= U^{-2} Q^{-1} \sum_{k=1, Q} \iint |q_k|^4 d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где  $U = \iint |q_k|^2 d\eta d\zeta$  - мощность пучка, сохраняющаяся в процессе распространения. Заметим, что в то время как параметр  $w_{\text{hor}}(\xi)$  характеризует эволюцию ширины распределения вдоль оси  $\eta$  с учетом низкоинтенсивного излучения, движущегося к периферии массива, обратный форм-фактор  $\chi^{-1}(\xi)$  характеризует ширину высокоинтенсивной центральной части распределения интенсивности  $|q_k(\eta, \zeta, \xi)|^2$  и практически не учитывает слабое излучение.

Усредненные выходные распределения интенсивности для массивов с  $n = 1, 3, 5$  и  $17$  рядами при  $\xi = L$  представлены на рис. 7.10. Во всех случаях наблюдается экспоненциальная андерсоновская локализация в окрестности возбужденного центрального волновода. Заметим, что в отсутствие беспорядка наблюдалась бы существенная дискретная дифракция, причем крайние пики в выходном распределении интенсивности находились бы в окрестности волноводов с номерами  $k, m \sim 8$ . Усредненные распределения интенсивности заметно расширяются в вертикальном направлении с увеличением

ем числа рядов в массиве. Заметное расширение наблюдается вплоть до  $n \sim 9$ , но при дальнейшем росте  $n$  выходные распределения интенсивности остаются практически неизменными. Горизонтальная ширина распределения интенсивности  $w_{\text{hor}}$  также увеличивается с ростом  $n$ , хотя размерность массива растет только в вертикальном направлении. Это является прямым указанием на то, что размеры системы в одном направлении влияют на локализацию в ортогональном направлении. Подтверждение этой закономерности приведено на рис. 7.11, где показана эволюция обратного форм-фактора и ширины пучка вдоль оси  $\eta$  при распространении. Видно, как режим исходного баллистического расширения при малых  $\xi$  сменяется локализацией на достаточно

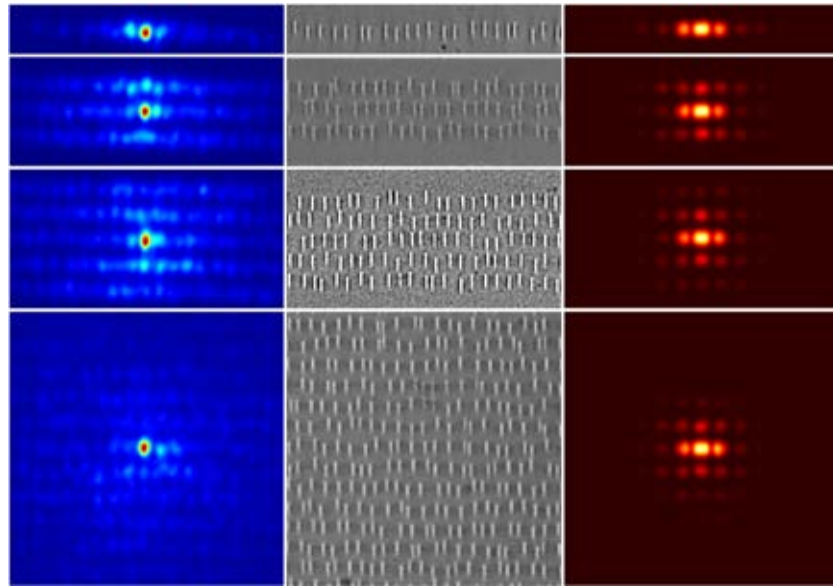


Рис. 7.10. Экспериментально (левая колонка) и теоретически (правая колонка) полученные усредненные распределения интенсивности и фотографии массивов волноводов (центральная колонка). Количество рядов в массиве равно (сверху вниз)  $n = 1, 3, 5$  и  $17$ .

большой трассе распространения. Поскольку параметр  $\chi^{-1}$  характеризует ширину наиболее интенсивной части распределения интенсивности  $|q_k|^2$ , которая возникает при возбуждении андерсоновских мод с центрами в непосредственной близости от исходного волновода, то переход к локализации наиболее очевиден для зависимости  $\chi^{-1}(\xi)$  [рис. 7.11(a)]. В массивах с большим числом рядов увеличение ширины пучка происходит более быстрыми темпами и большие трассы распространения необходимы для достижения режима локализации [рис. 7.11(b)].

Основной результат численного моделирования приведен на рис. 7.12(a), иллюстрирующем зависимость обратного усредненного форм-фактора (ширины локализованной части распределения) при  $\xi = L$  от числа рядов в массиве волноводов, определяющего его эффективную размерность. Обратный форм-фактор  $\chi^{-1}$  минимален для одно-



мерного массива и быстро увеличивается с ростом  $n$ . При  $n \sim 9$  происходит насыщение и  $\chi^{-1}$  практически перестает меняться, т.е. для  $n > 9$  система ведет себя как эффективно двумерная. Из рис. 7.12(a) следует, что андерсоновская локализация в одномерном случае всегда сильнее, чем в двумерном. Необходимо подчеркнуть, что зависимость  $\chi^{-1}(n)$  на рис. 7.12(a) получена для трассы распространения, соответствующей длине наших экспериментальных образцов, но она остается практически неизменной и для существенно больших трасс.

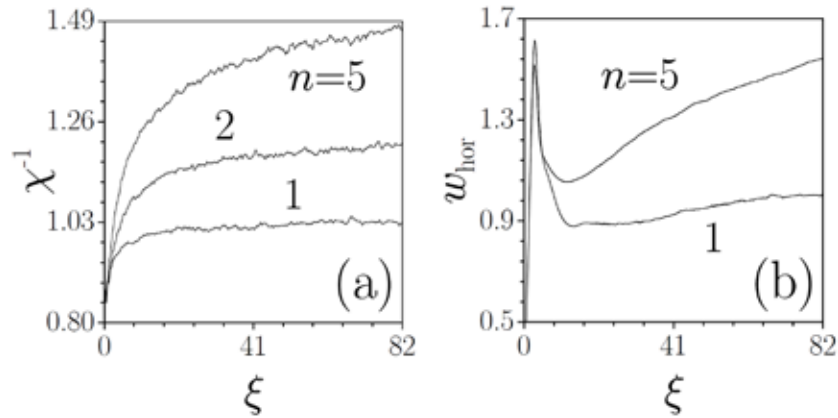


Рис. 7.11. Зависимости обратного форм-фактора (a) и ширины пучка вдоль оси  $\eta$  (b), усредненных по ансамблю  $10^3$  реализаций массивов, от продольной координаты.

В эксперименте шесть массивов, содержащих  $n \times 81$  волноводов,  $n = [1, 3, 5, 7, 11, 17]$ , были записаны в плавленом кварце с помощью сфокусированных фемтосекундных лазерных импульсов с  $\lambda = 800$  nm. Фотографии центральных частей этих массивов представлены в центральной колонке рис. 7.10. Видно, что выбранный уровень беспорядка с максимально возможными горизонтальными и вертикальными смещениями центров волноводов в  $5 \mu\text{m}$  и  $3 \mu\text{m}$  уже достаточно велик, но еще не приводит к перекрытию соседних волноводов. В каждом из массивов малоинтенсивный пучок от Ti:Sa лазера на длине волны  $\lambda = 800$  nm фокусировался в 30 различных волноводах, расположенных достаточно далеко от границ массива и друг от друга. Выходные распределения интенсивности записывались с помощью CCD камеры и усреднялись по 30 реализациям (волноводам) для каждого  $n$ . Примеры усредненных выходных распределений интенсивности приведены в левой колонке рис. 7.10 для массивов с  $n = 1, 3, 5$  и  $17$ . За исключением более ярко выраженного малоинтенсивного пьедестала, возникающего из-за рассеяния света, экспериментальные усредненные распределения схожи с расчетными распределениями, показанными в последней колонке рис. 7.10. Мы использовали экспериментальные выходные распределения интенсивности для получения усредненных значений обратного форм-фактора для каждого  $n$ . Зависимость  $\chi^{-1}(n)$  представлена на

рис. 7.12(b). В согласии с теоретическими результатами, с ростом  $n$  наблюдается быстрое увеличение ширины выходного распределения интенсивности, а также видна тенденция к насыщению при  $n \sim 10$ .

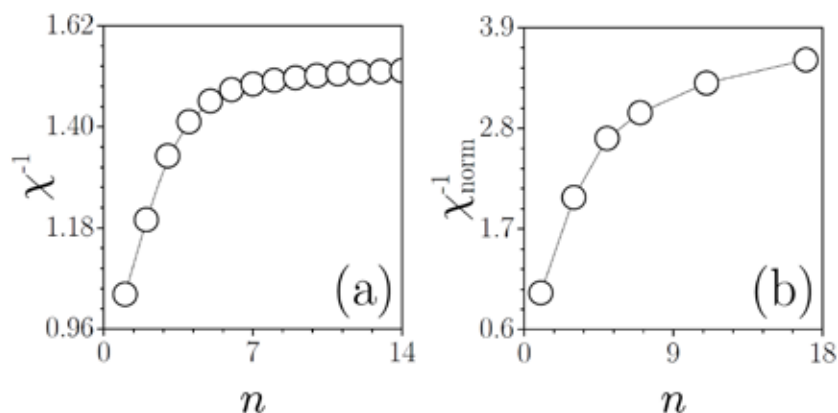


Рис. 7.12. Теоретически вычисленная (a) и экспериментально измеренная (b) зависимость обратного усредненного форм-фактора от числа рядов в массиве. На панели (b) обратный форм-фактор нормирован таким образом, чтобы  $\chi_{\text{норм}}^{-1} = 1$  при  $n = 1$ .

Таким образом, прослежено изменение степени локализации пучков при постепенном переходе от одномерного к двумерному массиву волноводов с беспорядком. Установлено, что при фиксированном уровне беспорядка степень локализации выше в одномерном массиве.

#### §7.4. Отражение и передача солитонов в периодических решетках, стимулированные беспорядком

Одной из основных отличительных особенностей регулярной периодической среды является способность практически полностью отражать пучки, распространяющиеся под углами, близкими к брэгговским. Последнее связано с зонной структурой спектра собственных значений, в котором существуют области, где распространение волн с данной постоянной распространения и поперечным блоховским моментом невозможно. Если периодическая решетка граничит с однородной средой, то пучки, падающие на границу раздела, будут испытывать преломление, пропускание и частичное отражение. Коэффициенты отражения и пропускания зависят от угла падения пучка и могут резко меняться даже при небольших изменениях угла падения, так что полная прозрачность среды может сменяться практически полным отражением при изменении угла падения пучка. Динамика отражения и преломления становится еще более сложной, если решетка содержит ограниченное число периодов. В этом случае коэффициенты пропуска-

ния и отражения будут также зависеть и от числа периодов в решетке. Случайная модуляция показателя преломления в периодической решетке может привести к кардинальным изменениям динамики взаимодействия пучков с такой средой. В этом параграфе будет показано, что беспорядок может стимулировать передачу солитонов в том диапазоне параметров, где регулярная решетка отражает пучок, или, наоборот, вызвать заметное отражение в режиме прозрачности [439].

Для описания взаимодействия пучков с границей одномерного массива волноводов с беспорядком используем уравнение (3.1) с  $\sigma = -1$ , что соответствует фокусирующей нелинейности. Для описания профиля показателя преломления используем формулу  $\sum_{m=-(n-1)/2}^{(n-1)/2} G(\eta - \eta_m)$ , с гауссовскими профилями  $G(\eta) = \exp(-\eta^6 / w_\eta^6)$  отдельных волноводов, положения центров которых описываются формулой  $\eta_m = md + r_m$ , где  $d$  - расстояние между волноводами в регулярной решетке, а  $r_m$  - случайный сдвиг центра волновода, равномерно распределенный на сегменте  $[-S_d, +S_d]$ . Предполагаем, что массив, содержащий конечное число волноводов  $n$  внедрен в однородную нелинейную среду керровского типа. В дальнейшем используем глубину решетки  $p = 11$ , ширину волноводов  $w_\eta = 0.3$  и период  $d = 1.6$  (соответствие безразмерных и реальных физических величин обсуждалось ранее в этой главе).

При качественном описании динамики взаимодействия излучения с ограниченным массивом волноводов, отдельные волноводы могут рассматриваться как рассеивающие центры, характеризующиеся комплексным амплитудным коэффициентом отражения  $\rho_1$ . В борновском приближении, для слабых рассеивающих центров, полный амплитудный коэффициент отражения для плоской волны  $\exp(i\alpha\eta)$ , взаимодействующей с  $n$  волноводами, может быть оценен как  $\rho_n = \rho_1 \sum_{m=1}^n \exp(-i\varphi_m)$ , где  $\varphi_m$  - разность фаз между волнами, отраженными первым волноводом и волноводом с номером  $m$ . В регулярном массиве, где  $\varphi_m = 2md\alpha$ , коэффициент отражения по мощности будет равен  $r_n = |\rho_n|^2 = r_1 \sin^2(n\alpha d) / \sin^2(\alpha d)$ , где  $r_1 = |\rho_1|^2$ . Если выполняется условие Брэгга  $d\alpha = \pi M$  ( $M = 1, 2, \dots$ ), то должно наблюдаться значительное отражение с  $r_n \sim n^2$ . В случае массива с беспорядком, среднее значение коэффициента отражения по мощности задается формулой  $\langle r_n \rangle = r_1 n + r_1 \sum_{m,l=1; m \neq l}^n \langle \exp[i(\varphi_l - \varphi_m)] \rangle$ , где угловые скобки означают статистическое усреднение, а  $\varphi_m, \varphi_l$  - случайные фазы отраженных волн. В частности, при сильном беспорядке, когда разность фаз  $\varphi_l - \varphi_m$  флуктуирует между  $-\pi$  и  $\pi$  для разных реализаций массивов, интерференционный член в формуле для коэффициента отражения пренебрежимо мал, что дает уменьшенный в  $n$  раз коэффициент отражения  $\langle r_n \rangle \simeq r_1 n$ . Этот простой качественный подход корректен для плоских волн, но ограниченно применим для локализованных световых пучков, поскольку при отражении должен учитываться вклад только тех волноводов, которые накрываются пучком. Наличие нелинейности еще более усложняет динамику отражения, поскольку она приводит к преобразо-

ваниям профиля пучка. В дальнейшем, при изучении динамики отражения пучков от разупорядоченных нелинейных решеток, мы использовали численное интегрирование уравнения (3.1) в сочетании с методом Монте-Карло.

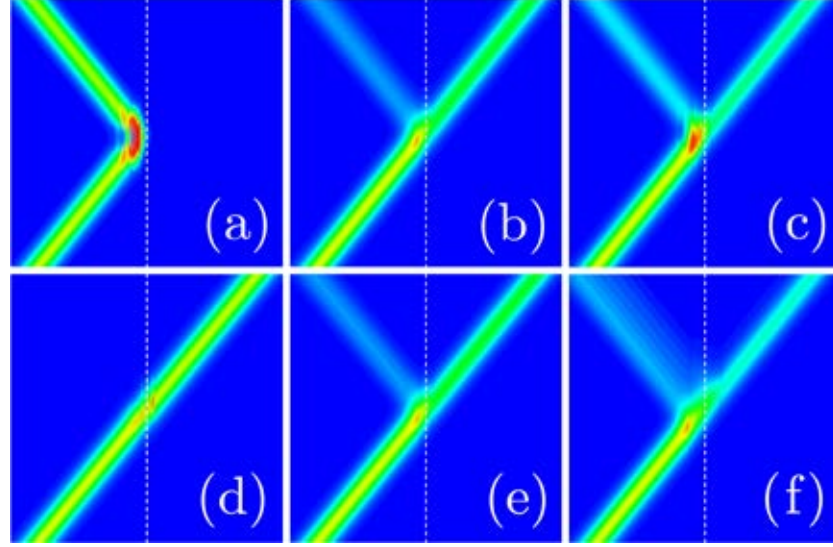


Рис. 7.13. Усредненная динамика распространения для широких солитонов с фактором  $\chi = 0.05$  падающих справа на границу ограниченный массив волноводов при (a)  $\alpha = 5.26$ ,  $S_d = 0.00$ , (b)  $\alpha = 5.26$ ,  $S_d = 0.30$ , (c)  $\alpha = 5.26$ ,  $S_d = 0.42$ , (d)  $\alpha = 4.80$ ,  $S_d = 0.00$ , (e)  $\alpha = 4.80$ ,  $S_d = 0.30$  и (f)  $\alpha = 5.26$ ,  $S_d = 0.30$ . На панелях (a)-(e)  $n = 15$ , а на панели (f)  $n = 31$ . Пунктирные линии указывают центр ограниченного массива волноводов.

Далее используется входной солитон  $q|_{\xi=0} = \chi \operatorname{sech}[\chi(\eta - \eta_0)] \exp[i\alpha(\eta - \eta_0)]$  с фактором  $\chi$ , исходным углом распространения  $\alpha$ , запущенный в однородную нелинейную среду достаточно далеко от границы раздела с решеткой, т.е.  $\eta_0 < 0$ ,  $|\eta_0| \gg 1$ . Вычисляем статистически усредненные коэффициенты отражения  $R = \langle U_{\text{ref}} \rangle / U_{\text{in}}$  и передачи  $T = \langle U_{\text{tr}} \rangle / U_{\text{in}}$ , где для каждой реализации отраженная и прошедшая мощности определяются как

$$\begin{aligned} U_{\text{ref}} &= \int_{-\infty}^0 |q(\eta, \xi_{\text{end}})|^2 d\eta, \\ U_{\text{tr}} &= \int_0^{+\infty} |q(\eta, \xi_{\text{end}})|^2 d\eta, \end{aligned} \quad (7.5)$$

где полное расстояние распространения  $\xi_{\text{end}} = 2|\eta_0|/\alpha$  выбирается достаточно большим, для того, чтобы отраженный и прошедший пучки успели достаточно далеко отделиться от границ массива. При этом  $U_{\text{ref}} + U_{\text{tr}} = U_{\text{in}} = 2\chi$ , где полная мощность  $U_{\text{in}}$  сохраняется в процессе распространения. Уровень беспорядка в массиве задается параметром  $S_d$ .

В регулярных периодических массивах коэффициенты отражения и пропускания для широких маломощных солитонов резко меняются при изменении угла распространения  $\alpha$ . При определенных "резонансных" углах возможно полное отражение [см. динамику распространения на рис. 7.13(a) для  $\alpha = 5.26$ ], но даже небольшая отстройка угла  $\alpha$  от резонансного значения приводит к практически полной передаче солитона [см. рис. 7.13(d) для  $\alpha = 4.80$ ]. Угловые зависимости коэффициента отражения для различного числа волноводов  $n$  представлены на рис. 7.14(a). Заслуживает упоминания сходство этих зависимостей с формулой для коэффициента отражения, полученной в борновском приближении  $r_n \sim \sin^2(n\alpha d) / \sin^2(\alpha d)$ . Максимумы в зависимости  $R(\alpha)$  связаны с зонной структурой решетки. Так, отражение происходит в том случае, если постоянная распространения входного пучка, равная  $b = -\alpha^2/2$  при  $\chi \rightarrow 0$ , попадает в одну из запрещенных зон в спектре собственных значений. Например, на рис. 7.14 постоянная распространения, соответствующая  $\alpha = 5.26$ , попадает в точности в середину третьей ограниченной запрещенной зоны, соответствующей значениям  $b \in [-14.45, -13.20]$ . Соответственно, для зависимости  $R(\alpha)$  характерно наличие множественных максимумов, связанных с различными запрещенными зонами. Максимальный коэффициент отражения увеличивается с ростом числа волноводов в массиве [рис. 7.14(b)].

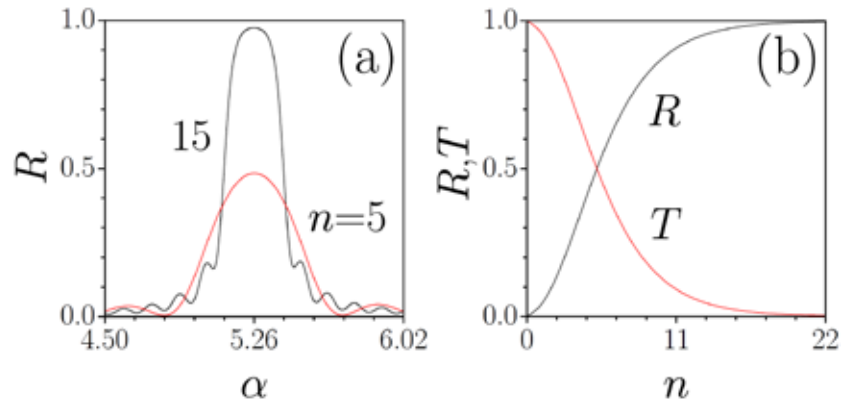


Рис. 7.14. (a) Коэффициент отражения в регулярном массиве волноводов как функция угла падения солитона для различного числа волноводов. (b) Коэффициенты отражения и передачи как функции числа волноводов в регулярном массиве при  $\alpha = 5.26$ . Во всех случаях использовался входной солитон с форм-фактором  $\chi = 0.05$ .

Эта картина резко меняется при наличии беспорядка. Например, наличие даже достаточно слабого беспорядка с  $S_d = 0.3$  приводит к резкому увеличению среднего коэффициента передачи  $T$  решетки даже при резонансном угле  $\alpha = 5.26$ , несмотря на то, что в регулярном случае этот угол соответствует практически полному отражению [сравните рис. 7.13(b), иллюстрирующий динамику распространения в решетке с беспо-

рядком, с рис. 7.13(a), на котором показано отражение в регулярном случае]. Интересно, что больший уровень беспорядка не обуславливает большей прозрачности массива. Рис. 7.13(c) показывает, что дальнейший рост беспорядка вплоть до  $S_d = 0.42$  увеличивает в среднем отражение от решетки. При определенных условиях беспорядок может даже подавлять передачу солитонов, вместо того чтобы улучшить ее. Так, на рис. 7.13(e), показывающем усредненную динамику распространения при  $S_d = 0.3$ ,  $\alpha = 4.80$ , ясно заметно отражение, в отличие от рис. 7.13(d), где при том же исходном угле солитон проходит регулярную решетку с  $S_d = 0$  без видимых потерь. При увеличении числа волноводов в массиве коэффициент отражения увеличивается, также как и ширина статистически усредненного отраженного пучка [рис. 7.13(f)]. При этом отраженный пучок становится асимметричным и приобретает длинные экспоненциально затухающие хвосты, которые характерны для режима диффузного рассеяния света.

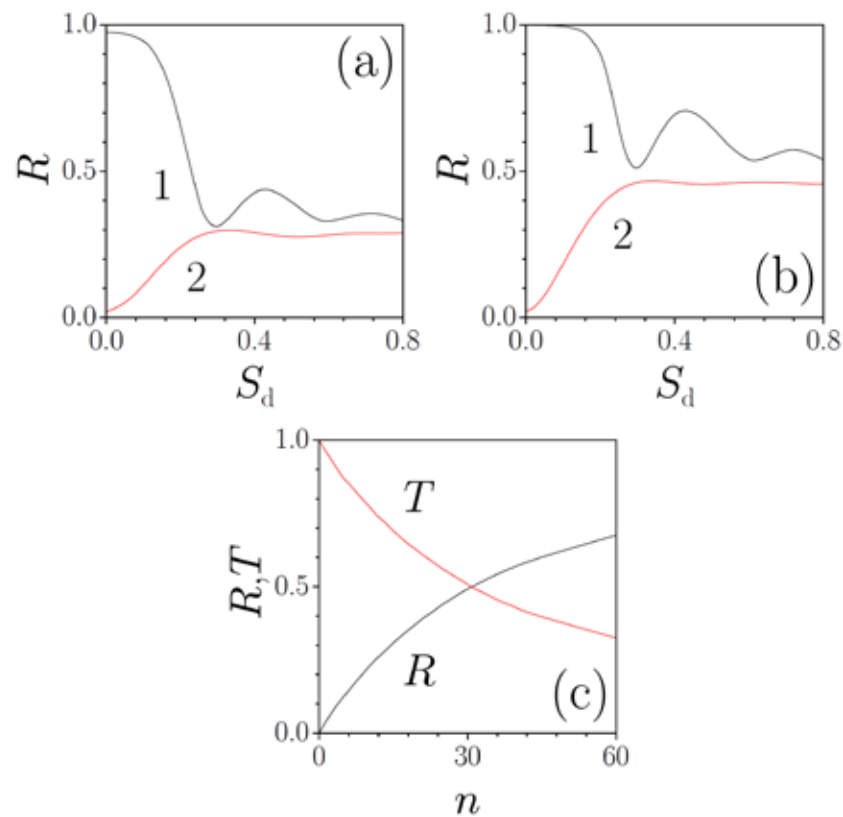


Рис. 7.15. (a) Коэффициент отражения в зависимости от уровня беспорядка при  $n = 15$  для  $\alpha = 5.26$  (кривая 1) и  $\alpha = 4.80$  (кривая 2). (b) Коэффициент отражения в зависимости от уровня беспорядка при  $n = 31$  для  $\alpha = 5.26$  (кривая 1) и  $\alpha = 4.68$  (кривая 2). (c) Коэффициенты отражения и передачи в зависимости от  $n$  при  $\alpha = 5.26$ ,  $S_d = 0.30$ . Во всех случаях  $\chi = 0.05$ .

Статистический анализ коэффициентов отражения и передачи представлен на рис. 7.15(a) и 7.15(b). Для входных углов, соответствующих резонансному отражению (кривые 1), статистически усредненный коэффициент отражения  $R$  с ростом  $S_d$  сначала уменьшается, что указывает на "просветление" решетки за счет беспорядка, а потом совершает затухающие осцилляции, постепенно приближаясь к постоянному асимптотическому значению при больших значениях  $S_d$ . Наоборот, для углов  $\alpha$ , достаточно удаленных от резонансного угла (кривые 2), наблюдается практически монотонный рост коэффициента отражения с увеличением беспорядка  $S_d$ , т.е. эффект, обратный просветлению. Отметим, что для всех углов  $\alpha$  коэффициент отражения  $R$  приближается к одному и тому же асимптотическому значению при большом уровне беспорядка. Это асимптотическое значение увеличивается с ростом числа волноводов в массиве. Например, для  $n = 15$  асимптотическое значение коэффициента отражения составляет  $R \sim 0.3$ , в то время как для  $n = 31$  получаем  $R \sim 0.5$ . Это означает, что наибольшие абсолютные изменения коэффициента отражения за счет беспорядка возможны в массивах с небольшим числом волноводов  $n$ , в то время как наибольшие изменения коэффициента передачи имеют место в широких массивах. Первый минимум в зависимости  $R(S_d)$ , как правило, достигается при достаточно малом уровне беспорядка  $S_d = 0.3$ . Зависимости коэффициентов отражения и передачи от числа волноводов  $n$  в массиве представлены на рис. 7.15(c). Этот рисунок иллюстрирует существенно более медленный рост коэффициента отражения  $R$  с ростом числа волноводов по сравнению с регулярной решеткой [рис. 7.14(b)].

Рис. 7.16(a) и 7.16(b) иллюстрируют гистограммы коэффициента отражения, вычисленные по 1300 реализациям показателя преломления для  $S_d = 0.2$  и  $S_d = 0.3$ . В обоих случаях гистограммы являются асимметричными, что указывает на значительную разницу между средним и наиболее вероятным значением коэффициента  $R$ . При малом беспорядке  $S_d = 0.2$  явно доминируют сценарии с отражением пучка, в то время как при  $S_d = 0.3$  передача пучка становится более вероятной.

Нелинейность существенно влияет на динамику пропускания или отражения пучка. На рис. 7.16(c) представлена зависимость усредненного коэффициента отражения от уровня беспорядка  $S_d$  для различных форм-факторов  $\chi$  исходного солитона. Влияние нелинейности наиболее сильно в слабо нерегулярных массивах с  $S_d < 0.3$ , где повышение пиковой амплитуды ведет к резкому уменьшению отражения даже в регулярной решетке. Последнее является следствием уменьшения отражения на отдельных волноводах за счет уменьшения контраста полного показателя преломления и за счет того, что пучок с большим  $\chi$  накрывает меньшее число эффективных рассеивателей (волноводов). Интересно, что при  $S_d = 0.3$ , когда беспорядок приводит к максимальному

уменьшению коэффициента отражения в линейном случае, нелинейность практически не влияет на величину коэффициента отражения  $R$ .

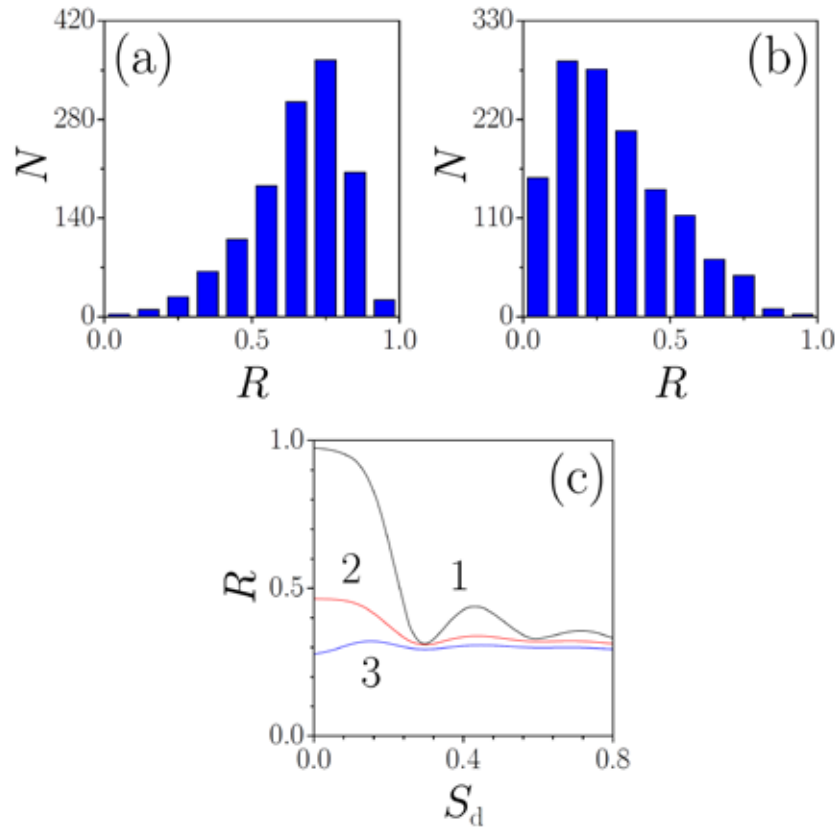


Рис. 7.16. Гистограммы коэффициента отражения при  $\chi=0.05$ ,  $n=15$ ,  $\alpha=5.26$  для  $S_d=0.2$  (a) и  $0.3$  (b). (c) Коэффициент отражения в зависимости от уровня беспорядка при  $n=15$ ,  $\alpha=5.26$  для  $\chi=0.05$  (кривая 1),  $0.50$  (кривая 2) и  $1.00$  (кривая 3).

Таким образом, введение случайной модуляции показателя преломления резко влияет на динамику отражения и пропускания пучков на границе раздела периодической решетки и однородной среды. Для разных углов падения пучка на границу раздела беспорядок может приводить как к просветлению решетки, так и увеличению отражения от нее.

### §7.5. Броуновское движение солитонов в случайных профилях показателя преломления

Аналогия между оптическими солитонами и твердыми частицами была отмечена еще в первых работах, изучавших столкновение солитонов в рамках полностью интегрируемых моделей, таких как кубическое уравнение Шредингера. Например, было установлено, что столкновение противофазных солитонов в однородной кубической среде не



сопровождается энергообменом, и после столкновения изменяются лишь фазы солитонов и происходят сдвиги их центров. Солитоны могут рассматриваться как частицы также при распространении в среде с пространственно-неоднородным показателем преломления, если модуляция показателя преломления достаточно слаба и не приводит к кардинальным изменениям профиля солитона. Движение солитона в таких средах эквивалентно движению эффективной частицы во внешнем потенциале. Если потенциал случаен, то частица будет взаимодействовать с неоднородностями потенциала и случайным образом менять скорость, а может быть, и направление своего движения, по аналогии с броуновской частицей, хаотически движущейся благодаря столкновениям с молекулами жидкости. В этом параграфе рассматривается движение солитонов в спеклообразных профилях показателя преломления, индуцированных случайными недифрагирующими пучками в фоторефрактивном кристалле, подобное броуновскому движению [441].

Для описания распространения световых пучков в фоторефрактивном кристалле с оптически-индуцированным неоднородным профилем показателя преломления используем уравнение Шредингера для безразмерной амплитуды поля  $q$ :

$$i \frac{\partial q}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial \zeta^2} \right) - Eq(S|q|^2 + pR)(1 + S|q|^2 + pR)^{-1}. \quad (7.6)$$

В фоторефрактивном кристалле обыкновенно-поляризованная волна и необыкновенно-поляризованный пробный пучок совместно создают добавку к показателю преломления. Нормировки для безразмерного статического поля  $E$ , параметра насыщения  $S$ , глубины решетки  $p$ , а также координат в уравнении (7.6) совпадают с введенными в параграфе 2.7. Предполагается, что профиль оптической решетки определяется распределением интенсивности недифрагирующего пучка  $R(\eta, \zeta) \sim |q_{\text{nd}}|^2$ , который распространяется в кристалле в линейном режиме из-за малости соответствующего электрооптического коэффициента. Комплексная амплитуда случайного недифрагирующего пучка  $q_{\text{nd}}$ , индуцирующего решетку, может быть записана через интеграл Уиттекера (см. также параграф 2):

$$q_{\text{nd}}(\eta, \zeta, \xi) = \exp(-ik_t^2 \xi / 2) \int_0^{2\pi} G(\phi) \exp[ik_t(\eta \cos \phi + \zeta \sin \phi)] d\phi, \quad (7.7)$$

где  $k_t$  - поперечное волновое число и  $G(\phi)$  - угловой спектр пучка. Случайный угловой спектр  $G(\phi)$  порождает случайное световое поле  $q_{\text{nd}}$ , которое, однако, не дифрагирует при распространении. Заметим, что случайные недифрагирующие пучки наблюдались

экспериментально [443]. В нашем случае случайная функция  $G(\phi)$  имеет нормальное распределение при фиксированном  $\phi$ , а также нулевое среднее значение  $\langle G(\phi) \rangle = 0$  и единичную дисперсию  $\langle |G(\phi)|^2 \rangle = 1$  (здесь угловые скобки обозначают статическое усреднение). Если корреляционная функция углового спектра является гауссовской  $\langle G(\phi_1)G^*(\phi_2) \rangle = \exp[-(\phi_2 - \phi_1)^2 / \phi_{\text{cor}}^2]$ , то  $G(\phi)$  можно представить в виде разложения в ряд Фурье  $G(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m \exp(-m^2 / 2M^2) \exp(im\phi)$ , где  $A_m$  - случайные коэффициенты разложения с нормальным распределением, нулевым средним и единичной дисперсией, а параметр  $M$  связан с корреляционным углом  $\phi_{\text{cor}} = \pi / M$ . Подстановка этого разложения в интеграл (7.7) приводит к следующему выражению для комплексного поля недифрагирующего случайного пучка:

$$q_{\text{nd}}(\rho, \phi, \xi) = C \exp(-ik_t^2 \xi / 2) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_m(k_t \rho) \exp(-m^2 / 2M^2) \exp(im\phi), \quad (7.8)$$

где  $\rho = (\eta^2 + \zeta^2)^{1/2}$  - радиальная координата,  $J_m$  - функция Бесселя порядка  $m$  и  $C$  - постоянная интегрирования. Последняя формула показывает, что случайный недифрагирующий пучок является суперпозицией пучков Бесселя с одинаковыми постоянными распространения  $-k_t^2 / 2$  и случайными весовыми коэффициентами, которые уменьшаются с ростом  $|m|$ . Фактически, лишь функции Бесселя порядка  $m \leq M$  вносят заметный вклад в профиль пучка. При этом случайная решетка обладает двумя характерными масштабами. Наименьший масштаб, определяющий радиус отдельных светлых пятен в профиле решетки (или локальных максимумов показателя преломления) на рис. 7.17, может быть оценен как  $L_{\text{inn}} \sim \rho_0 / k_t$ , где  $\rho_0 \simeq 2.44$  - первый ноль функции Бесселя  $J_0$ . Наибольший же масштаб, который характеризует ширину наиболее неупорядоченной центральной части пучка, можно оценить как  $L_{\text{out}} \sim \rho_M / k_t$ , где  $\rho_M \simeq M + 1.86M^{1/3}$  - первый ноль функции Бесселя  $J_M$ . Постоянная  $C$  в формуле (7.8) определяется так, чтобы  $L^{-2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} R(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 1$ , где  $L \gg L_{\text{out}}$  - полная ширина области интегрирования. В дальнейшем мы используем значения  $E = 10$  и  $S = 0.1$ , соответствующие типичным экспериментальным параметрам. Случайные пучки (7.8) формируются, например, при освещении широким пучком узкой циркулярной щели со случайной функцией пропускания, помещенной в фокальную плоскость линзы. Изменение функции пропускания щели (например, при вращении диффузора, помещенного за ней) позволяет генерировать различные реализации профилей показателя преломления [см. типичные примеры на рис. 7.17(a) и 7.17(b)].

Солиiton, запущенный в среду со случайным профилем показателя преломления параллельно оси  $\xi$ , будет смещаться при распространении по направлению к наиболее яркому из соседних светлых пятен в профиле решетки, благодаря градиенту показателя

преломления. В достаточно мелких решетках солитон, после упругого рассеяния на наиболее выраженном из соседних максимумов показателя преломления, может продолжить движение к следующей неоднородности решетки. При этом возможны большие поперечные смещения центра солитона, кардинально превосходящие его ширину и характерный масштаб отдельных светлых пятен в профиле решетки. Таким образом, солитоны могут испытывать своего рода диффузию в случайных решетках, по аналогии с диффузией броуновских частиц. Типичные траектории движения центра солитона для различных реализаций решетки показаны на рис. 7.17(c) и 7.17(d). Профили исходных

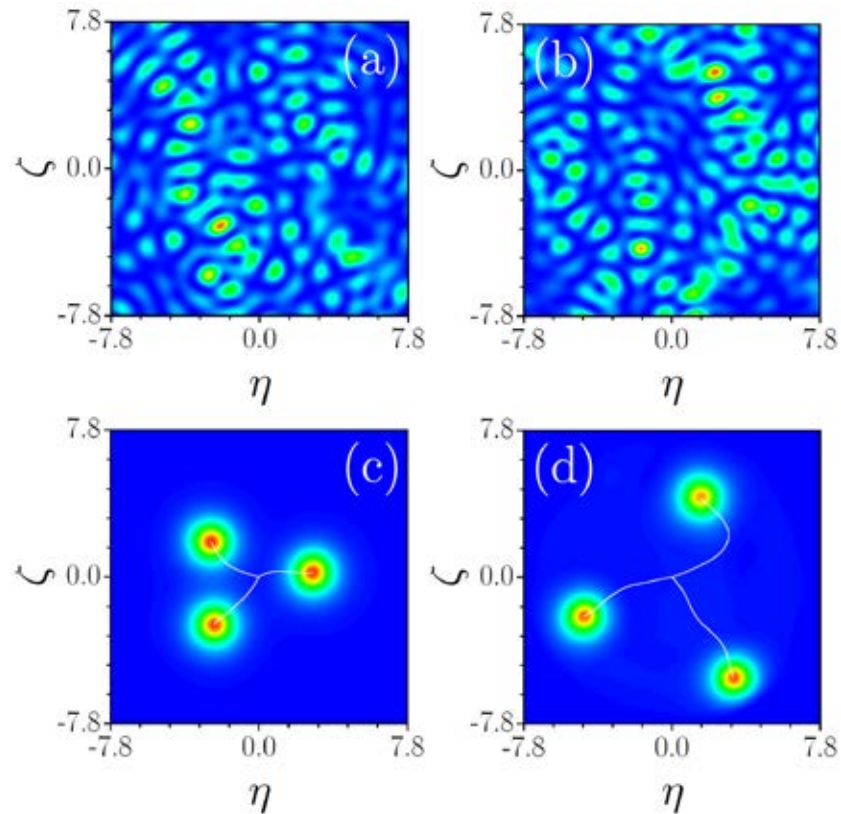


Рис. 7.17. На панелях (a) и (b) представлены две различные реализации случайной решетки при  $M = 20$ ,  $k_t = 8^{1/2}$ . На панелях (c) и (d) показана динамика диффузии солитонов в решетках с  $p = 0.005$  и  $p = 0.01$  соответственно. Выходные распределения интенсивности показаны для трех различных реализаций решетки при  $\xi = 20$ . Белые линии указывают траекторию движения центров солитонов в поперечной плоскости.

солитонов были найдены в виде  $q(\eta, \zeta, \xi) = w(\eta, \zeta) \exp(ib\xi)$  из уравнения (7.6) при  $p = 0$ . Солитоны характеризуются мощностью  $U = \int \int_{-\infty}^{\infty} |q|^2 d\eta d\zeta$ , зависящей от постоянной распространения  $b$ . При распространении в случайных профилях показателя преломления солитон может изменять направление своего движения несколько раз, до тех пор, пока он не будет асимптотически (при  $\xi \rightarrow \infty$ ) захвачен на одной из достаточно сильных

неоднородностей показателя преломления. В более глубоких решетках возможны большие поперечные смещения центров солитонов. Отметим, что диффузионный режим распространения, описанный здесь, является нелинейным, поскольку профиль солитона остается практически неизменным в процессе распространения благодаря балансу дифракции и фокусирующей насыщающейся нелинейности, в то время как решетка практически не влияет на профиль и приводит лишь к изменению направления распространения пучка.

При изучении броуновского движения солитонов использовался метод Монте-Карло, в котором динамика распространения входного солитона с мощностью  $U$  моделировалась для  $Q = 10^3$  реализаций случайного профиля показателя преломления с небольшой глубиной модуляции  $p$ . Исследовалось поведение среднеквадратичного смещения  $\rho_{\text{av}}^2 = \langle \eta_c^2 \rangle + \langle \zeta_c^2 \rangle$  интегрального центра солитона, где

$$\begin{aligned}\eta_c &= U^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \eta |q|^2 d\eta d\zeta, \\ \zeta_c &= U^{-1} \int \int_{-\infty}^{\infty} \zeta |q|^2 d\eta d\zeta.\end{aligned}\tag{7.9}$$

При этом среднее смещение  $\langle \eta_c \rangle = \langle \zeta_c \rangle = 0$ . На рис. 7.18(a) представлена зависимость среднеквадратичного смещения центра солитона от координаты распространения. После исходной "баллистической" стадии, на которой смещение солитона все еще меньше, чем среднее расстояние между соседними неоднородностями, и где  $\rho_{\text{av}}^2 \sim \xi^2$ , его движение начинает походить на случайное блуждание, типичное для броуновских частиц, при котором  $\rho_{\text{av}}^2 \sim \xi$ . Эта аналогия подтверждается рис. 7.18(b), на котором среднеквадратичное смещение при  $\xi = 20$  показано как функция глубины решетки  $p$ . Увеличение глубины решетки первоначально приводит к практически линейному росту  $\rho_{\text{av}}^2$ , что указывает на аналогию параметра  $p$  и коэффициента диффузии. Эта аналогия, конечно, не полная, поскольку движущиеся солитоны теряют мощность на излучение и, в итоге, захватываются на одном из каналов решетки при  $\xi \rightarrow \infty$ . Поскольку потери мощности при движении и вероятность захвата солитонов растут с увеличением глубины решетки, зависимость  $\rho_{\text{av}}^2(p)$  отличается от линейной при достаточно больших  $p$  - среднеквадратичное смещение постепенно насыщается. При этом дальнейшее увеличение глубины решетки приводит к распаду входного солитона на несколько фрагментов.

Структура случайных недифрагирующих пучков существенно зависит от числа  $M$  пучков Бесселя, которые дают заметный вклад в поле  $q_{\text{nd}}$  [рис. 7.19(a) и 7.19(b)]. Световые поля, соответствующие малым и промежуточным значениям  $M$ , нерегулярны в центре, но становятся практически регулярными на периферии, где становится заметна кольцевая структура поля. Спеклообразная нерегулярная область быстро расширяется с

увеличением  $M$  [см. рис. 7.17(a) и 7.17(b), полученные при  $M = 20$ ]. При  $M \rightarrow 1$  распределение интенсивности случайного пучка становится весьма близким к  $J_0^2(k_t \rho)$ . Заметим, что даже при промежуточных значениях  $M$  солитоны не проникают из нерегулярной центральной области решетки в ту ее область, где профиль показателя преломления практически регулярен. Последнее приводит к быстрому росту среднеквадратичного смещения  $\rho_{av}^2$  с увеличением  $M$ , т.е. ширины нерегулярной области [рис. 7.20(a)]. Быстрый начальный рост  $\rho_{av}^2$  сменяется насыщением при  $M \rightarrow \infty$ , поскольку в этом пределе асимптотическое значение  $\rho_{av}^2$  определяется лишь глубиной решетки и трассой распространения.

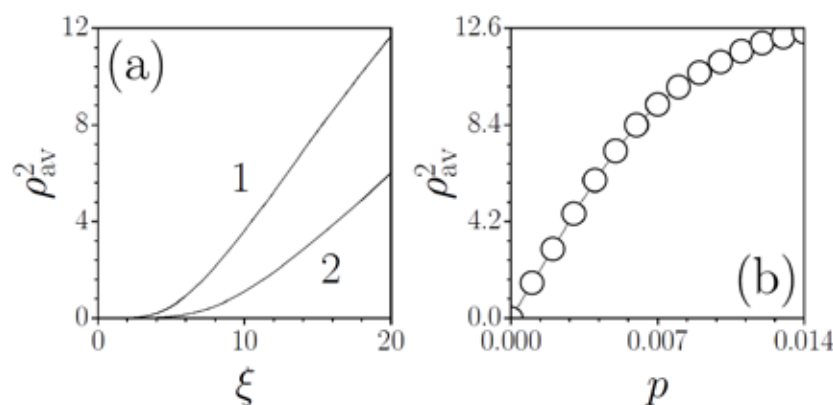


Рис. 7.18. (а) Среднеквадратичное смещение центра солитона как функция длины распространения при  $p = 0.011$  (кривая 1) и  $p = 0.004$  (кривая 2). (б) Среднеквадратичное смещение центра при  $\xi = 20$  как функция глубины решетки. Во всех случаях  $U = 8.67$ ,  $k_t = 8^{1/2}$ ,  $M = 20$ .

Среднеквадратичное смещение  $\rho_{av}^2$  зависит от соотношения ширины солитона и наименьшего характерного масштаба решетки  $L_{\text{min}}$ . Увеличение поперечного волнового числа  $k_t$  приводит к уменьшению поперечного масштаба  $L_{\text{min}} \sim \rho_0 / k_t$ . Мелкомасштабные решетки не могут вызвать заметное смещение солитона, поскольку случайные силы, действующие на солитон, компенсируются с ростом числа неоднородностей показателя преломления, которые он накрывает. В результате,  $\rho_{av}^2$  монотонно уменьшается с ростом  $k_t$  [рис. 7.20(b)]. Солитон наиболее чувствителен к возмущениям показателя преломления с характерным масштабом порядка его собственной ширины. В крупномасштабных профилях показателя преломления солитон также испытывает меньшие смещения из-за малости градиентов показателя преломления. Среднеквадратичное смещение является немонотонной функцией мощности входного солитона [рис. 7.20(c)], поскольку мощность солитона определяет его ширину и вклад в показатель преломления. Наибольшие смещения достигаются при тех значениях  $U$ , когда ширина

солитона сравнима с характерным масштабом решетки  $L_{\text{ин}}$ , а его вклад в показатель преломления не превышает значительно типичную глубину случайной модуляции показателя преломления в решетке. При  $U \rightarrow \infty$  солитон резко уширяется из-за насыщения нелинейности, причем в этом пределе глубина модуляции показателя преломления падает, что приводит к подавлению броуновского движения. При  $U \rightarrow 0$  солитон также уширяется и не испытывает заметного смещения.

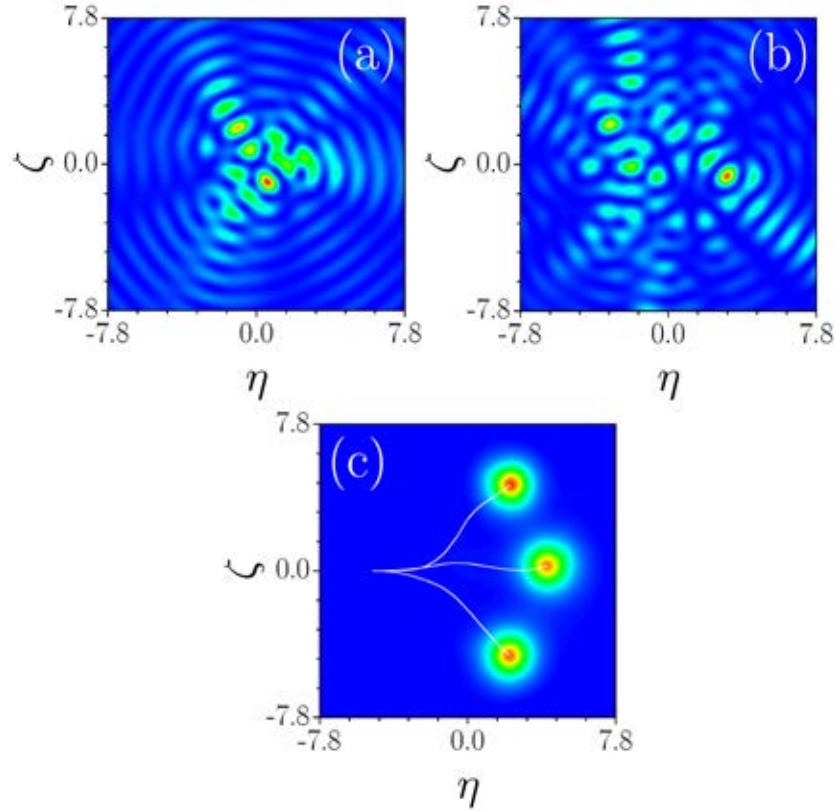


Рис. 7.19. Реализации случайных решеток при  $M = 4$  (a) и  $M = 8$  (b). Панель (c) показывает динамику рассеяния солитонов с мощностью  $U = 8.67$ , запущенных под углом  $\alpha = 0.5$  вдоль оси  $\eta$  в решетку с  $p = 0.01$ ,  $M = 40$ . Показаны выходные распределения интенсивности при  $\xi = 20$  и траектории распространения для трех различных реализаций решетки. Во всех случаях  $k_t = 8^{1/2}$ .

Если исходный солитон запущен в случайную решетку под некоторым углом  $\alpha$  к оси  $\xi$ , то его движение напоминает не диффузию, а скорее рассеяние на случайных неоднородностях среды [рис. 7.19(c)]. При этом среднеквадратичное смещение центра солитона, определенное как  $\rho_{\text{ав}}^2 = \langle (\eta_c - \alpha\xi)^2 \rangle + \langle \zeta_c^2 \rangle$ , является монотонно убывающей функцией угла  $\alpha$  [рис. 7.20(d)]. С точки зрения аналогии "солитон - частица", увеличение исходного угла соответствует росту кинетической энергии частицы, на движение которой уже не влияют малые флуктуации случайного потенциала, а к рассеянию могут

привести только значительные и менее вероятные неоднородности, что и приводит к уменьшению среднеквадратичного смещения. Заметим, что рассеяние движущихся солитонов анизотропно. В мелких решетках доминирует рассеяние в поперечном направлении (вдоль оси  $\zeta$ ), в то время как в глубоких решетках смещения вдоль оси  $\eta$  становятся более заметны из-за растущей вероятности захвата движущихся солитонов.

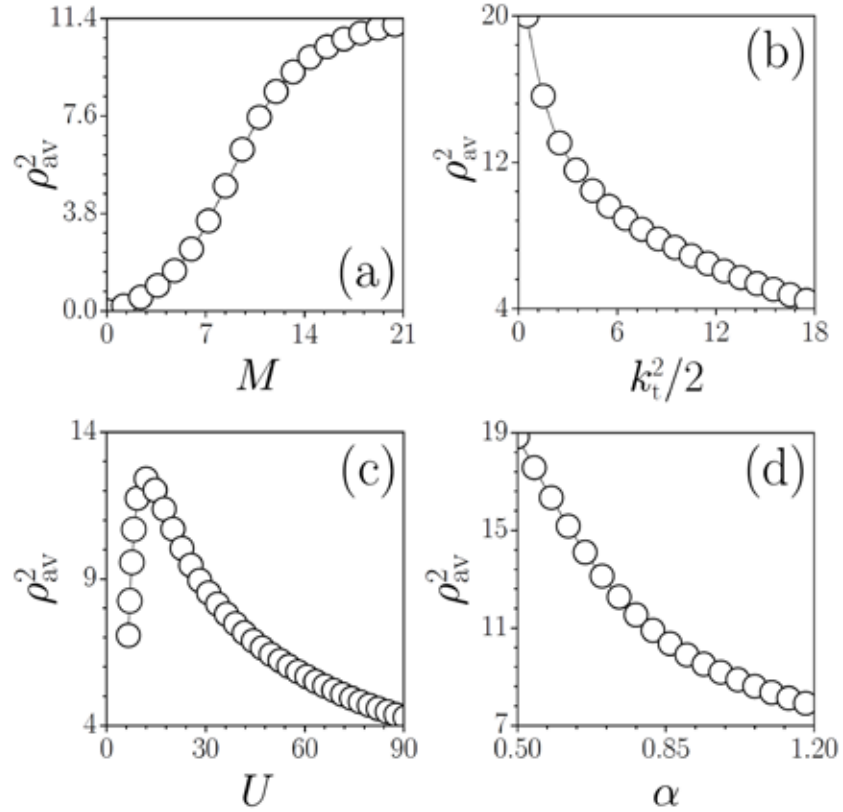


Рис. 7.20. Среднеквадратичное смещение центра солитона (а) как функция  $M$  при  $p=0.01$ ,  $U=8.67$ ,  $k_t=8^{1/2}$ , (б) как функция  $k_t^2/2$  при  $p=0.01$ ,  $U=8.67$ ,  $M=20$ , (с) как функция входной мощности при  $p=0.01$ ,  $M=20$ ,  $k_t=8^{1/2}$  и (д) как функция входного угла при  $U=8.67$ ,  $p=0.01$ ,  $M=40$ ,  $k_t=8^{1/2}$ .

Таким образом, солитоны в случайных спеклообразных профилях показателя преломления могут испытывать диффузию, подобную диффузии броуновских частиц. Скорость диффузии определяется мощностью солитона и глубиной модуляции показателя преломления.

## Заключение

Представленная диссертация посвящена обобщению нелинейной теории волн на практически важный случай сред с пространственно-неоднородным профилем показателя преломления и/или нелинейности, вопросам стабилизации, локализации волновых полей и управления их пространственно-временной структурой. Были рассмотрены динамика формирования, свойства и устойчивость одномерных и двумерных пространственных солитонов, а также пространственно-временных пульс в периодических профилях показателя преломления и более сложных оптических решетках, индуцированных различными недифрагирующими пучками. Особый акцент был сделан на возможности стабилизации многомерных фундаментальных солитонов или нелинейных волн высших порядков, таких как мультиполи и вихревые солитоны, благодаря поперечной модуляции параметров среды. Предсказан ряд новых явлений, возникающих при конкуренции линейных и нелинейных решеток. Анализ формирования солитонов проводился не только для локальных нелинейных сред, но и в средах с сильно нелокальным откликом, где динамика распространения и взаимодействия пучков зависит от степени нелокальности и расстояния между ними. Значительное внимание было уделено формированию одно- и двумерных поверхностных солитонов на границе раздела периодической решетки и однородной среды, в свойствах которых тесным образом сплетены черты, характерные для решеточных солитонов и нелинейных возбуждений в однородной среде. В диссертации изучены не только решетки с поперечной модуляцией показателя преломления, но и бипериодические структуры, в которых продольная модуляция показателя преломления позволяет контролировать скорость дифракционного расплывания и практически полностью подавлять его даже в линейном случае, или делать дифракцию анизотропной. Наконец, была исследована Андерсоновская локализация в одно- и двумерных разупорядоченных массивах волноводов, проанализировано влияние беспорядка на поперечное движение солитонов и их прохождение через периодическую структуру со случайными возмущениями. Многие теоретические результаты, представленные в диссертации, подтверждены экспериментальными данными, полученными при участии автора. Среди наиболее важных результатов, полученных в диссертации, вносящих существенный вклад в нелинейную теорию волн и имеющих несомненную практическую значимость, можно выделить следующие:

1. Показано, что как одномерные, так и двумерные периодические решетки могут поддерживать сложные устойчивые мультипольные солитоны. Симметрия и устойчивость этих волновых полей определяется положением постоянной распространения солитона в зонной структуре решетки. В фокусирующей среде устой-



чивы уединенные решения с противофазными пиками, а в дефокусирующей среде для устойчивости необходима синфазность всех пиков в профиле. Реализовано экспериментальное наблюдение одномерных солитонов высшего порядка в дефокусирующей среде. Экспериментально продемонстрирован рост пороговой мощности формирования солитонов в массивах волноводов с увеличивающимся числом рядов при увеличении размерности системы. Предсказана стабилизация световых пучков в кубичной нелинейной среде за счет поперечной модуляции показателя преломления и представлено их первое экспериментальное наблюдение в гексагональных массивах волноводов.

2. Установлено, что недифрагирующие пучки Бесселя, Матье и параболически пучки могут индуцировать в фоторефрактивных кристаллах стационарные решетки разнообразной топологии, свойства солитонов в которых радикально отличаются от таковых в периодических решетках. Так, в радиально симметричных решетках Бесселя с фокусирующей нелинейностью возможно вращение фундаментальных солитонов без потерь на излучение, а решетки Бесселя с дефокусирующей нелинейностью поддерживают устойчивые радиально-симметричные вихревые солитоны. Решетки с азимутальной модуляцией показателя преломления позволяют реализовать азимутальное переключение фундаментальных солитонов. С использованием теории групп было показано, что степень дискретной вращательной симметрии определяет максимально возможный заряд вихревых солитонов. Параболические решетки и решетки Матье поддерживают солитоны с симметрией, отражающей топологию решетки.
3. Обнаружено, что граница раздела периодической решетки и однородной среды поддерживает локализованные поверхностные солитоны даже в дефокусирующей среде. Представлено экспериментальное наблюдение беспороговых поверхностных волн вблизи границ модулированных решеток. Впервые наблюдались двумерные солитоны, локализованные на боковой поверхности и в углах ограниченной периодической решетки. В гексагональных секторных массивах экспериментально исследовано влияние угла раствора сектора на линейную динамику распространения пучка и пороги формирования солитонов. Наблюдались поверхностные солитоны на границе раздела квадратной и гексагональной решеток. Доказана возможность существования устойчивых вихревых солитонов с асимметричными профилями на границе двух квадратных решеток с разными глубинами.
4. Впервые установлено, что нелокальность нелинейного отклика качественно меняет характер взаимодействия противофазных пучков, которые могут формировать одномерные и двумерные солитонные комплексы даже в однородной фоку-

сирующей среде. В жидких кристаллах и средах с тепловой нелинейностью одномерные комплексы устойчивы, если они содержат не более четырех пиков. Двумерные солитонные комплексы метастабильны, что позволило наблюдать их в эксперименте. Показано, что именно нелокальность накладывает ограничения на максимальную скорость движения серых солитонов в дефокусирующей среде. Вихревые солитоны в средах с тепловой нелинейностью устойчивы, если их топологический заряд не превышает двойки. При наличии линейной решетки показателя преломления нелокальность нелинейного отклика радикально повышает подвижность одномерных солитонов.

5. Теоретически показано, что наличие периодической модуляции нелинейности, противофазной с линейной решеткой показателя преломления, радикально увеличивает подвижность солитонов. Такая модуляция ведет к необычным преобразованиям профилей одномерных и вихревых солитонов по мере роста их мощности. Впервые обнаружено, что чисто нелинейная решетка может стабилизировать двумерные солитоны в кубичной среде, если нелинейность изменяется ступенчато. Установлено, что векторные взаимодействия световых полей в нелинейных решетках приводят к формированию устойчивых солитонных комплексов со сложной внутренней структурой поля. Пространственно-неоднородная дефокусирующая нелинейность может поддерживать светлые солитоны во всех трех измерениях, при условии что нелинейный коэффициент достаточно быстро растет к периферии материала.
6. Периодическая продольная модуляция показателя преломления в различных волноводных структурах приводит к параметрической раскачке осцилляций центра солитона и может быть использована для стимулированного преобразования профилей направляемых мод одинаковой четности. Экспериментально продемонстрировано, что противофазная продольная модуляция показателя преломления в соседних волноводах многоканальных систем приводит к резонансному подавлению туннелирования света между волноводами. Этот эффект может быть использован для передачи сложных изображений в сотовых продольно-модулированных массивах волноводов и для создания массивов с анизотропной дифракцией. Показано, что продольная модуляция существенно понижает энергетический порог для формирования солитонов даже при наличии отстройки частоты модуляции от резонансной, что может быть использовано для формирования оптических пульс при пониженных уровнях энергии в продольно-модулированных сотовых массивах волноводов.
7. Впервые экспериментально продемонстрирована Андерсоновская локализация света на границе между однородной средой и разупорядоченным массивом вол-

новопроводов. Установлено, что для достижения той же степени Андерсоновской локализации у границы, что и в центре, требуется больший уровень беспорядка, чем в центре массива, из-за отталкивания от границы. Экспериментально прослежен постепенный переход от одномерной к двумерной Андерсоновской локализации в массивах с беспорядком и увеличивающимся числом рядов и показано, что степень локализации максимальна в одномерном массиве. Показано, что введение беспорядка в пространственно-ограниченный одномерный массив может привести к существенному уменьшению коэффициента внешнего отражения солитонного пучка, даже для тех углов падения, при которых в регулярном случае отражение является полным. Установлено, что динамика солитонов в случайных спеклообразных профилях показателя преломления подобна диффузии броуновских частиц.

В заключение хочу выразить свою глубокую признательность за неоценимую поддержку и постоянную помощь в реализации новых научных проектов доктору физико-математических наук, профессору Виктору Андреевичу Выслоуху, в соавторстве с которыми были опубликованы все основополагающие результаты этой диссертации. Я также искренне благодарен доктору физико-математических наук Анатолию Михайловичу Камчатнову за поддержку, интересные дискуссии и полезные замечания при работе над диссертацией. Считаю своим приятным долгом выразить признательность всем сотрудникам теоретического отдела Института Спектроскопии за разнообразную помощь в ходе работы над диссертацией.

## Список литературы

1. Бломберген Н. Нелинейная оптика - Москва: Мир, 1966, 424 с.
2. Агравал Г. П. Нелинейная волоконная оптика: Перевод с английского/ Под редакцией П. В. Мамышева - Москва: Мир, 1996, 323 с.
3. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн - Москва: Наука, 1979, 383 с.
4. Сухоруков А. П. Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике - Москва: Наука, 1988, 232 с.
5. Шен И. Р. Принципы нелинейной оптики: Перевод с английского/ Под редакцией С. А. Ахманова - Москва: Наука, 1989, 560 с.
6. Ахманов С. А., Выслоух В. А., Чиркин А. С. Оптика фемтосекундных лазерных импульсов - Москва: Наука, 1988, 310 с.
7. Hasegawa A., Matsumoto M. Optical solitons in fibers - Berlin: Springer, 1989, 209 с.
8. Манцызов Б. И. Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов - Москва: Физматлит, 2009, 206 с.
9. Whitham G. B. Linear and nonlinear waves - New York: Willey, 1999, 629 с.
10. Желтиков А. М. Оптика микроструктурированных волокон - Москва: Наука, 2004, 281 с.
11. Kivshar Y. S., Agrawal G. Optical solitons: from fibers to photonic crystals - London: Academic Press, 2003, 540 с.
12. Kamchatnov A. M. Nonlinear periodic waves and their modulations: An introductory course - Singapore: World Scientific, 2000, 383 с.
13. Maimistov A. I., Basharov A. M. Nonlinear optical waves - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2010, 664 с.
14. Zabusky N., Kruskal M. Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states// Physical Review Letters, 1965, v. 15, № 6, p. 240-243.
15. Gardner C., Greene J., Kruskal M., Miura R. Method for solving the Korteweg – de Vries equation// Physical Review Letters, 1967, v. 19, № 19, p. 1095-1097.
16. Захаров В. Е., Шабат А. Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1971, т. 61, № 1, с. 118-134.
17. Манаков С. В. К теории двумерной стационарной самофокусировки электромагнитных волн// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1973, т. 65, № 2, с. 505-516.
18. Захаров В. Е., Манаков С. В. О полной интегрируемости нелинейного уравнения Шредингера// Теоретическая и Математическая Физика, 1974, том 19, № 3, с. 332-343.

19. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи. - Москва: Наука, 1980, 320 с.
20. Ablowitz M., Segur H. Solitons and the inverse scattering transform. - Philadelphia: SIAM, 1981, 341 p.
21. Lamb G. Elements of soliton theory. – New York: Wiley and Sons, 1980, 425 p.
22. Маймистов А. И. Метод обратной задачи в нелинейной оптике: Учебное пособие. - Москва: 1990, 89 с.
23. Kivshar Y. S., Malomed B. A. Dynamics of solitons in nearly integrable systems// Reviews of Modern Physics, 1989, v. 61, №4, p. 763-915.
24. Hasegawa A., Tappert F. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers// Applied Physics Letters, 1973, v. 23, № 3, p. 142-144.
25. Прохоров А. М. Нелинейные эффекты в волоконных световодах// Известия Академии Наук СССР, серия физическая, 1983, т. 47, № 10, с. 1874-1879.
26. Дианов Е. М., Прохоров А. М. Лазеры и волоконная оптика// Успехи Физических Наук, 1986, т. 148, № 2, с. 289-311.
27. Mollenauer L., Stolen R., Gordon J. Experimental observation of picosecond pulse narrowing and solitons in optical fibers// Physical Review Letters, 1980, v. 45, № 13, p. 1095-1098.
28. Maneuf S., Desailly R., Froehly C. Stable self-trapping of laser beams: Observation in a nonlinear planar waveguides// Optics Communications, 1988, v. 65, № 3, p. 193-198.
29. Maneuf S., Reynaud F. Quasi-steady state self-trapping of first, second, and third order subnanosecond soliton beams// Optics Communications, 1988, v. 66, № 5-6, p. 325-328.
30. Duree G. C., Shultz J. L., Salamo G. J., Segev M., Yariv A., Crosignani B., Di Porto P., Sharp E. J., Neurgaonkar R. R. Observation of self-trapping of an optical beam due to the photorefractive effect// Physical Review Letters, 1993, v. 71, № 4, p. 533-536.
31. Iturbe-Castillo M., Marquez-Aguilar P., Sanchez-Mondragon J., Stepanov S., Vysloukh V. Spatial solitons in photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  with drift mechanism of nonlinearity// Applied Physics Letters, 1994, v. 64, № 4, p. 408-410.
32. Torruellas W. E., Wang Z., Hagan D. J., VanStryland E. W., Stegeman G. I., Torner L., Menyuk C. R. Observation of two-dimensional spatial solitary waves in a quadratic medium// Physical Review Letters, 1995, v. 74, № 25, p. 5036-5039.
33. Карамзин Ю. Н., Сухоруков А. П. Нелинейное взаимодействие дифрагирующих световых пучков в среде с квадратичной нелинейностью; взаимофокусировка пучков и ограничение эффективности оптических преобразователей частоты// Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1974, т. 20, № 11, с. 734-739.

34. Liu X., Qian L. J., Wise F. W. Generation of optical spatiotemporal solitons// *Physical Review Letters*, 1999, v. 82, № 23, p. 4631-4634.
35. Minardi S., Eilenberger F., Kartashov Y. V., Szameit A., Röpke U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Torner L., Lederer F., Tünnermann A., Pertsch T. Three-dimensional light bullets in arrays of waveguides// *Physical Review Letters*, 2010, v. 105, № 26, p. 263901.
36. Kivshar Y. S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications// *Physics Reports*, 1998, v. 298, № 2-3, p. 81-197.
37. Christodoulides D. N., Joseph, R. I. Discrete self-focusing in nonlinear arrays of coupled waveguides// *Optics Letters*, 1988, v. 13, № 9, p. 794-796.
38. Eisenberg H. S., Silberberg Y., Morandotti R., Boyd A. R., Aitchison J. S. Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 1998, v. 81, № 16, p. 3383-3386.
39. Pertsch T., Zentgraf T., Peschel U., Brauer A., Lederer F. Beam steering in waveguide arrays// *Applied Physics Letters*, 2002, v. 80, № 18, p. 3247-3249.
40. Szameit A., Blomer D., Burghoff J., Schreiber T., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann, A. Discrete nonlinear localization in femtosecond laser written waveguides in fused silica// *Optics Express*, 2005, v. 13, № 26, p. 10552-10557.
41. Szameit A., Burghoff J., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Lederer F. Two-dimensional soliton in cubic fs laser written waveguide arrays in fused silica// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 14, p. 6055-6062.
42. Fratalocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. Discrete propagation and spatial solitons in nematic liquid crystals// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 13, p. 1530-1532.
43. Assanto G., Fratalocchi A., Peccianti M. Spatial solitons in nematic liquid crystals: from bulk to discrete// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 8, p. 5248-5255.
44. Fratalocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. All-optical switching and beam steering in tunable waveguide arrays// *Applied Physics Letters*, 2005, v. 86, № 5, p. 051112.
45. Efremidis N. K., Sears S., Christodoulides D. N., Fleischer J. W., Segev M. Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices// *Physical Review E*, 2002, v. 66, № 4, p. 046602.
46. Fleischer J. W., Carmon T., Segev M., Efremidis N. K., Christodoulides D. N. Observation of discrete solitons in optically induced real time waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2003, v. 90, № 2, p. 023902.
47. Fleischer J. W., Segev M., Efremidis N. K., Christodoulides D. N. Observation of two-dimensional discrete solitons in optically induced nonlinear photonic lattices// *Nature*, 2003, v. 422, p. 147-150.

48. Chen Z., Bezryadina A., Makasyuk I., Yang J. Observation of two-dimensional lattice vector solitons// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 14, p. 1656-1658.
49. Rosberg C. R., Neshev D. N., Sukhorukov A. A., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Observation of nonlinear self-trapping in triangular photonic lattices// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 4, p. 397-399.
50. Peleg O., Freedman B., Manela O., Segev M., Christodoulides D. N. Conical diffraction and gap solitons in honeycomb photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2007, vol. 98, № 10, p. 103901.
51. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Карташов Я. В. Распространение кноидальных волн в среде с насыщением нелинейного отклика// *Квантовая Электроника*, 2001, т. 31, № 3, с. 257-262.
52. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Карташов Я. В. Вынужденное комбинационное рассеяние кноидальных волн// *Квантовая Электроника*, 2001, т. 31, № 4, с. 327-332.
53. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Soliton shape and mobility control in optical lattices// *Progress in Optics*, 2009, v. 52, p. 63-148.
54. Stegeman G. I, Christodoulides D. N., Silberberg Y., Segev M., Lederer F., Assanto, G. Discrete optical solitons// *Physics Reports*, 2008, v. 463, № 1-3, p. 1-126.
55. Longhi S. Quantum-optical analogies using photonic structures// *Laser and Photonics Reviews*, 2009, v. 3, № 3, p. 243-261.
56. Garanovich I. L., Longhi S., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Light propagation and localization in modulated photonic lattices and waveguides// *Physics Reports* (в печати).
57. Mandelik D., Eisenberg H. S., Silberberg Y., Morandotti R., Aitchison J. S. Band-gap structure of waveguide arrays and excitation of Floquet-Bloch solitons// *Physical Review Letters*, 2003, v. 90, № 5, p. 053902.
58. Rüter C. E., Wisniewski J., Kip D., Prism coupling method to excite and analyze Floquet-Bloch modes in linear and nonlinear waveguide arrays// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 18, p. 2768-2780.
59. Eisenberg H. S., Silberberg Y., Morandotti R., Aitchison J. S. Diffraction management// *Physical Review Letters*, 2000, v. 85, № 9, p. 1863-1866.
60. Morandotti R., Eisenberg H. S., Silberberg Y., Sorel M., Aitchison J. S. Self-focusing and defocusing in waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2001, v. 86, № 15, p. 3296-3298.
61. Pertsch T., Peschel U., Lederer F., Burghoff J., Will M., Nolte S., Tünnermann A. Discrete diffraction in two-dimensional arrays of coupled waveguides in silica// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 5, p. 468-470.

62. Sukhorukov A. A., Neshev D. N., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Nonlinear Bloch-wave interaction and Bragg scattering in optically induced lattices// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 9, p. 093901.
63. Darmanyan S., Kobayakov A., Lederer F. Stability of strongly localized excitations in discrete media with cubic nonlinearity// *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1998, т. 113, № 4, с. 1253-1260.
64. Darmanyan S., Kobayakov A., Schmidt E., Lederer F. Strongly localized vectorial modes in nonlinear waveguide arrays// *Physical Review E*, 1998, v. 57, № 3, p. 3520-3530.
65. Kivshar Y. S., Campbell D. K. Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes// *Physical Review E*, 1993, v. 48, № 4, p. 3077-3081.
66. Aceves A. B., De Angelis C., Peschel T., Muschall R., Lederer F., Trillo S., Wabnitz S. Discrete self-trapping, soliton interactions, and beam steering in nonlinear waveguide arrays// *Physical Review E*, 1996, v. 53, № 1, p. 1172-1189.
67. Aceves A. B., De Angelis C., Trillo S., Wabnitz S. Storage and steering of self-trapped discrete solitons in nonlinear waveguide arrays// *Optics Letters*, 1994, v. 19, № 5, p. 332-334.
68. Krolikowski W., Trutschel U., Cronin-Golomb M., Schmidt-Hattenberger C. Solitonlike optical switching in a circular fiber array// *Optics Letters*, 1994, v. 19, № 5, p. 320-322.
69. Krolikowski W., Kivshar, Y. S. Soliton-based optical switching in waveguide arrays// *Journal of the Optical Society of America B*, 1996, v. 13, № 5, p. 876-887.
70. Morandotti R., Peschel U., Aitchison J. S., Eisenberg H. S., Silberberg Y. Dynamics of discrete solitons in optical waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 1999, v. 83, № 14, p. 2726-2729.
71. Kartashov Y. V., Zelenina A. S., Torner L., Vysloukh V. A. Spatial soliton switching in quasi-continuous optical arrays// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 7, p. 766-768.
72. Hasegawa A., Nyu T. Eigenvalue communication// *Journal of Lightwave Technology*, 1993, v. 11, № 3, p. 395-399.
73. Wai P. K. A., Menyuk C. R., Lee Y. C., Chen H. H. Nonlinear pulse propagation in the neighborhood of the zero-dispersion wavelength of monomode optical fibers// *Optics Letters*, 1986, v. 11, № 7, p. 464-466.
74. Tai K., Hasegawa A., Bekki N. Fission of optical solitons induced by stimulated Raman effect// *Optics Letters*, 1988, v. 13, № 5, p. 392-394.
75. Afanasyev V. V., Vysloukh V. A., Serkin V. N. Decay and interaction of femtosecond optical solitons induced by the Raman self-scattering effect// *Optics Letters*, 1990, v. 15, № 9, p. 489-491.



76. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Жукарев А. С., Карташов Я. В., Синило П. В. Стимулированный распад  $N$ -солитонных импульсов и оптимальная сепарация односолитонных компонент// Квантовая Электроника, 2003, т. 33, № 5, с. 460-464.
77. Kartashov Y. V., Crasovan L.-C., Zelenina A. S., Vysloukh V. A., Sanpera A., Lewenstein M., Torner L. Soliton eigenvalue control with optical lattices// Physical Review Letters, 2004, v. 93, № 14, p. 143902.
78. Neshev D., Ostrovskaya E. A., Kivshar Y., Krolikowski W., Spatial solitons in optically induced gratings// Optics Letters, 2003, v. 28, № 9, p. 710-712.
79. Neshev D., Sukhorukov A. A., Hanna B., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Controlled generation and steering of spatial gap solitons// Physical Review Letters, 2004, v. 93, № 8, p. 083905.
80. Mandelik D., Morandotti R., Aitchison J. S., Silberberg Y. Gap solitons in waveguide arrays// Physical Review Letters, 2004, v. 92, №9, p. 093904.
81. Chen F., Stepic M., Rüter C. E., Runde D., Kip D., Shandarov V., Manela O., Segev M. Discrete diffraction and spatial gap solitons in photovoltaic LiNbO<sub>3</sub> waveguide arrays// Optics Express, 2005, v. 13, № 11, p. 4314-4324.
82. Eiermann B., Anker T., Albiez M., Taglieber M., Treutlein P., Marzlin K.-P., Oberthaler M. K., Bright Bose-Einstein gap solitons of atoms with repulsive interactions// Physical Review Letters, 2004, v. 92, № 23, p. 230401.
83. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Soliton trains in photonic lattices// Optics Express, 2004, v. 12, № 13, p. 2831-2837.
84. Hadzievski L., Maluckov A., Stepic M., Kip D. Power controlled soliton stability and steering in lattices with saturable nonlinearity// Physical Review Letters, 2004, v. 93, № 3, p. 033901.
85. Smirnov E., Rüter C. E., Kip D., Kartashov Y. V., Torner L. Observation of higher-order solitons in defocusing waveguide arrays// Optics Letters, 2007, v. 32, № 13, p. 1950-1952.
86. Bennet F. H., Alexander T. J., Haslinger F., Mitchell A., Neshev D. N., Kivshar Y. S. Observation of nonlinear self-trapping of broad beams in defocusing waveguide arrays// Physical Review Letters, 2011, vol. 106, № 9, p. 093901.
87. Louis P. J. Y., Ostrovskaya E. A., Savage C. M., Kivshar Y. S. Bose-Einstein condensates in optical lattices: band-gap structure and solitons// Physical Review A, 2003, v. 67, № 1, p. 013602.
88. Efremidis N. K., Christodoulides D. N. Lattice solitons in Bose-Einstein condensates// Physical Review A, 2003, v. 67, № 6, p. 063608.
89. Yang J., Musslimani Z. H. Fundamental and vortex solitons in a two-dimensional optical lattice// Optics Letters, 2003, v. 28, № 21, p. 2094-2096.

90. Baizakov B. B., Malomed B. A., Salerno M., Multidimensional solitons in periodic potentials// *Europhysics Letters*, 2003, v. 63, № 5, p. 642-648.
91. Martin H., Eugenieva E. D., Chen Z., Christodoulides D. N. Discrete solitons and soliton-induced dislocations in partially coherent photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 12, p. 123902.
92. Chen Z., Martin H., Eugenieva E. D., Xu J., Bezryadina A. Anisotropic enhancement of discrete diffraction and formation of two-dimensional discrete-soliton trains// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 14, p. 143902.
93. Lou C., Wang X., Xu J., Chen Z., Yang J. Nonlinear spectrum reshaping and gap-soliton-train trapping in optically induced photonic structures// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 21, p. 213903.
94. Fischer R., Träger D., Neshev D. N., Sukhorukov A. A., Krolikowski W., Denz C., Kivshar Y. S. Reduced-symmetry two-dimensional solitons in photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 2, p. 023905.
95. Desyatnikov A. S., Torner L., Kivshar Y. S. Optical vortices and vortex solitons// *Progress in Optics*, 2005, v. 47, p. 291-391.
96. Malomed B. A., Kevrekidis P. G. Discrete vortex solitons// *Physical Review E*, 2001, v. 64, № 2, p. 026601.
97. Neshev D., Alexander T. J., Ostrovskaya E. A., Kivshar Y. S., Martin H., Makasyuk I., Chen Z. Observation of discrete vortex solitons in optically induced photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 12, p. 123903.
98. Fleischer J. W., Bartal G., Cohen O., Manela O., Segev M., Hudock J., Christodoulides D. N. Observation of vortex-ring discrete solitons in 2D photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 12, p. 123904.
99. Kartashov Y. V., Egorov A. A., Torner L., Christodoulides D. N. Stable soliton complexes in two-dimensional photonic lattices// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 16, p. 1918-1920.
100. Musslimani Z. H., Yang J. Self-trapping of light in a two-dimensional photonic lattice// *Journal of the Optical Society of America B*, 2004, v. 21, № 5, p. 973-981.
101. Yang J., Makasyuk I., Bezryadina A., Chen Z. Dipole solitons in optically induced two-dimensional photonic lattices// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 14, p. 1662-1664.
102. Tang L., Lou C., Wang X., Song D., Chen X., Xu J., Chen Z., Susanto H., Law K., Kevrekidis P. G. Observation of dipole-like gap solitons in self-defocusing waveguide lattices// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 20, p. 3011-3013.
103. Yang J., Makasyuk I., Kevrekidis P. G., Martin H., Malomed B. A., Frantzeskakis D. J., Chen Z. Necklacelike solitons in optically induced photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2005, v. 94, № 11, p. 113902.

104. Baizakov B. B., Malomed B. A., Salerno M. Multidimensional solitons in low-dimensional periodic potentials// *Physical Review A*, 2004, v. 70, № 5, p. 053613.
105. Алешкевич В. А., Горин С. В., Жукарев А. С., Карташов Я. В., Подавление коллапса двумерных световых пучков в одномерных решетках показателя преломления// *Квантовая Электроника*, 2005, т. 35, № 2, с. 116-118.
106. Szameit A., Kartashov Y. V., Dreisow F., Heinrich M., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Lederer F., Torner L. Soliton excitation in waveguide arrays with an effective intermediate dimensionality// *Physical Review Letters*, 2009, v. 102, № 6, p. 063902.
107. Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Discrete gap solitons in modulated waveguide arrays// *Optics Letters*, 2002, v. 27, № 23, p. 2112-2114.
108. He Y. J., Chen W. H., Wang H. Z., Malomed B. A. Surface superlattice gap solitons// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 11, p. 1390-1392.
109. Morandotti R., Mandelik D., Silberberg A., Aitchison J. S., Sorel M., Christodoulides D. N., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S., Observation of discrete gap solitons in binary waveguide arrays// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 24, p. 2890-2892.
110. Heinrich M., Kartashov Y. V., Ramirez L. P. R., Szameit A., Dreisow F., Keil R., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Torner L. Observation of two-dimensional superlattice solitons// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 23, p. 3701-3703.
111. Silberberg Y. Collapse of optical pulses// *Optics Letters*, 1990, v. 15, № 22, p. 1282-1284.
112. Aceves A. B., De Angelis C., Rubenchik A. M., Turitsyn S. K. Multidimensional solitons in fiber arrays// *Optics Letters*, 1994, v. 19, № 5, p. 329-331.
113. Aceves A. B., Luther G. G., De Angelis C., Rubenchik A. M., Turitsyn S. K., Energy localization in nonlinear fiber arrays: Collapse-effect compressor// *Physical Review Letters*, 1995, v. 75, № 1, p. 73-76.
114. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Kartashov Y. V., Crasovan L. C., Torner L. Stable three-dimensional spatiotemporal solitons in a two-dimensional photonic lattice// *Physical Review E*, 2004, v. 70, № 5, p. 055603(R).
115. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Malomed B. A., Kartashov Y. V., Crasovan L. C., Torner L. Stable spatiotemporal solitons in Bessel optical lattices// *Physical Review Letters*, 2005, v. 95, № 2, p. 023902.
116. Scharf R., Bishop A. R. Length-scale competition for the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation with spatially periodic potentials// *Physical Review E*, 1993, v. 47, № 2, p. 1375-1383.
117. Fratocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. All-optical switching and beam steering in tunable waveguide arrays// *Applied Physics Letters*, 2005, v. 86, № 5, p. 051112.

118. Berge L. Wave collapse in physics: principles and applications to light and plasma waves// *Physics Reports*, 1998, v. 303, № 5-6, p. 260-370.
119. Trager D., Fischer R., Neshev D. N., Sukhorukov A. A., Denz C., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Nonlinear Bloch modes in two-dimensional photonic lattices// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 5, p. 1913-1923.
120. Вахитов Н. Г., Колоколов А. А. Стационарные решения волнового уравнения в среде с насыщением нелинейности// *Известия Высших Учебных Заведений, радиофизика*, 1973, т. 16, № 7, с. 1020-1028.
121. Rodrigues-Coppola, H. The dielectric response function of systems with reduced dimensionality// *Microelectronics Journal*, 2002, v. 33, № 4, p. 379-385.
122. Ахмедиев Н. Н. Новый класс нелинейных поверхностных волн - асимметричные моды в симметричной слоистой структуре// *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1982, т. 83, № 2, с. 545-553.
123. Kusmartsev F. V. Application of catastrophe theory to molecules and solitons// *Physics Reports*, 1989, v. 183, № 1, p. 1-35.
124. Mazilu M., Stevenson D. J., Gunn-Moore F., Dholakia K. Light beats the spread: "non-diffracting" beams// *Laser and Photonics Reviews*, 2010, v. 4, № 4, p. 529-547.
125. Durnin J., Miceli J. J., Eberly J. H. Diffraction-free beams// *Physical Review Letters*, 1987, v. 58, № 15, p. 1499-1501.
126. Gutierrez-Vega J. C., Iturbe-Castillo M. D., Chavez-Cerda S. Alternative formulation for invariant optical fields: Mathieu beams// *Optics Letters*, 2000, v. 25, № 20, p. 1493-1495.
127. Gutierrez-Vega J. C., Iturbe-Castillo M. D., Ramirez G. A., Tepichin E., Rodriguez-Dagnino R. M., Chavez-Cerda S., New G. H. C. Experimental demonstration of optical Mathieu beams// *Optics Communications*, 2001, v. 195, № 1, p. 35-40.
128. Lopez-Mariscal C., Bandres M. A., Gutierrez-Vega J. C., Chavez-Cerda S. Observation of parabolic nondiffracting optical fields// *Optics Express*, 2005, v. 13, № 7, p. 2364-2369.
129. Siviloglou G. A., Broky J., Dogariu A., Christodoulides D. N. Observation of accelerating Airy beams// *Physical Review Letters*, 2007, v. 99, № 21, p. 213901.
130. Garces-Chavez V., McGloin D., Melville H., Sibbett W., Dholakia K. Simultaneous micromanipulation in multiple planes using a self-reconstructing light beams// *Nature*, 2002, v. 419, p. 145-147.
131. Wulle T., Herminghaus S. Nonlinear optics of Bessel beams// *Physical Review Letters*, 1993, v. 70, № 10, p. 1401-1404.
132. McGloin D., Spalding G. C., Melville H., Sibbett W., Dholakia K. Application of spatial light modulators in atom optics// *Optics Express*, 2003, v. 11, № 2, p. 158-165.

133. Morsch O., Oberthaler M. Dynamics of Bose-Einstein condensates in optical lattices// *Reviews of Modern Physics*, 2006, v. 78, № 1, p. 179-215.
134. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Rotary solitons in Bessel optical lattices// *Physical Review Letters*, 2004, v. 93, № 9, p. 093904.
135. Wang X., Chen Z., Kevrekidis P. G. Observation of discrete solitons and soliton rotation in optically induced periodic ring lattices// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 8, p. 083904.
136. Huang S., Zhang P., Wang X. S., Chen Z. G. Observation of planet-like orbiting in Bessel-like photonic lattices// *Optics Letters*, 2010, v. 35, № 13, p. 2284-2286.
137. Hoq Q. E., Kevrekidis P. G., Frantzeskakis D. J., Malomed B. A. Ring-shaped solitons in a "dartboard" photonic lattice// *Physics Letters A*, 2005, v. 341, № 1-4, p. 145-155.
138. Baizakov B. B., Malomed B. A., Salerno M. Matter-wave solitons in radially periodic potentials// *Physical Review A*, 2006, v. 74, № 6, p. 066615.
139. Dong L. W. Surface solitons supported by Bessel optical potential// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 4, p. 1706-1711.
140. Neshev D. N., Sukhorukov A. A., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Nonlinear optics and light localization in periodic photonic lattices// *Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials*, 2007, v. 16, № 1, p. 1-25.
141. He Y. J., Malomed B. A., Wang H. Z. Steering the motion of rotary solitons in radial lattices// *Physical Review A*, 2007, v. 76, № 5, p. 053601.
142. He Y. J., Malomed B. A., Mihalache D., Wang H. Z. Tunable rotary orbits of matter-wave nonlinear modes in attractive Bose-Einstein condensates// *Journal of Optics B - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 2008, v. 41, № 5, p. 055301.
143. Dong L. W., Wang H., Zhou W. D., Yang X. Y., Lv X., Chen H. Y. Necklace solitons and ring solitons in Bessel optical lattices// *Optics Express*, 2008, v. 16, № 8, p. 5649-5655.
144. Carpentier A. V., Michinel H. A ring accelerator for matter-wave solitons// *Europhysics Letters*, 2007, v. 78, № 1, p. 10002.
145. Dong L. W., Wang J. D., Wang H., Yin G. Y. Bessel lattice solitons in competing cubic-quintic nonlinear media// *Physical Review A*, 2009, v. 79, № 1, p. 013807.
146. Ruelas A., Lopez-Aguayo S., Gutierrez-Vega J. C. Soliton dynamics in modulated Bessel photonic lattices// *Physical Review A*, 2010, v. 82, № 6, p. 063808.
147. Kartashov Y. V., Egorov A. A., Vysloukh V. A., Torner L. Stable soliton complexes and azimuthal switching in modulated Bessel optical lattices// *Physical Review E*, 2004, v. 70, № 6, p. 065602(R).
148. Fischer R., Neshev D. N., Lopez-Aguayo S., Desyatnikov A. S., Sukhorukov A. A., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Observation of light localization in modulated Bessel optical lattices// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 7, p. 2825-2830.

149. Zheng J. B., Dong L. W. Multi-peaked fundamental and vortex solitons in azimuthally modulated Bessel lattices// *Journal of the Optical Society of America B*, 2011, v. 28, № 4, p. 780-786.
150. Mihalache D., Mazilu D., Malomed B. A., Lederer F. Vortex stability in nearly-two-dimensional Bose-Einstein condensates with attraction// *Physical Review A*, 2006, v. 73, № 4, p. 043615.
151. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Stable ring-profile vortex solitons in Bessel optical lattices// *Physical Review Letters*, 2005, v. 94, № 4, p. 043902.
152. Wang X., Chen Z., Yang J. Guiding light in optically induced ring lattices with a low-refractive-index core// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 12, p. 1887-1889.
153. Oster M., Johansson M. Stable stationary and quasiperiodic discrete vortex breathers with topological charge  $S=2$ // *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 6, p. 066608.
154. Kartashov Y. V., Ferrando A., Egorov A. A., Torner L., Soliton topology versus discrete symmetry in optical lattices// *Physical Review Letters*, 2005, v. 95, № 12, p. 123902.
155. Terhalle B., Richter T., Law K. J. H., Gories D., Rose P., Alexander T. J., Kevrekidis P. G., Desyatnikov A. S., Krolikowski W., Kaiser F., Denz C., Kivshar Y. S. Observation of double-charge vortex solitons in hexagonal photonic lattices// *Physical Review A*, 2009, v. 79, № 4, p. 043821.
156. Ferrando A., Zacaes M., Garcia-March M. A., Monsoriu J. A., De Cordoba P. F. Vortex transmutation// *Physical Review Letters*, 2005, v. 95, № 12, p. 123901.
157. Garcia-March M. A., Ferrando A., Zacaes M., Vijande J., Carr L. D. Angular pseudomomentum theory for the generalized nonlinear Schrödinger equation in discrete rotational symmetry media// *Physica D*, 2009, v. 238, № 15, p. 1432-1438.
158. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Soliton spiraling in optically induced rotating Bessel lattices// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 6, p. 637-639.
159. Zhang P., Huang S., Hu Y., Hernandez D., Chen Z. G. Generation and nonlinear self-trapping of optical propelling beams// *Optics Letters*, 2010, v. 35, № 18, p. 3129-3131.
160. Kartashov Y. V., Egorov A. A., Vysloukh V. A., Torner L. Shaping soliton properties in Mathieu lattices// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 2, p. 238-240.
161. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L., Highly asymmetric soliton complexes in parabolic optical lattices// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 2, p. 141-143.
162. Ruelas A., Lopez-Aguayo S., Gutierrez-Vega J. C. Stable solitons in elliptic photonic lattices// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 23, p. 2785-2787.
163. Ye F., Mihalache D., Hu B. Elliptic vortices in composite Mathieu lattices// *Physical Review A*, 2009, v. 79, № 5, p. 053852.

164. Lidorikis E., Soljacic M., Ibanescu M., Fink Y., Joannopoulos J. D. Cutoff solitons in axially uniform systems// Optics Letters, 2004, v. 29, № 8, p. 851-853.
165. Kartashov Y. V., Egorov A. A., Vysloukh V. A., Torner L. Rotary dipole-mode solitons in Bessel optical lattices// Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics, 2004, v. 6, № 11, p. 444-447.
166. Arlt J., Dholakia K. Generation of high-order Bessel beams by use of an axicon// Optics Communications, 2000, v. 177, № 2, p. 297-301.
167. Chattrabipan N., Rogers E. A., Cofield D., Hill W. T., Roy R. Generation of nondiffracting Bessel beams by use of a spatial light modulator// Optics Letters, 2003, v. 28, № 22, p. 2183-2185.
168. Hamermesh M. Group theory and its application to physical problems - New York: Addison-Wesley, 1964, 544 с.
169. Ferrando A., Zacaes M., Garcia-March M. A. Vorticity cutoff in nonlinear photonic crystals// Physical Review Letters, 2005, v. 95, № 4, p. 043901.
170. Schultheiss V. H., Batz S., Szameit A., Dreisow F., Nolte S., Tünnermann A., Longhi S., Peschel U. Optics in curved space// Physical Review Letters, 2010, v. 105, № 14, p. 143901.
171. Szameit A., Dreisow F., Heinrich M., Keil R., Nolte S., Tünnermann A., Longhi S. Geometric potential and transport in photonic topological crystals// Physical Review Letters, 2010, v. 104, № 15, p. 150403.
172. Kartashov Y. V., Szameit A., Keil R., Vysloukh V. A., Torner L. Solitons in geometric potentials// Optics Letters, 2011, v. 36, № 17, p. 3470-3472.
173. Каплан А. Е. Гистерезисное отражение и преломление на нелинейной границе - новый класс эффектов в нелинейной оптике// Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1976, т. 24, № 3, с. 132-137.
174. Каплан А. Е. Теория гистерезисного отражения и преломления света на границе нелинейной среды// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1977, т. 72, № 5, с. 1710-1726.
175. Smith P. W., Hermann J. P., Tomlinson W. J., Maloney P. J. Optical bistability at a nonlinear interface// Applied Physics Letters, 1979, v. 35, № 11, p. 846-848.
176. Розанов Н. Н. Нелинейное отражение и преломление ограниченных световых пучков// Оптика и Спектроскопия, 1979, т. 47, № 3, с. 606-609.
177. Marcuse D. Reflection of a Gaussian beam from a nonlinear interface// Applied Optics, 1980, v. 19, № 18, p. 3130-3139.
178. Tomlinson W. J., Gordon J. P., Smith P. W., Kaplan A. E. Reflection of a Gaussian beam at a nonlinear interface// Applied Optics, 1982, v. 21, № 11, p. 2041-2051.
179. Smith P. W., Tomlinson W. J. Nonlinear optical interfaces: Switching behavior// IEEE Journal of Quantum Electronics, 1984, v. 20, № 1, p. 30-36.

180. Ахмедиев Н. Н., Корнеев В. И., Кузьменко Ю. В. Возбуждение нелинейных поверхностных волн гауссовскими световыми пучками// Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1985, т. 88, № 1, с. 107-115.
181. Розанов Н. Н., Ходова Г. В. Бистабильность при отражении пучка от нелинейной среды// Оптика и Спектроскопия, 1986, т. 61, № 1, с. 198-201.
182. Aceves A. B., Moloney J. V., Newell A. C. Theory of light-beam propagation at nonlinear interfaces. I. Equivalent-particle theory for a single interface// Physical Review A, 1989, v. 39, № 4, p. 1809-1827.
183. Aceves A. B., Moloney J. V., Newell A. C., Theory of light-beam propagation at nonlinear interfaces. II. Multiple-particle and multiple-interface extensions// Physical Review A, 1989, v. 39, № 4, p. 1828-1840.
184. Jankovic L., Kim H., Stegeman G., Carrasco S., Torner L., Katz M. Quadratic soliton self-reflection at a quadratically nonlinear interface// Optics Letters, 2003, v. 28, № 21, p. 2103-2105.
185. Baronio F., De Angelis C., Pioger P. H., Couderc V., Barthelemy A. Reflection of quadratic solitons at the boundary of nonlinear media// Optics Letters, 2004, v. 29, № 9, p. 986-988.
186. Alvarado-Mendez E., Rojas-Laguna R., Avina-Cervantes J. G., Torres-Cisneros M., Andrade-Lucio J. A., Pedraza-Ortega J. C., Kuzin E. A., Sanchez-Mondragon J. J., Vysloukh V. A. Total internal reflection of spatial solitons at interface formed by a nonlinear saturable and a linear medium// Optics Communications, 2001, v. 193, № 2, p. 267-276.
187. Агранович В. М., Бабиченко В. С., Черняк В. Я. Нелинейные поверхностные поляритоны// Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики, 1980, т. 32, № 8, с. 532-535.
188. Tomlinson W. J. Surface waves at a nonlinear interface// Optics Letters, 1980, v. 5, № 7, p. 323-325.
189. Mihalache D., Bertolotti M., Sibilica C. Nonlinear wave propagation in planar structures// Progress in Optics, 1989, v. 27, p. 229-313.
190. Stegeman G. I., Seaton C. T. Nonlinear integrated optics// Journal of Applied Physics, 1985, v. 58, № 12, p. R57-R78.
191. Ponath H. E., Stegeman G. I. Nonlinear surface electromagnetic phenomena (Modern problems in condensed matter sciences) - Amsterdam, North Holland, 1991, 670 с.
192. Агранович В. М., Миллс Д. Л. Поверхностные поляритоны. Электромагнитные волны на поверхностях и границах раздела сред - Москва, Мир, 1985, 528 с.
193. Maradudin A. A. Nonlinear surface electromagnetic waves, в сборнике Optical and Acoustic Waves in Solids-Modern Topics - Singapore, World Scientific, 1983, p. 72-142.



194. Carvalho M. I., Singh S. R., Christodoulides D. N. Self-deflection of steady-state bright spatial solitons in biased photorefractive crystals// *Optics Communications*, 1995, v. 120, № 5,6, p. 311-315.
195. Krolkowski W., Akhmediev N., Luther-Davies B., Cronin-Golomb M. Self-bending photorefractive solitons// *Physical Review E*, 1996, v. 54, № 5, p. 5761-5765.
196. Petter J., Weilnau C., Denz C., Stepken A., Kaiser F. Self-bending of photorefractive solitons// *Optics Communications*, 1999, v. 170, № 4-6, p. 291-297.
197. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Карташов Я. В. Формирование и взаимодействие пространственных солитонов в фоторефрактивной среде с дрейфовой и диффузионной компонентами нелинейного отклика// *Квантовая Электроника*, 1999, т. 28, № 1, с. 64-68.
198. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Карташов Я. В. Формирование и взаимодействие недифрагирующих пучков в фоторефрактивной среде с диффузионной нелинейностью// *Квантовая Электроника*, 2001, т. 31, № 7, с. 639-642.
199. Garcia-Quirino G., Sanchez-Mondragon J., Stepanov S. Nonlinear surface optical waves in photorefractive crystals with a diffusion mechanism of nonlinearity// *Physical Review A*, 1995, v. 51, № 2, p. 1571-1577.
200. Garcia-Quirino G. S., Sanchez-Mondragon J. J., Stepanov S., Vysloukh V. A. Guided modes in a dielectric slab with diffusion-type photorefractive nonlinearity// *Journal of the Optical Society of America B*, 1996, v. 13, № 11, p. 2530-2535.
201. Cronin-Golomb M. Photorefractive surface waves// *Optics Letters*, 1995, v. 20, № 20, p. 2075-2077.
202. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Карташов Я. В. Оптические поверхностные волны на границе раздела линейный диэлектрик - фоторефрактивный кристалл// *Квантовая Электроника*, 2000, т. 30, № 10, с. 905-910.
203. Алешкевич В. А., Выслоух В. А., Егоров А. А., Карташов Я. В. Формирование и устойчивость оптических поверхностных волн на границе раздела металл - фоторефрактивный кристалл с дрейфовой и диффузионной компонентами нелинейного отклика// *Квантовая Электроника*, 2001, т. 31, № 8, с. 713-718.
204. Kang H. Z., Zhang T. H., Wang B. H., Lou C. B., Zhu B. G., Ma H. H., Liu S. M., Tian J. G., Xu J. J. (2+1)D surface solitons in virtue of cooperation of nonlocal and local nonlinearities// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 21, p. 3298-3300.
205. Alfassi B., Rotschild C., Manela O., Segev M., Christodoulides D. N. Nonlocal surface-wave solitons// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 21, p. 213901.
206. Makris K. G., Sunstov S., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Hache A. Discrete surface solitons// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 18, p. 2466-2468.

207. Suntsov S., Makris K. G., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Hache A., Morandotti R., Yang H., Salamo G., Sorel M. Observation of discrete surface solitons// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 6, p. 063901.
208. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Surface gap solitons// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 7, p. 073901.
209. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Surface lattice kink solitons// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 25, p. 12365-12372.
210. Smirnov E., Stepic M., Ruter C. E., Kip D., Shandarov V. Observation of staggered surface solitary waves in one-dimensional waveguide arrays// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 15, p. 2338-2340.
211. Rosberg C. R., Neshev D. N., Krolikowski W., Mitchell A., Vicencio R. A., Molina M. I., Kivshar Y. S. Observation of surface gap solitons in semi-infinite waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2006, v. 97, № 8, p. 083901.
212. Molina M. I., Vicencio R. A., Kivshar Y. S. Discrete solitons and nonlinear surface modes in semi-infinite waveguide arrays// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 11, p. 1693-1695.
213. Molina M. I., Garanovich I. L., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Discrete surface solitons in semi-infinite binary waveguide arrays// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 15, p. 2332-2334.
214. He Y. J., Chen W. H., Wang H. Z., Malomed B. A. Surface superlattice gap solitons// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 11, p. 1390-1392.
215. Siviloglou G. A., Makris K. G., Iwanow R., Schiek R., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Min Y., Sohler W. Observation of discrete quadratic surface solitons// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 12, p. 5508-5516.
216. Xu Z., Kivshar Y. S. Two-color surface lattice solitons// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 21, p. 2551-2553.
217. Xu Z., Molina M. I., Kivshar Y. S. Interface solitons in quadratic nonlinear photonic lattices// *Physical Review A*, 2009, v. 80, № 1, p. 013817.
218. Kartashov Y. V., Ye F., Torner L. Vector mixed-gap surface solitons// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 11, p. 4808-4814.
219. Garanovich I. L., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S., Molina M. Surface multi-gap vector solitons// *Optics Express*, v. 14, № 11, p. 4780-4785.
220. Suntsov S., Makris K. G., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Morandotti R., Yang H., Salamo G., Sorel M. Power thresholds of families of discrete surface solitons// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 21, p. 3098-3100.
221. Bludov Y. V., Konotop V. V. Surface modes and breathers in finite arrays of nonlinear waveguides// *Physical Review E*, 2007, v. 76, № 4, p. 046604.

222. Kominis Y., Papadopoulos A., Hizanidis K. Surface solitons in waveguide arrays: Analytical solutions// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 16, p. 10041-10051.
223. Kominis Y., Hizanidis K. Power-dependent reflection, transmission, and trapping dynamics of lattices solitons at interfaces// *Physical Review Letters*, 2009, v. 102, № 13, p. 133903.
224. Motzek K., Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Polychromatic interface solitons in nonlinear photonic lattices// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 21, p. 3125-3127.
225. Chen W. H., He Y. J., Wang H. Z. Surface defect gap solitons// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 23, p. 11271-11276.
226. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Soliton control in chirped photonic lattices// *Journal of the Optical Society of America B*, 2005, v. 22, № 7, p. 1356-1359.
227. Brazhnyi V. A., Konotop V. V., Kuzmiak V. Dynamics of matter solitons in weakly modulated optical lattices// *Physical Review A*, 2004, v. 70, № 4, p. 043604.
228. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Dynamics of surface solitons at the edge of chirped optical lattices// *Physical Review A*, 2007, v. 76, № 1, p. 013831.
229. Szameit A, Kartashov Y. V., Dreisow F., Heinrich M., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Torner L. Observation of surface solitons in chirped waveguide arrays// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 10, p. 1132-1134.
230. Szameit A., Kartashov Y. V., Dreisow F., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Torner L. Observation of two-dimensional surface solitons in asymmetric waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 17, p. 173903.
231. Wang X., Bezryadina A., Chen Z., Makris K. G., Christodoulides D. N., Stegeman G. I. Observation of two-dimensional surface solitons// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 12, p. 123903.
232. Susanto H., Kevrekidis P. G., Carretero-Gonzalez R., Malomed B. A., Frantzeskakis D. J. Discrete surface solitons in two dimensions// *Physical Review E*, 2007, v. 75, № 5, p. 056605.
233. Vicencio R. A., Flash S., Molina M. I., Kivshar Y. S. Discrete surface solitons in two-dimensional anisotropic photonic lattices// *Physics Letters A*, 2007, v. 364, № 3,4, p. 274-276.
234. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Mihalache D., Torner L. Generation of surface soliton arrays// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 15, p. 2329-2331.
235. Wang X. S., Samodurov A., Chen Z. G. Demonstration of surface soliton arrays at the edge of a two-dimensional photonic lattice// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 11, p. 1240-1242.
236. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Kivshar Y. S. Stable discrete surface light bullets// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 2, p. 589-595.

237. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Kivshar Y. S. Spatiotemporal surface solitons in two-dimensional photonic lattices// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 21, p. 3173-3175.
238. Hoq Q. E., Carretero-Gonzalez R., Kevrekidis P. G., Malomed B. A., Frantzeskakis D. J., Bludov Y. V., Konotop V. V. Surface solitons in three dimensions// *Physical Review E*, 2008, v. 78, № 3, p. 036605.
239. Szameit A., Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Heinrich M., Dreisow F., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Lederer F., Torner L. Angular surface solitons in sectorial hexagonal arrays// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 13, p. 1542-1544.
240. Makris K. G., Hudock J., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Manela O., Segev M. Surface lattice solitons// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 18, p. 2774-2776.
241. Sunstov S., Makris K. G., Christodoulides D. N., Stegeman G. I., Morandotti R., Volatier M., Aimez V., Ares R., Yang E. H., Salamo G. Optical spatial solitons at the interface between two dissimilar periodic media: Theory and experiment// *Optics Express*, 2008, v. 16, № 14, p. 10480-10492.
242. Szameit A., Kartashov Y. V., Dreisow F., Heinrich M., Vysloukh V. A., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Lederer F., Torner L. Observation of two-dimensional lattice interface solitons// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 7, p. 663-665.
243. Christodoulides D. N., Joseph R. I. Vector solitons in birefringent nonlinear dispersive media// *Optics Letters*, 1988, v. 13, № 1, p. 53-55.
244. Mitchell M., Segev M., Christodoulides D. N., Observation of multihump multimode solitons// *Physical Review Letters*, 1998, v. 80, № 21, p. 4657-4660.
245. Kang J. U., Stegeman G. I., Aitchison J. S., Akhmediev N. Observation of Manakov spatial solitons in AlGaAs planar waveguides// *Physical Review Letters*, 1996, v. 76, p. 3699-3702.
246. Meier J., Hudock J., Christodoulides D., Stegeman G., Silberberg Y., Morandotti R., Aitchison J. S. Discrete vector solitons in Kerr nonlinear waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2003, v. 91, № 14, p. 143907.
247. Cohen O., Schwartz T., Fleischer J. W., Segev M., Christodoulides D. N. Multiband vector lattice solitons// *Physical Review Letters*, 2003, v. 91, № 11, p. 113901.
248. Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Multigap discrete vector solitons// *Physical Review Letters*, 2003, v. 91, № 11, p. 113902.
249. Hudock J., Sunstov S., Christodoulides D. N., Stegeman G. I. Vector discrete nonlinear surface waves// *Optics Express*, 2005, v. 13, № 20, p. 7720-7725.
250. Heinrich M., Kartashov Y. V., Szameit A., Dreisow F., Keil R., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Torner L. Observation of two-dimensional coherent surface vector lattice solitons// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 11, p. 1624-1626.
251. Kartashov Y. V., Torner L. Multipole-mode surface solitons// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 14, p. 2172-2174.

252. Kartashov Y. V., Egorov A. A., Vysloukh V. A., Torner L. Surface vortex solitons// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 9, p. 4049-4057.
253. Song D. H., Lou C. B., Law K. J. H., Tang L. Q., Ye Z. Y., Kevrekidis P. G., Xu J. J., Chen Z. G. Self-trapping of optical vortices at the surface of an induced semi-infinite photonic lattice// *Optics Express*, 2010, v. 18, № 6, p. 5873-5878.
254. Krolikowski W., Bang O., Nikolov N. I., Neshev D., Wyller J., Rasmussen J. J., Edmundson D. Modulational instability, solitons and beam propagation in spatially nonlocal nonlinear media// *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 2004, v. 6, № 5, p. S288-S294.
255. Snyder A. W., Mitchell D. J. Accessible solitons// *Science*, 1997, v. 276, № 5318, p. 1538-1541.
256. Suter D., Blasberg T. Stabilization of transverse solitary waves by a nonlocal response of the nonlinear medium// *Physical Review A*, 1993, v. 48, № 6, p. 4583-4587.
257. Skupin S., Saffman M., Krolikowski W. Nonlocal stabilization of nonlinear beams in a self-focusing atomic vapor// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 26, p. 263902.
258. Gordon J. P., Leite R. C. C., Moore R. S., Porto S. P. S., Whinnery J. R. Long-transient effects in lasers with inserted liquid samples// *Journal of Applied Physics*, 1965, v. 36, № 1, p. 3-7.
259. Литвак А. Г. О самофокусировке мощных световых пучков, связанной с тепловыми эффектами// *Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1966, т. 4, № 9, с. 341-345.
260. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Хохлов Р. В. Самофокусировка и дифракция света в нелинейной среде// *Успехи Физических Наук*, 1967, т. 93, № 1, с. 19-70.
261. Akhmanov S. A., Krindach D. P., Migulin A. V., Sukhorukov A. P., Khokhlov R. V., Thermal self-actions of laser beams// *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1968, v. 4, № 10, p. 568-573.
262. Алешкевич В. А., Ахманов С. А., Жданов Б. В., Сухоруков А. П. Роль тепловой самофокусировки в оптическом пробое прозрачных диэлектриков в поле наносекундных импульсов// *Квантовая Электроника*, 1975, т. 2, № 6, с. 1179-1185.
263. Rotschild C., Cohen O., Manela O., Segev M., Carmon T. Solitons in nonlinear media with an infinite range of nonlocality: first observation of coherent elliptic solitons and of vortex-ring solitons// *Physical Review Letters*, 2005, v. 95, № 21, p. 213904.
264. Rotschild C., Alfassi B., Cohen O., Segev M. Long-range interactions between optical solitons// *Nature Physics*, 2006, v. 2, № 11, p. 769-774.
265. Gatz S., Herrmann J. Anisotropy, nonlocality, and space-charge field displacement in (2+1)-dimensional self-trapping in biased photorefractive crystals// *Optics Letters*, 1998, v. 23, № 15, p. 1176-1178.

266. Mamaev A. V., Zozulya A. A., Mezentsev V. K., Anderson D. Z., Saffman M. Bound dipole solitary solutions in anisotropic nonlocal self-focusing media// *Physical Review A*, 1997, v. 56, № 2, p. R1110-R1113.
267. Литвак А. Г., Миронов В. А., Фрайман Г. М., Юнаковский А. Д. Термальное самовоздействие волн в плазме с нелокальной нелинейностью// *Физика Плазмы*, 1975, т. 1, № 1, с. 60-65.
268. Кольчугина И. А., Миронов В. А., Сергеев А. М. О структуре стационарных солитонов в среде с нелокальной нелинейностью// *Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 1980, т. 31, № 6, с. 333-337.
269. Миронов В. А., Сергеев А. М., Шер Э. М. О неодномерных связанных солитонах в нелинейных уравнениях поля// *Доклады Академии Наук СССР*, 1981, т. 260, № 2, с. 325-327.
270. Peccianti M., Brzdakiewicz K. A., Assanto G. Nonlocal spatial soliton interactions in nematic liquid crystals// *Optics Letters*, 2002, v. 27, № 16, p. 1460-1462.
271. Peccianti M., Conti C., Assanto G. Optical multisoliton generation in nematic liquid crystals// *Optics Letters*, 2003, v. 28, № 22, p. 2231-2233.
272. Conti C., Peccianti M., Assanto G., Observation of optical spatial solitons in a highly nonlocal medium// *Physical Review Letters*, 2004, v. 92, № 11, p. 113902.
273. Warenghem M., Henninot J. F., Derrien F., Abbate G. Thermal and orientational 2d+1 spatial optical solitons in dye doped liquid crystals// *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2002, v. 373, p. 213-225.
274. Hutsebaut X., Cambournac C., Haelterman M., Adamski A., Neyts K. Single-component higher-order mode solitons in liquid crystals// *Optics Communications*, 2004, v. 233, № 1-3, p. 211-217.
275. Peccianti M., Conti C., Assanto G. Interplay between nonlocality and nonlinearity in nematic liquid crystals// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 4, p. 415-417.
276. Lahae T., Menotti C., Santos L., Lewenstein M., Pfau T. The physics of dipolar bosonic quantum gases// *Reports on Progress in Physics*, 2009, v. 72, № 12, p. 126401.
277. Krolkowski W., Bang O., Rasmussen J. J., Wyller J. Modulational instability in nonlocal nonlinear Kerr media// *Physical Review E*, 2001, v. 64, № 1, p. 016612.
278. Peccianti M., Conti C., Assanto G. Optical modulational instability in a nonlocal medium// *Physical Review E*, 2003, v. 68, № 2, p. 025602(R).
279. Xu Z., Kartashov Y. V., Torner L. Upper threshold for stability of multipole-mode solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 23, p. 3171-3173.
280. Dong L. W., Ye F. W. Stability of multipole-mode solitons in thermal nonlinear media// *Physical Review A*, v. 81, № 1, p. 013815.

281. Nikolov N. I., Neshev D., Krolikowski W., Bang O., Rasmussen J. J., Christiansen P. L. Attraction of nonlocal dark optical solitons// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 3, p. 286-288.
282. Dreischuh D., Neshev D. N., Petersen D. E., Bang O., Krolikowski W. Observation of attraction between dark solitons// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 4, p. 043901.
283. Kartashov Y. V., Torner L. Gray spatial solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2007, v. 32, № 8, p. 946-948.
284. Fischer R., Neshev D. N., Krolikowski W., Kivshar Y. S., Iturbe-Castillo D., Chavez-Cerda S., Meneghetti M. R., Gaetano D. P., Hickman J. M. Oblique interaction of spatial dark-soliton stripes in nonlocal media// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 20, p. 3010-3012.
285. Turitsyn S. K. Spatial dispersion of nonlinearity and stability of multidimensional solitons// *Theoretical and Mathematical Physics*, 1985, v. 64, № 2, p. 797-801.
286. Perez-Garcia V. M., Konotop V. V., Garcia-Ripoll J. J. Dynamics of quasicollapse in nonlinear Schrödinger systems with nonlocal interactions// *Physical Review E*, 2000, v. 62, № 3, p. 4300-4308.
287. Bang O., Krolikowski W., Wyller J., Rasmussen J. J. Collapse arrest and soliton stabilization in nonlocal nonlinear media// *Physical Review E*, 2002, v. 66, № 4, p. 046619 (2002).
288. Mihalache D., Mazilu D., Lederer F., Malomed B. A., Kartashov Y. V., Crasovan L. C., Torner L. Three-dimensional spatiotemporal optical solitons in nonlocal nonlinear media// *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 2, p. 025601(R).
289. Rotschild C., Segev M., Xu Z., Kartashov Y. V., Torner L., Cohen O. Two-dimensional multipole solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 22, p. 3312-3314.
290. Ye F., Kartashov Y. V., Torner L. Stabilization of dipole solitons in nonlocal nonlinear media// *Physical Review A*, 2008, v. 77, № 4, p. 043821.
291. Lopez-Aguayo S., Desyatnikov A. S., Kivshar Y. S. Azimuthons in nonlocal nonlinear media// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 17, p. 7903-7908.
292. Lopez-Aguayo S., Desyatnikov A. S., Kivshar Y. S., Skupin S., Krolikowski W., Bang O. Stable rotating dipole solitons in nonlocal optical media// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 8, p. 1100-1102.
293. Kartashov Y. V., Torner L., Vysloukh V. A., Mihalache D. Multipole vector solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 10, p. 1483-1485.
294. Yakimenko A. I., Lashkin V. M., Prikhodko O. O. Dynamics of two-dimensional coherent structures in nonlocal nonlinear media// *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 6, p. 066605.

295. Skupin S., Bang O., Edmundson D., Krolikowski W. Stability of two-dimensional spatial solitons in nonlocal nonlinear media// *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 6, p. 066603.
296. Buccoliero D., Desyatnikov A. S., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Laguerre and Hermite soliton clusters in nonlocal nonlinear media// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 5, p. 053901.
297. Briedis D., Petersen D. E., Edmundson D., Krolikowski W., Bang O. Ring vortex solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Express*, 2005, v. 13, № 2, p. 435-443.
298. Yakimenko A. I., Zaliznyak Y. A., Kivshar Y. S. Stable vortex solitons in nonlocal self-focusing nonlinear media// *Physical Review E*, 2005, v. 71, № 6, p. 065603.
299. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Stability of vortex solitons in thermal nonlinear media with cylindrical symmetry// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 15, p. 9378-9384.
300. Ye F., Kartashov Y. V., Hu B., Torner L. Twin-vortex solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2010, v. 35, № 5, p. 628-630.
301. Peccianti M., Conti C., Assanto G., De Luca A., Umeton C. Routing of anisotropic spatial solitons and modulational instability in liquid crystals// *Nature*, 2004, v. 432, p. 733-737.
302. Fratalocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. Discrete propagation and spatial solitons in nematic liquid crystals// *Optics Letters*, 2004, v. 29, № 13, p. 1530-1532.
303. Fratalocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. Optical multiband vector breathers in tunable waveguide arrays// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 2, p. 174-176.
304. Fratalocchi A., Assanto G. Discrete light localization in one-dimensional nonlinear lattices with arbitrary nonlocality// *Physical Review E*, 2005, v. 72, № 6, p. 066608.
305. Xu Z., Kartashov Y. V., Torner L. Soliton mobility in nonlocal optical lattices// *Physical Review Letters*, 2005, v. 95, № 11, p. 113901.
306. Efremidis N. K. Nonlocal lattice solitons in thermal media// *Physical Review A*, 2008, v. 77, № 6, p. 063824.
307. Rasmussen P. D., Bennet F. H., Neshev D. N., Sukhorukov A. A., Rosberg C. R., Krolikowski W., Bang O., Kivshar Y. S. Observation of two-dimensional nonlocal gap solitons// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 3, p. 295-297.
308. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Propagation of solitons in thermal media with periodic nonlinearity// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 15, p. 1774-1776.
309. Kartashov Y. V., Torner L., Vysloukh V. A. Lattice-supported surface solitons in nonlocal nonlinear media// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 17, p. 2595-2597.



310. Fratalocchi A., Assanto G., Brzdakiewicz K. A., Karpierz M. A. Optically induced Zener tunneling in one-dimensional lattices// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 6, p. 790-792.
311. Kivshar Y. S., Luther-Davies B. Dark optical solitons: physics and applications// *Physics Reports*, 1998, v. 298, № 2,3, p. 81-197.
312. Kruglov V. I., Logvin Y. A. The theory of spiral laser beams in nonlinear media// *Journal of Modern Optics*, 1992, v. 39, № 11, p. 2277-2291.
313. Kivshar Y. S., Campbell D. K. Peierls-Nabarro potential barrier for highly localized nonlinear modes// *Physical Review E*, 1993, v. 48, № 4, p. 3077-3081.
314. Varatharajah P., Aceves A., Moloney J. V., Heatley D. R., Wright E. M. Stationary nonlinear surface waves and their stability in diffusive Kerr media// *Optics Letters*, 1988, v. 13, № 8, p. 690-692.
315. Anderson D. R. Surface-wave excitation at the interface between diffusive Kerr-like nonlinear and linear media// *Physical Review A*, 1988, v. 37, № 1, p. 189-193.
316. Malomed B. A. *Soliton Management in Periodic Systems* - New York: Springer, 2006, 192 p.
317. Kartashov Y. V., Malomed B. A., Torner L. Solitons in nonlinear lattices// *Reviews of Modern Physics*, 2011, v. 83, № 1, p. 247-305.
318. Inouye S., Andrews M. R., Stenger J., Miesner H. J., Stamper-Kurn D. M., Ketterle W. Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate// *Nature*, 1998, v. 392, № 6672, p. 151-154.
319. Theis M., Thalhammer G., Winkler K., Hellwig M., Ruff G., Grimm R., Denschlag J. H. Tuning the scattering length with an optically induced Feshbach resonance// *Physical Review Letters*, 2004, v. 93, № 12, p. 123001.
320. Litchinitser N. M., Gabitov I. R., Maimistov A. I., Shalaev V. M. Negative refractive index materials in optics// *Progress in Optics*, 2008, v. 51, p. 1-67.
321. Litchinitser N. M., Gabitov I. R., Maimistov A. I. Optical bistability in a nonlinear optical coupler with a negative index channel// *Physical Review Letters*, 2007, v. 99, № 11, p. 113902.
322. Желтиков А. М. Дырчатые волноводы// *Успехи физических наук*, 2000, т. 170, № 11, с. 1203-1215.
323. Желтиков А. М. Нелинейная оптика микроструктурированных волокон// *Успехи физических наук*, 2004, т. 174, № 1, с. 73-105.
324. Vieweg M., Gissibl T., Pricking S., Kuhlmeier B. T., Wu D. C., Eggleton B. J., Giessen H. Ultrafast nonlinear optofluidics in selectively liquid-filled photonic crystal fibers// *Optics Express*, 2010, v. 18, № 24, p. 25232-25240.

325. Blömer D., Szameit A., Dreisow F., Schreiber T., Nolte S., Tünnermann A. Nonlinear refractive index of fs-laser-written waveguides in fused silica// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 6, p. 2151-2157.
326. Harrison W. A. *Pseudopotentials in the Theory of Metals* - New York: Benjamin, 1966, 336 p.
327. Sakaguchi H., Malomed B. A. Matter-wave solitons in nonlinear optical lattices// *Physical Review E*, 2005, v. 72, № 4, p. 046610.
328. Fibich G., Sivan Y., Weinstein M. I. Bound states of nonlinear Schrödinger equations with a periodic nonlinear microstructure// *Physica D*, 2006, v. 217, № 1, p. 31-57.
329. Belmonte-Beitia J., Perez-Garcia V. M., Vekslerchik V. Lie symmetries and solitons in nonlinear systems with spatially inhomogeneous nonlinearities// *Physical Review Letters*, 2007, v. 98, № 6, p. 064102.
330. Belmonte-Beitia, J., Konotop V. V., Perez-Garcia V. M., Vekslerchik V. E., Localized and periodic exact solutions to the nonlinear Schrödinger equation with spatially modulated parameters: Linear and nonlinear lattices// *Chaos, Solitons and Fractals*, 2009, v. 41, № 3, p. 1158-1166.
331. Belmonte-Beitia J., Perez-Garcia V. M., Vekslerchik V., Konotop V. V. Localized nonlinear waves in systems with time- and space-modulated nonlinearities// *Physical Review Letters*, 2008, v. 100, № 16, p. 164102.
332. Rodrigues A. S., Kevrekidis P. G., Porter M. A., Frantzeskakis D. J., Schmelcher P., Bishop A. R. Matter-wave solitons with a periodic, piecewise-constant scattering length// *Physical Review A*, 2008, v. 78, № 1, p. 013611.
333. Bludov Y. V., Konotop V. V. Localized modes in arrays of boson-fermion mixtures// *Physical Review A*, 2006, v. 74, № 4, p. 043616.
334. Abdullaev F., Abdumalikov A., Galimzyanov R., Gap solitons in Bose-Einstein condensates in linear and nonlinear optical lattices// *Physics Letters A*, 2007, v. 367, № 1-2, p. 149-155.
335. Kominis Y. Analytical solitary wave solutions of the nonlinear Kronig-Penney model in photonic structures// *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 6, p. 066619.
336. Kominis Y., Hizanidis K., Lattice solitons in self-defocusing optical media: Analytical solutions of the nonlinear Kronig-Penney model// *Optics Letters*, 2006, v. 31, № 19, p. 2888-2890.
337. Rapti Z., Kevrekidis P. G., Konotop V. V., Jones C. K. R. T. Solitary waves under the competition of linear and nonlinear periodic potentials// *Journal of Physics A*, 2007, v. 40, № 47, p. 14151-14157.
338. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Soliton modes, stability, and drift in optical lattices with spatially modulated nonlinearity// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 15, p. 1747-1749.

339. Kominis Y., Hizanidis K. Power dependent soliton location and stability in complex photonic structures// *Optics Express*, 2008, v. 16, № 16, p. 12124-12138.
340. Sakaguchi H., Malomed B. A. Solitons in combined linear and nonlinear lattice potentials// *Physical Review A*, 2010, v. 81, № 1, p. 013624.
341. Mayteevarunyoo T., Malomed B. A. Solitons in one-dimensional photonic crystals// *Journal of the Optical Society of America B*, 2008, v. 25, № 11, p. 1854-1863.
342. Abdullaev F. K., Garnier J., Propagation of matter-wave solitons in periodic and random nonlinear potentials// *Physical Review A*, 2005, v. 72, № 6, p. 061605(R).
343. Sukhorukov A. A., Kivshar Y. S. Spatial optical solitons in nonlinear photonic crystals// *Physical Review E*, v. 65, № 3, p. 036609.
344. Oster M., Johansson M., Eriksson A., Enhanced mobility of strongly localized modes in waveguide arrays by inversion of stability// *Physical Review E*, 2003, v. 67, № 5, p. 056606.
345. Abdullaev F. K., Bludov Y. V., Dmitriev S. V., Kevrekidis P. G., Konotop V. V. Generalized neighbor-interaction models induced by nonlinear lattices// *Physical Review E*, 2008, v. 77, № 1, p. 016604.
346. Hizanidis K., Kominis Y., Efremidis N. K. Interlaced linear-nonlinear optical waveguide arrays// *Optics Express*, 2008, v. 16, № 22, p. 18296-18311.
347. Mingaleev S. F., Kivshar Y. S., Self-trapping and stable localized modes in nonlinear photonic crystals// *Physical Review Letters*, 2001, v. 86, № 24, p. 5474-5477.
348. Ferrando A., Zacaes M., Fernandez de Cordoba P., Binosi D., Monsoriu J. A. Spatial soliton formation in photonic crystal fibers// *Optics Express*, 2003, v. 11, № 5, p. 452-459.
349. Ferrando A., Zacaes M., Andrees P., Fernandez de Cordoba P., Monsoriu J. A. Nodal solitons and the nonlinear breaking of discrete symmetry// *Optics Express*, 2005, v. 13, № 4, p. 1072-1078.
350. Ferrando, A., Zacaes M., Fernandez de Cordoba P., Binosi D., Monsoriu J. A. Vortex solitons in photonic crystal fibers// *Optics Express*, 2004, v. 12, № 5, p. 817-822.
351. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Power-dependent shaping of vortex solitons in optical lattices with spatially modulated nonlinear refractive index// *Optics Letters*, 2008, v. 33, № 19, p. 2173-2175.
352. Salgueiro J. R., Kivshar Y. S. Optical vortex solitons and soliton clusters in photonic crystal fibers// *European Physical Journal - Special Topics*, 2009, v. 173, № 1, p. 281-288.
353. Salgueiro J. R., Kivshar Y. S. Nonlinear dual-core photonic crystal fiber couplers// *Optics Letters*, 2005, v. 30, № 14, p. 1858-1860.

354. Oster M., Johansson M. Stability, mobility and power currents in a two-dimensional model for waveguide array with nonlinear coupling// *Physica D*, 2009, v. 238, № 1, p. 88-99.
355. Sivan Y., Fibich G., Weinstein M. I. Waves in nonlinear lattices: Ultrashort optical pulses and Bose-Einstein condensates// *Physical Review Letters*, 2006, v. 97, № 19, p. 193902.
356. Kartashov Y. V., Malomed B. A., Vysloukh V. A., Torner L. Two-dimensional solitons in nonlinear lattices// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 6, p. 770-772.
357. Hang C., Konotop V. V., Huang G. Spatial solitons and instabilities of light beams in a three-level atomic medium with a standing-wave control field// *Physical Review A*, 2009, v. 79, № 3, p. 033826.
358. Sakaguchi H., Malomed B. A. Channel-guided light bullets// *Physical Review A*, 2007, v. 75, № 6, p. 063825.
359. Abdullaev F. K., Gammal A., Salerno M., Tomio L. Localized modes of binary mixtures of Bose-Einstein condensates in nonlinear optical lattices// *Physical Review A*, 2008, v. 77, № 2, p. 023615.
360. Kartashov Y. V., Malomed B. A., Vysloukh V. A., Torner L. Vector solitons in nonlinear lattices// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 23, p. 3625-3627.
361. Belmonte-Beitia J., Perez-Garcia V. M., Brazhnyi V. Solitary waves in coupled nonlinear Schrodinger equations with spatially inhomogeneous nonlinearities// *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2011, v. 16, № 1, p. 158-172.
362. Cardoso W. B., Avelar A. T., Bazeia D., Hussein M. S. Solitons of two-component Bose-Einstein condensates modulated in space and time// *Physics Letters A*, 2010, v. 374, № 23, p. 2356-2360.
363. Cheng Y. Effective potential of two coupled binary matter wave bright solitons with spatially modulated nonlinearity// *Journal of Physics B*, 2009, v. 42, № 20, p. 205005.
364. Salgueiro J. R., Kivshar Y. S., Pelinovsky D. E., Simon V., Michinel H. Spatial vector solitons in nonlinear photonic crystal fibers// *Studies in Applied Mathematics*, 2005, v. 115, № 2, p. 157-171.
365. Borovkova O. V., Kartashov Y. V., Torner L., Malomed B. A. Bright solitons from defocusing nonlinearities// *Physical Review E*, 2011, v. 84, № 3, p. 035602(R).
366. Сазонов С. В. О влиянии дифракции на распространение солитонов// *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 2004, т. 125, № 6, с. 1409-1422.
367. Сазонов С. В. К теории нелинейных поперечных возмущений квазиодномерных солитонов// *Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики*, 2006, т. 130, № 1, с. 145-160.

368. Joannopoulos J. D., Johnson S. G., Winn J. N., Meade R. D. Photonic crystals: Molding the flow of light - Princeton: Princeton University Press, 2008, 304 p.
369. Kartashov Y. V., Torner L., Vysloukh V. A. Parametric amplification of soliton steering in optical lattices// Optics Letters, 2004, v. 29, № 10, p. 1102-1104.
370. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides - San Diego: Academic Press, 1991, 522 p.
371. Lee K. S., Erdogan T. Fiber mode coupling in transmissive and reflective tilted fiber gratings// Applied Optics, 2000, v. 39, № 9, p. 1394-1404.
372. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Resonant mode oscillations in modulated waveguiding structures// Physical Review Letters, 2007, v. 99, № 23, p. 233903.
373. Shandarova K., Rüter C. E., Kip D., Makris K. G., Christodoulides D. N., Peleg O., Segev M. Experimental observation of Rabi oscillations in photonic lattices// Physical Review Letters, 2009, v. 102, № 12, p. 123905.
374. Terhalle B., Desyatnikov A. S., Neshev D. N., Krolikowski W., Denz C., Kivshar Y. S. Dynamic diffraction and interband transitions in two-dimensional photonic lattices// Physical Review Letters, 2011, v. 106, № 8, p. 083902.
375. Kartashov Y. V., Torner L., Christodoulides D. N. Soliton dragging by dynamic optical lattices// Optics Letters, 2005, v. 30, № 11, p. 1378-1380.
376. Rosberg C. R., Garanovich I. L., Sukhorukov A. A., Neshev D. N., Krolikowski W., Kivshar Y. S. Demonstration of all-optical beam steering in modulated photonic lattices// Optics Letters, 2006, v. 31, № 10, p. 1498-1500.
377. Dunlap D. H., Kenkre V. M. Dynamic localization of a charged particle moving under the influence of an electric field// Physical Review B, 1986, v. 34, № 6, p. 3625-3633.
378. Dignam M. M., de Sterke C. M., Conditions for dynamic localization in generalized ac electric fields// Physical Review Letters, 2002, v. 88, № 4, p. 046806.
379. Grossmann F., Dittrich T., Jung P., Hänggi P. Coherent destruction of tunneling// Physical Review Letters, 1991, v. 67, № 4, p. 516-519.
380. Della Valle G., Ornigotti M., Cianci E., Foglietti V., Laporta P., Longhi S. Visualization of coherent destruction of tunneling in an optical double well system// Physical Review Letters, 2007, v. 98, № 26, p. 263601.
381. Longhi S., Marangoni M., Lobino M., Ramponi R., Laporta P., Cianci E., Foglietti V. Observation of dynamic localization in periodically curved waveguide arrays// Physical Review Letters, 2006, v. 96, № 24, p. 243901.
382. Longhi S. Self-imaging and modulational instability in an array of periodically curved waveguides// Optics Letters, 2005, v. 30, № 16, p. 2137-2139.
383. Iyer R., Aitchison J. S., Wan J., Dignam M. M., de Sterke C. M. Exact dynamic localization in curved AlGaAs optical waveguide arrays// Optics Express, 2007, v. 15, № 6, p. 3212-3223.

384. Dreisow F., Heinrich M., Szameit A., Doering S., Nolte S., Tünnermann A., Fahr S., Lederer F. Spectral resolved dynamic localization in curved fs laser written waveguide arrays// *Optics Express*, 2008, v. 16, № 5, p. 3474-3483.
385. Longhi S., Staliunas K. Self-collimation and self-imaging effects in modulated waveguide arrays// *Optics Communications*, 2008, v. 281, № 17, p. 4343-4347.
386. Garanovich I. L., Szameit A., Sukhorukov A. A., Pertsch T., Krolikowski W., Nolte S., Neshev D., Tünnermann A., Kivshar Y. S. Diffraction control in periodically curved two-dimensional waveguide arrays// *Optics Express*, 2007, v. 15, № 15, p. 9737-9747.
387. Szameit A., Garanovich I. L., Heinrich M., Sukhorukov A. A., Dreisow F., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Kivshar Y. S. Observation of two-dimensional dynamical localization of light// *Physical Review Letters*, 2010, v. 104, № 22, p. 223903.
388. Eisenberg H. S., Silberberg Y., Morandotti R., Aitchison J. S. Diffraction management// *Physical Review Letters*, 2000, v. 85, № 9, p. 1863-1866.
389. Ablowitz M. J., Musslimani Z. H. Discrete diffraction managed spatial solitons// *Physical Review Letters*, v. 87, № 25, p. 254102.
390. Szameit A., Garanovich I. L., Heinrich M., Minovich A., Dreisow F., Sukhorukov A. A., Pertsch T., Neshev D. N., Nolte S., Krolikowski W., Tünnermann A., Mitchell A., Kivshar Y. S. Observation of diffraction-managed discrete solitons in curved waveguide arrays// *Physical Review A*, 2008, v. 78, № 3, p. 031801.
391. Staliunas K., Herrero R. Nondiffractive propagation of light in photonic crystals// *Physical Review E*, 2006, v. 73, № 1, p. 016601.
392. Staliunas K., Herrero R., de Valcarcel G. J. Arresting soliton collapse in two-dimensional nonlinear Schrödinger systems via spatiotemporal modulation of the external potential// *Physical Review A*, 2007, v. 75, № 1, p. 011604.
393. Staliunas K., Masoller C. Subdiffractive light in bi-periodic arrays of modulated fibers// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 22, p. 10669-10677.
394. Szameit A., Kartashov Y. V., Dreisow F., Heinrich M., Pertsch T., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Lederer F., Torner L. Inhibition of light tunneling in waveguide arrays// *Physical Review Letters*, 2009, v. 102, № 15, p. 153901.
395. Luo X., Xie Q., Wu B. Nonlinear coherent destruction of tunneling// *Physical Review A*, 2007, v. 76, № 5, p. 051802(R).
396. Szameit A., Kartashov Y. V., Heinrich M., Dreisow F., Keil R., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Lederer F., Torner L. Nonlinearity-induced broadening of resonances in dynamically modulated couplers// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 18, p. 2700-2702.

397. Kartashov Y. V., Szameit A., Vysloukh V. A., Torner L. Light tunneling inhibition and anisotropic diffraction engineering in two-dimensional waveguide arrays// *Optics Letters*, 2009, v. 34, № 19, p. 2906-2908.
398. Zhang P., Efremidis N. K., Miller A., Hu Y., Chen Z. G. Observation of coherent destruction of tunneling and unusual beam dynamics due to negative coupling in three-dimensional photonic lattices// *Optics Letters*, 2010, v. 35, № 19, p. 3252-3254.
399. Lobanov V. E., Kartashov Y. V., Torner L. Light bullets by synthetic diffraction-dispersion matching// *Physical Review Letters*, 2010, v. 105, № 3, p. 033901.
400. Matuszewski M., Garanovich I. L., Sukhorukov A. A. Light bullets in nonlinear periodically curved waveguide arrays// *Physical Review A*, 2010, v. 81, № 4, p. 043833.
401. Anderson P. W. Absence of diffusion in certain random lattices// *Physical Review*, 1958, v. 109, № 5, p. 1492-1505.
402. Lee P. A., Ramakrishnan T. V. Disordered electronic systems// *Reviews of Modern Physics*, 1985, v. 57, № 2, p. 287-337.
403. Sheng P. *Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena* - New York: Springer, 2006, 349 c.
404. Mott N. F., Twose W. D. The theory of impurity conduction// *Advances in Physics*, 1961, v. 10, № 38, p. 107-163.
405. Abrahams E., Anderson P. W., Licciardello D. C., Ramakrishnan T. V. Scaling theory of localization: absence of quantum diffusion in two dimensions// *Physical Review Letters*, 1979, v. 42, № 10, p. 673-676.
406. Weaver R. L. Anderson localization of ultrasound// *Wave Motion*, 1990, v. 12, № 2, p. 129-142.
407. Dalichaouch R., Armstrong J. P., Schulz S., Platzman P. M., McCall S. L. Microwave localization by two-dimensional random scattering// *Nature*, 1991, v. 354, № 6348, p. 53-55.
408. Bruinsma R., Coppersmith S. N. Anderson localization and breakdown of hydrodynamics in random ferromagnets// *Physical Review B*, 1986, v. 33, № 9, p. 6541-6544.
409. Billy J., Josse V., Zuo Z. C., Bernard A., Hambrecht B., Lugan P., Clement C., Sanchez-Palencia L., Bouyer P., Aspect A. Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder// *Nature*, 2008, v. 453, № 7197, p. 891-894.
410. Sanchez-Palencia L., Lewenstein M. Disordered quantum gases under control// *Nature Physics*, 2010, v. 6, № 2, p. 87-95.
411. John S. Electromagnetic absorption in a disordered medium near a photon mobility edge// *Physical Review Letters*, 1984, v. 53, № 22, p. 2169-2172.
412. Wiersma D. S., Bartolini P., Lagendijk A., Righini R. Localization of light in a disordered medium// *Nature*, 1997, v. 390, № 6661, p. 671-673.

413. Störzer M., Gross P., Aegerter C. M., Maret G. Observation of the critical regime near Anderson localization of light// *Physical Review Letters*, 2006, v. 96, № 6, p. 063904.
414. Chabanov A. A., Stoytchev M., Genack A. Z. Statistical signatures of photon localization// *Nature*, 2000, v. 404, № 6780, p. 850-853.
415. de Raedt H., Lagendijk A., de Vries P. Transverse localization of light// *Physical Review Letters*, 1989, v. 62, № 1, p. 47-50.
416. Pertsch T., Peschel U., Kobelke J., Schuster K., Bartelt H., Nolte S., Tünnermann A., Lederer F. Nonlinearity and disorder in fiber arrays// *Physical Review Letters*, v. 93, № 5, p. 053901.
417. Schwartz T., Bartal G., Fishman S., Segev M. Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices// *Nature*, 2007, v. 466, № 7131, p. 52-55.
418. Lahini Y., Avidan A., Pozzi F., Sorel M., Morandotti R., Christodoulides D.N., Silberberg Y. Anderson localization and nonlinearity in one-dimensional disordered photonic lattices// *Physical Review Letters*, 2008, v. 100, № 1, p. 013906.
419. Szameit A., Kartashov Y. V., Zeil P., Dreisow F., Heinrich M., Keil R., Nolte S., Tünnermann A., Vysloukh V. A., Torner L. Wave localization at the boundary of disordered photonic lattices// *Optics Letters*, 2010, v. 35, № 8, p. 1172-1174.
420. Jovic D. M., Kivshar Y. S., Denz C., Belic M. R. Anderson localization of light near boundaries of disordered photonic lattices// *Physical Review A*, 2011, v. 83, № 3, p. 033813.
421. Molina M. I. Boundary-induced Anderson localization in photonic lattices// *Physics Letters A*, 2011, v. 375, № 20, p. 2056-2058.
422. Jovic D., Belic M. R., Kivshar Y. S., Denz C. Disorder-induced localization of light near edges of nonlinear photonic lattices// *Optics Communications*, 2012, v. 285, № 3, p. 352-355.
423. Capeta D., Radic J., Szameit A., Segev M., Buljan H. Anderson localization of partially incoherent light// *Physical Review A*, 2011, v. 84, № 1, p. 011801.
424. Lahini Y., Bromberg Y., Christodoulides D. N., Silberberg Y. Quantum correlations in two-particle Anderson localization// *Physical Review Letters*, 2010, v. 105, № 16, p. 163905.
425. Albert M., Leboeuf P. Localization by bichromatic potentials versus Anderson localization// *Physical Review A*, 2010, v. 81, № 1, p. 013614.
426. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A. Anderson localization of solitons in optical lattices with random frequency modulation// *Physical Review A*, 2005, v. 72, № 2, p. 026606.



427. Martin L., Di Giuseppe G., Perez-Leija A., Keil R., Dreisow F., Heinrich M., Nolte S., Szameit A., Abouraddy A. F., Christodoulides D. N., Saleh B. E. A. Anderson localization in optical waveguide arrays with off-diagonal coupling disorder// *Optics Express*, 2011, v. 19, № 14, p. 13636-13646.
428. Lahini Y., Bromberg Y., Shechtman Y., Szameit A., Christodoulides D. N., Morandotti R., Silberberg Y. Hanbury Brown and Twiss correlations of Anderson localized waves// *Physical Review A*, 2011, v. 84, № 4, p. 041806.
429. Stützer S., Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Tünnermann A., Nolte S., Lewenstein M., Torner L., Szameit A. Anderson cross-localization// *Optics Letters*, 2012 (в печати).
430. Castano E., Lee Y. C. Effect of finite width on Anderson localization in a strip// *Chinese Journal of Physics*, 1985, v. 23, № 2, p. 245-251.
431. Jovic D. M., Belic M. R., Denz C. Transverse localization of light in nonlinear photonic lattices with dimensionality crossover// *Physical Review A*, 2011, v. 84, № 4, p. 043811.
432. Naether U., Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Nolte S., Tünnermann A., Torner L., Szameit A. Observation of the gradual transition from one-dimensional to two-dimensional Anderson localization// *Optics Letters*, 2012, v. 37, № 4, p. 593-595.
433. Mantsyzov B. I. Gap  $2\pi$  pulse with an inhomogeneously broadened line and an oscillating solitary wave// *Physical Review A*, 1995, v. 51, № 6, p. 4939-4943.
434. Mantsyzov B. I., Silnikov R. A. Unstable excited and stable oscillating gap  $2\pi$  pulses// *Journal of the Optical Society of America B*, 2002, v. 19, № 9, p. 2203-2207.
435. Mantsyzov B. I., Melnikov I. V., Aitchison J. S. Controlling light by light in a one-dimensional resonant photonic crystal// *Physical Review E*, 2004, v. 69, № 5, p. 055602(R).
436. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Bragg-type soliton mirror// *Optics Express*, 2006, v. 14, № 4, p. 1576-1581.
437. Szameit A., Trompeter H., Heinrich M., Dreisow F., Peschel U., Pertsch T., Nolte S., Lederer F., Tünnermann A. Fresnel's laws in discrete optical media// *New Journal of Physics*, 2008, v. 10, p. 103020.
438. Kominis Y., Hizanidis K. Power-dependent reflection, transmission, and trapping dynamics of lattice solitons at interfaces// *Physical Review Letters*, 2009, v. 102, № 13, p. 133903.
439. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Disorder-induced soliton transmission in nonlinear photonic lattices// *Optics Letters*, 2011, v. 36, № 4, p. 466-468.
440. Abdullaev F. *Theory of solitons in inhomogeneous media* - New York: Willey, 1994, 192 c.
441. Kartashov Y. V., Vysloukh V. A., Torner L. Brownian soliton motion// *Physical Review A*, 2008, v. 77, № 5, p. 051802(R).

442. Folli V., Conti C. Frustrated Brownian motion of nonlocal solitary waves// Physical Review Letters, 2010, v. 104, N<sup>o</sup> 19, p. 193901.
443. Cottrell D. M., Craven J. M., Davis J. A. Nondiffracting random intensity patterns// Optics Letters, 2007, v. 32, N<sup>o</sup> 3, p. 298-300.