

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики микроструктур Российской академии наук

На правах рукописи

Хаймович Иван Михайлович

**Влияние сверхпроводящих корреляций и особенностей
зонной структуры на спектральные и транспортные
свойства квазидвумерных Ферми-систем**

01.04.07 – Физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

д. ф.-м. н.

Мельников Александр Сергеевич

Содержание

Введение	5
Глава 1. Индуцированные сверхпроводящие корреляции в двумерных и ква-	
зидвумерных системах в контакте с объёмным сверхпроводником	23
1.1. Введение	23
1.2. Феноменологический подход к формированию сверхпроводящей индуцирован-	
ной щели	23
1.3. Метод туннельного гамильтониана	28
1.3.1. Качественное рассмотрение	33
1.3.2. Когерентное туннелирование в чистом пределе	34
1.3.3. Некогерентное туннелирование в чистом пределе	36
1.3.4. Особенности многозонного случая в чистом пределе	37
1.3.5. Грязный предел	41
1.4. Выводы к первой главе	42
Глава 2. Электронная структура вихревых состояний в двумерных и квази-	
двумерных системах с индуцированной сверхпроводимостью	44
2.1. Введение	44
2.2. Электронная структура локализованных состояний в коре вихря в графене .	47
2.2.1. Уравнения Боголюбова-де Жена для вихревого состояния	48
2.2.2. Основные свойства нулевых мод: точное решение и критерий существо-	
вания	49
2.2.3. Трансформация мод при больших значениях уровня Ферми. Квази-	
классическое приближение для малых угловых моментов $\nu \ll k_N \xi_{2D}$.	51
2.2.4. Трансформация мод при больших значениях уровня Ферми. Квази-	
классическое приближение для больших угловых моментов $\nu \gg 1$. . .	53
2.2.5. Численное моделирование. Метод и результаты	55
2.3. Электронная структура локализованных состояний в коре вихря в двумерной	
системе с индуцированной сверхпроводимостью	59
2.3.1. Индуцированные сверхпроводящие потенциалы	60
2.3.2. Метод разделения масштабов	65
2.3.3. Результаты в чистой системе при когерентном туннелировании	69

2.3.4.	Влияние примесей в барьере. Некогерентное туннелирование	74
2.3.5.	Результаты в грязном пределе	76
2.3.6.	Численное решение уравнений. Метод и результаты	78
2.4.	Выводы ко второй главе	82
Глава 3. Влияние эффекта близости на транспортные свойства краевых состояний в структурах в режиме квантового эффекта Холла		
		84
3.1.	Введение	84
3.2.	Особенности транспорта в двумерных структурах “сверхпроводник - нормальный металл” в квантующих магнитных полях	86
3.2.1.	Транспортные моды, локализованные на границах раздела в квантующих магнитных полях	91
3.2.2.	Метод матриц рассеяния	95
3.2.3.	Результаты. Квантовый предел	98
3.2.4.	Применение теории случайных матриц для вычисления транспортных характеристик	101
3.2.5.	Особенности среднего значения кондактанса в области параметров, где нарушается однонаправленный характер движения краевых мод	104
3.3.	Трансформация спектра краевых состояний в двумерном топологическом изоляторе под сверхпроводником	107
3.3.1.	Модель	110
3.3.2.	Модификация спектра краевых состояний топологического изолятора сверхпроводником	111
3.3.3.	Численное моделирование спектра топологического изолятора под сверхпроводником	115
3.4.	Выводы к третьей главе	118
Заключение		120
Список публикаций автора по теме диссертации		123
Литература		125
Приложение А.		139
A.1.	Вывод уравнений (1.16), (1.18)	139

Приложение Б.	140
Б.1. Усреднение функций Грина вихревого состояния сверхпроводника по направлениям траекторий	140
Приложение В.	142
В.1. Матричная декомпозиция	142
В.2. Вывод функции распределения матрицы по инвариантной мере на компактной симплектической группе $\text{Sp}(2N)$	143
В.3. Усреднение величин, зависящих от случайных матриц, по мере Хаара на группе	145
В.3.1. Вычисление среднего значения кондуктанса G_{SN}	146
В.3.2. Вычисление дисперсии кондуктанса σ_G^2	147
В.4. Решёточная регуляризация двухзонной модели двумерного топологического изолятора	150

Введение

Актуальность и степень разработанности темы исследования

Явление сверхпроводимости вызывает неизменный интерес исследователей уже более ста лет, начиная с первого экспериментального наблюдения этого явления Хейке Камерлинг-Оннесом [1] в 1911 году. Основной причиной этого интереса является не только разнообразие физических эффектов, связанных со сверхпроводниками, но и открывающиеся возможности их практического применения. На сегодняшний момент существует несколько общепризнанных теоретических подходов к изучению сверхпроводимости, как феноменологических, развитых Фрицем и Хайнцем Лондонами [2], а затем в 1950 году Л. Д. Ландау и В. Л. Гинзбургом [3], так и микроскопических (например, теория Бардина, Купера и Шриффера [4]). Как следует из последней, явление сверхпроводимости напрямую связано с открытием энергетической щели Δ в спектре квазичастичных возбуждений вблизи поверхности Ферми при переходе металла в сверхпроводящее состояние. Одной из определяющих особенностей сверхпроводников является проявление ими идеально диамагнитных свойств, существенно отличных от предполагавшихся изначально свойств идеальных проводников. Поэтому важным направлением исследований в этой области стало изучение поведения сверхпроводящих соединений в магнитном поле \mathbf{H} , начатое экспериментально Камерлинг-Оннесом [5] вскоре после открытия сверхпроводимости. Хорошо известно, что сильное внешнее магнитное поле приводит к разрушению сверхпроводимости (см., например, книгу В. В. Шмидта [6]) как вследствие орбитального эффекта распада куперовских пар за счёт силы Лоренца, так и из-за переворота спина электронов, входящих в куперовскую пару, магнитным полем. Однако при малых значениях поля \mathbf{H} в сверхпроводниках наблюдается эффект Мейсснера-Оксенфельда [7], заключающийся в экранировке внешнего магнитного поля на сравнительно малом расстоянии, называемом глубиной проникновения λ_S , вблизи поверхности сверхпроводящего образца и выталкивании этого поля из односвязного образца при переходе в сверхпроводящее состояние. При достижении критического значения поля, сверхпроводник переходит в состояние, при котором одновременно сосуществуют нормальные и сверхпроводящие области. Сверхпроводники первого рода характеризуются скачкообразным переходом в такое состояние с образованием зародышей нормальной фазы конечных размеров. Конфигурация нормальных областей при этом определяется геометрией образца и может иметь довольно сложную структуру. В сверхпроводниках второго рода энергия границы раздела между нормальной и сверхпроводящей фазами отрицательна. И при приложении магнитных полей с амплитудой больше так называемого нижнего критического поля H_{c1} эти соединения характеризуются

проникновением магнитного поля в виде квантов магнитного потока $\Phi_0 = \pi\hbar c/e \simeq 2.07 \cdot 10^{-7}$ Гс·см² с одновременным возбуждением сверхпроводящих вихревых токов. Такая конфигурация токов приводит к изменению фазы сверхпроводящего параметра порядка на 2π при обходе вокруг этого образования по замкнутому контуру и называется вихрем Абрикосова [8]. Дальнейшее увеличение магнитного поля приводит к проникновению дополнительных вихревых нитей и постепенному подавлению среднего значения сверхпроводящего параметра порядка в образце. При полях выше верхнего критического поля H_{c2} происходит фазовый переход второго рода образца в нормальное состояние, и сверхпроводимость исчезает.¹

Другой важной особенностью сверхпроводников (S) является так называемый эффект близости [9], который проявляется при нанесении пленки нормального металла (N) на сверхпроводник. Основным проявлением этого эффекта является частичное подавление параметров сверхпроводника, таких как критическая температура перехода и амплитуда сверхпроводящей щели, с одновременным проникновением сверхпроводящих корреляций в нормальную часть системы. При этом расстояние от границы, на котором сверхпроводящий параметр порядка Δ восстанавливает своё объёмное значение Δ_∞ , определяется длиной когерентности в сверхпроводнике ξ_S , которая в случае больших длин свободного пробега $\ell \gg \xi_S$ выражается формулой $\xi_S = \hbar v_S / \Delta_\infty$ через скорость Ферми v_S сверхпроводника и приведённую постоянную Планка \hbar . Масштаб проникновения сверхпроводимости в нормальную область оказывается порядка длины когерентности в ней $\xi_N = \hbar v_N / T$, где T , v_N – температура и скорость Ферми металла. Благодаря эффекту близости в N/S - контакте может происходить конверсия нормального квазичастичного тока, втекающего в сверхпроводник, в сверхтекучий ток (сверхток) куперовских пар в S-области. Такая конверсия носит название андреевского отражения [10–12] и происходит при падении электронов с энергиями E меньше амплитуды сверхпроводящей щели $E < \Delta$ на сверхпроводник с одновременным отражением квазичастиц типа “дырка” с противоположной групповой скоростью и зарядом в N-область.

Одно из важных следствий *эффекта близости* было предсказано в 1968 году Уильямом Макмилланом [13]. Состоит оно в том, что в тонкой плёнке нормального металла с толщиной d гораздо меньше длины когерентности $d \ll \xi_N$ за счёт эффекта близости со сверхпроводником в однородном состоянии наводится сверхпроводящая энергетическая щель Δ_{ind} в спектре квазичастичных возбуждений. Эта щель наряду со собственной щелью $\Delta > \Delta_{ind}$ в сверхпроводнике формирует дополнительную особенность в зависимости плотности состоя-

¹ Необходимо отметить, что в этом рассмотрении мы не учитываем наличие границ и говорим про объёмную сверхпроводимость. В магнитных полях вплоть до третьего критического поля в отсутствие объёмной сверхпроводимости, могут существовать сверхпроводящие каналы, прижатые к краям образца.

ний от энергии как в сверхпроводнике, так и в нормальной плёнке. Кроме того, именно этой наведённой щелью определяется критический ток джозефсоновского SNS -контакта [14].

В последнее десятилетие были получены соединения, которые можно считать предельным случаем тонких плёнок, рассмотренных Макмилланом. Одним из первых примеров таких соединений можно назвать одноатомный слой кристалла графита, названный авторами, впервые получившими его в 2004 году [15], графеном (graphene). Теоретическое изучение графена как слоя графита началось с работы Филиппа Рассела Уоллоса [16] задолго до экспериментального получения. Графен – это монослой атомов углерода, упакованных посредством sp^2 - гибридизации орбиталей в двумерную гексагональную кристаллическую решётку Браве с базисом из 2 подрешёток. Графен имеет конические особенности структуры энергетического спектра в точках соприкосновения валентной зоны и зоны проводимости в углах шестиугольной зоны Бриллюэна и линейную дисперсию электронных возбуждений (см. Рис. 1а). Благодаря эквивалентности конических точек, связанных вектором обратной решётки графена (см. белые и чёрные круги на Рис. 1а), чаще всего низкоэнергетическую дисперсию графена рассматривают вблизи двух неэквивалентных волновых векторов \mathbf{K} и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$. Поверхности Ферми, собранные в окрестности указанных векторов из отдельных Ферми-листов вблизи эквивалентных углов первой зоны Бриллюэна, называются долинами. Дисперсия типа ультрарелятивистских частиц определяет высокую подвижность носителей заряда в графене [17] (до $2 \cdot 10^5$ см²/В·с) и нетривиальные модификации магнитных явлений, такие как полупелый квантовый эффект Холла и неэквидистантные уровни Ландау [18, 19]. Уже через год после получения графена группой Андрея Гейма были получены одноатомные слои других соединений [20], проявляющих как изоляционные (BN , MoS_2), так и сверхпроводящие свойства ($NbSe_2$, $Bi_2Sr_2CaCu_2O_x$). Планарная геометрия транспорта во всех описанных выше низкоразмерных структурах способствует применению их в электронике, так как позволяет непосредственно влиять на транспортные и термодинамические характеристики с помощью эффекта поля (приложения затворного напряжения), внешнего магнитного поля и легирования другими соединениями. Кроме того, моноатомные слои различных соединений чаще всего прозрачны в видимом диапазоне [21, 22], что может быть использовано для создания оптически прозрачных элементов электроники.

Альтернативная реализация низкоразмерного транспорта имеет место в топологических изоляторах (ТИ), существование которых было предсказано в работах [23, 24]. Основной особенностью ТИ является наличие электронных состояний в приповерхностных слоях, устойчивых к слабому локальному беспорядку, вдоль которых носители заряда могут перемещаться без потери энергии. При этом объёмный транспорт в этих соединениях практически

отсутствует. Необычные свойства ТИ связаны с топологическим инвариантом его гамильтониана (см. обзор [25] и список цитированной литературы в нём). Ненулевое значение этой величины соответствует наличию безмассовых элементарных возбуждений на границе образца наряду с частицами с квадратичным спектром в объёме, отделённым от уровня Ферми щелью. Причём направление распространения приповерхностных мод определяет проекцию собственного углового момента (спина) [26]. Щель в объёмном спектре элементарных возбуждений и свойство существования токнесущих мод на границе устойчиво к слабым локальным возмущениям [27], не нарушающим симметрию обращения времени: исчезновение поверхностных состояний при изменении параметров системы может происходить лишь одновременно с закрытием щели в спектре в объёме [28]. Экспериментально краевые состояния такого типа были обнаружены в квантовых ямах на основе $CdHgTe$ [27]. В трёхмерном случае безмассовые приповерхностные возбуждения с линейным спектром типа Дирака [29], реализуются, например, в соединениях висмута $Bi_{1-x}Sb_x$ [30], Bi_2Se_3 [31] и Bi_2Te_3 [32], названных трёхмерными (3D) топологическими изоляторами. А связь направления тока краевых состояний со спином даёт возможность найти для них применение в спинтронике.

Однако непосредственное применение как графена, так и в ТИ, в электронных устройствах затруднено. Отсутствие запрещённой зоны в графене и наличие конических особенностей в его спектре не позволяет полностью подавить квазичастичный ток из-за клейновского туннелирования, поэтому напрямую его нельзя использовать при создании полевых транзисторов. Топологические изоляторы, к сожалению, могут переносить относительно небольшие транспортные токи из-за малой ширины запрещённой зоны объёмного спектра.

Кроме того, малые размеры наноструктур и жёсткие требования к отводу тепла от них заставляют использовать низкие температуры и сверхпроводящие контакты в рассматриваемых системах. Ожидается, что дальнейшие исследования в этом направлении позволят создавать электронные схемы, в которых токи будут переноситься носителями заряда без потери энергии, что должно, в частности, привести к снижению количества тепла, которое вырабатывают современные вычислительные машины. Поэтому научный интерес представляет исследование эффекта близости в таких структурах с низкоразмерным транспортом без собственного сверхпроводящего спаривания.

Особенности в спектре нормальных возбуждений графена и топологических изоляторов приводят к новым эффектам при контакте их со сверхпроводниками. Так в литературе по изучению контактов ТИ с синглетными сверхпроводниками большое внимание уделяется появлению эффективных триплетных корреляций [33]. Триплетный характер наведённой сверхпроводимости является следствием сильного спин-орбитального взаимодействия в ТИ.

Однако при этом в большинстве работ как по изучению двумерных (2D) [34–36], так и трёхмерных [33, 37–41] топологических изоляторов наведённый сверхпроводящий потенциал конструируется феноменологически в предположении простейшей его скалярной структуры без учёта замешивания различных подзон спектра ТИ сверхпроводящими корреляциями. Основной целью этих работ является предложение экспериментальной реализации так называемых майорановских фермионов [42], частиц, являющихся в то же время своими античастицами. По словам авторов, эти частицы могут быть применены для квантовых вычислений в качестве структурной единицы для построения квантового компьютера. Однако в данной работе мы не будем касаться этого вопроса. В литературе было предсказано существование майорановских фермионов как вблизи центров вихрей в киральных сверхпроводниках [43], так и на границе нормального металла и топологического изолятора с индуцированной сверхпроводимостью [33]: на плоской границе и в вихре Абрикосова [44, 45].

Полное *микроскопическое* описание индуцированной сверхпроводимости в 2D системе является непростой задачей. Её сложность связана с проблемой сшивки волновых функций подсистем с существенно различной кристаллической структурой и поверхностями Ферми. Одно из первых решений этой проблемы приведено в работе А. Ф. Волкова с голландскими соавторами 1995 года [14]. В этой статье был рассмотрен джозефсоновский контакт с двумерным электронным газом (ДЭГ) в качестве нормальной прослойки и в рамках приближения эффективной массы обеих подсистем было показано, что сверхтекучий ток в этом контакте определяется щелью в спектре ДЭГ, наведённой с помощью эффекта близости. При этом сшивка волновых функций сверхпроводника и ДЭГ была произведена по непрерывности с учётом дельта-функционального барьера, разделяющего подсистемы и однородного в плоскости контакта. Обобщение этого метода на случай многозонных сверхпроводников рассмотрено в ряде работ [46, 47], где для сшивки волновых функций были применены феноменологические граничные условия на амплитуды функций и их производные на границе нормального металла и многозонного сверхпроводника. Однако вопрос применимости этих граничных условий остаётся открытым, поскольку они не имеют последовательного микроскопического обоснования.

Другой класс микроскопических подходов к решению проблемы сшивки волновых функций сверхпроводника и нормальной подсистемы основан на методе туннельного гамильтониана и развит в работах [48, 49] для описания спектра состояний в сверхпроводнике, локализованных на резонансной примеси. Метод туннельного гамильтониана широко применяется для вычисления наведённой сверхпроводимости не только вблизи уединённых примесей, но и в объёмных нормальных системах (см., например, [50–52]). Он позволяет описать взаи-

модействие между системами с различными зонными структурами и поверхностями Ферми с помощью коэффициентов туннелирования между подзонами их спектров. При этом применяются как решёточные модели, учитывающие кристаллическую структуру, так и непрерывное описание подсистем в длинноволновом пределе. В решёточном представлении кристаллические решётки S и N подсистем рассматриваются чаще всего идеально согласованными, когда квазиимпульс вдоль границы раздела сохраняется. Этот метод применён в том числе для описания SN-контактов с такими многозонными материалами, как ТИ [53–55] и сверхпроводящие пниктиды [56]. Однако в реальных контактах двух разных соединений расположение атомов вблизи поверхности отличается, и решётки могут быть не согласованы, поэтому бывает предпочтительнее рассматривать подсистемы в непрерывном пределе [57, 58].

В двумерных топологических изоляторах микроскопические вычисления наведённого сверхпроводящего параметра порядка, основанные на методе туннельного гамильтониана, были рассмотрены в ряде численных [53, 54] и аналитических [44, 45, 57, 59] работ. Большинство из них посвящено изучению эффектов индуцированной триплетной компоненты щели [44, 45, 53, 59], рассмотренных выше. В других работах пренебрегается возможным замешиванием подзон спектра ТИ сверхпроводником [57]. Единственная работа [54], где предполагается возможность туннелирования с изменением угловой симметрии состояния, посвящена прямым численным расчётам идеального андреевского отражения в такой системе, амплитуда которого равна единице и не зависит от параметров системы и степени беспорядка.

Однако, наряду с рассмотренными в литературе вопросами, важной проблемой является устойчивость “топологически защищённых” краевых состояний в ТИ к сверхпроводящим корреляциям при учёте замешивания подзон спектра ТИ сверхпроводником. Этому вопросу посвящена работа [A1] соискателя с соавторами, где аналитически показано, что эффективный сверхпроводящий параметр порядка имеет матричную структуру в пространстве подзон размерного квантования 2D ТИ. В результате сверхпроводящая энергетическая щель в спектре квазичастичных мод, прижатых к краю 2D топологического изолятора, может зависеть от направления распространения этих мод. Такое анизотропное поведение сверхпроводящей щели может приводить к формированию локализованных краевых андреевских состояний и блокировать квазичастичный транспорт по этим каналам вдоль определённых направлений.

Что касается эффекта близости в графеновых монослоях, то из-за особенностей зонной структуры и спектра нормальных возбуждений на границе графена со сверхпроводником (см. геометрию контакта на Рис. 1б) возникает нетривиальной модификация андреевского отражения [61], характеризующаяся, наряду с обычным рассеянием дырок назад, также зеркальным отражением вблизи конической точки. Такая модификация отражения дырочных

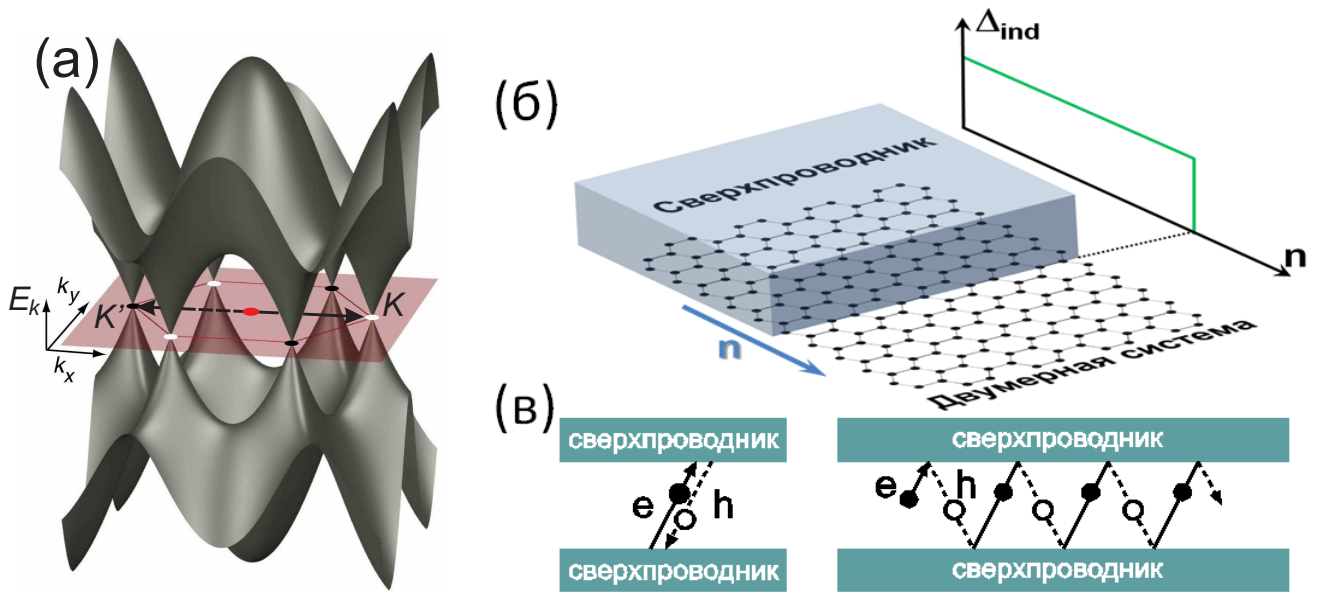


Рис. 1. (а) Дисперсионная зависимость энергии E зоны проводимости и валентной зоны графена от волнового вектора (k_x, k_y) . Одинаковым цветом обозначены эквивалентные конические точки (долины). Волновые вектора \mathbf{K} и \mathbf{K}' соответствуют двум неэквивалентным долинам; (б) Схематичное изображение двумерной системы, частично находящейся под сверхпроводящим электродом, частично свободно лежащей. \mathbf{n} – нормаль к плоской границе раздела, направленная из области под сверхпроводником в нормальную область; (в) Пример андреевских состояний между двумя сверхпроводниками для обычного и зеркального андреевского отражений. Чёрными (белыми) кружками обозначены электронные (дырочные) возбуждения. Изображения (а) и (в) взяты из работы. [60]

квазичастиц от границы графена со сверхпроводником (точнее, с графеном под сверхпроводящим электродом, см. Рис. 1б) реализуется при малых значениях энергии Ферми μ по сравнению с энергией падающего электрона E . Причиной этой модификации является то, что при $\mu < E$ дырочные возбуждения принадлежат валентной зоне, а не зоне проводимости, как в случае $\mu > E$, поэтому их групповая скорость сонаправлена с импульсом. Существование зеркального андреевского отражения приводит, например, к особенностям теплового транспорта вдоль гетерограниц в джозефсоновских контактах на основе графена [62]: в этом случае формируются андреевские краевые состояния (см. Рис. 1в), переносящие тепло без зарядового транспорта, а термический кондактанс в этом случае начинает зависеть от разности фаз сверхпроводников. Экспериментальное исследование эффекта близости в графене проводилось в целом ряде работ [63–67]. В основном, эти работы посвящены исследованию джозефсоновских контактов на основе графена (G), однако есть исследования транспорта и в SG-контактах [65]. В работах первого типа были продемонстрированы как наличие ненулевого критического сверхпроводящего тока [63, 64] и его перестройка с помощью напряжения

на затворе, так и зеркальное андреевское отражение в длинных SGS-контактах в диффузионном пределе вблизи конической точки [67]. В SG-контакте было наблюдеено туннелирование без отражения (reflectionless tunneling) [65] и изменение квантования дифференциальной проводимости SG и SGS структур в режиме квантового эффекта Холла [66, 67].

Необходимо отметить, что проблема влияния сильных магнитных полей на эффект близости и андреевское отражение вызывает неизменный интерес как теоретиков [68–70], так и экспериментаторов (см. работу [71] и список использованной литературы в ней), не только в графене. Увеличение магнитного поля изменяет характер андреевского отражения, поскольку происходит локализация транспорта вдоль краевых состояний в режиме квантового эффекта Холла (КЭХ) и разделение падающих и отражённых от сверхпроводника квазичастиц. При бóльших значениях магнитных полей сверхпроводимость подавляется полностью. Однако для теоретического изучения транспорта в таких системах применяется в основном квазиклассическое описание мод, локализованных на гетерограницах, в виде скачущих циклотронных орбит [68–70], что ограничивает применимость результатов случаем достаточно малых магнитных полей, соответствующих большому количеству $N \gg 1$ электронных краевых мод на краю нормальной подсистемы. Изучение квантового режима $N = 1$ было проведено лишь в работе Ахмерова и Бинаккера [72] для SG-контакта в пренебрежении перерасеяния электронных и дырочных мод, локализованных на границах графена с изолятором, в гибридные моды вдоль границы раздела SG. В работе соискателя с соавторами [A2] проведено обобщение предыдущих теоретических результатов и рассчитана дифференциальная проводимость (кондактанс) N/S контактов на основе двумерного электронного газа и графена в режиме КЭХ в широких пределах магнитных полей и уровней Ферми μ (от квантового $N = 1$ до квазиклассического $N \gg 1$ предела) в зависимости от ширины контакта W . Для описания транспорта с учётом перерасеяния мод, локализованных на краю образца, в моды N/S -границы применён подход Буттикера - Ландауэра (см. книги [73, 74] и литературные источники в них), основанный на методе матриц рассеяния. Это позволило преодолеть ограничения квазиклассического рассмотрения. В работе было рассмотрено отличие систем на основе двумерного электронного газа и графена. В пределе сильных магнитных полей (квантовом пределе), когда транспорт определяется одной $N = 1$ парой мод, распространяющихся вдоль каждой границы, было показано, что дифференциальные проводимости этих двух систем имеют наибольшее отличие. Так, кондактанс контакта S-ДЭГ осциллирует в зависимости от ширины контакта W , в то время как в графене таких осцилляций не найдено. Зато есть дополнительная зависимость кондактанса от взаимной ориентации границ графена с изолятором, связанная с особенностями зонной структуры графена в пространстве долин.

Вне квантового предела $N > 1$ в работе [A2] рассмотрено влияние беспорядка в областях трансформации краевых мод различных границ и найдены универсальные выражения для среднего значения кондактанса и его флуктуаций в зависимости от числа мод $2N$ каждой границы и (в случае умеренной концентрации примесей) от средних коэффициентов трансформации мод.² В отличие от прямого численного моделирования, представленного в работе [75], где был описан полностью диффузный транспорт в SG-контакте, в работе [A2] рассматривался случай, когда примеси сосредоточены в области трансформации краевых мод около N/S гетерограницы. Именно в этих областях чаще всего появляются рассеиватели в эксперименте из-за нанесения сверхпроводящих контактов, кроме того, они вносят наибольший вклад в транспорт. Отдельно был рассмотрен случай параметров, когда химический потенциал лежит немного ниже энергии $N + 1$ -ого объёмного уровня Ландау в графене. Из-за немонотонности спектра Ландау около границы с изолятором в графене в дополнение к N электронным модам, распространяющимся в определённом направлении, появляется дополнительная пара мод, движущихся в противоположные стороны [76, 77]. Показано, что существование таких дополнительных краевых мод приводит к увеличению кондактанса SG-контакта. Иными словами, дифференциальная проводимость в зависимости от фактора заполнения уровней Ландау в области между N -тым и $N + 1$ -вым уровнями демонстрирует немонотонный переход от одного квантованного значения G_0N к другому $G_0(N + 1)$ через плато на уровне $(N + 2)$ квантов проводимости. Предложенная картина может быть одним из возможных объяснений последующих экспериментальных результатов [66, 67], где наблюдалось, в частности, немонотонное поведение кондактанса в зависимости от фактора заполнения, когда энергия Ферми находится вблизи одного из уровней Ландау в объёме.

Вместе с тем, как было отмечено выше, магнитные поля влияют не только на эффект близости, но и на состояние сверхпроводника. Так, в магнитных полях, выше первого критического H_{c1} , в сверхпроводник второго рода проникают вихри Абрикосова. Это проникновение сопровождается существенным подавлением сверхпроводящей щели вблизи центров вихрей³ из-за появления там локализованных состояний. Свойства сверхпроводящего вихревого состояния исследуются уже около полувека и одной из важнейших задач в этой области является изучение электронной структуры локализованных состояний, поскольку эти состояния определяют низкотемпературное поведение термодинамических и транспортных характеристик сверхпроводников в магнитном поле. Как известно из классической работы

² Во введении мы ограничиваемся качественным описанием. Строгое определение указанных величин будет дано в основном тексте диссертации.

³ Далее мы будем называть эту область подавления параметра порядка кором вихря.

Кароли, де Жена и Матрикона (CdGM) [78], энергетический спектр состояний, локализованных вблизи центра каждого вихря, несущего один квант сверхпроводящего потока Φ_0 , определяется так называемой аномальной подщелевой ветвью, пересекающей уровень Ферми как функция углового момента ν волновой функции этого состояния. Энергия подщелевых уровней $\epsilon(\nu)$, соответствующих этой ветви, меняется от $-\Delta_\infty$ до $+\Delta_\infty$ при изменении углового момента ν относительно вихревой оси в бесконечных пределах. Вблизи уровня Ферми $|\epsilon(\nu)| \ll \Delta_\infty$ спектр квазичастиц в вихре линейным образом зависит от ν : $\epsilon(\nu) \simeq -\nu\Omega$, где $\Omega \approx \Delta_\infty/(k_\parallel \xi_S)$, $k_\parallel = \sqrt{k_S^2 - k_z^2}$, $k_S = p_S/\hbar$ - волновой вектор Ферми, k_z - проекция волнового вектора на ось вихря, ξ_S - длина когерентности в сверхпроводнике, а ν принимает полуцелые значения (для одноквантового вихря). Чаще всего минимальная энергия возбуждений (минимум) в смешанном состоянии сверхпроводника существенно меньше, чем в мейсснеровском состоянии: $\Omega \sim \Delta_\infty/(k_S \xi_S) \ll \Delta_\infty$, поскольку длина когерентности значительно превышает характерное расстояние между атомами $k_S \xi_S \gg 1$. При этом энергия состояний, отвечающих аномальной ветви возбуждений, является функцией лишь двух переменных: проекции импульса на ось вихря k_z и углового момента ν . Радиальное квантовое число n_R для спектра CdGM принимает нулевое значение. Спектр подщелевых мод с $n_R \neq 0$, найденный в работе Минца и Рахманова в рамках полуклассического подхода [79], не пересекает уровень Ферми, соответствует энергии вблизи края сверхпроводящей щели $\pm\Delta_\infty$ и практически сливается с непрерывным спектром делокализованных состояний [80]. Подавление сверхпроводящего параметра порядка и существование локализованных состояний является прямым следствием наличия топологического дефекта в центре вихря произвольной кратности M , определяющегося ненулевым набором фазы параметра порядка при обходе вокруг вихревой нити по контуру в окрестности кора: $\int_0^{2\pi} \frac{d \arg(\Delta)}{d\phi} d\phi = 2\pi M$. Здесь параметр порядка представлен в следующем виде $\Delta = \Delta_0(\rho)e^{iM\phi}$ в цилиндрической системе координат $\mathbf{R} = (\rho, \phi, z)$ с началом в центре вихревой нити. Необходимо отметить, что в отличие от вихря, несущего один квант потока Φ_0 , в многократных вихрях ($M \neq 1$) квантование углового момента ν , связанное с однозначностью волновой функции, зависит от завихренности $\nu + M/2 \in \mathcal{Z}$: угловой момент является целым или полуцелым в зависимости от чётности (или нечётности) M .

В двумерной системе, туннельно связанной со сверхпроводником в смешанном состоянии, также возникает некоторая вихревая структура благодаря наличию циркуляции фазы энергетической щели в коре вихря в сверхпроводящем электроде. Из-за особенностей спектра нормальных возбуждений электронная структура квазичастичных состояний в графене, локализованных вблизи вихревой нити, является нетривиальной и представляет интерес для исследователей. Так, в рамках предположения об индуцировании в графене сверхпроводящего

параметра порядка с амплитудой Δ_{ind} в работах [81–84] и работе соискателя с соавторами [A3] был рассмотрен вопрос вычисления спектра локализованных состояний в коре вихря. Особенности одночастичного гамильтониана в графене приводит к модификации условия квантования углового момента волновой функции связанного состояния вблизи M -квантового вихря: $\nu + (M - 1)/2 \in \mathcal{Z}$. Что, в свою очередь, обеспечивает существование точной нулевой моды в вихрях нечётной кратности на аномальной ветви, пересекающей уровень Ферми при $\nu = 0$. Структура электронных вихревых состояний дираковских фермионов была изучена в физике частиц для ситуации, эквивалентной в графене случаю нулевого уровня Ферми, когда коническая точка спектра лежит точно на уровне Ферми. Были найдены точные нулевые моды для одноквантового вихря [84, 85], а также подщелевой спектр квазичастичных мод в предположении о постоянном $\Delta_{ind}(\rho) = \text{const}$ или линейном $\Delta_{ind}(\rho) \sim \rho$ профиле сверхпроводящей щели [81]. Кроме того, вычисление структуры нулевых мод проводилось для многоквантовых вихрей в экситонном конденсате в бислое графена [82] и для вихрей, несущих один квант потока, в различных сверхтекучих фазах, описываемых теорией Дирака на решётке пчелиных сот [83]. В работе соискателя [A3] был аналитически и численно найден спектр локализованных мод многоквантового вихря для *произвольного* уровня Ферми. Было вычислено *точное* аналитическое решение для нулевых мод с $\nu = 0$ в вихре для *произвольной* радиальной зависимости $\Delta_{ind}(\rho)$ изотропного параметра порядка; был записан критерий существования локализованных состояний с нулевой энергией, но конечным угловым моментом. И была исследована трансформация спектра подщелевых возбуждений в вихревом состоянии графена при изменении энергии Ферми от нулевого значения $\mu = 0$ до величин, сильно превышающих амплитуду индуцированной щели $\mu \gg \Delta_{ind}$.

Наличие квазичастичной моды на уровне Ферми в вихревом состоянии графена приводит к пику локальной плотности состояний при нулевых энергиях над центром вихря⁴ и расщеплению этого пика в область конечных энергий при удалении от вихревого кора. Вдали от вихря плотность состояний восстанавливает энергетическую зависимость однородного состояния со стандартной щелевой особенностью. Для экспериментального измерения локальной плотности состояний и спектральных свойств вихревых структур в сверхпроводниках часто применяют метод сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии (СТМ/СТС) [86, 87]. Основным преимуществом техники СТМ/СТС является возможность “прямых” измерений плотности состояний образца. Однако в этом преимуществе содержатся трудности: на измеряемую дифференциальную проводимость туннельного контакта “игла микроскопа -

⁴ Соответствующий пик наблюдается в смешанном состоянии сверхпроводников на зависимости дифференциальной проводимости, измеряемой СТМ, от напряжения и называется zero-bias аномалией.

образец” в зависимости от положения над поверхностью и приложенного напряжения влияет не только плотность состояний иглы и образца, но и форма иглы, рельеф образца и качество его поверхности. Влияние плотности состояний иглы и рельефа поверхности можно контролировать и свести к минимуму.⁵ В то же время поверхностный слой, несмотря на специальные меры по очистке, остается выделенным. Поэтому вопросу его влияния на СТМ-измерения необходимо уделить особое внимание.

Как показано в работе Макмиллана [13], наличие на поверхности сверхпроводника в однородном состоянии нормального слоя может оказать существенное влияние на плотность состояний, измеряемую экспериментально СТМ. Примером такого влияния является двойная щелевая особенность в плотности состояний как в сверхпроводнике, так и в нормальном металле. Интерпретация плотности состояний такого рода может быть неоднозначной в рамках конкретного СТМ-эксперимента [88]. При измерении спектральных характеристик *вихревого* состояния сверхпроводников довольно часто возникают нетривиальные особенности, которые не описываются стандартной моделью CdGM. Примерами таких особенностей можно назвать сдвиг пика плотности состояний точно над центром вихря в область конечных энергий [89–91], её анизотропию вблизи вихрей в решётке [87, 92], аномально большой размер вихревого кора [93–96] и его резкое уменьшение в растущих магнитных полях [97, 98]. Для объяснения этих особенностей зачастую привлекаются дополнительные предположения об анизотропной [80] или многокомпонентной [88] структуре параметра порядка в сверхпроводниках. В последние несколько лет появились работы [99], связывающие особенности плотности состояний с наличием дополнительных параметров порядка, сосуществующих со сверхпроводимостью. Локальная плотность состояний вблизи вихрей в сверхпроводниках чувствительна к типу сверхпроводящего спаривания и особенностям зонной структуры, что позволяет на основе СТМ-измерений определить указанные параметры. В связи с важностью подобных измерений в работе соискателя с соавторами [A4] было предложено альтернативное объяснение большинства особенностей локальной плотности состояний, наблюдаемых в экспериментах. Это объяснение основано на естественном предположении о наличии на поверхности сверхпроводника тонкого дефектного (несверхпроводящего) слоя, в котором из-за эффекта близости наводятся сверхпроводящие корреляции. Благодаря малости амплитуды наведённой щели $\Delta_{ind} < \Delta$ по сравнению со щелью в сверхпроводнике, в большинстве случаев индуцированная длина когерентности $\xi_{2D} = \hbar v_N / \Delta_{ind}$ в нормальном слое как характерный

⁵ Иглы для СТМ часто делают из материалов с хорошо определённой Ферми-поверхностью и практически постоянной плотностью состояний; влияние рельефа поверхности убирается с помощью метода обратной связи и специальной техники измерений.

масштаб превосходит соответствующую величину в сверхпроводнике ξ_S , что приводит к увеличению измеряемого с помощью СТМ размера кода вихря. Однако из-за туннелирования эффективный сверхпроводящий параметр порядка в нормальном слое обладает и масштабом ξ_S , что приводит, как показано в основной части диссертации, к расщеплению пика плотности состояний точно над центром вихря в область конечных энергий или, что более интересно, к формированию дополнительной аномальной ветви в спектре подщелевых возбуждений одноквантового вихря в зависимости от характера туннелирования квазичастиц между подсистемами.

Цель и задачи. Целью диссертационной работы является теоретическое исследование влияния сверхпроводящих корреляций, наведённых в квазидвумерных Ферми-системах, таких как двумерный электронный газ, графен и топологический изолятор в контакте с массивным сверхпроводником, на спектральные свойства локализованных состояний в вихрях Абрикосова и на транспортные характеристики краевых мод в этих системах.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- Исследование электронной структуры локализованных мод в многоквантовом вихревом состоянии двумерной системы с линейным квазичастичным спектром (графена) с индуцированной сверхпроводимостью в ней.
- Изучение квазичастичного спектра и плотности состояний вблизи вихря Абрикосова в слоистой гетероструктуре “сверхпроводник – плёнка нормального металла” во внешнем магнитном поле, перпендикулярном границе раздела, с учётом индуцированных сверхпроводящих корреляций в нормальной подсистеме.
- Теоретическое объяснение экспериментально наблюдаемых особенностей плотности состояний в вихревой фазе сверхпроводника второго рода на основе предположения о существовании дефектного слоя на поверхности исследуемого образца.
- Расчёт дифференциальной проводимости мезоскопических контактов “сверхпроводник – двумерный металл в режиме квантового эффекта Холла” в зависимости от величины внешнего магнитного поля, ширины контакта, химического потенциала и коэффициентов прохождения.
- Построение модели транспорта в контактах “сверхпроводник - двумерный топологический изолятор” по краевым состояниям. Исследование вопроса устойчивости краевых мод к сверхпроводящим корреляциям и возможности наведения сверхпроводящей энер-

гетической щели, неоднородной в зависимости от направления распространения мод, в многозонном нормальном материале.

Научная новизна определяется оригинальностью поставленных задач, полученными новыми результатами и заключается в следующем:

- Анализ мод с нулевой энергией и спектра подщелевых состояний в многоквантовом вихре в графене с наведённым изотропным сверхпроводящим параметром порядка обобщён для *конечных значений* уровня Ферми. Найдено точное аналитическое решение для мод с нулевой энергией и угловым моментом для произвольного радиального профиля наведённой сверхпроводящей щели, а также найден критерий существования мод с нулевой энергией, но конечным угловым моментом в рассматриваемой системе.
- Предложено объяснение особенностей экспериментальных данных сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии вихревого состояния сверхпроводника, отличное от известных в литературе и основанное на предположении о наличии дефектного слоя на его поверхности.
- На основе микроскопической теории показано, что спектр состояний в вихре Абрикосова с единичной завихренностью в двумерной плёнке нормального металла в контакте со сверхпроводником содержит две аномальные подщелевые ветви, в отличие от результата феноменологического описания сверхпроводимости в двумерной подсистеме.
- Показано, что дифференциальная проводимость контакта “сверхпроводник – двумерный металл”, определяемая в сильных магнитных полях транспортом вдоль двух крайних состояний вблизи каждой границы, имеет существенно различную зависимость от геометрии контакта и магнитного поля для двумерного электронного газа и графена.
- Найдены универсальные аналитические выражения для средних значений дифференциальной проводимости и её дисперсии по реализациям расположения примесей в области трансформации крайних мод в контактах “сверхпроводник – двумерный металл” в квантовых магнитных полях, верные для *произвольного* числа крайних каналов, в отличие результатов применения квазиклассического подхода, используемого в литературе.
- Показано, что туннелирование *с учётом изменения угловой симметрии* волновой функции в контакте двумерного топологического изолятора со сверхпроводником с изотропным спариванием формирует в изотропном спектре крайних мод топологического изо-

лятора сверхпроводящую щель, зависящую от направления распространения этих мод, в отличие от результатов без учёта такого туннелирования, известных в литературе.

Теоретическая и практическая значимость работы

С практической точки зрения, интерес представляет возможность управления квантовым транспортом и спектральными свойствами низкоразмерных структур в контакте со сверхпроводником как с помощью эффекта поля (приложения затворного напряжения), так и посредством приложения внешнего магнитного поля и легирования другими соединениями в связи с возможным применением подобных систем в микроэлектронике. В связи с этим

- Результаты расчёта структуры локализованных состояний в вихре Абрикосова в графене с наведённой сверхпроводимостью применимы для анализа термодинамических и транспортных характеристик вихревого состояния графена в магнитном поле.
- Расчёты электронного спектра и плотности локализованных состояний в вихре Абрикосова в двумерной Ферми-системе позволяют объяснить экспериментально измеряемые особенности структуры вихревого состояния в магнитных полях для систем “сверхпроводник-металлическая плёнка” и сверхпроводников с дефектным поверхностным слоем.
- Расчёт дифференциальной проводимости контактов “сверхпроводник – двумерный металл в режиме квантового эффекта Холла” позволяет определить электронную структуру спектра двумерной подсистемы по измерениям кондактанса в пределе сильных магнитных полей. Сравнение теоретических предсказаний для среднего значения кондактанса с результатами экспериментов даёт возможность извлечь зависимости коэффициентов трансформации мод пересекающихся границ от магнитного поля, уровня Ферми и геометрии контакта.
- Расчёты трансформации спектра краевых состояний двумерного топологического изолятора при контакте с синглетным сверхпроводником демонстрируют возможность наведения сверхпроводящей щели в спектре, анизотропной по направлению распространения мод, и применимы для интерпретации туннельных экспериментов по изучению плотности состояний и транспортных измерений в подобных системах.

Методология и методы исследования

Для решения поставленных задач были применены стандартные теоретические подходы, позволяющие адекватно описывать транспортные и спектральные свойства гибридных систем нормальный металл/сверхпроводник:

- Подход Боголюбова-де Жена для вычисления волновых функций, спектра и локальной плотности состояний квазичастиц в сверхпроводниках и гибридных структурах.
- Формализм квазиклассической теории сверхпроводимости (уравнений Эйленбергера, Узаделя) для описания индуцированных сверхпроводящих корреляций и спектра локализованных квазичастиц в гибридных системах.
- Микроскопический подход на основе метода туннельного гамильтониана для исследования влияния контакта двумерной системы со сверхпроводником на её электронную структуру и квантовый транспорт.
- Теория Буттикера - Ландауэра для описания мезоскопического транспорта по каналам квазичастичных состояний, локализованных вблизи границ.
- Метод случайных матриц рассеяния, распределённых с инвариантной мерой на группе их симметрии, для аналитического вычисления транспорта в мезоскопических системах, среднего по реализациям пространственного распределения примесных центров.
- Численные методы нахождения собственных значений и собственных функций гамильтониана задачи посредством диагонализации его матрицы.
- Быстро сходящиеся методы численного решения дифференциальных уравнений квазиклассической теории сверхпроводимости.

Данные методы являются основным инструментом теоретического исследования сверхпроводимости. Поэтому корректное применение этих методов является гарантией получения надежных результатов, соответствующих общепризнанным стандартам научной теории.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

- (1) Угловой момент локализованных состояний в коре вихря Абрикосова с завихренностью M в листе графена с наведенной изотропной сверхпроводимостью для произвольного уровня Ферми принимает полуцелые значения для чётных и целые для нечётных M , в отличие от случая однозонного сверхпроводника с квадратичным спектром квазичастиц. В вихре нечётной завихренности M для произвольного химического потенциала существует локализованная мода с энергией, лежащей на уровне Ферми, и с нулевым орбитальным моментом независимо от радиального профиля наведённой щели.
- (2) Локальная плотность состояний в двумерном металлическом слое в контакте со сверхпроводником второго рода в вихревом состоянии, кроме пространственного масштаба

объёмного сверхпроводника, имеет дополнительный масштаб, определяемый наведённой сверхпроводящей щелью в спектре нормального слоя. В пренебрежении беспорядком спектр квазичастиц в вихре с *единичной* завихренностью как функция углового момента волновой функции состоит из *двух* ветвей, пересекающих уровень Ферми.

- (3) Дифференциальная проводимость контакта двумерного металла со сверхпроводником, определяемая в сильных магнитных полях транспортом вдоль двух краевых состояний вблизи каждой границы, зависит существенно различным образом от ширины контакта и его геометрии для двумерного электронного газа и графена. Усреднение по реализациям примесей приводит к универсальным выражениям для среднего значения дифференциальной проводимости и её дисперсии, в которых зависимость от спектра двумерной подсистемы проявляется только через количество краевых каналов.
- (4) Контакт двумерного топологического изолятора со сверхпроводником с изотропным спариванием наводит в изотропном спектре краевых мод топологического изолятора сверхпроводящую щель, анизотропную по направлениям распространения этих мод.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность полученных результатов обеспечена оптимальным выбором физических моделей, отражающих основные свойства исследуемых систем, а также адекватным выбором методов численного моделирования.

Диссертация выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт физики микроструктур Российской академии наук (ИФМ РАН) в период с 2007 по 2012 год. Результаты диссертационной работы обсуждались на семинарах в ИФМ РАН, в Физическом институте им. П. Н. Лебедева РАН, Университете Бордо-1 (Universite Bordeaux-1, France), Университете Аалто (Aalto University, Finland) и Аргонской национальной лаборатории (Argonne National Laboratory, USA). Основные результаты диссертации были представлены на XIII-XVI международных симпозиумах “Нанофизика и наноэлектроника” (Н. Новгород – 2009-2012 гг.); международных конференциях “Нано-Питер” (С. Петербург – 2010 г.); “Meso: Non-equilibrium and coherent phenomena at nanoscale” (Черноголовка – 2012 г.), конференции памяти И. Ф. Щёголева “Низкоразмерные металлические и сверхпроводящие системы” (Черноголовка – 2009 г.) и на российской конференции “Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления” (Троицк – 2012 г.) автором и на международных конференциях “Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях” (Новосибирск – 2010 г.), “Coma Ruga” (Barcelona, Spain – 2010, 2011 гг.),

“Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости” (Звенигород – 2011) и “Dubna-Nano” (Дубна – 2012 г.) в рамках докладов соавторов.

Материалы диссертации опубликованы в 10 печатных работах, из них 4 статьи в рецензируемых журналах [A1, A2, A3, A4], и 6 тезисов докладов [A5, A6, A7, A8, A9, A10].

Личный вклад автора.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Автор принимал участие в постановке и решении теоретических задач, в обсуждении полученных результатов и их интерпретации.

В частности, вклад автора в работе [A1] является определяющим в части вывода эффективных собственно энергетических частей уравнений Боголюбова – де Жена в слое двумерного топологического изолятора под сверхпроводником и равнозначным (с соавторами В. М. Винокуром и Н. М. Щелкачёвым) в части нахождения аналитического выражения для спектра краевых состояний и численного моделирования спектральных свойств системы.

В работе [A2] автор проводил аналитические расчёты кондактанса контактов “сверхпроводник – двумерный электронный газ” и “сверхпроводник – графен” в квантовом пределе, а также вычисления средних значений кондактанса и дисперсии этой величины по распределению примесей в области рассеяния мод. Вклад соискателя в постановку задачи, решение вопроса о сшивке квазичастичных краевых мод, а также в нахождение функции распределения симплектических случайных матриц по параметрам полярной декомпозиции является равнозначным с соавторами (А. С. Мельниковым, И. А. Шерешевским и Н. М. Щелкачёвым).

Вклад автора в работе [A3] является определяющим в нахождении точных аналитических решений с нулевой энергией в вихревом состоянии графена с индуцированной сверхпроводимостью. Разработка квазиклассического описания, нахождение структуры локализованных состояний вблизи вихря в графене и критерия существования нулевых мод в зависимости от уровня Ферми проводились совместно с соавторами (А.С. Мельниковым и Н.Б. Копниным). Равнозначным (с И. А. Шерешевским) является вклад соискателя в разработку и реализацию численного алгоритма расчёта спектральных характеристик системы.

В работе [A4] вклад автора является определяющим в части нахождения аналитического выражения для спектра локализованных состояний в смешанном состоянии гетероструктуры “сверхпроводник – нормальная металлическая плёнка”. В оставшуюся часть работы вклад соискателя равнозначный (с соавторами А.С. Мельниковым и Н.Б. Копниным).

Структура и объем диссертации Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка публикаций автора по теме диссертации, библиографии (157 наименований) и трёх приложений. Общий объем диссертации 150 страниц, включая 21 рисунок.

Индукцированные сверхпроводящие корреляции в двумерных и квазидвумерных системах в контакте с объёмным сверхпроводником

1.1. Введение

Как было упомянуто во введении, эффект близости сверхпроводника с тонкой плёнкой нормального металла ($d < \xi_N$) сопровождается открытием наведённой сверхпроводящей щели в спектре возбуждений нормального слоя [13, 14]. В данной главе мы рассмотрим два подхода к описанию индуцированной сверхпроводимости в нормальной части рассматриваемой системы (в двумерной или квазидвумерной плёнке). В следующей части будет рассмотрен феноменологический подход, впервые использованный Бинаккером (C. W. J. Beenakker) в 2006 году [61] для описания сверхпроводимости в монослое графена. Последняя часть главы посвящена микроскопическому подходу, основанному на методе туннельного гамильтониана, который впервые был использован для описания явления двух щелевых особенностей в плотности состояний в сверхпроводнике в работе Макмиллана (W. L. McMillan) [13].

1.2. Феноменологический подход к формированию сверхпроводящей индуцированной щели

Рассматриваемый в этой части подход активно применяется в литературе для описания индуцированной сверхпроводимости в таких эффективно двумерных системах, как графен [60, 61, 100, 101], а также 2D [34–36, 38] и 3D [33, 37, 39, 40] топологические изоляторы. Подход основан на предположении о наличии в 2D нормальной подсистеме, находящейся под сверхпроводником, наведённой сверхпроводящей энергетической щели Δ_{ind} . Эта щель в спектре нормальных возбуждений моделируется с помощью добавления в уравнения Боголюбова – де Жена эффективного спаривающего потенциала (см. обсуждение ниже). Иными словами неявно предполагается, что в нормальной подсистеме сверхпроводящие корреляции можно описывать как эффективное притяжение электронов. Структура эффективного параметра порядка $\hat{\Delta}_{ind}$ в случае многозонной (многодолинной) модели нормального слоя (как для графена), когда электронная часть волновой функции \tilde{y} является многокомпонентной,

может быть довольно сложной. Однако, чаще всего, предполагают, что наведённый сверхпроводящий потенциал диагонален в пространстве подзон (или долин) $\hat{\Delta}_{ind} = \Delta_{ind}$, а симметрия спаривания соответствует симметрии притяжения электронов в объёмном сверхпроводнике. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь синглетные сверхпроводящие электроды и считать спаривание изотропным.

Рассмотрим для примера структуру параметра порядка в импульсном пространстве для объёмного изотропного сверхпроводника и листа графена. Для изотропной поверхности Ферми легко показать, что наиболее выгодное спаривание электронов с импульсами $\mathbf{k}_{1,2}$ отвечает нулевому импульсу куперовской пары $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ (см., например, книгу [6]).

Действительно, поскольку спаривающее взаимодействие мы считаем изотропным, то суммарный импульс \mathbf{Q} электронов, рассеивающихся в какие-то другие состояния при взаимодействии между собой, сохраняется (см. Рис. 1.1). Кроме того, оба электрона находятся

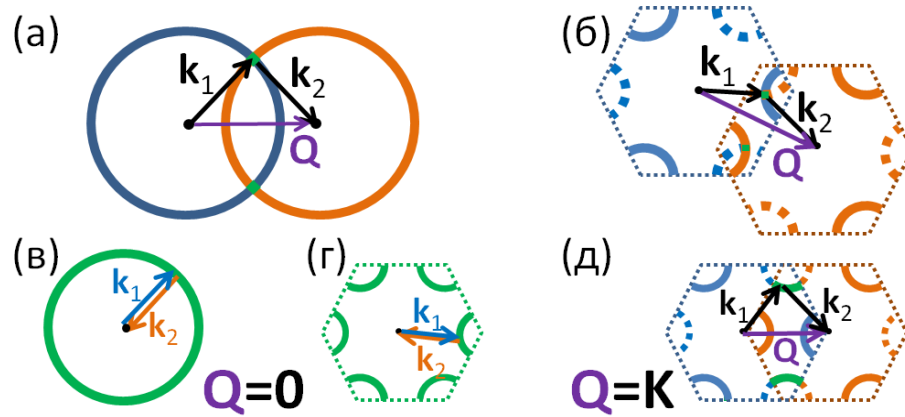


Рис. 1.1. Спаривание электронов с постоянным суммарным импульсом $\mathbf{Q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ для (а) сверхпроводника с изотропной поверхностью Ферми и (б) графена. Импульсы электронов $\mathbf{k}_{1,2}$ лежат вблизи поверхности Ферми (синей и оранжевой соответственно). \mathbf{k}_2 направлен с поверхности Ферми в центр зоны Бриллюэна, чтобы импульс куперовской пары \mathbf{Q} изображался относительным сдвигом поверхностей Ферми. Разные долины в графене обозначены сплошной и пунктирной линиями соответственно. Область рассеяния электронов при взаимодействии определяется пересечением этих поверхностей и закрашена зелёным цветом. Структура куперовской пары в импульсном пространстве определяется из условия максимального перекрытия сдвинутых поверхностей Ферми и отвечает нулевому суммарному импульсу (в) для изотропного сверхпроводника и (г) электронов из разных долин в графене или (д) случаю конечных \mathbf{Q} для электронов одной долины в графене.

вблизи поверхности Ферми (см. синяя и оранжевая поверхности на рис. 1.1а, б для сверхпроводника и графена соответственно). Здесь импульс второго электрона направлен в обратную сторону (с поверхности Ферми в центр зоны Бриллюэна), чтобы относительный сдвиг поверх-

ностей Ферми отвечал импульсу куперовской пары \mathbf{Q} . Поэтому зона Бриллюэна, изображённая на рисунках оранжевым цветом, инвертирована в пространстве, что в графене приводит к иному расположению долин (см. пунктирные и сплошные линии). Притяжение электронов наиболее выгодно в том случае, когда количество возможных переходов при рассеянии пары электронов максимально [6]. Если для сверхпроводника это означает спаривание с нулевым суммарным импульсом $\mathbf{Q} = 0$ (см. рис. 1.1в), то для графена существует несколько возможных реализаций. При нулевом импульсе пары $\mathbf{Q} = 0$ в графене попарно совмещаются листы поверхности Ферми, отвечающие различным долинам (рис. 1.1г). В то время как совмещение листов поверхности Ферми, соответствующих одной и той же долине, отвечает конечным импульсам куперовской пары и реализуется при совпадении угла сдвинутой зоны Бриллюэна с центром исходной (рис. 1.1д). В дальнейшем, при использовании этого феноменологического подхода в графене мы будем предполагать наведение сверхпроводимости в графене сверхпроводником с изотропной поверхностью Ферми при сохранении импульса в плоскости графена. Иными словами, будем считать, что эффективный параметр порядка в графене отвечает рисунку 1.1г с $\mathbf{Q} = 0$ – спариванию электронов из разных долин.

В рамках описанных предположений могут быть записаны эффективные уравнения Боголюбова – де Жена (БдЖ) [102, 103] в 2D системе под сверхпроводящим электродом для электронной (u) и дырочной (v) частей волновой функции квазичастиц $\check{\Psi} = (\check{u}, \check{v})$:

$$\begin{pmatrix} \check{\mathcal{H}} - \mu & \Delta_{ind} \\ \Delta_{ind}^* & \mu - \mathcal{T} \check{\mathcal{H}} \mathcal{T}^{-1} \end{pmatrix} \check{\Psi} = E \check{\Psi}. \quad (1.1)$$

Здесь \mathcal{T} – оператор обращения времени, энергия E отсчитывается от уровня Ферми μ , а $\check{\mathcal{H}}$ – одночастичный гамильтониан 2D системы в нормальном состоянии. Как упоминалось выше, мы считаем наведённую сверхпроводящую щель синглетной в спиновом пространстве, поэтому из симметрии относительно переворота спина мы будем рассматривать лишь часть электронной волновой функции с проекцией спина вверх \check{u} вдоль определённой оси. При этом \check{v} – часть дырочной волновой функции с проекцией спина вниз. Уравнения для оставшихся двух компонент аналогичны рассмотренным.

Одночастичный гамильтониан графена в изотропном базисе функций $\check{u} = (\hat{u}_{\mathbf{K}}, -i\sigma_y \hat{u}_{\mathbf{K}})$, $\check{v} = (\hat{v}_{\mathbf{K}'}, -i\sigma_y \hat{v}_{\mathbf{K}'})$ в долинном пространстве [60, 72] можно записать следующим образом

$$\check{\mathcal{H}} = v_N \pi_0 \otimes \boldsymbol{\sigma} \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right), \quad (1.2)$$

при этом оператор обращения времени примет вид: $\mathcal{T} = -\pi_y \otimes \sigma_y \mathcal{C}$. Здесь \mathcal{C} – оператор комплексного сопряжения, $\boldsymbol{\pi}$, $\boldsymbol{\sigma}$ – матрицы Паули в долинном (изоспиновом) и подрешёточном (псевдоспиновом) пространствах в графене соответственно. Компоненты волновых

функций $\hat{u}_{\mathbf{K}[\mathbf{K}']}$ ($\hat{v}_{\mathbf{K}[\mathbf{K}']}$) отвечают электронным (дырочным) возбуждениям. Индексы \mathbf{K} и \mathbf{K}' компонент соответствуют волновым векторам двух неэквивалентных конических точек первой зоны Бриллюэна в графене (см. Рис. 1.2а). При конечном уровне Ферми вблизи этих

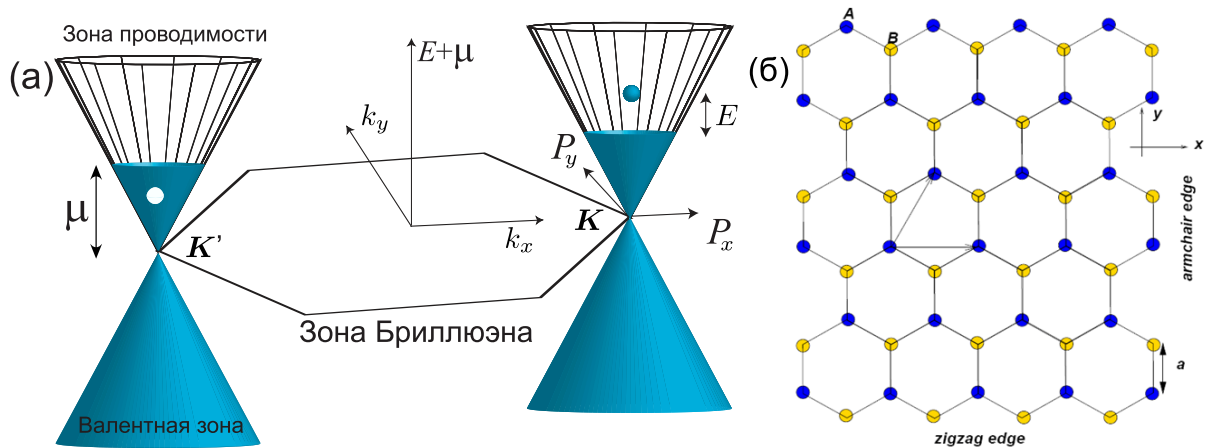


Рис. 1.2. (а) Схематичное изображение линейной низкоэнергетической дисперсии в графене вблизи двух долин \mathbf{K} и \mathbf{K}' . Энергия E отсчитывается от уровня Ферми μ , а импульс $\hat{\mathbf{P}}$ – от соответствующей конической точки; (б) Изображение решётки графена с двумя типами границ “zigzag” и “arm-chair”, отвечающими разным граничным условиям. Синими (жёлтыми) кружками обозначены атомы углерода, относящиеся к подрешётке A (B) графена.

конических точек формируются листы поверхности Ферми, которые часто называют долинами. Магнитное поле в уравнении (1.2) учтено с помощью удлинения оператора импульса $\hat{\mathbf{P}} = -i\hbar\nabla_{\mathbf{R}}$, действующего в двумерном монослое графена \mathbf{R} , вектор-потенциалом \mathbf{A} , умноженным на отношение заряда электрона $e < 0$ к скорости света в вакууме c . Далее указанный базис волновых функций $\check{u} = (\hat{u}_{\mathbf{K}}, -i\sigma_y\hat{u}_{\mathbf{K}'})$, $\check{v} = (\hat{v}_{\mathbf{K}'}, -i\sigma_y\hat{v}_{\mathbf{K}})$ мы будем для краткости записывать в виде $\check{u} = (\hat{u}_{\pi+}, \hat{u}_{\pi-})$, $\check{v} = (\hat{v}_{\pi+}, \hat{v}_{\pi-})$, где $\hat{u}_{\pi\pm} = (u_{\pi\pm,a}, u_{\pi\pm,b})$ и $\hat{v}_{\pi\pm} = (v_{\pi\pm,a}, v_{\pi\pm,b})$.

При наведении сверхпроводимости в низкоразмерных нормальных системах, кроме индуцированной щели в спектре квазичастиц, достаточно часто появляется дополнительный сдвиг химического потенциала из-за разного сродства нормальной и сверхпроводящей подсистем с вакуумом. В дальнейшем, при рассмотрении контактов “графен под сверхпроводником - графен” мы будем предполагать наличие существенного сдвига $\Delta\mu = \mu - \mu_0$ химического потенциала под сверхпроводником μ относительно его значения μ_0 в нормальной области $\Delta\mu \gg \mu_0$. Это предположение позволяет благодаря малости длины Ферми под сверхпроводником $\lambda'_N = \hbar v_N/\mu \ll \lambda_N = \hbar v_N/\mu_0$ не учитывать подавления потенциала спаривания в сверхпроводящей области Δ_{ind} контактом с нормальной системой [61], а также положить его значение равным нулю в свободной от сверхпроводящего электрода части 2D системы (см. график для профиля наведённой щели на рис. 1б во введении).

В рамках описанной модели решения уравнений БдЖ (1.1) с одночастичным гамильтонианом (1.2) вблизи плоской границы с нормалью \mathbf{n} , направленной из области под сверхпроводником в нормальную область (см. геометрию контакта на Рис. 1б во введении), удовлетворяют следующим граничным условиям [61, 100]:

$$\check{v} = \exp[i\beta(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma})]\check{u} . \quad (1.3)$$

где $\beta = \arccos(E/\Delta_{ind})$ для $E < \Delta_{ind}$ и $\beta = -i\operatorname{arccosh}(E/\Delta_{ind})$ для $E > \Delta_{ind}$. Эти граничные условия верны для большого сдвига уровня Ферми $\Delta\mu \gg \Delta_{ind}$, E по сравнению с амплитудой сверхпроводящей щели Δ_{ind} и энергией квазичастиц E , но для произвольного соотношения этих параметров между собой (см. вывод в [61]). Уравнение (1.3) описывает граничные условия, не зависящие от долинного индекса $\boldsymbol{\pi}$ [как и гамильтониан (1.2)].

Аналогичные граничные условия для границы раздела сверхпроводника и двумерной системы с квадратичным спектром $\check{\mathcal{H}} = \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 / 2m_N$ также выражаются через величину β , но связывают функции квазичастиц с их производными:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{k_{\perp}}{\sin \beta} \begin{pmatrix} \cos \beta & -1 \\ 1 & -\cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} , \quad (1.4)$$

где k_{\parallel} и $k_{\perp}^2 = k_S^2 - k_{\parallel}^2$ – проекции импульса Ферми на плоскость SN - границы и поперёк неё.

Граничные условия на краю графена, в отличие от границы со сверхпроводником, зависят от долиной степени свободы $\hat{\boldsymbol{\pi}}$, чаще всего реализуются в двух видах [104] “zigzag” или “arm-chair” (см. рис. 1.2б) и могут быть записаны следующим образом:

$$(\pi_0 \otimes \sigma_0 \pm \pi_z \otimes \sigma_z)\check{\Psi} = 0 \quad (1.5a)$$

$$(\pi_0 \otimes \sigma_0 - \pi_y \otimes \sigma_y)\check{\Psi} = 0 . \quad (1.5b)$$

Знаки \pm в уравнении (1.5a) отвечают соответственно атомам подрешётки А и В на границе (см. на рис. 1.2б верхняя и нижняя границы). Поскольку край графена типа “arm-chair” содержит атомы обеих подрешёток, то граничные условия (1.5b) перемешивают долинные степени свободы. Для произвольной ориентации границы относительно кристаллографических осей графена в работе [105] было получено общее граничное условие в непрерывном пределе:

$$\check{\Psi} = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi}) \otimes (\mathbf{n}_{\perp}, \boldsymbol{\sigma})\check{\Psi} , \quad (1.6)$$

где единичный вектор \mathbf{n}_{\perp} перпендикулярен внутренней нормали \mathbf{n} (см. по аналогии с рис. 1б во введении), а \mathbf{v} – произвольный трёхмерный единичный вектор (в дальнейшем, мы будем называть его изоспиновым вектором). Граничные условия (1.5) записаны для $\mathbf{n} = \mathbf{x}_0$ и соответствуют значениям $\mathbf{v} = \mathbf{z}_0$, $\mathbf{n}_{\perp} = \pm \mathbf{z}_0$ для “zigzag” и $\mathbf{v} = \mathbf{y}_0$, $\mathbf{n}_{\perp} = \mathbf{y}_0$ для “arm-chair”.

Несмотря на свою простоту такое рассмотрение является очень полезным инструментом как для решения глобальной задачи рассеяния в графене под сверхпроводником [61], так и для расчёта транспорта в джозефсоновском контакте на основе графена с использованием локальных граничных условий [100].

В последующих главах диссертации рассмотренный в этой части метод будет применяться для описания эффективной сверхпроводящей щели в графене: уравнения БдЖ (1.1) с одночастичным гамильтонианом графена (1.2) при вычислении спектра квазичастичных состояний, локализованных в коре вихря в смешанном состоянии графена под сверхпроводником, а также локальные граничные условия (1.3) при исследовании транспортных характеристик контакта “сверхпроводник-графен” в квантующем магнитном поле.

1.3. Метод туннельного гамильтониана

Наряду с феноменологическим подходом, рассмотренным выше, существует альтернативное *микроскопическое* описание, в основу которого положен метод туннельного гамильтониана. Применительно к сверхпроводникам в 1968 году этот метод был использован в работе [13] Макмилланом, в которой рассматривалась система из нормальной и сверхпроводящей плёнок, находящихся в туннельном контакте. Безусловно, в отсутствие контакта сверхпроводника с нормальной плёнкой, последняя может быть описана без привлечения сверхпроводимости. Однако наличие туннелирования между подсистемами приводит к конечному значению аномального среднего $\langle \hat{c}_{\mathbf{R}} \hat{c}_{\mathbf{R}'} \rangle$ от двух операторов уничтожения $\hat{c}_{\mathbf{R}}$ в двумерной плёнке [103]. Но необходимо понимать, что, несмотря на существование индуцированной сверхпроводящей щели, в нормальной подсистеме нет сверхпроводящего спаривания, поскольку предполагается отсутствие механизмов притяжения между электронами. При исследовании плотности квазичастичных состояний в сверхпроводящей плёнке в зависимости от энергии E Макмилланом, кроме стандартной щелевой особенности, был обнаружен дополнительный пик при меньших значениях энергии, соответствующий индуцированной энергетической щели в нормальной подсистеме (см. рис. 1.3а N_S). Аналогичная двухщелевая зависимость плотности состояний была вычислена и в нормальной плёнке, но с другим соотношением амплитуд щелевых особенностей (см. N_N на рис. 1.3а). В дальнейшем метод туннельного гамильтониана в приложении к сверхпроводимости был развит в ряде работ: начиная от исследования свойств резонансной примеси в сверхпроводнике [48, 49, 106] и заканчивая изучением индуцированной сверхпроводимости топологических изоляторов [55, 57] и обобщением этого подхода для решения пространственно неоднородных нестационарных

задач в джозефсоновских контактах [58].

Приведём далее вывод описанного метода, на основе работы А. С. Мельникова и Н. Б. Копнина [58]. Рассматриваемая система состоит из сверхпроводящего полупространства $z > 0$ и нормального слоя $z = 0$, толщиной которого пренебрегается (см. рис. 1.3б). Гамильтониан системы в представлении вторичного квантования состоит из сверхпроводя-

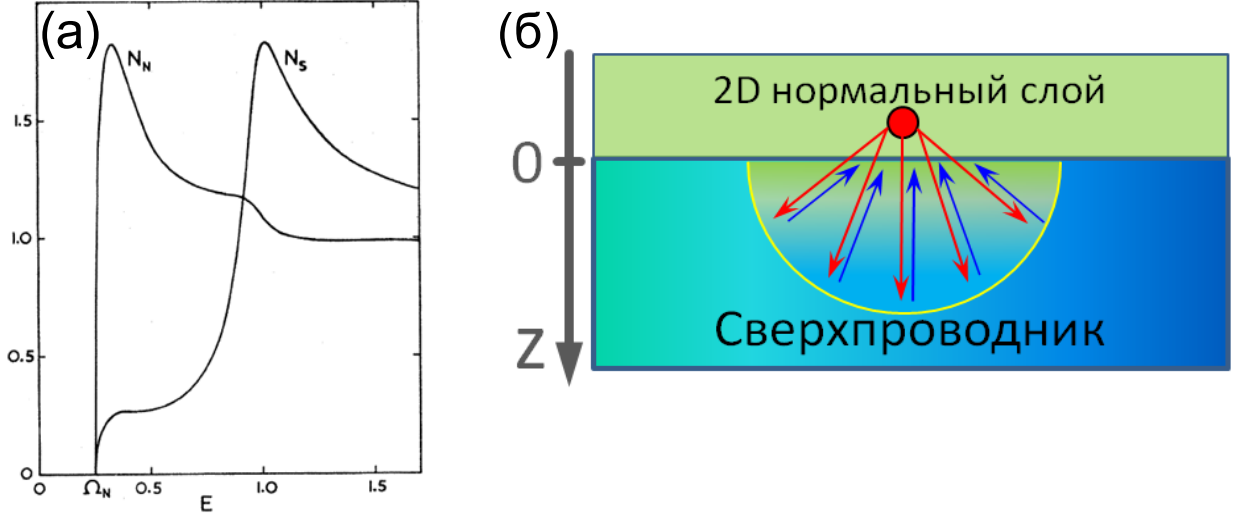


Рис. 1.3. (а) График плотности состояний в нормальном N_N и сверхпроводящей N_S слое в однородном состоянии туннельного SN-контакта на правой панели. Рисунок взят из статьи [13]; (б) Схематичное изображение процесса формирования сверхпроводящих корреляций в двумерном нормальном слое. Красным кругом обозначен источник в нормальной плёнке. Красными (синими) стрелками обозначено направление групповой скорости падающих электронов (андреевски отражённых дырок). В области, ограниченной жёлтым полукругом, с размером порядка сверхпроводящей длины когерентности ξ_S происходит трансформация квазичастичных возбуждений в сверхтекучий ток.

щей части \hat{H}_S , а также частей, отвечающих за 2D подсистему \hat{H}_{2D} и туннелирование \hat{H}_T :

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{2D} + \hat{H}_T . \quad (1.7)$$

Гамильтониан сверхпроводника

$$\hat{H}_S = \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \int d^3r \hat{\Psi}_s^+(\mathbf{r}) (\hat{\epsilon}_S - E_F) \hat{\Psi}_s(\mathbf{r}) + \int d^3r \left(\Delta \hat{\Psi}_\uparrow^+(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\downarrow^+(\mathbf{r}) + \Delta^* \hat{\Psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\Psi}_\uparrow(\mathbf{r}) \right) , \quad (1.8)$$

записывается через полевые операторы $\hat{\Psi}_{\uparrow[\downarrow]}^+$ ($\hat{\Psi}_{\uparrow[\downarrow]}^+$) уничтожения (рождения) для состояний со спином вверх [вниз], а также через сверхпроводящую щель Δ и химический потенциал сверхпроводника E_F . Одночастичный оператор кинетической энергии $\hat{\epsilon}_S$ для простоты записан в приближении эффективной массы m_S : $\hat{\epsilon}_S = (\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A})^2 / 2m_S$. Интегрирование по координате \mathbf{r} ведётся по полупространству $z > 0$, занимаемому сверхпроводником. Представление

вторичного квантования для гамильтониана 2D плёнки толщины d :

$$\hat{H}_{2D} = d \sum_{\varsigma=\uparrow,\downarrow} \int d^2R \cdot \hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}^+ (\hat{\epsilon}_{2D}(\mathbf{R}) - \mu) \hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}} , \quad (1.9)$$

записано в базисе полевых операторов $\hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}^+$ ($\hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}^+$), нормированных на объём плёнки $[\hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}, \hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}^+]_+ = d^{-1}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$, для частиц с проекцией спина ς на некоторую ось. Здесь $\hat{\epsilon}_{2D}(\mathbf{R})$ – оператор кинетической энергии в 2D плёнке, μ – химический потенциал, $[\hat{A}, \hat{B}]_+ \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ – антикоммутатор, а 2D вектор \mathbf{R} лежит в плоскости слоя $z = 0$. Химический потенциал μ двумерной подсистемы отсчитывается от дна зоны проводимости, поэтому в общем случае может отличаться от химического потенциала E_F сверхпроводника.

Последний член \hat{H}_T в уравнении (1.7) отражает одночастичное туннелирование электронов из 2D-слоя в сверхпроводник с сохранением проекции спина:

$$\hat{H}_T = d \sum_{\varsigma=\uparrow,\downarrow} \int d^2R d^3r \left[\hat{\Psi}_{\varsigma}^+(\mathbf{r}) T(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}} + \hat{c}_{\varsigma\mathbf{R}}^+ T^+(\mathbf{R}, \mathbf{r}) \hat{\Psi}_{\varsigma}(\mathbf{r}) \right] , \quad (1.10)$$

где коэффициент туннелирования $T^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}) \stackrel{\text{def}}{=} T^+(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ не зависит от спиновых переменных.

В общем случае конечных температур $T \neq 0$ мацубаровские функции Грина G_p , F_p , F_p^+ , \bar{G}_p , $p \in \{2D, S, T\}$, зависят от двух мнимых временных переменных τ_1 , τ_2 в интервале

$$-\frac{\hbar}{T} < \tau_1 - \tau_2 < \frac{\hbar}{T} \quad (1.11)$$

и для рассматриваемой системы записываются в следующем виде:

$$\langle T_{\tau} \hat{c}_{\varsigma\mathbf{X}_1} \hat{c}_{\varsigma'\mathbf{X}_2}^+ \rangle = \delta_{\varsigma\varsigma'} G_{2D}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) , \quad (1.12a)$$

$$\langle T_{\tau} \hat{\Psi}_{\varsigma}(\mathbf{x}_1) \hat{\Psi}_{\varsigma'}^+(\mathbf{x}_2) \rangle = \delta_{\varsigma\varsigma'} G_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) , \quad (1.12b)$$

$$\langle T_{\tau} \hat{\Psi}_{\varsigma}(\mathbf{x}_1) \hat{c}_{\varsigma'\mathbf{X}_2}^+ \rangle = \delta_{\varsigma\varsigma'} G_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2) , \quad (1.12c)$$

$$\langle T_{\tau} \hat{c}_{\varsigma\mathbf{X}_1} \hat{c}_{\varsigma'\mathbf{X}_2} \rangle = i\sigma_{\varsigma\varsigma'}^{(y)} F_{2D}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) , \quad (1.12d)$$

$$\langle T_{\tau} \hat{\Psi}_{\varsigma}(\mathbf{x}_1) \hat{\Psi}_{\varsigma'}(\mathbf{x}_2) \rangle = i\sigma_{\varsigma\varsigma'}^{(y)} F_S(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) , \quad (1.12e)$$

$$\langle T_{\tau} \hat{\Psi}_{\varsigma}(\mathbf{x}_1) \hat{c}_{\varsigma'\mathbf{X}_2} \rangle = i\sigma_{\varsigma\varsigma'}^{(y)} F_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2) \quad (1.12f)$$

и остальные аналогичным образом. Здесь $\mathbf{X}_k = (\mathbf{R}_k, \tau_k)$, $\mathbf{x}_k = (\mathbf{r}_k, \tau_k)$ – пространственно-временные координаты в 2D плёнке и объёмном сверхпроводнике, а T_{τ} – оператор упорядочения по мнимому времени $\tau = it$, определённый согласно следующему выражению [107]:

$$T_{\tau} \hat{A}(\tau_1) \hat{B}(\tau_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \hat{A}(\tau_1) \hat{B}(\tau_2), & \tau_1 > \tau_2 \\ -\hat{B}(\tau_2) \hat{A}(\tau_1), & \tau_1 < \tau_2 \end{cases} .$$

Для краткости записи введём матричное представление для функций Грина и гамильтониана сверхпроводника в пространстве Горькова-Намбу [108, 109]:

$$\check{G}_p = \begin{pmatrix} G_p & F_p \\ -F_p^+ & \bar{G}_p \end{pmatrix}, \quad \check{H}_S(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \hat{\epsilon}_S(\mathbf{A}) - E_F & -\Delta \\ \Delta^* & \hat{\epsilon}_S(-\mathbf{A}) - E_F \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь стационарные задачи $\check{G}_p(\tau_1, \tau_2) = \check{G}_p(\tau_1 - \tau_2)$, поэтому перейдём к Фурье-образу $\check{G}_p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int_{-\hbar/T}^{\hbar/T} e^{i\omega_n \tau} \check{G}_p(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d\tau$ по разностной переменной $\tau = \tau_1 - \tau_2$, стандартным образом продолжив периодически температурные функции Грина с интервала (1.11). Здесь и далее мы будем опускать аргумент $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ у мацубаровских функций Грина. Для отличия их от запаздывающей и опережающей, у последних будем ставить верхние индексы R и A соответственно: $\check{G}_p^{R(A)}$.

Вводя дополнительные обозначения для обратных операторов

$$\check{G}_S^{-1}(\mathbf{r}) = -i\hbar\omega_n \check{\tau}_3 + \check{H}_S(\mathbf{r}), \quad \check{G}_{2D}^{-1}(\mathbf{R}) = -i\hbar\omega_n \check{\tau}_3 + \check{\epsilon}_{2D}(\mathbf{R}, \check{\tau}_3 \mathbf{A}) - \mu$$

и оператора туннелирования $\check{T}(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = \text{diag}(T(\mathbf{r}, \mathbf{R}), T^*(\mathbf{r}, \mathbf{R}))$ в пространстве матриц Намбу $\check{\tau}$, где $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – диагональная матрица с элементами a_1, a_2, \dots, a_n , запишем уравнения Горькова [108] для 2D \check{G}_{2D} и смешанной \check{G}_T функций Грина с учётом туннелирования:

$$\check{G}_S^{-1}(\mathbf{r}_1) \check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2) + d \int \check{T}(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}') \check{G}_{2D}(\mathbf{R}', \mathbf{R}_2) d^2 R' = 0, \quad (1.14)$$

$$\check{G}_{2D}^{-1}(\mathbf{R}_1) \check{G}_{2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) + \int \check{T}^+(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}') \check{G}_T(\mathbf{r}', \mathbf{R}_2) d^3 r' = \check{1} d^{-1} \hbar \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2). \quad (1.15)$$

Разрешая первое из этих уравнений относительно $\check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2)$ в полупространстве $z_1 > 0$

$$\check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2) = -\frac{d}{\hbar} \int \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \check{T}(\mathbf{r}', \mathbf{R}') \check{G}_{2D}(\mathbf{R}', \mathbf{R}_2) d^2 R' d^3 r' \quad (1.16)$$

и подставляя полученное выражение во второе, мы получим замкнутое уравнение Горькова в 2D подсистеме:

$$\check{G}_{2D}^{-1}(\mathbf{R}_1) \check{G}_{2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) - \int \check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') \check{G}_{2D}(\mathbf{R}', \mathbf{R}_2) d^2 R' = \check{1} d^{-1} \hbar \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \quad (1.17)$$

с эффективной собственно энергетической частью, зависящей от *квадрата* оператора туннелирования:

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') = \frac{d}{\hbar} \int \check{T}^+(\mathbf{R}_1, \mathbf{r}') \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \check{T}(\mathbf{r}'', \mathbf{R}') d^3 r' d^3 r''.$$

Здесь функция Грина уравнения Горькова в сверхпроводнике $\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ удовлетворяет уравнению без учёта туннелирования:

$$\check{G}_S^{-1}(\mathbf{r}_1) \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \check{1} \hbar \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (1.18)$$

в сверхпроводящей области $z_{1,2} > 0$. Граничные условия при $z_2 = 0$ для этой функции в общем случае должны зависеть от матричного элемента туннелирования в меру обратного влияния нормальной плёнки на сверхпроводящее состояние полупространства $z > 0$. Мы в дальнейшем будем пренебрегать этим обратным влиянием¹ и использовать однородные граничные условия $\partial\check{G}_S^{(+)}/\partial z_2\Big|_{z_2=0} = 0$. В этом случае решение для $\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ равно сумме функций Грина уравнения (1.18) во всём трёхмерном пространстве:

$$\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \check{G}_S^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{2\parallel}, z_2) + \check{G}_S^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{2\parallel}, -z_2). \quad (1.19)$$

Подробный вывод граничных условий и соответствующего решения описан в Приложении A.1.

Далее мы будем рассматривать лишь локальное туннелирование, то есть будем предполагать совпадение координат операторов рождения и уничтожения в туннельном члене (1.10) полного гамильтониана (1.7) $T(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = T(\mathbf{R})\delta(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{R})\delta(z)$, где $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_{\parallel}, z)$. В этом случае выражение для собственно энергетической части существенно упрощается:

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') = d\check{T}^+(\mathbf{R}_1)\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}')\check{T}(\mathbf{R}')/\hbar, \quad (1.20)$$

Дальнейшие упрощения уравнения (1.17) основаны на конкретных предположениях о сохранении проекции импульса в плоскости 2D плёнки. Кроме того, в большинстве сверхпроводников длина когерентности значительно превышает атомные масштабы, то есть $p_S\xi_S/\hbar \sim 10^2 - 10^3 \gg 1$, что позволяет использовать формализм квазиклассических уравнений сверхпроводимости [110, 111]. Во всех следующих подразделах, кроме последнего, мы будем предполагать, что вся система находится в чистом пределе, то есть длины свободного пробега в сверхпроводнике ℓ_S и 2D подсистеме ℓ_N гораздо больше соответствующих длин когерентности: $\ell_S \gg \xi_S = \hbar v_S/\Delta_{\infty}$, $\ell_N \gg \xi_{2D} = \hbar v_N/\Delta_{ind}$. В рамках этих предположений будут выведены уравнения Эйленберга на квазиклассические функции Грина в 2D слое:

$$\check{g}(\mathbf{P}_N, \mathbf{R}) = (\pi i)^{-1} \int d\xi_2 \check{\mathcal{G}}_{2D}(\mathbf{P}, \mathbf{R}), \quad (1.21)$$

где $\xi_2 = \epsilon_{2D}(\mathbf{P}) - \mu$ – энергия 2D плёнки, отсчитанная от её уровня Ферми, \mathbf{P}_N – её импульс Ферми. Здесь функция Грина в смешанном представлении

$$\check{\mathcal{G}}_{2D}(\mathbf{P}, \mathbf{R}) = \int \check{G}_{2D}(\mathbf{R} + \mathbf{R}_d/2, \mathbf{R} - \mathbf{R}_d/2) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{R}_d} d^2 R_d \quad (1.22)$$

входит в выражение для квазиклассической функции Грина (1.21) в виде интеграла \int , который учитывает лишь вклад от полюсных частей функции Грина вблизи поверхности Ферми (см. [107] для более подробного обсуждения этого вопроса).

¹ Обсуждение области параметров, где это пренебрежение оправдано, будет дано в следующем разделе.

Последний подраздел посвящен рассмотрению грязного предела сверхпроводника $\ell_S \ll \xi_S$ и/или 2D плёнки $\ell_N \ll \xi_{2D}$, в котором характерные масштабы изменения неоднородной сверхпроводящей щели $\xi_S = \sqrt{\hbar D_S / \Delta_\infty}$ и $\xi_{2D} = \sqrt{\hbar D_2 / \Delta_{ind}}$ пропорциональны коэффициентам диффузии $D_S = v_S \ell_S / 3$ и $D_2 = v_N \ell_N / 2$ в обеих подсистемах соответственно. Уравнения Узаделя [111], описывающие в этом пределе поведение системы, записываются для функций Грина (1.21), усреднённых по направлениям импульса Ферми \mathbf{P}_N :

$$\check{g}_2(\mathbf{R}) = (2\pi)^{-2} \int d^2 P \check{G}_{2D}(\mathbf{P}, \mathbf{R}) . \quad (1.23)$$

1.3.1. Качественное рассмотрение

Уравнение Горькова для функций Грина в 2D слое (1.17) с эффективными собственно энергетическими частями (1.20) может быть понято на качественном уровне. Предположим, что где-то в двумерной подсистеме есть электронный волновой пакет (источник). Из этого источника распространяются волны электронной плотности (см. Рис. 1.3б), которые в том числе туннелируют и в сверхпроводник. Волны, попавшие туда, через какое-то время испытывают андреевское отражение и продолжают своё движение в виде дырок в противоположном направлении. В итоге после второго акта туннелирования квазичастицы демонстрируют эффективное андреевское отражение в двумерном слое, а следовательно, и сверхпроводящие корреляции. Такие сверхпроводящие корреляции могут быть представлены в виде индуцированной сверхпроводящей щели Δ_{ind} в уравнениях 2D подсистемы. Амплитуда индуцированной щели определяется величиной Γ , которая пропорциональна квадрату коэффициента туннелирования $T(\mathbf{R})$ (1.20) (из-за двукратного туннелирования квазичастиц) $\Gamma \sim T(\mathbf{R})^2 / \mu$.² Отметим, что при малой прозрачности барьера $\Gamma \ll \Delta$ эффективная сверхпроводящая щель оказывается равной $\Delta_{ind} = \Gamma$ и не зависит от величины истинной энергетической щели в сверхпроводнике [13, 58].

Величина $\Gamma \sim T^2 / \mu$ может быть выражена через дифференциальную проводимость $G = 1/RS$ единицы площади SN-контакта, образованного сверхпроводником и 2D слоем, в нормальном состоянии, (см. уравнение (51) в [58]): $\Gamma = G/4\pi G_0 \nu_N \sim \mu R_0/R$, где $G_0 = e^2/\pi\hbar$ – квант проводимости, а $\nu_N = P_N/2\pi v_N \hbar^2$ – плотность состояний двумерного газа. При этом условие применимости метода туннельного гамильтониана, описанное, например, в работе [51], соответствует малой прозрачности каждого из N транспортных каналов получающегося туннельного SN-контакта площади S . Это означает, что сопротивление этого

² Здесь и далее мы пренебрегаем различием между точками отсчёта химических потенциалов в сверхпроводнике и 2D слое: $E_F \approx \mu$.

SN-контакта R гораздо больше, чем сопротивление идеального контакта $R_0 = (NG_0)^{-1}$ площади S с $N = k_N^2 S/\pi$ поперечными модами, вычисленное по формуле Шарвина [73, 74]. С учётом оценки для коэффициента Γ , приведённой выше, описанное ограничение означает его малость $\Gamma \ll \mu$ по сравнению с уровнем Ферми. Поэтому даже в том случае, когда величина Γ порядка сверхпроводящей щели в сверхпроводнике $\Gamma \sim \Delta$, условие применимости метода может быть выполнено при больших сопротивлениях контакта $R \gg R_0$.

В литературе (см., например, [50, 52]) есть замечания о том, что область применимости туннельного гамильтониана выходит за рамки, описанные в [51]. Для этого необходимо определить связь между матричным элементом туннелирования T и прозрачностью барьера, входящей в формулу Ландауэра для проводимости. Однако, мы в дальнейшем будем пренебрегать обратным влиянием нормальной плёнки на состояние сверхпроводящего пространства. Достаточным условием этого пренебрежения является условие малой прозрачности SN-контакта $\Gamma/\mu \ll 1$, где заведомо работает метод туннельного гамильтониана [51].

Кроме того, в следующих главах для простоты, если это не оговорено особо, мы будем предполагать величину индуцированной щели малой $\Delta_{ind} \sim \Gamma \ll \Delta$, что позволяет нам не учитывать её зависимость от величины амплитуды щели в спектре сверхпроводника.

1.3.2. Когерентное туннелирование в чистом пределе

Данный раздел посвящён выводу уравнений Эйленбергера в 2D плёнке с учётом эффективных собственно энергетических членов (1.20) в модели туннелирования, при котором сохраняется проекция импульса на плоскость SN - границы. Условие сохранения проекции импульса определяет выражение для Фурье-образа $\check{T}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \check{t}\delta(\mathbf{q} - \mathbf{k}_{\parallel})$ коэффициента туннелирования $\check{T}(\mathbf{r}, \mathbf{R})$. Здесь \mathbf{k} (\mathbf{q}) – 3D (2D) Фурье-сопряжённая переменная к пространственной координате \mathbf{r} (\mathbf{R}). Тогда в координатном представлении локальный коэффициент туннелирования $\check{T}(\mathbf{R}) = \check{t} = \text{diag}(t, t^*)$ является постоянной величиной. Следуя стандартной процедуре вывода квазиклассических уравнений [112], в равенстве (1.17) перейдём к разностной координате $\mathbf{R}_d = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2$ и координате центра масс $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)/2$ в функциях Грина $\check{G}_{2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \check{G}_{2D}(\mathbf{R}, \mathbf{R}_d)$. Одновременно в интеграле от собственно энергетической части сдвинем переменную интегрирования $\mathbf{R}' = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}'_d$:

$$\check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_d) = \int d^2 R' \check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1; \mathbf{R}') \check{G}(\mathbf{R}'; \mathbf{R}_2) = \frac{d}{\hbar} \int d^2 R'_d \check{T}^+(\mathbf{R}_1) \times \\ \check{G}_S\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{R}_d - \mathbf{R}'_d}{2}, \mathbf{R}'_d\right) \check{T}(\mathbf{R}') \check{G}_{2D}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{R}'_d}{2}; \mathbf{R}_d - \mathbf{R}'_d\right),$$

Поскольку в квазиклассической теории величина $\hbar/(P_N \xi_{2D}) \ll 1$ является малым па-

раметром, то масштабы разностной δR_d и суммарной δR координат функций Грина $\check{\mathcal{G}}_{2D}$ существенно различаются: $\delta R \sim \xi_{2D} \gg \delta R_d \sim \hbar P_N^{-1}$. Такие же предположения можно сделать и для функции Грина сверхпроводника $\check{\mathcal{G}}_S(\mathbf{r}, \mathbf{r}_d)$ ($\mathbf{r}_{1,2} = \mathbf{r} \pm \mathbf{r}_d/2$), заменив ξ_{2D} на ξ_S и P_N на p_S (импульс Ферми в сверхпроводнике). Таким образом, благодаря разности масштабов можно пренебречь переменными $\mathbf{R}_d, \mathbf{R}'_d$ в первых аргументах функций Грина $\check{\mathcal{G}}_p$ по сравнению с координатой центра масс: $\check{\mathcal{G}}_p(\mathbf{R} - \mathbf{R}_a/2, \mathbf{R}_b) \approx \check{\mathcal{G}}_p(\mathbf{R}, \mathbf{R}_b)$. Это позволит в выражении для $\check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_d)$ перейти к функциям Грина в смешанном представлении (1.22):

$$\check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{P}) = \int d^2\mathbf{R}_d \check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{R}_d) e^{-i\mathbf{P}\mathbf{R}_d/\hbar} = \frac{dt^*}{2\pi\hbar^2} \int dp_z \check{\mathcal{G}}_S(\mathbf{R}, \mathbf{p}_3) \check{t}\check{\mathcal{G}}_{2D}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) ,$$

где $\mathbf{p}_3 = (\mathbf{P}, p_z)$. Функция Грина сверхпроводника в предположениях квазиклассики локализована вблизи поверхности Ферми $\xi_3 = \epsilon_S(\mathbf{p}) - \mu = 0$ на масштабе сверхпроводящей щели Δ [107]: $\check{\mathcal{G}}_S(\mathbf{R}; \mathbf{p}_3) = \hbar\pi i \check{g}_S(\mathbf{p}_S, \mathbf{R}) \delta_\Delta[\xi_3(\mathbf{p}_3)]$. Здесь $\check{g}_S(\mathbf{p}_S, \mathbf{R})$ – квазиклассическая функция Грина в сверхпроводнике, $\delta_\Delta(\epsilon)$ – физическая дельта-функция Дирака с масштабом $\delta\epsilon \sim \Delta$, а импульс Ферми \mathbf{p}_S имеет проекцию вдоль SN-границы раздела, равную \mathbf{P} . Если предположить, что поверхность Ферми сверхпроводника не является цилиндрической вдоль оси Oz , мы можем перейти от интегрирования по проекции импульса на эту ось p_z к интегрированию по кинетической энергии ξ_3 , отсчитанной от уровня Ферми: $dp_z = |dp_z/d\epsilon_S| d\xi_3$. Предполагая для простоты коэффициент туннелирования $T(\mathbf{R})$ действительным ($t = t^*$) и вводя новое обозначение $\Gamma = dt^2 \int dp_z \delta_\Delta[\xi_3(\mathbf{p}_3)]/2\hbar$, мы упростим выражение для интеграла $\check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{P})$:

$$\check{I}_L(\mathbf{R}; \mathbf{P}) = i\Gamma \check{g}_S(\mathbf{p}_S, \mathbf{R}) \check{\mathcal{G}}_{2D}(\mathbf{R}, \mathbf{P}) . \quad (1.24)$$

С помощью интегрирования уравнений по абсолютной величине импульса в 2D слое \mathbf{P} функции Грина смешанного представления (1.22) могут быть приведены к квазиклассической форме (1.21). С помощью стандартной процедуры преобразования квазиклассических уравнений с дельта-функциональной правой частью к однородным уравнениям [112], мы получим окончательный вид эффективных уравнений Эйленбергера в двумерном слое:

$$-i\hbar\mathbf{v}_N \nabla \check{g}(\mathbf{P}_N, \mathbf{R}) - [i\omega_n \check{\tau}_3 + \check{\Sigma}_T, \check{g}(\mathbf{P}_N, \mathbf{R})]_- = 0 , \quad (1.25)$$

где \mathbf{v}_N – вектор скорости Ферми в плёнке, $[\hat{A}, \hat{B}]_- \stackrel{\text{def}}{=} \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ – коммутатор. Собственно энергетическая часть, согласно сделанным предположениям выражается через сумму

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}; \mathbf{P}_N) = i\Gamma/2 \sum_{\eta=\pm} \check{g}_S(\mathbf{p}_{S\eta}, \mathbf{R}) , \quad (1.26)$$

$\mathbf{p}_{S\pm} = (\mathbf{P}_N, \pm p_{3z})$, $p_{3z}^2 = p_S^2 - P_N^2$. Амплитуда Γ индуцированных сверхпроводящих потенциалов $\check{\Sigma}_T$ при этом зависит от соотношения импульсов Ферми подсистем:

$$\Gamma = \frac{dt^2}{2\hbar} \int dp_z \delta_\Delta[\xi_3(\mathbf{p}_S)] = \frac{dt^2}{2\hbar} \begin{cases} m_S/p_{3z}, & \text{для } p_{3z}^2/2m_S \gg \Delta \\ (m_S/\Delta)^{1/2}, & \text{для } p_{3z}^2/2m_S \ll \Delta \end{cases} \quad (1.27)$$

и в случае большой разницы импульсов Ферми подсистем $p_{3z}^2/2m_S \gg \Delta$ соответствует оценке из раздела 1.3.1 $\Gamma \sim t^2/\mu$, благодаря малой толщине 2D плёнки $P_N d \sim \hbar$.

В дальнейшем мы ограничимся однородными задачами вдоль оси Oz в сверхпроводящем полупространстве $z > 0$. Поэтому в рамках приближений, сделанных в разделе 1.3.1, значение функции Грина $\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ (1.19) на границе с 2D системой совпадает с её объёмным значением $\check{G}_S^{(0)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Это означает, что слагаемые в формуле (1.28) совпадают:

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}; \mathbf{P}_N) = i\Gamma \check{g}_S(\mathbf{p}_{S+}, \mathbf{R}) . \quad (1.28)$$

Окончательно эффективный сверхпроводящий потенциал в уравнениях (1.25) для квазиклассической функции Грина $\check{g}(\mathbf{P}_N, \mathbf{R})$ в случае сохранения проекции импульса при туннелировании оказывается пропорционален квазиклассической функции Грина сверхпроводника $\check{g}_S(\mathbf{p}_{S+}, \mathbf{R})$ на траектории с тем же направлением $\mathbf{p}_{S+} = (\mathbf{P}_N, p_{3z})$ в плоскости 2D системы.

1.3.3. Некогерентное туннелирование в чистом пределе

Случай некогерентного туннелирования соответствует предположению о некоррелированных примесях в барьерном слое между рассматриваемыми подсистемами:

$$\langle T(\mathbf{R})T(\mathbf{R}') \rangle = t^2 \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') k_S^{-2} . \quad (1.29)$$

Множитель k_S^{-2} написан для сохранения размерности энергии у коэффициента t . Переменные t разные в когерентном и некогерентном случаях, но по порядку величины они оказываются равны, что и позволяет рассуждать в рамках оценок, написанных в подразделе 1.3.1.

Условие некоррелированности примесных центров (1.29) позволяет выйти за рамки квазиклассических приближений и записать уравнения Горькова (1.17) с локальным оператором собственно энергетической части:

$$\check{G}_{2D}^{-1}(\mathbf{R}_1) \check{G}_{2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) - \check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1) \check{G}_{2D}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \check{d}^{-1} \hbar \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) , \quad (1.30)$$

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') = \frac{d}{\hbar} \left\langle \check{T}^+(\mathbf{R}_1) \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}') \check{T}(\mathbf{R}') \right\rangle = \check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1) \delta(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}') . \quad (1.31)$$

Величина $\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1)$ определяется функцией Грина сверхпроводника при совпадающих аргументах: $\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}_1) = dt^2 \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_1) / \hbar k_S^2$. Используя выражение для координатной функции Грина сверхпроводника через квазиклассическую огибающую $\check{g}_S(\mathbf{n}_p, \mathbf{r})$ (см. работу [113]):

$$\check{G}_S^0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{m_S e^{-r_d/\ell_S}}{2\pi \hbar r_d} \left[\hat{1} \cos(k_S r_d) + i \check{g}_S(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}) \sin(k_S r_d) \right] \quad (1.32)$$

мы придём к окончательному ответу:

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}) = i\Gamma \langle \check{g}_S(\mathbf{p}_S, \mathbf{R}) \rangle , \quad (1.33)$$

где $\Gamma = dt^2 m_S / (2\hbar p_S)$. В выражении (1.32) мы использовали обозначения $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ для разностной координаты, определяющей направление траектории $\mathbf{n}_p = \mathbf{r}_d / |\mathbf{r}_d|$, и $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) / 2$ для координаты центра масс. Также при малых $\mathbf{r}_d \rightarrow 0$ мы вычли вклад нормального состояния (член, пропорциональный $\sim \hat{1}$), который не имеет отношения к сверхпроводимости.

Переход к уравнениям Эйленбергера в этом случае производится стандартным образом. Итоговые квазиклассические уравнения отличаются от когерентного случая усреднением собственно энергетической части по направлениям импульса Ферми \mathbf{p}_S . Иными словами, при помещении в барьер между подсистемами большого количества рассеивателей сверхпроводящие потенциалы $\check{\Sigma}_T(\mathbf{R})$ перестают зависеть от направления траектории в нормальном слое, то есть теряется информация об угловой зависимости состояний сверхпроводника. Однако, зависимость от энергии в этом случае остаётся. И, как мы увидим в следующей главе, это приведёт к модификации измеряемых величин (таких как спектр квазичастиц или плотность состояний).

1.3.4. Особенности многозонного случая в чистом пределе

В этом разделе мы рассмотрим индуцирование сверхпроводящих корреляций системе с многозонным спектром на примере двумерного топологического изолятора. Непрерывное описание двумерного топологического изолятора было развито в работах [23, 24] на основе предположения о сильном спин-орбитальном взаимодействии [23] в 2D материале с решёткой “пчелиных сот” (например, в графене) или в модели Кейна для квантовых ям на основе соединений $CdTe$ и $HgTe$ [24]. Будем рассматривать 2D ТИ в минимальной двухзонной модели [24]:

$$\check{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} \hat{H} & 0 \\ 0 & \hat{H}^* \end{pmatrix}, \quad (1.34)$$

где блоки гамильтониана $\hat{H} = \epsilon_{\mathbf{k}} + (\mathbf{d} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ и $\hat{H}^* = \epsilon_{\mathbf{k}} + (\mathbf{d}^*(-\hat{\mathbf{k}}) \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}})$ записаны через матрицы Паули $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ в пространстве подзон спектра ТИ, а также через диагональный оператор $\epsilon_{\mathbf{k}} = -\mu - D\hat{k}^2$ и вектор $\mathbf{d} = (\hat{k}_x A, -\hat{k}_y A, M - B\hat{k}^2)$. Здесь $\hat{\mathbf{k}} = -i\nabla$. Волновые функции спиновых состояний, отвечающих блокам \hat{H} и \hat{H}^* , ортогональны.³ Конкретные значения материальных параметров A , B , D и M в зависимости от ширины квантовой ямы представлены, например, в обзоре [114]. Уравнения БдЖК типа (1.1) с одночастичным гамильтонианом (1.34) записывается с использованием оператора симметрии обращения времени $\mathcal{T} = \hat{\zeta}_x \otimes \hat{\sigma}_0 \mathcal{C}$

³ Необходимо отметить, что в этой части главы, в отличие от предыдущих, нам потребуются полные уравнения Горькова с учётом спиновой степени свободы $\hat{\zeta}$.

с матрицами Паули $\hat{\zeta}$ в пространстве спинов. Однако, как упоминалось ранее, в этом разделе вместо феноменологической наведённой щели Δ_{ind} , учтённой в уравнениях (1.1), микроскопически будут найдены собственно энергетические части, которые в рассматриваемой области параметров имеют существенно матричный вид в пространстве подзон спектра ТИ.

Для удобства микроскопического описания будем рассматривать 2D ТИ в координатном представлении (см. [23, 115] в качестве примеров решёточных регуляризаций гамильтониана (1.34)) с двумя орбиталями “а” и “b”, соответствующими подзонам спектра (см. рис. 1.4). В модели туннельного гамильтониана (1.7) с локальным туннелированием гамильтониан нор-

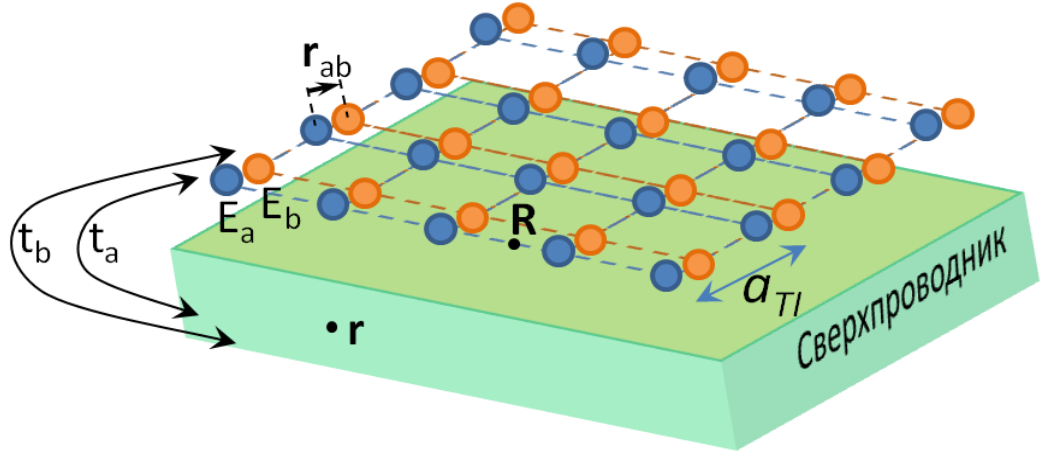


Рис. 1.4. Схематичное изображение двумерного топологического изолятора (2D ТИ) в виде двумерной решётки атомов с характерным расстоянием a_{TI} между узлами в туннельном контакте с объёмным сверхпроводником. Коэффициенты $t_{a,b}$ описывают туннелирование из сверхпроводника, который для простоты считается однозонным, в каждую из двух подзон $E_{a,b}$ спектра 2D ТИ. Координаты в двумерном слое и объёмном сверхпроводнике описываются радиус-векторами \mathbf{R} и \mathbf{r} соответственно. Вектор \mathbf{r}_{ab} соединяет атомы двух подрешёток “а” и “b” топологического изолятора.

мальной подсистемы (1.9) принимает следующий вид:

$$\hat{H}_{2D} = d \sum_{\substack{\zeta=\uparrow,\downarrow \\ m,m'=a,b}} \sum \int d^2 R \cdot \hat{c}_{\mathbf{R},m}^+ (\hat{\epsilon}_{2D,\zeta}(\mathbf{R}, m, m') - \mu \delta_{m,m'}) \hat{c}_{\mathbf{R},m'} . \quad (1.35)$$

В том же приближении гамильтониан взаимодействия подсистем (1.10) записывается

$$\hat{H}_T = d \sum_{\substack{\zeta=\uparrow,\downarrow \\ m,m'=a,b}} \sum \int d^2 R \left[\hat{\Psi}_{\zeta}^+(\mathbf{R}, 0) T_{\zeta}(\mathbf{R}, m) \hat{c}_{\mathbf{R},m} + \hat{c}_{\mathbf{R},m}^+ T_{\zeta}^+(\mathbf{R}, m) \hat{\Psi}_{\zeta}(\mathbf{R}, 0) \right] . \quad (1.36)$$

Здесь $\hat{\epsilon}_{2D,\uparrow}(\mathbf{R}, m, m') = \hat{H}(-i\nabla)_{m,m'}$ и $\hat{\epsilon}_{2D,\downarrow}(\mathbf{R}, m, m') = \hat{H}^*(-i\nabla)_{m,m'}$ – координатное представление гамильтониана (1.34) через подзонные индексы $m, m' = a, b$, а $\hat{c}_{\mathbf{R},m}$ ($\hat{c}_{\mathbf{R},m}^+$) – операторы уничтожения (рождения) частиц со спиновым состоянием ζ ⁴ и волновой функцией $|E_{\zeta}\rangle$ или

⁴ Из-за спин-орбитального взаимодействия в 2D ТИ сохраняется лишь проекция полного углового мо-

$|H\zeta\rangle$ в подзоне $m = a$ или $m = b$ спектра ТИ соответственно. Нормировка полевых операторов выбрана на объём квантовой ямы ТИ $[\hat{c}_{\zeta\mathbf{R},m}, \hat{c}_{\zeta\mathbf{R},m'}^+]_+ = d^{-1}\delta_{m,m'}\delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}')$ толщины d . Состояния $|E\pm\rangle = h_{even}^\pm(z)|\Gamma_6, \pm\frac{1}{2}\rangle + h_{odd}^\pm(z)|\Gamma_8, \pm\frac{1}{2}\rangle$ и $|H\pm\rangle = |\Gamma_8, \pm\frac{3}{2}\rangle$ записаны через базисные функции соответствующих представлений $|\Gamma_n, \pm\frac{p}{2}\rangle$ с определённым значением проекции полного углового момента \hat{J}_z на ось Oz , перпендикулярную границе раздела сверхпроводника и двумерного топологического изолятора. Чётная $h_{even}^\pm(z)$ и нечётная $h_{odd}^\pm(z)$ функции определяются в рамках модели Кейна [24]. Базисные функции представлений $|\Gamma_n, \pm\frac{p}{2}\rangle$ выражаются через сферически симметричную S функцию и функции X, Y, Z , отвечающие единичному значению орбитального момента следующим образом: $|\Gamma_6, \pm\frac{1}{2}\rangle = S_{\uparrow(\downarrow)}$, $|\Gamma_8, \pm\frac{3}{2}\rangle = (X \pm iY)_{\uparrow(\downarrow)}$ и $|\Gamma_8, \pm\frac{1}{2}\rangle \sim [(X \pm iY)_{\downarrow(\uparrow)} - 2Z_{\uparrow(\downarrow)}]$. Из этих равенств видно, что последняя базисная функция несобственная по проекции спина, что является следствием спин-орбитального взаимодействия в системе.

В простейшем варианте будем учитывать несохранение проекции спина в ТИ с помощью коэффициентов туннелирования, зависящих от спинового индекса ζ . Эта модель не является точной, поскольку не принимает во внимание туннелирование с сохранением спина из компоненты $(X \pm iY)_{\downarrow(\uparrow)}$ подзоны $|\Gamma_8, \pm\frac{1}{2}\rangle$ в состояние со спином вниз (вверх) в сверхпроводнике. Дополнительный учёт этого обстоятельства приводит к наведению эффективно триплетных корреляций в 2D ТИ. Как было указано во введении, вычислению индуцированных триплетных сверхпроводящих корреляций в 2D ТИ посвящены как численные [53], так и аналитические [57, 59] работы. Однако все эти вычисления сделаны в пренебрежении возможностью туннелирования со сменой проекции углового момента [57]. В единственной работе [54], где предполагается замешивание подзон спектра ТИ сверхпроводником, проведено прямое численное моделирование транспорта через контакт топологического изолятора со сверхпроводником. Мы в своей работе ограничимся рассмотрением синглетной сверхпроводящей щели и сфокусируем своё внимание на туннелирование с изменением угловой симметрии состояния. Более подробное рассмотрение вопроса индуцирования триплетной сверхпроводимости в ТИ может быть найдено в работе [33] и последующих литературных источниках, которые на неё ссылаются.

Описанная литературная ситуация демонстрирует необходимость проведения аналитических расчётов наведённых сверхпроводящих потенциалов в 2D ТИ с учётом туннелирования с изменением угловой симметрии состояния. Под туннелированием с изменением угловой симметрии состояния здесь понимается тот факт, что электрон из состояния с определённого \hat{J}_z . Поэтому в дальнейшем мы будем стараться говорить не о проекции спина, а о некотором спиновом состоянии в ТИ.

делённой проекцией углового момента m в топологическом изоляторе после двукратного туннелирования в сверхпроводник и обратно может оказаться, вообще говоря, в состоянии m' с другой проекцией углового момента. Покажем, что такое туннелирование возможно. Поскольку минимальная модель спектра 2D топологического изолятора содержит две подзоны, то кристаллическая структура реального соединения, удовлетворяющего этой модели, должна обладать как минимум двумя атомами в элементарной ячейке. При этом орбитали, отвечающие разным подзонам, локализованы на атомах разных подрешёток решётки Браве ТИ. Будем для простоты рассматривать однозонную модель спектра сверхпроводника. Поскольку область локализации орбитали сверхпроводника в общем случае не совпадает с положением атомов двух подрешёток ТИ, то туннелирование с сохранением углового момента относительно оси, проходящей через атом сверхпроводника, возможно из этой одной орбитали сверхпроводника в обе орбитали топологического изолятора.

По аналогии с (1.12) введём функции Грина, учитывая наличие дополнительного подзонного индекса $m = a, b$ у 2D переменной \mathbf{R} , нумерующего атомы в элементарной ячейке:

$$\langle T_\tau \hat{c}_{\mathbf{Y}_1} \hat{c}_{\mathbf{Y}_2}^\dagger \rangle = \text{diag} \left(G_{2D\uparrow}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2), G_{2D\downarrow}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \right)_{\zeta\zeta'}, \quad (1.37a)$$

$$\langle T_\tau \hat{\Psi}_\zeta(\mathbf{x}_1) \hat{c}_{\mathbf{Y}_2}^\dagger \rangle = \text{diag} \left(G_{T\uparrow}(\mathbf{x}_1, \mathbf{Y}_2), G_{T\downarrow}(\mathbf{x}_1, \mathbf{Y}_2) \right)_{\zeta\zeta'}, \quad (1.37b)$$

где $\mathbf{Y}_p = (\mathbf{X}_p, m_p)$. Необходимо отметить, что благодаря сохранению индекса ζ при туннелировании (1.36) уравнения Горькова на функции Грина с противоположными проекциями “спина” не запутываются и могут быть рассмотрены отдельно. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь уравнения для определённого значения ζ (например, $\zeta = \uparrow$) и опускать этот индекс у функций Грина и коэффициентов туннелирования, где в нём нет необходимости.

Сформируем из рассмотренных функций Грина (1.37) матрицы как в пространстве Горькова-Намбу (1.13), так и в подзонном пространстве:

$$\check{G}_{2D}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \check{G}_{2D}(\mathbf{X}_1 a, \mathbf{X}_2 a) & \check{G}_{2D}(\mathbf{X}_1 a, \mathbf{X}_2 b) \\ \check{G}_{2D}(\mathbf{X}_1 b, \mathbf{X}_2 a) & \check{G}_{2D}(\mathbf{X}_1 b, \mathbf{X}_2 b) \end{pmatrix},$$

$$\check{G}_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \check{G}_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2 a) & \check{G}_T(\mathbf{x}_1, \mathbf{X}_2 b) \end{pmatrix}.$$

При этом коэффициенты туннелирования также удобно объединить в матричный вид: $\check{T}(\mathbf{R}) \stackrel{\text{def}}{=} (\check{T}_{\mathbf{R}a}, \check{T}_{\mathbf{R}b})$, где $\check{T}_{\mathbf{R}m} = \text{diag}(t_{\mathbf{R}m,\uparrow}, t_{\mathbf{R}m,\uparrow}^*, t_{\mathbf{R}m,\downarrow}, t_{\mathbf{R}m,\downarrow}^*)$. Выражения для коэффициентов туннелирования $t_{\mathbf{R}m,\zeta}$ зависят от перекрытия волновых функций орбитали сверхпроводника и орбиталей двумерного топологического изолятора. Если орбитальный момент волновой функции в сверхпроводнике не равен нулю, то при изменении взаимной ориентации топологического

изолятора и сверхпроводника должно меняться и соотношение коэффициентов туннелирования в разные подзоны спектра ТИ. Иными словами, коэффициенты туннелирования зависят от направления вектора \mathbf{r}_{ab} , соединяющего атомы двух подрешёток ТИ (см. рис. 1.4).

Аналогично разделу 1.3.3 будем рассматривать случай некогерентного туннелирования и считать примеси в барьерном слое, разделяющем подсистемы, дельта-коррелированными. Для простоты будем предполагать, что коэффициенты туннелирования в разные подзоны спектра ТИ зависят от реализации примесей одинаково. В итоге аналогично (1.29):

$$\langle t_{\mathbf{R}m} t_{\mathbf{R}'m'} \rangle = t_m t_{m'} \delta(\mathbf{R} - \mathbf{R}') k_S^{-2}. \quad (1.38)$$

Воспользуемся развитой в предыдущем разделе методикой для вычисления собственно энергетической части уравнения Горькова в 2D подсистеме. В результате получим выражение для локального сверхпроводящего потенциала $\check{\Sigma}_T(\mathbf{R})$ из уравнения (1.31) в виде:

$$\check{\Sigma}_T(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} \check{\Sigma}_{aa}(\mathbf{R}) & \check{\Sigma}_{ab}(\mathbf{R}) \\ \check{\Sigma}_{ba}(\mathbf{R}) & \check{\Sigma}_{bb}(\mathbf{R}) \end{pmatrix}, \quad (1.39)$$

где $\check{\Sigma}_{mm'}(\mathbf{R}) = d\check{t}_m^+ \check{G}_S^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \check{t}_{m'}/(\hbar k_S^2)$. Таким образом, собственно энергетические части в 2D ТИ имеют существенно матричную структуру в пространстве подзон a, b , не сводящуюся к тривиальной скалярной щели в спектре возбуждений.

1.3.5. Грязный предел

Данный раздел посвящён выводу уравнений в 2D нормальном слое для квазиклассических функций Грина в грязном пределе сверхпроводящего электрода $\ell_S \ll \xi_S$. Аналогично выражению (1.23) уравнение Узаделя в сверхпроводнике пишется на квазиклассические функции Грина $\check{g}_S(\mathbf{r})$, усреднённые по направлению Ферми-импульса \mathbf{p} :

$$\check{g}_S(\mathbf{r}) = \langle \check{g}_S(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (2\pi)^{-3} \int d^3 p \check{\mathcal{G}}_S(\mathbf{p}, \mathbf{r}). \quad (1.40)$$

Поскольку в этом случае собственно энергетическая часть (1.31) не зависит от направления квазиклассической траектории \mathbf{v}_N переход от уравнений Горькова (1.17) к уравнениям Эйленбергера и Узаделя в 2D плёнке совпадает со случаем некогерентного туннелирования 1.3.3 и проводится стандартным образом [112]. Но необходимо отметить, что усреднение по направлению траектории \mathbf{v}_S в сверхпроводнике в (1.31) не влияет на выражение для индуцированных потенциалов, поскольку функция Грина (1.40) уже не зависит от \mathbf{v}_S . Поэтому для собственно энергетической части в двумерной плёнке, находящейся в контакте с грязным сверхпроводником, равнозначно можно использовать как формулу (1.28), так и (1.33).

В итоге уравнения Эйленберга в нормальной подсистеме в чистом пределе совпадают с (1.25) с любым из выражений (1.28) или (1.33) для $\check{\Sigma}_T$.

В то же время, в грязном пределе двумерного слоя уравнение Узаделя принимает следующий вид [107]:

$$iD_2 [g_2 \nabla^2 f_2 - f_2 \nabla^2 g_2] - 2(E + \Sigma_1)f_2 + 2\Sigma_2 g_2 = 0, \quad (1.41)$$

через компоненты функции Грина \check{g}_2 и собственно энергетической части $\check{\Sigma}_T$ в пространстве Горькова-Намбу:

$$\check{g}_2 = \begin{pmatrix} g_2 & f_2 \\ -f_2^+ & -g_2 \end{pmatrix}, \quad \check{\Sigma}_T = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ -\Sigma_2^+ & -\Sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

1.4. Выводы к первой главе

В этой главе представлено теоретическое описание сверхпроводящей щели в спектре нормальных двумерных Ферми-систем, наведённой эффектом близости с массивным сверхпроводником, на основе двух подходов, феноменологического и микроскопического.

Первый подход, описанный для графена в работе [61], является феноменологическим и описывает эффект близости на основе предположения о сохранении симметрии сверхпроводящего параметра порядка при проникновении его в нормальную 2D плёнку. При этом не учитывается возможное межзонное туннелирование, если нормальная подсистема рассматривается в многозонном случае. Текст, посвященный рассмотрению этого метода, является обзорным по существующей литературе и введён в диссертацию для цельности её восприятия, поскольку в последующих двух главах будет активно использоваться.

Микроскопический подход, основанный на методе туннельного гамильтониана и развитый во второй части данной главы, частично рассматривался в литературе (см., например, [55, 57, 58]). Однако в статьях [A1, A4] было проведено обобщение этого метода.

В работе [A1] на примере двумерного топологического изолятора в решёточном представлении был рассмотрен случай туннелирования с участием нормального слоя с многозонной структурой спектра. При этом для простоты электронные состояния 2D ТИ считались собственными по спину (в общем случае это предположение неверно, см., например, [33]). Это упрощение позволило нам сосредоточить своё внимание на эффекте туннелирования с изменением угловой симметрии состояния. В рамках этого эффекта оператор наведённой сверхпроводящей щели в двумерной подсистеме имеет существенно матричный вид в пространстве подзон. Как будет показано в третьей главе, матричная структура сверхпроводящей собственно энергетической части приводит к анизотропии наведённой щели в спектре

квазичастиц в зависимости от направления распространения краевых мод топологического изолятора, а также к локализации андреевских состояний, циркулирующих вдоль границы 2D ТИ.

В другой нашей работе [A4] были разобраны случаи когерентного и некогерентного туннелирования между массивным сверхпроводящим электродом и однозонной двумерной системой и выведены эффективные собственно энергетические части в этих случаях. Метод применим для неоднородных, нестационарных задач при конечной температуре в области параметров, где амплитуда собственно энергетической части Γ гораздо меньше энергии Ферми системы $\Gamma \ll \mu$. При дальнейшем рассмотрении этот метод будет основой для изучения энергетических и транспортных свойств систем в наведённой сверхпроводимостью, в том числе во внешнем магнитном поле (в смешанном состоянии).

Электронная структура вихревых состояний в двумерных и квазидвумерных системах с индуцированной сверхпроводимостью

2.1. Введение

В этой главе представлены вычисления спектра и плотности локализованных состояний вблизи центра вихря, индуцированного в двумерной нормальной системе (графене или двумерной металлической плёнке) за счёт эффекта близости с объёмным сверхпроводником. Вихрь предполагается уединённым, то есть расстояние до ближайших вихрей гораздо больше длины когерентности в 2D подсистеме ξ_{2D} . Ось Oz цилиндрической системы координат выбирается вдоль оси вихря (см. рис. 2.1a). Кроме того, для простоты считается, что массивный сверхпроводник является сверхпроводником сильно второго рода $\lambda_S \gg \xi_S, \xi_{2D}$, то есть лондоновская глубина λ_S проникновения магнитного поля в нём гораздо больше не только длины когерентности в сверхпроводнике ξ_S , но и в 2D слое ξ_{2D} . Значения внешнего магнитного поля рассматриваются больше первого критического поля объёмного сверхпроводника $H > H_{c1} \sim \Phi_0 / (4\pi\lambda_S^2) \ln(\lambda_S/\xi_S)$, чтобы вихрь Абрикосова проник в сверхпроводник, но гораздо меньше верхнего критического поля для *обеих* подсистем $H \ll H_{c2}^{(S)}, H_{c2}^{(2)}$. Здесь $H_{c2}^{(S),(2)} = \Phi_0 / 2\pi\xi_{S,2D}^2$. В этом предельном случае можно пренебречь орбитальным эффектом распаривания куперовских пар магнитным полем и не учитывать вектор-потенциал в уравнениях (1.2, 1.13).

Оказывается, особенности линейного спектра одночастичного гамильтониана (1.2) графена в пренебрежении междолинным рассеянием проявляются в основном в отличном (от случая обычного сверхпроводника) квантовании углового момента ν . Так для вихрей нечётной кратности M он является целым числом $\nu \in \mathcal{Z}$, в то время как для вихрей чётной M угловой момент становится полуцелым $\nu + 1/2 \in \mathcal{Z}$. Это позволяет говорить о существовании в графене точной нулевой моды¹, локализованной вблизи вихрей с нечётной завихренностью M , а следовательно, об отсутствии энергетической щели в спектре возбуждений. Кроме того, наличие простого способа изменения уровня Ферми в графене посредством эф-

¹ Нулевые моды – это некоторый жаргон, означающий, что энергия квазичастичных возбуждений, отсчитываемая от энергии Ферми, равна нулю.

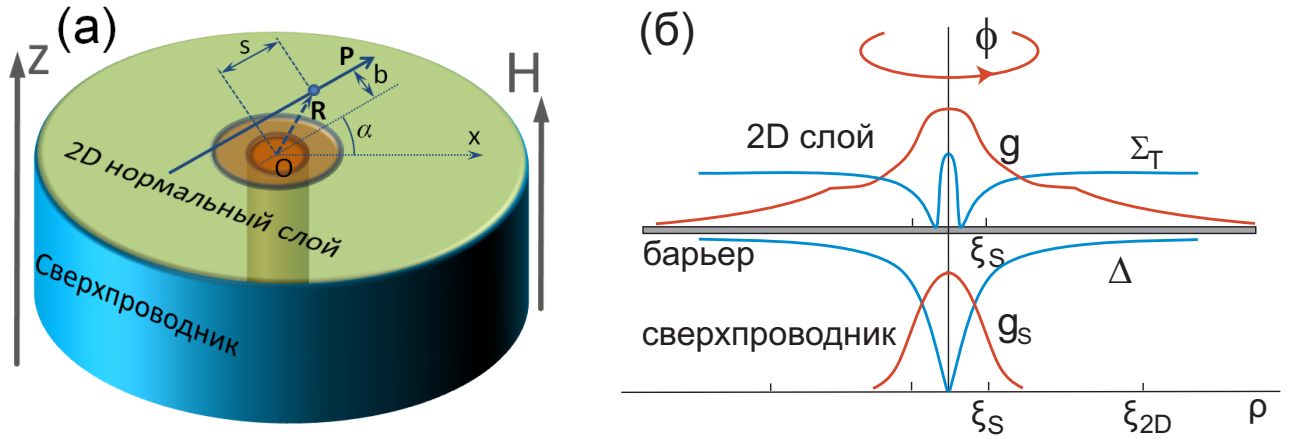


Рис. 2.1. (а) Вихрь, ориентированный вдоль магнитного поля, в 2D системе на поверхности массивного сверхпроводника. Сплошной синей стрелкой обозначено направление квазиклассической траектории, определяемое углом α между импульсом Ферми \mathbf{P} и осью Ox . Штриховая линия отвечает радиус-вектору \mathbf{R} , через который проходит траектория с прицельным параметром $b = -\nu/k_N$, который записан через угловой момент ν и волновой вектор Ферми в плёнке k_N . Большим и малым оранжевыми кругами обозначены области подавления сверхпроводящей щели в двумерном слое и в сверхпроводнике соответственно; (б) Схематичное изображение радиальных профилей сверхпроводящих щелей Δ и Σ_T (синим) и функции Грина g_S и g (красным) в сверхпроводнике и 2D слое. Наведённая щель Σ_T , кроме адиабатической компоненты, имеет локализованную часть на масштабе ξ_S , что приводит к двухмасштабной зависимости функции Грина в нормальной плёнке.

факта поля даёт возможность проследить трансформацию спектра CdGM в графене [A3] от больших значений энергий Ферми $\mu \gg \Delta_{ind}$, где отличие графена проявляется лишь в правиле квантования углового момента, до случая практически нулевого допирования $\mu \simeq 0$, характеризующегося M нулевыми модами $\epsilon_M^{(n)}(|\nu| = n) = 0$ в области угловых моментов $\nu \lesssim k_N \xi_{2D}$ [85]. Здесь $k_N = \mu/\hbar v_N$ и v_N – волновой вектор и скорость Ферми в графене. Энергия остальных состояний в последнем предельном случае близка к краю сверхпроводящей щели $\epsilon_M^{(n)}(|\nu| \neq n) \simeq \Delta_{ind}(\rho \rightarrow \infty)$.

При более строгом *микроскопическом* описании наведённой сверхпроводимости в двумерной подсистеме плотность квазичастичных состояний в однородном состоянии в зависимости от энергии демонстрирует *две* различные особенности (см. рис. 1.3а во введении), ответственные за две энергетические сверхпроводящие щели в спектре [13]. В вихревом состоянии объёмного сверхпроводника неоднородное состояние параметра порядка индуцирует в 2D плёнке сложную вихревую структуру. В пределе больших индуцированных длин когерентности $\xi_{2D} \gg \xi_S$ структуру наведённых потенциалов можно представить как сумму

локализованных функций сверхпроводящей щели и эффективного сдвига квазичастичной энергии, спадающих на масштабе размера вихря в сверхпроводнике $\rho \sim \xi_S$, а также адиабатической части наведённой щели Δ_{adiab} , которая на масштабе ξ_S монотонно выходит на своё однородное значение Δ_{ind} . Необходимо отметить, что в случае сохранения проекции импульса на плоскость SN - границы (когерентное туннелирование) локализованные части собственно энергетических частей имеют полюса при энергиях, совпадающих со спектром CdGM $\varepsilon_0(\nu)$ в объёмном сверхпроводнике. Такое распределение индуцированных потенциалов и наличие указанных полюсов в их локализованных частях приводит к формированию *двух* аномальных ветвей в подщелевом спектре вихря [A4]. Одна из спектральных ветвей $\varepsilon_2(\nu)$ повторяет спектр CdGM с перенормированными амплитудой щели (с Δ_∞ на Δ_{ind}) и длиной когерентности (с ξ_S на ξ_{2D}). Другая ветвь $\varepsilon_1(\nu)$ качественно следует спектру CdGM объёмного сверхпроводника. Однако в области над индуцированной щелью $E > \Delta_{ind}$ локализованные состояния, соответствующие этой ветви, становятся резонансными: появляется утечка в состояния непрерывного спектра двумерной плёнки, и энергии локализованных состояний приобретают конечные мнимые части. При наличии беспорядка как в барьере, так и в сверхпроводнике информация о спектральной ветви $\varepsilon_1(\nu)$ сверхпроводника теряется при туннелировании без сохранения импульса в плоскости. Иными словами, в спектре подщелевых состояний двумерного слоя наблюдается лишь одна из рассмотренных выше спектральных ветвей. Конкретные особенности указанной ветви определяются степенью беспорядка в барьере и подсистемах и подробно будут рассмотрены далее в этой главе.

Для прямого измерения локальной плотности состояний чаще всего применяется метод сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии. С экспериментальной точки зрения измеримой характеристикой в этом методе является дифференциальная проводимость dI/dV контакта “игла-образец” в зависимости от затворного напряжения и латерального положения иглы микроскопа относительно центра вихря. В случае применения несверхпроводящей металлической иглы величина dI/dV в основном определяется локальной плотностью квазичастичных состояний $N(\rho, E)$ в приповерхностном слое образца. В работе соискателя с соавторами [A4] показано, что плотность состояний в нормальном приповерхностном слое может демонстрировать необычные свойства: от нескольких пиков так называемой zero-bias аномалии в когерентном случае до её расщепления в случае примесей в барьерном слое [89–91] и аномально большого размера кора вихря [93–98]. Большинство указанных особенностей плотности состояний в тех или иных системах наблюдаются в экспериментах. Однако их теоретическое объяснение чаще всего является более сложным, чем предложенное в работе соискателя.

2.2. Электронная структура локализованных состояний в коре вихря в графене

В данном разделе будет рассмотрен электронный спектр квазичастиц, локализованных в коре вихря, который предположительно возникает в монослое графена в контакте с объёмным сверхпроводником во внешнем магнитном поле. На протяжении всего раздела будет использовано феноменологическое описание сверхпроводимости в графене, развитое в разделе 1.2.

Как было указано во введении, в литературе ранее изучался спектр связанных состояний в графене при нулевой энергии Ферми [81, 84, 85] в предположении о бесконечно малом $\Delta_{ind}(\rho) = \text{const}$ или большом $\Delta_{ind}(\rho) \sim \rho$ размере кора вихря по сравнению с длиной когерентности ξ_{2D} . Также был рассмотрен вопрос *нулевых мод* для вихрей произвольной кратности M в экситонном конденсате в бислое графена [82] и для одноквантовых вихрей в различных сверхтекучих фазах, описываемых теорией Дирака на решётке пчелиных сот [83]. Нами было развито теоретическое описание электронной структуры многоквантового вихря для *произвольного* химического потенциала μ и радиальной зависимости сверхпроводящей щели $\Delta_{ind}(\rho)$ и показано, что при увеличении энергии Ферми расстояние между уровнями энергетического спектра уменьшается, тем самым всё больше состояний эффективно входят в подщелевую область. Иными словами, M нулевых мод при нулевом $\mu = 0$ трансформируются в аномальные ветви спектра $\epsilon_M^{(i)}(\nu)$ от непрерывного параметра ν , где величина $i = -(M-1)/2, \dots, (M-1)/2$ пробегает M целых (или полуцелых) значений. При этом наличие точных нулевых мод в спектре при *конечном* химическом потенциале зависит от чётности завихренности M . Здесь мы называли ветвями спектра зависимости $\epsilon_M^{(i)}(\nu)$ от величины орбитального момента ν как от непрерывного параметра, однако наличие точных нулевых мод определяется также квантованием этой переменной ν . Для вихрей нечётной кратности существует одна ветвь спектра (будем называть её $\epsilon_M^{(0)}(\nu)$), которая пересекает уровень Ферми при нулевом значении углового момента. Поскольку в этом случае согласно правилу квантования угловой момент является целым числом, то рассматриваемая ветвь содержит точную нулевую моду $\epsilon_M^{(0)}(0) = 0$. Пересечения остальными $M-1$ спектральными ветвями уровня Ферми (для непрерывного ν) в общем случае не являются собственными значениями спектра (из-за квантования орбитального момента). Лишь при определённых значениях μ , когда соответствующая ветвь $\epsilon_M^{(i)}(\nu)$ имеет пересечение с уровнем Ферми при целом значении ν : $\epsilon_M^{(i)}(\nu = n) = 0$ в спектре появляется ещё одна нулевая мода. Благодаря электрон-дырочной симметрии спектральных ветвей $\epsilon_M^{(i)}(\nu) = -\epsilon_M^{(-i)}(-\nu)$, нулевые моды при

$\nu \neq 0$ могут появиться лишь попарно для ν и $-\nu$ одновременно. При больших значениях химического потенциала $\mu \gg \Delta_{ind}$ нулевые моды на пары аномальных ветвей с $\nu \neq 0$ появляются периодически по импульсу Ферми $P_N = |\mu|/v_N$ с периодом $\delta P_N \sim \hbar/\xi_{2D}$. Для вихрей с *чётным* числом квантов потока ситуация аналогична предыдущей с точностью до того, что в этом случае нет ветви $\epsilon_M^{(0)}(\nu)$, пересекающей начало координат на плоскости (ν, μ) , а нулевые моды появляются при полуцелых значениях углового момента. Факты появления нулевых мод $\epsilon_M^{(i)}(\nu)$ парами при ν и $-\nu$, а также период их появления при больших значениях энергии Ферми $\mu \gg \Delta_{ind}$ остаются неизменными.

В следующем разделе мы обсудим особенности уравнений БдЖ (1.1) с одночастичным гамильтонианом (1.2), используемых в наших последующих вычислениях. Затем в разделе 2.2.2 будет проведён анализ точных решений для нулевых мод и выведен критерий их существования. Разделы 2.2.3 и 2.2.4 посвящены расчёту спектра аномальных ветвей в квазиклассическом пределе больших химических потенциалов $\mu \gg \Delta_{ind}$. В заключении этой части представлены численные результаты и их сравнение с аналитическими выкладками.

2.2.1. Уравнения Боголюбова-де Жена для вихревого состояния

Благодаря тому, что уравнения (1.1) с одночастичным гамильтонианом (1.2) не зависят от спина и изоспиновой степени свободы ($\hat{H} \sim \pi_0$), мы в на протяжении всей этой части будем рассматривать лишь ту компоненту $\hat{\Psi}_{\pi+} = (\hat{u}_{\pi+}, \hat{v}_{\pi+})$ волновой функции графена $\check{\Psi}$, которая отвечает определённой проекции спина $\varsigma = \uparrow$ и определённой долине \mathbf{K} электронной её части $\hat{u}_{\pi+} = (u_A, u_B)$. В дальнейшем мы будем опускать индексы “ $\pi+$ ” у этой функции $\hat{\Psi}_{\pi+} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\Psi}$.² Необходимо отметить, дырочные компоненты $\hat{v}_{\pi+} = (v_A, v_B)$ волновой функции $\hat{\Psi} = (\hat{u}, \hat{v})$ в рамках рассматриваемой модели наведённой сверхпроводимости в графене отвечают другой долине \mathbf{K}' зоны Бриллюэна графена. Поэтому волновая функция $\hat{\Psi}$ удовлетворяет следующим уравнениям Дирака - Боголюбова - де Жена в пренебрежении вектор-потенциалом в вихревом состоянии $\Delta_{ind} = \Delta_{ind}(\rho)e^{iM\phi}$ сверхпроводящего графена:

$$v_N \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}} \hat{u} + \Delta_{ind}(\rho) e^{iM\phi} \hat{v} = (E + \mu) \hat{u} , \quad (2.1a)$$

$$-v_N \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}} \hat{v} + \Delta_{ind}(\rho) e^{-iM\phi} \hat{u} = (E - \mu) \hat{v} . \quad (2.1b)$$

Всюду в дальнейшем мы предполагаем уровень Ферми малым по сравнению с энергетической шириной зоны Бриллюэна в графене (см. на рис. 1a во введении разницу энергий в кониче-

² Обозначения функции $\hat{\Psi} = (\hat{u}_{\pi+}, \hat{v}_{\pi+})$ отличается от обозначения $\check{\Psi} = (\check{u}, \check{v})$ полной волновой функции наличием других символов над ней.

ской точке и в центре зоны Бриллюэна), что позволяет нам не учитывать взаимодействие долин. Кроме того, мы пренебрегаем эффектом зеемановского расщепления уровней.

Необходимо отметить, что решения одночастичных уравнений (1.2) в графене обладают следующей особенностью вне зависимости от уровня химического потенциала: разность фаз компонент волновой функции, отвечающих разным подрешёткам А и В графена (см. рис. 1.2б), существенным образом зависит от направления импульса волновой функции и меняется на 2π при полном обороте. Наличие этой дополнительной фазы может быть обнаружено явным образом при записи гамильтониана (1.2) в цилиндрической системе координат (ρ, ϕ) , поскольку дифференциальные операторы:

$$\hat{P}_x \pm i\hat{P}_y = e^{\pm i\phi} \hbar [-i\partial/\partial\rho \pm \rho^{-1}\partial/\partial\phi] \quad (2.2)$$

содержат фазовую зависимость $e^{\pm i\phi}$ от азимутального угла радиус-вектора, а не только от производной по угловой переменной ϕ . Наличие дополнительной разности фаз, зависящей от координат, между подрешётчными компонентами волновой функции приводит, как будет показано, к изменению квантования углового момента волновой функции.

Действительно, благодаря цилиндрической симметрии рассматриваемой задачи можно искать решение в виде собственной функции углового момента ν и снять фазу с оператора сверхпроводящей щели в уравнениях (2.1):

$$\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} = e^{i\nu\phi - i\delta_z(\phi/2 - \pi/4)} \begin{pmatrix} e^{iM\phi/2} \hat{U}_\nu(\rho) \\ e^{-iM\phi/2} \hat{V}_\nu(\rho) \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

При этом однозначность волновой функции при повороте системы координат вокруг оси вихря Oz на угол, кратный 2π , $\phi \rightarrow \phi + 2\pi k$ требует, чтобы дополнительная фаза $2\pi\nu + \pi(M-1)$, набираемая этой функцией, была кратна полному обороту 2π . Из этого простого условия следует квантование углового момента ν , описанное выше: $\nu + (M-1)/2 \in \mathcal{Z}$, которое отличается от случая обычного сверхпроводника $\nu + M/2 \in \mathcal{Z}$, благодаря указанной зависимости подрешёточной структуры гамильтониана графена (1.2) от направления импульса.

2.2.2. Основные свойства нулевых мод: точное решение и критерий существования

Уравнения (2.1) инвариантны относительно следующего преобразования: $E \rightarrow -E$, $i\hat{\sigma}_y \hat{u}^* \rightarrow \hat{v}$, $i\hat{\sigma}_y \hat{v}^* \rightarrow -\hat{u}$, аналогичного симметрии уравнений БдЖ в обычном сверхпроводнике [102]. Иными словами, для любой нулевой моды (\hat{u}_i, \hat{v}_i) при произвольных уровне Ферми μ и завихренности M существует (необязательно другая) нулевая мода (\hat{u}_j, \hat{v}_j) , связанная

с ней этой симметрией: $\hat{v}_j = i\hat{\sigma}_y\hat{u}_i^*$, $\hat{u}_j = -i\hat{\sigma}_y\hat{v}_i^*$. При этом, согласно выражению (2.3), эти моды отвечают равным по модулю и противоположным по знаку угловым моментам ν и $-\nu$. Рассмотрим отдельно два случая:

- (1) волновая функция нулевой моды под действием преобразования электрон-дырочной симметрии переходит сама в себя ($i = j$), что возможно лишь для нечётных M и нулевых значений углового момента $\nu = 0$;
- (2) угловой момент не равен нулю $\nu \neq 0$, поэтому есть пара нулевых мод, связанных между собой тем же преобразованием.

В первом случае $\hat{v} = i\hat{\sigma}_y\hat{u}^*$, $E = 0$ система уравнений (2.1) уменьшается вдвое

$$\left[v_N \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{P}} - \mu \right] \hat{u} + i\Delta_{ind}\hat{\sigma}_y\hat{u}^* = 0, \quad (2.4)$$

и может быть решена с помощью подстановки $\hat{u} = \zeta_v(\rho)\hat{U}^{(0)}$, где вектор-столбец

$$\hat{U}^{(0)} = C_0 \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} e^{i(M-1)\phi/2} J_{(M-1)/2}(k_N\rho) \\ e^{+i\pi/4} e^{i(M+1)\phi/2} J_{(M+1)/2}(k_N\rho) \end{pmatrix}$$

с функцией Бесселя m -того порядка $J_m(x)$ и действительной постоянной C_0 удовлетворяет уравнению (2.4) в нормальном состоянии, а

$$\zeta_v(\rho) = e^{-K(\rho)}; \quad K(\rho) = \frac{1}{\hbar v_N} \int_0^\rho |\Delta_{ind}(\rho')| d\rho'. \quad (2.5)$$

В случае $M = 1$ этот результат совпадает с результатом работы [83] для синглетного параметра порядка³. Учёт вектор-потенциала в калибровке $A = A_\phi(\rho)$, которым пренебрегалось выше, может быть проведён модификацией функции нормального состояния $\hat{U}^{(0)}$.

Вопрос о существовании нулевых мод второго типа $\nu \neq 0$ удобнее рассматривать на языке функций $\hat{U}_{\pm\nu} = (\hat{U}_{1,\pm\nu}, \hat{U}_{2,\pm\nu})$ и $\hat{V}_{\pm\nu} = (\hat{V}_{1,\pm\nu}, \hat{V}_{2,\pm\nu})$ уравнения (2.3), выразив дырочные компоненты через электронные согласно электрон-дырочной симметрии $V_{2,\nu} = U_{1,-\nu}$ и $V_{1,\nu} = -U_{2,-\nu}$. Тогда уравнения для электронных компонент $U_{\pm\nu}$ примут следующий вид:

$$\left(\frac{d}{d\rho} - \frac{N_-}{\rho} + \frac{eA_\phi}{\hbar c} \right) U_{1,\nu} + \frac{|\Delta_{ind}|}{\hbar v_N} U_{1,-\nu} = \frac{\mu}{\hbar v_N} U_{2,\nu}, \quad (2.6a)$$

$$\left(\frac{d}{d\rho} + \frac{N_+}{\rho} - \frac{eA_\phi}{\hbar c} \right) U_{2,\nu} + \frac{|\Delta_{ind}|}{\hbar v_N} U_{2,-\nu} = -\frac{\mu}{\hbar v_N} U_{1,\nu}. \quad (2.6b)$$

³ Уточнение про синглетный параметр порядка введено по той причине, что в работе [83] было проведено рассмотрение различных фаз сверхпроводящего порядка в отличие от настоящей работы, где мы ограничились ли случаем изотропного спаривания.

Здесь введены обозначения $N_{\pm} = \nu + (M \pm 1)/2$ и учтен вектор-потенциал в виде $A_{\phi}(\rho)$.

Умножая первое уравнение на $U_{2,\nu}$, а второе на $U_{1,\nu}$, мы можем сложить их между собой, вычесть из суммы другую пару уравнений для $(-\nu)$ и получить следующее интегральное уравнение, проинтегрировав по всему слою графена:

$$\mu \int_0^{\infty} (U_{2,\nu}^2 - U_{2,-\nu}^2 - U_{1,\nu}^2 + U_{1,-\nu}^2) \rho d\rho = \hbar v_N \int_0^{\infty} \frac{d}{d\rho} [\rho(U_{1,\nu}U_{2,\nu} - U_{1,-\nu}U_{2,-\nu})] d\rho. \quad (2.7)$$

Для локализованных состояний, регулярных в начале координат, правая часть уравнения (2.7) оказывается равной нулю, следовательно, и левая часть должна исчезать. При ненулевых значениях углового момента $\nu \neq 0$ и энергии Ферми $\mu \neq 0$ этот критерий в общем случае не выполняется, что означает, в свою очередь, отсутствие нулевых мод. В заключение, оценим значение левой части уравнения (2.7) в области малых уровней Ферми $\mu \ll \Delta_{ind}$ по теории возмущений. В нулевом приближении $\mu = 0$ согласно работе [85] для положительных завихренностей $M \geq 1$, функции $U_{2,\nu} = 0$ равны нулю в области угловых моментов $|\nu| \leq \frac{1}{2}(M - 1)$, в то время как функции $U_{1,\nu}$ регулярны и локализованы. Иными словами, есть ровно $|M|$ нулевых энергетических уровней. Для малых уровней Ферми интеграл (2.7) в первом порядке теории возмущений можно найти, используя решения уравнений (2.6) для $\mu = 0$. Подставляя известные выражения для функций $U_{1,\pm\nu}(\rho) = \rho^{M/2} \mathcal{K}_{\pm\nu-1/2}(\rho/\xi_{2D})$ при $M > 0$ из работы [85] через функции Макдональда m -того порядка $\mathcal{K}_m(x)$, можно легко убедиться, что интеграл от величины $U_{1,\nu}^2 - U_{1,-\nu}^2$ не равен нулю, как только $\nu \neq 0$. Это означает, что в области малых уровней допирования нет нулевых уровней энергии при конечных значениях ν . Однако за рамками теории возмущений нулевые моды могут появляться парами при угловых моментах ν и $-\nu$.

2.2.3. Трансформация мод при больших значениях уровня Ферми.

Квазиклассическое приближение для малых угловых моментов $\nu \ll k_N \xi_{2D}$

Для полноты картины трансформации спектра в двух следующих подразделах будет рассмотрено квазиклассическое приближение уравнений (2.1) для больших энергий Ферми $\mu \gg \Delta_{ind}$. Следуя стандартной процедуре вывода квазиклассических уравнений для волновых функций уравнений БдЖ [116, 117], перейдём в импульсное представление: $\psi(\mathbf{R}) = \int d^2P e^{i\mathbf{P}\mathbf{R}/\hbar} \psi(\mathbf{P}) / (2\pi\hbar)^2$. Здесь импульс представляется в виде своего модуля и угла поворота относительно оси Ox : $\mathbf{P} = P(\cos \alpha, \sin \alpha)$. Для удобства дальнейших выкладок преобразуем функции $\hat{u} = \hat{S}\hat{g}_u$ и $\hat{v} = \hat{S}\hat{g}_v$ так, чтобы ось квантования подрешёточной степени свободы σ совпадала с осью импульса \mathbf{P} , где $\hat{S} = e^{-i\alpha\hat{\sigma}_z/2}(\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x)/\sqrt{2}$, $\hat{S}^+ = (\hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_x)e^{i\alpha\hat{\sigma}_z/2}/\sqrt{2}$. Тогда

уравнения БдЖ (2.1) на функции $\hat{g}_{u,v}$ после такого преобразования примут следующий вид:

$$[v_N \hat{\sigma}_z P - \mu] \hat{g}_u + \hat{h}_{\tilde{A}} \hat{g}_u + \hat{h}_{\tilde{\Delta}} \hat{g}_v = E \hat{g}_u , \quad (2.8a)$$

$$[\mu - v_N \hat{\sigma}_z P] \hat{g}_v + \hat{h}_{\tilde{A}} \hat{g}_v + \hat{h}_{\tilde{\Delta}}^+ \hat{g}_u = E \hat{g}_v , \quad (2.8b)$$

с преобразованными операторами сверхпроводящей щели и вектор-потенциала: $\hat{h}_{\tilde{\Delta}} = \hat{S}^+ \tilde{\Delta}_{ind} \hat{S}$, $\hat{h}_{\tilde{\Delta}}^+ = \hat{S}^+ \tilde{\Delta}_{ind}^+ \hat{S}$, $\hat{h}_{\tilde{A}} = -(ev_N/c) \hat{S}^+ \tilde{\mathbf{A}} \hat{S}$, которые зависят от функций $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}(\tilde{\mathbf{R}})$, $\tilde{\Delta}_{ind} = \Delta_{ind}(\tilde{\mathbf{R}})$ оператора координаты $\tilde{\mathbf{R}} = i\hbar\partial/\partial\mathbf{P}$. В общем случае операторы $\hat{h}_{\tilde{A}}$ и $\hat{h}_{\tilde{\Delta}}$ замешивают компоненты функций, относящиеся к разным подрешёткам, однако в рассматриваемом пределе, когда химический потенциал $\mu \gg \Delta_{ind}$ положителен и велик по сравнению с собственными значениями этих операторов, можно считать подрешёточные компоненты волновой функции независимыми друг от друга. Будем в дальнейшем рассматривать лишь первую подрешётку, предполагая волновые функции следующими: $\hat{g}_{u,v} \stackrel{\text{def}}{=} g_{u,v}(1, 0) = \hat{\sigma}_z \hat{g}_{u,v}$. Точность такого приближения можно оценить во втором порядке теории возмущений: соответствующие поправки к собственным значениям операторов $\hat{h}_{\tilde{A}}$ и $\hat{h}_{\tilde{\Delta}}$, возникающие благодаря их недиагональным компонентам, оказываются следующего порядка:

$$\delta E_A \sim (\xi_{2D}^4/L_H^4)(\Delta_{ind}/k_N \xi_{2D}) , \quad \delta E_{\Delta} \sim \Delta_{ind}/(k_N \xi_{2D})^3 ,$$

где отношение квадрата длины когерентности к квадрату магнитной длины $L_H^2 = \hbar c/|eH|^4$ является малым числом $\xi_{2D}^2/L_H^2 \sim H/H_{c2} \ll 1$, как и величина $(k_N \xi_{2D})^{-1} \sim \Delta_{ind}/\mu \ll 1$, поэтому эти поправки малы по сравнению с характерным значением минищели $\Omega_2 = \Delta_{ind}/k_N \xi_{2D} \sim \Delta_{ind}^2/\mu$ в графене. При больших положительных значениях энергии Ферми достаточно рассматривать импульсы P , модуль которых близок к импульсу Ферми в графене $P_N = \hbar k_N$: $P = P_N + \delta P$ ($|\delta P| \ll P_N$), – и перейти к Фурье-переменной s , сопряжённой по отношению к δP . В конечном итоге квазиклассические уравнения БдЖ будут записаны на функции в смешанном (s, α) представлении (см. Рис. 2.1a):

$$\hat{g}(\mathbf{P}) = \begin{pmatrix} g_u \\ g_v \end{pmatrix} = k_N^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{-iqs/\hbar} \hat{g}(s, \alpha) .$$

Оператор координаты во введённом представлении $\tilde{\mathbf{R}} = s\mathbf{n}_P + (2k_N)^{-1} [[\mathbf{n}_P \times \mathbf{z}_0], \check{\nu}]_+$ выражается через направление квазиклассической траектории $\mathbf{n}_P = \mathbf{P}_N/P_N$ и оператор углового момента $\check{\nu} = -i\partial/\partial\alpha$.

⁴ Магнитная длина – это длина, на которой существенно меняется волновая функция в магнитном поле в нормальном состоянии, а также это среднее расстояние между вихрями.

Начнём рассмотрение спектра со случая ветви типа (1) $\epsilon_M^{(0)}$ (см. предыдущий раздел), пересекающей уровень Ферми при нулевом значении прицельного параметра. Такая ветвь существует лишь в вихрях с нечётным количеством квантов магнитного потока $M = 2p + 1$. Для малых значений $\nu \ll k_N \xi_{2D}$ операторы \hat{h}_A и \hat{h}_Δ можно разложить по малому параметру $\check{\nu} = -i\partial/\partial\alpha$ в ряд Тейлора:

$$\hat{h}_A = -\frac{eH\nu_N}{4ck_N} e^{-i\alpha/2} [\hat{\nu}, e^{i\alpha}]_+ e^{-i\alpha/2},$$

$$\hat{h}_\Delta = \frac{|\Delta_{ind}(s)|}{|s|} \left[s e^{iM\alpha} - \frac{i}{4k_N} \sum_{n=0}^{M-1} e^{i(n-\frac{1}{2})\alpha} [e^{i\alpha}, [\hat{\nu}, e^{i\alpha}]_+]_+ e^{i(M-n-\frac{3}{2})\alpha} \right].$$

Здесь мы предполагаем магнитное поле практически однородным ($\lambda_S \gg \xi_{2D}$)

Снимая фазу с оператора щели аналогично (2.3) $\hat{g}(s, \alpha) = \exp(i\nu\alpha + i\hat{\tau}_z M\alpha/2) \hat{F}(s)$ и предполагая, как и в предыдущих подразделах, магнитное поле малым, мы получим следующее уравнение на двухкомпонентную функцию $\hat{F}(s)$:

$$-i\hbar\nu_N \hat{\tau}_z \frac{\partial \hat{F}}{\partial s} + |\Delta_{ind}(s)| \left[\frac{s}{|s|} \hat{\tau}_x + \frac{\nu M}{|s|k_N} \hat{\tau}_y \right] \hat{F} = E' \hat{F}. \quad (2.9)$$

Здесь энергия $E' = E + \nu\hbar\omega_c/2$ сдвинута относительно своего стандартного значения на циклотронную частоту $\omega_c = eH\nu_N/cP_N$. Рассматривая последний член в левой части уравнения по теории возмущений [116], получим искомое выражением для энергетической ветви

$$\epsilon_M^{(0)} = -\nu \left[\frac{M}{k_N Q} \int_0^\infty \frac{|\Delta_{ind}(s)|}{s} e^{-2K(s)} ds + \frac{\hbar\omega_c}{2} \right], \quad (2.10)$$

где $Q = \int_0^\infty \zeta_v^2(s) ds \sim \xi_{2D}$, а $K(s)$ и $\zeta_v(s)$ определены в уравнении (2.5).

Результат для аномальной ветви $\epsilon_M^{(0)}$ (2.10) соответствует результату CdGM [78] учётом магнитного поля в духе статьи [118]. Отметим, что в рассматриваемом случае $M = 2p + 1$, так что собственные значения оператора углового момента ν принимают целые значения. Для других аномальных ветвей $\epsilon_M^{(i)}$, $i \neq 0$, пересекающих уровень Ферми, необходимо рассмотреть противоположный предельный случай больших угловых моментов.

2.2.4. Трансформация мод при больших значениях уровня Ферми.

Квазиклассическое приближение для больших угловых моментов $\nu \gg 1$

В этом предельном случае $\nu \gg 1$ могут быть описаны как моды типа (1), так и моды типа (2). Он более близок по духу к квазиклассическому подходу, поскольку в уравнениях (2.8) пренебрегается квантованием оператора углового момента, и он считается непрерывной переменной $\nu = -k_N b$. Тогда вместо уравнения (2.9) предыдущего раздела можно записать

следующие уравнения Андреева вдоль квазиклассической траектории:

$$\left[-i\hbar v_N \hat{\tau}_z \frac{\partial}{\partial s} + \frac{\hbar \omega_c k_N b}{2} + \hat{\tau}_x \text{Re} \Delta_{ind}(\mathbf{R}) - \hat{\tau}_y \text{Im} \Delta_{ind}(\mathbf{R}) \right] \hat{g}(s, \alpha) = E' \hat{g}(s, \alpha), \quad (2.11)$$

где радиус-вектор \mathbf{R} записывается через координату s и прицельный параметр $b = -\nu/k_N$ траектории (см. Рис. 2.1a) следующим образом $\mathbf{R} = (s \cos \alpha - b \sin \alpha, s \sin \alpha + b \cos \alpha)$. Уравнения Андреева (2.11) описывают квазичастичные состояния для произвольных конфигураций и профилей параметра порядка. Для рассматриваемого нами случая уединённого M -квантового вихря оператор сверхпроводящей щели в (s, α) -представлении принимает следующий вид:

$$\Delta_{ind}(\mathbf{R}) = \left| \Delta_{ind}(\sqrt{s^2 + b^2}) \right| \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^M e^{iM\alpha},$$

поскольку $\phi = \alpha + \arctan(b/s)$. Полная волновая функция должна быть однозначной, этому требованию в квазиклассическом пределе удовлетворяет правило квантования Бора - Зоммерфельда: $k_N \int_0^{2\pi} b(\alpha) d\alpha = 2\pi n + \pi(M - 1)$, с целым числом n . Последний член в правой части этого выражения складывается из всех фазовых множителей оператора \hat{S} и волновых функций $\hat{g}_{u,v}$. Необходимо отметить, что квазиклассическое условие Бора-Зоммерфельда в данном случае совпадает с точным квантованием углового момента.

Для подщелевых состояний решения уравнений Андреева, как известно из [116, 119, 120], дают $|M|$ аномальных энергетических ветвей $\epsilon_M^{(i)}(b)$, пересекающих нулевую энергию как функции непрерывного параметра b . Аналитические выражения для этих зависимостей можно получить в первом порядке теории возмущений по $\text{Im} \Delta_{ind}(\mathbf{R})$ в пределе малых энергий $E \ll \Delta_{ind}$ [116]:

$$\epsilon_M^{(l)} = Q_l^{-1} \int_0^\infty \left[G_I^{(l)}(s) - 2l G_R^{(l)}(s) \arctan \frac{s}{b} \right] e^{-2K_l(s)} ds + \frac{\hbar \omega_c k_N b}{2}, \quad (2.12)$$

где

$$K_l(s) = \frac{1}{\hbar v_N} \int_0^s G_R^{(l)}(t) dt, \quad Q_l = \int_0^\infty e^{-2K_l(s)} ds \sim \xi_{2D},$$

$$G_R^{(l)} = \left| \Delta_{ind}(\sqrt{s^2 + b^2}) \right| \text{Re} \left\{ \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2l} \right\},$$

$$G_I^{(l)} = \left| \Delta_{ind}(\sqrt{s^2 + b^2}) \right| \text{Im} \left\{ \left[\frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2l} \right\}.$$

Для положительных (отрицательных) завихренностей значения параметра $l \geq 0$ ($l \leq 0$) выбираются таким образом, чтобы величина $M - 2l$ была нечётным целым числом того же знака, что и M . Член с $\arctan(s/b)$ в уравнении (2.12) содержит разрыв в точке пересечения

траекторией центра вихря $b = 0$. Поэтому для всех $l \neq 0$ уравнение описывает пару аномальных ветвей энергетического спектра. Иными словами, квазиклассическое выражение для спектра M -кратного вихря содержит ровно $|M|$ энергетических ветвей, пересекающих уровень Ферми как функция прицельного параметра b .

Аналитическое выражение (2.12) при низких энергиях линейно по прицельному параметру $\epsilon_M^{(\pm l)}(b) \sim \Delta_{ind}(b \pm b_l)/\xi_{2D}$ и пересекает уровень Ферми в области $b_l \lesssim \xi_{2D}$. При этом наклон этих ветвей $\sim \Delta_{ind}/\xi_{2D}$ и точки их пересечения b_l с уровнем Ферми слабо зависят от импульса P_N . Поэтому при изменении импульса Ферми меняется лишь квантование прицельного параметра $b = -\nu/k_N$ через орбитальный момент $[\nu = n + (M - 1)/2$ для целых $n \in \mathcal{Z}]$. Таким образом, собственные значения ветвей второго типа ($b_l \neq 0$) при учёте квантования углового момента с изменением уровня химического потенциала (а следовательно, и импульса Ферми) начинают проходить через уровень Ферми, формируя нулевые моды при дискретных значениях импульса Ферми $P_N = P_N^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} |\hbar\nu/b_l|$. Здесь угловой момент ν нулевой моды является целым (полуцелым) числом для вихрей нечётной (чётной) кратности M . Кроме того, для малых угловых моментов $\nu \rightarrow 0$ выражение (2.12) с $l = 0$ переходит в уравнение (2.10). Иными словами, все подщелевые ветви спектра многоквантового вихря в графене хорошо аппроксимируются с помощью выражения (2.12), что можно будет видеть из сравнения его с численными результатами, обсуждаемыми в следующем подразделе.

2.2.5. Численное моделирование. Метод и результаты

Точный процесс вычисления профиля сверхпроводящего параметра порядка в графене $|\Delta_{ind}(\rho)|$ должен содержать процедуру самосогласования. Для случая объёмного сверхпроводника эти вычисления были проделаны в литературе, что приводило к таким эффектам, как сжатие вихревого кора при малых температурах и фриделевские осцилляции параметра порядка (см., например, [121]). Однако мы в данном разделе придерживаемся феноменологической модели параметра порядка в графене (см. раздел 1.2), поэтому процедура самосогласования, затрагивающая туннелирование квазичастиц в сверхпроводник и обратно и самосогласованное вычисление параметра порядка там, в этом приближении исключена. Но поскольку энергетический спектр подщелевых состояний в вихре слабо зависит от конкретного радиального профиля параметра порядка, и все ключевые особенности появляются благодаря его фазовой зависимости [119, 120], в этом подразделе будет рассматриваться профиль вихревого параметра порядка, описываемый приближённой формулой $\Delta_{ind}(\mathbf{R}) = \Delta_{ind} \left[\rho e^{i\phi} / \sqrt{\rho^2 + \xi_{2D}^2} \right]^M$.

Для численного решения системы (2.1) на функции \hat{U}_ν, \hat{V}_ν (2.3) со снятой фазой сверх-

проводящей щели эти уравнения были разложены по базису нормального состояния в диске радиуса R_{max} , в центре которого есть циркуляция фазы типа M -кратного вихря. Конечный размер диска был введен для аппроксимации непрерывного спектра функций нормального состояния графена в безграничном листе дискретным спектром, представимым в компьютере. Поскольку в работе не исследуется влияние границ на спектр, для простоты были использованы одни из граничных условий, определяющих нулевой квазичастичный ток через границу диска:

$$u_A(R_{max}) = 0, \quad v_A(R_{max}) = 0. \quad (2.13)$$

Наложение граничных условий сделало непрерывный спектр нормальных состояний дискретным в меру параметра $k_N R_{max}$. Для того чтобы граничные условия не влияли на спектр, радиус диска был выбран большим по сравнению с длиной когерентности ξ_{2D} , на которой, как было показано в предыдущих разделах, спадает волновая функция в сверхпроводящем графене. Магнитное поле было учтено лишь в факте наличия вихря: вектор-потенциалом в уравнениях было пренебрежено. Электронные и дырочные решения в нормальном состоянии независимы и могут быть представлены следующим образом

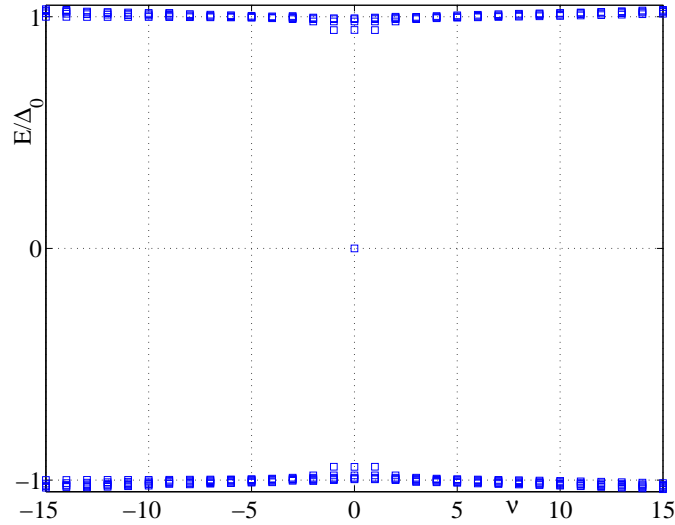


Рис. 2.2. Подщелевой спектр одноквантового вихря в графене как функция углового момента ν при нулевом уровне Ферми. Радиус диска $R_{max}/\xi_{2D} = 100$.

$$\hat{U}_{\nu,p}^e \propto \hat{U}_{m_e,p}^{(0)}(\rho), \quad \hat{V}_{\nu,p}^e = 0, \quad (2.14a)$$

$$\hat{U}_{\nu,p}^h = 0, \quad \hat{V}_{\nu,p}^h \propto \hat{U}_{m_h,p}^{(0)}(\rho), \quad (2.14b)$$

где вектор-столбец $\hat{U}_{m,p}^{(0)}(\rho)$ выражается через функцию Бесселя m -того порядка $J_m(x)$

$$\hat{U}_{m,p}^{(0)}(\rho) = \begin{pmatrix} J_m(k_p^m \rho) \\ -J_{m+1}(k_p^m \rho) \end{pmatrix},$$

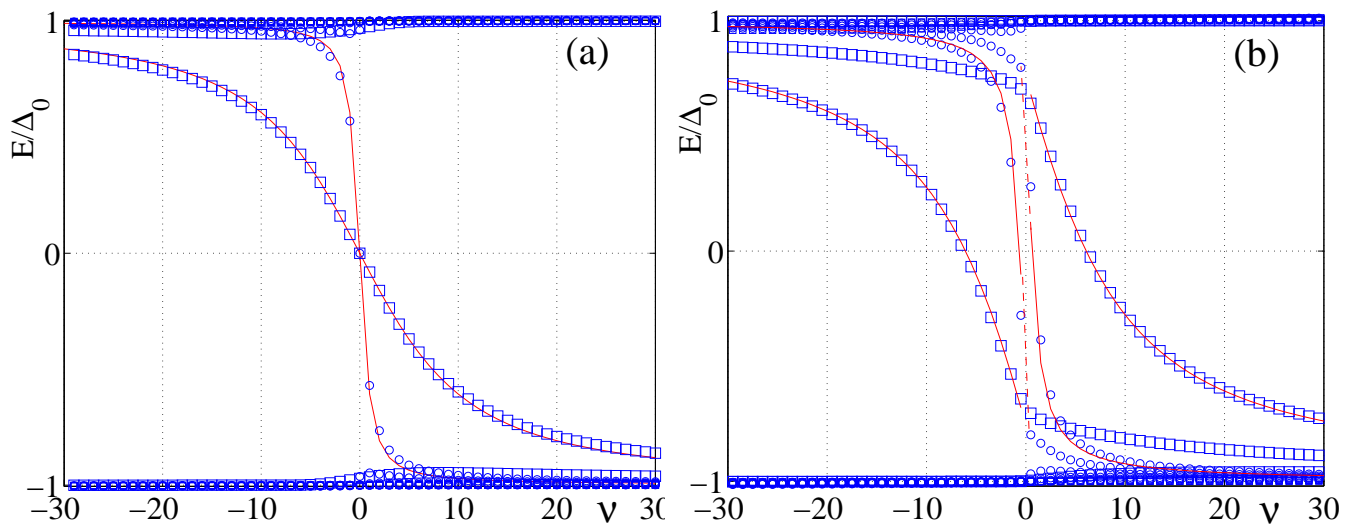


Рис. 2.3. Подщелевой спектр (а) одноквантового (б) двухквантового вихря в графене как функция углового момента ν с различными уровнями Ферми: $\mu/\Delta_{ind} = 1$ (круги) и $\mu/\Delta_{ind} = 10$ (квадраты). Квазиклассические решения спектра согласно уравнению (2.12) в пренебрежении магнитным полем $\omega_c \rightarrow 0$ показаны красными сплошными линиями (пунктирные части линий приведены лишь для удобства восприятия). Радиус диска здесь $R_{max}/\xi_{2D} = 100$.

а числа $m_{e,h} = \nu - (1 \mp M)/2$ определяются угловым моментом и завихренностью вихря. Число $k_p^m R_{max}$ является p -тым нулём функции Бесселя $J_m(x)$.

Кроме указанных выше электронных и дырочных мод, к базису функций нормального состояния в ограниченном диске с граничными условиями (2.13) на краю также относятся функции в форме (2.14) с предельным по параметру p вектор-столбцом

$$\hat{U}_{m,0}^{(0)}(\rho) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho^{-m-1} \end{pmatrix},$$

который не имеет особенности в нуле при $m_{e,h} \leq -1$, и отвечает случаю нулевого аргумента функции Бесселя $k_0^{m_{e,h}} \rightarrow 0$. Для численной диагонализации полученной матрицы гамильтониана достаточно ограничиться не менее, чем $N_{eig} = 10R_{max}/\xi_{2D}$ собственными значениями⁵. В результате диагонализации этой матрицы были получены спектры энергетических состояний, приведённые на графиках в зависимости от орбитального момента ν при различных значениях завихренности M и уровня Ферми μ .

На рис. 2.2 представлен график при нулевом уровне допирования для одноквантового вихря. Все собственные значения, кроме нулевого $\epsilon_1^{(0)}(\nu = 0)$, находятся вблизи амплитуды

⁵ Приведённая оценка может быть выведена на основе приближения для точки нуля функции Бесселя $k_n^m R_{max} = \pi n/2$ большого порядка $m \gg 1$, $n \leq N_{eig}$. Для численного моделирования достаточно, чтобы дискретный шаг $\Delta\rho$ по координате ρ был в 10 раз меньше масштаба всех волновых функций $\Delta\rho = 1/10k_{N_{eig}}^m$. Для описания функций с масштабом ξ_{2D} необходимо $\Delta\rho < \xi_{2D}$, откуда следует оценка на N_{eig} .

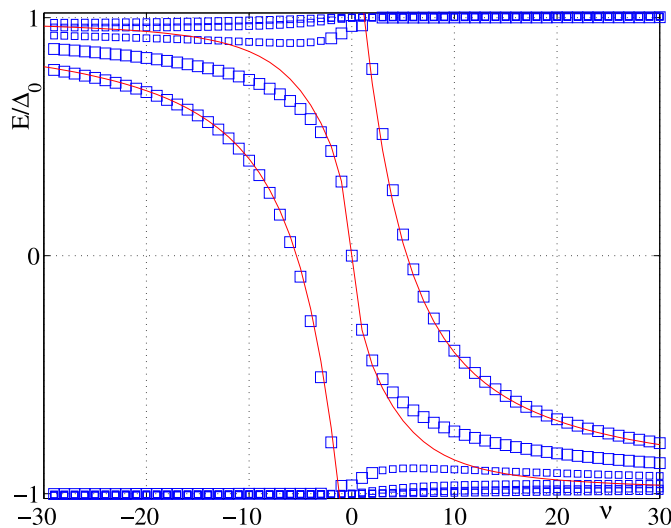


Рис. 2.4. Подщелевой спектр вихря в графене как функция углового момента ν для $M = 3$. Квазиклассические решения спектра согласно уравнению (2.12) в пренебрежении магнитным полем $\omega_c \rightarrow 0$ показаны красными сплошными линиями. Здесь уровень энергии Ферми выбран равным $\mu/\Delta_{ind} = 5$, радиус диска здесь $R_{max}/\xi_{2D} = 100$.

параметра порядка, что качественно согласуется с модельными вычислениями статьи [81], основанными на предположении о постоянном профиле параметра порядка $|\Delta_{ind}(\rho)| = \Delta_{ind}$. Количественное совпадение с этим результатом наблюдается в пределе узкого кора вихря.

На рис. 2.3 представлены типичные спектральные зависимости энергии квазичастичных состояний от орбитального момента для одно- и двухквантовых вихрей при различных уровнях Ферми, в то время как рис. 2.4 показывает подобную зависимость для вихря с $M = 3$ квантами потока. Спектр квазичастиц состоит из аномальных ветвей, пересекающих нулевое значение энергии, а также ветвей, находящихся вблизи сверхпроводящей щели. Рис. 2.3 - 2.4 ясно показывают разницу между случаями чётной и нечётной кратности вихрей. Кроме того, рис. 2.3 демонстрирует также трансформацию спектра типа CdGM в зависимости от углового момента при увеличении уровня Ферми. На качественном уровне в этом представлении меняется наклон спектральных ветвей $\epsilon_M^{(\pm l)}(\nu) \sim \Delta_{ind}(-\nu/k_N \pm b_l)/\xi_{2D}$ при постоянном квантовании углового момента. Кроме того, из графиков видно, что при энергиях Ферми, составляющих единицы и десятки амплитуды параметра порядка, численные спектры хорошо описываются квазиклассической формулой (2.12), полученной впервые в работе [116] для обычного сверхпроводника. Такое совпадение спектров подтверждает применимость квазиклассического приближения для описания вихревого состояния сверхпроводящего графена.

2.3. Электронная структура локализованных состояний в коре вихря в двумерной системе с индуцированной сверхпроводимостью

Согласно названию, эта часть посвящена вычислению структуры электронных квазичастичных состояний, локализованных вблизи вихря, наведённого за счёт эффекта близости в двумерном металлическом слое, который находится в туннельном контакте с объёмным сверхпроводником в магнитном поле выше первого критического.

Экспериментальное изучение подщелевого спектра квазичастиц в сверхпроводнике, помещённом во внешнее магнитное поле, является уникальным инструментом для исследования механизма спаривания и структуры куперовских пар. Такое исследование становится возможным благодаря тому, что состояния, локализованные в корах вихрей в сверхпроводнике, сильно модифицируются в случае присутствия как анизотропного сверхпроводящего спаривания электронов [122, 123], так и многокомпонентного параметра порядка [88, 124, 125]. Информацию о спектре и волновых функциях таких состояний можно получить “напрямую”, например, с помощью метода СТМ/СТС. Измерения дифференциальной проводимости контакта иглы микроскопа с образцом, получаемые в этом методе, позволяют извлечь энергетическую и пространственную зависимости локальной плотности состояний образца [86, 87, 92, 126]. Однако довольно часто экспериментальные измерения дают противоречивую информацию о пике плотности состояний при нулевом значении энергии в точности над центром вихря (о так называемой zero-bias аномалии в дифференциальной ВАХ) [89–91], который является атрибутом локализованных в коре вихря квазичастичных состояний со спектром Кароли-де Жена-Матрикона [78]. Эти противоречия и особенности часто объясняются с помощью упомянутых выше моделей сложного сверхпроводящего спаривания (см., например, [122, 123] и ссылки в них) и многокомпонентного параметра порядка [88, 124, 125].

На основе проведённых вычислений в этой части работы предложено альтернативное объяснение сложной электронной структуры вихревого состояния, наблюдаемого в СТМ экспериментах. Это объяснение основано на естественном предположении о наличии на поверхности сверхпроводника тонкого дефектного (несверхпроводящего) слоя, в котором из-за эффекта близости индуцируются сверхпроводящие корреляции. Например, в однородном состоянии наличие нормального слоя на поверхности сверхпроводящей плёнки приводит к двухщелевой особенности плотности состояний [13]. Эту особенность часто необоснованно считают доказательством многокомпонентного параметра порядка в сверхпроводнике. Ниже будет показано, что, несмотря на всю простоту модели, учёт влияния поверхностного слоя может объяснить целый ряд экспериментально наблюдаемых особенностей локальной

плотности состояний, таких как аномально большой размер кода вихря в относительно слабых магнитных полях [93–98], сдвиг пика плотности состояний над центром вихря в область конечных энергий [89–91] и другие.

Согласно микроскопической модели, описанной в разделе 1.3, в двумерном нормальном слое в контакте со сверхпроводником индуцируются сверхпроводящие корреляции (1.20) с амплитудой наведённой сверхпроводящей щели Δ_{ind} , зависящей от параметра туннелирования Γ [55, 57, 58, 127]. Формулы для величины Γ в различных моделях описаны в уравнениях (1.27, 1.33). В наших вычислениях, как и в работе [13], особенностью наведённой сверхпроводимости нормальной плёнке является совпадение критической температуры фазового перехода с критической температурой перехода объёмного сверхпроводника (ср. с [88]).

2.3.1. Индуцированные сверхпроводящие потенциалы

Для нахождения собственно энергетических частей (1.28, 1.33) уравнений Эйленберга (1.25) и Узалея (1.41), необходимо предварительно рассмотреть уравнения на функции Грина в объёмном сверхпроводнике.

Начнём с чистого предела сверхпроводника $\ell_S \gg \xi_S$. Функции Грина в этом случае удовлетворяют уравнениям Эйленберга, аналогичным (1.25):

$$-i\hbar\mathbf{v}_{\parallel}\nabla f_S^{R(A)} - 2(E \pm i\delta)f_S^{R(A)} + 2\Delta g_S^{R(A)} = 0 \quad (2.15a)$$

$$i\hbar\mathbf{v}_{\parallel}\nabla f_S^{+R(A)} - 2(E \pm i\delta)f_S^{+R(A)} + 2\Delta^* g_S^{R(A)} = 0 \quad (2.15b)$$

с условием нормировки $[g_S^{R(A)}]^2 - f_S^{R(A)} f_S^{+R(A)} = 1$ и граничными условиями на больших расстояниях от неоднородностей щели Δ :

$$f_S^{R(A)} = -i \frac{\Delta_{\infty} e^{i\chi_0}}{\sqrt{\Delta_{\infty}^2 - E^2}}, \quad g_S^{R(A)} = -i \frac{E}{\sqrt{\Delta_{\infty}^2 - E^2}} \quad (2.16)$$

Здесь и далее для простоты мы перешли к случаю нулевых температур, поэтому всюду вместо мацубаровских функций Грина будем писать запаздывающие и опережающие, а вместо мацубаровских частот $i\omega_n$ – энергию квазичастиц E , удлинённую пренебрежимо малой мнимой частью $\pm i\delta$ соответствующего знака ($\delta > 0$). В уравнениях (2.15) \mathbf{v}_{\parallel} – проекция Ферми-скорости \mathbf{v}_S сверхпроводника на плоскость двумерного слоя (x, y) , направленная под углом α к оси Ox (см. рис. 2.1a), а в (2.16) Δ_{∞} и χ_0 – амплитуда и фаза сверхпроводящего параметра порядка в сверхпроводнике вдали от неоднородностей. Квазиклассическая прямолинейная траектория, проходящая через радиус-вектор \mathbf{R} , характеризуется прицельным параметром b относительно оси вихря и своим направлением α . Всюду в уравнениях в чистом пределе на протяжении оставшейся части главы будем рассматривать систему координат (s, b)

вдоль траектории, которая выражается через цилиндрические координаты радиус-вектора $\mathbf{R} = (\rho, \phi)$ следующим образом $b = \rho \sin(\phi - \alpha)$; $s = \rho \cos(\phi - \alpha)$. При фиксированном направлении траектории α угол ϕ как функция переменной s меняется в пределах от $\pi + \alpha$ при $s \rightarrow -\infty$ через $\phi = \pi/2 + \alpha$ при $s = 0$ до $\phi = \alpha$ при $s \rightarrow \infty$.

Поскольку уравнение Узаделя [111], согласно [112], пишется для квазиклассических функций Грина (1.40), усреднённых по направлению траектории, то в *однородном состоянии* асимптотика (2.16) верна во всём пространстве как в чистом, так и в грязном пределе сверхпроводника. Благодаря этому факту, эффективный сверхпроводящий потенциал Σ_2 в двумерной подсистеме принимает следующий вид $\Sigma_2(E) = i\Gamma f_S = \Gamma \Delta_\infty / \sqrt{\Delta_\infty^2 - E^2}$ вдали от неоднородностей параметра порядка (здесь мы пренебрегли фазой χ_0 параметра порядка в сверхпроводнике). Иными словами, выражения для эффективной сверхпроводящей щели Δ_{ind} в спектре двумерной подсистемы в *однородном состоянии* можно найти из следующего неявного выражения [13, 58]: $\Delta_{ind} = \Sigma(\Delta_{ind}) = \Gamma \Delta_\infty / \sqrt{\Delta_\infty^2 - \Delta_{ind}^2}$, которое имеет две асимптотики: $\Delta_{ind} \approx \Gamma$ при $\Gamma \ll \Delta_\infty$ и $\Delta_{ind} \approx \Delta_\infty$ при $\Gamma \gg \Delta_\infty$. В дальнейшем для упрощения выкладок мы будем придерживаться первого варианта $\Gamma \ll \Delta_\infty$, дополнительно считая также энергии малыми $E \ll \Delta_\infty$. В этом случае, чаще всего, можно считать, что длина когерентности в двумерной плёнке ξ_{2D} существенно превосходит соответствующую величину ξ_S в сверхпроводнике $\xi_{2D} \gg \xi_S$.

Теперь рассмотрим смешанное состояние сверхпроводника, поместив в начало координат двумерного слоя вихрь, несущий один квант магнитного потока Φ_0 . В этом случае угловая зависимость сверхпроводящего параметра порядка может быть отделена от радиальной $\Delta = \Delta_0(\rho)e^{i\phi}$. Функция $\Delta_0(\rho) \sim \rho$ линейно растёт на малых расстояниях $\rho \ll \xi_S$ с увеличением расстояния от оси вихря и выходит на своё объёмное значение $\Delta_0(\rho) = \Delta_\infty$ при $\rho \gg \xi_S$. Однородность модуля щели вне сверхпроводящего кора позволяет на основе уравнений (2.16) написать асимптотическое выражение для собственно энергетических частей, верное для всех моделей туннелирования и концентраций примесей в подсистемах и барьере, на расстояниях больше длины когерентности $\rho \gg \xi_S$ в сверхпроводнике:

$$\Sigma_1^0 = \frac{\Gamma E}{\sqrt{\Delta_\infty^2 - E^2}} \ll E, \quad \Sigma_2^0 = \frac{\Gamma \Delta_\infty e^{i\phi}}{\sqrt{\Delta_\infty^2 - E^2}} \approx \Gamma e^{i\phi}. \quad (2.17)$$

В пределе малых энергий $E \ll \Delta_\infty$ можно пренебречь эффективным сдвигом энергии $\Sigma_1^0 \approx 0$ и заменить наведённую сверхпроводящую щель её адиабатическим пределом $\Sigma_2^0 \approx \Gamma e^{i\phi}$.

На качественном уровне понятно, что вблизи центра вихря $\rho \lesssim \xi_S$, кроме указанной адиабатической наведённой щели $\Sigma_2^0 \sim \Delta_{adiab}(\rho)e^{i\phi}$, будут играть роль части функций Грина сверхпроводника, отвечающие локализованным подщелевым состояниям в ко-

ре вихря $\rho \sim \xi_S$. Эти локализованные части содержат полюс в зависимости от энергии, соответствующий спектру Кароли - де Жена - Матрикона $\epsilon_0(b)$. Поэтому в когерентном случае индуцированные потенциалы можно качественно записать в виде (см. рис. 2.1б) $\check{\Sigma}_T^{coher} \simeq \Delta_{adiab} e^{i\phi} + \check{A} e^{-\rho/\xi_S} / [E - \epsilon_0(b)]$. В некогерентном пределе полюсный член будет усреднён по направлению траектории и не будет зависеть от этого направления $\check{\Sigma}_T^{incoh} \simeq \Delta_{adiab} e^{i\phi} + e^{-\rho/\xi_S} \langle \check{A} / [E - \epsilon_0(b)] \rangle_{\text{ps}}$.

Перейдём от качественного вида собственно энергетических частей к конкретным вычислениям. Для нахождения решений уравнений (2.15) в коре сверхпроводящего вихря $\rho \lesssim \xi_S$ удобнее параметризовать аномальные части квазиклассической функции Грина

$$f_S = - [\zeta_S(s) + i\theta_S(s)] e^{i\alpha}; \quad f_S^+ = [\zeta_S(s) - i\theta_S(s)] e^{-i\alpha}, \quad (2.18)$$

с помощью чётной $\zeta_S(s) = \zeta_S(-s)$ и нечётной $\theta_S(s) = -\theta_S(-s)$ функций переменной s вдоль траектории. При этом условие нормировки примет вид $g_S^2 + \theta_S^2 + \zeta_S^2 = 1$, в то время как уравнения Эйленберга (2.15) записываются следующим образом:

$$\hbar v_{\parallel} \frac{\partial \zeta_S}{\partial s} + 2E\theta_S - 2i\Delta_0 g_S \frac{s}{\rho} = 0, \quad (2.19a)$$

$$\hbar v_{\parallel} \frac{\partial \theta_S}{\partial s} - 2E\zeta_S - 2i\Delta_0 g_S \frac{b}{\rho} = 0. \quad (2.19b)$$

Граничные условия при $\rho \gg \xi_S$, согласно (2.17), будут следующими $\theta_S^{R(A)} = s/\rho$, $\zeta_S^{R(A)} = -b/\rho$. Предполагая $b \ll \xi_S$ можно дополнительно упростить эти граничные условия $\theta_S^{R(A)} \rightarrow \text{sgn}(s)$ and $\zeta_S^{R(A)} \rightarrow 0$ при $|s| \rightarrow \infty$. Для энергий, близких к спектру ϵ_0 CdGM ($E - \epsilon_0(b) \sim \epsilon_0(b) \ll \Delta_{\infty}$) функции Грина g_S , f_S и f_S^+ велики вблизи центра вихря, что позволяет предположить, что $\zeta_S^2 \gg \theta_S^2 - 1$, поэтому из условия нормировки $g_S^{R(A)} = i\zeta_S^{R(A)}$. Знак корня в функции g_S выбран из условия её спадания на больших расстояниях (см. уравнение (2.19a)). В рамках сделанных предположений решение уравнений (2.19) представляется в виде [107, 121]

$$\zeta_S^{R(A)} = \frac{\hbar v_{\parallel} e^{-K(s)}}{2Q [E - \epsilon_0(b) \pm i\delta]}, \quad \theta_S^{R(A)} = \frac{2}{\hbar v_{\parallel}} \int_0^s \left(E - \frac{b\Delta_0(s')}{\rho'} \right) \zeta_S^{R(A)} ds', \quad (2.20a)$$

$$\epsilon_0(b) = \frac{b}{Q} \int_0^{\infty} \frac{\Delta_0}{\rho} e^{-K(s)} ds; \quad Q = \int_0^{\infty} e^{-K(s)} ds; \quad K(s) = \frac{2}{\hbar v_{\parallel}} \int_{|b|}^{\rho} \Delta_0(\rho') d\rho'. \quad (2.20b)$$

Эти выражения применимы до тех пор, пока функция ζ_S превосходит свою дальнюю асимптотику $\zeta_S^{R(A)} = -b/\rho$, соответствующую граничным условиям (2.17). На бóльших расстояниях мы будем предполагать ζ_S равной этой асимптотике. Квазиклассические функции Грина $f_S^{R(A)}$ и $g_S^{R(A)}$, как и положено, имеют полюса на энергиях $E = \epsilon_0(b)$, соответствующих спектру локализованных состояний. Функция $\theta_S^{R(A)}$ описывает адиабатическую сверхпроводящую

щель в этом пределе, а $\zeta_S^{R(A)}$ и $g_S^{R(A)} = i\zeta_S^{R(A)}$ отвечают локализованной щели и сдвигу энергии соответственно.

В чистом пределе 2D подсистемы (вне зависимости от модели туннелирования) удобно по аналогии с (2.18) перейти от функций Грина f, f^+ к функциям ζ, θ . После этого уравнения Эйленберга (1.25) примут вид, подобный (2.19):

$$\hbar v_N \frac{d\zeta}{ds} + 2(E + \Sigma_1)\theta - 2ig\Sigma_R = 0, \quad (2.21a)$$

$$\hbar v_N \frac{d\theta}{ds} - 2(E + \Sigma_1)\zeta - 2ig\Sigma_I = 0, \quad (2.21b)$$

$$\hbar v_N \frac{dg}{ds} + 2i\zeta\Sigma_R + 2i\theta\Sigma_I = 0, \quad (2.21c)$$

где $2\Sigma_R = (\Sigma_2 e^{-i\alpha} + \Sigma_2^+ e^{i\alpha})$, $2i\Sigma_I = (\Sigma_2 e^{-i\alpha} - \Sigma_2^+ e^{i\alpha})$.

Вихревые потенциалы Σ_i в чистом пределе обеих подсистем существенно зависят от механизма туннелирования. Для случая когерентного туннелирования, согласно уравнению (1.28), где $\Sigma_1 = i\Gamma g_S$, $\Sigma_2 = i\Gamma f_S$, величины $\Sigma_{R,I}$ приобретают вид адиабатической наведённой щели и локализованной части сверхпроводящего потенциала соответственно:

$$\Sigma_R = \Gamma\theta_S, \quad \Sigma_I = -\Gamma\zeta_S. \quad (2.22)$$

Величина диагональной собственно энергетической части $\Sigma_1 = i\Gamma g_S$, отвечающей за сдвиг энергии, в области применимости приближения (2.20) совпадёт с локализованной частью наведённой щели $\Sigma_1 \approx -\Gamma\zeta_S$. При этом на малых расстояниях $\rho \ll \xi_S$ ($\theta_S \approx 0$, $\zeta_S = \text{const}$) фаза индуцированной сверхпроводящей щели $\Sigma_2 \approx -i\Gamma\zeta_S e^{i\alpha}$ не равна фазе сверхпроводящего параметра порядка $\Delta = \Delta_0(\rho)e^{i\phi}$, а совпадает с точностью до постоянного сдвига с углом направления траектории α . Как будет показано в следующих разделах, такое нестандартное поведение фазы наведённой щели является признаком формирования не одной, а двух аномальных ветвей в спектре возбуждений, локализованных в коре индуцированного вихря.

При учёте беспорядка в барьере между 2D плёнкой и сверхпроводником (некогерентное туннелирование) для вычисления собственно энергетических частей $\Sigma_{1,2}$ необходимо произвести усреднение по реализациям примесей (1.33), которое для квазиклассических функций Грина совпадает с усреднением по направлениям траекторий \mathbf{p}_S . Подробное вычисления средних величин описано в Приложении Б.1. Здесь приведён лишь окончательный результат:

$$\Sigma_2 e^{-i\phi} = \Sigma_2^\dagger e^{i\phi} = \Delta_{adiab} + \Sigma_2^{loc}(\rho), \quad (2.23a)$$

$$\Sigma_R = \Sigma_2 e^{-i\phi} s/\rho, \quad \Sigma_I = \Sigma_2 e^{-i\phi} b/\rho, \quad (2.23b)$$

демонстрирующий, что фаза недиагональной части индуцированного потенциала в этом случае совпадает с фазой параметра порядка Δ в сверхпроводнике. При этом, кроме адиабатической индуцированной сверхпроводящей щели $\Delta_{adiab} = \Gamma \langle \theta(s)s/\rho \rangle$, монотонно возрастающей от нуля до постоянной величины в зависимости от расстояния, как и в когерентном случае присутствуют диагональная $\Sigma_1 = \Gamma \langle \zeta_S \rangle$ и недиагональная $\Sigma_2^{loc} = \Gamma \langle \zeta(s)b/\rho \rangle$ компоненты собственно энергетической части, локализованные в области кора сверхпроводящего вихря $\rho \lesssim \xi_S$. Однако, полюсные особенности в этих локализованных компонентах в этом случае усреднены. Кроме того, совпадение фаз индуцированной щели и сверхпроводника даёт нам право предполагать, что в этом случае дополнительная ветвь локализованных возбуждений исчезает, видимо, при усреднении по беспорядку в барьере между подсистемами.

При дальнейшем увеличении степени беспорядка, когда сверхпроводник оказывается в грязном пределе $\ell_S \ll \xi_S = \sqrt{\hbar D_S/\Delta_\infty}$, для описания функций Грина g_S , f_S и f_S^+ (1.40) используется уравнение Узаделя, аналогичные уравнениям в 2D слое (1.41) с заменой $\Sigma_1 \rightarrow 0$, $\Sigma_2 \rightarrow \Delta$. Для описания квазичастичных возбуждений в грязном пределе сверхпроводника удобно использовать тригонометрическую параметризацию [128, 129]:

$$\check{g}_S = \begin{pmatrix} \sin \Theta & ie^{i\chi} \cos \Theta \\ -ie^{-i\chi} \cos \Theta & -\sin \Theta \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

через функции $\Theta(\mathbf{r}) = \pm\Theta_1 + i\Theta_2$ и $\chi(\mathbf{r})$. Верхний (нижний) знак \pm выбирается для запаздывающей (опережающей) функций Грина. В случае однородной по радиальной координате ρ фазы параметра порядка $\partial\chi_0(\mathbf{r})/\partial\rho = 0$ (в случае вихря $\chi_0 = \phi$) удобно выбрать функцию $\chi(\mathbf{r}) = \chi_0$, равной этой фазе. В этой параметризации уравнение Узаделя принимает вид:

$$D_S \left[\nabla^2 \Theta + \frac{\sin(2\Theta)}{2\rho^2} \right] - 2\Delta_0 \sin \Theta - 2iE \cos \Theta = 0 \quad (2.25)$$

с граничными условиями (2.16) $\Theta_1 \rightarrow \pi/2$, $\Theta_2 \rightarrow 0$ на малых расстояниях $\rho \rightarrow 0$. Асимптотические значения для $\Theta_{1,2}$ на больших расстояниях зависят от энергии: $\sin \Theta_1 \rightarrow 0$, $\tanh \Theta_2 \rightarrow -E/\Gamma$ для $E < \Delta_\infty$ и $\cos \Theta_1 \rightarrow 0$, $\tanh \Theta_2 \rightarrow -\Delta_\infty/E$ для $E > \Delta_\infty$. Решение уравнения (2.25) в пределе $E \ll \Delta_\infty$, когда $\Theta_2 \approx 0$, приведено в работе [130]. Из неё следует, что Θ_1 монотонно спадает от значения $\Theta_1 = \pi/2$ в центре вихря до нулевого значения вдали от его кора $\rho \gg \xi_S$. Поэтому недиагональную компоненту $\Sigma_2 = -\Gamma e^{i\phi} \cos \Theta_1$ собственно энергетической части (1.28) можно рассматривать как адиабатическую сверхпроводящую щель Δ_{adiab} в 2D плёнке, тогда как локализованная на масштабе сверхпроводящего кора мнимая поправка к энергии $\Sigma_1 = i\Gamma \sin \Theta_1$ не имеет в отличие от чистого предела полюсного вклада и вносит вклад лишь в уширение уровней адиабатического спектра типа CdGM в двумерной подсистеме.

2.3.2. Метод разделения масштабов

В этом подразделе мы приведём решение уравнений Эйленберга (2.21) и Узалея (1.41) в двумерной системе с индуцированными потенциалами (2.22, 2.23) и (1.28) соответственно на основе предположения о большой длине когерентности в 2D подсистеме $\xi_{2D} \gg \xi_S$. Суть метода разделения масштабов состоит в том, что вне сверхпроводящего кора вихря $\rho \gg \xi_S$ решаются квазиклассические уравнения с собственно энергетическими частями (2.17) в однородной дальней асимптотике. Внутри индуцированного кора $\rho < \rho_0 \ll \xi_{2D}$ чётные компоненты квазиклассической функции Грина g и ζ предполагаются практически неизменными, что позволяет нам проинтегрировать уравнения в этой области и записать эффективные граничные условия в некоторой точке ρ_0 , находящейся в области перекрытия рассматриваемых асимптотик $\xi_S \ll \rho_0 \ll \xi_{2D}$.

В чистом пределе 2D плёнки мы рассмотрим уравнения (2.21) для запаздывающих и опережающих функций Грина с соответствующими граничными условиями на больших расстояниях ($\rho \gg \xi_{2D}$) в приближении $E \ll \Delta_\infty$:

$$\theta = \frac{\Gamma s / \rho}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}}, \quad \zeta = \frac{-\Gamma b / \rho}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}}, \quad g = \frac{-iE}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}}. \quad (2.26)$$

Вне кора в сверхпроводнике $\rho \gg \xi_S$ уравнения (2.21) для всех моделей туннелирования и степени беспорядка в сверхпроводнике принимают следующий вид:

$$\hbar v_N \frac{d\zeta}{ds} + 2E\theta - 2ig\Gamma s / \rho = 0, \quad (2.27a)$$

$$\hbar v_N \frac{d\theta}{ds} - 2E\zeta - 2ig\Gamma b / \rho = 0, \quad (2.27b)$$

$$\hbar v_N \frac{dg}{ds} + 2i\zeta\Gamma s / \rho + 2i\theta\Gamma b / \rho = 0. \quad (2.27c)$$

Как было описано ранее, функции g и ζ чётные по переменной s , в то время как θ – нечётная, что позволяет нам рассматривать лишь положительные значения $s > 0$. Решение этих уравнений в первом порядке теории возмущений по прицельному параметру b выглядит следующим образом: $\check{w}(s) = \check{w}_0(s) + \check{w}_1(s)$, где мы объединили функции в вектор $\check{w}(s) = (\zeta, \theta, g)^T$. Рассматриваемая аппроксимация работает в наиболее интересной для нас области $|b| \ll \xi_{2D}$. Нулевой порядок теории возмущений представляется

$$\check{w}_0(s) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \check{u}_0(s) + \frac{C}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \check{u}_-(s), \quad (2.28)$$

суммой постоянной компоненты u_0 , отвечающей за граничные условия (2.26) в дальнем пределе $s \rightarrow \infty$ при нулевом прицельном параметре $\zeta = 0$, $\theta = \Gamma / \sqrt{\Gamma^2 - E^2}$, $g = -iE / \sqrt{\Gamma^2 - E^2}$,

и спадающей (при $E^2 < \Gamma^2$) части $\check{y}_-(s)$:

$$\check{y}_\pm(s) = \begin{pmatrix} \sqrt{\Gamma^2 - E^2} \\ \pm E \\ \mp i\Gamma \end{pmatrix} e^{\pm\lambda s}, \quad \check{y}_0(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma \\ -iE \end{pmatrix}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{\Gamma^2 - E^2}}{\hbar v_N}.$$

Поправка первого порядка \check{w}_1 записывается через те же базисные функции

$$\check{w}_1(s) = \frac{C_0(s)\check{y}_0 + C_+(s)\check{y}_+ + C_-(s)\check{y}_-}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \quad (2.29)$$

с коэффициентами, полученными вариацией произвольных постоянных:

$$\frac{C_0(s)}{2C} = -C_+(s) = \frac{b}{\xi_{2D}} \int_s^\infty e^{-\lambda s} \frac{ds}{\rho}; \quad C_-(s) = -\frac{b}{\xi_{2D}} \int_{s_c}^s e^{\lambda s} \frac{ds}{\rho}. \quad (2.30)$$

Нижний предел интегрирования s_c коэффициента C_- должен быть выбран $s_c \sim \xi_S$ для траекторий, проходящих через сверхпроводящий вихревой кор $b \lesssim \xi_S$. Иными словами, логарифмическая расходимость этого интеграла обрезается на расстояниях $\sim \xi_S$, где адиабатический индуцированный параметр порядка Δ_{adiab} исчезает. При больших значениях прицельного параметра $b \gg \xi_S$ мы можем считать $s_c = 0$. Метод теории возмущений работает, когда $C_0 \ll C$ и $C_+ \ll 1$, что выполняется при $|b| \ll \xi_{2D}$. Асимптотика больших расстояний $s \gg \xi_{2D}$ для коэффициентов $C_0 \rightarrow 0$, $C_+(s)e^{\lambda s} \rightarrow C_-(s)e^{-\lambda s} \rightarrow -\Gamma b/2\rho\sqrt{\Gamma^2 - E^2}$ восстанавливает граничные условия для ζ с конечным b (2.26) и не нарушает их для остальных двух компонент. На малых расстояниях $\rho = \rho_0$ в области перекрытия асимптотик $s = s_0$ ($\rho_0^2 = s_0^2 + b^2$) компоненты функции Грина принимают вид

$$\zeta(s_0) = C + C_+(s_0) + C_-(s_0), \quad (2.31a)$$

$$\theta(s_0) = \frac{1}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \left[\Gamma - EC + \Gamma C_0(s_0) + E[C_+(s_0) - C_-(s_0)] \right], \quad (2.31b)$$

$$g(s_0) = \frac{i}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \left[-E + \Gamma C - EC_0(s_0) - \Gamma[C_+(s_0) - C_-(s_0)] \right]. \quad (2.31c)$$

Для траектории, которая не проходит через кор в сверхпроводнике $\xi_S \ll b \ll \xi_{2D}$, решение уравнений (2.27) может быть применено для всех значений переменной s . В этом случае необходимо положить $s_0 = s_c = 0$ и получить граничное условие $\theta(0) = 0$. Поскольку $C_-(0) = 0$, из уравнения (2.31b) это граничное условие становится таким $\Gamma + EC_+(0) = EC - \Gamma C_0(0)$. Выражая коэффициенты C_0 и C_+ (2.30) в терминах энергии локализованных состояний $\epsilon_2(b)$ в 2D подсистеме, $C_0 = -2C C_+ = C\epsilon_2(b)/\Gamma$, где

$$\epsilon_2(b) = \frac{2\Gamma^2 b}{\hbar v_N} \ln \Lambda, \quad (2.32)$$

и $\Lambda = \xi_{2D}/|b|$, мы получим выражение для коэффициента C :

$$C[E - \epsilon_2(b)] = \Gamma - E\epsilon_2(b)/2\Gamma . \quad (2.33)$$

Поскольку спектр локализованных состояний определяется из полюсов функций Грина, то из уравнения (2.33) $\epsilon_2(b)$ – единственная ветвь спектра в области энергий $|E| \ll \Delta_\infty$ для больших прицельных параметров $b \gg \xi_S$. При тех же значениях параметров нормальная часть функции Грина принимает следующий вид:

$$g(s) = \frac{-i}{\sqrt{\Gamma^2 - E^2}} \left[E - \Gamma C e^{-\lambda s} + E C_0(s) + \Gamma [C_+(s)e^{\lambda s} - C_-(s)e^{-\lambda s}] \right] . \quad (2.34)$$

Для больших расстояний $s \gg \xi_{2D}$ выражения $C_0 \rightarrow 0$, $C_+e^{\lambda s} - C_-e^{-\lambda s} \rightarrow 0$ малы. Поэтому первое слагаемое в скобках определяется однородным состоянием плёнки. Остальные члены описывают вихревой вклад в функцию Грина. Аналитическое продолжение корня $\sqrt{\Gamma^2 - E^2}$ в область $E^2 > \Gamma^2$ для запаздывающей функции Грина производится через верхнюю полу-плоскость комплексной переменной E , сохраняя спадание функции $\text{Re}\sqrt{\Gamma^2 - E^2} > 0$ ⁶.

Локальная плотность состояний $N(\mathbf{R}, E)$, нормированная на своё значение в нормальном состоянии 2D слоя, определяется выражением для плотности состояний, разрешённой по углам траекторий: $N_E(s, b) \stackrel{\text{def}}{=} (g^R(s, b) - g^A(s, b)) / 2$, после усреднения его по этим углам:

$$N(\mathbf{R}, E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_E(s, b) d\eta . \quad (2.35)$$

Здесь координаты на траектории параметризованы следующим образом $s = \rho \sin \eta$, $b = \rho \cos \eta$. Для значений энергий $|E| < \Gamma$ ниже амплитуды наведённой щели вклад в плотность состояний вносят лишь второе и третье слагаемые в уравнении (2.34), благодаря наличию полюса функции Грина в коэффициенте C согласно уравнению (2.33). Нормальная часть функции Грина и локальная плотность состояний достигают своих дальних асимптотик $g = -iE/\sqrt{\Gamma^2 - E^2}$ и $N = \text{Re}|E|/\sqrt{E^2 - \Gamma^2}$ как только $\rho \rightarrow \infty$. Вне сверхпроводящего кора $\rho \gg \xi_S$ основной вклад в плотность состояний дают траектории с большими значениями прицельного параметра $b \gtrsim \xi_S$. В этой области расстояний $\xi_S \ll \rho \ll \xi_{2D}$ выражение для плотности состояний, разрешённой по углам траекторий, примет вид:

$$N_E(s, b) = \begin{cases} \sqrt{\Gamma^2 - E^2}(\Gamma^2 - E^2/2)\pi\delta[E - \epsilon_2(b)]/\Gamma^2 , & |E| < \Gamma , \\ \text{sgn}(E)\sqrt{E^2 - \Gamma^2}[\Gamma^2 - \epsilon_2^2(b)/2]/\Gamma^2[E - \epsilon_2(b)] , & |E| > \Gamma \end{cases} .$$

⁶ Утверждение про спадание функции Грина при увеличении расстояния от центра вихря верно до тех пор, пока мы рассматриваем истинно локализованные состояния. Как только мы коснёмся резонансных уровней с комплексными значениями энергии E в подразделе (2.3.3), функции Грина станут расходящимися, благодаря утечке квазичастиц в двумерной плоскости на бесконечность (для более подробного изучения этого вопроса можно обратиться, например, к книге [131]).

Соответствующее выражение для локальной плотности состояний в области $|E| < \Gamma$ имеет пики $E = \epsilon_2(\pm\rho)$, отвечающие локализованным в коре состояниям:

$$N(\rho, E) = \frac{1}{\pi} \int_{-\rho}^{\rho} N_E(\sqrt{\rho^2 - b^2}, b) \frac{db}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \sqrt{\Gamma^2 - E^2} \operatorname{Re} \frac{(1 - E^2/2\Gamma^2)}{\sqrt{\epsilon_2^2(\rho) - E^2}}.$$

Для энергий выше индуцированной щели $|E| > \Gamma$ локальная плотность состояний монотонно растёт с энергией $|E|$ до значения в нормальном состоянии:

$$N(\rho, E) = \sqrt{E^2 - \Gamma^2} \left[\frac{|E|}{2\Gamma^2} + \frac{(1 - E^2/2\Gamma^2)}{\sqrt{E^2 - \epsilon_2^2(\rho)}} \right].$$

Более богатое поведение локальная плотность состояний демонстрирует на малых расстояниях $\rho \lesssim \xi_S$, где она существенно зависит от траекторий с малыми значениями прицельного параметра b . В этом случае для нахождения выражения для коэффициента C необходимо произвести сшивку значений функций Грина (2.31) с решением в области сверхпроводящего кора. Как говорилось выше, в области малых расстояний $s < s_0$ чётные части функции Грина g и ζ предполагаются практически постоянными. Поэтому после интегрирования уравнения (2.21b) вдоль траектории от $s = 0$ до s_0 мы найдём условие сшивки для компонент функции Грина:

$$\frac{\hbar v_N}{2} \theta(s_0) = \zeta(s_0) \int_0^{s_0} \Sigma_1 ds + ig(s_0) \int_0^{s_0} \Sigma_I ds. \quad (2.36)$$

На основе этого уравнения можно получить выражение для коэффициента C при малых значениях прицельного параметра b . При этом полюса коэффициента C в зависимости от энергии и прицельного параметра определяют спектр собственных возбуждений.

При использовании условия сшивки (2.36) для $b \lesssim \xi_S$ в конкретных случаях удобно разделить вихревые потенциалы Σ_1 , и Σ_I на быстро спадающие функции $\Sigma_{1,I}^{loc}$ на масштабе $s \sim \xi_S$ и плавные функции, отвечающие дальним асимптотикам $s \gg \xi_S$. Для малых энергий $E \ll \Delta_\infty$ асимптотические выражения согласно уравнению (2.17) принимают вид: $\Sigma_1 = 0$, $\Sigma_R = \Gamma s/\rho$, $\Sigma_I = \Gamma b/\rho$. В итоге интегралы, входящие в уравнение (2.36), можно разбить так:

$$\int_0^{s_0} \Sigma_1 ds \approx \int_0^{s_0} \Sigma_1^{loc} ds, \quad (2.37a)$$

$$\int_0^{s_0} \Sigma_I ds = \int_0^{\xi_S} \Sigma_I^{loc} ds + \Gamma \int_{\xi_S}^{s_0} b/\rho ds \approx \int_0^{s_0} \Sigma_I^{loc} ds + \Gamma b \ln(s_0/\xi_S). \quad (2.37b)$$

Локализованные собственно энергетические части $\Sigma_{1,I}^{loc}$ определяют спектр возбуждений в коре вихря и поведение плотности состояний на малых расстояниях. Однако они суще-

ственно зависят от модели туннелирования. Поэтому в следующих подразделах эти модели будут рассмотрены по отдельности.

2.3.3. Результаты в чистой системе при когерентном туннелировании

Начнём наше рассмотрение с идеализированного случая без какого-либо беспорядка во всех частях рассматриваемой системы. Для малых энергий $E \ll \Delta_\infty$, индуцированные потенциалы $\Sigma_{1,R,I}$ пропорциональны квазиклассическим функциям Грина в сверхпроводнике [см. (2.22)]. Здесь мы будем рассматривать случай малых прицельных параметров $b \ll \xi_S$, как наиболее интересный.

Уравнения (2.30) в этом случае дают следующий результат

$$C_0(s_0) = \frac{2Cb}{\xi_{2D}} \ln \frac{1}{\lambda s_0}, \quad C_+(s_0) \pm C_-(s_0) \approx -\frac{b}{\xi_{2D}} \ln \frac{1}{\lambda \xi_S} \approx -\frac{\epsilon_2(b)}{2\Gamma},$$

при этом для $b \lesssim \xi_S$ параметр обрезания логарифмической расходимости в уравнении (2.32) для $\epsilon_2(b)$ должен быть заменён на следующее выражение $\Lambda = \xi_{2D}/\xi_S$. Сшивая решения (2.31) в области $s \geq s_0$ и используя (2.36) и (2.37), получим выражение для коэффициента C :

$$\begin{aligned} C \left[\xi_{2D}[E - \epsilon_2(b)] + 2 \left[\Gamma - \sqrt{\Gamma^2 - E^2} - \frac{E\epsilon_2(b)}{\Gamma} \right] \int_0^\infty \zeta_0 ds \right] = \\ = \left[\xi_{2D}\Gamma + 2E \int_0^\infty \zeta_0 ds - \xi_{2D} \frac{E\epsilon_2(b)}{2\Gamma} - (\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - E^2}) \frac{\epsilon_2(b)}{\Gamma} \int_0^\infty \zeta_0 ds \right], \end{aligned}$$

где $\zeta_0(s)$ – локализованная в сверхпроводящем коре часть ζ_S , описываемая асимптотикой (2.20a) и $\int_0^\infty \zeta_0 ds = \hbar v_{||}/2[E - \epsilon_0(b)]$. Здесь мы также положили $g = i\zeta_0$ в пределе малых значений прицельных параметров. Случай больших величин $b \gg \xi_S$ сходится с уравнением (2.33), благодаря тому, что вклады, пропорциональные интегралу $\int_0^\infty \zeta_0 ds$ исчезают, как только траектория не проходит через кор вихря в сверхпроводнике.

Возвращаясь к рассматриваемому случаю $b \ll \xi_S$, мы можем записать неявное выражение для полюсов функции Грина

$$P(E, b) = [E - \epsilon_2(b)][E - \epsilon_0(b)] + q_v \left[\Gamma^2 - \Gamma\sqrt{\Gamma^2 - E^2} - E\epsilon_2(b) \right] = 0, \quad (2.38)$$

где мы ввели обозначение $q_v = v_{||}/v_N$ для отношения скоростей в сверхпроводнике и нормальной плёнке. При этом коэффициент C принимает вид:

$$C = \frac{[\Gamma - E\epsilon_2(b)/2\Gamma][E - \epsilon_0(b)]}{P(E, b)} + \frac{q_v[E\Gamma - \epsilon_2(b)(\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - E^2})/2]}{P(E, b)}$$

Уравнение (2.38) имеет два действительных решения $\epsilon_{1,2}(b)$ для энергий ниже индуцированной щели $|E| < \Gamma$ и одно комплексное $\epsilon_1(b)$ в области $\Gamma < |E| < \Delta_\infty$. В пределе малых

энергий $E \ll \Gamma$, разложение уравнения (2.38) по параметру E/Γ с точностью до линейных членов по $\epsilon_2(b)$ примет вид

$$[E - \epsilon_2(b)][E - \epsilon_0(b)] + \frac{q_v}{2}[E - \epsilon_2(b)]^2 = 0 \quad (2.39)$$

Включение члена с $\epsilon_2(b) \ll \Gamma$ в дисперсионное соотношение важно, как можно видеть из последнего уравнения, из-за сокращения в уравнении (2.38) в скобках последнего слагаемого (с множителем q_v) двух членов Γ и $\sqrt{\Gamma^2 - E^2}$ для $E \ll \Gamma$. Уравнение (2.39) имеет два решения:

$$\epsilon_1(b) = (1 + q_v/2)^{-1} \epsilon_0(b) \quad (2.40)$$

и $\epsilon_2(b)$. Разрешённая по углам траекторий плотность состояний в этом случае ($|E| \ll \Gamma$ и $\rho \lesssim \xi_S$) представляется в виде суммы двух дельта-функций Дирака с соответствующими амплитудами

$$N_E(s, b) = \frac{\pi\Gamma q_v}{2} \delta[E - \epsilon_1(b)] + \frac{\pi\Gamma(q_v + 2)}{2} \delta[E - \epsilon_2(b)]. \quad (2.41)$$

Здесь мы пренебрегли членами $E\epsilon_2(b)/\Gamma^2$, $\epsilon_2(b)/\epsilon_1(b)$ и положили отношение энергий спектральных ветвей равным $\epsilon_0(b)/\epsilon_1(b) = 1 + q_v/2$ согласно уравнению (2.40). Локальная плотность состояний в этом пределе

$$N(\rho, E) = \frac{\Gamma}{2} \cdot \text{Re} \left[\frac{q_v}{\sqrt{\epsilon_1^2(\rho) - E^2}} + \frac{q_v + 2}{\sqrt{\epsilon_2^2(\rho) - E^2}} \right] \quad (2.42)$$

демонстрирует структуру с двумя пиками на энергиях $E = \epsilon_{1,2}(\rho)$.

В противоположном случае $|E| \sim \Gamma$, можно пренебречь вкладом $\epsilon_2(b)$ в выражение для коэффициента C , тогда уравнение для оставшейся ветви $\epsilon_1(b)$ примет вид для $|E| < \Gamma$:

$$[E - \epsilon_0(b)] \left[\Gamma + \sqrt{\Gamma^2 - E^2} \right] + q_v \Gamma E = 0$$

и для $|E| > \Gamma$

$$E[E - \epsilon_0(b)] + q_v \Gamma \left[\Gamma + i \text{sgn}(E) \sqrt{E^2 - \Gamma^2} \right] = 0$$

При этом последнее соотношение записано для запаздывающих функций Грина. Оба последних уравнения формально имеют по 2 решения: одно из которых соответствует (2.40) на малых энергиях и прицельных параметрах и достигает значения $E = \Gamma - 0$ с нулевой производной $dE/db|_{E=\Gamma} = 0$ (см. рис. 2.5) при прицельных параметрах, удовлетворяющих соотношению $\epsilon_0(b) = \Gamma(1 + q_v)$. Другая ветвь всюду в области определения имеет конечную мнимую часть, то есть отвечает резонансным состояниям с утечкой квазичастиц на бесконечность в 2D слое. Её мнимая часть монотонно убывает от значения $|\text{Im}E| = \Gamma \sqrt{q_v(q_v + 2)}$ в начале координат $b = 0$ до $|\text{Im}E| = \Gamma q_v$ для достаточно больших значений прицельного параметра $b \gg \xi_S^2/\xi_{2D}$. Реальная часть этой ветви оказывается немного ниже, чем спектр CdGM

в объёмном сверхпроводнике и достигает этого значения, как только $\epsilon_0(b) \gg \Gamma$. Поскольку эта спектральная ветвь отвечает лишь резонансному состоянию в двумерном коре, то имеет физический смысл лишь при энергиях выше индуцированной щели $E > \Gamma$.

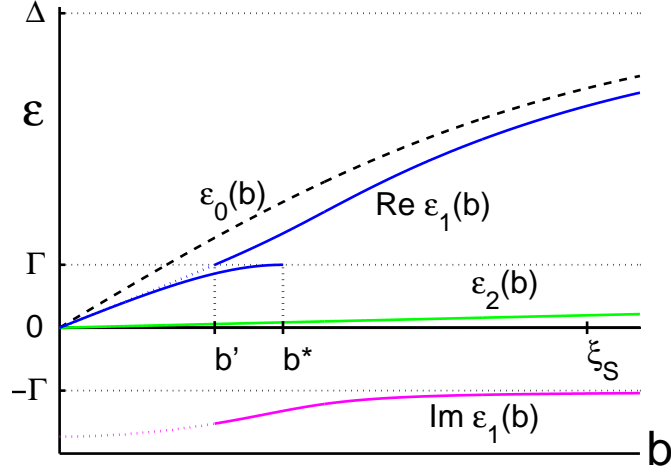


Рис. 2.5. Двухмасштабное поведение спектра подщелевых состояний (2.38) для когерентного туннелирования. Спектр состоит из двух аномальных ветвей $\epsilon_1(b)$ и $\epsilon_2(b)$ для $E < \Gamma$. Одна из ветвей $\epsilon_2(b)$ имеет характерный масштаб $b \sim \xi_{2D}$ и достигает максимального значения $E = \Gamma$ для больших значений прицельных параметров $b \gg \xi_{2D}$. В то же время состояния, которым отвечает другая ветвь $\epsilon_1(b)$ с масштабом ξ_S , при $\text{Re}E > \Gamma$ становятся резонансными. Значения b^* и b' определяются следующими соотношениями $\epsilon_1(b^*) = \Gamma - 0$ и $\text{Re}\epsilon_1(b') = \Gamma + 0$ соответственно. Функции $\epsilon_0(b)$, $\epsilon_2(b)$, and $\text{Re}\epsilon_1(b)$ нечётные, в то время как $\text{Im}\epsilon_1(b)$ – чётная по параметру b .

В итоге полный спектр квазичастичных возбуждений, изображенный на рис. 2.5, имеет две ветви: (а) одна из которых $\epsilon_2(b)$ полностью действительная и соответствует спектру CdGM для сверхпроводника с энергетической щелью Γ в однородном состоянии; (б) вторая ветвь идёт близко к спектру CdGM объёмного сверхпроводника, однако имеет разрыв на индуцированной щели $E = \Gamma$, где у неё появляется конечная мнимая часть.⁷

Таким образом, локальная плотность состояний для энергий выше наведённой щели $|E| > \Gamma$ и малых расстояний $\rho, b \lesssim \xi_S$ представляется в виде:

$$N(\rho, E) = \frac{\sqrt{E^2 - \Gamma^2}}{|E|} + \text{Re} \frac{q_v \Gamma^2 (\sqrt{E^2 - \Gamma^2} - i\Gamma) / 2|E|}{\sqrt{(E^2 + q_v \Gamma^2 + i q_v \Gamma \sqrt{E^2 - \Gamma^2})^2 - E^2 \epsilon_0^2(\rho)}}. \quad (2.43)$$

Полученная из выражения для разрешённой по углу траекторий величине

$$N_E(s, b) = \frac{\sqrt{E^2 - \Gamma^2}}{|E|} \left[1 - \frac{q_v \Gamma^2 E (E - \epsilon_0(b))}{[E(E - \epsilon_0(b)) + q_v \Gamma^2]^2 + q_v^2 \Gamma^2 (E^2 - \Gamma^2)} \right]$$

⁷ Значение мнимой части при в точке пересечения ветвью $\epsilon_1(b)$ индуцированной щели Γ оказывается конечным $\text{Im}\epsilon_1(b') \sim -\Gamma$ в отличие от обычного случая края непрерывного спектра. Этот факт можно объяснить наличием пика в плотности надщелевых состояний в 2D плёнке, которые и отвечают за утечку локализованных квазичастиц на бесконечность.

плотность состояний $N(\rho, E)$ имеет один пик высоты $\sim \Gamma^2/\epsilon_0^2(\rho)$ при энергии $E = \text{Re}\epsilon_1(\rho)$ для $\rho \gtrsim \xi_S^2/\xi_{2D}$. Существенно выше индуцированной щели по энергии $|E| \gg \Gamma$, подщелевой спектр 2D слоя упрощается до стандартного спектра CdGM с конечным уширением $\epsilon_1(b) = \epsilon_0(b) - i\Gamma q_v$. В этом случае локальная плотность состояний мало отличается от значения в нормальном состоянии $N_0 = 1$:

$$N(\rho, E) = 1 + \frac{q_v \Gamma^2}{2E^2} \text{Re} \frac{|E| - i\Gamma}{\sqrt{(E + iq_v \Gamma)^2 - \epsilon_0^2(\rho)}}$$

В итоге плотность локализованных состояний во всём диапазоне энергий (2.42, 2.43) имеет два (или даже три) пика для соответствующих расстояниях. Случай трёх пиков в плотности состояний реализуется на расстояниях, соответствующих прицельным параметрам в диапазоне $b' < b < b^*$, где спектр как функция прицельного параметра имеет три решения (см. рис. 2.5).

При рассмотрении результатов этого раздела возникают естественные вопросы:

- (1) Почему в спектре вихря с единичной завихренностью появляется две спектральные подщелевые ветви? Не противоречит ли это теореме об индексе (см., например, [28])?
- (2) Какие волновые функции отвечают каждой из ветвей спектра и по какой причине “пространственный” масштаб верхней ветви $\epsilon_1(b)$ оказывается одного порядка с масштабом волновых функций в сверхпроводящем полупространстве?
- (3) Почему в точке пересечения ветвей спектра ($b = 0$) нет их расщепления и соответственно утечки в моды, распространяющиеся вдоль оси вихря в сверхпроводнике?

Все эти вопросы вполне законные и имеют достаточно простые ответы.

Теорема об индексе связывает число нулей и сингулярностей гамильтониана с числом ветвей квазичастичного спектра. В отличие от стандартного случая сверхпроводящие потенциалы в рассматриваемом пределе содержат, кроме адиабатической сверхпроводящей щели Δ_{adiab} , отвечающей за формирование низколежащей моды $\epsilon_2(b)$, также полюсные вклады, локализованные на масштабе координаты вихря в сверхпроводнике $\rho \sim \xi_S$. В результате описанный в работе [28] топологический инвариант будет равен 2 для случая одноквантового вихря в рассматриваемой SN-системе. Иными словами, должно существовать две подщелевые ветви спектра. При этом разрыв ветви $\epsilon_1(b)$ на уровне наведённой щели Γ происходит из-за сингулярности плотности надщелевых состояний в двумерной плёнке с индуцированной сверхпроводимостью. Выше наведённой щели в нормальном слое есть непрерывный спектр состояний, который приводит к модификации ветви $\epsilon_1(b)$ и формированию волновой функции этого метастабильного состояния с утечкой в указанный непрерывный спектр.

Благодаря наличию в собственно энергетических частях уравнений 2D слоя локализованных компонент Σ_k^{loc} , спадающих на масштабе длины когерентности сверхпроводника ξ_S , волновые функции нормальной плёнки содержат как масштаб наведённой сверхпроводимости ξ_{2D} , отвечающий за дальнюю асимптотику (2.28, 2.31), так и масштаб наведённых потенциалов (см. рис. 2.1б). При этом относительный вклад мод с малым пространственным масштабом ξ_S в решение определяется отличием условий сшивки (2.36) на малых расстояниях $s = s_0$ от случая сшивки с учётом лишь адиабатической наведённой щели Δ_{adiab} (2.33). Поскольку модификации спектральной ветви $E = \varepsilon_2(b)$ при переходе от дальней асимптотики (2.32) к малым значениям прицельного параметра $b \lesssim \xi_S$ не происходит [см. формулу (2.39)], то и вклад локализованных состояний сверхпроводника в эту моду двумерного слоя мал в меру малости $\varepsilon_2(b)/\Gamma$. Иными словами в отсутствие примесей во всех частях системы спектральная ветвь $\varepsilon_2(b)$, выходящая на свою дальнюю асимптотику при прицельных параметрах $b \sim \xi_{2D}$, соответствует моде с таким же пространственным масштабом. В случае спектральной ветви $\varepsilon_1(b)$, энергия которой близка к спектру CdGM $\varepsilon_0(b)$, вклад локализованных полюсных вкладов сверхпроводника (2.36) в волновую функцию нормального слоя становится определяющим. Это соответствует двухмасштабному поведению моды, отвечающей этой ветви: в области сверхпроводящего кора она имеет резкое спадание с масштабом наведённой моды сверхпроводника ξ_S , однако на больших расстояниях восстанавливается дальняя асимптотика спадания на масштабе индуцированной длины когерентности. Такая гибридизация формирует состояние с масштабом спадания ξ_{2D} , которому отвечает спектральная ветвь, изменяющаяся на расстояниях ξ_S от центра вихря.

Что касается утечки состояний, локализованных в 2D слое, вдоль оси вихря в сверхпроводнике, то этого не происходит по следующим причинам. Во-первых, мы рассматриваем толщину сверхпроводника существенно больше всех масштабов системы, предполагая наличие вихря Абрикосова в сверхпроводящем полупространстве $z > 0$. В этом предельном случае единственная квазичастичная мода, которая может покинуть систему при энергиях $E < \Gamma$ должна распространяться точно вдоль оси вихря. Иными словами, это соответствует траектории с нулевым прицельным параметром $b = 0$ и нулевой проекцией скорости Ферми $v_{\parallel} = 0$ на плоскость Oxy . Однако, из-за сохранения проекции импульса на границу раздела сверхпроводника и нормальной плёнки при туннелировании указанная мода соответствует моде с нулевым импульсом в двумерной подсистеме, то есть не лежит вблизи поверхности Ферми. Иными словами, это приводит к ортогональности волновых функций сверхпроводника и нормального слоя и препятствует расщеплению спектральных ветвей в точке их пересечения, а также блокирует утечку из двумерного слоя в моду, распространяющуюся вдоль оси вихря.

2.3.4. Влияние примесей в барьере. Некогерентное туннелирование

При учёте беспорядка в барьере, разделяющем подсистемы, туннелирование происходит без сохранения импульса. Поэтому сверхпроводящие потенциалы в этом случае перестают зависеть от прицельного параметра и направления траектории в сверхпроводнике. Иными словами, наличие примесей в барьере приводит к потере информации о спектре CdGM сверхпроводника в двумерной плёнке, а также снимает запрет на туннелирование из локализованных мод в нормальном слое в моду сверхпроводника, распространяющуюся вдоль оси вихря. Как мы увидим в этом разделе, все описанные выше эффекты означают, что спектр локализованных состояний в индуцированном вихре в рассматриваемой модели имеет одну подщелевую спектральную ветвь, которая модифицирована в области сверхпроводящего кота $\rho \sim \xi_S$ наличием утечки в сверхпроводник.

Как и в предыдущем подразделе, будем предполагать прицельные параметры траектории малыми $b \ll \xi_S$. В этом случае можно пренебречь поправкой первого порядка (2.29) по b/ξ_{2D} к функции Грина 2D слоя, поскольку $\epsilon_2(b) \ll \Gamma^2/\Delta_\infty$. В рамках таких приближений выражение для коэффициента C получается на основе асимптотического решения (2.28) и условия сшивки (2.36):

$$C \left[E - \epsilon_2(b) + \frac{2\sqrt{\Gamma^2 - E^2}}{\hbar v_N} \int_0^\infty \Sigma_1^{loc} ds - \frac{2\Gamma}{\hbar v_N} \int_0^\infty \Sigma_I^{loc} ds \right] = \Gamma - \frac{2E}{\hbar v_N} \int_0^\infty \Sigma_I^{loc} ds . \quad (2.44)$$

Поскольку амплитуды локализованных компонент $|\Sigma_1^{loc}|, |\Sigma_I^{loc}| \sim \Gamma$ собственно энергетической части порядка наведённой щели, полюс функции Грина соответствует малым значениям энергии $E \lesssim \Gamma^2/\Delta \ll \Gamma$. В связи с этим выражение для коэффициента C может быть упрощено $C = \Gamma [E - \epsilon_2(b) + (2/\xi_{2D}) \int_0^\infty (\Sigma_1^{loc} - \Sigma_I^{loc}) ds]^{-1}$. Необходимо отметить, что локализованные части Σ_1^{loc} и Σ_I^{loc} сверхпроводящих потенциалов исчезающе малы как при энергиях порядка индуцированной щели $E \sim \Gamma$, так и для прицельных параметров $|b| \gg \xi_S$, много больших длины когерентности в сверхпроводнике. В обоих случаях уравнение (2.44) переходит в равенство (2.33). Интегральный член в уравнении выше удобно разбить на действительную $\beta(b) = \beta_I(b) - \beta_1(b)$ и мнимую $\gamma(b) = \gamma_I(b) - \gamma_1(b)$ части:

$$\frac{2}{\xi_{2D}} \int_0^\infty (\Sigma_1^{loc} - \Sigma_I^{loc}) ds = -\beta(b) \pm i\gamma(b) , \quad (2.45)$$

где верхний (нижний) знак \pm отвечает запаздывающим (опережающим) функциям Грина. Вычислим слагаемые, входящие в состав действительной $\beta_p(b) \stackrel{\text{def}}{=} (2/\xi_{2D}) \int_0^\infty \text{Re} \Sigma_p^{loc}(s) ds$ и мнимой $\gamma_p(b) \stackrel{\text{def}}{=} (2/\xi_{2D}) \int_0^\infty \text{Im} \Sigma_p^{loc}(s) ds$ частей интеграла (2.45) с $p \in \{1, I\}$, которые играют роль сдвига энергии и уширения спектральной ветви соответственно.

Интеграл для первого слагаемого в следующем выражении

$$\beta_I(b) = \frac{2\Gamma^2 b}{v_N} \int_0^\infty \left\langle \frac{v_{\parallel} e^{-K}}{2Q\Omega\rho^2} \left[1 - \operatorname{Re} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Omega^2\rho^2}} \right] \right\rangle_z ds$$

с $\rho^2 = b^2 + s^2$ сходится на масштабе $s \sim b$, то есть

$$\Gamma b \int_0^\infty \left\langle \frac{v_{\parallel} e^{-K}}{Q\Omega\rho^2} \right\rangle_z ds = \Gamma b \int_0^\infty \left\langle \frac{v_{\parallel}}{Q\Omega(s^2 + b^2)} \right\rangle_z ds = \operatorname{sgn}(b) \Gamma \left\langle \frac{\pi v_{\parallel}}{2Q\Omega} \right\rangle_z.$$

Второе слагаемое не равно нулю лишь для очень малых прицельных параметров $b^2 < E^2/\Omega^2$ ($b_0^2 = E^2/\Omega^2 - b^2 > 0$):

$$\int_0^{b_0} \frac{ds}{\sqrt{b_0^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{b_0} \frac{ds}{(s^2 + b_0^2)\sqrt{b_0^2 - s^2}} = \frac{\pi\Omega}{2|bE|}.$$

В результате

$$\begin{aligned} \beta_I(b) &= \operatorname{sgn}(b) \frac{\Gamma^2}{v_N} \left\langle \frac{\pi v_{\parallel}}{Q\Omega} \chi_H(\Omega^2 b^2 - E^2) \right\rangle_z, \\ \beta_1(b) &= -\operatorname{sgn}(E) \frac{\Gamma^2}{v_N} \left\langle \frac{\pi v_{\parallel}}{Q\Omega} \chi_H(E^2 - \Omega^2 b^2) \right\rangle_z, \end{aligned}$$

где $\chi_H(x) = [1 + \operatorname{sgn}(x)]/2$ – функция Хевисайда. Выражение для разности $\beta(b) = \beta_I(b) - \beta_1(b)$ упрощается $\beta(b) = \Gamma^2 \langle (\pi q_v/Q\Omega) \operatorname{sgn}(\epsilon + \Omega b) \rangle_z$ и для $b \gtrsim \xi_S$ спадает как $\exp(-2b/\xi_S)$.

Выражения для мнимых частей верны для всех прицельных параметров и расстояний, так как содержат дельта-функции Дирака (см. приложение Б.1):

$$\begin{aligned} \gamma_1(b) &= \frac{\Gamma^2}{v_N} \int_0^\infty \left\langle \operatorname{Re} \frac{v_{\parallel} e^{-K}}{Q\sqrt{\Omega^2\rho^2 - E^2}} \right\rangle_z ds = \frac{\Gamma^2}{v_N} \left\langle \frac{v_{\parallel}}{Q\Omega} \ln \frac{\Delta_\infty}{\sqrt{|\Omega^2 b^2 - E^2|}} \right\rangle_z, \\ \gamma_2(b) &= \int_0^\infty \left\langle \operatorname{Re} \frac{Eb}{\Omega\rho^2} \frac{\Gamma^2 v_{\parallel} e^{-K}}{Qv_N\sqrt{\Omega^2\rho^2 - E^2}} \right\rangle_z ds = \operatorname{sgn}(Eb) \left\langle \frac{\Gamma^2 v_{\parallel}}{Qv_N\Omega} \ln \frac{\Omega|b| + |E|}{\sqrt{|\Omega^2 b^2 - E^2|}} \right\rangle_z. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали выражения для интегралов от стандартных функций

$$\begin{aligned} \int_{b_0}^{s_{max}} \frac{ds}{\sqrt{s^2 \pm b_0^2}} &= \ln \frac{\Delta}{\sqrt{|\Omega^2 b^2 - E^2|}}, \\ \int_{b_0}^{s_{max}} \frac{ds}{\sqrt{s^2 \pm b_0^2}(s^2 + b^2)} &= \frac{\Omega}{|bE|} \ln \frac{\Omega|b| + |E|}{\sqrt{|\Omega^2 b^2 - E^2|}}, \end{aligned}$$

где $s_{max} \sim \xi_S$. Мнимые части также экспоненциально спадают при $b \gtrsim \xi_S$. Выражение для их разности $\gamma(b) = \gamma_1(b) - \gamma_I(b)$ записывается так $\gamma(b) = \Gamma^2 \left\langle (q_v/Q\Omega) \ln \frac{\Delta_\infty}{|\Omega b + \epsilon|} \right\rangle_z$.

В результате коэффициент C принимает вид

$$C = \Gamma / [E - \epsilon_2(b) - \beta(b) + i\gamma(b)] . \quad (2.46)$$

Плотность состояний, разрешённая по углам траекторий, для $E < \Gamma$ может быть записана следующим образом:

$$N_E(s, b) = \frac{\Gamma \gamma(b) e^{-\lambda|s|}}{[E - \epsilon_2(b) - \beta(b)]^2 + \gamma^2(b)} .$$

Из полученного выражения видно, что пик плотности состояний имеет сдвиг $\beta(b)$ и уширение $\gamma(b)$. Локальная плотность состояний также обладает сдвинутым и уширенным пиком точно над центром вихря, который отвечает расщеплению zero-bias аномалии [89–91]. При удалении от центра вихря пик плотности состояний сдвигается к ближе к наведённой щели, а его ширина уменьшается, согласно переходу уравнения (2.44) в (2.33). Поскольку величины $\beta, \gamma \sim \Gamma/\Delta$ и $\epsilon_2(b)/\Gamma \ll 1$ малы для $b \ll \xi_{2D}$, то при надщелевых значениях энергии $|E| > \Gamma$ плотность состояний принимает своё объёмное значение: $N(\rho, E) = \sqrt{E^2 - \Gamma^2}/|E|$. Из выражения для величины уширения $\gamma(b)$ спектральной ветви $\epsilon_2(b)$ видно, что она имеет логарифмическую особенность вблизи начала координат на плоскости (E, b) . Эта особенность, скорее всего, связана с утечкой локализованных состояний в моду сверхпроводника с $b = 0$ (и соответственно $E = 0$), распространяющуюся вдоль оси вихря. Безусловно в рассматриваемом случае некогерентного туннелирования величина прицельного параметра не сохраняется, однако пространственное распределение локализованных мод в сверхпроводнике и 2D плёнке при *равных* прицельных параметрах отвечает наибольшему перекрытию волновых функций, то есть наибольшей утечке. Сдвиг $\beta(b)$ спектральной ветви $\epsilon_2(b)$ соответствует расщеплению энергетических термов в нормальном слое и сверхпроводящем полупространстве с одинаковой энергией, но разной (в общем случае) угловой симметрией (прицельными параметрами b). Этот сдвиг имеет место из-за возможности туннелирования с изменением b , что, в свою очередь, не проявлялось в когерентном случае.

2.3.5. Результаты в грязном пределе

При дальнейшем развитии беспорядка, когда весь сверхпроводник переходит в грязное состояние, особенности спектра CdGM в сверхпроводнике замыкаются полностью, поэтому теряется также информация о сдвиге спектральной ветви двумерного слоя. При малых прицельных параметрах $b \ll \xi_S$ чётная компонента Σ_I^{loc} локализованной части наведённой сверхпроводящей щели пренебрежимо мала $\Sigma_I^{loc} = 0$, и условие шивки в этом случае выглядит

довольно просто:

$$\xi_{2D}\theta(s_0) = 2i\zeta(s_0) \int_0^\infty \sin \Theta ds + 2ig(s_0)b \ln[s_0/\xi_S] .$$

После подстановки выражений для дальней асимптотики функции Грина, получается выражение для коэффициента $C = \Gamma/[E - \epsilon_2(b) + i\gamma]$, которое содержит единственный уширенный полюс на энергии $E = \epsilon_2(b)$. При этом значение уширения $\gamma = 2\Gamma\sqrt{\Gamma^2 - E^2} \int_0^\infty \sin \Theta ds/\hbar v_N$ имеет порядок $\gamma \sim \Gamma^2/\Delta_\infty$. В результате отличие этого случая от предыдущего подраздела состоит в отсутствии расщепления пика локальной плотности состояний точно над центром вихря ($\beta = 0$), а также в конкретном значении уширения. Для бóльших прицельных параметров $b \gg \xi_S$ мнимая часть энергии γ экспоненциально спадает с b , в результате чего уравнение типа (2.46) переходит в (2.33).

В заключение аналитической части раздела мы сконцентрируем своё внимание на случае грязного предела в обеих подсистемах. Этот случай был ранее рассмотрен в работах [132, 133] и приводится далее для полноты картины. Как было выведено в предыдущей главе, в грязном пределе нормальной подсистемы функции Грина в ней удовлетворяют уравнению Узаделя (1.41) с собственно энергетическими частями, записанными в форме (1.28). Используя стандартную тригонометрическую параметризацию [128, 129] с заменой функций Грина сверхпроводника (2.24) на функции Грина в двумерном слое:

$$\check{g} = \begin{pmatrix} \sin \Psi & ie^{i\phi} \cos \Psi \\ -ie^{-i\phi} \cos \Psi & -\sin \Psi \end{pmatrix} ,$$

получим уравнение Узаделя в виде:

$$D_2 \left[\nabla^2 \Psi + \frac{\sin(2\Psi)}{2\rho^2} \right] - 2\Gamma \sin(\Psi - \Theta) - 2iE \cos \Psi = 0 . \quad (2.47)$$

Граничные условия совпадают с приведёнными в разделе 2.3.1 для сверхпроводника с заменой Δ_∞ на Γ . Функция $\Theta(\rho)$ существенно не равна нулю лишь в окрестности сверхпроводящего кора $\rho < \xi_S$. При этом, как показано ниже, условие $\xi_S \ll \xi_{2D} = \sqrt{\hbar D_2/\Gamma}$ даёт возможность утверждать, что неоднородности в индуцированных потенциалах $\Theta(\rho)$ с малым характерным масштабом спада без полюсных особенностей практически не возмущают асимптотического решения, основанного на адиабатическом приближении щели (2.17). Иными словами, в уравнении (2.47) можно пренебречь вкладом Θ и прийти к уравнению в грязном сверхпроводнике с амплитудой энергетической щели Γ .

Описанное выше поведение можно продемонстрировать следующей оценкой. Интегрируя уравнение (2.47) с множителем ρ в окрестности нуля (от $\rho = 0$ до значения $\xi_S \ll \rho_0 \ll$

ξ_{2D}), мы найдём условие сшивки на функцию Грина в дальней асимптотике :

$$D_2 \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \Psi \Big|_0^{\rho_0} + \int_0^{\rho_0} \frac{\sin 2\Psi}{2\rho} d\rho \right] - 2 \int_0^{\rho_0} \rho d\rho [\Gamma \sin(\Psi - \Theta) + iE \cos \Psi] = 0 .$$

Рассматривая разложение $\Psi(\rho_0) = \Psi_0 - K\rho_0$ с коэффициентом $K = \partial\Psi(\rho_0)/\partial\rho \sim \xi_{2D}^{-1}$ и предполагая $\Psi_0 \neq \pi/2$, получим, что постоянная Ψ_0 всё же мало отличается от значения $\pi/2$: $\cos \Psi_0 \approx \rho_0^2 / (\xi_{2D}^2 \ln(\rho_0/\xi_S)) \ll 1$. Эта оценка подтверждает вывод о том, что плотность состояний в грязном пределе соответствует плотности состояний объёмного сверхпроводника с перенормированным пространственным масштабом ξ_{2D} и энергетической щелью Γ , причём точность этого соответствия лежит во втором порядке по малому параметру ρ_0/ξ_{2D} .

2.3.6. Численное решение уравнений. Метод и результаты

В последнем подразделе будут описаны численные методы, использованные для решения уравнений Эйленбергера (1.25, 2.15) и Узаделя (2.25, 2.47) в сверхпроводнике, а также в 2D слое с индуцированными потенциалами в чистом (2.22, 2.23) и грязном (1.28) пределе соответственно. При решении уравнений в сверхпроводнике, чтобы не усложнять процедуру вычислений, расчёты проведены без учёта уравнения самосогласования с конкретным профилем параметра порядка $\Delta_0(\rho)$, описывающим одноквантовый вихрь:

$$\Delta_0(\rho) = \Delta_\infty \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + \xi_S^2}} . \quad (2.48)$$

Для решения уравнений Эйленбергера была применена стандартная параметризация Риккати для квазиклассических функций Грина \check{g} и \check{g}_S (см., например, [129, 134]):

$$\check{g}(s, \alpha) = \frac{1}{1 + a a^+} \begin{pmatrix} 1 - a a^+ & 2a \\ 2a^+ & -1 + a a^+ \end{pmatrix} , \quad (2.49)$$

где функции a и a^+ , возникшие в параметризации, связаны с электронной u и дырочной v компонентами волновой функции квазиклассических уравнений БдЖ (уравнений Андреева) [129]: $a = u/v$. Уравнения на функции a и a^+ являются удобными для вычислений, поскольку они представляют собой набор независимых дифференциальных уравнений типа Риккати:

$$\hbar v_N \frac{\partial}{\partial s} a - [2i(E + \Sigma_1 \pm i\delta) - \Sigma_2^+ a] a - \Sigma_2 = 0 , \quad (2.50a)$$

$$\hbar v_N \frac{\partial}{\partial s} a^+ + [2i(E + \Sigma_1 \pm i\delta) - \Sigma_2 a^+] a^+ + \Sigma_2^+ = 0 \quad (2.50b)$$

граничные условия для которых при $s \rightarrow \mp\infty$ для a и a^+ соответственно:

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} a(s, \alpha) = \lim_{s \rightarrow -\infty} \frac{\Sigma_2}{-i(E + \Sigma_1 \pm i\delta) + \sqrt{|\Sigma_2|^2 - (E + \Sigma_1 \pm i\delta)^2}}, \quad (2.51a)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} a^+(s, \alpha) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\Sigma_2^+}{-i(E + \Sigma_1 \pm i\delta) + \sqrt{|\Sigma_2|^2 - (E + \Sigma_1 \pm i\delta)^2}} \quad (2.51b)$$

выбраны таким образом, чтобы полученные уравнения не имели расходящихся решений. Здесь параметризация, уравнения и граничные условия приведены для функций Грина 2D слоя. В случае сверхпроводника необходимо произвести следующую замену:

$$\check{g} \rightarrow \check{g}_S, \quad a, a^+ \rightarrow a_S, a_S^+, \quad v_N \rightarrow v_{\parallel}, \quad \Sigma_1 \rightarrow 0, \quad \Sigma_2 \rightarrow \Delta. \quad (2.52)$$

В чистом пределе обеих систем, описанном в подразделах 2.3.3 и 2.3.4, алгоритм расчёта был следующий. Для каждого значения энергии E сначала решались уравнения Эйленбергера (2.50) в сверхпроводнике в параметризации Риккати (2.49) с граничными условиями (2.51) с учётом замены (2.52). Профиль параметра порядка выбирался согласно (2.48). Затем по соответствующим формулам для индуцированных потенциалов (2.22, 2.23) находились собственно энергетические части $\Sigma_{1,2}$ уравнений в 2D плёнке (2.50). В свою очередь, эти уравнения решались с граничными условиями (2.51). Теоретически бесконечно малое уширение энергии δ в расчётах выбиралась из тех соображений, чтобы, с одной стороны, амплитуды дельта-функциональных пиков типа (2.41) были численно не очень велики, а с другой – чтобы сглаживание энергетических зависимостей сохраняло все характерные особенности. Благодаря осевой симметрии задачи зависимость от азимутального угла направления траектории α могла быть выделена в функциях $a(s, \alpha) = a_1(s)e^{-i\alpha}$, $a^+(s, \alpha) = a_1^+(s)e^{i\alpha}$, при этом $a_1^+(-s) = -a_1(s)$.

Для ускорения расчётов вычисления проводились на единой координатной решётке с неоднородным шагом, в которой до расстояний порядка $\sim 3\xi_S$ шаг интегрирования был мал по сравнению с длиной когерентности в сверхпроводнике ($\delta\rho_1 = 0.01\xi_S$), а при бóльших расстояниях шаг соответствовал масштабу длины когерентности в двумерном слое ξ_{2D} ($\delta\rho_2 = 0.01\xi_{2D}$). Усреднение (1.33) по азимутальному углу и параметризация функции $\langle \check{g}_S \rangle(\rho)$ через координаты траектории (s, b) производились с использованием процедуры интерполяции функции с декартовой (s, b) на полярную (ρ, ϕ) координатную сетку и обратно.

Благодаря симметрии запаздывающих g^R и опережающих g^A квазиклассических функций Грина $g^R = -(g^A)^*$, вычисление локальной плотности состояний (2.35) свелось к усреднению по направлениям траекторий α :

$$N(\rho, E) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (g^R(s, b) - g^A(s, b)) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{Re} \frac{1 - a_1(s, b)a_1^+(s, b)}{1 + a_1(s, b)a_1^+(s, b)} d\eta,$$

где $s = \rho \sin \eta$, $b = \rho \cos \eta$.

Для решения уравнений Узаделя (2.25, 2.47) использовался стандартный релаксационный метод на дискретной сетке. Суть этого метода сводится к следующему. Для решения уравнения $F[\Theta(\rho)] = 0$ с граничными условиями производится его сеточная аппроксимация с определённым шагом $\delta\rho$. Затем задаётся некоторое начальное распределение $\Theta_0(\rho)$, вводится фиктивная переменная времени и на каждом шаге в конечных разностях решается уравнение $\Theta(t+\delta t) = \Theta(t) + F[\Theta]\delta t$ с малым шагом по фиктивной переменной $\delta t < (\delta\rho)^2/2$. Уравнение решается до тех пор, пока максимальное относительное изменение $\max_\rho |\Theta(t+\delta t) - \Theta(t)|/|\Theta(t)|$ на очередном шаге не станет меньше определённого порогового значения.

В результате всех вычислений показано, что плотность состояний в зависимости от энергии в *когерентном* случае (в отсутствие беспорядка во всех частях системы) имеет несколько пиков (см. рис. 2.6а). При увеличении расстояния от центра вихря пик плотности состояний, локализованный на уровне Ферми $E = 0$, расщепляется на два. Положение каждого из этих двух пиков постепенно смещается до значения наведённой щели. Однако пик с большей амплитудой достигает края щели Δ_{ind} на расстояниях порядка $\rho \sim \xi_{2D}$. В то же время верхний (по энергии) пик является более слабым и выходит на наведённую щель при существенно меньших расстояниях $\rho \sim \xi_S^2/\xi_{2D}$. На расстояниях того же порядка $\rho \sim 0.2\xi_S \div 0.5\xi_S$ этот пик расщепляется на два отдельных пика. Причём на расстояниях $\rho \gtrsim 0.3\xi_S$ энергия верхнего из полученной пары пиков превосходит индуцированную щель, при этом пик становится сильно уширенным.

Случай некогерентного туннелирования (см. рис. 2.6б) характеризуется одним пиком плотности состояний, сдвинутым относительно нулевого значения энергии даже точно над центром вихря ($\rho = 0$). Кроме того, этот пик уширен. При удалении от центра пик сдвигается и обужается. На расстояниях порядка $\rho \sim \xi_{2D}$ он достигает значения Γ . При этом плотность состояний выходит на зависимость в однородном материале со щелевой особенностью [13].

Для грязного предела сверхпроводника, рассмотренного в разделе 2.3.5, в части оригинальных результатов (не повторяющих работу [132]) мы рассмотрели случай 2D плёнки в чистом пределе (см. рис. 2.6в). Поведение локальной плотности состояний в зависимости от энергии совпадает с результатом предыдущего подраздела: в центре вихря наблюдается уширенный пик на нулевой энергии, который при увеличении ρ сдвигается в соответствии со спектром CdGM в 2D слое $\epsilon_2(b)$, при этом его уширение уменьшается.

Для сравнения результатов вычислений, проведённых на основе предположения о существовании нормального поверхностного слоя на границе сверхпроводника с вакуумом, с

⁸ Мы рассматриваем случай, когда $\xi_{2D} = 5\xi_S$ в вычислениях

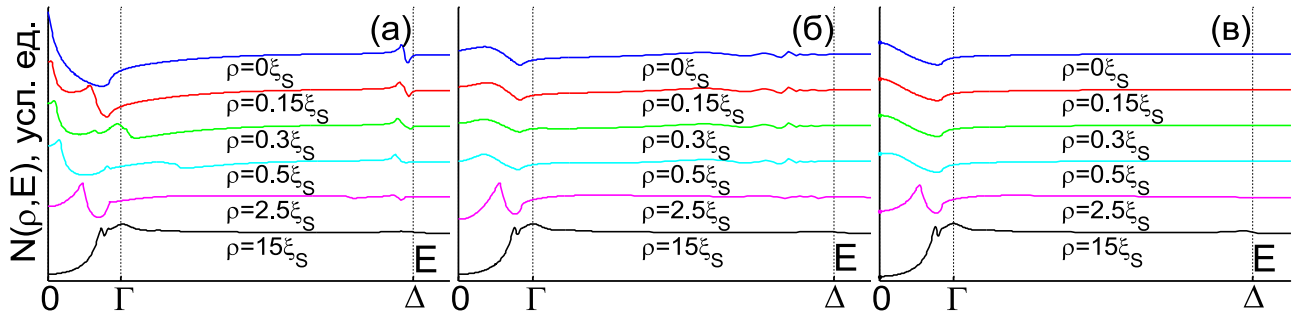


Рис. 2.6. Локальная плотность состояний в логарифмическом масштабе для случаев (а) когерентного и (б) некогерентного туннелирования в чистом пределе обеих подсистем, а также (в) для грязного предела сверхпроводника при различных значениях расстояний ρ от центра вихря. Пики $N(E)$ сохраняются вплоть до расстояний $\sim \xi_{2D}$. Здесь выбраны параметры $\Delta/\Gamma = 5$, $q_v = v_{\parallel}/v_S = 1$.

экспериментально наблюдаемыми особенностями плотности состояний ниже представлено ещё несколько графиков (см. рис. 2.7, 2.8). На первом графике приведены зависимости ло-

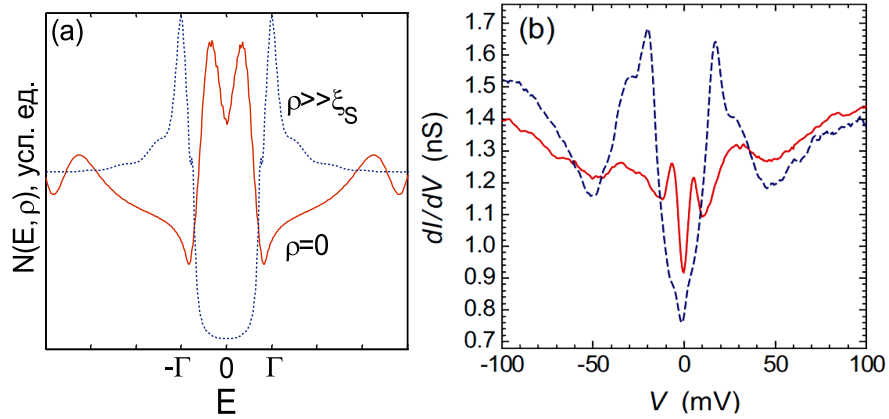


Рис. 2.7. Сравнительный график локальной плотности состояний в точке над центром вихря (красная сплошная линия) и вдали от кора вихря (синяя пунктирная). (а) Кривые, полученные на основе вычислений в рассмотренной модели для некогерентного туннелирования в чистом пределе обеих подсистем с параметрами $\Delta/\Gamma = 5$, $q_v = v_{\parallel}/v_S = 1$; (б) График, взятый из статьи [89] для соединения $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$.

кальной плотности состояний от энергии, вычисленной в чистом пределе для некогерентного туннелирования, и измерения дифференциальной проводимости с помощью СТМ/СТС в работе [89] как в точности над центром сверхпроводящего вихря в $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, так и вдали от него. Сравнивая графики необходимо отметить их качественное сходство как в профиле плотности состояний в однородном состоянии (двойная щелевая особенность), так и в центре вихря, где наблюдается расщепление пика плотности состояний.

Второй график посвящён другому отклонению локальной плотности состояний вихревого состояния сверхпроводника от классической картины, определяемой спектром Каро-

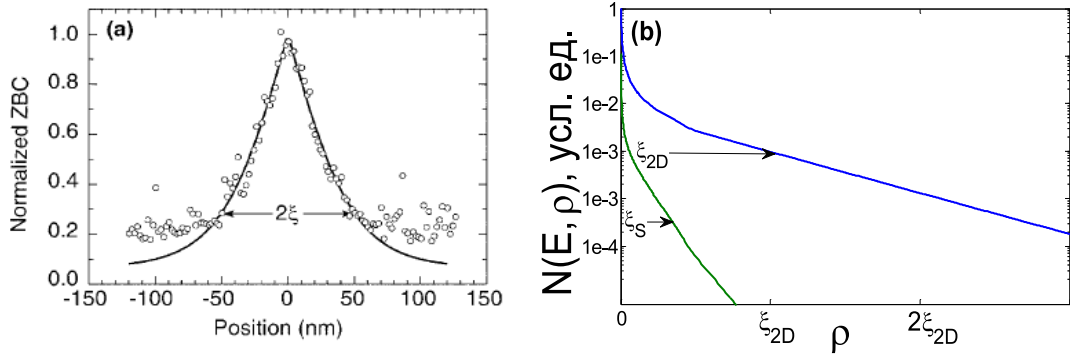


Рис. 2.8. Сравнительный график локальной плотности состояний при нулевой энергии $E = 0$ в зависимости от расстояния до центра вихря. (а) График, взятый из статьи [88] для соединения MgB_2 , посвящённый наблюдению anomalously large size of superconductor core, (б) кривые, полученные на основе вычислений в рассмотренной модели для когерентного туннелирования в чистом пределе обеих подсистем для сверхпроводника (зелёная кривая) и 2D плёнки (синяя) с параметрами $\Delta/\Gamma = 5$, $q_v = v_{||}/v_S = 1$.

ли - де Жена - Матрикона [78]. В работе [88] с помощью СТМ методики было обнаружено (см. рис. 2.8а), что пространственный масштаб спада ξ_{exp} локальной плотности состояний в сверхпроводнике MgB_2 anomalously велик $\xi_{exp} \gg \xi_{th}$ по сравнению с теоретической формулой $\xi_{th}^2 \simeq \Phi_0/2\pi H_{c2}$, основанной на независимом измерении верхнего критического поля H_{c2} . На рисунке 2.8б изображены графики локальной плотности состояний в логарифмическом масштабе, полученной в рамках описанных выше вычислений, в зависимости от расстояния до центра вихря как в сверхпроводнике (зелёная кривая), так и в двумерной нормальной плёнке (синяя). Одним из возможных объяснений наблюдений является тот факт, что теоретическая оценка длины когерентности ξ_{th} должна соответствовать длине когерентности в сверхпроводнике $\xi_{th} \sim \xi_S$, в то время как масштаб изменения локальной плотности состояний ξ_{exp} определяется характерным сверхпроводящим масштабом 2D подсистемы $\xi_{exp} \sim \xi_{2D}$.

2.4. Выводы ко второй главе

В результате вычислений, проведённых в этой главе, исследованы спектр и плотность состояний, локализованных вблизи центра уединённого вихря, индуцированного в двумерной нормальной подсистеме (графене и двумерной металлической плёнке) за счёт эффекта близости со массивным сверхпроводником.

В первой части главы, посвящённой изучению вихря в сверхпроводящем графене, найдено точное аналитическое решение для нулевой моды многоквантового вихря с нечётной завихренностью $M = 2p + 1$ при произвольных профиле параметра порядка и уровне Ферми,

предложен критерий существования нулевых мод и пояснена динамика их появления при увеличении уровня Ферми от нулевого значения. Нулевая мода в вихре с нечётной завихренностью M появляется в графене, благодаря отличию в квантовании углового момента в нём (2.3). Кроме того, было развито квазиклассическое описание спектра квазичастичных состояний при больших значениях уровня Ферми $\mu \gg \Delta_{ind}$, и с помощью численного моделирования подтверждена применимость развитого подхода. В рамках квазиклассики была прослежена динамика спектральных ветвей $\epsilon_M^{(i)}(\nu)$ как функций непрерывной переменной орбитального момента ν при изменении энергии Ферми μ . С помощью квантования Бора-Зоммерфельда, которое совпало с точным квантованием орбитального момента, найден период по μ , при преодолении которого через нулевое значение энергии проходит одна пара мод в конечных значениях ν . Все результаты этой части представлены в работе [A3].

На основе вычислений второй части предложено альтернативное объяснение особенностей локальной плотности состояний вблизи вихря в сверхпроводнике. Предполагая наличие тонкой металлической плёнки на границе сверхпроводника с вакуумом во внешнем магнитном поле, мы показали, что благодаря индуцированным сверхпроводящим корреляциям плотность состояний в приповерхностном слое, которая чаще всего и измеряется с помощью методики сканирующей туннельной микроскопии, может в зависимости от модели туннелирования демонстрировать как наблюдавшиеся в экспериментах аномально большой размер кода вихря (см. рис. 2.8) и сдвиг пика из нулевых значений энергии при нахождении иглы микроскопа над центром вихря (см. рис. 2.7), так и новые эффекты: например, наличие двух подщелевых спектральных ветвей спектра вихря с единичной завихренностью (см. рис. 2.5) и соответственно двух (или даже трёх) пиков локализованных квазичастичных состояний (см. рис. 2.6a). Результаты этой части представлены в работе [A4].

Влияние эффекта близости на транспортные свойства краевых состояний в структурах в режиме квантового эффекта Холла

3.1. Введение

Как известно, при достаточно низких температурах термодинамические и транспортные свойства металлов (при $T \ll \mu$) и сверхпроводников ($T \ll \Delta$) определяются квазичастичными модами, энергия которых лежит вблизи поверхности Ферми ($E \ll \mu, \Delta$). Транспортные свойства гибридных систем на основе контактов нормального металла со сверхпроводником (N/S) активно изучаются около полувека как теоретически, так и экспериментально. Зарядовый, спиновый и тепловой транспорт в таких контактах определяются эффектом андреевского отражения [10–12], который, как было показано в классической работе Blonder, Tinkham, Klapwijk [135], определяет трансформацию квазичастичного тока в окрестности N/S границы в сверхтекучий при энергиях падающих электронов, меньше сверхпроводящей щели Δ_∞ . Испытывая андреевское рассеяние электроны, которые падают из области нормального металла, отражаются от N/S границы в виде дырок с противоположным зарядом и групповой скоростью, но практически с тем же импульсом¹. Поскольку при таком процессе выполняется закон сохранения заряда и в сверхпроводящую область проникает куперовская пара с зарядом $2e$, то процесс андреевского отражения – существенно двухчастичный. Иными словами, нормальный электрический ток в N-области преобразуется в сверхтекучий ток, носителями которого в S-области являются куперовские пары. Если контакт N/S границы не содержит изоляционного барьера, то дифференциальная проводимость (кондактанс) такой системы будет вдвое больше, чем кондактанс этого контакта в нормальном состоянии, благодаря эффекту удвоения заряда, втекающего в сверхпроводящий электрод при андреевском отражении. Однако наличие нормального отражения от N/S интерфейса (например, из-за наличия поверхностного барьера малой прозрачности $T_s \ll 1$ между S и N электродами) приводит к сильному T_s^2 подавлению андреевского отражения как двухчастичного процесса по сравнению с квазичастичным нормальным транспортом, вероятность которого падает

¹ Так как дырка, относящаяся к зоне проводимости, имеет отрицательную эффективную массу, а не только противоположный заряд

лишь до величины T_s . Кроме того, наличие сильного магнитного поля (например, в режиме квантового эффекта Холла) [68–70, 72, 75, 136] или особенности геометрии проводящих каналов (как в случае двумерного топологического изолятора) могут приводить к существенной модификации андреевского отражения и, как следствие, к особенностям транспорта всего контакта.

Данная глава посвящена расчету андреевского транспорта в N/S контактах, где в качестве нормального электрода выступает двумерный электронный газ (ДЭГ), графен или двумерный топологический изолятор (2D ТИ). При этом предполагается, что транспорт основан на протекании зарядового и/или спинового тока по каналам, прижатым к краям образца как за счёт квантующего магнитного поля, перпендикулярного направлению транспорта заряда, так и за счёт особенностей зонной структуры (2D ТИ). В дальнейшем мы будем называть эти каналы краевыми.

В случае контактов на основе ДЭГ и графена в магнитных полях H , рассмотренных в первой части главы, оказывается, что кондактанс N/S контактов в зависимости от поля и уровня энергии Ферми μ существенно отличается для разных типов нормальной двумерной подсистемы в сильных магнитных полях и/или при малых энергиях Ферми (в так называемом квантовом пределе) $\mu \lesssim \hbar\omega_c$ для ДЭГ и $\mu \lesssim \hbar v_N/L_H$ для графена.² В этом случае транспорт в системе определяется лишь двумя краевыми каналами (электронным и дырочным). В случае S-ДЭГ контакта кондактанс осциллирует в зависимости от магнитного поля и уровня Ферми [70, 136], в то время как в системе на основе графена [72] он зависит от ориентации границ графена с изолятором и не меняется при изменении фактора заполнения в квантовом пределе. При увеличении числа токонесящих мод, осцилляции появляются и в системе с графеном в качестве N-электрода, при этом различия между типами контактов сглаживаются. Поскольку в реальных экспериментах измерения дифференциальной проводимости производятся при конечной температуре и конечном напряжении между электродами, описанные выше осцилляции кондактанса должны “замываться”. Моделируя это “замытие” с помощью усреднения по реализациям примесей, присутствующих вблизи границы раздела N/S, при большой концентрации рассеивателей можно записать универсальные соотношения для дифференциальной проводимости G_{SN} и её стандартного отклонения σ_G :

$$\langle G_{SN} \rangle = G_0 N, \quad \sigma_G = G_0 \sqrt{\frac{N}{4(2N+1)}}, \quad (3.1)$$

зависящие лишь от числа электронных краевых каналов N и фундаментальных постоянных

² Здесь $\omega_c = e\hbar v_N/cP_N$, $L_H = \sqrt{\hbar c/|eH|}$, P_N и v_N – циклотронная частота, магнитная длина, импульс и скорость Ферми в двумерной подсистеме, введённые в предыдущих главах.

через квант проводимости $G_0 = e^2/\pi\hbar$. В этих выражениях спектр квазичастиц нормальной подсистемы проявляется лишь в виде зависимости числа электронных краевых каналов N от магнитного поля и уровня Ферми. При умеренной концентрации примесных центров, когда усредняются в основном фазы рассеяния, в универсальном выражении (3.1), кроме числа каналов, остаётся также зависимость от некоторых средних вероятностей $\tau_{1,2}$ ³ прохождения электронов в моды двух различных типов на границе со сверхпроводником:

$$G_{SN} = 2G_0N [\tau_1(1 - \tau_2) + \tau_2(1 - \tau_1)] . \quad (3.2)$$

В части 3.2 мы рассмотрим вывод указанных формул и приведём точное определение для величин $\tau_{1,2}$. Необходимо отметить схожесть формулы (3.2) в симметричном контакте $\tau_1 = \tau_2$ с формулой [137] для спектральной плотности тока дробового шума [138] в квантовом точечном контакте, полученную в подходе Ландауэра [139, 140]. Однако определение величины τ_1 в этом случае отличается от случая вычисления спектральной плотности тока дробового шума, где она отвечает за прохождение квазичастицы из одного контакта в другой.

Вторая часть главы посвящена изучению влияния индуцированной сверхпроводимости на краевые состояния в 2D ТИ. В ней на основе микроскопического подхода, развитого в разделе 1.3, будет показано, что при контакте двумерного топологического изолятора со сверхпроводником с изотропным спариванием может наблюдаться эффект анизотропного смешивания подзонных компонент в ТИ. Иными словами, в спектре краевых мод, изотропном по отношению к направлению нормали к границе, формируется сверхпроводящая щель, зависящая от этого направления нормали относительно вектора \mathbf{r}_{ab} , соединяющего подрешётки ТИ. При некоторых соотношениях коэффициентов туннелирования из сверхпроводника в подзоны спектра ТИ вблизи определённой ориентации границы сверхпроводящая щель не открывается и на этой границе формируются бесщелевые андреевские краевые моды.

3.2. Особенности транспорта в двумерных структурах

“сверхпроводник - нормальный металл” в квантующих магнитных полях

Данный раздел посвящён изучению дифференциальной проводимости контактов S-ДЭГ и S-графен в предположении, что нормальная часть системы находится в перпендикулярном

³ Мы позволили себе повторение обозначений, которые совпадают с мнимыми временами температурной функции Грина раздела 1.3, поскольку в данном разделе не будет упоминания про функции Грина вообще и про температурные в частности.

магнитном поле H в режиме квантового эффекта Холла (КЭХ). Мы будем предполагать, что радиус циклотронной орбиты r_L^4 нормальной части системы существенно меньше длины свободного пробега ℓ_N и ширины контакта W , поэтому транспорт в основном определяется квазичастичными волновыми функциями, прижатыми к границам раздела [141] “двумерная подсистема-вакуум” и “двумерная подсистема-сверхпроводник” (см. рис. 3.1), без учёта рассеяния мод противоположных краёв образца друг в друга. Около каждой границы мы выбираем калибровку магнитного поля таким образом, чтобы вектор-потенциал был направлен вдоль границы, что позволяет рассматривать краевые моды *распространяющимися* вдоль такой границы с прижатыми к ней волновыми функциями. Иными словами, проекция импульса вдоль границы для этих мод является хорошим квантовым числом. В режиме КЭХ

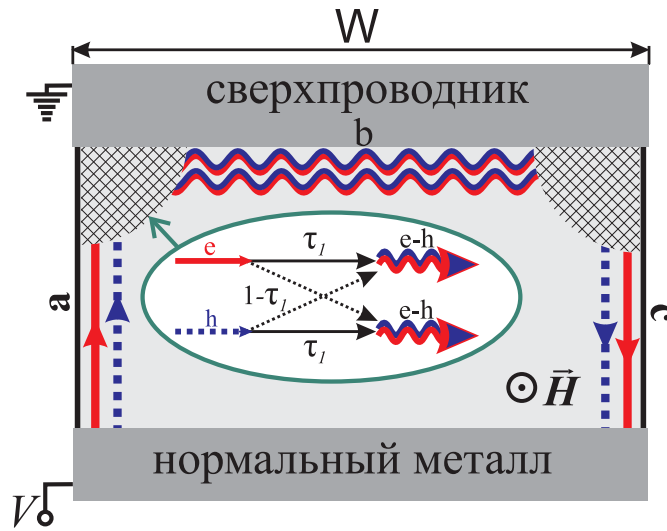


Рис. 3.1. Схематичное изображение системы: двумерная подсистема, находящаяся под нормальным (снизу) и сверхпроводящим (сверху) электродами, помещена в перпендикулярное квантующее магнитное поле H . Волновые функции электронов (дырок), локализованные на соответствующих краях образца, обозначены сплошными красными (пунктирными синими) линиями с указанием направления групповой скорости. Смешанные электрон-дырочные волновые функции, прижатые к границе раздела двумерной подсистемы со сверхпроводником, обозначены волнистыми сплошными линиями. Области трансформации мод вблизи углов заштрихованы. Вставка: рассеяние мод, локализованных на границе с изолятором, в моды на границе со сверхпроводником с вероятностями τ_1 и $(1 - \tau_1)$.

граница локализации мод зависит в большинстве случаев только от направления групповой

⁴ Циклотронный радиус определяется как отношение скорости Ферми к энергетическому расстоянию ΔE между уровнями Ландау $r_L = \hbar v_N / \Delta E$. Для случая двумерного электронного газа выражение для этой характерной энергии стандартное $\Delta E = \hbar \omega_c$, и величина r_L выражается через циклотронную частоту $r_L = v_N / \omega_c = P_N c / |eH|$, в то время как в графене определяющей величиной является магнитная длина $r_L = \hbar v_N / \Delta E \sim L_H$, поскольку характерное расстояние между уровнями определяется именно через неё: $\Delta E = \hbar v_N \sqrt{2} / L_H$.

скорости этих мод,⁵ а не от заряда квазичастиц, как в случае без поля. Поэтому в случае рассматриваемой системы падающие на сверхпроводящую границу раздела краевые моды прижаты к левой границе с изолятором (см. на рис. 3.1 граница “а”), а отражённые моды – к правой (граница “с”). В итоге в отличие от случая андреевского отражения без магнитного поля транспортные каналы оказываются разделенными в пространстве. Это означает, что сильные магнитные поля нарушают свойство андреевского отражения рассеивать падающие квазичастицы точно в обратном направлении.⁶

Качественно картина транспорта в рассматриваемой системе выглядит следующим образом: электрон, попадающий из нормального электрода в двумерную подсистему, распространяется вдоль границы “а” до сверхпроводника, где он рассеивается с вероятностями τ_1 и $(1 - \tau_1)$ в две гибридные электрон-дырочные (андреевские) моды вдоль границы “b” со сверхпроводником. Аналогично “ab”-углу гибридные моды перерассеиваются в электронные и дырочные моды границы “с” с вероятностями τ_2 и $(1 - \tau_2)$. В случае отсутствия перерасеяния мод ($\tau_{1,2} = 0$ или 1 одновременно), каждый падающий вдоль границы “а” электрон в итоге рассеивается полностью в электронную моду границы “с”, поэтому вероятность электрон-дырочной трансформации в этом случае строго равна нулю, что приводит к нулевому значению полного кондактанса системы G_{SN} (3.2). Иными словами, именно перемешивание мод при рассеянии ответственно за квазичастичный транспорт через N/S-границу в рассматриваемой системе. В этом качественном рассмотрении мы пренебрегли интерференционными эффектами на границе “b” со сверхпроводником и предполагали наличие лишь по одной паре транспортных мод на каждой из границ ($N = 1$). Кроме того, всюду здесь и далее мы будем предполагать, что нормальный электрод идеально согласован с двумерной подсистемой.

Решение вопроса сшивки краевых мод вблизи углов, где меняется калибровка поля, *в общем виде* является довольно сложной задачей и зависит от деталей геометрии системы. Ранее этот вопрос был рассмотрен в предельных случаях:

- (1) На основе квазиклассического подхода в случае большого числа электронных краевых

⁵ Исключение составляет графен при некоторых ориентациях границ относительно кристаллографических осей, когда среди локализованных у одной границы мод есть две (электронная и дырочная), групповые скорости которых направлены в противоположную сторону. См. подраздел 3.2.5. Кроме того, направление групповой скорости дырочных краевых мод может быть противоположным относительно случая электронных мод, если дырка находится в валентной зоне, а не зоне проводимости. См. работу [61], посвящённую эффекту зеркального андреевского отражения.

⁶ Здесь мы имеем в виду приближение нулевых сверхпроводящих скоростей вдоль границы раздела и пренебрегаем импульсом куперовской пары, возникшей при андреевском отражении, по сравнению с импульсами квазичастиц (порядка импульса Ферми).

мод $N \gg 1$ на каждой границе ДЭГ с изолятором, когда краевые моды могут быть рассмотрены в виде циклотронных орбит, “скачущих” вдоль границ раздела [69]. Этот случай соответствует достаточно большим уровням Ферми по сравнению с расстоянием ΔE между уровнями Ландау $\mu \gg \Delta E$ и характеризуется осциллирующим поведением дифференциальной проводимости G_{SN} от магнитного поля, ширины контакта W и/или энергии Ферми. Данный метод подробным образом разобран в работах [68, 69, 71, 136].

- (2) В квантовом пределе для графена, когда вдоль каждой границы распространяется лишь по одной паре мод [72, 75]. В этом случае кондактанс системы SG был рассмотрен в отсутствие перераспределения мод разных границ [72], то есть в случае идеального согласования электронной и дырочной моды края графена с двумя гибридными модами, локализованными на границе графена со сверхпроводником. Этот предел будет рассмотрен далее для полноты картины, как частный случай наших вычислений.

Существует также другой метод сшивки *одномодовых* краевых каналов на пересекающихся границах. В частности, такой метод был развит для предельно сильных магнитных полей ($H > H_{c3}$) в сверхпроводнике с границей в виде двугранного угла в работе [142]. Сшивка вектор-потенциала, направленного вдоль сторон угла вблизи границ образца, в этом случае произведена за счёт введения скачка тангенциальной компоненты сверхтекучей скорости на биссектрисе двугранного угла. Существование такого скачка объясняется наличием цепочки сверхпроводящих вихрей вдоль биссектрисы. К сожалению, к нашей задаче этот метод применён быть не может, поскольку в рассматриваемой системе транспорт вдоль каждой границы осуществляется как минимум посредством двух мод (электронной и дырочной в случае границы с изолятором).

Далее мы будем предполагать, что магнитное поле не проникает в сверхпроводящую часть рассматриваемой системы. Такое предположение экспериментально реализуемо в графене для электродов из различных сверхпроводящих материалов с достаточно большими критическими полями (см. [65–67] и другие) в связи с реализацией режима КЭХ в графене в магнитных полях ниже критического поля сверхпроводника. В данном разделе мы вычислим дифференциальное магнитосопротивление G_{SN} N/S-границы для произвольного количества краевых мод на каждой границе, принимая во внимание перераспределение краевых мод вблизи углов (см. рис. 3.1).

Для сшивки краевых мод разных границ, базис которых рассмотрен в разделе 3.2.1, используется метод матриц рассеяния (см. раздел 3.2.2), в котором феноменологическими параметрами являются комплексные амплитуды вероятностей рассеяния мод разных границ

друг в друга с учётом симметрий системы. Рассматриваемая модель позволяет дать простое объяснение осцилляций кондактанса, упомянутых выше, и увидеть их зависимость от параметров рассеяния. В первую очередь в разделе 3.2.3 на основе этого метода будет рассмотрен квантовый предел $N = 1$ как для системы на основе графена, так и на основе ДЭГ.

Для описания дифференциальной проводимости в случае *произвольного* числа транспортных краевых каналов будут рассмотрены усреднённые величины кондактанса G_{SN} и его дисперсии σ_G^2 по реализациям пространственного распределения примесей в областях рассеяния краевых мод вблизи углов (см. заштрихованные области на рис. 3.1). На математическом языке это означает, что матрицы рассеяния предполагаются случайными и равномерно распределёнными на группе их симметрии. Такой подход позволил нам в разделе 3.2.4 найти универсальные выражения для средних величин кондактанса и его стандартного отклонения (3.1, 3.2). В выражении для среднего кондактанса из уравнения (3.1) вклад от каждой из N электронных транспортных мод в кондактанс оказывается равным кванту проводимости G_0 вместо удвоенной величины $2G_0$ в баллистическом пределе N/S-интерфейса в отсутствие поля. Подавление дифференциальной проводимости связано с многократным перерассеянием мод вблизи углов, приводящим к равномерному распределению носителей заряда по транспортным модам, покидающим систему (вдоль границы “с”). В итоге из электрон-дырочной симметрии системы вероятность обнаружения заполненного дырочного состояния границы “с” принимает значение $1/2$. Такое равномерное распределение носителей заряда по модам при случайном рассеянии аналогично найденному в численном моделировании [75] рассматриваемой системы в диффузионном пределе (при учёте случайной добавки к энергии на всех атомах нормальной подсистемы в методе сильной связи).

Как было отмечено выше, мы рассматриваем в качестве транспортных каналов лишь краевые моды. Этот предельный случай соответствует малым значениям циклотронных радиусов не только по сравнению с длиной свободного пробега ℓ_N , но и с шириной контакта W (см. рис. 3.1). Подобное условие накладывает соответствующие ограничения на величину N . В самом деле, число краевых мод определяется отношением циклотронного радиуса и длины волны Ферми λ_N как для ДЭГ, так и для графена. Поэтому максимальное количество электронных транспортных мод, при котором ещё работает наше приближение, определяется соотношением $N \lesssim \min(W, \ell_N)/\lambda_N$. При типичных экспериментальных параметрах [71, 136] эта величина оказывается порядка $N \sim 10$.

3.2.1. Транспортные моды, локализованные на границах раздела в квантующих магнитных полях

В рассмотренном в следующем разделе методе с помощью матриц рассеяния связываются амплитуды волновых функций мод, падающих на область рассеяния и покидающих её, записанные в некотором базисе. В связи с этим перед переходом к подобному описанию нам необходимо определить базис волновых функций вблизи границ с изолятором и сверхпроводником как в графене, так и ДЭГ в режиме КЭХ, чему и посвящён данный раздел. В ДЭГ концепция транспорта по краевым состояниям в режиме КЭХ развивалась в 1980-х годах (см., например, работы [143, 144]). Основные результаты этих работ, необходимые нам для дальнейших выкладок, можно представить в виде качественных графиков спектра краевых состояний (см. рис. 3.2а, б) в зависимости от значения продольного волнового вектора k_b волновой функции $\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(x)e^{ik_b y}$ вдоль границы $x = 0$. Здесь и далее мы будем предпола-

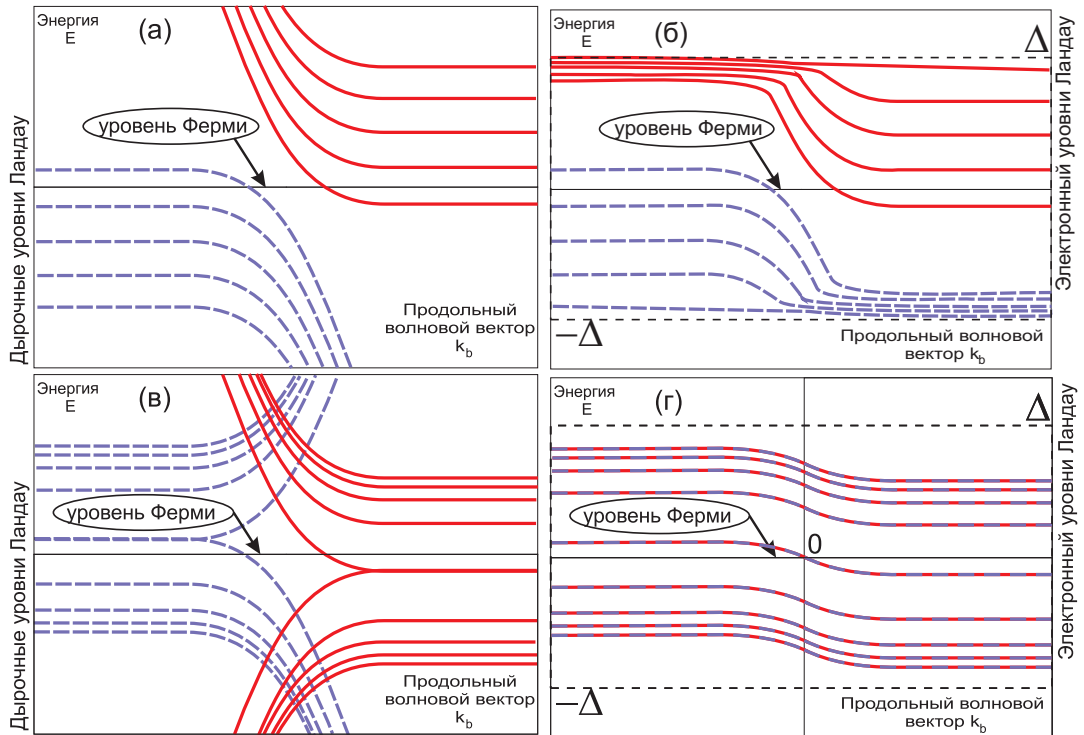


Рис. 3.2. Схематичное изображение спектра $E_n(k_b)$ электронных (красные сплошные кривые) и дырочных (синие пунктирные кривые) краевых состояний в режиме квантового эффекта Холла в зависимости от волнового вектора k_b вдоль границы: (а) ДЭГ с изолятором; (б) ДЭГ со сверхпроводником; (в) графена с изолятором; (г) графена со сверхпроводником.

гать, что внутренняя нормаль к границе \mathbf{n} направлена в положительном направлении оси Ox , поэтому волновая функция $\hat{\Psi}(x)$ удовлетворяет граничным условиям (1.4) для границы со сверхпроводником и $\hat{\Psi} = 0$ для границы с изолятором при $x = 0$. Кроме того, $\hat{\Psi}(x)$ спадает

вглубь образца при $x \rightarrow \infty$. Также будем считать, что расщепление энергетических ветвей, отвечающих разным спиновым состояниям, из-за эффекта Зеемана мало по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау, иными словами, будем пренебрегать всеми спиновыми эффектами, считая квазичастицы бесспиновыми. Согласно экспериментальной работе [19], пренебрегать зеемановским расщеплением в графене можно вплоть до довольно больших значений фактора заполнения $N \sim 10^4$ даже в сравнительно больших магнитных полях порядка $|\mathbf{H}| \sim 10$ Тл. Вплоть до этих значений фактора заполнения корневой спектр уровней Ландау $E_N = \hbar v_N \sqrt{2N}/L_H$ ещё превосходит расщепление Зеемана $\sim \mu_B H$. Для простоты выберем направление магнитного поля так, чтобы знак произведения заряда электрона e на проекцию магнитного поля H на ось Oz был положителен $eH > 0$. Из графиков 3.2а, б видно, что количество краевых состояний на уровне Ферми в ДЭГ равно количеству объёмных уровней Ландау под уровнем Ферми, а направления их групповых скоростей, определяемых наклоном спектральных ветвей, как для электронов, так и для дырок совпадают. Без учёта вырождения по спину каждая спектральная ветвь в ДЭГ отвечает одному краевому состоянию. Спектры $E_n(k_b)$ транспортных мод, локализованных на границе ДЭГ с изолятором и сверхпроводником, вблизи уровня Ферми отличаются мало, однако волновые функции, удовлетворяя разным граничным условиям (см. выше), оказываются существенно различными. Решение уравнения Боголюбова - де Жена (1.1) с квадратичным гамильтонианом $\check{\mathcal{H}} = \left(\hat{\mathbf{P}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 / 2m_N$, спадающее в полуплоскости $x > 0$, в соответствующей калибровке магнитного поля $\mathbf{A} = Hx\mathbf{y}_0$ выражается через функции параболического цилиндра $D_p(x)$ [145]:

$$u(x) = C_u D_{\varepsilon_{2D,+}}(\sqrt{2}x/L_H - X_0) ; \quad v(x) = C_v D_{\varepsilon_{2D,-}}(\sqrt{2}x/L_H + X_0) \quad (3.3)$$

с произвольными постоянными $C_{u,v}$, безразмерными переменными энергии $\varepsilon_{2D,\pm} = (\mu \pm E)/(\hbar\omega_c) - 1/2$ с учётом химического потенциала и координатой центра квазиклассической циклотронной орбиты $X_0 = \sqrt{2}k_b L_H$, выраженной через продольный волновой вектор. Электронный и дырочный спектры состояний вблизи края ДЭГ определяются как нули функций $D_{\varepsilon_{2D,\pm}}(\mp X_0)$. В то же время граничные условия на сверхпроводящем интерфейсе (1.4), связывающие значения функций и их производных, дают спектр, схематично изображённый на рис. 3.2б:

$$\begin{aligned} [X_\beta D_{\varepsilon_{2D,+}}(-X_0) - 2\varepsilon_{2D,+} D_{\varepsilon_{2D,+}+1}(-X_0)] [X_\beta D_{\varepsilon_{2D,-}}(X_0) + 2\varepsilon_{2D,-} D_{\varepsilon_{2D,-}+1}(X_0)] = \\ = Y_0^2 D_{\varepsilon_{2D,-}}(X_0) D_{\varepsilon_{2D,+}}(-X_0) . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь $X_\beta = X_0 \sin \beta + Y_0 \cos \beta$, $Y_0 = \sqrt{2}k_\perp L_H$, $k_\perp^2 = k_S^2 - k_b^2$.

В графене, рис. 3.2в, г, при симметричной записи гамильтониана (1.2) в долинных переменных, выражения для функций, отвечающих определённой долине $\eta = \pm$ электронной волновой функции, $\hat{\Psi}_{\pi\eta} = e^{iky}(\hat{u}_{\pi\eta}(x), \hat{v}_{\pi\eta}(x))$ как решения уравнений БдЖ (1.1), спадающие в полуплоскости $x > 0$, в калибровке магнитного поля $\mathbf{A} = Hxy_0$ совпадают между собой с точностью до произвольного постоянного множителя:

$$\hat{u}_{\pi\eta}(x) = C_u^\eta \hat{w} \left(\frac{\sqrt{2}x}{L_H} - X_0, \varepsilon_+ \right); \quad \hat{v}_{\pi\eta}(x) = C_v^\eta i\sigma_y \hat{w}^* \left(\frac{\sqrt{2}x}{L_H} + X_0, \varepsilon_- \right). \quad (3.5)$$

Иными словами, функция $\hat{w}(X, \varepsilon) = (D_{\varepsilon^2}(X), -i\varepsilon D_{\varepsilon^2-1}(X))^T$ не зависит от параметра η . Здесь использованы безразмерные энергетические переменные $\varepsilon_\pm = (\mu \pm E)L_H/(\sqrt{2}\hbar v_N)$. Из-за различия в граничных условиях для функций двух долин \mathbf{K} и \mathbf{K}' каждый уровень Ландау вблизи границы с изолятором расщепляется на две ветви⁷. То есть снимается долинное вырождение объёмных уровней Ландау. Однако расщепление *нулевого* уровня Ландау в этом случае происходит с формированием *одной* краевой моды при определённом знаке уровня Ферми (положительном или отрицательном), в отличие от более высоких уровней Ландау (см. Рис. 3.4в и г), где дисперсия расщеплённых ветвей отличается не очень значительно.

Благодаря независимости решения от изоспиновых индексов, общие граничные условия (1.6) на краю графена можно удовлетворить $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})|\pm\mathbf{v}\rangle = \pm|\pm\mathbf{v}\rangle$ с помощью собственных векторов $|\pm\mathbf{v}\rangle$ матрицы $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})$, зависящей от единичного вектора \mathbf{v} . Поскольку сверхпроводник с синглетным спариванием связывает между собой электроны и дырки с противоположными импульсами, введём для удобства волновые функции в виде $\hat{\Psi}_\pm = (|\pm\mathbf{v}\rangle \otimes \hat{u}_{\pi+}, |\mp\mathbf{v}\rangle \otimes \hat{v}_{\pi+})$, каждая из которых соответствует ортогональным долинным функциям для электронной и дырочной компонент. При выборе решений, диагонализующих матрицу $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\pi})$, граничные условия связывают лишь компоненты функции $\hat{w}(X, \varepsilon)$ между собой:

$$\hat{\Psi}_\pm = \pm\tau_z \otimes \pi_0 \otimes (\mathbf{n}_\perp, \boldsymbol{\sigma})\hat{\Psi}_\pm. \quad (3.6)$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства скалярных произведений собственных векторов $|\mathbf{v}_m\rangle = (\cos\theta_m/2, e^{i\chi_m}\sin\theta_m/2)^T$ и $|\mathbf{-v}_m\rangle = (\sin\theta_m/2, -e^{i\chi_m}\cos\theta_m/2)^T$, $m = 1, 2$,

⁷ Для простоты на схематичном рисунке мы оставили высшие уровни Ландау нерасщеплёнными между собой, так как дисперсия краевых мод этих уровней близка. Точное изображение спектра вблизи границы с изолятором представлено, например, на Рис. 3.4.

отвечающих двум краям графена:

$$\langle \mathbf{v}_1 | \eta_1 \mathbf{v}_1 \rangle = \delta_{\eta_1, 0} , \quad (3.7a)$$

$$\langle -\mathbf{v}_1 | -\mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle^* , \quad (3.7b)$$

$$\langle -\mathbf{v}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = -\langle \mathbf{v}_1 | -\mathbf{v}_2 \rangle^* , \quad (3.7c)$$

$$|\langle \eta_1 \mathbf{v}_1 | \eta_2 \mathbf{v}_2 \rangle|^2 = \frac{1}{2} (1 + \eta_1 \eta_2 \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) . \quad (3.7d)$$

Здесь $\mathbf{v}_{1,2} = (\sin \theta_{1,2} \cos \chi_{1,2}; \sin \theta_{1,2} \sin \chi_{1,2}; \cos \theta_{1,2})$ – изоспиновые вектора двух разных границ (“а” и “с”), а $\eta_{1,2} = \pm 1$ – индексы, отвечающие одному из двух возможных состояний каждой границы. Следуя работе [72], можно записать неявное выражение для спектра краевых состояний вблизи границы с изолятором (3.6) для произвольного вектора $\mathbf{n}_\perp = \mathbf{y}_0 \cdot \sin \theta_n + \mathbf{z}_0 \cdot \cos \theta_n$, пользуясь обозначением $h_\pm = D_{\varepsilon_\pm^2}(\mp X_0)/[\varepsilon_\pm D_{\varepsilon_\pm^2 - 1}(\mp X_0)]$ для отношения компонент функции $\hat{w}(X, \varepsilon)$:

$$h_+ = \begin{cases} \cotan(\theta_n/2), & \text{для } \hat{u}_+ \\ -\tan(\theta_n/2), & \text{для } \hat{u}_- \end{cases} . \quad (3.8)$$

Результат для дырочных компонент \hat{v}_\pm волновой функции получается заменой $\varepsilon_+ \rightarrow \varepsilon_-$, $X_0 \rightarrow -X_0$ и $|\pm v\rangle \rightarrow |\mp v\rangle$.

На границе раздела “сверхпроводник - графен”, где действуют граничные условия (1.3), неявное выражение для спектра, схематично изображённого на графике 3.2г, после подстановки решений в форме (3.5) может быть записано в виде [72]:

$$E(h_+ h_- + 1) = \sqrt{\Delta_{ind}^2 - E^2(h_+ - h_-)} . \quad (3.9)$$

Необходимо отметить, что, в отличие от случая ДЭГ 3.2б, в графене контакт со сверхпроводником приводит к двукратному вырождению андреевских состояний вблизи N/S границы 3.2г. Поэтому нижний уровень Ландау формирует две краевые моды с нулевым значением импульса вдоль сверхпроводящей границы “b”.

При низких температурах по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау транспорт в низкоразмерных системах, помещённых в квантующие магнитные поля, определяется краевыми модами на уровне Ферми $E = 0$. При экспериментальном исследовании транспортных характеристик в таких системах в ряде работ (см., например, [66]) применяется методика измерения дифференциальной проводимости в зависимости от магнитного поля при постоянном факторе заполнения уровней Ландау \tilde{N} ⁸. Этот режим достигается одновременным изменением уровня Ферми (в графене это делается за счёт эффекта поля) и амплитуды

⁸ $\tilde{N} = \mu/\hbar\omega_c - 1/2$ для двумерного электронного газа и $\tilde{N} = \mu L_H/(\sqrt{2}\hbar v_N)$ для графена.

приложенного магнитного поля. Так как величины безразмерной энергии для мод на уровне Ферми равны фактору заполнения $\varepsilon_{\pm} = \tilde{N}$, то увеличение поля приводит за счёт уменьшения магнитной длины L_H лишь изменению пространственного масштаба локализации волновых функций вблизи границ. В итоге, при малых концентрациях примесей изменение магнитного поля эквивалентно для краевых мод эффективному изменению ширины контакта W .

Таким образом, в этом подразделе были получены решения для краевых мод в ДЭГ (3.3) и графене (3.5), которые при удовлетворении граничным условиям (1.4) и (1.3, 1.6) соответственно дают неявные выражения (3.4) и (3.8, 3.9) для спектров, схематично изображённых на графиках 3.2.

3.2.2. Метод матриц рассеяния

В данном подразделе мы рассмотрим основную идею метода матриц рассеяния и применение его для вычисления дифференциальной проводимости N/S - контакта в магнитном поле. Суть метода матриц рассеяния [135] в случае одномерного транспорта сводится к тому, что амплитуды падающих в область рассеяния мод $|\text{in}\rangle = (|\text{in}_L\rangle, |\text{in}_R\rangle)^T$ как из левого контакта $|\text{in}_L\rangle$, так и из правого $|\text{in}_R\rangle$, связываются с амплитудами мод $|\text{out}\rangle = (|\text{out}_L\rangle, |\text{out}_R\rangle)^T$, покидающих эту область в те же контакты $|\text{out}_L\rangle$ и $|\text{out}_R\rangle$, с помощью матрицы рассеяния \hat{S}_0 : $|\text{out}\rangle = \hat{S}_0 |\text{in}\rangle$. Альтернативным описанием является связь амплитуд мод $|L\rangle = (|\text{in}_L\rangle, |\text{out}_L\rangle)^T$, распространяющихся в левом контакте относительно области рассеяния, с модами $|R\rangle = (|\text{in}_R\rangle, |\text{out}_R\rangle)^T$ в правом контакте: $|R\rangle = \hat{M}_0 |L\rangle$. В этом случае матрицы \hat{M}_0 , связывающие $|R\rangle$ и $|L\rangle$ компоненты, называются матрицами прохождения (или трансфер-матрицами). Важной особенностью матриц рассеяния \hat{S}_0 является сохранение потока вероятности $\langle \text{in} | \text{in} \rangle = \langle \text{out} | \text{out} \rangle$, который выражается в свойстве их унитарности:

$$\hat{S}_0^+ \hat{S}_0 = \hat{1}. \quad (3.10)$$

Благодаря единому направлению групповых скоростей $v_n = \partial E_n / \partial k_b$ всех мод (см. рис. 3.2), в нашем случае матрицы рассеяния и трансфер-матрицы совпадают. Введём для случая графена следующие матрицы

- Матрица \hat{T}_1 , описывающая рассеяние в области “ab” угла, связывает амплитуды электронных u_a и дырочных v_a мод $\hat{\Psi}_{\pm}^{(1)}$, локализованных на границе “a” с изолятором и удовлетворяющих граничным условиям (3.6) с изоспиновым вектором \mathbf{v}_1 , с амплитудами смешанных электрон-дырочных состояний g_{\pm} на сверхпроводящем интерфейсе “b”, волновые функции $\hat{\Psi}_{\pm}$ которых удовлетворяют граничным условиям (1.3) и отвечают изоспиновому вектору \mathbf{v} : $(g_+, g_-)^T = \hat{T}_1 (u_a, v_a)^T$.

- Аналогичным образом унитарная матрица \hat{T}_2 связывает гибридные моды g_{\pm} границы раздела со сверхпроводником в области рассеяния “bc” с электронными и дырочными состояниями $(u_c$ и $v_c)$ “с”-края двумерной системы с волновыми функциями $\hat{\Psi}_{\pm}^{(2)}$ и изоспиновым вектором $\mathbf{v}_2: (u_c, v_c)^T = \hat{T}_2 (g_+, g_-)^T$.
- Распространение электрон-дырочных мод g_{\pm} будем считать когерентным, поэтому их матрица распространения $\hat{\Lambda}_W$ вдоль сверхпроводящего интерфейса ширины W будет лишь диагональной матрицей набора фаз.

Для системы на основе двумерного электронного газа обозначения матриц аналогичные рассмотренным, за исключением слов об изоспиновых векторах.

Необходимо отметить, что уравнения БДЖ (1.1) обладают электрон-дырочной симметрией $\check{\Psi} \rightarrow i\tau_y \mathcal{T} \check{\Psi}$, реализующейся при смене электронных и дырочных компонент волновой функции местами с одновременной заменой знака энергии E , отсчитываемой от уровня Ферми μ . Благодаря этому свойству удобно выбрать группы g_+ и g_- гибридных мод на сверхпроводящем интерфейсе таким образом, чтобы они переходили одна в другую при применении такой симметрии. На границах “a”, “с” с изолятором такое деление происходит естественным образом на электронные и дырочные волновые функции.

При этом полную матрицу рассеяния \hat{S} , связывающую амплитуды электронных и дырочных мод левой (u_a и v_a) и правой (u_c и v_c) границ и выражающуюся через произведение введённых выше матриц, удобно разбить на соответствующие четыре блока размером $N \times N$ каждый:

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} \hat{S}_{ee} & \hat{S}_{eh} \\ \hat{S}_{he} & \hat{S}_{hh} \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{T}_2 \hat{\Lambda}_L \hat{T}_1. \quad (3.11)$$

Здесь $\hat{\Lambda}_W = \text{diag}(e^{ik_1 W}, \dots, e^{ik_N W}, e^{-ik_1 W}, \dots, e^{-ik_N W})$ с волновыми векторами k_n гибридных мод g_+ вдоль границы 2D подсистемы со сверхпроводящим электродом, найденными из пересечения спектральных ветвей границы с уровнем Ферми $E_n(k_n) = 0$.

На языке матриц рассеяния $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{S}$ указанная выше электрон-дырочная симметрия (как для графена, так и для ДЭГ) выглядит следующим образом:

$$\hat{S} = \tau_y \hat{S}^* \tau_y, \quad (3.12)$$

где \hat{S}^* – комплексно сопряжённая матрица \hat{S} . Известно (см., например, §4 Гл. 8 в [146]), что такой набор матриц образует компактную симплектическую группу $\text{Sp}(2N) = \{\hat{X} : \hat{X} \hat{X}^+ = \hat{1}_{2N}, \hat{X}^T \hat{J} \hat{X} + \hat{J} = 0\}$ $2N \times 2N$ - матриц \hat{X} , где $\hat{J} = i\tau_y \otimes \hat{1}_N$, а $\hat{1}_m$ – единичная $m \times m$ - матрица.

В блочном представлении (3.11) и

$$\hat{T}_1 = \begin{pmatrix} \hat{t}_{+e} & \hat{t}_{+h} \\ \hat{t}_{-e} & \hat{t}_{-h} \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_2 = \begin{pmatrix} \hat{t}_{e+} & \hat{t}_{e-} \\ \hat{t}_{h+} & \hat{t}_{h-} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

матричная симметрия (3.12) трёх указанных матриц $\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{S}$ выглядит следующим образом:

$$\hat{s}_{hh} = \hat{s}_{ee}^*, \hat{s}_{eh} = -\hat{s}_{he}^*, t_{\mp h} = \pm t_{\pm e}^*, t_{h\mp} = \pm t_{e\pm}^*.$$

Для симплектической матрицы \hat{T}_1 (\hat{T}_2), которая удовлетворяет свойствам (3.10, 3.12), существует полярная декомпозиция⁹ по собственным значениям $\tau_1^{(n)}$ ($\tau_2^{(n)}$) квадрата недиагонального блока $\hat{t}_{-e}^+ \hat{t}_{-e}$ ($\hat{t}_{e-}^+ \hat{t}_{e-}$), отвечающим вероятностям прохождения между модами [147]:

$$\hat{T}_m = \hat{\alpha}_m \hat{\Theta}_m \hat{\beta}_m, \quad (3.14)$$

где

$$\hat{\alpha}_m = \begin{pmatrix} \hat{A}_m & 0 \\ 0 & \hat{A}_m^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\beta}_m = \begin{pmatrix} \hat{B}_m & 0 \\ 0 & \hat{B}_m^* \end{pmatrix}, \quad \hat{\Theta}_m = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \hat{\tau}_m} & \sqrt{\hat{\tau}_m} \\ -\sqrt{\hat{\tau}_m} & \sqrt{1 - \hat{\tau}_m} \end{pmatrix},$$

и унитарные матрицы \hat{A}_m, \hat{B}_m характеризуют фазы рассеяния, в то время как матрицы $\hat{\tau}_m = \text{diag}(\tau_m^{(1)}, \dots, \tau_m^{(N)})$ диагональны.

Здесь и далее в этом разделе мы будем работать при малых температурах, пренебрегая температурным размытием функций распределения носителей заряда по энергии. В этом случае дифференциальная проводимость N/S-контакта определяется транспортными модами точно на уровне Ферми $E = 0$ и выглядит следующим образом [135]:

$$G_{SN} = G_0 \text{tr} \left(\hat{I} - \hat{s}_{ee}^+ \hat{s}_{ee} + \hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh} \right) = 2G_0 \text{tr} \left(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh} \right), \quad (3.15)$$

где $\text{tr} \hat{A} = \sum_i A_{ii}$ – след матрицы \hat{A} . Поясним формулу для кондактанса качественно: при падении в область рассеяния электронных транспортных мод, равномерно населяющих N краевых состояний, часть из них, отвечающая амплитуде рассеяния \hat{s}_{ee} отражается с вероятностью $\text{tr}(\hat{s}_{ee}^+ \hat{s}_{ee})/N$, а оставшаяся часть с амплитудой рассеяния \hat{s}_{eh} рассеивается в дырки. Последний вариант как раз и отвечает трансформации квазичастичного электронного тока в сверхпроводящий ток, причём каждой из $\text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh})$ дырок, покидающей область рассеяния, соответствует куперовская пара с удвоенным зарядом $2e$, проникшая в сверхпроводник.

В заключении, в этом подразделе введены матрицы рассеяния $\hat{T}_m, \hat{\Lambda}$ краевых мод на каждом из участков изменения калибровки магнитного поля, удовлетворяющие симметриям (3.10, 3.12), которые в виде произведения (3.11) входят в формулу (3.15) для вычисления дифференциальной проводимости рассматриваемого N/S-контакта (см. рис. 3.1). В следующих двух подразделах будут рассмотрены различные случаи применения развитого метода вычисления кондактанса.

⁹ Подробный вывод этого разложения приведён в Приложении В.1.

3.2.3. Результаты. Квантовый предел

В данном подразделе мы рассмотрим квантовый предел, отвечающий случаю сильных магнитных полей и малых уровней Ферми $\mu < 3\hbar\omega_c/2$ для ДЭГ и $\mu < \sqrt{2}\hbar v_N/L_N$ для графена. В этом случае $N = 1$ и каждая гетерограница содержит по одной паре краевых мод (на каждую проекцию спина). Иными словами, блоки матриц рассеяния (3.11) и (3.13) оказываются скалярными комплексными числами, то есть могут быть параметризованы с учётом всех симметрий таким образом: $t_{+e} = \sqrt{1 - \tau_1}e^{i(\varrho_1 + \varphi_1/2)}$, $t_{-e} = \sqrt{\tau_1}e^{i(\varrho_1 - \varphi_1/2)}$, $t_{e+} = \sqrt{1 - \tau_2}e^{i(\varrho_2 + \varphi_2/2)}$, $t_{e-} = \sqrt{\tau_2}e^{i(\varrho_2 - \varphi_2/2)}$, $t_{\mp h} = \pm t_{\pm e}^*$, $t_{h\mp} = \pm t_{e\pm}^*$. Здесь (см. рис. 3.1) τ_1 – вероятность рассеяния электрона с края “а” в гибридную моду второго типа g_- , а τ_2 – вероятность рассеяния первого типа электрон-дырочных мод g_+ в дырочное состояние границы “с”. Фазовая матрица $\hat{\Lambda} = \text{diag}(e^{ik_1W}, e^{-ik_1W})$ зависит лишь от одного волнового вектора k_1 , при котором спектральная ветвь состояния g_+ пересекает уровень Ферми. Подставляя выражения для всех блоков матриц в выражение (3.15), мы получим следующее выражение для кондактанса контакта “сверхпроводник - ДЭГ”:

$$G_{SN} = 2G_0(p_{21} + p_{12} - 2\sqrt{p_{12}p_{21}} \cos \gamma) , \quad (3.16)$$

где мы для краткости ввели обозначения $p_{nm} = \tau_n(1 - \tau_m)$, $\gamma = 2k_1W + \varphi_1 + \varphi_2$. Необходимо отметить, что дифференциальная проводимость зависит лишь от вероятностей прохождения $\tau_{1,2}$ разности фаз $\varphi_{1,2}$ компонент t_{+e} , t_{-e} и t_{e+} , t_{e-} , но не от их общих фаз $\varrho_{1,2}$. Если предположить, что образец, изображённый на рисунке 3.1 симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через его середину, то есть считать рассеяние в области углов “ab” и “bc” одинаковым, мы придём к дополнительной симметрии $\hat{T}_2 = \hat{T}_1^T$ ($p_{12} = p_{21}$). Эта симметрия соответствует отражению относительно вертикальной плоскости ($\hat{T}_1 \rightarrow \hat{T}_2^+$), перпендикулярной рисунку и проходящей через середину образца, с одновременной сменой знака внешнего магнитного поля ($\hat{T}_1 \rightarrow \hat{T}_1^*$). В этом случае выражение для дифференциальной проводимости примет простой вид:

$$G_{SN} = 4G_0\tau(1 - \tau)(1 - \cos \gamma) , \quad (3.17)$$

с $\tau_1 = \tau_2 \stackrel{\text{def}}{=} \tau$. Из последнего выражения видно, что кондактанс осциллирует как функция ширины контакта W . Эти осцилляции имеют пространственную частоту k_1 , равную импульсу андреевских состояний, распространяющихся вдоль сверхпроводящего интерфейса “b”, и являются следствием квантовомеханической интерференции этих краевых мод. Полученное выражение (3.17) находится в полном согласии с качественным рассмотрением (3.2) из введения: в отсутствие перерассеяния мод (что отвечает предельным случаям $\tau = 0$ или $\tau = 1$) зарядовый транспорт через контакт полностью подавляется.

В случае контакта сверхпроводника с *графеном* в квантовом пределе необходимо отметить несколько особенностей. Во-первых, согласно рис. 3.2г, спектральные ветви смешанных электрон-дырочных состояний нижнего уровня Ландау вырождены и пересекают уровень Ферми ($E_1(k_1) = 0$) при нулевом значении продольного волнового вектора $k_1 = 0$. Это приводит к отсутствию осцилляций кондактанса при изменении ширины контакта W из-за нулевых фаз, набираемых андреевскими модами при распространении вдоль сверхпроводника. Во-вторых, как было отмечено в работе [72], матрицы рассеяния \hat{T}_m ($m = 1, 2$) действуют на электронные (дырочные) краевые состояния с долиной структурой $|\mathbf{v}_m\rangle$ ($|\mathbf{-v}_m\rangle$) волновой функции. Поэтому зависят от направления соответствующих границ через их изоспиновые вектора $\mathbf{v}_{1,2}$ (см. граничные условия для мод (1.6)). Таким образом в графене рассеяние в углах “ab” и “bc” описывается следующими матрицами:

$$\begin{aligned}\hat{T}_1 &= |\mathbf{v}_1\rangle\langle\mathbf{v}_1|t_{+e} + |\mathbf{-v}_1\rangle\langle\mathbf{v}_1|t_{-e} + |\mathbf{v}_1\rangle\langle\mathbf{-v}_1|t_{+h} + |\mathbf{-v}_1\rangle\langle\mathbf{-v}_1|t_{-h} , \\ \hat{T}_2 &= |\mathbf{v}_2\rangle\langle\mathbf{v}_2|t_{e+} + |\mathbf{-v}_2\rangle\langle\mathbf{v}_2|t_{h+} + |\mathbf{v}_2\rangle\langle\mathbf{-v}_2|t_{e-} + |\mathbf{-v}_2\rangle\langle\mathbf{-v}_2|t_{h-} .\end{aligned}$$

На границах “a” ($m = 1$) и “c” ($m = 2$) графена с изолятором электронные и дырочные моды имеют определённую структуру волновых функций в долинном пространстве $|\mathbf{v}_m\rangle$ и $|\mathbf{-v}_m\rangle$ соответственно. Поэтому выражение для блока \hat{s}_{eh} полной матрицы рассеяния (3.11), отвечающего за трансформацию электронной моды левой границы в дырочную моду правой границы, может быть записано как проекция на долинные состояния $\langle\mathbf{v}_2|$ и $|\mathbf{-v}_1\rangle$:

$$\hat{s}_{eh} = \langle\mathbf{v}_2|\hat{T}_2\hat{\Lambda}_L\hat{T}_1|\mathbf{-v}_1\rangle . \quad (3.18)$$

В дальнейшем для простоты выкладок мы будем предполагать, что вектора $\mathbf{v}_{1,2} = (\sin\theta_{1,2}\cos\chi_{1,2}; \sin\theta_{1,2}\sin\chi_{1,2}; \cos\theta_{1,2})$ лежат в одной вертикальной плоскости. Иными словами, мы предполагаем, что их азимутальные углы $\chi_{1,2}$ равны между собой. Вводя дополнительное обозначение для угла между изоспиновыми векторами границ $\vartheta = \widehat{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$, подставим выражение для блока (3.18) в выражение (3.15) и вычислим выражение для кондактанса границы “сверхпроводник - графен” по аналогии со случаем ДЭГ (3.16) с учётом соотношений на скалярные произведения изоспиновых состояний $|\pm\mathbf{v}_{1,2}\rangle$ (3.7):

$$\begin{aligned}G_{SN} &= 2G_0 \left[\cos^2\frac{\vartheta}{2} (p_{21} + p_{12} - 2\sqrt{p_{12}p_{21}} \cos\gamma) + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\frac{\vartheta}{2} (\tau_1\tau_2 + (1 - \tau_1)(1 - \tau_2) + 2\sqrt{p_{12}p_{21}} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)) - \right. \\ &\quad \left. - \sin\vartheta ((1 - 2\tau_1)\sqrt{p_{22}} \cos\varphi_2 - (1 - 2\tau_2)\sqrt{p_{11}} \cos\varphi_1) \right] , \quad (3.19)\end{aligned}$$

где $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$. Безусловно это выражение переходит в (3.16), как только границы графена с изолятором эквивалентны $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ (или, что то же самое $\vartheta = 0$). Однако, в отличие от

системы на основе ДЭГ осцилляций дифференциальной проводимости от ширины контакта в этом случае не наблюдается, поскольку импульс k_1 вдоль сверхпроводящей границы для краевых мод g_{\pm} в графене равен нулю $k_1 = 0$. В то же время интерференция мод присутствует в виде члена, зависящего от фазы рассеяния γ .

Для того чтобы получить более ясное представление об этой сложной формуле, предположим, как и в случае с ДЭГ, симметричное рассеяние в углах $\hat{T}_2 = \hat{T}_1^T$. Тогда выражение для дифференциальной проводимости примет простой вид

$$G = G_0 [2\tau(1 - \tau)(1 - \cos \gamma) (1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) + (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)] \quad (3.20)$$

через скалярное произведение изоспиновых векторов $(1 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$, $(1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$. Кроме отсутствия зависимости кондактанса от ширины контакта существует и другая особенность, специфичная для графена. Это дополнительное межмодовое рассеяние, происходящее благодаря отличию направлений изоспиновых векторов различных краёв графена. Наиболее ярко эффект зависимости проводимости от взаимной ориентации границ проявляется в случае идеальной согласованности мод без перерассеяния $\tau = 0$ или $\tau = 1$:

$$G = G_0 (1 - \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) .$$

Этот частный случай соответствует *нулевому* значению кондактанса в системе на основе ДЭГ. И впервые был получен в работе [72]. Из последнего выражения видно, что для эквивалентных (относительно кристаллографических осей) ориентаций границ графена с изолятором $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ в этом предельном случае проводимость обращается в нуль, поскольку электронная мода границы “а” полностью переходит в электронную моду границы “с”. В то же время для границ с противоположными направлениями нормалей (как на рис. 3.1) $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ электронная мода полностью трансформируется в дырочную, что приводит к проникновению куперовской пары с зарядом $2e$ в сверхпроводник. Указанный результат для дифференциальной проводимости, являющийся частным случаем нашего рассмотрения.

Необходимо отметить, что максимальное значение кондактанса, равное двум квантам проводимости, сохраняется для случая противоположных ориентаций границ и при учёте конечного перерассеяния мод в симметричном контакте $\hat{T}_2 = \hat{T}_1^T$, см. (3.20). Независимость кондактанса от коэффициентов туннелирования в этом частном случае может быть объяснена на основе двух замечаний. Во-первых, благодаря равенству фаз рассеяния $\varphi_1 = \varphi_2$ андреевских мод на сверхпроводящей границе складываются амплитуды, а не вероятности прохождения этих мод во второй строке уравнения (3.19). То есть две андреевские моды могут рассматриваться как одна мода, не зависящая от долиной степени свободы. Во-вторых,

из-за специфического соотношения изоспиновых векторов $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_2$ долинные состояния электронной моды левой границы $|\mathbf{v}_1\rangle$ и дырочной моды правой границы $|\mathbf{v}_2\rangle$ совпадают. В итоге падающий электрон возбуждает андреевскую моду с долиной волновой функцией $|\mathbf{v}_1\rangle = |-\mathbf{v}_2\rangle$, которая далее полностью трансформируется в дырку и покидает систему.

Отсутствие зависимости дифференциальной проводимости контакта на основе графена от ширины контакта косвенно подтверждается экспериментальными измерениями в работе [66]. Действительно, как показывают авторы указанной статьи, в квантовом пределе магнитных полей, когда под уровнем Ферми находится только нижний уровень Ландау, кондактанс SG-контакта в зависимости от магнитного поля при постоянном факторе заполнения \tilde{N} ¹⁰ практически не изменяется и принимает значение, совпадающее со случаем нормального состояния.

3.2.4. Применение теории случайных матриц для вычисления транспортных характеристик

В более слабых магнитных полях вдоль каждой гетерограницы может распространяться более одной пары краевых мод $N > 1$, и естественно ожидать, что дифференциальная проводимость N/S - контакта (рис. 3.1) будет иметь множество периодов осцилляций $G_{SN} = \sum_{ij} a_{ij} \exp[i(k_i - k_j)W]$ как функция ширины W , благодаря интерференционным эффектам на границе со сверхпроводником. Здесь эрмитова матрица с элементами a_{ij} определяется через матрицы прохождения $\hat{T}_{1,2}$. При этом различие транспортных характеристик в системах на основе ДЭГ и графена практически нивелируется с ростом числа мод N . Возвращаясь к экспериментальной работе [66], необходимо отметить, что измеряемые значения кондактанса для фактора заполнения $\tilde{N} = 3$ и $\tilde{N} = 5$ в графене в зависимости от магнитного поля демонстрируют немонотонное поведение. Что, в свою очередь, говорит о зависимости дифференциальной проводимости от ширины контакта. Максимальные значения кондактанса, наблюдаемые в эксперименте, соответствуют ситуации, когда каждый из высших уровней Ландау переносит по 2 кванта проводимости.

Как было указано выше, при увеличении количества мод N осцилляторное поведение кондактанса становится более сложным и в общем случае характеризуется набором несоизмеримых периодов $2\pi/|k_i - k_j|$. Ранее в литературе такого рода колебания магнитосопротивления были предсказаны на базе квазиклассического описания транспорта вдоль “скачущих” траекторий циклотронных орбит вблизи границ [69]. В реалистичной экспериментальной си-

¹⁰ См. обсуждение этого метода измерения в подразделе 3.2.1.

туации интерференция мод и отвечающие им колебания должны быть, конечно, сглажены в силу неоднородностей образца, примесей в нём, конечных напряжений между электродами и температур при измерении кондактанса и т. д. Поэтому в данном разделе мы будем моделировать сглаживание этих колебаний, предполагая трансфер-матрицы $\hat{T}_{1,2}$ случайными и проводя усреднения по ним с помощью стандартных подходов, описанных, например, в обзоре [148]. Развитый нами феноменологический подход применим для произвольного числа электронных каналов N с учётом наличия примесных центров.

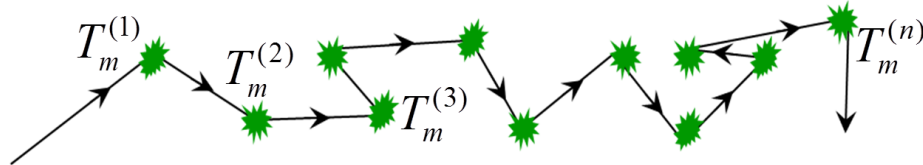


Рис. 3.3. Схематичное изображение рассеяния на отдельных примесях.

В дальнейших вычислениях мы будем предполагать большое количество n примесных центров в области трансформации мод. Кроме того, будем считать рассеяние на каждой из примесей независимым от других и случайно распределённым некоторым одинаковым образом. В этом случае матрицы рассеяния \hat{T}_m в углах “ab” и “bc” представляют собой произведение $\hat{T}_m = \hat{T}_m^{(1)} \cdot \hat{T}_m^{(2)} \cdot \dots \cdot \hat{T}_m^{(n)}$ матриц рассеяния на каждой из примесей независимо $\hat{T}_m^{(k)}$ (см. Рис. 3.3). Для большого числа примесных центров к рассматриваемому произведению \hat{T}_m применим аналог центральной предельной теоремы в теории групп – теорема о тасовке карт, которая гласит: произведение n одинаково распределённых независимых случайных матриц, принадлежащих локально компактной хаусдорфовой топологической группе, стремится к матрице, распределённой по мере Хаара на этой группе, при стремлении числа матриц n в произведении к бесконечности. Поскольку группа $\text{Sp}(2N)$ как подгруппа унитарной группы удовлетворяет описанным выше условиям, то рассматриваемая теорема применима для нашего случая. Для этого достаточно лишь предположить, что рассеяние, описываемое матрицами $\hat{T}_m^{(k)}$, происходит одинаково и независимо на большом количестве рассеивателей n в заштрихованных областях трансформации мод на рис. 3.1. Иными словами мы предполагаем, что для больших значений $n \gg 1$ матрицы $\hat{T}_{1,2}$ являются случайными и распределёнными с инвариантной мерой (мерой Хаара) на компактной симплектической группе, к которой они принадлежат. Необходимо отдельно отметить, что распределение матриц $\hat{T}_{1,2}$ с инвариантной мерой не зависит от количества краевых мод N , а определяется лишь количеством примесей n . Если количество примесей не настолько велико, то из физических соображений можно предполагать, что в первую очередь усредняются фазы рассеяния, которым отвечают

матрицы \hat{A}_m и \hat{B}_m , оставляя вероятности $\hat{\tau}_m$ практически неизменными [см. (3.14)].

“Равномерное” распределение случайного элемента \hat{A} некоторой компактной группы \mathcal{G} на ней определяется через меру этой матрицы $d\mu(\hat{A})$, которая инвариантна относительно умножения на произвольные элементы $\hat{U}, \hat{V} \in \mathcal{G}$ этой же группы: $d\mu(\hat{A}) = d\mu(\hat{U}\hat{A}\hat{V})$. Такая мера называется “инвариантной мерой” или “мерой Хаара” [149]. Необходимо отметить, что в рамках сделанных предположений все особенности в системе на основе графена, связанные с изоспиновой степенью свободы не проявляются в средних значениях типа (3.1), поэтому дальнейшие выражения, которые будут получены в этом разделе, применимы для обоих типов рассматриваемых N/S-гетероструктур. По аналогии с методом, применённым в работе [147], можно вывести функцию распределения матриц \hat{T}_m по переменным полярной декомпозиции (3.14), собственным значениям $\{\tau_m\}$ квадрата недиагонального блока и унитарным матрицам фаз \hat{A}_m и \hat{B}_m , для произвольного количества мод N :

$$d\mu(\hat{T}_m) = P(\{\tau_m\}) \prod_a d\tau_m^{(a)} d\mu(A_m) d\mu(B_m) . \quad (3.21)$$

Здесь $P(\{\tau_m\}) = C \prod_{i < j} |\tau_m^{(i)} - \tau_m^{(j)}|$ – совместное распределение вероятностей по собственным значениям $\{\tau_m^{(i)}\}$, а $d\mu(A_m) [d\mu(B_m)]$ – инвариантная мера фазовых матриц $\hat{A}_m [\hat{B}_m]$ на унитарной группе, C – нормировочная постоянная. Формула (3.21) для компактной симплектической матрицы выведена в приложении В.2.

Дифференциальная проводимость контакта при не очень большом числе рассеивателей усредняется, как было указано выше, по матрицам фаз \hat{A}_m, \hat{B}_m и принимает вид

$$\langle G_{SN} \rangle_{A,B} = 2G_0 N [\tau_1(1 - \tau_2) + \tau_2(1 - \tau_1)] , \quad (3.22)$$

обобщающий выражения качественного рассмотрения (3.2) и случая ДЭГ (3.16) [после усреднения по γ] на случай произвольного числа транспортных мод $2N$. Здесь $\tau_p = \text{tr}(\hat{\tau}_p)/N$ – среднее значение вероятностей рассеяния мод.

При бóльшем числе примесей в области рассеяния усреднение кондактанса происходит и по фазовым матрицам, и по вероятностям $\tau_m^{(n)}$, после чего мы приходим к уравнениям

$$\langle G_{SN} \rangle = G_0 N , \quad \sigma_G = G_0 \sqrt{\frac{N}{4(2N + 1)}} , \quad (3.23)$$

для среднего значения кондактанса и его стандартного отклонения, совпадающим с (3.1). Усреднённое по реализациям значение величины G_{SN} пропорционально количеству краевых каналов N и не зависит от ширины контакта W . Дисперсия этой величины σ_G^2 растёт с увеличением числа транспортных мод и насыщается, достигая значения $G_0^2/8$. Метод усреднения физических величин, зависящих от случайных унитарных матриц, описан в приложении В.3.

Изменяя значение внешнего магнитного поля \mathbf{H} , можно контролировать количество краевых мод, распространяющихся вдоль каждой границы. Эти величины для случая ДЭГ $N_{2D} = [m_N c \mu / e \hbar H - 1/2]$ и графена $N_{Gr} = [c \mu^2 / 2 v_N^2 e \hbar H]$ уменьшаются ступенчатым образом с ростом поля. Здесь прямые скобки [...] обозначают целую часть числа.

В заключение, ещё раз отметим, что в случае большого числа рассеивателей $n \gg 1$ все особенности краевых мод сглаживаются. Это происходит по той причине, что каждая электронная мода, падающая в систему, рассеивается равномерно во все андреевские моды сверхпроводящей границы. Кроме того, вклады от разных электронных мод не интерферируют между собой. Аналогично каждая андреевская мода рассеивается равномерно в моды правой границы. В итоге электронные и дырочные моды, покидающие систему, оказываются населёнными одинаково, что приводит к среднему значению кондактанса, равному половине максимального. Причём этот результат верен вплоть до квантового предела $N = 1$.

3.2.5. Особенности среднего значения кондактанса в области параметров, где нарушается однонаправленный характер движения краевых мод

Как было отмечено выше, в работах [76, 150], посвящённых изучению краевых состояний в графене в режиме КЭХ, были найдены спектры прижатых к краю мод в зависимости от продольного волнового вектора k_y . В этом разделе нас будут интересовать свойства спектров вблизи границы типа “arm-chair”, отмеченные в работах [76, 77]. Для наглядности приведём на рис. 3.4 численные спектры краевых электронных состояний в графене вблизи “zigzag” и “arm-chair” границ, полученные аналогично работе [77]. Из графиков видно два отличия:

- (1) Вблизи границы типа “zigzag” существует (двукратно вырожденная по спину) бездисперсионная мода, которая не вносит вклада в транспорт.
- (2) Другое более важное для нас в этом разделе отличие заключается в том, что немного ниже энергий объёмных уровней Ландау на “arm-chair” границе сначала появляется дополнительная пара электронных мод, движущихся в противоположные стороны. Затем при значениях химического потенциала больше энергии объёмного уровня Ландау из этой пары мод остаётся лишь одна, движущаяся в ту же сторону, что и остальные.

Именно вопросу нарушения однонаправленного характера движения краевых мод в графене и посвящён данный раздел. Будем рассматривать уровень Ферми немного ниже N -того уровня Ландау в графене. В этом случае на “arm-chair”-границах с изолятором $N + 1$ электронная мода распространяется по часовой стрелке и одна – в противоположном направлении (см.

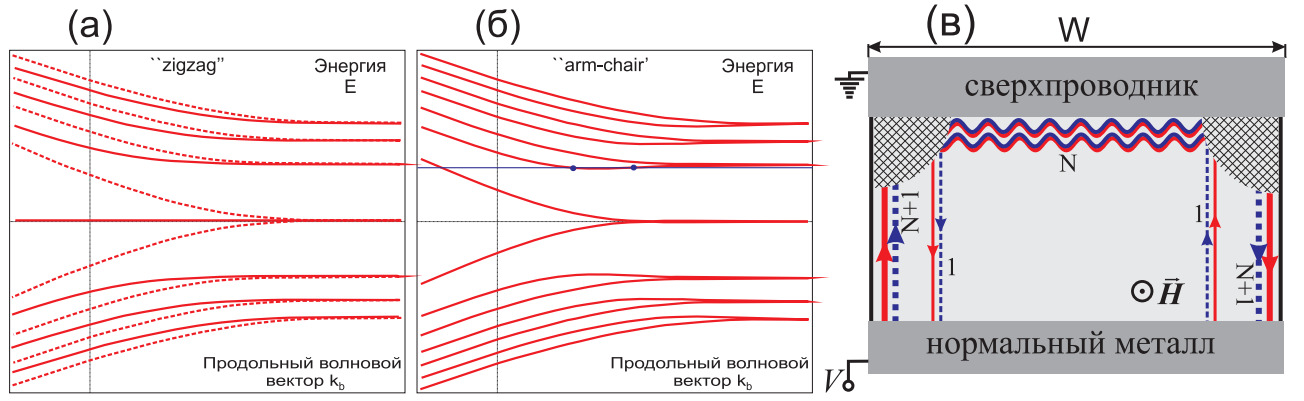


Рис. 3.4. (а) Спектр электронных краевых состояний вблизи края графена в режиме квантового эффекта Холла в зависимости от волнового вектора k_b вдоль границы: для границы “zigzag” (сплошные и пунктирные линии отвечают функциям на подрешётках А и В соответственно); (б) для границы “arm-chair”: горизонтальной прямой обозначен уровень Ферми чуть ниже второго уровня Ландау, отвечающий трём краевым модам с разными направлениями групповых скоростей. Вычисления проделаны по аналогии с работой [77]; (в) схематичное изображение рассматриваемой системы: все обозначения совпадают с рис. 3.1, но в отличие от него на графике изображены дополнительные электронные и дырочные моды, которые движутся против часовой стрелки вдоль границ с изолятором. Числа у пар стрелок указывают количество мод, изображаемое каждой стрелкой в паре.

рис 3.4в). Тогда квадратные матрицы рассеяния $\hat{T}_{1,2}$ будут отличаться от прямоугольных матриц прохождения. Матрица \hat{T}_1 связывает $N + 1$ пару падающих в область рассеяния электронных (u_a) и дырочных (v_a) краевых мод с $2N$ гибридными модами N/S-границы (g_{\pm}) и одной парой электронных (u_a^0) и дырочных (v_a^0) мод, покидающих область рассеяния. Матрица \hat{T}_2 связывает аналогичным образом моды g_{\pm} , u_c^0 и v_c^0 с модами u_a , v_a :

$$(g_+, u_a^0, g_-, v_a^0)^T = \hat{T}_1 \begin{pmatrix} u_a \\ v_a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_c \\ v_c \end{pmatrix} = \hat{T}_2 (g_+, u_c^0, g_-, v_c^0)^T.$$

Необходимо отметить, что, благодаря определённому направлению движения мод g_{\pm} , при таком рассеянии амплитуды мод u_a^0 , v_a^0 , покидающих систему вдоль левой границы, зависят лишь от амплитуд падающих мод вдоль той же границы, а падающие в систему моды u_c^0 , v_c^0 вдоль края “с” влияют лишь на уходящие вдоль этого же края моды.

Считая, как и в предыдущем подразделе, матрицы \hat{T}_m распределёнными по мере Хаара на компактной симплектической группе, мы можем вычислить среднее значение кондуктанса в этом случае, усреднив квадраты блоков рассеяния падающих мод в уходящие. Чтобы использовать технику, описанную в приложении В.3.1, введём обозначения для следующих проекторов $\hat{P}_m = \hat{P}_m^T = \hat{P}_m^2$:

$$\hat{P}_e (u_a, v_a)^T = (u_a, 0)^T, \quad \hat{P}_g (g_+, u_p^0, g_-, v_p^0)^T = (g_+, 0, g_-, 0)^T, \quad \hat{P}_h = \hat{1} - \hat{P}_e, \quad \hat{P}_{1e(1h)} = (\hat{1} - \hat{P}_g) \hat{P}_{e(h)}.$$

С помощью этих проекторов представим матрицы рассеяния падающих электронных мод u_a ,

u_c^0 в уходящие дырочные v_c , v_a^0 :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ v_c \end{pmatrix} = \hat{P}_h \hat{T}_2 (g_+, u_c^0, g_-, v_c^0)^T = \hat{P}_h \hat{T}_2 \left[\hat{P}_{1e} (0, u_c^0, 0, 0)^T + \hat{P}_g \hat{T}_1 \hat{P}_e \begin{pmatrix} u_a \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ (0, 0, 0, v_a^0)^T = \hat{P}_{1h} \hat{T}_1 \hat{P}_e \begin{pmatrix} u_a \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Иными словами, дифференциальная проводимость контакта (3.15) в этом случае выражается следующим образом: $G_{SN} = 2G_0 (g_c^0 + g_N + g_a^0)$, где

$$\begin{aligned} g_c^0 &= \text{tr} \left[\left(\hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_{1e} \right)^+ \hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_{1e} \right] = \text{tr} \left[\hat{T}_2^+ \hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_{1e} \right], \\ g_N &= \text{tr} \left[\left(\hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_g \hat{T}_1 \hat{P}_e \right)^+ \hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_g \hat{T}_1 \hat{P}_e \right] = \text{tr} \left[\hat{T}_1^+ \hat{P}_g \hat{T}_2^+ \hat{P}_h \hat{T}_2 \hat{P}_g \hat{T}_1 \hat{P}_e \right], \\ g_a^0 &= \text{tr} \left[\left(\hat{P}_{1h} \hat{T}_1 \hat{P}_e \right)^+ \hat{P}_{1h} \hat{T}_1 \hat{P}_e \right] = \text{tr} \left[\hat{T}_1^+ \hat{P}_{1h} \hat{T}_1 \hat{P}_e \right]. \end{aligned}$$

Проводя усреднение с помощью функций $P_{\hat{T}_m}(\hat{a}, \hat{b}) = \langle \hat{C} \hat{a} \hat{C}^+ \hat{b} \rangle_C = \text{tr}(\hat{a}) \text{tr}(\hat{b})/N$ от матриц размером $N \times N$ из приложения В.3.1, получим ответ:

$$\begin{aligned} \langle g_c^0 \rangle &= \text{tr} \hat{P}_h \cdot \text{tr} \hat{P}_{1e} / (2N + 2) = 1/2, \\ \langle g_N \rangle &= \text{tr} \hat{P}_g \cdot \text{tr} \hat{P}_h \cdot \text{tr} \hat{P}_e / (2N + 2)^2 = N/2, \\ \langle g_a^0 \rangle &= \text{tr} \hat{P}_{1h} \cdot \text{tr} \hat{P}_e / (2N + 2) = 1/2, \end{aligned}$$

$$\langle G_{SN} \rangle = G_0 (N + 2).$$

Этот результат вызывает удивление, если учесть геометрию трансформации мод. Действительно, из рисунка 3.4в видно, что в отличие от случая сонаправленного движения квазичастиц (рис. 3.1) часть мод претерпевают андреевское (или нормальное в зависимости от вероятности) отражение уже на левой границе “а”, вдоль которой первоначально и попадает в систему основная часть электронов из нормального электрода. Это, казалось бы, должно приводить к изменению среднего значения кондактанса относительно случая сонаправленных мод при $N + 2$ объёмных уровней Ландау, находящихся под уровнем химического потенциала. Однако в результате сильного рассеяния в области трансформации и электрон-дырочной симметрии системы среднее значение кондактанса получается именно таким.

Полученный результат для среднего значения кондактанса является одним из возможных объяснений немонотонного поведения кондактанса в зависимости от фактора заполнения, которое наблюдалось в экспериментальных работах по измерению транспорта в графене в режиме квантового эффекта Холла со сверхпроводящими электродами [66, 67] уже после опубликования статьи [A2]. Однако авторы указанных статей не акцентируют внимание читателя на таких особенностях квантования дифференциальной проводимости.

3.3. Трансформация спектра краевых состояний в двумерном топологическом изоляторе под сверхпроводником

В данном разделе будут рассмотрены особенности спектра краевых состояний двумерного топологического изолятора, помещённого в туннельный контакт со сверхпроводником с изотропным потенциалом спаривания. Как было упомянуто во введении, топологические изоляторы – это соединения, в которых спектр электронных состояний в объёмном материале имеет энергетическую щель $|M|$. При этом на поверхности (или краю) при отрицательных значениях энергетической щели в спектре $M < 0$ ¹¹ возникает нечётное количество пар локализованных у границы состояний. Согласно теореме Крамерса (см., например, [151]) в системе с нечётным количеством фермионов, удовлетворяющей симметрии обращения времени, состояния имеют как минимум двукратное вырождение. При этом для крамерсовских партнёров $\psi_{1,2} \sim e^{\pm i\mathbf{k}_b \mathbf{r}}$, распространяющихся вдоль какого-то направления (например, границы) с импульсом \mathbf{k}_b , спектральные ветви $\epsilon_{1,2}(\mathbf{k}_b)$ связаны соотношением $\epsilon_1(\mathbf{k}_b) = \epsilon_2(-\mathbf{k}_b)$ (см. сплошные кривые на рис. 3.5а). Из-за указанной симметрии в центре зоны Бриллюэна $k_b = 0$ эти спектральные ветви должны пересекаться между собой. В стандартном случае спектра объёмных состояний каждая ветвь должна быть периодичной с периодом обратной решётки $\epsilon_i(\mathbf{k}_b + \mathbf{b}) = \epsilon_i(\mathbf{k}_b)$, что приводит обязательно к чётному количеству пересечений ветвью уровня Ферми. В отличие от этого случая *краевой* спектр может при изменении волновых векторов k_b пересекать всю запрещённую зону и формировать состояния непрерывного спектра валентной зоны при больших отрицательных k_b и зоны проводимости – при больших положительных его значениях [114]. Такая конфигурация спектра как функции волнового вектора k_b вдоль границы приводит к нечётному количеству пересечений каждой ветвью уровня Ферми (см. рис. 3.5а). Необходимо отметить, что спиновое состояние волновой функции, отвечающей каждой из ветвей, отличается от состояния другой поверхностной моды той же границы [114, 152]. В дальнейшем будем называть эти спиновые состояния верхним и нижним, поскольку в ТИ сильное спин-орбитальное взаимодействие приводит к тому, что спин не является хорошим квантовым числом. При отсутствии примесей, нарушающих симметрию обращения времени, отсутствует рассеяние этих пар мод друг в друга. Поэтому благодаря нечётному количеству пересечений спектром уровня Ферми упомянутые поверхностные моды являются топологически защищёнными и могут быть убраны с уровня Ферми лишь одновременно с закрытием щели в объёмном спектре [28]. Рассмотренные выше

¹¹ Здесь мы пользуемся некоторым жаргоном, называя шириной энергетической щели разницу между энергиями электроподобной $|E\rangle$ и дырочноподобной $|H\rangle$ подзон спектра 2D ТИ.

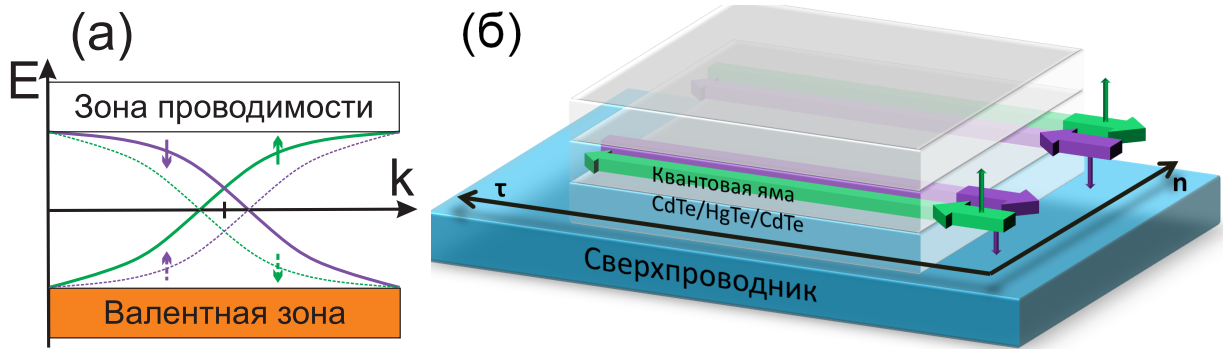


Рис. 3.5. (а) Схематичное изображение спектра топологического изолятора в зависимости от волнового вектора k вдоль границы: оранжевым и белым прямоугольниками обозначены заполненная валентная зона и пустая зона проводимости, сплошными (пунктирными) линиями изображены электронные (дырочные) спектральные ветви краевых состояний, при этом их спиновое состояние указано соответствующими стрелками. Вертикальная черта на оси k отвечает нулевому значению волнового вектора, а ось абсцисс пересекает ось ординат на уровне Ферми. Электронный спектр краевых состояний границы с противоположным направлением нормали качественно повторяет спектр дырочных ветвей. (б) Трёхмерное изображение двумерного топологического изолятора на основе квантовой ямы $CdTe/HgTe/CdTe$ на поверхности массивного сверхпроводника. Для наглядности схематично изображены краевые состояния нормального состояния: зелёные (фиолетовые) горизонтальные стрелки обозначают направление групповой скорости и отвечают модам с верхним (нижним) спиновым состоянием, движущимся по (против) часовой стрелке.

нарушения периодичности спектра краевых состояний с периодом обратной решётки, легко понять, если рассмотреть спектр краевых мод противоположной границы (см. для наглядности пунктирные кривые на рис. 3.5а). Из этого графика видно, что каждому “переходу” спектральной ветви одной границы при изменении k_y из валентной зоны в зону проводимости соответствует “переход” в обратном направлении для моды, локализованной на противоположной поверхности образца (см. геометрию на рис. 3.5б). Поэтому для любых значений волновых векторов количество состояний зоны проводимости и валентной зоны сохраняется в отдельности.

Важным отличием *двумерных* топологических изоляторов является тот факт, что их свойства могут изменяться в широких пределах с помощью соответствующего выбора ширины d квантовой ямы [24]. Они потенциально могут быть использованы в интегральных схемах, поскольку их поверхностные моды переносят ток практически бездиссипативно, однако естественным образом возникает вопрос устойчивости этих транспортных каналов к контакту топологического изолятора с подводящими контактами (в нашем случае сверхпроводящими). Часто в литературе для описания сверхпроводимости в топологических изолято-

рах применяется метод, описанный нами в разделе 1.2, в котором из соображений симметрии феноменологически конструируется эффективный гамильтониан топологического изолятора (см., например, [33–40]) со скалярной структурой индуцированных сверхпроводящих потенциалов. Поэтому данный раздел посвящён вопросу *микроскопического* изучения влияния сверхпроводящих корреляций на спектр двумерного топологического изолятора, особенно на спектр краевых состояний, см. рис. 3.5а.

На качественном уровне результаты этого раздела выглядят следующим образом: в отсутствие контакта со сверхпроводником спектр краевых состояний линеен вблизи уровня Ферми (см. рис. 3.5а), не зависит от ориентации границы и отвечает двум геликоидальным электронным и двум дырочным модам [114]. Объёмный спектр при этом характеризуется щелью M в спектре возбуждений. Важным обстоятельством является тот факт, что и спектр краевых состояний, и объёмный спектр ТИ являются изотропными, то есть не зависят от ориентации границ относительно вектора \mathbf{r}_{ab} между подрешётками ТИ, в то время как разность фаз компонент волновых функций краевых мод, диагонализующих одночастичный гамильтониан (1.34), меняется при изменении этой ориентации. При учёте туннелирования между ТИ и сверхпроводником в спектре краевых состояний открывается щель E_g . Сверхпроводящие корреляции запутывают между собой подзоны спектра топологического изолятора, что из-за разной угловой симметрии этих подзон приводит к зависимости всего спектра (объёмного и краевого) от ориентации границы. Зависимость сверхпроводящей щели от направления φ распространения может в общем случае приводить к локализации низкоэнергетических $E < \max_{\varphi} E_g(\varphi)$ краевых состояний в областях, где их энергия E больше индуцированной щели $E > E_g(\varphi)$. Вблизи точек поворота $E = E_g(\varphi_0)$ электроны и дырки переходят друг в друга благодаря андреевскому отражению.

В следующем подразделе в рамках модели, развитой в разделе 1.3.4 главы 1, мы рассмотрим двумерный топологический изолятор, находящийся в туннельном контакте со сверхпроводником (см. рис. 3.5б), и аналитически выведем собственно энергетические части в уравнениях Боголюбова - де Жена, отвечающие за эффективную сверхпроводящую щель и сдвиг энергии и химического потенциала, в матричной форме в пространстве подзон спектра 2D ТИ. Поскольку щель в объёмном спектре ТИ M без сверхпроводящих потенциалов может быть изменена практически от нулевого значения до значений энергии, отвечающих комнатной температуре, с помощью выбора ширины квантовой ямы, то дополнительные члены уравнений БдЖ становятся особенно важными в случае, когда величина щели M сравнима с амплитудами сверхпроводящих потенциалов. Как мы покажем далее в подразделе 3.3.2, взаимодействие индуцированного сверхпроводящего параметра порядка с краевыми состо-

яниями приводит к нарушению топологического инварианта и открытию сверхпроводящей щели в спектре этих мод. При этом так называемые “топологически защищённые” носители заряда, которые отвечали за зарядовый и спиновый транспорт в системе, локализируются сверхпроводящей щелью с помощью андреевского отражения, тем самым квазичастичный ток в системе блокируется. Последний подраздел 3.3.3 этой части посвящён численному моделированию спектра двумерного топологического изолятора под сверхпроводником на основе решёточной регуляризации развитой модели. Численное моделирование подтверждает аналитические результаты предшествующих разделов и даёт некоторые новые результаты.

3.3.1. Модель

В данном подразделе на основе результатов раздела 1.3.4 выведены эффективные собственно энергетические части (1.39), наведённые в двумерном топологическом изоляторе сверхпроводником с изотропным спариванием в модели, когда рассматриваются лишь синглетные индуцированные сверхпроводящие потенциалы (1.36) и возможность туннелирования с конечной вероятностью (1.38) из сверхпроводника с одной орбиталью в обе орбитали ТИ (см. рис. 1.4). Гамильтониан уравнений Боголюбова - де Жена в 2D ТИ с одночастичным гамильтонианом (1.34) и индуцированными собственно энергетическими частями с компонентами (1.42) в пространстве Горькова - Намбу выглядит следующим образом:

$$\mathcal{H}_{\text{BdG}} = \begin{pmatrix} \check{\mathcal{H}} + \check{\Sigma}_1 & \check{\Sigma}_2 \\ \check{\Sigma}_2^+ & -\check{\mathcal{H}} - \check{\mathcal{T}}\check{\Sigma}_1\check{\mathcal{T}}^{-1} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Здесь каждая из компонент $\check{\Sigma}_1 = \text{diag}(\hat{\mathcal{U}}_{\uparrow}, \hat{\mathcal{U}}_{\downarrow})$ [$\check{\Sigma}_2 = \text{diag}(\hat{\Delta}_{\text{TI}\uparrow}, \hat{\Delta}_{\text{TI}\downarrow})$] диагональна в пространстве спиновых состояний (из-за учёта лишь синглетных сверхпроводящих потенциалов) и является матрицей подзонном пространстве

$$\hat{\mathcal{U}}_{\varsigma} = \frac{dG_S^0}{\hbar k_S^2} \begin{pmatrix} |t_{a\varsigma}|^2 & t_{a\varsigma}^* t_{b\varsigma} \\ t_{a\varsigma} t_{b\varsigma}^* & |t_{b\varsigma}|^2 \end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}_{\text{TI}\varsigma} = \frac{dF_S^0}{\hbar k_S^2} \begin{pmatrix} t_{a,\varsigma}^* t_{a,-\varsigma}^* & t_{a,\varsigma}^* t_{b,-\varsigma}^* \\ t_{b,\varsigma}^* t_{a,-\varsigma}^* & t_{b,\varsigma}^* t_{b,-\varsigma}^* \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

где нормальная $G_S^0 = G_S^0(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ и аномальная $F_S^0 = F_S^0(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ части функции Грина сверхпроводника взяты при совпадающих координатах.

Далее мы будем предполагать, что сверхпроводник находится в однородном состоянии, и будем рассматривать малые значения энергии квазичастиц E по сравнению со энергетической щелью сверхпроводника $E \ll \Delta$. Подставляя выражение (1.32) для функций Грина [113] однородного состояния сверхпроводника в координатном представлении через квазиклассическую функцию Грина $\check{g}_S(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \approx i\tau_y$ в уравнение (3.25), мы получим выражения для

коэффициентов в виде $dG_S^0/(\hbar k_S^2) = d/(4\pi\mu a_{TI})$ и $dF_S^0/(\hbar k_S^2) = \varkappa_a d/(4\pi\mu a_{TI})$. Здесь безразмерный коэффициент $\varkappa_a = k_S a_{TI}$ характеризуется импульсом Ферми в сверхпроводнике и минимальным значением a_{TI} разностной координаты r_d порядка межатомного расстояния в решётке ТИ (см. рис. 1.4), на котором ещё применима формула (1.32).

Необходимо отметить, что соотношения между коэффициентами туннелирования $t_{\eta\uparrow}$ и $t_{\eta\downarrow}$ с $\eta \in \{a, b\}$ зависят не только от прозрачности барьера со сверхпроводником, но и от направления распространения краевых мод относительно вектора \mathbf{r}_{ab} между атомами двух подрешёток ТИ. В любом случае возможность туннелирования из сверхпроводника в обе подзоны спектра ТИ не вносит явной анизотропии в модель туннелирования. Как будет показано ниже, все физически измеряемые величины зависят лишь от разности фаз коэффициентов туннелирования в разные подзоны спектра ТИ (то есть от аргументов комплексных величин $t_{a\varsigma} t_{b\varsigma}^*$, $\varsigma = \uparrow, \downarrow$), а не от их фаз в отдельности.

3.3.2. Модификация спектра краевых состояний топологического изолятора сверхпроводником

В том случае, когда амплитуды наведённого сверхпроводящего параметра порядка $\hat{\Delta}_{TI}$ и сдвига химического потенциала и энергии \hat{U} малы по сравнению с шириной запрещённой зоны M в нормальном состоянии 2D ТИ, можно рассматривать индуцированные потенциалы (3.25) в уравнении (3.24) по теории возмущений.

В отсутствие сверхпроводящих корреляций $\hat{\Delta}_{TI} = 0$ и $\hat{U} = 0$, как указано выше, уравнения БдЖ (1.1) с одночастичным гамильтонианом (1.34) имеют два электронных решения с ортогональными спиновыми состояниями вблизи каждой границы. Групповые скорости этих мод противоположно направлены. Кроме того, имеется столько же дырочных краевых мод.

Предполагая для простоты граничные условия типа Дирихле $\hat{\psi}|_S = 0$ для огибающих $\hat{\psi}$ волновых функций в ТИ, запишем точное аналитическое решение для краевых состояний, которое может быть найдено в работах [A1] и [59, 153] и выглядит следующим образом: для электронных $\psi_e^{(+)} = (\hat{\psi}_{\text{edge}}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{0})^T$ $[\psi_e^{(-)} = (\hat{0}, \hat{\psi}_{\text{edge}}^*, \hat{0}, \hat{0})^T]$ и дырочных состояний $\psi_h^{(-)} = (\hat{0}, \hat{0}, \hat{0}, \hat{\psi}_{\text{edge}}^*)^T$ $[\psi_h^{(+)} = (\hat{0}, \hat{0}, \psi_{\text{edge}}, \hat{0})^T]$, отвечающих верхнему [нижнему] спиновому состоянию¹², где за $\hat{0}$ обозначен нулевой спинор в подзонном пространстве, а функция

$$\hat{\psi}_{\text{edge}} = \frac{e^{i\hat{\sigma}_z \varphi/2}}{\sqrt{2|B|}} \begin{pmatrix} \sqrt{|B_-|} \\ -\sqrt{|B_+|} \end{pmatrix} \times (e^{-p_1 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}} - e^{-p_2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (3.26)$$

¹² Здесь мы стараемся не употреблять выражений типа “состояния со спином вверх (вниз)”, поскольку в топологических изоляторах, основанных на спин-орбитальном взаимодействии, спин является плохим квантовым числом

записана через двумерный радиус-вектор $\mathbf{r} = (x, y)$ с волновым вектором k вдоль границы \mathbf{l} с внутренней нормалью \mathbf{n} (их векторное произведение $[\mathbf{l} \times \mathbf{n}]$ – единичный вектор в положительном направлении оси OZ) и углом φ между направлением \mathbf{l} и осью OX . Характерные масштабы спадаания $p_{1,2}^{-1}$ краевых состояний в 2D ТИ зависят от волнового вектора и материальных параметров:

$$p_{1,2} = p_0 \pm \sqrt{\left(k - \frac{D}{B}p_0\right)^2 + \frac{A^2}{4B^2} - \frac{M}{B}}, \quad (3.27)$$

где мы ввели обозначения $p_0 = A/(2\sqrt{B_+B_-})$, $B_{\pm} = B \pm D$. Иными словами, электронные $\psi_e^{(\pm)}$ [дырочные $\psi_h^{(\pm)}$] состояния отвечают линейной зависимости энергетического спектра $\varepsilon_{\pm}^0(k)$ [$-\varepsilon_{\pm}^0(k)$] от волнового вектора k вдоль границы

$$\varepsilon_{\pm}^0(k) = \frac{\pm A\sqrt{B_+B_-}k - DM}{B} \quad (3.28)$$

с наклоном $s = A\sqrt{B_+B_-}/|B|$. Энергетические ветви пересекают уровень Ферми в точках $k = k_0 = DM/(A\sqrt{B_+B_-})$ и $k = -k_0$ (см. рис. 3.6а). Всюду предполагается, что материальные параметры B и D отрицательны. Заметим, что относительная фаза компонент волновой функции $\hat{\psi}_{\text{edge}}$ зависит от ориентации границы φ . При этом направление отсчёта угла φ выбрано каким-то строго определённым образом относительно вектора \mathbf{r}_{ab} , соединяющего подрешётки ТИ, при выводе гамильтониана (1.34) из микроскопической теории. В нашей модели мы можем определить это направление лишь из соображений симметрии.

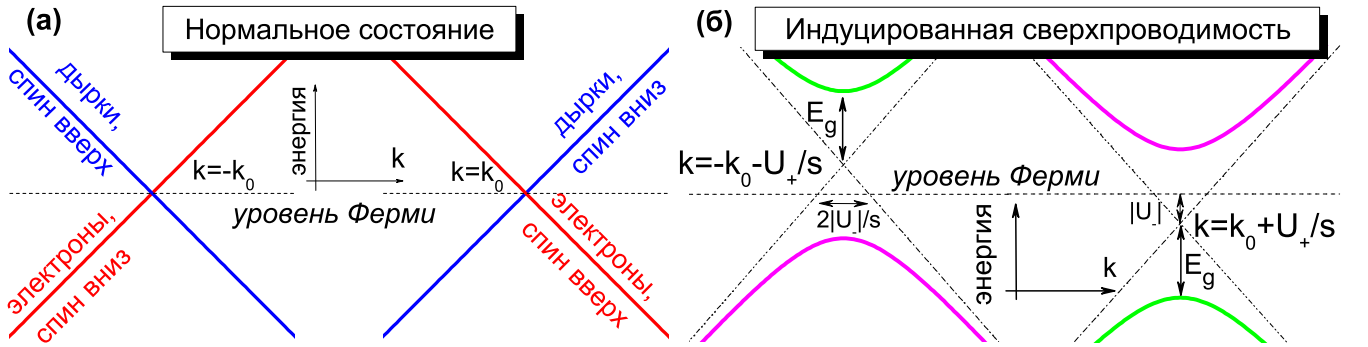


Рис. 3.6. Схематичное изображение спектра двумерного топологического изолятора в зависимости от волнового вектора k вдоль границы: (а) в нормальном состоянии (б) с учётом наведённой сверхпроводимости, когда спектр сдвигается на величины U_- и $U_+/s > 0$ вдоль осей энергии и импульса соответственно, и в нём открывается энергетическая щель E_g . На рисунке предполагается $U_- < 0$.

При малых значениях амплитуд индуцированных потенциалов $\hat{\Delta}_{\text{ТИ}}$ и \hat{U} по сравнению со значением ширины запрещённой зоны M основные изменения в спектре произойдут вблизи уровня Ферми. В этом случае можно рассматривать квазичастичный спектр вблизи

каждой из точек $k = \pm k_0$ независимо. Рассуждая в рамках этих предположений, воспользуемся теорией возмущений по индуцированным потенциалам и используем вблизи точки пересечения $k = \eta k_0$ электронной и дырочной ветвей спектра соответствующие им волновые функции нулевого порядка $\psi_{e,h}^{(\eta)}$, отвечающие разным спиновым состояниям. Спроектируем гамильтониан (3.24) на функции, отвечающие, например, точке $k = k_0$:

$$\begin{aligned} \langle \psi_e^{(+)} | \mathcal{H}_{\text{BdG}} | \psi_e^{(+)} \rangle &= \langle \psi_{\text{edge}} | \hat{H} + \hat{U}_\uparrow | \psi_{\text{edge}} \rangle = \varepsilon_+^0(k) + U_\uparrow^2, \\ \langle \psi_e^{(+)} | \mathcal{H}_{\text{BdG}} | \psi_h^{(+)} \rangle &= \langle \psi_{\text{edge}} | \hat{\Delta}_{\text{TI}\uparrow} | \psi_{\text{edge}} \rangle = E_g e^{-i\varrho_+}, \\ \langle \psi_h^{(+)} | \mathcal{H}_{\text{BdG}} | \psi_e^{(+)} \rangle &= \langle \psi_e^{(+)} | \mathcal{H}_{\text{BdG}} | \psi_h^{(+)} \rangle^*, \\ \langle \psi_h^{(+)} | \mathcal{H}_{\text{BdG}} | \psi_h^{(+)} \rangle &= \langle \psi_{\text{edge}} | -\hat{H} - \hat{U}_\downarrow^* | \psi_{\text{edge}} \rangle = -\varepsilon_+^0(k) - U_\downarrow^2, \end{aligned}$$

где мы ввели для краткости обозначения $U_\pm = (U_\uparrow^2 \pm U_\downarrow^2)/2$, $E_g = \kappa_a U_\uparrow U_\downarrow$ и $\varrho_+ = \varrho_\uparrow + \varrho_\downarrow$ через модули U_ς и фазы ϱ_ς следующий выражений

$$\begin{aligned} \sqrt{d} \left(t_{a\uparrow} e^{i\varphi} \sqrt{|B_-|} - t_{b\uparrow} \sqrt{|B_+|} \right) / \sqrt{8\pi\mu a_{\text{TI}} |B|} &\stackrel{\text{def}}{=} U_\uparrow e^{i\varrho_\uparrow}, \\ \sqrt{d} \left(t_{a\downarrow} e^{-i\varphi} \sqrt{|B_-|} - t_{b\downarrow} \sqrt{|B_+|} \right) / \sqrt{8\pi\mu a_{\text{TI}} |B|} &\stackrel{\text{def}}{=} U_\downarrow e^{i\varrho_\downarrow}. \end{aligned}$$

Появление \hat{U}_\downarrow в дырочном секторе гамильтониана связано с собственно энергетической частью $\check{T}\check{\Sigma}_1\check{T}^{-1}$, к которой применён оператор обращения времени в ТИ $\check{T} = \hat{\zeta}_x \otimes \hat{\sigma}_0 \mathcal{C}$. В этом случае спектр вблизи $k = k_0$ в первом порядке теории возмущений сдвигается на величины U_- по энергии и U_+/s вдоль волнового вектора с одновременным открытием щели E_g :

$$\varepsilon_{1,2}^{(+)}(k) = U_- \pm \sqrt{(\varepsilon_+^0(k) + U_+)^2 + E_g^2}. \quad (3.29)$$

Спектр вблизи другой точки $k = -k_0$ отличается от (3.29) лишь заменой $\varepsilon_+^0(k)$ на $-\varepsilon_-^0(k)$ и U_- на $-U_-$ (см. рис. 3.6б). Энергетическая щель в спектре возбуждений E_g явным образом зависит от направления границы $\varphi = \widehat{(\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{x}_0)}$:

$$E_g = \frac{k_S d}{8\pi\mu |B|} \left| t_{a\uparrow} e^{i\varphi} \sqrt{|B_-|} - t_{b\uparrow} \sqrt{|B_+|} \right| \cdot \left| t_{a\downarrow} e^{-i\varphi} \sqrt{|B_-|} - t_{b\downarrow} \sqrt{|B_+|} \right|.$$

Такое поведение сверхпроводящей щели напоминает результат взаимодействия синглетных и триплетных компонент в трёхмерных ТИ, индуцированных сверхпроводником с изотропным спариванием [55]. Из общих соображений при наличии в топологическом изоляторе лишь двух полярных векторов (вектора \mathbf{r}_{ab} , соединяющего две подрешётки, и нормали к границе \mathbf{n}) феноменологически можно сконструировать сверхпроводящую щель в спектре краевых состояний только как функцию скалярного произведения этих векторов, поскольку щель является скалярным объектом. Иными словами $E_g = E_g [\cos(\varphi - \vartheta_0)]$, где $\mathbf{r}_{ab} =$

$r_{ab}(-\sin \vartheta_0, \cos \vartheta_0, 0)$ и $\mathbf{n} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$. В общем случае соотношений коэффициентов туннелирования $t_{m\zeta}$ в рассматриваемой модели щель в спектре может иметь два минимума, положение которых зависит от относительных фаз $\vartheta_\zeta = \arg(t_{a\zeta}^* t_{b\zeta})$ коэффициентов туннелирования

$$E_g^2 \sim [K_\uparrow - \cos(\varphi - \vartheta_\uparrow)][K_\downarrow - \cos(\varphi + \vartheta_\downarrow)]$$

и отношения амплитуд их модулей $K_\zeta = (C_\zeta + C_\zeta^{-1})/2 \geq 1$, $C_\zeta = |t_{a\zeta}/t_{b\zeta}| \sqrt{|B_-/B_+|}$. Однако для выполнения описанного выше условия симметрии должны выполняться соотношения либо между разностями фаз туннелирования $\vartheta_\uparrow = -\vartheta_\downarrow$, либо между соотношениями их амплитуд $K_\uparrow = K_\downarrow$. В любом случае направление вектора подрешёток определяет следующую величину $\vartheta_\uparrow - \vartheta_\downarrow = 2\vartheta_0$.

В частном случае соотношения амплитуд туннелирования $C_\zeta = 1$ ($K_\zeta = 1$) минимумы амплитуды сверхпроводящей щели реализуются в точках $\varphi = \pm\vartheta_{\uparrow,\downarrow}$ и соответствуют отсутствию щели, поскольку $U_\zeta(\vartheta_\zeta) = 0$. Иными словами, вблизи двух направлений распространения, определяемых разностями фаз ϑ_ζ коэффициентов туннелирования верхнего и нижнего спиновых состояний, сверхпроводящая щель в спектре мод может не открыться, и обе пары краевых состояний в этом случае будут способны переносить зарядовый и спиновый квазичастичный ток вдоль границ с такой ориентацией относительно кристаллографических осей ТИ (см. рис. 3.7а). Однако при движении мод вдоль поверхности образца направление их распространения будет меняться вслед за направлением границы. Это изменение, в свою очередь, приведёт к открытию энергетической щели в их спектре и эффективной локализации этих мод. В таких “точках поворота” подщелевые ($E < E_g$) электронные и дырочные состояния, связанные эффективным сверхпроводящим спариванием и распространяющиеся в противоположных направлениях, будут претерпевать андреевское отражение, формируя локализованные андреевские состояния. Сохранение зарядового тока в этом случае гарантируется наличием второй электронной и дырочной пары мод, спиновые состояния и групповые скорости которых противоположно направлены относительно мод первой пары. В общем случае соотношения величин $|t_{a\zeta}/t_{b\zeta}|$ щель в спектре квазичастичных возбуждений не будет исчезать ни при каком направлении, однако описанная картина будет реализовываться для мод с энергией E , лежащей в интервале значений этой щели: $\min_\varphi E_g < E < \max_\varphi E_g$.

Выделенные направления локализации андреевских состояний отсчитываются в нашей модели симметрично относительно вектора \mathbf{r}_{ab} , соединяющего подрешётки топологического изолятора, и зависят от суммы $\vartheta_\uparrow + \vartheta_\downarrow$ относительных фаз ϑ_ζ коэффициентов туннелирования. При этом поворот системы координат на некоторый угол $\Delta\varphi$ не влияет на физи-

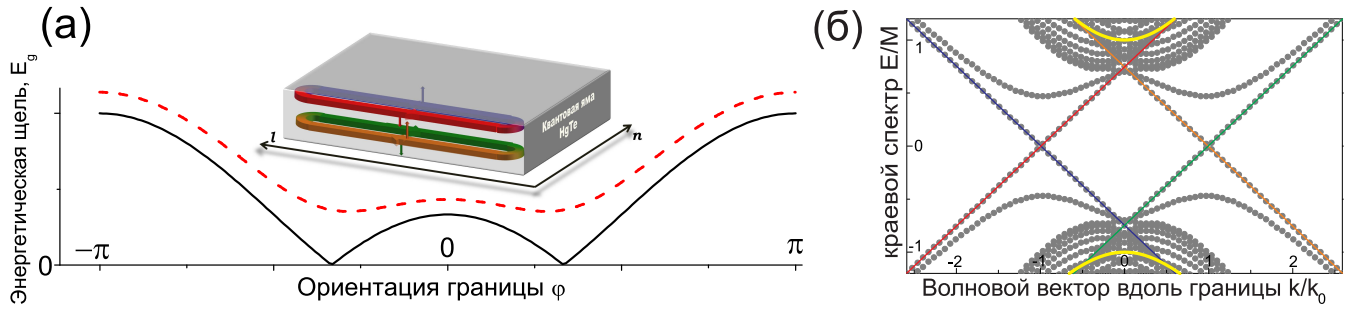


Рис. 3.7. (а) Зависимость энергетической щели в спектре E_g от направления распространения краевых мод φ при $\vartheta_\zeta = \pi/3$ и $C_\zeta = 1$ (чёрная сплошная линия) и $C_\zeta = 2$ (красная пунктирная); Вставка: Схематичное изображение границы **I** топологического изолятора в контакте со сверхпроводником, вдоль которой не открывается сверхпроводящая щель, и распространяются две электронные (красная и оранжевая стрелки на переднем плане) и две дырочные (синяя и зелёная на втором плане) моды. Верхнее (нижнее) спиновое состояние обозначено направлением вверх (вниз) вертикальной стрелки; (б) Квазичастичный спектр, соответствующий вставке: цвета сплошных прямых линий отвечают электронным и дырочным модам, край непрерывного спектра границы **I** обозначен жёлтыми линиями. Серыми кружками обозначен численный спектр (см. следующий раздел: параметры $k_S dt_{as}^2 / (4\pi\mu M) = 1$, $C_\zeta = 1$ и $\vartheta_\zeta = 0$) для обеих границ $\pm \mathbf{l} \parallel O_x$, изображённых на вставке.

чески измеримые величины, поэтому одновременно на ту же величину должен измениться угол ориентации вектора \mathbf{r}_{ab} , выражающийся через фазы коэффициентов туннелирования $\vartheta_0 = (\vartheta_\uparrow - \vartheta_\downarrow)/2$. В то же время величина суммы относительных фаз $\vartheta_\uparrow + \vartheta_\downarrow$ должна остаться неизменной относительно такого преобразования. Такая зависимость относительных фаз коэффициентов туннелирования в верхнее ϑ_\uparrow и нижнее ϑ_\downarrow спиновые состояния связана с тем, что сами коэффициенты туннелирования $t_{m\zeta}$ записаны для огибающих волновых функций, в то время как базисные функции $|H\pm\rangle = (X \pm iY)_{\uparrow(\downarrow)}$ приобретают дополнительную фазу при изменении направления оси отсчёта. Эта фаза, но с обратным знаком заложена также и в гамильтониан (1.34), что приводит к изотропному спектру (3.28) нормальных состояний и относительной разности фаз φ компонент волновых функций (3.26).

3.3.3. Численное моделирование спектра топологического изолятора под сверхпроводником

Для описания общей задачи за рамками теории возмущений, когда амплитуды индуцированных сверхпроводящих корреляций $\hat{\Delta}_{\text{TI}}$ и \hat{U} сравнимы с шириной запрещённой зоны ТИ M , было применено численное моделирование. Гамильтониан Боголюбова - де Жена (3.24) был записан в решёточной регуляризации, описанной в приложении В.4. Для простоты вычислений была взята простая квадратная решётка Браве, каждый атом которой содержит

две орбитали [114, 115]. Спектр квазичастиц был получен с помощью численной диагонализации полученной матрицы одночастичной задачи (1.35) с наведёнными потенциалами в форме (3.25). При этом рассматривалась полоска 2D ТИ конечной ширины W вдоль направления \mathbf{n} с граничными условиями типа Дирихле для огибающих волновых функций ψ , в то время как вдоль перпендикулярного направления \mathbf{l} топологический изолятор считался бесконечным, и волновая функция выбиралась в виде плоской волны в этом направлении (см. рис. 3.5б). Ширина полоски ТИ W выбиралась большой $p_{1,2}W \gg 1$ по сравнению с характерными значениями длин спада $p_{1,2}^{-1}$ (3.27) волновых функций поперёк границы вглубь образца, чтобы избежать взаимодействия краевых мод противоположных границ (см. [153]) и, как следствие, расщепления краевого спектра нормального состояния. Для всех вычислений были выбраны следующие значения материальных параметров $A = 3,65 \text{ эВ}\cdot\text{Å}$, $B = -68,6 \text{ эВ}\cdot\text{Å}^2$, $D = -51,2 \text{ эВ}\cdot\text{Å}^2$, отвечающих ширине $d = 71 \text{ Å}$ квантовой ямы $CdTe/HgTe/CdTe$ [114, 115]. Без ограничений общности рассматривался случай нулевого сдвига химического потенциала в 2D ТИ в нормальном состоянии. При этом значение щели M в объёмном спектре нормального состояния ТИ не было фиксировано ($-10 \text{ мэВ} \lesssim M < 0$), так как именно этот параметр наиболее чувствителен к изменению ширины d квантовой ямы. Он меняется на несколько порядков величины при изменении d от 6 до 7 нм, в то время как остальные параметры (A , B , D) перенормируются лишь на $\sim 20\%$ и слабо модифицируют спектр [114].

Результаты вычислений представлены на графиках 3.7б и 3.8. В связи с особенностями выбранной геометрии всюду на графиках представлены спектры границ с внутренними нормальными $\pm \mathbf{n}$, а не только границы с нормалью \mathbf{n} , как это было сделано в предыдущем подразделе. В случае средних значений коэффициентов туннелирования $k_S dt_m^2 / (4\pi\mu) \sim |M|$, как и было показано в предыдущем разделе, могут существовать такие направления границы \mathbf{l} (см. рис. 3.7), вдоль которых сверхпроводящая щель не открывается, сохраняя электронные и дырочные краевые состояния, в то время как на противоположной границе $-\mathbf{l}$ щель в краевом спектре открыта. При этом необязательно положение щелей в спектре краевых состояний,двигающихся в противоположных направлениях вдоль одной и той же границы, будет совпадать по значениям энергии (см. рис. 3.8б), как это и было показано аналитически из-за сдвига этих спектров вдоль оси ординат на величины $\pm U_-$ в противоположные стороны. Кроме того, в этой области параметров численно было показано, что связь со сверхпроводником приводит к анизотропии непрерывного спектра (см. рис. 3.8а), вектор анизотропии которого направлен вдоль направления $\theta_0 = (\vartheta_\uparrow - \vartheta_\downarrow)/2$.

Для случая прозрачного барьера между сверхпроводником и топологическим изолятором $k_S dt_m^2 / \mu \gg |M|$ вдоль тех границ, где сверхпроводящая щель не открывается ($C_\zeta = 1$,

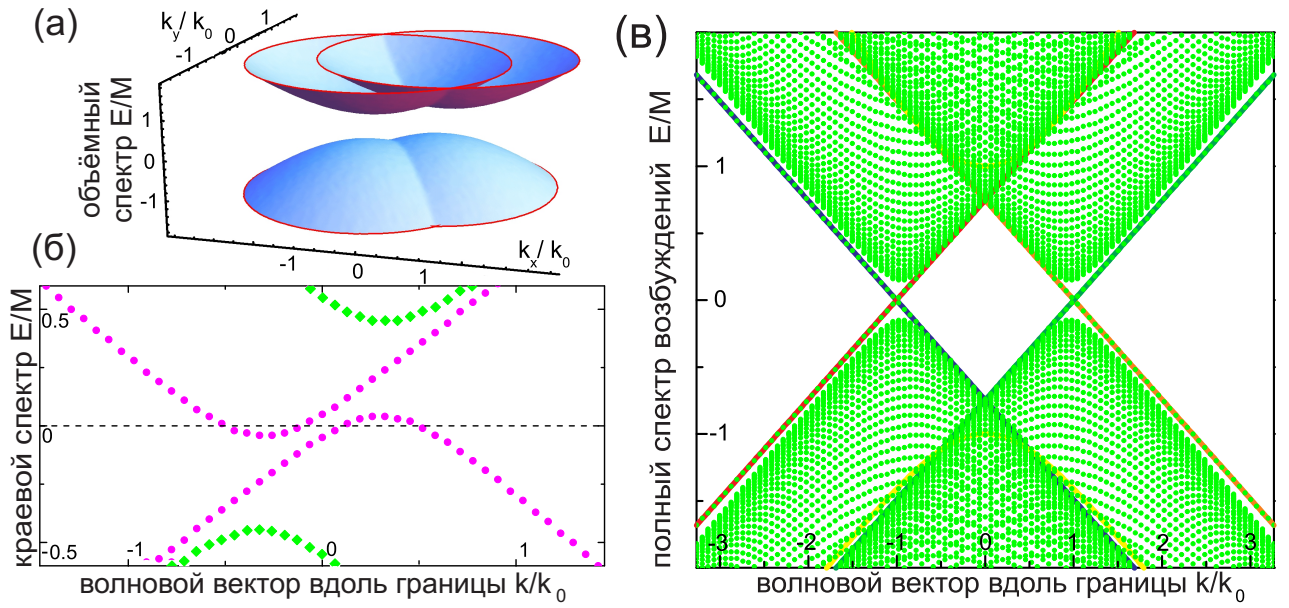


Рис. 3.8. Графики объёмного (а) и краевого (б) спектра для промежуточных значений коэффициентов туннелирования $k_S dt_{ac}^2 / (4\pi\mu M) = 1$ в отсутствие сверхпроводящей щели ($C_\zeta = 1$) вдоль направлений $\vartheta_{\uparrow,\downarrow} = \pm\pi/6$. Волновой вектор границы $k\mathbf{l}$ направлен под углом $\varphi = \pi/2$ к оси абсцисс. Цвета ветвей краевого спектра соответствуют цветам аналитического графика 3.6б; (в) Полный спектр возбуждений в зависимости от волнового вектора вдоль границы Ox для больших значений коэффициентов туннелирования $k_S dt_{ac}^2 / (4\pi\mu M) = 12$. В отсутствие сверхпроводящей щели ($C_\zeta = 1$) вдоль направления $\vartheta_\zeta = 0$ щель в объёмном спектре в этом случае практически закрывается, и состояния непрерывного спектра формируют аналог графена, двумерный анизотропный полупроводник с релятивистскими возбуждениями. Сплошные линии отвечают аналитическому спектру без сверхпроводящих корреляций.

$\varphi = \vartheta_\zeta$), численная диагонализация матрицы гамильтониана даёт результат, что запрещённая зона непрерывного спектра может практически закрыться (см. рис. 3.8в), и двумерный топологический изолятор будет демонстрировать в этом направлении металлический характер проводимости с релятивистскими возбуждениями.

В заключении необходимо отметить, что аналитические и численные расчёты демонстрируют приближённую симметрию квазичастичного спектра гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{ваГ}}$ БДЖ: $\chi^2 \varepsilon(\mathbf{k}/\chi^2, M/\chi^2, t_a/\chi, t_b/\chi) \approx \varepsilon(\mathbf{k}, M, t_a, t_b)$ с безразмерным параметром χ . Эта симметрия хорошо работает при малых значениях параметра M по сравнению с другими энергетическими масштабами (например, $A^2/|B|$) на основе остальных материальных констант A , B и D .

3.4. Выводы к третьей главе

На основании расчётов, проделанных в этой главе, был изучен квазичастичный транспорт вдоль локализованных состояний, волновые функции которых прижаты к краю образца или границе раздела, в гибридных структурах “сверхпроводник - двумерный нормальный металл” как на основе двумерного электронного газа или графена в квантующих магнитных полях, так и на основе двумерного топологического изолятора.

Первая часть главы посвящена вычислению дифференциальной проводимости контактов сверхпроводника с ДЭГ и графеном в режиме КЭХ нормальных подсистем. Показано, что в квантовом пределе магнитных полей, когда вдоль каждой границы распространяется по одной паре мод ($N = 1$), в контакте S-ДЭГ кондактанс периодически меняется при изменении магнитного поля, уровня Ферми или ширины контакта. При этом вне зависимости от этих осцилляций, кондактанс обращается в нуль при отсутствии перерассеяния между модами края ДЭГ и границы раздела со сверхпроводником. В том же режиме в SG - контакте кондактанс существенно зависит от ориентации краёв графена по отношению к кристаллографическим осям, не меняется в зависимости от уровня Ферми и магнитного поля (в пределах приближений $N = 1$) и обращается в нуль лишь в случае отсутствия перемешивания мод разных границ при рассеянии и эквивалентной ориентации краёв с изолятором относительно кристаллографических осей. Увеличение числа краевых каналов влечёт за собой унификацию поведения дифференциальной проводимости: как в графене, так и в ДЭГ, кондактанс периодически меняется с полем, химическим потенциалом и шириной контакта, причём количество различных (в общем случае несоизмерных) периодов этих осцилляций растёт как квадрат количества электронных мод N , распространяющихся вдоль края двумерной подсистемы. На основе метода случайных матриц рассеяния выведены универсальные выражения для среднего значения кондактанса и его дисперсии, зависящие лишь от фундаментальных постоянных, количества мод N и средних значений коэффициентов прохождения электронных мод в моды сверхпроводящего интерфейса. Кроме того, в последнем подразделе рассмотрен случай, характерный для графена, в котором при некоторых значениях уровня Ферми нарушается основное свойство квантового эффекта Холла – отсутствие рассеяния назад [143]. В этом случае найдены эффективное изменение среднего значения кондактанса и его области немонотонности в зависимости от магнитного поля и химического потенциала.

Во второй части главы исследована устойчивость “топологически защищённых” краевых состояний, локализованных на границе с изолятором в квантовой яме на основе $HgTe$ между берегами $CdTe$, по отношению к помещению сверхпроводника с изотропным синглет-

ным спариванием на поверхность такой квантовой ямы. Показано, что в результате такого туннельного контакта в двумерном топологическом изоляторе индуцируется эффективная сверхпроводящая щель, величина которой зависит от направления распространения краевых мод. Иными словами, спектр квазичастичных состояний такой системы, изотропный в нормальном состоянии, становится анизотропным при контакте со сверхпроводником и зависит от ориентации края относительно вектора, соединяющего подрешётки ТИ. В зависимости от величины коэффициентов туннелирования по отношению к химическому потенциалу и ширине запрещённой зоны объёмного спектра ТИ сверхпроводящие корреляции могут по-разному влиять на спектр двумерной подсистемы: в спектре краевых состояний может открыться сверхпроводящая щель, величина которой однако будет зависеть от направления границы или краевые моды могут попарно связаться в электрон-дырочные андреевские состояния, локализованные вблизи области отсутствия или подавления щели.

Кроме того, в рамках численной диагонализации матрицы гамильтониана показано, что при достаточно сильной связи сверхпроводника с топологическим изолятором ширина запрещённой зоны непрерывного спектра системы может практически закрыться. Однако, эта особенность рассматриваемой системы не подтверждена аналитическими выкладками, поэтому не включена в основные результаты работы.

Заключение

В представленной работе рассмотрен ряд задач о влиянии сверхпроводящих корреляций, индуцированных в квазидвумерных Ферми-системах, таких как двумерный электронный газ, графен и топологический изолятор, при контакте их со сверхпроводником на спектральные свойства квазичастичных состояний, локализованных вблизи вихрей Абрикосова, и транспортные характеристики краевых мод в этих системах. Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

- (1) На основе уравнений Боголюбова - Де Жена показано, что угловой момент локализованных состояний в коре вихря Абрикосова с завихренностью M в листе графена с наведенной изотропной сверхпроводимостью для произвольного уровня Ферми принимает полуцелые значения для чётных завихренностей и целые для нечётных M . В вихре нечётной завихренности M для произвольного химического потенциала найдено точное аналитическое выражение для локализованной моды с энергией, лежащей на уровне Ферми, и с нулевым орбитальным моментом для произвольного радиального профиля наведённой щели.
- (2) На основе микроскопических вычислений предсказано двухмасштабное пространственное поведение локальной плотности состояний в двумерном металлическом слое в контакте со сверхпроводником второго рода в смешанном состоянии. Два указанных пространственных масштаба определяются энергетической щелью в спектре сверхпроводника и наведённой щелью в спектре нормального слоя. В пренебрежении беспорядком найдено, что спектр квазичастиц в вихре как функция углового момента волновой функции состоит из *двух* ветвей, пересекающих уровень Ферми.
- (3) С помощью метода матриц рассеяния вычислена дифференциальная проводимость контакта двумерного металла со сверхпроводником, определяемая в сильных магнитных полях транспортом по одной паре краевых мод вблизи каждой границы, и показано, что её зависимость от ширины и геометрии контакта существенно отличается для случая двумерного электронного газа и графена в качестве двумерного металла. Показано, что среднее значение дифференциальной проводимости по реализациям примесей в области трансформации мод и дисперсия этой величины зависят от спектра двумерной подсистемы только через количество краевых каналов, и найдены универсальные выражения для указанных величин.

- (4) В рамках микроскопической модели туннельного гамильтониана аналитически и численно показано, что сверхпроводящая щель в спектре краевых мод двумерного топологического изолятора в контакте со сверхпроводником с изотропным спариванием зависит от направления их распространения при учёте туннелирования квазичастиц с изменением угловой симметрии волновой функции.

В процессе работы над диссертацией возникли новые задачи и проблемы, которые было бы интересно решить в рамках дальнейшего развития темы представленной диссертации:

- Экспериментальное наблюдение предсказанных особенностей локальной плотности состояний вблизи сверхпроводящих вихрей в монослое графена с индуцированной сверхпроводимостью. Предполагается, что при малых уровнях Ферми по сравнению с амплитудой индуцированной щели появится возможность экспериментального наблюдения квантованных уровней локализованных состояний в коре вихря. В то время как при больших уровнях допирования должна восстановиться картина, отвечающая спектру Кароли - де Жена - Матрикона.
- Экспериментальное наблюдение особенностей дифференциальной проводимости контакта графена со сверхпроводником в сильных магнитных полях, когда транспорт идёт по одной паре краевых мод около границ, по сравнению с проводимостью контакта на основе двумерного электронного газа при тех же параметрах. Предполагается, что в контакте с графеном отсутствуют осцилляции дифференциальной проводимости при изменении ширины контакта, но есть существенная зависимость проводимости от взаимной ориентации краёв графена относительно кристаллографических осей. При противоположной ориентации границ графена с изолятором предсказывается максимальное значение дифференциальной проводимости, равное удвоенному кванту кондактанса.
- Экспериментальное исследование зависимостей коэффициентов трансформации краевых мод, локализованных около границ нормальной системы с изолятором и сверхпроводником, друг в друга от магнитного поля, уровня Ферми и геометрии контакта двумерного металла в режиме квантового эффекта Холла со сверхпроводником.
- Разработка и проведение верифицирующих экспериментов по изучению влияния дефектного слоя на поверхности сверхпроводника на измеряемую плотность состояний, локализованных вблизи вихрей Абрикосова.

- Экспериментальное обнаружение предсказанных особенностей локальной плотности состояний сверхпроводника в вихревом состоянии (таких как два пространственных масштаба, наличие нескольких различных пиков в зависимости от энергии).
- Экспериментальное наблюдение предсказанной зависимости сверхпроводящей щели в спектре краевых мод двумерного топологического изолятора под сверхпроводником с изотропным спариванием от направления границы с вакуумом.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю А.С. Мельникову за постоянное внимание, терпение, неизменный интерес и поддержку в работе; а также всем сотрудникам ИФМ РАН, совместная работа и общение с которыми помогли решить многие вопросы работы и дали возможность настоящей диссертации появиться на свет. Особенно хотелось бы выразить благодарность:

- А.А. Андронову, В.В. Курину, С.В. Шарову, В.Я. Алёшкину, А.А. Фраерману и И.Д. Токману — за постоянный интерес и обсуждение вопросов диссертационной работы;
- И.А. Шерешевскому, М.А. Силаеву и Д.Ю. Водолазову — за неоценимую помощь и поддержку в численных счетах;
- А.Ю. Аладышкину, Д.Ю. Водолазову, Д.А. Рыжову, А.В. Самохвалову, О.Г. Удалову — за критические замечания и ценные советы при обсуждении результатов диссертации;
- А.Ю. Аладышкину, Е.Е. Пестову, М.А. Силаеву, А.В. Чигиневу, С.В. Миронову, Д.А. Савинову и И.В. Денисовой — за помощь в подготовке текста диссертации;

Автор глубоко признателен своим соавторам А.С. Мельникову, И.А. Шерешевскому, Н.Б. Копнину (ИТФ РАН), Н.М. Щелкачёву (ИТФ РАН) и В.М. Винокуру (Аргонн, США) за совместную продуктивную работу, многочисленные обсуждения при постановке и решении задач и помощь в критическом осмыслении результатов. Автор также благодарит А.И. Бuzдина (Бордо, Франция) и М.А. Силаева, совместные работы с которыми не вошли в текст настоящей диссертации.

Автор считает своим долгом поблагодарить семью и близких за понимание и поддержку во время работы над диссертацией.

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. Khaymovich, I. M. Instability of topological order and localization of edge states in HgTe quantum wells coupled to s-wave superconductor / I. M. Khaymovich, N. M. Chtchelkatchev, V. M. Vinokur // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 075142–1–075142–6.
- A2. Khaymovich, I. M. Andreev transport in two-dimensional normal-superconducting systems in strong magnetic fields / I. M. Khaymovich, N. M. Chtchelkatchev, V. M. Vinokur // *Europhys. Lett.* — 2010. — Vol. 91. — P. 17005–p1–17005–p5.
- A3. Khaymovich, I. M. Vortex Core States in Superconducting Graphene / I. M. Khaymovich, N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, I. A. Shereshevskii // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 224506–1–224506–7.
- A4. Kopnin, N. B. Predicted multiple cores of a magnetic vortex threading a two-dimensional metal proximity-coupled to a superconductor / N. B. Kopnin, I. M. Khaymovich, A. S. Mel'nikov // *Phys. Rev. Lett.* — 2013. — Vol. 110. — P. 027003–1–027003–5.
- A5. Khaymovich, I. M. Vortex Core States in Superconducting Graphene / I. M. Khaymovich, N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, I. A. Shereshevskii // *Нанофизика и нанoeлектроника: Труды XIII межд. симпозиума.* — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2009. — С. 549–550.
- A6. Khaymovich, I. M. Vortex Core States in Superconducting Graphene / I. M. Khaymovich, N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, I. A. Shereshevskii // *I.F. Schegolev Memorial Conference “Low-Dimensional Metallic and Superconducting Systems”.* — Черногoловка: ИТФ РАН, 2009. — С. 75.
- A7. Мельников, А. С. Магнитные свойства гибридных структур сверхпроводник — монослой графена и двумерный электронный газ / А. С. Мельников, И. М. Хаймович, Н. М. Щелкачѐв // *Нанофизика и нанoeлектроника: Труды XIV межд. симпозиума.* — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2010. — С. 375–376.
- A8. Мельников, А. С. Кондактанс сверхпроводящих гибридных структур на основе графена в квантующих магнитных полях / А. С. Мельников, И. М. Хаймович, И. А. Шерешевский, Н. М. Щелкачѐв // *Нанофизика и нанoeлектроника: Труды XV межд. симпозиума.* — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2011. — С. 313.
- A9. Хаймович, И. М. Локализованные андреевские состояния в двумерном топологическом изоляторе на основе квантовых ям CdHgTe с индуцированной сверхпроводимостью /

- И. М. Хаймович, Н. М. Щелкачѳв, В. Винокур // Нанозфизика и нанозлектроника: Труды XVI межд. симпозиума. — Н. Новгород: ИФМ РАН, 2012. — С. 91–93.
- A10. Хаймович, И. М. Локализованные состояния в коре вихря в двумерной системе с индуцированной сверхпроводимостью / И. М. Хаймович, Н. Копнин, А. Мельников // Сильно коррелированные электронные системы и квантовые критические явления: сборник тезисов конференции. — Троицк, Московская область: ИФВД РАН, 2012. — С. 33.

Литература

1. Kamerlingh Onnes, H. Further experiments with Liquid Helium. D. On the change of Electrical Resistance of Pure Metals at very low Temperatures, etc. V. The Disappearance of the resistance of mercury / H. Kamerlingh Onnes // Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Proceedings. — Vol. 14. — Amsterdam, 1911. — P. 113 – 115.
2. London, F. The Electromagnetic Equations of the Supraconductor / F. London, H. London // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. — Vol. 149. — 1935.
3. Гинзбург, В. Л. К теории сверхпроводимости / В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау // ЖЭТФ. — 1950. — Т. 20. — С. 1064–1081.
4. Bardeen, J. Theory of Superconductivity / J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer // Phys. Rev. — 1957. — Vol. 108. — P. 1175–1204.
5. Kamerlingh Onnes, H. Further experiments with liquid helium. I. The Hall-effect and the magnetic change in resistance at low temperatures. IX. The appearance of galvanic resistance in supraconductor, which are brought into a magnetic field at a threshold value of the field / H. Kamerlingh Onnes // Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences. Proceedings. — Vol. 16. — Amsterdam, 1914. — P. 987–992.
6. Шмидт, В. В. Введение в физику сверхпроводников / В. В. Шмидт. — 2-е, испр. и доп. изд. — Москва: МЦНМО, 2000. — С. XIV+402.
7. Meissner, W. Ein neuer Effekt bei Eintritt der Supraleitfähigkeit / W. Meissner, R. Ochsenfeld // Naturwissenschaften. — 1933. — Bd. 21. — S. 787–788.
8. Абрикосов, А. А. О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы / А. А. Абрикосов // ЖЭТФ. — 1957. — Т. 32. — С. 1442–1452.
9. Holm, R. Kontaktwiderstand Zwischen Supraleitern und Nichtsupraleitern / R. Holm, W. Meissner // Z. f. Physik. — 1932. — Bd. 74. — S. 715–735.
10. Андреев, А. Ф. Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников / А. Ф. Андреев // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 46. — С. 1823–1828.
11. Андреев, А. Ф. Теплопроводность промежуточного состояния сверхпроводников-II / А. Ф. Андреев // ЖЭТФ. — 1964. — Т. 47. — С. 2222–2228.

12. Андреев, А. Ф. Электронный спектр промежуточного состояния сверхпроводников / А. Ф. Андреев // ЖЭТФ. — 1965. — Т. 49. — С. 655–660.
13. McMillan, W. L. Tunneling Model of the Superconducting Proximity Effect / W. L. McMillan // Phys. Rev. — 1968. — Vol. 175. — P. 537–542.
14. Volkov, A. F. Proximity and Josephson effects in superconductor-two-dimensional electron gas planar junctions / A. F. Volkov, P. H. C. Magnée, B. J. van Wees, T. M. Klapwijk // Physica C. — 1995. — Vol. 242. — P. 261–266.
15. Novoselov, K. S. Electric Field Effect in Atomically Thin Carbon Films / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // Science. — 2004. — Vol. 306. — P. 666–669.
16. Wallace, P. R. The Band Theory of Graphite / P. R. Wallace // Phys. Rev. — 1947. — Vol. 71. — P. 622–634.
17. Bolotin, K. I. Ultrahigh electron mobility in suspended graphene / K. I. Bolotin, K. J. Sikes, Z. Jiang et al. // Solid-State Comm. — 2008. — Vol. 146. — P. 351–355.
18. Novoselov, K. S. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene / K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov et al. // Nature. — 2005. — Vol. 438. — P. 197–200.
19. Zhang, Y. Experimental observation of the quantum Hall effect and Berry's phase in graphene / Y. Zhang, Y.-W. Tan, H. L. Stormer, P. Kim // Nature. — 2005. — Vol. 438. — P. 201–204.
20. Novoselov, K. S. Two-dimensional atomic crystals / K. S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin et al. // Proceedings of the National Academy Sciences of U.S.A. — Vol. 102. — Washington, DC, 2005. — P. 10451–10453.
21. Kuzmenko, A. B. Universal Optical Conductance of Graphite / A. B. Kuzmenko, E. van Heumen, F. Carbone, D. van der Marel // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 100. — P. 117401–1–117401–4.
22. Nair, R. R. Fine Structure Constant Defines Visual Transparency of Graphene / R. R. Nair, P. Blake, A. N. Grigorenko et al. // Science. — 200. — Vol. 320. — P. 1308.
23. Kane, C. L. Z_2 Topological Order and the Quantum Spin Hall Effect / C. L. Kane, E. J. Mele // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 146802–1–146802–4.

24. Bernevig, B. A. Quantum Spin Hall Effect and Topological Phase Transition in HgTe Quantum Wells / B. A. Bernevig, T. L. Hughes, S.-C. Zhang // *Science*. — 2006. — Vol. 314. — P. 1757–1761.
25. Hasan, M. Z. Colloquium: Topological insulators / M. Z. Hasan, C. L. Kane // *Rev. Mod. Phys.* — 2010. — Vol. 82. — P. 3045–3067.
26. Brüne, C. Spin polarization of the quantum spin Hall edge states / C. Brüne, A. Roth, H. Buhmann et al. // *Nature Physics*. — 2012. — Vol. 8. — P. 486–491.
27. König, M. Quantum Spin Hall Insulator State in HgTe Quantum Wells / M. König, S. Wiedmann, C. Brüne et al. // *Science*. — 2007. — Vol. 318. — P. 766–770.
28. Воловик, Г. Е. Аналог квантового эффекта Холла в сверхтекучей пленке ${}^3\text{He}$ / Г. Е. Воловик // *ЖЭТФ*. — 1988. — Т. 94. — С. 123–137.
29. Fu, L. Topological Insulators in Three Dimensions / L. Fu, C. L. Kane, E. J. Mele // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 106803–1–106803–4.
30. Hsieh, D. Observation of Unconventional Quantum Spin Textures in Topological Insulators / D. Hsieh, Y. Xia, L. Wray et al. // *Science*. — 2009. — Vol. 323. — P. 919–922.
31. Xia, Y. Observation of a large-gap topological-insulator class with a single Dirac cone on the surface / Y. Xia, D. Qian, D. Hsieh et al. // *Nature Physics*. — 2009. — Vol. 5. — P. 398–402.
32. Chen, Y. L. Experimental Realization of a Three-Dimensional Topological Insulator, Bi_2Te_3 / Y. L. Chen, J. G. Analytis, J.-H. Chu et al. // *Science*. — 2009. — Vol. 325. — P. 178–181.
33. Fu, L. Superconducting Proximity Effect and Majorana Fermions at the Surface of a Topological Insulator / L. Fu, C. L. Kane // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 100. — P. 096407–1–096407–4.
34. Guigou, M. Andreev spectroscopy of doped HgTe quantum wells / M. Guigou, J. Cayssol // *Phys. Rev. B*. — 2010. — Vol. 82. — P. 115312–1–115312–7.
35. Adroguer, P. Probing the helical edge states of a topological insulator by Cooper-pair injection / P. Adroguer, C. Grenier, D. Carpentier et al. // *Phys. Rev. B*. — 2010. — Vol. 82(R). — P. 081303–1–081303–4.

36. Fu, L. Josephson current and noise at a superconductor/quantum-spin-Hall-insulator/superconductor junction / L. Fu, C. L. Kane // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79(R). — P. 161408–1–161408–4.
37. Tanaka, Y. Manipulation of the Majorana Fermion, Andreev Reflection, and Josephson Current on Topological Insulators / Y. Tanaka, T. Yokoyama, N. Nagaosa // *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — Vol. 103. — P. 107002–1–107002–4.
38. Nilsson, J. Splitting of a Cooper Pair by a Pair of Majorana Bound States / J. Nilsson, A. R. Akhmerov, C. W. J. Beenakker // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 120403–1–120403–4.
39. Linder, J. Unconventional Superconductivity on a Topological Insulator / J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2010. — Vol. 104. — P. 067001–1–067001–4.
40. Linder, J. Interplay between superconductivity and ferromagnetism on a topological insulator / J. Linder, Y. Tanaka, T. Yokoyama et al. // *Phys. Rev. B.* — 2010. — Vol. 81. — P. 184525–1–184525–11.
41. Ioselevich, P. A. Anomalous Josephson Current via Majorana Bound States in Topological Insulators / P. A. Ioselevich, M. V. Feigel'man // *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — Vol. 106. — P. 077003–1–077003–4.
42. Majorana, E. The Band Theory of Graphite / E. Majorana // *Nuovo Cimento.* — 1937. — Vol. 5. — P. 171–.
43. Volovik, G. E. Fermion zero modes on vortices in chiral superconductors / G. E. Volovik // *Письма в ЖЭТФ.* — 1999. — Т. 70. — С. 601–606.
44. Rakhmanov, A. L. Majorana fermions in pinned vortices / A. L. Rakhmanov, A. V. Rozhkov, F. Nori // *Phys. Rev. B.* — 2011. — Vol. 84. — P. 075141–1–075141–8.
45. Ioselevich, P. A. Majorana state on the surface of a disordered 3D topological insulator / P. A. Ioselevich, P. M. Ostrovsky, M. V. Feigel'man // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 86. — P. 035441–1–035441–10.
46. Araújo, M. A. N. Quantum waveguide theory of Andreev spectroscopy in multiband superconductors: The case of iron pnictides / M. A. N. Araújo, P. D. Sacramento // *Phys. Rev. B.* — 2009. — Vol. 79. — P. 174529–1–174529–7.

47. Бурмистрова, А. В. Теоретический анализ когерентного электронного транспорта в структурах, содержащих многозонные сверхпроводники с различными типами сверхпроводящего спаривания / А. В. Бурмистрова, И. А. Девятов // Письма в ЖЭТФ. — 2012. — Т. 95. — С. 263–269.
48. Shiba, H. A Hartree-Fock Theory of Transition-Metal Impurities in a Superconductor / H. Shiba // Prog. Theor. Phys. — 1973. — Vol. 50. — P. 50–73.
49. Арсеев, П. И. Резонансы в сверхпроводниках / П. И. Арсеев, Б. А. Волков // ЖЭТФ. — 1991. — Т. 100. — С. 334–338.
50. Zagoskin, A. Quantum theory of many-body systems: techniques and applications / A. Zagoskin. — Verlag New York: Springer, 1998. — P. XVI+230.
51. Гененко, Ю. А. Точный расчет тока в методе туннельного гамильтониана / Ю. А. Гененко, Ю. М. Иванченко // Теоретическая и математическая физика. — 1986. — Т. 69. — С. 142–148.
52. Cuevas, J. C. Hamiltonian approach to the transport properties of superconducting quantum point contacts / J. C. Cuevas, A. Martín-Rodero, A. L. Yeyati // Phys. Rev. B. — 1996. — Vol. 54. — P. 7366–7379.
53. Black-Schaffer, A. M. Self-consistent superconducting proximity effect at the quantum spin Hall edge / A. M. Black-Schaffer // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83. — P. 060504–1–060504–4.
54. Sun, Q.-F. Quantum Andreev effect in two-dimensional HgTe/CdTe quantum well/superconductor systems / Q.-F. Sun, Y.-X. Li, W. Long, J. Wang // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 83. — P. 115315–1–115315–5.
55. Stanescu, T. D. Proximity effect at the superconductor-topological insulator interface / T. D. Stanescu, J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. D. Sarma // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 81. — P. 241310–1–241310–4.
56. Бурмистрова, А. В. Граничные условия для контакта нормального металла с многозонными сверхпроводниками с необычными видами спаривания / А. В. Бурмистрова, И. А. Девятов // Письма в ЖЭТФ. — 2012. — Т. 96. — С. 430–435.

57. Sau, J. D. Robustness of Majorana fermions in proximity-induced superconductors / J. D. Sau, R. M. Lutchyn, S. Tewari, S. D. Sarma // Phys. Rev. B. — 2010. — Vol. 82. — P. 094522-1-094522-7.
58. Kopnin, N. B. Proximity-induced superconductivity in two-dimensional electronic systems / N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. B. — 2011. — Vol. 84. — P. 064524-1-064524-9.
59. Virtanen, P. Signatures of Rashba spin-orbit interaction in the superconducting proximity effect in helical Luttinger liquids / P. Virtanen, P. Recher // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85. — P. 035310-1-035310-12.
60. Beenakker, C. W. J. Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene / C. W. J. Beenakker // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Vol. 80. — P. 1337-1354.
61. Beenakker, C. W. J. Specular Andreev Reflection in Graphene / C. W. J. Beenakker // Phys. Rev. Lett. — 2006. — Vol. 97. — P. 067007-1-067007-4. — [arXiv:cond-mat/0604594](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0604594).
62. Titov, M. Excitation gap of a graphene channel with superconducting boundaries / M. Titov, A. Ossipov, C. W. J. Beenakker // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 045417-1-045417-8.
63. Heersche, H. B. Bipolar supercurrent in graphene / H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga et al. // Nature. — 2007. — Vol. 446. — P. 56-59.
64. Heersche, H. B. Induced superconductivity in graphene / H. B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J. B. Oostinga et al. // Solid-State Comm. — 2007. — Vol. 143. — P. 72-76.
65. Popinciuc, M. Zero-bias conductance peak and Josephson effect in graphene-*NbTiN* junctions / M. Popinciuc, V. E. Calado, X. L. Liu et al. // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 85. — P. 205404-1-205404-5.
66. Rickhaus, P. Quantum Hall Effect in Graphene with Superconducting Electrodes / P. Rickhaus, M. Weiss, L. Marot, C. Schönenberger // Nano Lett. — 2012. — Vol. 12. — P. 1942-1945.
67. Komatsu, K. Superconducting proximity effect in long superconductor/graphene/superconductor junctions: From specular Andreev reflection at zero field to the quantum Hall regime / K. Komatsu, C. Li, S. Autier-Laurent et al. // Phys. Rev. B. — 2012. — Vol. 86. — P. 115412-1-115412-9.

68. Hoppe, H. Andreev Reflection in Strong Magnetic Fields / H. Hoppe, U. Zülicke, G. Schön // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 84. — P. 1804–1807.
69. Chtchelkatchev, N. M. Conductance of a Semiconductor(2DEG) - Superconductor junction in high magnetic field / N. M. Chtchelkatchev // Письма в ЖЭТФ. — 2001. — Т. 73. — С. 100–103.
70. Chtchelkatchev, N. M. Conductance oscillations with magnetic field of a two-dimensional electron gas-superconductor junction / N. M. Chtchelkatchev, I. S. Burmistrov // Phys. Rev. B. — 2007. — Vol. 75. — P. 214510–1–214510–10.
71. Eroms, J. Andreev Reflection at High Magnetic Fields: Evidence for Electron and Hole Transport in Edge States / J. Eroms, D. Weiss, J. D. Boeck et al. // Phys. Rev. Lett. — 2005. — Vol. 95. — P. 107001–1–107001–4.
72. Akhmerov, A. R. Detection of Valley Polarization in Graphene by a Superconducting Contact / A. R. Akhmerov, C. W. J. Beenakker // Phys. Rev. Lett. — 2007. — Vol. 98. — P. 157003–1–157003–4.
73. Datta, S. Electronic Transport in Mesoscopic Systems / S. Datta. — Cambridge: Cambridge University Press, 1997. — P. 390.
74. Демиховский, В. Я. Физика квантовых низкоразмерных структур / В. Я. Демиховский, Г. А. Вугальтер. — Москва: Логос, 2000. — С. 248.
75. Sun, Q.-F. Quantum transport through a graphene nanoribbon-superconductor junction / Q.-F. Sun, X. C. Xie // J. Phys. Cond. Mat. — 2009. — Vol. 21. — P. 344204–1–344204–9.
76. Brey, L. Edge States and the Quantized Hall Effect in Graphene / L. Brey, H. A. Fertig // Phys. Rev. B. — 2006. — Vol. 73. — P. 195408–1–195408–5.
77. Abanin, D. A. Charge and Spin Transport at the Quantum Hall Edge of Graphene / D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov // Solid-State Comm. — 2007. — Vol. 143. — P. 77–85.
78. Caroli, C. Bound Fermion States on a Vortex Line in a Type II Superconductor / C. Caroli, P. G. de Gennes, J. Matricon // Phys. Lett. — 1964. — Vol. 9. — P. 307–309.
79. Mints, R. G. On the Energy Spectrum of Excitations in Type-II Superconductors / R. G. Mints, A. L. Rachmanov // Solid-State Comm. — 1975. — Vol. 16. — P. 747–750.

80. Gygi, F. Self-consistent electronic structure of a vortex line in a type-II superconductor / F. Gygi, M. Schluter // Phys. Rev. B. — 1991. — Vol. 43. — P. 7609–7621.
81. Seradjeh, B. Midgap spectrum of the fermion-vortex system / B. Seradjeh // Nucl. Phys. B. — 2008. — Vol. 805. — P. 182–189.
82. Seradjeh, B. Vortices, Zero Modes, and Fractionalization in the Bilayer-Graphene Exciton Condensate / B. Seradjeh, H. Weber, M. Franz // Phys. Rev. Lett. — 2008. — Vol. 101. — P. 246404–1–246404–4.
83. Bergman, D. L. Near-zero modes in condensate phases of the Dirac theory on the honeycomb lattice / D. L. Bergman, K. L. Hur // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 79. — P. 184520–1–184520–25.
84. Ghaemi, P. Near-Zero Modes in Superconducting Graphene / P. Ghaemi, F. Wilczek. — 2007. — [arXiv:0709.2626](https://arxiv.org/abs/0709.2626).
85. Jackiw, R. Zero Modes of the Vortex Fermion System / R. Jackiw, P. Rossi // Nucl. Phys. B. — 1981. — Vol. 190. — P. 681–691.
86. Hess, H. F. Scanning-Tunneling-Microscope Observation of the Abrikosov Flux Lattice and the Density of States near and inside a Fluxoid / H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes et al. // Phys. Rev. Lett. — 1989. — Vol. 62. — P. 214–216.
87. Hess, H. F. Vortex-Core Structure Observed with a Scanning Tunneling Microscope / H. F. Hess, R. B. Robinson, J. V. Waszczak // Phys. Rev. Lett. — 1990. — Vol. 64. — P. 2711–2714.
88. Giubileo, F. Two-Gap State Density in MgB_2 : A True Bulk Property Or A Proximity Effect? / F. Giubileo, D. Roditchev, W. Sacks et al. // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 87. — P. 177008–1–177008–4.
89. Maggio-Aprile, I. Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ / I. Maggio-Aprile, C. Renner, A. Erb et al. // Phys. Rev. Lett. — 1995. — Vol. 75. — P. 2754–2757.
90. Pan, S. H. STM Studies of the Electronic Structure of Vortex Cores in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ / S. H. Pan, E. W. Hudson, A. K. Gupta et al. // Phys. Rev. Lett. — 2000. — Vol. 85. — P. 1536–1539.

91. Hoogenboom, B. W. Low-energy structures in vortex core tunneling spectra in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ / B. W. Hoogenboom, C. Renner, B. Revaz et al. // *Physica C*. — 2000. — Vol. 332. — P. 440–444.
92. Guillamon, I. Superconducting Density of States and Vortex Cores of $2H - NbS_2$ / I. Guillamon, H. Suderow, S. Vieira et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 166407–1–166407–4.
93. Sonier, J. E. Muon-Spin Rotation Measurements of the Magnetic Field Dependence of the Vortex-Core Radius and Magnetic Penetration Depth in $NbSe_2$ / J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — P. 1742–1745.
94. Sonier, J. E. Measurement of the Fundamental Length Scales in the Vortex State of $YBa_2Cu_3O_{6.60}$ / J. E. Sonier, J. H. Brewer, R. F. Kiefl et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 1997. — Vol. 79. — P. 2875–2878.
95. Sonier, J. E. Expansion of the vortex cores in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ at low magnetic fields / J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer et al. // *Phys. Rev. B*. — 1999. — Vol. 59. — P. R729–R732.
96. Eskildsen, M. R. Vortex Imaging in the π Band of Magnesium Diboride / M. R. Eskildsen, M. Kugler, S. Tanaka et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2002. — Vol. 89. — P. 187003–1–187003–4.
97. Salman, Z. Magnetic-Field Effects on the Size of Vortices below the Surface of $NbSe_2$ Detected Using Low Energy β -NMR / Z. Salman, D. Wang, K. H. Chow et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — Vol. 98. — P. 167001–1–167001–4.
98. Beyer, A. D. Scanning tunneling spectroscopic evidence for magnetic-field-induced microscopic orders in the high- T_c superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ / A. D. Beyer, M. S. Grinolds, M. L. Teague et al. // *Europhys. Lett.* — 2009. — Vol. 89. — P. 37005–p1–37005–p6.
99. Chen, C.-T. Effects of competing orders and quantum phase fluctuations on the low-energy excitations and pseudogap phenomena of cuprate superconductors / C.-T. Chen, A. D. Beyer, N.-C. Yeh // *Solid-State Comm.* — 2007. — Vol. 143. — P. 447–452.
100. Titov, M. Josephson effect in ballistic graphene / M. Titov, C. W. J. Beenakker // *Phys. Rev. B*. — 2006. — Vol. 74. — P. 041401–1–041401–4.

101. Burset, P. Microscopic theory of the proximity effect in superconductor-graphene nanostructures / P. Burset, A. L. Yeyati, A. Martín-Rodero // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 205425–1–205425–9.
102. Боголюбов, Н. Н. О новом методе в теории сверхпроводимости / Н. Н. Боголюбов // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 58–65.
103. де Жен, П. Сверхпроводимость металлов и сплавов / П. де Жен; Под ред. Л. П. Горькова. — Москва: Мир, 1968. — С. 280.
104. Brey, L. Electronic states of graphene nanoribbons studied with the Dirac equation / L. Brey, H. A. Fertig // *Phys. Rev. B.* — 2006. — Vol. 73. — P. 235411–1–235411–5.
105. Akhmerov, A. R. Boundary conditions for Dirac fermions on a terminated honeycomb lattice / A. R. Akhmerov, C. W. J. Beenakker // *Phys. Rev. B.* — 2008. — Vol. 77. — P. 085423–1–085423–10.
106. Arseyev, P. I. Resonance impurities in superconductors / P. I. Arseyev, B. A. Volkov // *Solid-State Comm.* — 1991. — Vol. 78. — P. 373–376.
107. Kopnin, N. B. Theory of nonequilibrium superconductivity / N. B. Kopnin. — Oxford: Oxford University Press, 2001. — P. 344.
108. Горьков, Л. П. Об энергетическом спектре сверхпроводников / Л. П. Горьков // *ЖЭТФ.* — 1958. — Т. 34. — С. 735–739.
109. Nambu, Y. Quasi-Particles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity / Y. Nambu // *Phys. Rev.* — 1960. — Vol. 117. — P. 648–663.
110. Eilenberger, G. Transformation of Gorkov's Equation for Type II Superconductors into Transport-Like Equations / G. Eilenberger // *Z. f. Physik.* — 1968. — Vol. 214. — P. 195–213.
111. Usadel, K. D. Generalized Diffusion Equation for Superconducting Alloys / K. D. Usadel // *Phys. Rev. Lett.* — 1970. — Vol. 25. — P. 507–509.
112. Свидзинский, А. В. Пространственно-неоднородные задачи теории сверхпроводимости / А. В. Свидзинский. — Москва: Наука, 1982. — С. 312.
113. Горьков, Л. П. Особенности вязкого течения вихрей в сверхпроводящих сплавах вблизи критической температуры / Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин // *ЖЭТФ.* — 1973. — Т. 64. — С. 356–370.

114. Qi, X.-L. Topological insulators and superconductors / X.-L. Qi, S.-C. Zhang // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Vol. 83. — P. 1057–1110.
115. König, M. The Quantum Spin Hall Effect: Theory and Experiment / M. König, H. Buhmann, L. W. Molenkamp et al. // J. Phys. Soc. Japan. — 2008. — Vol. 77. — P. 031007–1–031007–14.
116. Mel'nikov, A. S. Electronic structure and heat transport in multivortex configurations in mesoscopic superconductors / A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, M. A. Silaev // Phys. Rev. B. — 2008. — Vol. 78. — P. 064513–1–064513–20.
117. Мельников, А. С. Математическое моделирование вихревых состояний в мезоскопических сверхпроводниках / А. С. Мельников, Д. А. Рыжов, М. А. Силаев, И. А. Шерешевский // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. — 2010. — Т. 2. — С. 57–117.
118. Hansen, E. B. The bound excitations of a single vortex in a pure type II superconductor / E. B. Hansen // Phys. Lett. A. — 1968. — Vol. 27. — P. 576–577.
119. Volovik, G. E. The Universe in a Helium Droplet / G. E. Volovik. — Oxford: Clarendon Press, 2003. — P. 530.
120. Volovik, G. E. Vortex motion in fermi-superfluids and Callan - Harvey effect / G. E. Volovik // Письма в ЖЭТФ. — 1993. — Т. 57. — С. 233–237.
121. Kramer, L. Core Structure and Low-Energy Spectrum of Isolated Vortex Lines in Clean Superconductors at $T \ll T_c$ / L. Kramer, W. Pesch // Z. f. Physik. — 1974. — Vol. 269. — P. 59–64.
122. Kopnin, N. B. Resonant absorption at the vortex-core states in d-wave superconductors / N. B. Kopnin // Phys. Rev. B. — 1998. — Vol. 57. — P. 11775–11785.
123. Mel'nikov, A. S. Aharonov-Bohm Effect for Quasiparticles around a Vortex Line in a d-Wave Superconductor / A. S. Mel'nikov // Phys. Rev. Lett. — 2001. — Vol. 86. — P. 4108–4111.
124. Лойко, С. О. Влияние симметрии электронных состояний ВТСП на вольт-амперные характеристики *SIS* - контактов / С. О. Лойко, Н. К. Федоров, П. И. Арсеев // ЖЭТФ. — 2002. — Т. 121. — С. 453–461.

125. Koshelev, A. E. Mixed State of a Dirty Two-Band Superconductor: Application to MgB_2 / A. E. Koshelev, A. A. Golubov // Phys. Rev. Lett. — 2003. — Vol. 90. — P. 177002–1–177002–4.
126. Renner, C. Scanning Tunneling Spectroscopy of a Vortex Core from the Clean to the Dirty Limit / C. Renner, A. D. Kent, P. Niedermann, Ø. Fischer // Phys. Rev. Lett. — 1991. — Vol. 67. — P. 1650–1653.
127. Fagas, G. Geometrical enhancement of the proximity effect in quantum wires with extended superconducting tunnel contacts / G. Fagas, G. Tkachov, A. Pfund, K. Richter // Phys. Rev. B. — 2005. — Vol. 71. — P. 224510–1–224510–10.
128. Заикин, А. Д. О влиянии внешних полей и примесей на ток Джозефсона в SNINS контактах / А. Д. Заикин, Г. Ф. Жарков // Физ. низк. темп. — 1981. — Т. 7. — С. 375–378.
129. Belzig, W. Quasiclassical Green's function approach to mesoscopic superconductivity / W. Belzig, F. K. Wilhelm, C. Bruder et al. // Superlattices and Microstructures. — 1999. — Vol. 25. — P. 1251–1288.
130. Горьков, Л. П. Вязкое течение вихрей в сверхпроводящих сплавах второго рода / Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин // ЖЭТФ. — 1974. — Т. 65. — С. 396–410.
131. Базь, А. И. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике / А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов. — 2-е, перераб. изд. — Москва: Наука, 1971. — С. 544.
132. Golubov, A. A. Abrikosov vortex core structure in a proximity-effect multilayer / A. A. Golubov // Czechoslovak Journal of Physics. — 1996. — Vol. 242. — P. 569–570.
133. Куприянов, М. Ю. Влияние прозрачности SN -границ на критический ток “грязных” $SN-N-NS$ мостиков переменной толщины / М. Ю. Куприянов // Сверхпроводимость: физика, химия, техника. — 1989. — Т. 2. — С. 5–16.
134. Schopohl, N. Quasiparticle spectrum around a vortex line in a d-wave superconductor / N. Schopohl, K. Maki // Phys. Rev. B. — 1995. — Vol. 52. — P. 490–493.
135. Blonder, G. E. Transition from metallic to tunneling regimes in superconducting microconstrictions: Excess current, charge imbalance, and supercurrent conversion / G. E. Blonder, M. Tinkham, T. M. Klapwijk // Phys. Rev. B. — 1982. — Vol. 25. — P. 4515–4532.

136. Batov, I. E. Andreev reflection and strongly enhanced magnetoresistance oscillations in $Ga_xIn_{1-x}As/InP$ heterostructures with superconducting contacts / I. E. Batov, T. Schäpers, N. M. Chtchelkatchev et al. // *Phys. Rev. B.* — 2007. — Vol. 76. — P. 115313–1–115313–5.
137. Büttiker, M. Scattering Theory of Thermal and Excess Noise in Open Conductors / M. Büttiker // *Phys. Rev. Lett.* — 1990. — Vol. 65. — P. 2901–2904.
138. Schottky, W. Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern / W. Schottky // *Ann. Phys. (Leipzig).* — 1918. — Bd. 57. — S. 541–567.
139. Landauer, R. Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction / R. Landauer // *IBM J. Res. Dev.* — 1957. — Vol. 1. — P. 233–231.
140. Landauer, R. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction / R. Landauer // *IBM J. Res. Dev.* — 1988. — Vol. 32. — P. 306–316.
141. Beenakker, C. W. J. Quantum Transport in Semiconductor Nanostructures / C. W. J. Beenakker, H. van Houten // *Solid State Physics: Advances in Research and Applications* / Ed. by H. Ehrenreich, D. Turnbull. — San Diego: Academic Press, 1991. — Vol. 44. — P. 1–228.
142. Aladyshkin, A. Y. Hybridization and interference effects for localized superconducting states in strong magnetic field / A. Y. Aladyshkin, A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov et al. // *Phys. Rev. B.* — 2012. — Vol. 85. — P. 184528–1–184528–11.
143. Büttiker, M. Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors / M. Büttiker // *Phys. Rev. B.* — 1988. — Vol. 38. — P. 9375–9389.
144. Halperin, B. I. Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential / B. I. Halperin // *Phys. Rev. B.* — 1982. — Vol. 25. — P. 2185–2190.
145. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. — Москва: Наука, 1979. — С. 832.
146. Барут, А. О. Теория представлений групп и её приложения / А. О. Барут, Р. Рончка; Под ред. Я. А. Смородинского. — Москва: Издательство “Мир”, 1980. — Т. 1. — С. 456.
147. Mello, P. A. Macroscopic approach to multichannel disordered conductors / P. A. Mello, P. Pereyra, N. Kumar // *Ann. Phys. (NY).* — 1988. — Vol. 181. — P. 290–317.

148. Beenakker, C. W. J. Random-matrix theory of quantum transport / C. W. J. Beenakker // *Rev. Mod. Phys.* — 1997. — Vol. 69. — P. 731–808.
149. Haar, A. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen / A. Haar // *Ann. Math.* — 1933. — Bd. 34. — S. 147–169.
150. Abanin, D. A. Spin-Filtered Edge States and Quantum Hall Effect in Graphene / D. A. Abanin, P. A. Lee, L. S. Levitov // *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — Vol. 96. — P. 176803–1–176803–4.
151. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика в десяти томах. Том III. Квантовая механика. Нерелятивистская теория / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц; Под ред. Л. П. Питаевского. — 4-е, испр. изд. — Москва: Наука, 1989. — С. 768.
152. Волков, Б. А. Безмассовые двумерные электроны в инверсном контакте / Б. А. Волков, О. А. Панкратов // *Письма в ЖЭТФ.* — 1985. — Т. 42. — С. 145–148.
153. Zhou, B. Finite Size Effects on Helical Edge States in a Quantum Spin-Hall System / B. Zhou, H.-Z. Lu, R.-L. Chu et al. // *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 101. — P. 246807–1–246807–4.
154. Mello, P. A. Symmetries and Parametrization of the Transfer-Matrix in Electronic Quantum Transport-Theory / P. A. Mello, J.-L. Pichard // *J. Phys. (France) I.* — 1991. — Vol. 1. — P. 493–513.
155. Martin, T. Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems / T. Martin, R. Landauer // *Phys. Rev. B.* — 1992. — Vol. 45. — P. 1742–1755.
156. Mello, P. A. Maximum-entropy model for quantum-mechanical interference effects in metallic conductors / P. A. Mello, A. D. Stone // *Phys. Rev. B.* — 1991. — Vol. 44. — P. 3559–3576.
157. Baranger, H. U. Mesoscopic Transport through Chaotic Cavities: A Random S-Matrix Theory Approach / H. U. Baranger, P. A. Mello // *Phys. Rev. Lett.* — 1994. — Vol. 73. — P. 142–145.

Приложение А

А.1. Вывод уравнений (1.16), (1.18)

В данном приложении будет выведено уравнение (1.18) с граничными условиями и его решение, необходимое для того чтобы функция (1.16) удовлетворяла равенству (1.14).

Для простоты вычислений будем работать сразу в приближении локального туннелирования $T(\mathbf{r}, \mathbf{R}) = T(\mathbf{R})\delta(\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{R})\delta(z)$. В этом случае уравнение (1.16) можно переписать в виде уравнения с источником в правой части:

$$\check{G}_S^{-1}(\mathbf{r}_1)\check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2) = -d\check{T}(\mathbf{r}_{1\parallel})\check{G}_{2D}(\mathbf{r}_{1\parallel}, \mathbf{R}_2)\delta(z_1). \quad (\text{A.1})$$

Проинтегрировав это уравнение по z в положительной окрестности нуля, получим эффективные граничные условия на функцию $\check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2)$:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z_1} \check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2) \right|_{z_1=0} = -\frac{dm_S}{\hbar^2} \check{T}(\mathbf{r}_{1\parallel})\check{G}_{2D}(\mathbf{r}_{1\parallel}, \mathbf{R}_2). \quad (\text{A.2})$$

Используя это граничное условие можно решать уравнение (A.1) в области $z > 0$ без источника в правой части. Для нахождения решения воспользуемся формулой Грина:

$$\check{G}_T(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{\hbar}{2m_S} \int d^2 R' \left[\frac{\partial}{\partial z'} \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}', z') \check{G}_T(\mathbf{R}', z', \mathbf{R}_2) - \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{R}', z') \frac{\partial}{\partial z'} \check{G}_T(\mathbf{R}', z', \mathbf{R}_2) \right] \Bigg|_{z'=0}, \quad (\text{A.3})$$

где $\check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ – функция Грина уравнения (1.18). Окончательно, для того чтобы удовлетворить граничным условиям (A.2), необходимо и достаточно, чтобы в правой части уравнения (A.3) остался лишь второй член. Иными словами, должно быть выполнено условие $\partial \check{G}_S^{(+)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) / \partial z_2 \Big|_{z_2=0} = 0$, которое удовлетворяется решением из основного текста (1.19). При этом уравнение (A.3) преобразуется к требуемому виду (1.16).

Приложение Б

Б.1. Усреднение функций Грина вихревого состояния сверхпроводника по направлениям траекторий

Это приложение посвящено выводу формул (2.23) для собственно энергетических частей Σ_1 , Σ_2 и Σ_2^+ в модели некогерентного туннелирования $\Sigma_1 = i\Gamma \langle g_S \rangle$, $\Sigma_2 = i\Gamma \langle f_S \rangle$, где треугольные скобки означают усреднение по реализациям примесей, эквивалентное среднему по направлениям импульса Ферми \mathbf{p}_S в сверхпроводнике. Будем придерживаться следующего приближения (2.20) для нормальной функции Грина сверхпроводника в вихревом состоянии

$$g_S^{R(A)} = i\zeta_S^{R(A)} = \wp \frac{i\hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q [E - \epsilon_0]} \pm \frac{\pi \hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q} \delta(E - \epsilon_0), \quad (\text{Б.1})$$

выделив в ней явным образом действительную (дельта-функциональную) и мнимую части (главное значение \wp).

Проведём усреднение по азимутальному углу направления траектории α (при фиксированной координате $\mathbf{R} = (\rho, \phi)$), учитывая чётности функций при инверсии оси Os . Тогда

$$\Sigma_2 e^{-i\phi} = \Sigma_2^{\dagger} e^{i\phi} = \Gamma \langle \theta_S(s)s - \zeta_S(s)b \rangle / \rho = \Gamma \Phi + \Sigma_2^{loc}, \quad (\text{Б.2a})$$

$$\Sigma_1 = -\Gamma \langle \zeta_S(s) \rangle; \quad \Phi(\rho) = \wp \langle I(s) \text{sgn}(s) / 2Q [E - \epsilon_0] \rangle. \quad (\text{Б.2b})$$

Здесь $I(s) = 2 \int_0^s (E - \Delta_0 b / \rho) e^{-K(s')} ds'$. В недиагональных компонентах индуцированных потенциалов удобно выделить локализованную в коре сверхпроводника часть $\Sigma_2^{loc} = \Gamma \langle \zeta(s)b / \rho \rangle$ и адиабатическую асимптотику $\Phi = \langle \theta(s)s / \rho \rangle$. В логарифмическом приближении по параметру E / Δ_{∞} можно пренебречь мнимой частью делокализованной функции Φ и рассматривать её лишь в виде главного значения (Б.2b). В этом случае Φ может быть учтена как адиабатическая индуцированная сверхпроводящая щель, малая вблизи кора сверхпроводящего вихря и выходящая на асимптотику $\Phi \rightarrow 1$ при $\rho \gg \xi_S$. После разбиения всех функций на

действительные и мнимые части аналогично (Б.1) проведём усреднение по углу α :

$$\text{Re}\Sigma_2^{loc} = \Gamma \left\langle \frac{\hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q\Omega\rho} \left[1 - \text{Re} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Omega^2 \rho^2}} \right] \right\rangle_z, \quad (\text{Б.3a})$$

$$\text{Im}\Sigma_2^{loc} = \pm \Gamma \left\langle \text{Re} \frac{E \hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q\rho\Omega\sqrt{\Omega^2 \rho^2 - E^2}} \right\rangle_z, \quad (\text{Б.3b})$$

$$\text{Re}\Sigma_1 = -\text{sign}(E)\Gamma \left\langle \text{Re} \frac{\hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q\sqrt{E^2 - \Omega^2 \rho^2}} \right\rangle_z, \quad (\text{Б.3c})$$

$$\text{Im}\Sigma_1 = \pm \Gamma \left\langle \text{Re} \frac{\hbar v_{\parallel} e^{-K}}{2Q\sqrt{\Omega^2 \rho^2 - E^2}} \right\rangle_z. \quad (\text{Б.3d})$$

Здесь верхний и нижний знаки мнимых частей соответствуют запаздывающему и опережающему собственно энергетическому члену соответственно. Кроме того, мы ввели обозначения $\langle \dots \rangle_z = \frac{1}{2} \int_0^\pi (\dots) \sin \chi_p d\chi_p$ для усреднения по полярному углу χ_p импульса Ферми \mathbf{p}_S и $\Omega = d\epsilon_0/db$. Необходимо отметить, что все вычисления, проделанные в этом приложении, проведены в первом порядке по малому параметру b/ρ , поскольку в случае, когда этот параметр не мал, как показано в основном тексте, достаточно использовать дальнюю асимптотику собственно энергетических частей (2.17).

Приложение В

В.1. Матричная декомпозиция

Данное приложение посвящено выводу формулы (3.14) для так называемой полярной декомпозиции матриц рассеяния, удовлетворяющих свойствам (3.10, 3.12). Разложение матриц с определёнными свойствами в полярную декомпозицию изучалось в ряде работ [147, 154–156]. В случае унитарных матриц, удовлетворяющих симметрии БдЖ (3.12), будем действовать аналогичным образом.

Любая $2N \times 2N$ - матрица рассеяния \hat{X} , удовлетворяющая симметрии уравнений БдЖ (3.12), может быть представлена в блочном виде

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{a} & \hat{b} \\ -\hat{b}^* & \hat{a} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Набор таких матриц образует компактную группу симплектических матриц $\text{Sp}(2N)$. Условие унитарности этой матрицы (3.10) накладывает дополнительные ограничения на её блоки:

$$\hat{a}\hat{a}^+ + \hat{b}\hat{b}^+ = \hat{1}, \quad \hat{a}^+\hat{a} + \hat{b}^T\hat{b}^* = \hat{1}, \quad (\text{B.2a})$$

$$-\hat{a}\hat{b}^T + \hat{b}\hat{a}^T = 0, \quad \hat{a}^+\hat{b} - \hat{b}^T\hat{a}^* = 0. \quad (\text{B.2b})$$

При этом эрмитова матрица $\hat{b}\hat{b}^+$ может быть приведена к диагональному виду $\hat{b}\hat{b}^+ = \hat{U}\hat{\tau}_0\hat{U}^+$ с помощью некоторой унитарной матрицы \hat{U} , где $\hat{\tau}_0 = \text{diag}(\tau_1^0, \dots, \tau_N^0)$ – диагональная матрица собственных значений рассматриваемой. Согласно первому уравнению из (B.2a) одновременно с помощью той же унитарной матрицы диагонализуется и $\hat{a}\hat{a}^+ = \hat{U}(1 - \hat{\tau}_0)\hat{U}^+$. Предполагая для простоты, что ни одно из собственных значений $\tau_n^0 \neq 0, 1$ не обращается в нуль или единицу,¹ можно ввести новые матрицы $\hat{V} = (\hat{1} - \hat{\tau}_0)^{-1/2}\hat{U}^+\hat{a}$, $\hat{W} = \hat{\tau}_0^{-1/2}\hat{U}^+\hat{b}$, которые, как легко проверить, также унитарные. Иными словами, мы можем одновременно привести блоки \hat{a} и \hat{b} матрицы \hat{X} к диагональному виду, используя три унитарные и одну диагональную матрицы: $\hat{a} = \hat{U}\sqrt{1 - \hat{\tau}_0}\hat{V}$, $\hat{b} = \hat{U}\sqrt{\hat{\tau}_0}\hat{W}$.

Применив второе уравнение из (B.2a), легко вывести соотношение $\hat{V}^+\hat{\tau}_0\hat{V} = \hat{W}^T\hat{\tau}_0\hat{W}^*$ между матрицами \hat{V} и \hat{W} . Вводя обозначение для унитарной матрицы $\hat{\iota} = \hat{W}^*\hat{V}^+$, легко убедиться в её коммутации с $\hat{\tau}_0$: $\hat{\iota}\hat{\tau}_0 = \hat{\tau}_0\hat{\iota}$. Кроме того, из соотношения (B.2b) следует, что эта матрица симметрична $\hat{\iota}^T = \hat{\iota}$. На основе полученных свойств матрицы $\hat{\iota}$, введём унитарные

¹ Не рассмотренные нами предельные случаи подробно обсуждаются, например, в работе [155]. Кроме того, этот вопрос можно решить с точностью до типичности, доопределив разложение по непрерывности.

матрицы $\hat{A} = \hat{U}\hat{t}^{1/2}$, $\hat{B} = (\hat{t}^+)^{1/2}\hat{V}$ и получим искомую полярную декомпозицию симплектической матрицы \hat{X} с диагональной матрицей $\hat{\tau}_0 = \text{diag}(\tau_1^0, \dots, \tau_N^0)$ собственных значений $\{\tau_1^0, \dots, \tau_k^0\}$ матрицы $\hat{b}^+\hat{b}$:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{A} & 0 \\ 0 & \hat{A}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \hat{\tau}_0} & \sqrt{\hat{\tau}_0} \\ -\sqrt{\hat{\tau}_0} & \sqrt{1 - \hat{\tau}_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{B} & 0 \\ 0 & \hat{B}^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

В.2. Вывод функции распределения матрицы по инвариантной мере на компактной симплектической группе $\text{Sp}(2N)$

В этом приложении будет выведено выражение, аналогичное (3.21), для функции распределения случайной матрицы \hat{X} , распределённой по инвариантной мере на компактной симплектической группе, по переменным полярной декомпозиции (B.3). Будем действовать по аналогии с выкладками, проделанными в работах [147, 156, 157].

Как было показано в предыдущем разделе, любую симплектическую матрицу рассеяния \hat{X} можно представить в виде

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} \hat{A}\sqrt{1 - \hat{\tau}_0}\hat{B} & \hat{A}\sqrt{\hat{\tau}_0}\hat{B}^* \\ -\hat{A}^*\sqrt{\hat{\tau}_0}\hat{B} & \hat{A}^*\sqrt{1 - \hat{\tau}_0}\hat{B}^* \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

через унитарные матрицы \hat{A} , \hat{B} и диагональную матрицу $\hat{\tau}_0$ собственных значений $\{\tau_m^0\}$ квадрата недиагонального блока матрицы \hat{X} .

Согласно [147], мера Хаара для произвольной унитарной матрицы может быть найдена на основе выражений для квадрата дифференциала длины дуги $d\sigma^2 = \text{tr}(d\hat{X}^+d\hat{X})$ через дифференциал матрицы $d\hat{X}$ и $d\sigma^2 = \sum_{a,b} g_{ab}dx^a dx^b$ через метрический тензор g_{ab} . Зная выражение для симметричной матрицы метрического тензора из двух предыдущих уравнений можно записать дифференциал меры Хаара для исходной матрицы

$$d\mu(\hat{X}) = \sqrt{\det(\hat{g})} \prod_a dx^a. \quad (\text{B.5})$$

При этом в последних двух уравнениях набор $\{x_a\}$ является полным базисом независимых переменных. Для диагональных матриц $\hat{t} \in \{\hat{\tau}_0, \hat{1} - \hat{\tau}_0\}$ базисом является набор действительных собственных значений $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1^0, \dots, \tau_N^0)$. Базис независимых переменных для унитарных матриц \hat{A} [\hat{B}] может быть получен из дифференцирования условия их унитарности:

$$d\hat{A}^+ \cdot \hat{A} + \hat{A}^+ \cdot d\hat{A} = 0, \quad d\hat{B} \cdot \hat{B}^+ + \hat{B} \cdot d\hat{B}^+ = 0,$$

в виде независимых переменных $d\xi_i^0 = dx_{ii}$, $d\xi_\kappa = dx_{ij}$, $d\xi_\kappa^* = dx_{ij}^* = dx_{ji}$ [$d\eta_i^0 = dy_{ii}$, $d\eta_\kappa = dy_{ij}$, $d\eta_\kappa^* = dy_{ij}^* = dy_{ji}$] ($i < j$, $\kappa = (i - 1) \cdot N + j$) эрмитовых матриц $d\hat{x} = i\hat{A}^+d\hat{A}$ [$d\hat{y} = i\hat{B}d\hat{B}^+$].

Действительные диагональные

$$d\xi^0 = (d\xi_1^0, \dots, d\xi_N^0), \quad d\eta^0 = (d\eta_1^0, \dots, d\eta_N^0)$$

и комплексные недиагональные компоненты

$$d\xi = (d\xi_1, \dots, d\xi_{N(N-1)/2}, d\xi_1^*, \dots, d\xi_{N(N-1)/2}^*) ,$$

$$d\eta = (d\eta_1, \dots, d\eta_{N(N-1)/2}, d\eta_1^*, \dots, d\eta_{N(N-1)/2}^*)$$

этих матриц образуют для каждой из них базис из N^2 независимых скалярных элементов.

Для комплексно сопряжённых матриц \hat{A}^*, \hat{B}^* базис совпадает.

Поскольку блоки матрицы \hat{X} (B.4) имеют вид произведения $\hat{P} = \hat{u}\sqrt{\hat{t}}\hat{v}$ трёх матриц из набора $\hat{u} \in \{\hat{A}, \hat{A}^*\}$, $\hat{v} \in \{\hat{B}, \hat{B}^*\}$, $\hat{t} \in \{\hat{\tau}_0, \hat{1} - \hat{\tau}_0\}$, мы можем записать квадрат дифференциала длины дуги каждого такого блока в выбранном выше базисе

$$\text{tr} \left(d\hat{P}d\hat{P}^+ \right) = \text{tr} \left[\hat{t} (d\hat{x} \cdot d\hat{x} + d\hat{y} \cdot d\hat{y}) + \frac{d\hat{t} \cdot d\hat{t}}{4\hat{t}} - 2d\hat{x} \cdot \sqrt{\hat{t}} \cdot d\hat{y} \cdot \sqrt{\hat{t}} \right] .$$

Здесь и далее мы для простоты пишем дроби, состоящие из диагональных матриц, так как эти матрицы коммутируют между собой и с ними можно обращаться как с обычными числами. Благодаря тому, что квадрат элемента дуги всей матрицы \hat{X} складывается из квадратов элементов дуги отдельных блоков $\text{tr}(d\hat{X}d\hat{X}^+) = \text{tr}(d\hat{a}d\hat{a}^+) + \text{tr}(d\hat{b}d\hat{b}^+) + \text{tr}(d\hat{a}^*d\hat{a}^T) + \text{tr}(d\hat{b}^*d\hat{b}^T)$, его можно представить в виде:

$$\text{tr} \left(d\hat{S}d\hat{S}^+ \right) = \text{tr} \left[\frac{d\hat{\tau}_0 \cdot d\hat{\tau}_0}{2\hat{\tau}_0(\hat{1} - \hat{\tau}_0)} + 2(d\hat{x} \cdot d\hat{x} + d\hat{y} \cdot d\hat{y}) + 4 \left(d\hat{x} \cdot \sqrt{\hat{\tau}_0} \cdot d\hat{y}^T \cdot \sqrt{\hat{\tau}_0} - d\hat{x} \cdot \sqrt{\hat{1} - \hat{\tau}_0} \cdot d\hat{y} \cdot \sqrt{\hat{1} - \hat{\tau}_0} \right) \right] ,$$

где использовано свойство следа $\text{tr}(\hat{C}) = \text{tr}(\hat{C}^T)$ произвольной матрицы \hat{C} .

$$\text{tr} \left(d\hat{S}d\hat{S}^+ \right) = 2 \sum_{i=1}^N \left[\frac{d\tau_i^0 d\tau_i^0}{4\tau_i^0(1 - \tau_i^0)} + d\xi_i^0 d\xi_i^0 + d\eta_i^0 d\eta_i^0 + 2d\xi_i^0 d\eta_i^0 (2\tau_i^0 - 1) \right] + 2 \sum_{\kappa=1}^{N(N-1)/2} [d\xi_\kappa d\xi_\kappa^* + d\eta_\kappa d\eta_\kappa^* + 2q_\kappa d\xi_\kappa d\eta_\kappa - 2p_\kappa d\xi_\kappa d\eta_\kappa^* + c.c.] .$$

Здесь $p_\kappa = \sqrt{(1 - \tau_i^0)(1 - \tau_j^0)}$, $q_\kappa = \sqrt{\tau_i^0 \tau_j^0}$, суммирование по индексу κ в пределах от 1 до $N(N-1)/2$ соответствует сумме по индексам i, j при условии $i < j$, а за “с.с.” обозначено комплексно сопряжённое выражение по отношению к записанному перед ним в скобках.

Представляя недиагональные элементы типа $2d\xi_\kappa d\eta_\kappa$ в симметричной форме $d\xi_\kappa d\eta_\kappa + d\eta_\kappa d\xi_\kappa$ запишем симметричную матрицу метрического тензора рассматриваемой группы матриц в блочно-диагональном виде $\hat{g} = 2\text{diag}(\hat{d}_\tau, \hat{d}_0, \hat{d})$, где $\hat{d}_\tau = [4\hat{\tau}_0(\hat{1} - \hat{\tau}_0)]^{-1}$,

$$\hat{d}_0 = \begin{pmatrix} \hat{1} & 2\hat{\tau}_0 - \hat{1} \\ 2\hat{\tau}_0 - \hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}, \quad \hat{d} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1}_\kappa & \hat{q}_\kappa & -\hat{p}_\kappa \\ \hat{1}_\kappa & 0 & -\hat{p}_\kappa & \hat{q}_\kappa \\ \hat{q}_\kappa & -\hat{p}_\kappa & 0 & \hat{1}_\kappa \\ -\hat{p}_\kappa & \hat{q}_\kappa & \hat{1}_\kappa & 0 \end{pmatrix}.$$

Детерминант метрического тензора, входящий в уравнение (B.5) для функции распределения, равен с точностью до постоянного множителя произведению детерминантов его блоков $\det \hat{g} \sim \det \hat{d}_\tau \cdot \det \hat{d}_0 \cdot \det \hat{d}$, где

$$\begin{aligned} \det \hat{d}_\tau &= \prod_i [4\tau_i^0(1 - \tau_i^0)]^{-1}, \\ \det \hat{d}_0 &= \prod_i [1 - (2\tau_i^0 - 1)^2] = (\det \hat{d}_\tau)^{-1}, \\ \det \hat{d} &= \prod_\kappa [(p_\kappa^2 - q_\kappa^2)^2 - 2(p_\kappa^2 + q_\kappa^2) + 1] = \prod_{i < j} (\tau_i^0 - \tau_j^0)^2. \end{aligned}$$

Окончательно, принимая во внимание тот факт, что дифференциал меры Хаара унитарных матриц есть просто произведение дифференциалов независимых переменных $d\mu(A) = d^N \xi^0 \cdot d^{N(N-1)} \xi$, получим окончательное выражение (3.21) для распределения симплектической матрицы \hat{X} по собственным значениям τ_m^0 квадрата её недиагонального элемента:

$$d\mu(\hat{X}) = \prod_{i < j} |\tau_i^0 - \tau_j^0| \prod_i d\tau_i^0 d\mu(\hat{A}) d\mu(\hat{B})$$

В.3. Усреднение величин, зависящих от случайных матриц, по мере Хаара на группе

Данное приложение посвящено технике вычисления средних значений кондактанса и его дисперсии по всем матрицам распределения (3.21), входящим в полярную декомпозицию матриц \hat{T}_m , (3.1) или лишь по унитарным матрицам фаз \hat{A}_m, \hat{B}_m этого распределения (3.2). На основании полярной декомпозиции (3.14) матриц \hat{T}_m выражение для блока $\hat{s}_{eh} = \hat{t}_{e+} \hat{l}_{+h} + \hat{t}_{e-} \hat{l}_{-h}$ полной матрицы рассеяния $\hat{S} = \hat{T}_2 \hat{\Lambda} \hat{T}_1$ может быть записано в следующем виде:

$$\hat{s}_{eh} = \hat{A}_2 \left(\sqrt{1 - \tau_2} \hat{F} \sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_2} \hat{F}^* \sqrt{1 - \tau_1} \right) \hat{B}_1^*$$

Здесь введены обозначения $\hat{l} \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag}(e^{ik_1 W}, \dots, e^{ik_N W})$ для диагонального блока матрицы $\hat{\Lambda} = \text{diag}(\hat{l}, \hat{l}^+)$ и $\hat{F} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{B}_2 \hat{\Lambda} \hat{A}_1$ для произведения его на унитарные матрицы фаз. Недиагональный

элемент \hat{s}_{eh} входит в (3.15) в виде следа $\text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh})$, представимого в следующей форме:

$$\begin{aligned} \text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh}) = \text{tr} & \left[\hat{F}^* (1 - \hat{\tau}_1) \hat{F}^T \hat{\tau}_2 + \hat{F} \hat{\tau}_1 \hat{F}^+ (1 - \hat{\tau}_2) + \right. \\ & \left. + \hat{F} \sqrt{\hat{\tau}_1 (1 - \hat{\tau}_1)} \hat{F}^T \sqrt{\hat{\tau}_2 (1 - \hat{\tau}_2)} + \hat{F}^* \sqrt{\hat{\tau}_1 (1 - \hat{\tau}_1)} \hat{F}^+ \sqrt{\hat{\tau}_2 (1 - \hat{\tau}_2)} \right] \end{aligned}$$

Иными словами, для усреднения кондактанса необходимо найти средние значения по унитарной матрице \hat{C} , равномерно распределённой на унитарной группе, типа $P_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \langle \hat{C} \hat{a} \hat{C}^+ \hat{b} \rangle_C$, $Q_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \langle \hat{C} \hat{a} \hat{C}^T \hat{b} \rangle_C$. Причём данные выражения являются билинейными формами своих аргументов \hat{a} и \hat{b} . Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе В.3.1. Тогда ответ для усреднённого искомого следа матрицы может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \langle \text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh}) \rangle = P_{\hat{F}^*} (1 - \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) + P_{\hat{F}} (\hat{\tau}_1, 1 - \hat{\tau}_2) + \\ + Q_{\hat{F}} \left(\sqrt{\hat{\tau}_1 (1 - \hat{\tau}_1)}, \sqrt{\hat{\tau}_2 (1 - \hat{\tau}_2)} \right) + Q_{\hat{F}^*} \left(\sqrt{\hat{\tau}_1 (1 - \hat{\tau}_1)}, \sqrt{\hat{\tau}_2 (1 - \hat{\tau}_2)} \right). \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что распределение унитарной матрицы \hat{A}_1 по мере Хаара не меняется при её умножении на произвольную унитарную матрицу (например, $\hat{B}_2 \hat{l}$), поэтому вместо усреднения по исходной матрице можно проводить усреднение по унитарной равномерно распределённой матрице \hat{F} . Аналогичным образом в разделе В.3.2 для нахождения дисперсии дифференциальной проводимости, мы найдём выражения для средних более высокого порядка по случайным матрицам

$$J_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{C} \hat{a} \hat{C}^+ \hat{C}^* \hat{b}) \right\rangle_C, \quad (\text{B.6a})$$

$$K_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{C} \hat{a} \hat{C}^T \hat{C} \hat{b}) \right\rangle_C, \quad (\text{B.6b})$$

$$L_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{a} \hat{C}) \text{tr}(\hat{C}^+ \hat{b} \hat{C}^*) \right\rangle_C, \quad (\text{B.6c})$$

$$M_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{a} \hat{C}) \text{tr}(\hat{C}^T \hat{b} \hat{C}) \right\rangle_C. \quad (\text{B.6d})$$

В.3.1. Вычисление среднего значения кондактанса G_{SN}

Поскольку матрица \hat{C} , по которой будет вестись усреднение, распределена по мере Хаара на унитарной группе, то средние значения выражений, зависящих от неё, инвариантны относительно умножения этой матрицы на произвольную унитарную матрицу \hat{U} :

$$P(\hat{U} \hat{a} \hat{U}^+, \hat{b}) = P(\hat{a}, \hat{b}) = P(\hat{a}, \hat{U} \hat{b} \hat{U}^+) \quad (\text{B.7a})$$

$$Q(\hat{U} \hat{a} \hat{U}^T, \hat{b}) = Q(\hat{a}, \hat{b}) = Q(\hat{a}, \hat{U} \hat{b} \hat{U}^T) \quad (\text{B.7b})$$

Существует общее выражение для билинейной формы $Z(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \left(\hat{z}(\hat{a}) \hat{b} \right) = \sum_{i,j,k,l=1}^N Z_{ij,kl} a_{ij} b_{kl}$ двух матриц в виде следа. Применив эту формулу к выражениям $P(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \left(\hat{p}(\hat{a}) \hat{b} \right)$, $Q(\hat{a}, \hat{b}) =$

$\text{tr}(\hat{q}(\hat{a})\hat{b})$, мы сведём условия на искомые средние (B.7) к условиям на неизвестные линейные матричные функции $\hat{p}(\hat{a}), \hat{q}(\hat{a})$:

$$\hat{p}(\hat{U}\hat{a}\hat{U}^+) = \hat{p}(\hat{a}) = \hat{U}^+\hat{p}(\hat{a})\hat{U}, \quad \hat{q}(\hat{U}\hat{a}\hat{U}^T) = \hat{q}(\hat{a}) = \hat{U}^T\hat{q}(\hat{a})\hat{U}$$

Из второго равенства для функции $\hat{p}(\hat{a})$ следует, что она коммутирует с произвольной унитарной матрицей \hat{U} , а следовательно, пропорциональна единичной матрице. При этом коэффициент пропорциональности единичной матрице определяется первым равенством и условием линейности $\hat{p}(\hat{a}) = c_0 \text{tr}(\hat{a})\hat{1}$. Он оказывается равен следу матрицы \hat{a} . Неизвестная постоянная c_0 , не зависящая от аргумента функции, может быть найдена, например, при $\hat{a} = \hat{1}$. В этом случае $P(\hat{1}, \hat{b}) = \text{tr}(\hat{b})$, поэтому $c_0 = 1/N$. Второе равенство для функции $\hat{q}(\hat{a})$ имеет лишь нулевое решение $\hat{q}(\hat{a}) = 0$ (например, для матрицы $\hat{U} = \text{diag}(e^{i\varpi_1}, \dots, e^{i\varpi_N})$). В результате искомые выражения равны $Q_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \langle \hat{C}\hat{a}\hat{C}^T\hat{b} \rangle_C = 0$, $P_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr} \langle \hat{C}\hat{a}\hat{C}^+\hat{b} \rangle_C = \text{tr}(\hat{a})\text{tr}(\hat{b})/N$, поэтому среднее значение кондактанса (3.15):

$$\langle G_{SN} \rangle_{A,B} = 2G_0 \langle \text{tr}(\hat{s}_{eh}^+\hat{s}_{eh}) \rangle = \frac{2G_0}{N} \left(\text{tr}(1 - \hat{\tau}_1) \text{tr}(\hat{\tau}_2) + \text{tr}(\hat{\tau}_1), \text{tr}(1 - \hat{\tau}_2) \right)$$

принимает вид уравнения (3.2) с обозначениями $\tau_m = \text{tr}(\hat{\tau}_m)/N$. Поскольку совместное распределение вероятностей (3.21) собственных значений τ_n^m зависит только от их разностей, то $\langle \tau_n^m \rangle_{\hat{\tau}_m} = \langle 1 - \tau_n^m \rangle_{\hat{\tau}_m} = 1/2$ для $m = \overline{1, 2}$, $n = \overline{1, N}$. Иными словами, при усреднении по этим собственным значениям мы приходим к ответу для среднего кондактанса из равенства (3.1).

В.3.2. Вычисление дисперсии кондактанса σ_G^2

В этом разделе будет вычислена дисперсия дифференциальной проводимости. Поскольку (как будет показано ниже) для этого нам понадобятся выражения для средних (B.6), мы в первую очередь вычислим именно их. Аналогично предыдущему разделу, можно записать эти средние в виде $Z_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \text{tr}(\hat{z}(\hat{a})\hat{b})$, где линейные операторы $\hat{z} \in \{\hat{j}, \hat{k}, \hat{l}, \hat{m}\}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} \hat{j}(\hat{a}) &= \hat{U}\hat{j}(\hat{U}^T\hat{a}\hat{U}^*)\hat{U}^+, & \hat{k}(\hat{a}) &= \hat{U}\hat{k}(\hat{U}^T\hat{a}\hat{U})\hat{U}^T, \\ \hat{l}(\hat{a}) &= \hat{U}^*\hat{l}(\hat{U}^T\hat{a}\hat{U})\hat{U}^+, & \hat{m}(\hat{a}) &= \hat{U}\hat{m}(\hat{U}^T\hat{a}\hat{U})\hat{U}^T. \end{aligned}$$

В рамках последних равенств легко получить, что $\hat{k}(\hat{a}) = \hat{m}(\hat{a}) = 0$, а $\hat{j}(\hat{a}) = j_1 \text{tr}(\hat{a}) + j_2 \hat{a}^T$ и $\hat{l}(\hat{a}) = l_1 \hat{a} + l_2 \hat{a}^T$ с неизвестными постоянными $j_{1,2}$ и $l_{1,2}$. Так как $L_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = L_{\hat{C}}(\hat{a}^T, \hat{b})$, то $l_1 = l_2$. Кроме того, из выражения для $J_{\hat{C}}(\hat{1}, \hat{b}) = \text{tr}(\hat{b})$ при $\hat{a} = \hat{1}$ следует, что $j_2 = 1 - Nj_1$. Чтобы найти постоянные j_1, l_1 , воспользуемся альтернативной записью для следа матрицы $\text{tr} \hat{A} = \sum_i \mathbf{e}_i^+ \hat{A} \mathbf{e}_i$ для любого ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}_i\}$: $\mathbf{e}_i^+ \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ и

$\sum_i \left(e_i^{(m)} \right)^* e_i^{(n)} = \delta_{mn}$. Подставляя это выражение для обоих аргументов функции $L_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b})$ с разными ортонормированными базисами $\{\mathbf{e}_i\}$ и $\{\mathbf{f}_j\}$, запишем её через сумму следов: $L_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i,k} J_{\hat{C}} \left(\hat{a} \hat{Q}^{(ik)}, \hat{b} \left(\hat{Q}^{(ik)} \right)^+ \right)$, где $\hat{Q}^{(ik)} = \mathbf{e}_i \mathbf{f}_k^+$ – некоторая необратимая матрица из базисных векторов. На основе аналогичных преобразований для следов матриц

$$\begin{aligned} \sum_{i,k} \text{tr} \left[\hat{a} \hat{Q}^{(ik)} \hat{b} \left(\hat{Q}^{(ik)} \right)^+ \right] &= \text{tr}(\hat{a}) \text{tr}(\hat{b}) \\ \sum_{i,k} \text{tr} \left[\hat{a} \hat{Q}^{(ik)} \right] \text{tr} \left[\hat{b} \left(\hat{Q}^{(ik)} \right)^+ \right] &= \text{tr}(\hat{a} \hat{b}) \\ \sum_{i,k} \text{tr} \left[\left(\hat{a} \hat{Q}^{(ik)} \right)^T \hat{b} \left(\hat{Q}^{(ik)} \right)^+ \right] &= \text{tr}(\hat{a}^T \hat{b}) \end{aligned}$$

получим окончательно $j_1 = l_1 = 1/(N+1)$. В целом,

$$J_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{C} \hat{a} \hat{C}^+ \hat{C}^* \hat{b}) \right\rangle_C = \frac{1}{N} \left(\text{tr}(\hat{a}) \text{tr}(\hat{b}) + \text{tr}(\hat{a}^T \hat{b}) \right), \quad (\text{B.8a})$$

$$K_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{C} \hat{a} \hat{C}^T \hat{C} \hat{b}) \right\rangle_C = 0, \quad (\text{B.8b})$$

$$L_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{a} \hat{C}) \text{tr}(\hat{C}^+ \hat{b} \hat{C}^*) \right\rangle_C = \frac{1}{N} \left(\text{tr}(\hat{a} \hat{b}) + \text{tr}(\hat{a}^T \hat{b}) \right), \quad (\text{B.8c})$$

$$M_{\hat{C}}(\hat{a}, \hat{b}) = \left\langle \text{tr}(\hat{C}^T \hat{a} \hat{C}) \text{tr}(\hat{C}^T \hat{b} \hat{C}) \right\rangle_C = 0. \quad (\text{B.8d})$$

Поскольку при вычислении дисперсии дифференциальной проводимости (3.15) мы ограничимся лишь полным усреднением по случайным матрицам \hat{T}_m , а не отдельно по матрицам фаз, то в этом случае воспользуемся отличным от предыдущего раздела подходом. Будем исходить из инвариантности меры на компактной симплектической группе $\hat{X} \in \text{Sp}(2N)$ для матрицы (B.1). Из этой инвариантности среднее значение выражения, зависящего от \hat{X} , не изменится, если её умножить на произвольную матрицу из той же группы $\hat{V} \in \text{Sp}(2N)$. В дальнейшем нам хватит трёх примеров такой матрицы \hat{V}

$$\hat{V}_U = \begin{pmatrix} \hat{U} & 0 \\ 0 & \hat{U}^* \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_0 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{1} \\ -\hat{1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{1} \end{pmatrix}$$

с некоторой произвольной унитарной матрицей \hat{U} в качестве параметра. Рассмотрение функции $\hat{F}(\hat{X})$ случайной $2N \times 2N$ -матрицы \hat{X} как функции её $N \times N$ -блоков \hat{a}, \hat{b} : $\hat{F}(\hat{X}) = \hat{f}(\hat{a}, \hat{b})$, даёт следующие условия на среднее значение этой функции из условия инвариантности:

$$\left\langle \hat{f}(\hat{a}, \hat{b}) \right\rangle = \left\langle \hat{f}(\hat{a} \hat{U}, \hat{b} \hat{U}^*) \right\rangle, \quad \left\langle \hat{f}(\hat{a}, \hat{b}) \right\rangle = \left\langle \hat{f}(-\hat{b}, \hat{a}) \right\rangle, \quad (\text{B.9a})$$

$$\left\langle \hat{f}(\hat{a}, \hat{b}) \right\rangle = \left\langle \hat{f} \left((\hat{a} - \hat{b})/\sqrt{2}, (\hat{b} + \hat{a})/\sqrt{2} \right) \right\rangle. \quad (\text{B.9b})$$

Важным обстоятельством первого уравнения (B.9a) является тот факт, что матрицу \hat{U} в нём можно рассматривать как случайно распределённую по инвариантной мере на унитарной

группе и усреднять по ней выражение:

$$\langle \hat{f}(\hat{a}, \hat{b}) \rangle = \left\langle \int \hat{f}(\hat{a}\hat{U}, \hat{b}\hat{U}^*) d\mu(U) \right\rangle. \quad (\text{B.10})$$

Это свойство эквивалентно умножению матрицы \hat{B}_1 из полярной декомпозиции матрицы \hat{T}_1 справа на \hat{U} .

Легко показать, что вычисление среднего значения кондактанса (3.1) можно провести, воспользовавшись лишь двумя условиями: первым уравнением в (B.2a) $\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh} + \hat{s}_{ee}^+ \hat{s}_{ee} = \hat{1}$ и вторым в (B.9a) $\langle \text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh}) \rangle = \langle \text{tr}(\hat{s}_{ee}^+ \hat{s}_{ee}) \rangle$ в применении к полной матрице рассеяния \hat{S} . Откуда мгновенно получается ответ: $\langle \text{tr}(\hat{s}_{eh}^+ \hat{s}_{eh}) \rangle = \langle \text{tr}(\hat{s}_{ee}^+ \hat{s}_{ee}) \rangle = N/2$.

Для нахождения дисперсии кондактанса как случайной величины необходимо вычислить средний квадрат следа соответствующей матрицы $\text{tr}(\hat{b}^+ \hat{b})^2$. Согласно свойству (B.9b), мы можем представить это среднее в виде

$$A = \langle \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{b})^2 \rangle = N^2/4 + \left\langle \left(\text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a}) \right)^2 + \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a}) \text{tr}(\hat{a}^+ \hat{b}) \right\rangle / 2.$$

Здесь мы упростили выражение $\text{tr} \left((\hat{b}^+ \hat{a})^+ (\hat{b}^+ \hat{a}) \right) = N/2 - \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{b})$, используя соотношения (B.2) и $\text{tr}(\hat{A}^T) = \text{tr} \hat{A}$. Кроме того, при вычислении среднего $\langle \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a} + \hat{a}^+ \hat{b}) \rangle$ мы применили второе уравнение из (B.9a), демонстрирующее, что эта величина равна нулю. С помощью свойства (B.10) придём к выражению величины A через функции (B.8):

$$A = N^2/4 + 2M_{\hat{C}}(\hat{b}^+ \hat{a}, \hat{b}^+ \hat{a}) + 2L_{\hat{C}}(\hat{b}^+ \hat{a}, \hat{a}^+ \hat{b}) = N^2/4 + B, \quad (\text{B.11})$$

где $B \stackrel{\text{def}}{=} \langle \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a}) \text{tr}(\hat{a}^+ \hat{b}) \rangle = 2 \langle \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{a} \hat{a}^+ \hat{b}) \rangle / (N+1)$. Здесь мы в очередной раз применили свойство $\hat{b}^T \hat{a}^* = \hat{a}^+ \hat{b}$ из (B.2b). Вычисления выражения для B можно провести с помощью того же трюка (B.9b). После упрощений и применения свойства $\langle \text{tr}(\hat{a}^+ \hat{b} \hat{a}^+ \hat{b}) \rangle = 0$ мы получим

$$\begin{aligned} (N+1)B &= N/2 - \left(J_{\hat{C}}(\hat{a}^+ \hat{a}, \hat{b}^+ \hat{b}) + K_{\hat{C}}(\hat{a}^+ \hat{b}, \hat{a}^+ \hat{b}) \right) = \\ &= N/2 - 2 \left[\text{tr}(\hat{a}^+ \hat{a}) \text{tr}(\hat{b}^+ \hat{b}) + \text{tr}(\hat{a}^+ \hat{a} \hat{b}^T \hat{b}^*) \right] / (N+1), \end{aligned}$$

что после преобразований типа (B.2a) и $\text{tr}(\hat{A}^T) = \text{tr} \hat{A}$ приводит к выражению $4B = N - 2(N^2 - 2A)/(N+1) - B$, что совместно с (B.11) даст ответ:

$$B = A - N^2/4 = N/4(2N+1).$$

Этот ответ после умножения на $(2G_0)^2$ даёт дисперсию кондактанса [см. (3.1)].

В.4. Решёточная регуляризация двухзонной модели двумерного топологического изолятора

В данном приложении, следуя работе [115], перейдём от непрерывной модели двумерного топологического изолятора к решёточной регуляризации:

$$\begin{aligned}\epsilon_k &= C - 2Da^{-2} [2 - \cos k_x a - \cos k_y a], \\ \mathbf{d} &= (Aa^{-1} \sin k_x a, -Aa^{-1} \sin k_y a, M - Ba^{-2} [2 - \cos k_x a - \cos k_y a]).\end{aligned}$$

на квадратной решётке Браве (см. рис. 1.4) с векторами трансляций $\mathbf{a}_1 = ax_0$, $\mathbf{a}_2 = ay_0$ и двумя типами орбиталей на каждом узле (соответствующими полевым операторам $\hat{c}_{a\mathbf{R}}$ и $\hat{c}_{b\mathbf{R}}$). Тогда гамильтониан 2D ТИ в представлении вторичного квантования в базисе функций Ванье примет вид (1.35) с одночастичным оператором энергии в решёточном представлении:

$$\begin{aligned}\hat{\epsilon}_{2D,s}(\mathbf{R}m, \mathbf{R}'m) &= \delta_{\mathbf{R}\mathbf{R}'} \left[\left(M - \frac{4B}{a^2} \right) s_m - \frac{4D}{a^2} \right] + \left(\frac{4B}{a^2} s_m + \frac{4D}{a^2} \right) \times \\ &\quad \times (\delta_{\mathbf{R}+\mathbf{a}_1, \mathbf{R}'} + \delta_{\mathbf{R}-\mathbf{a}_1, \mathbf{R}'} + \delta_{\mathbf{R}+\mathbf{a}_2, \mathbf{R}'} + \delta_{\mathbf{R}-\mathbf{a}_2, \mathbf{R}'}) \\ \hat{\epsilon}_{2D,\uparrow}(\mathbf{R}a, \mathbf{R}'b) &= -\hat{\epsilon}_{2D,\downarrow}(\mathbf{R}b, \mathbf{R}'a) = \\ &= \frac{A}{2a} (\delta_{\mathbf{R}+\mathbf{a}_2, \mathbf{R}'} - \delta_{\mathbf{R}-\mathbf{a}_2, \mathbf{R}'} - i\delta_{\mathbf{R}+\mathbf{a}_1, \mathbf{R}'} + i\delta_{\mathbf{R}-\mathbf{a}_1, \mathbf{R}'}) \\ \hat{\epsilon}_{2D,\uparrow}(\mathbf{R}b, \mathbf{R}'a) &= -\hat{\epsilon}_{2D,\downarrow}(\mathbf{R}a, \mathbf{R}'b) = -\hat{\epsilon}_{2D,\uparrow}^*(\mathbf{R}a, \mathbf{R}'b),\end{aligned}$$

где $s_a = 1$ и $s_b = -1$, а значения материальных параметров A , B , D , M в зависимости от ширины квантовой ямы $CdTe/HgTe/CdTe$ можно найти, например, в обзоре [114]. В обозначениях обзора рассматриваемый решёточный гамильтониан действует на вектор-столбец $\Psi = (\psi_{E+}, \psi_{H+}, \psi_{E-}, \psi_{H-})^T$ с состояниями $\psi_{E\pm}$, отвечающими суперпозиции орбиталей с проекцией полного углового момента $\pm 1/2$: $|\Gamma_6, \pm \frac{1}{2}\rangle$ и $|\Gamma_8, \pm \frac{1}{2}\rangle$, и $\psi_{H\pm}$, соответствующими подзонам $|\Gamma_6, \pm \frac{3}{2}\rangle$ с проекцией момента $\pm 3/2$.