МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Кондратьев Никита Михайлович

Анализ тепловых шумов в многослойных диэлектрических зеркалах интерферометров и оптических микрорезонаторах

Специальность 01.04.01 приборы и методы экспериментальной физики

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф-м.н., проф. Городецкий Михаил Леонидович

Москва – 2015

Оглавление

Введение

0.1. Актуальность темы

Современная наука и техника движутся по пути всеобщей миниатюризации и повышении точности измерений. Меньшие размеры изучаемых объектов, приборов, меньшие длины волн, меньшие величины сигналов. Большой интерес представляют измерения на квантовом уровне. Целью многих исследователей является приготовление и наблюдение макроскопических тел в квантовых состояниях. Всё это требует тщательной разработки приборов и подготовки экспериментов, так как приводит к возрастанию роли различных шумов.

На сегодняшний день одним из самых точных физических приборов является лазерная гравитационная обсерватория (LIGO) [1]. Гравитационные волны настолько малы, что несмотря на их косвенное обнаружение в 1974, их прямое детектирование не могло произойти до настоящего времени – в течение этого года Advanced LIGO вышел на проектную чувствительность, которой должно быть, наконец, достаточно [2, 3]. Другими словами, для успешного приёма необходимо измерять относительные смещения пробных масс на уровне 10^{-20} метра. Настолько высокие требования к точности приводят к тому, что даже броуновское движение частиц поверхности зеркала мешает эффективной работе прибора. Существует множество источников дополнительных помех [4], но на настоящее время основным фактором снижающим чувствительность являются тепловые флуктуации покрытия и подложки зеркал. Важной задачей является точный расчёт и поиск путей их снижения.

Источники шумов и методы их расчётов могут быть одинаковыми для различных оптических приборов. Флуктуации в сорока килограммовых зеркалах LIGO и в микроскопических диэлектрических резонаторах могут иметь общие причины. Сейчас появляется множество новых оптических измерительных систем. Многие пророчат в скором времени переход от классической электроники к фотонике – когда основным носителем энергии и информации будет световое излучение. Волоконно-оптические линии передачи данных уже активно используются в системах связи, так как способные передавать большие массивы данных с меньшими потерями и практически невосприимчивы к электромагнитным полям. Развитие данной области требует создания эффективных устройств сопряжения радио сигналов с оптическими – электрооптических модуляторов и оптоэлектронных генераторов. Перспективным базисным элементом для этих устройств являются нелинейные микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи (ММШГ) [5, 6, 7, 8]. В частности, их использование позволяет получать оптические гребёнки – излучение, состоящее из очень большого числа отдельных спектральных линий, равноотстоящих друг от друга на фиксированную СВЧ или радиочастоту. Недавно было показано [9][A3], что нестабильность в таких гребёнках возникает не в следствие каких-либо фундаментальных ограничений и с ней можно бороться. Более того электрический сигнал от прямого детектирования такой гребенки представляет собой очень чистый СВЧ-сигнал, необходимый во многих приложениях. Поэтому исследование шумов в этой системе представляют большой интерес.

0.2. Цели работы

- Построение метода точного расчёта фазового шума многослойных зеркал и поиск пути его подавления
- Поиск источников дополнительных шумов в многослойных зеркалах
- Разработка и оптимизация чувствительных электрооптических модуляторов на основе ММШГ
- Расчёт шумов в оптических микрорезонаторах с МШГ

0.3. Научная новизна

Рассмотрены классические источники шумов в многослойных зеркалах и выявлен фотоупругий шум, не учитывавшийся ранее. Разработаны методы расчёта шумов с учётом проникновения света в глубь зеркала и показано, что поправка за счёт интерференции в верхних слоях зеркала не достигает 10%. Необычным оказалось то, что эта поправка имеет обратный знак (т.е. происходит небольшое самоподавление шума).

Проанализированы различные методы подавления фазового шума в многослойных зеркалах. Показано, что общепринятое утверждение об оптимальности полуволновой суммарной толщины пар слоёв в общем случае неверно.

Предложены и исследованы новые виды шумов – кристаллизации (расстеклования) и вязкого трения. Впервые произведена оценка плотности частоты событий кристаллизации на основе литературных данных об укорачивании стержней, что позволило дать количественную оценку шума расстеклования в зеркале и его подвесах.

Исследована возможность построения электрооптических модуляторов на основе ММШГ и показана возможность оптимизации электрооптического взаимодействия путём выбора формы радиочастотного резонатора. Построена теория модуляции в многомодовой системе

МШГ и получены формулы для амплитуды модуляции. Произведены оценки шумов частоты в ММШГ и произведена оценка чувствительности модулятора.

0.4. Практическая ценность

Получены формулы для фазового шума зеркал с учётом проникновения излучения внутрь зеркала. Выработан метод аналитического расчёта шумов покрытия с плавно меняющимся показателем преломления (произвольного профиля). Предложена теория обобщенного многослойного покрытия, минимизирующего шумы при заданном коэффициенте отражения. Эти результаты будут использованы при проектировании детекторов гравитационных волн нового поколения. Разработана система программ для расчёта электрооптического взаимодействия в ММШГ и метод расчёта тепловых шумов в МШГ методом конечных элементов. эти разработки будут использованы при создании устройств фотоники на основе ММШГ.

0.5. Апробация работы

Результаты работы докладывались на международных конференциях

- коллаборации LIGO в 2010, 2013, 2015 годах
- Ломоносов 2010 и Ломоносов 2015
- International Conference on Theoretical Physics in Moscow
- „492. WE-Heraeus-Seminar“
- „ICONO/LAT 2013“
- Advanced Solid State Lasers 2013
- „CLEO“ Europe 2013
- „IFCS & EFTF“ 2013
- Nonlinear Optics Conference (NLO 2013)
- Frontiers in Optics 2013
- PIERS 2015

- ICGAC-12 (2015)
- ICQT 2015

всероссийских конференциях

- „VI Радиолокация и связь“
- „Радиолокация 2030“
- Физика и применение микроволн („Волны-2013“ и „Волны-2015“)
- III научно-техническая конференция „Электроника и микроэлектроника СВЧ“
- Волновые явления в неоднородных средах („Волны-2014“)

научных семинарах кафедры физики колебаний МГУ.

0.6. Публикации

Результаты работы опубликованы в 4 статьях в зарубежных [A1, A2, A3, A4] и 3 статьях в Российских [A5, A6, A7] журналах, доложены на 5 всероссийских и 13 международных конференциях. Список печатных статей приведён в конце настоящего автореферата.

0.7. Объём и структура работы

Работа состоит из трёх глав, введения, заключения, приложения и списка литературы. В работе 159 страниц (включая оглавление, список обозначений, список литературы и приложения), 48 рисунков и 10 таблиц. Список литературы содержит 117 наименований.

- Глава 1 рассматривает тепловые шумы в многослойных диэлектрических зеркалах. Основной целью является учёт влияния корреляций и интерференции на итоговый шум зеркала и интерферометра. Производится попытка использования этих эффектов для уменьшения шумов. В главе описан метод расчёта амплитудной и фазовой поправки, вносимой многослойным покрытием. Найдено оптимальное покрытие, максимизирующее коэффициент отражения при неравных толщинах пар слоёв.
- Глава 2 описывает дополнительные эффекты, являющиеся новыми источниками тепловых шумов. Проводится изучение процессов спонтанной кристаллизации и текучести кварцевого стекла, из которого делается большое количество оптических элементов, с

точки зрения внесения шумов. Произведены оценки интенсивности процесса спонтанной кристаллизации и параметров стандартной линейной модели упругости и оценены спектральные плотности полученных шумов.

- Глава 3 исследует возможность создания высокочувствительных электрооптических модуляторов на базе микрорезонаторов с модами шепчущей галереи. Проводится анализ режимов работы модулятора и построение математической и численной модели устройства. Рассмотрены тепловые шумы в микрорезонаторе. Создана система программ для расчёта величины электрооптического взаимодействия в системе при различных конфигурациях радиочастотной части для последующей оптимизации, а так же для расчёта тепловых шумов.

ГЛАВА 1

Тепловые шумы в многослойных зеркалах

1.1. Введение

1.1.1. Лазерные гравитационные антенны

Предсказание гравитационных волн – колебаний метрики пространства-времени, распространяющихся со скоростью света – одно из наиболее глубоких различий между общей теорией относительности и Ньютоновской теорией гравитации. На протяжении более пятидесяти лет это предсказание оставалось лишь теорией, пока они не были замечены косвенно по снижению скорости вращения пульсара Халсом и Тейлором в 1974 году [10]. Было показано, что замедление вращения может быть с хорошей точностью объяснено испусканием им гравитационной волны [11]. Однако прямого наблюдения гравитационных волн до сих пор не было.

Гравитационная волна вызывает квадрупольные возмущения в пространстве, которые можно проиллюстрировать рисунком 1.1.

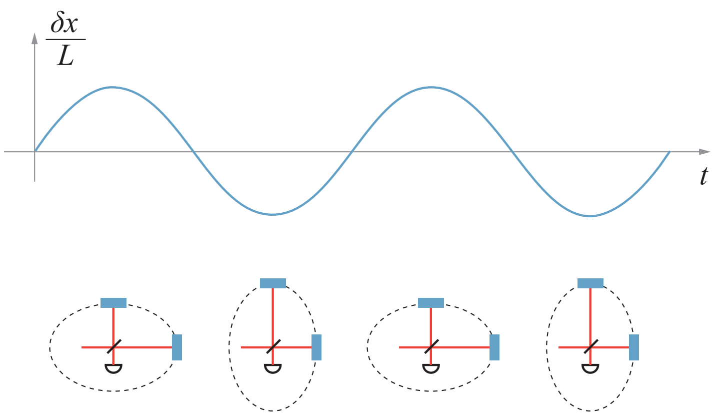

Рис. 1.1: Величина возмущения пространства во времени и способ его детектирования.

Возмущение пространства превратит кольцо частиц в плоскости волнового фронта волны в пульсирующий эллипс. Для прямой регистрации такого возмущения хорошо подходит интерферометр Майкельсона (рис. 1.2), позволяющий регистрировать малые изменения в разности длин своих плеч или, что тоже самое, дифференциальное смещение концевых зеркал. Такой метод был предложен ещё в 1962 году советскими учеными М.Е. Герценштейном и В.И. Пустовойтом [12]. В СССР было начато строительство подобной системы, которое было свернуто в 1990 году. Однако идея Герценштейна и Пустовойта легла в основу наземных лазерных интерферометрических гравитационных антенн первого поколения LIGO, VIRGO, GEO-6OO и TAMA-300, построенных в середине-конце 1990-х годов.

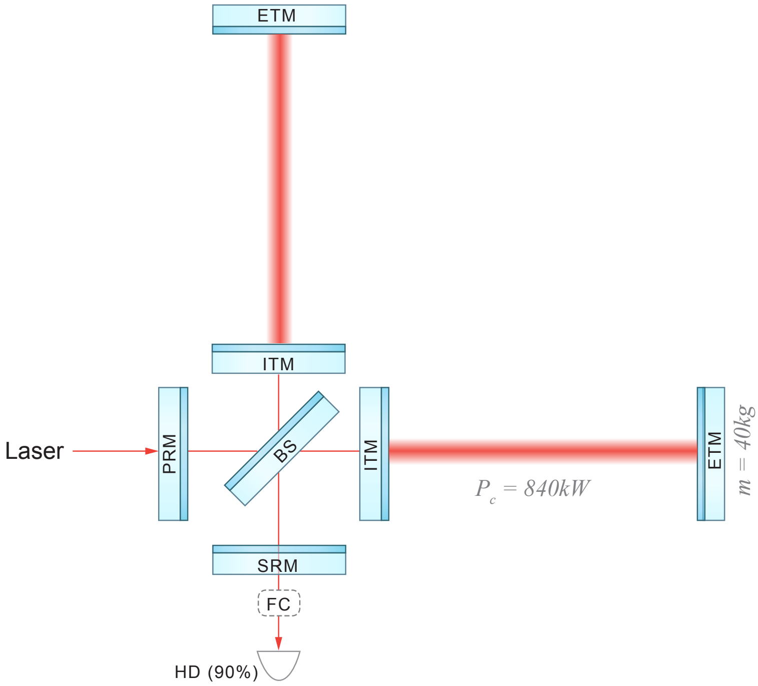

Рис. 1.2: Упрощённая схема интерферометра LIGO.

Гравитационные антенны LIGO [1, 3] представляют из себя модифицированные интерферометры Майкельсона колоссальных размеров – длины плеч составляют 4 километра. В интерферометре антенн первого поколения использовалось лазерное излучение на длине волны 1.065 мкм мощностью 10 Вт (15 кВт внутри резонатора). Диаметр пятна света на поверхности зеркал составлял 6 см. Концевые зеркала сделаны из плавленого кварца с интерференционным покрытием из оксида кремния и оксида тантала. Диаметр зеркал составлял порядка 30 см, а масса – порядка 10 кг. Многослойное отражающее покрытие имеет коэффициент пропускания на уровне 5×10^{-6} и имеет порядка 40 слоёв.

Однако гравитационные волны очень слабы. Для уверенной их регистрации чувствительность интерферометра к относительному смещению зеркал ($\delta x/L$, где L – длина плеч) должна быть на уровне 10^{-23}, что при длине плеча антенны LIGO [1, 3] означает 10^{-20} м – в десять тысяч раз меньше диаметра протона. Для достижения такой чувствительности даже броуновское движение частиц поверхности зеркал может стать серьёзной помехой.

В 2011 году LIGO ушёл на модернизацию. Планировалось закончить работы к 2015 году и получить первые результаты к концу года. В системе установлены новые подвесы зеркал, при этом новые зеркала сделаны более тяжёлыми (40 кг) для снижения шума радиационного давления. Существенно улучшена система сейсмоизоляции, содержащая 7 активных и пассивных уровней. Для борьбы с дробовым квантовым шумом предполагается повысить входную мощность до 180 Вт. Всё это должно позволить улучшить чувствительность антенны не менее чем в два раза (в несколько раз на частотах менее 15 Гц).

1.1.2. Происхождение шумов в твёрдом теле

Равновесные тепловые флуктуации поверхности твердого тела можно рассчитать в рамках теории термодинамических флуктуаций. При этом флуктуации температуры и объема (или плотности) внутри тела следует пересчитать во флуктуации его границы. Каждой выделенной дифференциальной ячейке внутри твёрдого тела со средней температурой T соответствует среднее значение объёма $\langle V\rangle = V(T)$ и дисперсия $\langle \Delta V^2\rangle$.

$$\langle \Delta V^2\rangle = k_B T \beta_T \langle V\rangle, \tag{1.1.1}$$

где k_B – постоянная Больцмана, $\beta_T = \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial p}$ – коэффициент изотермической сжимаемости. Температура в каждой такой ячейке, в свою очередь, может отличаться от средней и может быть также описана дисперсией.

$$\langle \Delta T^2\rangle = \frac{k_B T^2}{\rho C \langle V\rangle}, \tag{1.1.2}$$

где C – удельная теплоемкость, ρ – плотность [13].

Вследствие ангармонизма твердого тела, в частности, обуславливающего эффект теплового расширения, флуктуации температуры могут приводить к дополнительным (избыточным) флуктуациям объема и других величин, например, показателя преломления.

Выражения для флуктуаций в твердом теле следуют из теории термодинамических потенциалов. Введём тензоры напряжения σ_{ik} и деформации ε_{ik}:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right), \tag{1.1.3a}$$

$$\vec{F} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1.1.3b}$$

где $\{u_i\} = \vec{u}$ - смещение точки из положения равновесия, $\vec{F}$- сила, действующая на поверхность. Тогда бесконечно малое приращение внутренней энергии $\mathcal{E}$ равно (см. [13])

$$d\mathcal{E} = TdS + \sigma_{ik} d\varepsilon_{ik} + \mu dN, \tag{1.1.4}$$

где S – энтропия, μ и dN – химический потенциал и число частиц. Последнее слагаемое нас интересовать не будет. В качестве независимых переменных следует выбрать среднюю температуру (она контролируется на протяжении эксперимента) и, по-видимому, напряжение, чтобы деформация была функцией температуры. Будем также считать, что зеркало термодинамически изолировано (пренебрежём поглощением и излучением света). Тогда следует рассматривать ТД потенциал вида

$$d\Phi = -SdT - \varepsilon_{ik} d\sigma_{ik} + ..., \tag{1.1.5a}$$

$$\Phi = \mathcal{E} - TS - \sigma_{ik}\varepsilon_{ik} = \Phi(T, \sigma_{ik}, ...), \tag{1.1.5b}$$

где многоточие показывает возможность рассмотрения других термодинамических величин, таких как число частиц или намагниченности, которые не представляют интереса в данной работе, так как не оказывают влияния на распространение света. Таким образом флуктуирующими переменными являются температура и механическое напряжение, и их флуктуации независимы. Теперь мы можем построить классификацию источников шумов.

1.1.3. Шумы фазы, связанные с флуктуациями в зеркале

Общая картина

Набег фазы в веществе зависит от оптической длины пути, т.е. произведения пути на показатель преломления. При распространении световой волны в среде с флуктуирующими параметрами она приобретает дополнительный набег фазы. Для иллюстрации заменим многослойное зеркало однородным полупространством с эквивалентными эффективными параметрами, как если бы отражение происходило от эффективной отражающей поверхности, расположенной на конечной глубине d_e. Это глубина, на которой амплитуда волны затухает в e раз:

$$d_e = \frac{\lambda(n_l + n_h)}{8 n_l n_h \ln(n_h/n_l)}, \tag{1.1.6}$$

что составляет 0.44 мкм т.е. чуть меньше, чем 3 четвертьволновых слоя (n_l – кварц, n_h – оксид тантала). При этом фазовый сдвиг отражения составляет

$$\delta\varphi = k_0 \int_0^\infty n_{\text{eff}} e^{-z/d_e} dz, \tag{1.1.7}$$

где n_{eff} - эффективный показатель преломления, k_0 - волновой вектор волны в вакууме. Следовательно, шум фазы возникает не только из-за изменения размеров зеркала (считаем подвес неподвижным), но и из-за флуктуаций показателя преломления его материала.

Попытаемся перейти к термодинамическим источникам шума, используя (1.1.5b), и на основе этого представления перечислить их основные виды (рис.1.3).

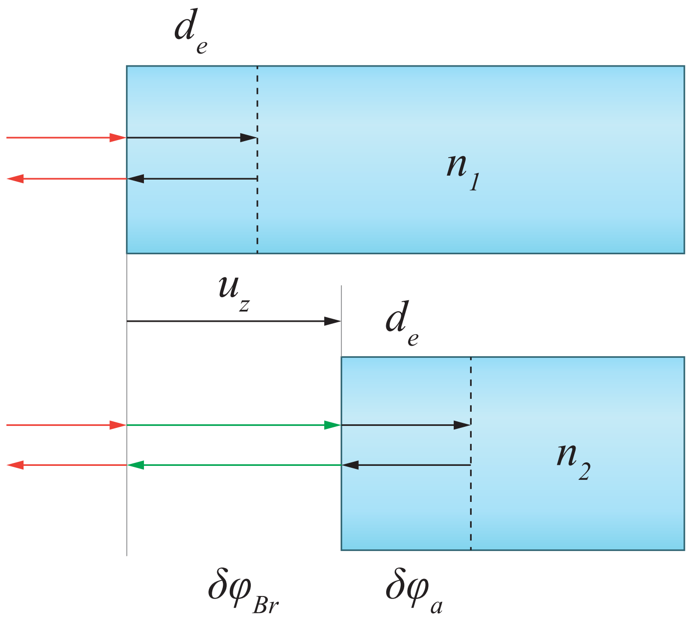

Рис. 1.3: Набег фазы при Броуновском шуме смещения поверхности и фотоупругом шуме.

1. Броуновский шум: смещение поверхности (деформации), приводящее к сдвигу фазы ([14])

$$\Delta u_z|_{z=0} = \frac{\partial u_z}{\partial \sigma_{ik}}|_{z=0}\Delta\sigma_{ik}$$
$$\delta\varphi_{Br} = -2k_0 n_0 u_z|_{z=0} = -2k_0 n_0 \frac{\partial u_z}{\partial \sigma_{ik}}|_{z=0}\Delta\sigma_{ik} \tag{1.1.8}$$

2. Фотоупругий (акустооптический) шум: деформации, приводящие к изменению показателя преломления

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial u_i}\Delta u_i = \frac{\partial n}{\partial \sigma_{ik}}\Delta\sigma_{ik}$$
$$\delta\varphi_a = -k_0 \int_0^\infty \Delta n(z) e^{-\frac{z}{d}} dz = -k_0 \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial \sigma_{ik}}\Delta\sigma_{ik} e^{-\frac{z}{d}} dz \tag{1.1.9}$$

3. Термоупругий шум: флуктуации температуры, пересчитанные в смещение поверхности через тепловое расширение ([15, 16])

$$\Delta u_z|_{z=0} = \frac{\partial u_z}{\partial T}|_{z=0}\Delta T$$
$$\delta\varphi_{t.e.} = -2k_0 n_0 u_z|_{z=0} = -2k_0 n_0 \frac{\partial u_z}{\partial T}|_{z=0}\Delta T \tag{1.1.10}$$

4. Терморефрактивный шум: флуктуации температуры, пересчитанные в изменение по-

казателя преломления ([17])

$$\Delta n = \frac{\partial n}{\partial T}\Delta T$$
$$\delta\varphi_{t.r.} = -k_0 \int_0^\infty \Delta n(z) e^{-\frac{z}{d}} dz = -k_0 \int_0^\infty \frac{\partial n}{\partial T}\Delta T e^{-\frac{z}{d}} dz \qquad (1.1.11)$$

Общее возмущение фазы складывается из отдельных возмущений. Данный набор шумов полон при условии, что мы исключаем из рассмотрения электромагнитные и химические эффекты, а так же шумы, вызванные внешним воздействием (шумы измерения). Таким образом мы построим классификацию как-бы внутренних шумов, определяющихся только самой системой.

На основе этого можно разбить шумы на две „ветви“, исходя из их происхождения. Это броуновская ветвь (броуновский и фотоупругий) и тепловая (термоупругий и терморефрактивный). Важно, что внутри ветви флуктуации коррелированы. Можно показать, что теоретически существует возможность взаимной компенсации шумов внутри одной ветви. Действительно $\delta\varphi_{Br} + \delta\varphi_{te} = c_1\Delta\sigma_{ik} - c_2\Delta T \neq 0$ так как $\Delta\sigma_{ik}$ и ΔT произвольные и некоррелированные величины. С другой стороны термоупругие и терморефрактивные шумы могут подавить друг друга: $\delta\varphi_{tr} + \delta\varphi_{te} = c_1\Delta T - c_2\Delta T = (c_1 - c_2)\Delta T$, что может быть равно нолю при любых ΔT, но определённых c_1 и c_2. Этот вариант подавления был рассмотрен в [4].

Ещё один важный класс флуктуаций – шумы внешнего воздействия, которые часто являются так же шумами обратного влияния или измерения. Они вызваны факторами внешними по отношению к системе. Так, например, в случае зеркала это будут шумы, вызванные лазером (дробовой шум лазера, передающийся через давление света или нагрев, вызванный поглощением), сейсмика и т.п. Основываясь на происхождении можно так же ввести „ветви“, в которых шумы будут коррелированы.

Опишем шумы зеркал, учитываемые в современных гравитационных антеннах (рис. 1.4) с указанием принадлежности к ветви и классу.

Броуновский шум подложки

Исторически, первый шум, выделенный как препятствие на пути к обнаружению гравитационных волн, был шум, порожденный внутренними трениями в веществе, согласно флуктуационно-диссипационной теореме [18]. Этот шум также называют “Броуновским шумом” подложки и определяют как смещение отражающей поверхности зеркала в связи с хаотическим движением частиц в подложке. Спектральная плотность флуктуаций, усреднённая по гауссовому пятну радиуса w (определяемому по падению интенсивности в $1/e^2$

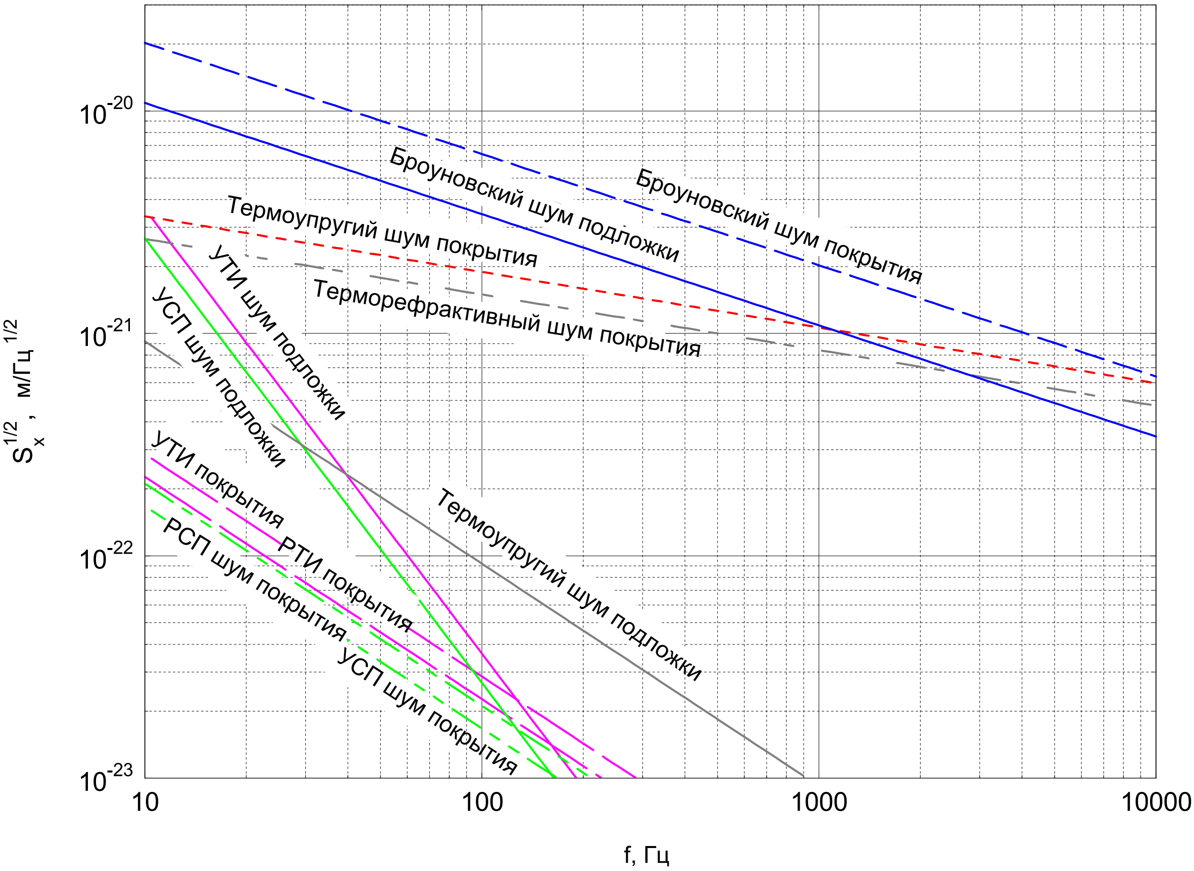

Рис. 1.4: Тепловые шумы в лазерной гравитационной антенне LIGO. Сокращения: УТИ – упругий теплового излучения, УСП – упругий светового поглощения, РТИ – рефрактивный теплового излучения, РСП – рефрактивный светового поглощения [4].

раз) равна

$$S_B^{sub} = \frac{2k_B T \phi(f)(1-\nu_s^2)}{\pi^{3/2} Y_s w f}, \tag{1.1.12}$$

где k_B постоянная Больцмана, T абсолютная температура зеркала, $\phi(f)$ угол потерь в подложке зеркала с коэффициентом Пуассона ν_s и модулем Юнга Y_s, на частоте f.

Этот шум принадлежит классу внутренних шумов, броуновской ветви.

Термоупругий шум подложки

В [15] Брагинский, Городецкий и Вятчанин рассмотрели вклад температурных флуктуаций в дополнительное смещение поверхности подложки через тепловое расширение. Используя флуктуационно-диссипационную теорему (ФДТ) и метод Ланжевена, было показано, что этот шум может быть представлен как шум термоупругих потерь:

$$S_{TE}^{sub} = \frac{4k_B T^2 \alpha_s^2 (1+\nu_s)^2 \kappa_s}{\pi^{5/2} (C_s \rho_s)^2 w^3 f^2}, \tag{1.1.13}$$

где α_s коэффициент теплового расширения, C_s удельная теплоёмкость, κ_s коэффициент теплопроводности, и ρ_s плотность подложки.

Этот шум принадлежит классу внутренних шумов, температурной ветви.

Броуновский шум покрытия

Также как и в подложке, внутреннее трение в материалах покрытия приводит к дополнительным флуктуациям. Эти флуктуации, как оказалось, даже превышают флуктуации в подложке, так как упругие потери в тонких слоях превышают потери в плавленом кварце. Тепловой шум покрытия определяется как смещение поверхности покрытия при неподвижной подложке и обычно записывается в виде аналогичном (1.1.12) [19, 20]:

$$S = \frac{2kT}{\pi^{3/2} f} \frac{(1-\nu^2)}{wY} \{\phi_{subs} + \phi_{coat}\}, \tag{1.1.14}$$

$$\begin{aligned} \phi_{coat} = \frac{1}{\sqrt{\pi} w} \sum_j^N d_j \Big[& \frac{Y_j^2 (1+\nu)^2 (1-2\nu)^2}{Y Y_j (1-\nu^2)(1-\nu_j^2)} \phi_{\|_j} \\ & + \frac{Y Y_j \nu_j (1+\nu)(1+\nu_j)(1-2\nu)}{Y Y_j (1-\nu^2)(1-\nu_j^2)} (\phi_{\|_j} - \phi_{\perp_j}) \\ & + \frac{Y^2 (1+\nu_j)^2 (1-2\nu_j)}{Y Y_j (1-\nu^2)(1-\nu_j^2)} \phi_{\perp_j} \Big] \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

где $\phi_{\|_j}$ и $\phi_{\perp_j}$ означают эмпирические углы потерь для деформаций параллельных и перпендикулярных поверхности зеркала соответственно. Часто эти величины полагают равными для слоя. Индексы j означают параметры слоёв, и N – их полное число. Этот шум был экспериментально измерен на специальных Интерферометрах Теплового Шума (TNI) [21] и может стать серьезной проблемой для чувствительности следующего поколения гравитационных антенн [20]. Эта формула получена из допущения, что луч отражается от поверхности покрытия. В данной работе рассматриваются поправки, связанные с тем, что фактически свет проникает в покрытие на конечную глубину.

Этот шум принадлежит классу внутренних шумов, броуновской ветви.

Термоупругий шум покрытия

Так же как и в пункте 1.1.3., только тепловое расширение происходит в покрытии [16, 22]:

$$S_{TE}^{coat} = \frac{8k_BT^2(1+\nu_s)^2\alpha_c^2 d_N^2}{\pi^{3/2}\sqrt{\kappa_s C_s\rho_s} w^2 f^{1/2}} G(\omega)_{TE}^{coat} \tag{1.1.16}$$

$$\alpha_c = \frac{1}{2}\left\langle \frac{\alpha}{1-\nu}\left(\frac{1+\nu}{1+\nu_s} + (1-2\nu_s)\frac{Y}{Y_s}\right)\right\rangle - \alpha_s\frac{\langle C\rho\rangle}{C_s\rho_s}$$

$$G(\omega)_{TE}^{coat} = \frac{2}{R\xi^2}\frac{\sinh\xi - \sin\xi + R(\cosh\xi - \cos\xi)}{\cosh\xi + \cos\xi + 2R\sinh\xi + R^2(\cosh\xi - \cos\xi)}$$

$$\xi = \sqrt{2\omega d_N^2\langle\rho C\rangle\langle\kappa^{-1}\rangle} \qquad R = \sqrt{\frac{\langle\rho C\rangle}{C_s\rho_s\kappa_s\langle\kappa^{-1}\rangle}}$$

Для $SiO_2 - Ta_2O_5$ покрытия α_c близко к $\langle\alpha\rangle$. Здесь усреднение означает следующую процедуру:

$$\langle X\rangle \equiv \frac{X_l d_l + X_h d_h}{d_l + d_h}. \tag{1.1.17}$$

При $\xi \ll 1$ можно аппроксимировать:

$$G(\omega)_{TE}^{coat} \simeq 1 - \frac{3R^2-1}{3R}\xi \tag{1.1.18}$$

Этот шум принадлежит классу внутренних шумов, тепловой ветви.

Терморефрактивный шум покрытия

В [17] было указано на ещё один источник шума: в связи с терморефракцией $\beta_{l,h} = dn_{l,h}/dT$ в слоях набег фазы в покрытии меняется случайным образом. Спектральную плотность этих флуктуаций записывают в следующем виде:

$$S_{TR}^{coat} = \frac{2k_BT^2\beta_{\text{eff}}^2\lambda^2}{\pi^{3/2}\sqrt{\kappa_s\rho_s C_s} w^2 f^{1/2}}$$

$$\beta_{\text{eff}} = \frac{1}{4}\frac{\beta_h n_l^2 + \beta_l n_h^2}{n_h^2 - n_l^2} \tag{1.1.19}$$

Значение β_{eff} верно только если внешний слой имеет меньший показатель преломления $n_l < n_h$ и толщину $d_c = \lambda/(4n_l)$. Более общее выражение и обсуждение можно найти в [4]. Существование этого шума было ранее предсказано [23] и измерено [24] для оптических волноводов. Такой шум был так же измерен в высокодобротных сферических микрорезонаторах [25].

Этот шум принадлежит классу внутренних шумов, тепловой ветви.

Шумы светового поглощения

Шум может появляться не только из-за внутренних тепловых флуктуаций, но и из-за флуктуаций поглощаемой световой мощности, нагревающей зеркало [15]:

$$S_{PTE}^{\text{sub}} = \frac{\alpha^2 S_{\text{abs}}}{\pi^4 \rho_s^2 C_s^2 w^4 f^2}, \tag{1.1.20}$$

где ω_0 – оптическая частота, S_{abs} – спектральная плотность поглощённого света. В случае дробового шума для поглощённой мощности P_{abs}, $S_{\text{abs}} = \hbar\omega P_{\text{abs}}$. Более общий случай произвольных флуктуаций мощности был исследован в [26].

Дополнительные тепловые флуктуации, вызванные флуктуациями поглощаемой световой мощности приводят к тепловому расширению и изменениям показателя преломления в покрытии и шуму отражённой фазы аналогично 1.1.3. и 1.1.3.. Оценки спектральной плотности были получены в [4]:

$$S_{PTE}^{\text{coat}} = \frac{4S_{\text{abs}}(1+\nu_s)^2\alpha_c^2 d_N^2}{\pi^3 \rho_s C_s \kappa_s w^4 f} G_{\text{surf}}^{\text{coat}}(\omega) \tag{1.1.21}$$

$$S_{PTR}^{\text{coat}} = \frac{S_{\text{abs}}\beta_{\text{eff}}^2 \lambda^2}{\pi^3 \rho_s C_s \kappa_s w^4 f} G_{\text{surf}}^{\text{coat}}(\omega) \tag{1.1.22}$$

Этот шум принадлежит классу внешних шумов. Если их источник – возбуждающий систему лазер, то это будет ветвь лазера возбуждения.

Шумы теплового излучения

Тепловое излучение как диссипативный процесс тоже приводит к флуктуациям температуры в зеркале. Спектральная плотность таких флуктуаций была получена в [27, 28]. Этот шум “приложен к поверхности” как и шум теплового поглощения, поэтому можно использовать выражения из 1.1.3. для оценки упругих и рефрактивных шумов теплового излучения покрытия и подложки, с соответствующей заменой

$$S_{abs} \to S_{SB} = 8\sigma_B k_B T^5 \pi w^2, \tag{1.1.23}$$

где σ_B – постоянная Стефана-Больцмана. Этот шум принадлежит классу внешних шумов, ветвь излучения чёрного тела.

Все вышеописанные оценки сделаны в представлении зеркала как бесконечного полупространства (w мало по сравнению с радиусом и толщиной зеркала) и малых частот f. На рис. 1.4 можно видеть диаграмму этих шумов, приведённых к шуму смещения эффективной отражающей поверхности, для параметров работы LIGO. Поправки для других частот и конечных зеркал могут быть найдены в работах [29] и [30].

1.1.4. Шумы, рассматриваемые в данной работе

Фотоупругий (акустооптический) шум покрытия

Если вспомнить основные виды шумов, перечисленных в пункте 1.1.3. то видно, что среди рассмотренных выше шумов нет фотоупругого шума – аналога терморефрактивного шума, но происходящего от деформаций слоёв. Фотоупругость – это явление изменения показателя преломления при деформации [31]:

$$\Delta B_\lambda = p_{\lambda\mu}\varepsilon_\mu \tag{1.1.24}$$

где B_i – оптическая индикатриса, ε_μ – деформация, а индексы $\lambda, \mu \in [1;6]$. В нашем случае $\varepsilon_\mu = \partial\varepsilon_3/\partial z = -\delta d/d$ для каждого слоя. В цилиндрической системе координат можно разделить продольный эффект $\Delta B_\lambda = p_{\lambda 3}\varepsilon_3 = p_{\lambda 3}\delta d/d$ и поперечный эффект $\Delta B_\lambda = p_{\lambda\rho}\varepsilon_{\rho\rho}$. Однако только шум, производимый продольным эффектом имеет то же происхождение, что и рассматриваемый нами шум (движение в направлении “z”), и только в этом случае существует возможность подавления. Для продольного эффекта изменения показателей преломления получим:

$$\begin{aligned} \delta n_x &= -\frac{n_0^3}{2}p_{1\mu}\varepsilon_\mu = \frac{n_0^3}{2}p_{13}\frac{\delta d}{d} \\ \delta n_y &= -\frac{n_0^3}{2}p_{2\mu}\varepsilon_\mu = \frac{n_0^3}{2}p_{23}\frac{\delta d}{d} \end{aligned} \tag{1.1.25}$$

Так же существует ненулевое δn_z, но оно параллельно распространению световой волны и ни на что не влияет. Учёт этой компоненты требуется только для лучей движущихся под углом. Далее для численных оценок нам понадобятся значения фотоупругих коэффициентов плавленого кварца и оксида тантала. Известно, что диоксид Ta_2O_5 - кристалл с тетрагональной решеткой типа рутила. У рутила значения $p_{13} = 0.171$ $p_{23} = 0.16$. Исходя из работы [32] можно сделать грубую оценку $p_{Ta_2O_5} < 0.18$. Для простоты положим $p_{13} = p_{23} = p_{Ta_2O_5} = 0.17$ и для танталата. У кварца $p_{13} = p_{23} = 0.27$.

Поперечный эффект должен рассматриваться отдельно так как движение $\varepsilon_{\rho\rho}$ не коррелировано с движением $\varepsilon_{zz} \propto \delta d$. Этот эффект не должен дать больше шума чем продольный и добавлен к общему шуму не когерентно.

Стоит отметить, что существует первичный и вторичный фотоупругий эффект [33]. Вторичный по сути является комбинацией пьезоэлектрического эффекта и электрооптического эффекта. Обычно измеренный тензор фотоупругости включает в себя и первичный и вторичный эффект, так как их разделение может происходить только при обработке данных (теоретическим расчётом долей). По аналогии можно предположить, что терморефракцию тоже можно было бы разделить на первичную и вторичную (через тепловое расширение и фотоупругость), но этот эффект можно считать уже учтённым по той же причине.

Интерференционный шум отражения от покрытия

Во всех вышеперечисленных случаях полагалось, что отражение происходит от поверхности покрытия (за исключением терморефракции). Однако возможно получить спектральные плотности шумов многослойного покрытия не прибегая к такому упрощению. Результат можно представить в виде суммы вышеперечисленных шумов с соответствующими им интерференционными шумами (интерференционный броуновский, интерференционный терморефрактивный, интерференционный термоупругий и т.п.) и их корреляциями.

Также отметим, что все шумы до этого были фазовыми шумами. Изучая интерференционную часть, как это проделано ниже, можно показать, что существует также амплитудный шум, который, в принципе, тоже можно привести к ограничению чувствительности.

Интерференционный шум пропускания покрытия

Входные зеркала, являющиеся частично пропускающими, могут так же вносить дополнительный шум в пропущенное излучение. Данный эффект происходит из-за утолщения и сжатия зеркала (и теплового расширения), и действует непосредственно через коэффициент пропускания по амплитуде. Стоит заметить, что поступательное движение (раскачивание) зеркала самокомпенсируется, так как при этом движутся все поверхности зеркала.

Шум кристаллизации

Подложка зеркала состоит из плавленого кварца – оксида кремния, находящегося в состоянии стекла. Это состояние представляет из себя отвердевший расплав, который как бы не смог выстроить кристаллический порядок молекул из-за высокой вязкости. Это состояние имеет более высокую внутреннюю энергию, чем кристаллическое, и обладает меньшей плотностью. Таким образом формально возможен процесс постепенной кристаллизации плавленого кварца с сопутствующим уменьшением размеров образца. В работе [34] были представлены наблюдения того, как стержни из различных стекол сжимаются с течением времени. Подобный процесс, в особенности состоящий из дискретных коллапсов, вызовет добавочный шум, наподобие дробового.

Более того, как показано в работе [35], подобного вида процесс в подвесах зеркал так же приводит к шуму на выходе прибора. Однако в ней не было дано количественной оценки этих флуктуаций. В данной работе эти количественные оценки получены.

Шум вязкости

Как уже упоминалось, подложка находится в состоянии стекла, характеризующегося большой вязкостью. Вязкость является диссипативным процессом, а в соответствие с флуктуационно-диссипационной теоремой любой механизм диссипации представляет собой источник флуктуаций.

1.2. Отражение от многослойного покрытия

Одной из целей работы является анализ броуновских шумов многослойных отражающих покрытий зеркал и исследование возможности их оптимизации для уменьшения этих шумов. При этом ключевым пунктом рассмотрения будет интерференция в многослойном зеркале, то есть отражённая фаза будет рассчитываться не как взвешенный оптический путь (по формуле (1.1.7)), а методом импедансов. Это, вообще говоря, изменит все формулы (1.1.8)-(1.1.11). Иными словами к каждому шуму добавится соответствующая “интерференционная” часть. Рассчитаем фазу отражённого от зеркала луча методом импедансов. Для этого рассматривается отражение на границе каждого слоя, начиная с подложки, с последующим распространением волны далее к поверхности до следующей границы.

Введём двусторонний импеданс поля Z и коэффициент отражения Γ:

$$Z(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \frac{E_+(z) + E_-(z)}{H_+(z) + H_-(z)} = \eta(z)\frac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}, \tag{1.2.1}$$

$$\Gamma(z) = \frac{E_-(z)}{E_+(z)} = \frac{Z(z) - \eta(z)}{Z(z) + \eta(z)}, \tag{1.2.2}$$

$$\eta(z) = \sqrt{\frac{\mu(z)\mu_0}{\epsilon(z)\epsilon_0}} = \frac{\mu(z)}{n(z)}Z_v. \tag{1.2.3}$$

где E и H - касательные электрическое и магнитное поле в волне, E_+, H_+ и E_-, H_- падающая и отражённая электромагнитные волны, n показатель преломления, μ и ϵ относительные электрическая и магнитная восприимчивости, и Z_v импеданс вакуума ($Z_v = 1$ в СГС). Двусторонний импеданс является характеристикой геометрии задачи и отличается от обычного импеданса η для бегущей волны, который определяется лишь свойствами среды. Так как тангенциальные поля непрерывны на границах диэлектриков, то двусторонний импеданс Z в отличие от обычного импеданса является непрерывной функцией координаты z. Коэффициент отражения же будет меняться скачком на границе слоёв, а между границами меняться непрерывно:

$$\Gamma(z-d_j) = \frac{E_- e^{i\omega t + ik_0 n_j (z-d_j)}}{E_+ e^{i\omega t - ik_0 n_j (z-d_j)}} = \Gamma(z) e^{-i2k_0 n_j d_j}, \tag{1.2.4}$$

где $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ волновой вектор света в вакууме, λ - его длина волны. Будем двигаться от подложки $z = 0$ влево послойно. Импеданс справа от границы подложки равен импедансу свободной подложки η_s (рис. 1.5).

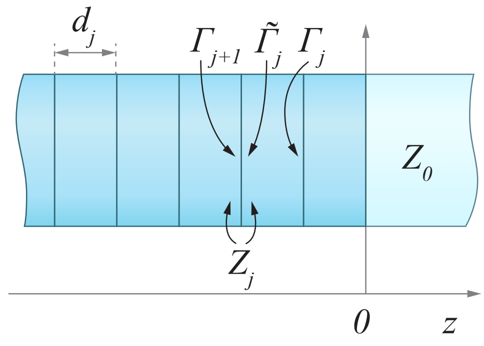

Рис. 1.5: Многослойное зеркало

Тогда импеданс слева от подложки, бесконечно близко к ней так же равен импедансу свободной подложки. В этой точке перейдём от импеданса к коэффициенту отражения (1.2.2) и продолжим влево по формуле (1.2.4) до границы первого слоя (рис. 1.5). Там опять перейдём к импедансу и продолжим его по непрерывности за границу влево. Таким образом, двигаясь от слоя к слою, и переходя от местного коэффициента отражения $\widetilde{\Gamma}_j = \Gamma(-\sum_j d_j + 0)$ к местному импедансу $Z_j = Z(-\sum d_j - 0) = Z(-\sum d_j + 0)$ на границе и обратно (к Γ_{j+1}) после её пересечения, строятся рекуррентные соотношения для импеданса и коэффициента отражения на границе каждого слоя и находятся характеристики невозмущённого зеркала. В частности, можно вообще исключить импедансы, рассчитав скачок коэффициента отражения на границе:

$$\Gamma_{j+1} = \frac{g_{j+1,j} + \widetilde{\Gamma}_j}{1 + g_{j+1,j}\widetilde{\Gamma}_j}, \tag{1.2.5}$$

где $\widetilde{\Gamma}_j = \Gamma_j e^{-i\varphi_j}$ в соответствии с (1.2.4), $g_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}$, $\varphi_j = 2k_0 n_j d_j$. Заметим, что тильда $\sim$ означает “на левой границе слоя” (рис. 1.5).

Здесь стоит отметить, что в случае четверть-волновых слоёв, когда $\varphi_h = \varphi_l = \pi$, все импедансы и коэффициенты отражения действительны, и отражение от зеркала приводит к фазовому сдвигу равному целому числу π (подробнее – прил. П.1.).

1.2.1. Покрытие с флуктуациями

Как говорилось ранее, источниками шума в зеркале являются температура и механическое напряжение. Они влияют на отраженную фазу посредством изменения толщин слоёв и их показателей преломления. Допустим, в результате шумов, толщины покрытия и показатели преломления изменились. Тогда это можно учесть в изменении набега фаз в (1.2.4), введя $\varphi_i \to \varphi_j + 2k_0\delta n_j d_j + 2k_0 n_j \delta d_j = \varphi_j - \Delta_j$. Так же нужно переписать $\eta_i \to \eta_i(1+\delta\eta_i)$ вследствие изменения показателя преломления $\delta\eta_j = -\frac{\delta n_j}{n_j}$. Будем искать новые импедансы и коэффициенты отражения как возмущения старых:

$$\Gamma`(-0) = \frac{Z_0 - \eta_1(1+\delta\eta_1)}{Z_0 + \eta_1(1+\delta\eta_1)} = \Gamma(-0)\left(1 - \frac{2Z_0\eta_1}{Z_0^2 - \eta_1^2}\delta\eta_1\right) \tag{1.2.6}$$

$$\Gamma`(-d_1+0) = \Gamma'(-0)e^{i\phi_1 + i\Delta_1} = \Gamma(-0)e^{i\phi_1}(1 + i\Delta_1 - \frac{2Z_0\eta_1}{Z_0^2-\eta_1^2}\delta\eta_1) \tag{1.2.7}$$

$$\begin{aligned} Z`_1 &= \eta_1' \frac{1+\Gamma'(-d_1+0)}{1-\Gamma'(-d_1+0)} = \eta_1' \frac{1+\Gamma'(-0)e^{i\phi_1}(1+i\Delta_1)}{1-\Gamma'(-0)e^{i\phi_1}(1+i\Delta_1)} = \\ &= Z_1\left(1 + \frac{2\Gamma_1 e^{i\phi_1}}{1-\Gamma_1^2 e^{i2\phi_1}}(i\Delta - z_1\delta\eta_1)\right)(1+\delta\eta_1) \\ &= Z_1(1 + f_1 i\Delta_1 + f_1\mu_1\delta\eta_1) \end{aligned} \tag{1.2.8}$$

Двигаясь влево, как и в предыдущем пункте при выводе невозмущённого коэффициента отражения от слоя к слою, и считая возмущения малыми, получим (подробнее в Приложении П.2., П.4.)

$$\begin{aligned} \Gamma'_m &= \Gamma_m(1+\varepsilon), \\ \varepsilon &= z_m\frac{\delta n_m}{n_m} + \sum_{j=1}^{m-1}\prod_{k=j+1}^{m}\frac{z_k}{\widetilde{z}_{k-1}}\left(i\Delta_j - \zeta_j\frac{\delta n_j}{n_j}\right), \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

$$z_k = \frac{(1-\Gamma_k^2)}{2\Gamma_k},\ \widetilde{z}_k = \frac{1-\Gamma_k^2 e^{-i2\varphi_k}}{2\Gamma_k e^{-i\varphi_k}},\ \zeta_k = \widetilde{z}_k - z_k. \tag{1.2.10}$$

Здесь m - номер слоя, в котором ищется коэффициент отражения ($m = N+1$ для полного отражения покрытия). Учитывая малость $\Delta_j, \frac{\delta n_j}{n_j} \ll 1$, можно выразить фазовый сдвиг сбоя интерференции $\delta\varphi$ и дефект отражения $\delta\Gamma$ (приводящий к амплитудному шуму, и не рассчитываемый традиционным подходом), собрав действительную и мнимую часть и использовав разложение: $\Gamma e^{\varepsilon} = \Gamma(1+\varepsilon)$. Стоит заметить, что до сих пор мы не уточняли природу рассматриваемого шума. Формулы (1.2.9)-(1.2.10) верны как для флуктуаций толщины δd_j (Броуновские и термоупругие шумы), так и для флуктуаций коэффициента отражения δn_j (фотоупругие и терморефрактивные шумы).

Неоднородный шум

Полученные выше формулы легко модифицировать для случая неоднородного шума в толстом слое, например светоделителе или входном (частично пропускающем) зеркале, где световая мощность находится в подложке.

Во-первых заметим, неоднородность показателя преломления приведёт к замене (1.2.4) на некую $\widetilde{\Gamma}_j = G(\Gamma_j, d, n)$. Однако процедура вывода формул (1.2.9)-(1.2.10) практически не изменится, если положить

$$\Delta' = -i\frac{\partial G}{\partial d_j}\frac{\delta d_j}{G} + \frac{\partial G}{\partial n_j}\frac{\delta n_j}{G}. \tag{1.2.11}$$

Тогда, помимо Δ_j, изменения коснутся только $\zeta_k \to \zeta_k' = \widetilde{z}_k \frac{\delta n(d_k)}{\delta n_k(0)} - z_k$.

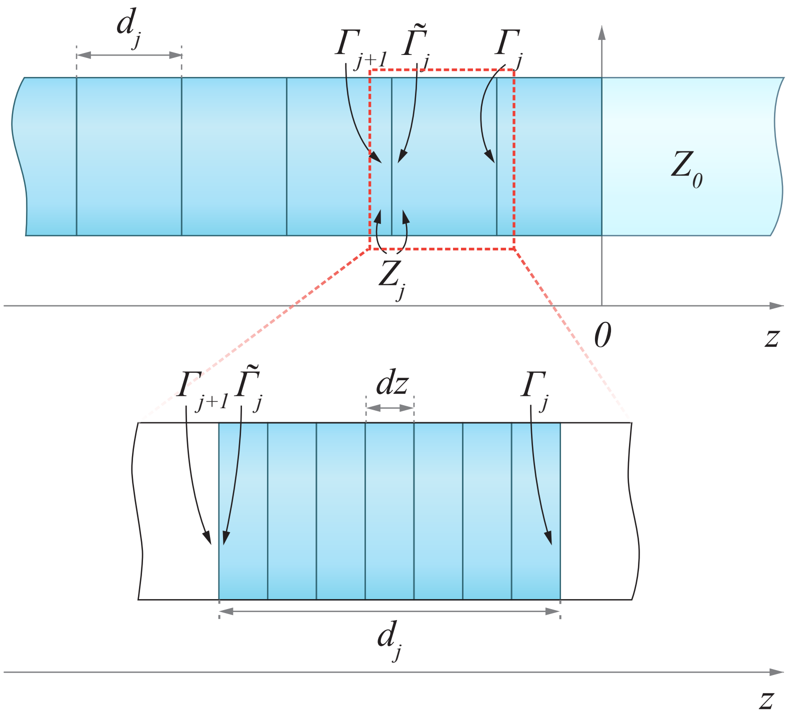

Рис. 1.6: Предельный переход для учёта неоднородного шума.

Чтобы получить вид $G(\Gamma(z), d, n)$ рассмотрим один неоднородный слой и представим его в виде последовательности более мелких однородных (см. рис. 1.6 внизу). Для этого применим формулы (1.2.9)-(1.2.10) и сделаем предельный переход $n_j = n(z) \approx n$ – невозмущённый показатель преломления слоя, $\delta n_j = \delta n(z)$ и $d_j \to dz \to 0$ ($\varphi_j \to d\varphi$). Тогда

$$\Gamma_{j+1} = \frac{g_{j+1,j} + \widetilde{\Gamma}_j}{1 + g_{j+1,j}\widetilde{\Gamma}_j} = \widetilde{\Gamma}_j = \Gamma_j e^{-i\varphi_j} = \Gamma_1 e^{-i\sum^j \varphi_k}, \tag{1.2.12}$$

Здесь и далее индексами обозначаются подслои, связанные с предельным переходом, а не номера слоёв всего покрытия. Для слоя толщиной L $\Gamma_{N+1} = \Gamma_1 e^{-i\sum^N \varphi_j} = \Gamma_1 e^{-2ik_0 nL}$. Перепишем коэффициенты (1.2.10). Заметим, что $z_k = \widetilde{z}_{k-1}$ и упростим далее выражения используя $\Gamma_1 = e^{-i2\widetilde{\varphi}}$ и вспоминая, что в следствие предельного перехода $\sum^{k-1}\varphi_l = \sum^{k}\varphi_l - \varphi_k = 2k_0nz - 2k_0ndz$ (подробнее см. прил. П.2.2.):

$$z_k = i\sin\left(2k_0n(z-dz) + 2\widetilde{\varphi}\right), \tag{1.2.13}$$

$$\widetilde{z}_k = i\sin\left(2k_0nz + 2\widetilde{\varphi}\right). \tag{1.2.14}$$

$$\zeta_k = ik_0n\cos\left(2k_0nz + 2\widetilde{\varphi}\right)dz. \tag{1.2.15}$$

Таким образом, для малой неоднородности в слое толщиной L на начальном коэффициенте отражения Γ_1, отражение на поверхности

$$\Gamma'_{N+1} = \Gamma_1 e^{-2ik_0nL}(1 - 4ik_0\int_0^L \delta n(z)\cos^2\left(k_0nz + i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\Gamma_1}\right)dz) = \tag{1.2.16}$$

$$= \Gamma_1 e^{-2ik_0nL}(1 - 2ik_0\int_0^L \delta n(z)dz + \\ - ik_0\int_0^L \delta n(z)\left(\cos(2k_0nz + \varphi_1)\frac{1+\Gamma_1^2}{\Gamma_1} + i\sin(2k_0nz+\varphi_1)\frac{1-\Gamma_1^2}{\Gamma_1}\right)dz), \tag{1.2.17}$$

где Ln комплексный логарифм. При выборе начального коэффициенте отражения $\Gamma_1 = -1$, этот результат напоминает усреднение по $\sin^2$, использованное в [36] для расчёта шума в подложке. Выбор такого усреднения объясняется тем, что они считали, что в подложке устанавливается стоячая волна, что и требует такого Γ_1. В реальности $\Gamma_1 = \frac{n_{SiO_2}-1}{n_{SiO_2}+1} = 0.18$, что приведёт к замене синуса на комплексную экспоненту. Однако, данная замена аналогична сдвигу стоячей волны, который, по словам авторов, учтён в их работе.

Заметим, что Γ_1 получено из бесшумного Γ_0, то есть формула (1.2.16) описывает переход между бесшумными слоями. Для встраивания такого неоднородного слоя в покрытие, нам понадобится формула для добавки коэффициента отражения при переходе внутри шумящего неодногодного слоя, чтобы использовать вместо (1.2.4). Поэтому нам придётся вычесть влияния перехода в этот слой и из этого слоя. Переход наружу (левая граница) получается как обратный переход от $j+1$ слоя к j:

$$\widetilde{\Gamma}_j = \frac{\Gamma_{j+1} - g_{j+1,j}}{1 - g_{j+1,j}\Gamma_{j+1}} = \Gamma_{j+1}\left(1 + \widetilde{z}_j\frac{\delta n(d_j)}{n}\right) \tag{1.2.18}$$

Для перехода в слой (правая граница), так как $\prod \frac{z_k}{\widetilde{z}_{k-1}} = 1$ внутри слоя, эта добавка будет такой же как и у единственного слоя

$$\Gamma'_1 = \Gamma_1\left(1 + z_1\frac{\delta n(0)}{n}\right). \tag{1.2.19}$$

где $\delta n(d_j)$ на передней (левой) стороне слоя. В итоге получим

$$\widetilde{\Gamma}_N = \Gamma_1 e^{-2ik_0nL}(1+\zeta'\frac{\delta n(0)}{n} - 4ik_0\int_0^L \delta n(z)\cos^2\left(k_0nz + i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\Gamma_1}\right)dz), \tag{1.2.20}$$

где $\zeta' = \widetilde{z}_k\frac{\delta n(L)}{\delta n_k(0)} - z_k$

Таким образом для полного покрытия (рис. 1.6 вверху)

$$\begin{aligned}\Delta'_j = &- 2k_0n_j\delta d_j - 2k_0\int_z^{z-d_j}\delta n_j(\xi)d\xi + \\ &+ \zeta'_j\frac{\delta n_j(0)}{n_j} - 2ik_0\int_{d_j}\delta n(z)\cos\left(2k_0nz + i\,\mathrm{Ln}\left(\Gamma_j\right)\right)dz.\end{aligned} \tag{1.2.21}$$

Тогда, помимо Δ_j, изменения коснутся только $\zeta_k \to \zeta'_k = \widetilde{z}_k\frac{\delta n(d_k)}{\delta n_k(0)} - z_k$.

Таким образом подобное неоднородное расширение формул (1.2.9)-(1.2.10) не приводит ни к каким новым эффектам. Для шума покрытия это расширение не имеет смысла, так как расчёты спектральных плотностей (см. далее) проводятся в приближении тонкого покрытия, приводя к постоянной деформации внутри слоёв.

Шум пропускания

Сказанное выше относится к свету отражённому от зеркала. Однако в структуре интерферометра имеются зеркала пропускающие излучение. Прохождение сквозь флуктуирующую среду должно вносить свою часть неопределённости в фазу. Рассмотрим падающие и отражённые волны на каждой границе слоёв

$$E_I + \Gamma'_{N+e}E_I = E_Ne^{ik_0n_Nd'_N} + E_N\Gamma'_Ne^{-ik_0n_Nd'_N} \tag{1.2.22}$$

$$E_N + \Gamma'_NE_N = E_{N-1}e^{ik_0n_{N-1}d'_{N-1}} + E_{N-1}\Gamma'_{N-1}e^{-ik_0n_{N-1}d'_{N-1}} \tag{1.2.23}$$

где E_I – электрическое поле падающей волны, E_k – поле на входной (левой) границе k-слоя. Тогда

$$E_m = \frac{1+\Gamma'_{m+1}}{e^{ik_0n_md'_m} + \Gamma'_me^{-ik_0n_md'_m}}E_{m+1} = \prod_{k=m}^{N}\frac{1+\Gamma'_{k+1}}{e^{ik_0n_kd'_k} + \Gamma'_ke^{-ik_0n_kd'_k}}E_I \tag{1.2.24}$$

Для амплитудного коэффициента пропускания получим

$$\tau' = (1+\Gamma'_{N+e})\prod_{k=1}^{N}\frac{1+\Gamma'_k}{1+\Gamma'_ke^{-i\varphi'_k}}e^{-ik_0n_kd'_k} \tag{1.2.25}$$

Отмечу, чтобы не смущать знаком + в первой скобке, что это энергетический коэффициент пропускания получается из амплитудного путём возведения в квадрат и деления на отношение показателей преломления в исходной и конечной среде, так как поток энергии равен

$cnE^2/2$. Проведя прямую подстановку (1.2.9)-(1.2.10) получим

$$\tau'_{N+e} = \tau_{N+e}\left(1+\sum_{j=1}^{N}\left(i(M_j+T_j)\Delta_j + (dt_j z_j - M_j\zeta_j)\frac{\delta n_j}{n_j}\right)\right) \quad (1.2.26)$$

$$dt_k = \frac{\Gamma_k(1-e^{-i\varphi_k})}{(1+\Gamma_k)(1+\Gamma_k e^{-i\varphi_k})} \quad (1.2.27)$$

$$M_j = \sum_{k=j+1}^{N} dt_k \prod_{m=j+1}^{k}\frac{z_m}{\widetilde{z}_{m-1}} + \frac{\Gamma_{N+e}}{1+\Gamma_{N+e}}\prod_{m=j+1}^{N+e}\frac{z_m}{\widetilde{z}_{m-1}} \quad (1.2.28)$$

$$T_k = \frac{1}{2}\frac{1-\Gamma_k e^{-i\varphi_k}}{1+\Gamma_k e^{-i\varphi_k}} \quad (1.2.29)$$

1.2.2. Броуновская ветвь шумов

Броуновская ветвь шумов происходит из флуктуаций механического напряжения в веществе. Они преобразовываются в смещение поверхности тела и флуктуации его толщины по закону Гука. Используя фотоупругость как механизм преобразования флуктуаций толщины во флуктуации показателя преломления

$$\Delta_j = -2k_0 n_j\left(1-\frac{n_j^2}{2}p_j\right)\delta d_j = -2k_0 n_j\psi_j\delta d_j, \quad (1.2.30)$$

$$-\frac{\delta n_j}{n_j} = \frac{n_j^2 p_j}{2}\frac{\delta d_j}{d_j} = -\frac{n_j^2 p_j}{\varphi_j(2-n_j^2 p_j)}\Delta_j = \gamma_j\Delta_j, \quad (1.2.31)$$

приведём все формулы (1.2.9)-(1.2.10) к вариации толщины δd_j:

$$\delta\varphi_c = \sum_{j=1}^{N}\beta'_j\delta d_j, \quad (1.2.32)$$

$$\delta\Gamma_c = \sum_{j=1}^{N}\beta''_j\delta d_j, \quad (1.2.33)$$

где

$$\beta'_j = -\,2k_0 n_j\psi_j\,\mathrm{Im}\left[\prod_k \frac{z_k}{\widetilde{z}_{k-1}}(i+\zeta_j\gamma_j)\right], \quad (1.2.34)$$

$$\beta''_j = -\,2k_0 n_j\psi_j\,\mathrm{Re}\left[\prod_k \frac{z_k}{\widetilde{z}_{k-1}}(i+\zeta_j\gamma_j)\right], \quad (1.2.35)$$

в соответствии с (1.2.9). Теперь рассмотрим зеркало как часть плеча интерферометра. Смещение поверхности зеркала порождает фазовый шум на выходе интерферометра. Допустим, зеркало сжалось (рис. 1.7). Тогда появляется дополнительный промежуток $-\delta d$ (ак как $\delta d < 0$ при сжатии), который придётся пройти свету, прежде чем войти в зеркало. Тогда сдвиг фаз

$$\delta\varphi_g = -2k_0\sum_{j=1}^{N}(-\delta d_j). \quad (1.2.36)$$

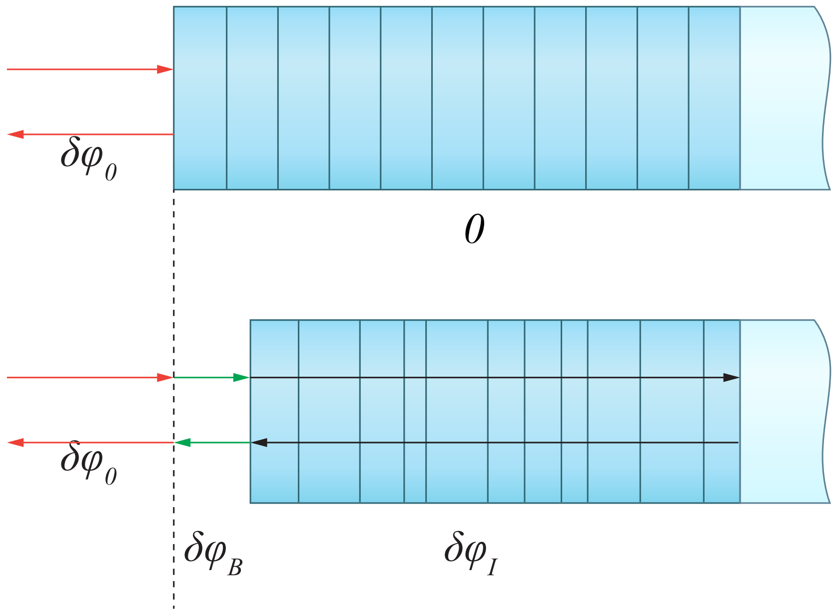

Рис. 1.7: Фазовый сдвиг световой волны, отражённой от невозмущённого (сверху) и возмущённого (снизу) зеркал. $\delta\varphi_0$, $\delta\varphi_B$ и $\delta\varphi_I$ – исходный сдвиг фаз, сдвиг от смещения поверхности и сдвиг от сбоя интерференции ($\delta d_j < 0$).

Полный сдвиг фаз, внесённый возмущённым покрытием, будет

$$\delta\varphi_\Sigma = -2k_0 \sum_{j=1}^{N} \left[z_{N+e}(-1)^{N-j} \widetilde{z}_j^{-1} \psi_j n_j - 1 \right] \delta d_j, \tag{1.2.37}$$

где мы учли, что внутри $\lambda/4$-отражателя все величины действительны, что позволяет так же упростить $\beta'_j = -2k_0 n_j \psi_j z_{N+e}(-1)^{N-j}\widetilde{z}_j^{-1}$ (подробнее в приложении П.2.1.).

Так же важно заметить, что в приближении “хорошего зеркала” $\Gamma_{N+e} \to 1$ (В этом случае $Z_N \to 0$ или $Z_N \to \infty$ в зависимости от внешнего слоя) амплитудный дефект отражения от каждого слоя $\beta''_j = (-1)^{N-j} z_{N+e} \gamma_j \widetilde{z}_j^{-1} \frac{Z_j}{\eta_j} \to 0$. Однако для строгого учёта этого эффекта необходимо учесть корреляции и взаимодействие в интерферометре, что будет сделано далее.

Выражение перед δd_j представляет из себя коэффициент шума, показывающий вклад каждого слоя в полный шум. Этот коэффициент имеет разный знак в зависимости от того, какая часть шума преобладает в слое – интерференционная (знак “$-$”) или смещения поверхности (знак “$+$”), однако значение имеет только его модуль – шумы слоёв складываются не когерентно.

Используя полученные формулы можно построить графики коэффициентов шума и рассчитать значения спектральной плотности полного шума. Такой график изображён на рис. 1.8 с сохранением знака из формулы (1.2.37). Можно видеть, что интерференционная часть значительна только для нескольких внешних слоёв, в то время как броуновский (смещения

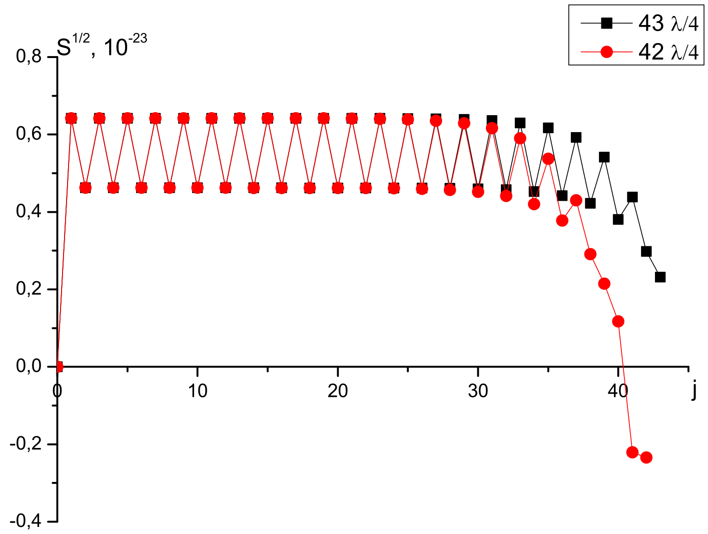

Рис. 1.8: Коэффициенты шума слоёв (сохраняя знак) для покрытий из 42 (круги) и 43 (квадраты) слоёв на кварцевой подложке.

поверхности) шум представляет из себя основу шума. Однако в некоторых слоях наблюдается полная компенсация шума. Также можно заключить, что интерференция велика только там, где мощность светового поля не мала, о чём так же говорилось в [37].

Расчёты показывают, что в интерференционном покрытии внутренние слои имеют "броуновский" тип шума и вносят основную долю в полную спектральную плотность. Шум во внешних слоях имеет интерференционную природу. В небольшой же предвнешней области наблюдается минимум шума.

Стоит также заметить, что вклад каждого слоя формально состоит из трёх слагаемых: броуновский (смещения поверхности), интерференционный и фотоупругий:

$$\delta\varphi_\Sigma = \sum 2k_0\delta d_j + \frac{\partial\varphi}{\partial d_j}\delta d_j + \frac{\partial\varphi}{\partial n_j}\frac{\partial n_j}{\partial d_j}\delta d_j, \tag{1.2.38}$$

где φ обозначает фазу комплексного коэффициента отражения. Полученные формулы (1.2.9)–(1.2.10) дают аналитическое приближение для производных в (1.2.38). Распределение знаков между этими слагаемыми может быть проиллюстрировано следующим рассуждением. Допустим, покрытие сжалось, тогда вклад смещения поверхности даёт положительный набег фаз, так как представляет из себя набег фазы не внутри, а снаружи зеркала (рис. 1.7). Сжатие слоёв приводит к увеличению их показателей преломления, так же давая положительный вклад в фазу. В то же время уменьшение толщин слоёв приводит к уменьшению и набега фазы в них, производя желаемую компенсацию предыдущих двух эффектов. Казалось бы, фотоупругая часть оказывает отрицательное воздействие на компенсацию, однако, как показывают расчёты, он может и улучшать общую картину, компенсируя слишком большую интерференцию во внешних слоях.

Выражение (1.2.38) удобно для проведения численного расчёта, так как производные легко берутся методом конечных разностей. Таким образом, формулы (1.2.9)-(1.2.10) были проверены численно.

Полный интерферометр

Чтобы учесть шумы амплитуды (1.2.33) и пропускания (1.2.26)-(1.2.29) придётся построить полную модель интерферометра так как первые должны быть приведены к шуму фазы, а вторые появляются только в процессе взаимодействия света с входным зеркалом. В принципе, формально можно построить графики коэффициентов шума для шумов пропускания (см. рис. 1.9) однако, как будет показанно ниже, результат точных расчётов для полной модели будет несколько сложнее.

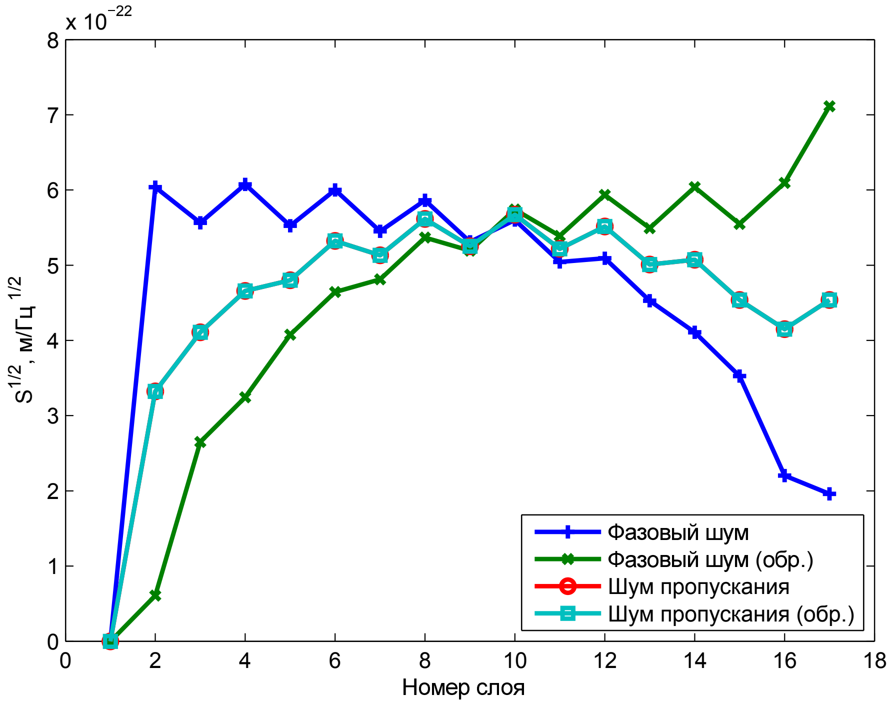

Рис. 1.9: Коэффициенты шума слоёв (сохраняя знак) для покрытия из 16 слоёв (входное зеркало) на кварцевой подложке для прямого и обратного прохождения лучей.

Рассматриваемый интерферометр представляет собой по сути интерферометр Майкельсона, вместо концевых зеркал которого стоят интерферометры Фабри-Перо. Эти концевые интерферометры несут сигнал в фазе своего коэффициента отражения. Можно получить формулы для шумового и сигнального изменения коэффициента отражения через коэффициенты отражения и пропускания его зеркал. Обозначим первым индексом направление движения луча, а вторым тип зеркала так что $_{in_{in}}$ – входное зеркало, внутрь Фабри-Перо, а $_{out_{in}}$ – входное зеркало, из Фабри-Перо. Так же введём $\Gamma_{\text{FP0}} = \Gamma_{FP} - \Gamma_{in_{in}} = \frac{\Gamma_{out_{out}}\tau_{in_{in}}\tau_{out_{in}}e^{-i2kL}}{1-\Gamma_{out_{out}}\Gamma_{out_{in}}e^{-i2kL}}$. Тогда для Фабри-Перо длиной L

$$\delta\Gamma_{FP} = \Gamma_{\text{FP0}}\left(\frac{\delta\tau_{in_{in}}}{\tau_{in_{in}}} + \frac{\delta\tau_{out_{in}}}{\tau_{out_{in}}} + \frac{\Gamma_{\text{FP0}}}{\tau_{in_{in}}\tau_{out_{in}}}\left(\delta\Gamma_{out_{in}} + \frac{\delta\Gamma_{out_{out}}}{\Gamma^2_{out_{out}}e^{-i2kL}}\right)\right) + \delta\Gamma_{in_{in}} \tag{1.2.39}$$

для шума и

$$\delta\Gamma_S = -2ik\frac{\Gamma^2_{\text{FP0}}}{\Gamma_{out_{out}}\tau_{out_{in}}\tau_{in_{in}}e^{-i2kL}}\delta L \tag{1.2.40}$$

для сигнала. Стоит заметить, что здесь появляется „обратный“ шум, связанный с прохождением луча входного зеркала в обратном по отношению к зеркалу (внутрь Фабри-Перо) направлении. Его учёт важен так как этот шум коррелирован с шумом входного зеркала и может его усилить или подавить.

При условии что светоделитель не вносит дополнительных шумов и производит 50/50 деление, для выходной интенсивности интерферометра Майкельсона можно записать

$$I = |\Gamma_1|^2 + |\Gamma_2|^2 + 2|\Gamma_1||\Gamma_2|\cos(2kd + \varphi) \tag{1.2.41}$$

$$\delta I_1 = 2(\mathrm{Re}[\delta\Gamma_1^*(\Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-2ikd})] + \mathrm{Re}[\delta\Gamma_2(\Gamma_2^* + \Gamma_1^* e^{-2ikd})]) \tag{1.2.42}$$

где Γ и $\delta\Gamma$ – коэффициенты отражения Фабри-Перо в плечах и их возмущения, d – разность длин плеч части интерферометра до Фабри-Перо, φ – угол между комплексными коэффициентами отражения Фабри-Перо. Тогда для сигнала и шума одинаковых интерферометров в плечах получим

$$\langle\delta I_1\rangle = 4|\Gamma|^2\,\mathrm{Im}[\hat{S}]\sin 2kd\delta L, \tag{1.2.43}$$

$$S_{\delta I_1} = 4|\Gamma|^4(\mathrm{Re}[\hat{N}^*(1 + e^{-2ikd})]^2 + \mathrm{Re}[\hat{N}(1 + e^{-2ikd})]^2)S_\Delta, \tag{1.2.44}$$

где $\hat{S}$ и $\hat{N}$ – производные коэффициентов отражения по сигналу и по шумам. Здесь стоит заметить, что при некоторых значениях длин плеч сигнал (а точнее усиление сигнала) становится равным нолю и система становится не чувствительна к гравитационным волнам в линейном приближении.

Комбинируя эти формулы с (1.2.39) и (1.2.40), и принимая $\delta L = 1$, можно получить величину, обратную отношению сигнал-шум. Если не учитывать амплитудную часть шума, эта величина будет численно равна $\sqrt{2}^{-1}$ шума фазы и может быть выражена в единицах смещения зеркала (м/Гц$^{1/2}$). В простейшем случае она равна шуму концевого зеркала с указанным множителем, причём множитель этот появляется вследствие того, что за счёт интерферометра Майкельсона сигнал увеличивается вдвое по амплитуде, в то время как шум – вдвое

Тип	$\lambda/4+\lambda/2$	GWINC	GWINC $L_{1,2}=1.04\lambda/4$
Броуновский 10^{-21}м$/\sqrt{\text{Гц}}$	$5.01\times\sqrt{2}$	$4.88\times\sqrt{2}$	$4.88\times\sqrt{2}$
χ в интерферометре	11.4%	−16.6%	10.8%
χ с интерференцией	15.9%	−3.4%	15.5%
χ с фотоупругостью	14.9%	−6.3%	14.5%
χ с амплитудой	14.8%	−6.5%	14.4%
χ с пропусканием	14.8%	13.3%	14.7%
χ с „обратным“ шумом	14.8%	−111%	14.0%

Таблица 1.1: Поправки ($\chi=(1-\sqrt{S}/\sqrt{S_{Br}})*100\%$) для эффективного шума в интерферометре по отношению к сумме чисто броуновских шумов входного и выходного зеркал. $\lambda/4+\lambda/2$ – покрытия сформированы из $\lambda/4$-слоёв, с внешним $\lambda/2$-слоем. GWINC – оптимальные покрытия, рассчитанные в Gravitation Wave Interferometer Noise Calculator[38].

по спектральной плотности. Эту величину мы назовём эффективным или нормированным шумом, она удобна для сравнения с предыдущими результатами. Однако, прямое отношение сигнал-шум более удобно для численного анализа, так как усиление сигнала проходит через ноль (см. (1.2.43)).

Поскольку отношение сигнал-шум зависит от длин плеч, это порождает задачу исследования этой зависимости. В целом зависимость достаточно слабая за исключением областей линий нулевого сигналла.

Стоит заметить, что подбором длин плеч можно добиться режима наименьшего шума. Изменение структуры зеркал приводит всего лиш к смещению этого режима на диаграммах вдоль линии $L_1=L_2$ (см рис. 1.10 внизу). В этом режиме всё определяется броуновским шумом концевых зеркал и интерференцией в них (см. табл. 1.1 третья колонка). При этом эффективный шум меньше прямой суммы броуновских шумов на 10-12%. Поэтому далее будет рассматриваться только интерференционная поправка фазового шума.

1.2.3. Спектральная плотность шума

Используя (1.2.37), можно оценить спектральную плотность флуктуаций покрытия, если известны спектральные плотности флуктуаций толщины каждого слоя $S_{\delta d}$. В модели независимых тонких слоев, лежащих на подложке в виде бесконечного полупространства, каждый слой ведёт себя, как если бы он был единственным слоем на этой подложке. Такая модель часто используется [21, 14] и её решение хорошо известно [19, 37]. Однако в нашем

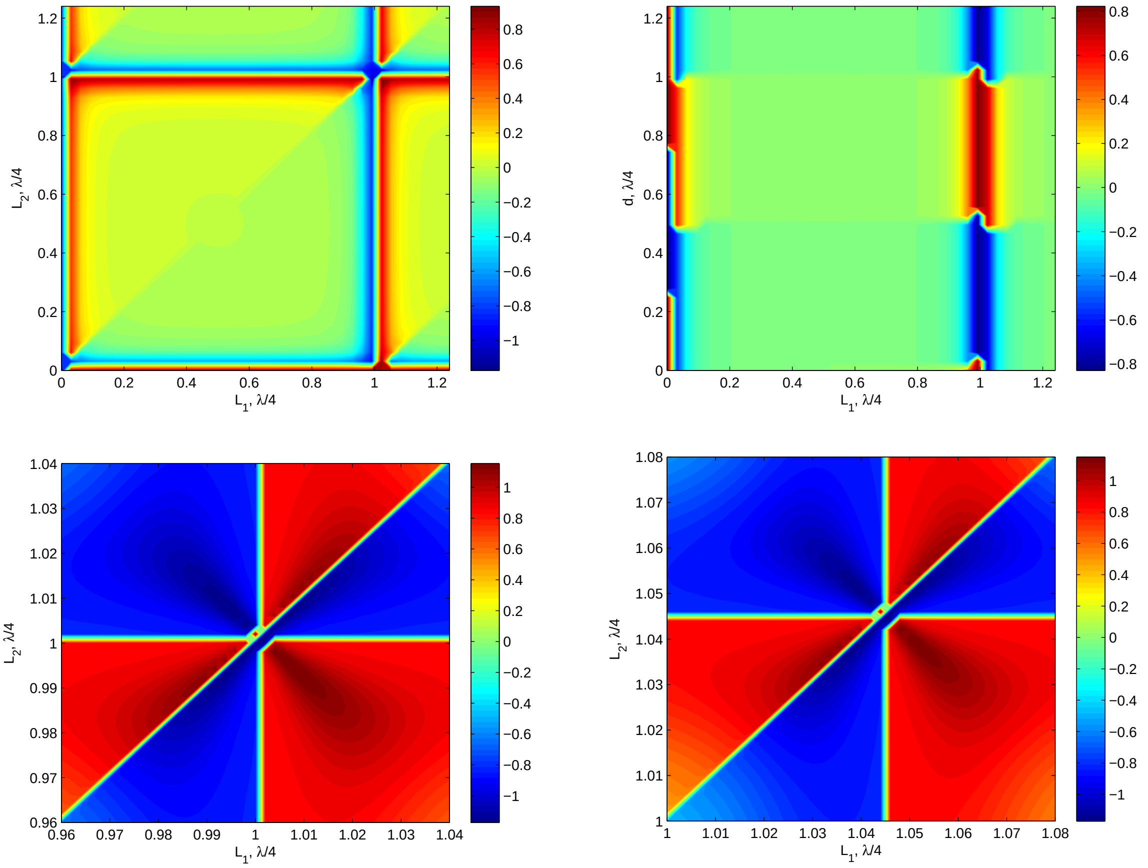

Рис. 1.10: Отношения сигналл-шум, нормированный на прямую сумму броуновских шумов. На рисунках результаты для $\lambda/4 + \lambda/2$ покрытия, кроме правого нижнего рисунка для покрытия из GWINC. Внизу увеличенные области наименьшего шума. Видны области нулевого сигнала (зелёные) и места снижения шума – тёмные. Изменение знака означает, что сигнал находится в противофазе к принимаемой гравитационной волне.

случае это решение придётся немного видоизменить, так как в нём присутствует не только $S_{\delta d}$, но и составляющая, связанная с параллельным переносом слоя, т.е. смещением границы подложки под действием слоя S_{x_0}.

Флуктуационно-диссипационная теорема

Для расчёта спектральной плотности флуктуаций используется флуктуационно-диссипацион теорема (ФДТ). ФДТ связывает флуктуации системы (их спектральную плотность) с её диссипативными свойствами. ФДТ выводится из предположения о том, что отклик системы на малое внешнее воздействие имеет ту же природу, что и отклик на спонтанные флуктуации. Если отклик $x(t)$ на внешнее воздействие $F(t)$ можно представить в виде

$$\tilde{x}(\Omega) = \tilde{\alpha}(\Omega)\tilde{F}(\Omega), \tag{1.2.45}$$

то спектральная плотность флуктуаций S_x величины x связана с мнимой частью обобщённой восприимчивости $\mathrm{Im}[\tilde{\alpha}(\Omega)]$ или рассеянной системой энергией U_{diss} следующим образом [39]:

$$S_x(\Omega) = \frac{2k_BT}{\Omega}\,\mathrm{Im}[\tilde{\alpha}(\Omega)] = \frac{2k_BT}{\Omega}\frac{2U_{diss}}{\tilde{F}^2(\Omega)}. \tag{1.2.46}$$

При этом совпадение решений через восприимчивость и через энергию может являться критерием правильности выбора пары x и F.

Чтобы произвести правильное разделение, согласно ФДТ, нужно решить следующие задачи (рис. 1.11):

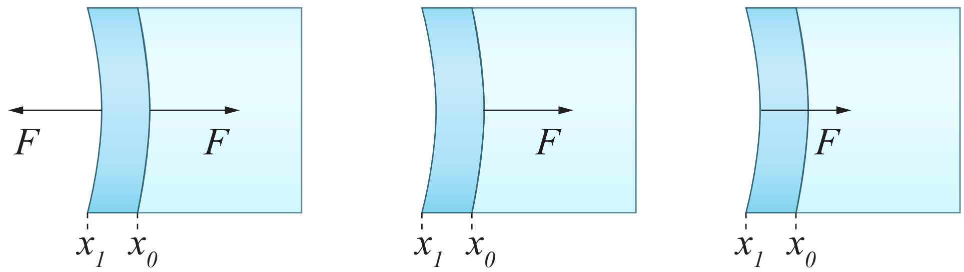

Рис. 1.11: Схемы приложения сил к задачам для ФДТ.

1. симметричная ($S^t(\Omega)$) - противонаправленные силы приложены к слою, ищем изменение толщины слоя ($x = x_0 - x_1 = \delta d$);

2. антисимметричная задача “0” ($S^b(\Omega)$) - сила приложена к поверхности подложки, ищем смещение поверхности подложки ($x = x_0$).

Используем способ решения упругой задачи из [19], где использован метод типа последовательных приближений: берётся точное решение задачи для бесконечного полупространства и пересчитывается в напряжения и деформации покрытия через граничные условия. На этом решение в [19] заканчивается и полученные формулы используют для расчёта флуктуаций зеркала с покрытием:

3. антисимметричная задача “1” ($S(\Omega)$) - сила приложена к поверхности покрытия, ищем смещение поверхности покрытия ($x = x_1$).

Если потери слоя, отвечающие за расширение и сдвиг равны, то можно утверждать, что флуктуации в задачах “1” и “2” не коррелированы. Тогда сумма решений первых двух задач должна совпадать с решением третьей. Используя вышеописанное решение для симметричного случая получим:

$$S^t(\Omega)_j = \frac{4k_BT}{\pi w^2\Omega}\frac{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}{Y_j(1-\nu_j)}\phi_j d_j. \tag{1.2.47}$$

где ν_j коэффициент Пуассона j-ого слоя, Y_j – его модуль Юнга (Y_s и ν_s – параметры подложки), ϕ_j – угол механических потерь (по энергии), w радиус Гауссова пятна света на поверхности зеркала, Ω – круговая частота, k_B – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура (подробнее в приложении П.3.). Тогда для разделённого шума получим

$$\begin{aligned} S(\Omega)_j &= S^t(\Omega)_j + S^b(\Omega)_j = (\xi_j^c + \xi_j^s)\phi_j d_j = \xi_j \phi_j d_j, \\ \xi_j^t &= \frac{4k_BT}{\pi w^2 \Omega}\frac{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}{Y_j(1-\nu_j)}, \\ \xi_j^b &= \frac{4k_BT}{\pi w^2 \Omega}\frac{Y_j^2(1+\nu_s)^2(1-2\nu_s)^2}{Y_s^2 Y_j(1-\nu_j^2)} \end{aligned} \tag{1.2.48}$$

Здесь ξ_j^t отвечает за шум толщины j-го слоя покрытия, а ξ_j^b за обусловленный им шум смещения (изгиб).

Поправки к Броуновскому шуму смещения

Можно показать, что рассмотренное выше решение не является полным. Для этого проведём следующее рассуждение: пусть у нас есть полубесконечная подложка. Напылим на неё слой того же материала. В результате получим всё то же полубесконечное пространство и $S(\Omega) = 0$. Теперь предположим, что потери в кварцевом слое отличаются от потерь в кварцевой подложке. Тогда, очевидно получим шум в виде $S(\Omega) = \xi_j^{BA} d_j(\phi_c - \phi_s)$, где ϕ_s - потери в подложке. Теперь положим потери напылённого слоя равными нолю. Тогда отрицательный знак $S(\Omega) = -\xi_j^{BA} d_j \phi_s$ и присутствие в нём потерь подложки связан с тем, что из-за верхнего слоя смещение шумящей границы затруднено и шум подложки заглушается (здесь стоит вспомнить, что $S(\Omega)$ – всего лишь часть полного шума, относящаяся к покрытию и должна быть далее сложена с другими шумами и шумом подложки, в частности).

Однако, если мы исследуем решение (1.2.48), то мы не увидим вышеописанного поведения. Это связано с тем, что при решении был упущен последний шаг метода последовательных приближений – пересчёт в обратное возмущение подложки покрытием. Такой пересчёт должен привести к появлению в сумме (1.2.48) сдвигового члена вида $-\xi_j^{BA} d_j \phi_s$. В общем случае расчёт для ξ_j^{BA} сложен. Качественными рассуждениями можно установить более точный вид спектральной плотности (см. приложение П.3.1.). Однако, поскольку этот член пропорционален потерям подложки, которые на несколько порядков меньше, чем в покрытии, им можно пренебречь. Поэтому далее будем пользоваться формулой (1.2.48).

Будем считать шум каждого слоя δd_j независимым $\langle \delta d_j^2 \rangle \to S(\Omega)_j$, $\langle \delta d_j \delta d_k \rangle = 0$. Тогда

Слой	σ	n	Y ГПа	ϕ
l	0.17	1.45	72	0.4×10^{-4}
h	0.23	2.06	140	2.3×10^{-4}

Таблица 1.2: Параметры слоёв с высоким (h) и низким (l) показателями преломления, использовавшиеся в моделировании. Так же использовалось $\lambda = 1.064$ мкм; $w = 0.06$ м; $T = 290$ К.

получим

$$S_\varphi = 4k_0^2 \sum_{j=1}^{N} [\left(\beta_j' - 1\right)^2 S^c(\Omega)_j + S^s(\Omega)_j], \tag{1.2.49}$$

$$S_\Gamma = 4k_0^2 \sum_{j=1}^{N} \beta_j''^2 S^c(\Omega)_j. \tag{1.2.50}$$

Первая сумма может быть упрощена а вторая становится равной нолю в приближении “хорошего зеркала” и четвертьволновых слоёв:

$$S_\varphi = 4k_0^2 \sum_{m=1}^{2} [S^c(\Omega)_m \left(\frac{a_m^2 \psi_m^2}{|n_1^4 - n_2^4|} - \frac{2a_m \psi_m}{|n_1^2 - n_2^2|} + N\right) + S^s(\Omega)_m N] \tag{1.2.51}$$

для $2N$ слоёв, и $S_\varphi + 4k_0^2 S_1^2$ для $2N+1$ слоёв, где $a_m = n_m^2$ при нулевом выходном импедансе ($2N$ слоёв с $n_1 < n_0$ или $2N+1$ с $n_1 > n_0$) и $a_m = n_1^2 n_0^2$ при бесконечном выходном импедансе ($2N$ слоёв с $n_1 > n_0$ или $2N+1$ с $n_1 < n_0$) (подробнее в приложении П.2.3., П.4.1.).

Для упрощения сравнения вместо спектральной плотности фазового шума мы будем далее использовать спектральную плотность смещения эффективной отражающей поверхности S_x в единицах м^2/Гц на частоте 100 Гц:

$$S_\varphi = 4k_0^2 S_x. \tag{1.2.52}$$

Вычисления проводились для зеркала с 42-43 слоями (21 пара SiO_2 Ta_2O_5 $\lambda/4$-слоёв на подложке из плавленого кварца с и без дополнительного $\lambda/4$-слоя), и материальными параметрами табл. 1.2.

Результаты показаны в таблице 1.3 в виде поправки к шуму смещения $\chi = \frac{\sqrt{S_{Br}} - \sqrt{S}}{\sqrt{S_{Br}}} \times 100\%$.

Интерференционная поправка к Броуновскому шуму (смещения) без учёта сдвига (изгиба) 6%, или 7.45% с учётом фотоупругости. Однако, в оксиде тантала вариации толщины много меньше его сдвига ($\xi_h^c = 0.36\xi_h^s$). Поэтому интерференционная поправка к полному Броуновскому шуму (смещения) всего 1.96%, или 2.33% с учётом фотоупругости.

Тип	$42 \times \lambda/4$	$41 \times \lambda/4 + \lambda/2$	$43 \times \lambda/4$
Пропускание, ppm	2.28	1.08	0.54
Броуновский 10^{-21}м$/\sqrt{\text{Гц}}$	6.32	6.35	6.45
χ с интерференцией	1.96%	2.34%	1.75%
χ с фотоупругостью	2.33%	1.85%	1.31%
χ с корректирующим слоем	2.33%	2.76%	1.81%

Таблица 1.3: Поправки для зеркал по отношению к броуновскому шуму. Для стандартного $41 \times \lambda/4 + \lambda/2$ зеркала корректирующим слоем является $\lambda/4$ вместо $\lambda/2$ (т.е. просто 42 слойное зеркало).

1.3. Варианты оптимизации

1.3.1. Дополнительный “корректирующий” слой

Можно пробовать изменять толщину внешнего “корректирующего” слоя в надежде уменьшить шум интерференционными эффектами. Этот метод оказался действенным при попытке уменьшения тепловой ветви шумов [4]. Используя формулы (1.2.9)-(1.2.10) получим

$$\begin{aligned} S_\varphi = &\sum_{m=1}^{2} [S^c(\Omega)_m \left(\frac{a_m^2\psi_m^2}{|n_1^4 - n_2^4|} - \frac{2a_m\psi_m}{|n_1^2 - n_2^2|} + N\right) \\ &+ S^s(\Omega)_m N] + S_c' \\ S_c' = &\left[\mathrm{Re}\left(\frac{z_{2N+c+e}}{\widetilde{z}_{2N+c}}\right)(1 \pm \gamma_c \sin(\phi_c)) n_c\psi_c - n_e\right]^2 S^c(\Omega)_c \\ &+ S^s(\Omega)_c \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

для $2N$ слоёв (+корректор), и $S_\varphi + 4k_0^2 S_{d1}$ для $2N+1$ слоёв (+корректор), где $a_m = n_m^2 n_c \,\mathrm{Re}(g_{2N+c+e})$ и знак “+” при нулевом импедансе предвнешнего слоя ($2N+c$ слоёв с $n_1 < n_0$ или $2N+c+1$ с $n_1 > n_0$) и $a_m = \frac{n_1^2 n_0^2}{n_c}\mathrm{Re}(g_{2N+1+c+e})$ и знак “−” при бесконечном импедансе предвнешнего слоя ($2N+c$ слоёв с $n_1 > n_0$ или $2N+c+1$ с $n_1 < n_0$). Здесь индекс “c” означает слой-корректор (подробнее в приложении П.2.4., П.4.2.).

Как показывает расчёт, результат оказался несущественным: для чётного исходного числа слоёв (42) минимум шума лежит при $n_c < 1$ в то время как подавление $\chi = \frac{\delta S}{S_{unmod}} \times 100\%$ составляет всего 0.04%. Для нечётного исходного числа слоёв (43) значение шума не опускается ниже 6.198×10^{-21} м$/\sqrt{\text{Гц}}$, что означает подавление менее чем на 0.69% (при $n_c = 3.6$; $d_c = 0.42\lambda/4$). Так же установлено, что для стандартного зеркала внешний кварцевый слой, толщиной $\lambda/2$ является оптимизирующим по отражению, а толщиной $\lambda/4$ – по шуму (см. табл. 1.3).

1.3.2. Корректирующий слой внутри покрытия

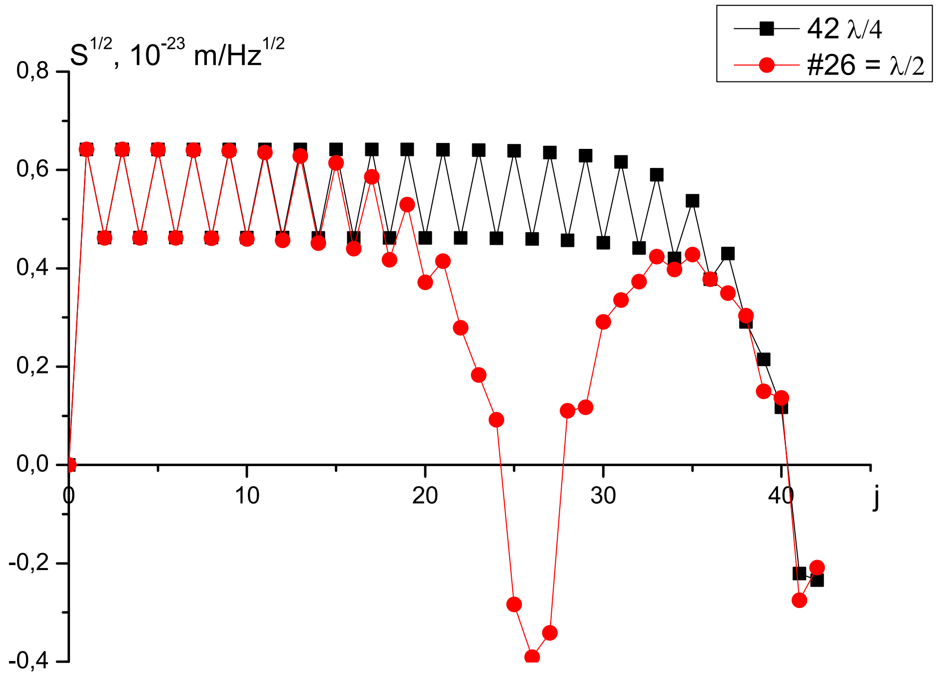

Рис. 1.12: Распределение шума в покрытии из 42 слоёв, сохраняя знак. Кварцевая подложка, квадраты – обычное зеркало; круги – зеркало с модифицированным слоем №26 (16 сверху) $d_m = 0.98\lambda/2$).

В статье [40] была предложена идея вставить в покрытие резонансный слой. Мы проверили это предложение численно (рис. 1.12). Максимальное подавление 4.4% достигается для слоя, близкого к $d = \lambda/2$ на глубине 15-ти слоёв. Однако, такая модификация приводит к повышению пропускания зеркала по мощности в 188 раз. При добавлении 8 пар слоёв для восстановления пропускания, эффект подавления пропадает (-5.5%).

1.3.3. Двустороннее и двойное зеркало

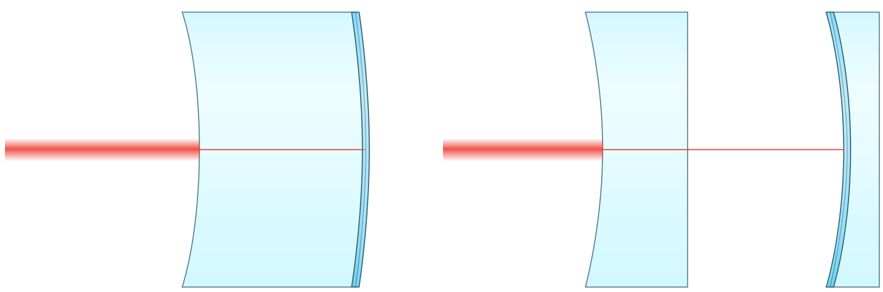

Рис. 1.13: Двойное зеркало (слева) и парное зеркало (справа) [41].

В работе [41] было рассмотрено зеркало с малым числом слоёв на передней стороне подложки и остальными слоями на задней стороне (двустороннее зеркало или эталон Халили, рис. 1.13 слева). Идея состоит в том, что только те несколько слоёв на передней стороне создают броуновский шум (смещения поверхности), в то время как задние слои не дают в него вклада, как бы двигаясь в противоположном направлении. В этом случае необходимо учитывать интерференцию, так как передние слои и подложка пропускают значительную мощность света, а значит в них будет сильная интерференционная поправка. Кроме того, в интерференционный шум будут давать вклад задние слои. Так же важно, чтобы шум покрытия в данном случае рассчитывался вместе с шумом подложки. Численные оценки показывают, что возможно подавление шума порядка 59%, что на 19% лучше, чем без учёта интерференции, так как шум подложки интерференционно подавляется. Подбором толщины подложки можно довести подавление до 78% (шум толщины подавляется на 80%). На рисунке 1.14 первое распределение (квадраты) – обычное зеркало, круги – эталон с четырьмя слоями на передней стороне и 38 на задней и толщиной подложки $d_s = N_s\lambda/2 + \lambda/4$, треугольники – тот же эталон, но с толщиной подложки $d_s = N_s\lambda/2 + 0.4\lambda/4$ (N_s – большое целое число). В первых двух случаях пропускание одинаковое. Добавление пары слоёв $\lambda/4$ на заднюю часть третьего эталона сделает его пропускание таким же, как и у первых двух (или лучше), но не изменит шума, так как задние слои не дают вклад в шум смещения и не дают значимого интерференционного шума из-за слабой интенсивности света в них. Основная проблема эталона – его чувствительность к точности изготовления подложки и её тепловому расширению. В частности неточность оптической толщины порядка $0.07\lambda/4$, соответствующая флуктуации температуры 6 мК, увеличивает шумы на 5%.

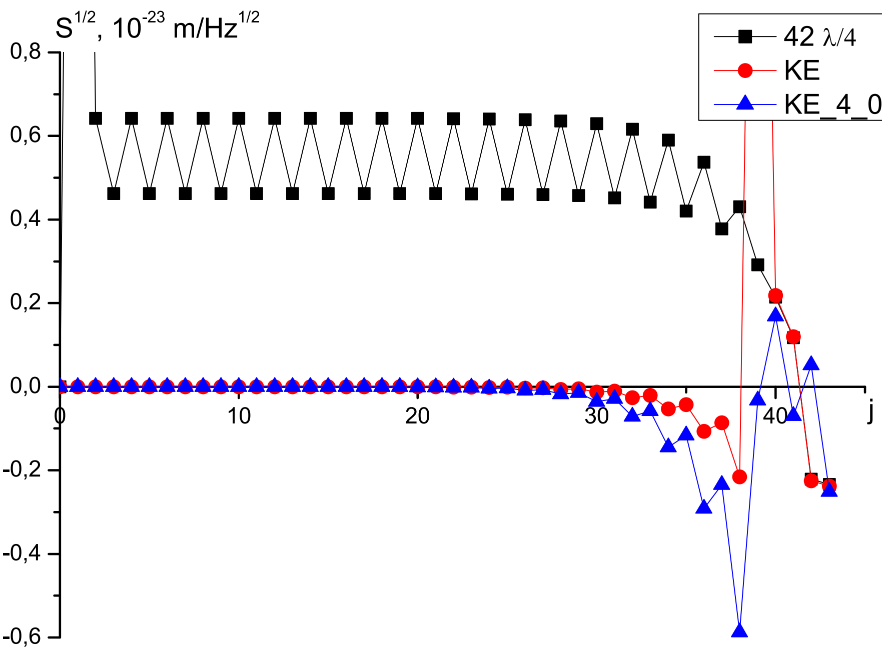

Рис. 1.14: Вклад слоёв в шум толщины, сохраняя знак. Кварцевая подложка, квадраты – $\lambda/4$ стандартное покрытие; круги – соответствующий эталон ($\chi = 59\%$); треугольники – модифицированный эталон ($\chi = 78\%$).

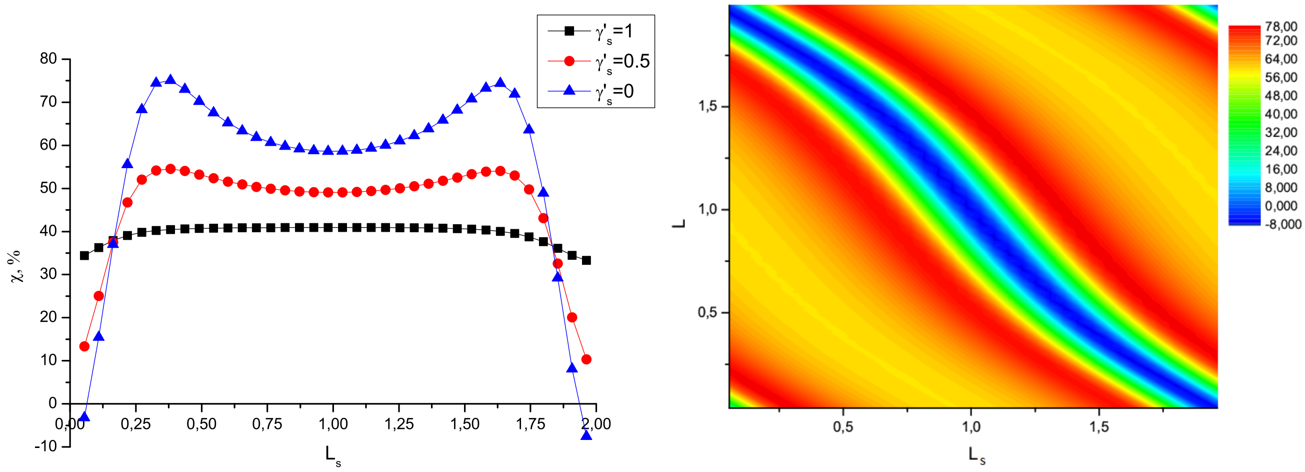

Рис. 1.15: Слева – подавление в эталоне в зависимости от толщины L_s подложки при разных отношениях шумов толщины и полного шума $\gamma_s' = \frac{\xi_s^c}{\xi_s}$ в подложке. Справа – подавление в двойном зеркале в зависимости от расстояния и толщины подложки первого зеркала. длины в единицах $\lambda/4$

Та же идея может быть реализована в другой геометрии (двойное зеркало или резонатор Халили, [41], рис. 1.13 справа) с двумя независимо подвешенными зеркалами вместо одного. При этом первое зеркало должно иметь малое число слоёв и, следовательно, малый шум смещения, а второе – давать требуемое отражение. В такой геометрии оценки дают значение подавления 81% (шум толщины подавляется на 92%). Чувствительность к величине зазора между зеркалами вдвое выше, однако эта система настраиваемая, и зазор может контролироваться в реальном времени.

Недостаток обоих схем в повышенной мощности излучения циркулирующей внутри подложки, что может привести к нежелательному нагреву и, в частности, к тепловой линзе – искривлению волнового фронта из-за неоднородности показателя преломления, вызванного нагревом. Так же важно отметить, что при определённых параметрах системы (толщины подложки и зазора, количество “передних” слоёв) интерференционная часть может не только не приводить к улучшениям, но даже ухудшать картину (рис. 1.15). Например, если толщина подложки эталона равна чётному числу четвертей длин волн, или толщины подложки и зазора двойного зеркала равны нечётному их числу, то шум покрытия интерференционно усиливается и эффект подавления исчезает ($\chi = -7\%$). Максимальный эффект сильно зависит от отношения спектральных плотностей шума толщины и изгиба, которое пока неизвестно. Можно показать, что эффект уменьшается практически линейно от 40 до 2 % вместе с $\gamma_s' = \frac{\xi_s^c}{\xi_s}$.

Стоит так же отметить, что в оба эти расчёта не окончательные, так как в них не учитывается конечность зеркала, которая может сказаться на результатах (особенно для двустороннего зеркала [42]).

1.3.4. Изменение толщин слоёв

Перспективный способ уменьшить тепловой шум в покрытиях был предложен в статьях [43, 21]. Предлагалось уменьшить толщину слоёв из Ta_2O_5, как более шумящего материала (его потери существенно больше чем в кварце), при сохранении суммарной оптической толщины пары $\lambda/2$ ($n_ld_l + n_hd_h = \lambda/2$). Чтобы сохранить заданное отражение, общее число слоёв увеличивалось. Было численно показано, что существует оптимум соотношения толщин и числа слоёв, приводящий к минимальному шуму при заданном пропускании.

Очевидно, что возможное уменьшение шума сильно зависит от отношения шумов в слоях:

$$\chi \propto \frac{S_h/d_h}{S_l/d_l} = \frac{\xi_h\phi_h n_l}{\xi_l\phi_l n_h} = \gamma, \tag{1.3.2}$$

Для параметров LIGO [38] это отношение $\gamma = 4.6$. В [21] оптимизация была проведена для параметра $\gamma = 7$. Был проведён расчёт для 27-$\lambda/4$слоёв+$\lambda/2$ зеркала. Получившееся покрытие имело 16 SiO_2/Ta_2O_5 пар с $n_ld_l = 1.3827\lambda/4$, $n_hd_h = 0.6173\lambda/4$, и тонким внешним слоем $n_cd_c = 0.1620\lambda/4$ и первым слоем $n_hd_h = 0.5560\lambda/4$ у подложки (всего 34 слоя). Для этих покрытий было экспериментально получено подавление $\chi_{exp} = 8.9 \pm 2\%$. Наш расчёт для параметров взятых из [21] дают $\chi_{th_7} = 8.2\%$. Позднее в [44] был предложен метод оценки γ из того же эксперимента [21]. Действительно, для измереных шумов (смещения) имеем:

$$S_{c_1} = \xi_h\phi_h\Sigma_{h_1} + \xi_l\phi_l\Sigma_{l_1}, \tag{1.3.3}$$

$$S_{c_2} = \xi_h\phi_h\Sigma_{h_2} + \xi_l\phi_l\Sigma_{l_2}, \tag{1.3.4}$$

где Σ_{j_k} - суммарная толщина слоёв типа j, в покрытии k. Отсюда было найдено $\phi_l = 0.5 \pm 0.4$ $\times 10^{-4}$ и $\phi_h = 6.3 \pm 0.7\ \times 10^{-4}$, что даёт $\gamma = 9.2$ и $\chi_{th} = 9.1\%$. Однако, так как мы изменили формулы для шума, мы должны модифицировать и метод [44], учитывая интерференционные поправки. Для этого достаточно заменить $\xi_j\Sigma_{j_k}$ на $\sum(\xi_j^c(\beta_j' - 1)^2 + \xi_j^s)^2 d_j$. В этом случае мы получим $\gamma = 8.1 \pm 5$ и углы потерь оксида кремния и оксида тантала $\phi_l = 0.54 \pm 0.4\ \times 10^{-4}$ и $\phi_h = 6.1 \pm 0.7\ \times 10^{-4}$.

1.3.5. Оптимальное покрытие

Хорошо известно, что для фиксированного числа слоёв многослойное покрытие с четверть волновыми слоями (QWL) ($\varphi_h = \varphi_l = \pi$) даёт максимальное отражение [45]. Также принято считать, что для максимального отражения $\varphi_h + \varphi_l$ должно быть равно 2π. Это допущение использовалось во многих попытках численной оптимизации покрытий [43, 21].

Однако, можно рассчитать оптимальное покрытие аналитически и показать, что для произвольного φ_h это допущение не верно.

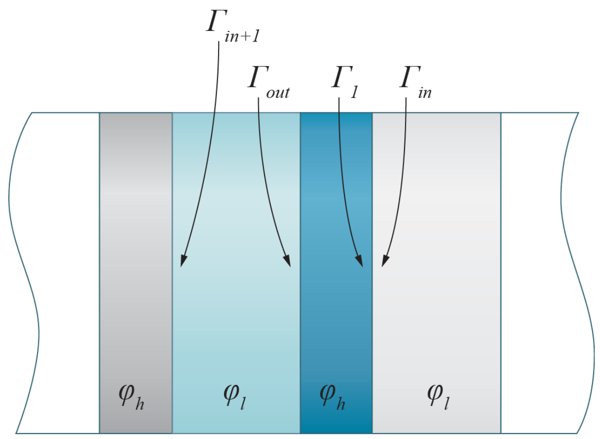

Рис. 1.16: Пара слоёв внутри многослойного зеркала.

Найдём оптимальную толщину компонент пары слоёв для заданной толщины φ_h. Рассмотрим пару слоёв внутри покрытия и обозначим комплексный коэффициент отражения на её границе со стороны подложки $\Gamma_{in} = \Gamma_0 e^{i\varphi_0}$, где Γ_0 действительная амплитуда и φ_0 некоторая начальная фаза. Введём так же следующие обозначения: $\Gamma_{in} = \Gamma_{0'}$ - исходное отражение, Γ_1 - промежуточное отражение, $\Gamma_{out} = \Gamma_2$ - выходное отражение, $\Gamma_{in+1} = \Gamma_{2'}$ - отражение, которое будет исходным для следующей пары (см. рис. 1.16):

$$\Gamma_1 = \frac{g_{hl} + \Gamma_{0'}}{1 + g_{hl}\Gamma_{0'}} \tag{1.3.5}$$

$$\Gamma_2 = \frac{g_{lh} + \Gamma_1 e^{-i\varphi_h}}{1 + g_{lh}\Gamma_1 e^{-i\varphi_h}} \tag{1.3.6}$$

$$\Gamma_{2'} = \Gamma_2 e^{-i\varphi_l}, \tag{1.3.7}$$

где $g_{ij} = \frac{n_i - n_j}{n_i + n_j}$. Теперь можно найти оптимальную входную фазу φ_0 максимизирующюю модуль выходного отражения $|\Gamma_{in+1}|^2$. Стоит заметить, что $\frac{\partial|\Gamma_{in+1}|^2}{\partial\varphi_0} = \frac{\partial|\Gamma_{out}|^2}{\partial\varphi_0}$ не зависит от φ_l. После преобразований получим:

$$\tan\varphi_0 = \frac{1 - g_{hl}^2}{1 + g_{hl}^2}\cot\frac{\varphi_h}{2} \tag{1.3.8}$$

$$\varphi_0 \approx \frac{\pi - \varphi_h}{2} - g_{hl}^2\sin(\varphi_h) \tag{1.3.9}$$

Здесь мы учли, что $g_{hl} \simeq 0.174$ мало. Отражение увеличивается только при $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (подробнее см. пункт 1.3.5. и П.5.1.). Таким образом, чтобы оптимизировать следующий слой нужно подогнать соответствующую фазу φ_{in+1} при помощи φ_l:

$$\varphi_{l_j} = \varphi_{0_{j+1}} - \varphi_{0_j} - \varphi_{h_j} - 2\sin(\varphi_{h_j})g_{hl_j}^2 + (\pi p), \tag{1.3.10}$$

где индекс j означает номер пары (подробнее в приложении П.5.2.). В области одинаковых пар слоёв это означает

$$\varphi_l = -\varphi_h - 2\sin(\varphi_h)g^2 + (\pi p) \tag{1.3.11}$$

Можно показать (приложение П.5.2.), что в нашем случае ($\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $\varphi_h \in [0; 2\pi]$) $p > 0$ и чётное. Так как мы должны использовать слои минимальной толщины (шум пропорционален толщинам слоёв), выберем $p = 2$. Теперь из последнего выражения ясно видно, что только в случае четвертьволновых слоёв имеем $\varphi_h + \varphi_l = 2\pi$. В других же случаях есть малая поправка. Поскольку для первого слоя $\Gamma_{in} = 0$ с неопределённой фазой, условие на входную фазу выполнено.

Аналитический подход к оптимизации

Рассмотрим пару слоёв внутри покрытия. Предположим, что входное отражение близко к единице:

$$|\Gamma_{in}| = |\Gamma_{2k'}| = 1 - \epsilon, \tag{1.3.12}$$

где ϵ – малый параметр. Теперь разложим формулы для $|\Gamma_{out}|$ в ряд до второго порядка по ϵ и используя (1.3.9) получим (см. приложение П.5.3.)

$$|\Gamma_{out}|^2 = 1 - 2\alpha\epsilon - \alpha(1 - 2\alpha)\epsilon^2, \tag{1.3.13}$$

где

$$\alpha = \frac{(1 - g^2)^2}{\left(g\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_1))} \pm \sqrt{1 - 2g^2\cos(\varphi_1) + g^4}\right)^2} \tag{1.3.14}$$

Здесь мы имеем “+”, когда $\varphi_0 \in [-\pi/2; \pi/2]$. Можно показать, что только в этом случае $\alpha \leq 1$, и отражение растёт.

Полагая

$$\begin{aligned} 1 &\gg |2\alpha\epsilon|, \\ 2 &\gg |(1 - 2\alpha)\epsilon|, \end{aligned} \tag{1.3.15}$$

можно переписать коэффициент отражения в виде $|\Gamma_{out}| = 1 - \alpha\epsilon$ и получить полное пропускание по энергии в виде:

$$T = \beta(\varphi_h, \varphi_c)\alpha^N(\varphi_h)\epsilon(\varphi_e) \tag{1.3.16}$$

Тип	$25+\lambda/2$	[21]	Our Method
Пропускание, ppm	277.5	277.7	277.7
χ, броуновский (смещения)	0	8.16%	8.4%
χ с интерференцией	3.37%	11.03%	11.27%
χ с фотоупругостью	2.63%	10.29%	10.5%
Реальное подавление	0	7.93%	8.18%

Таблица 1.4: Результаты оптимизации. Везде, кроме последней строки значения χ по отношению к шуму смещения стандартного зеркала, в последней – по отношению к полному шуму стандарта. ($\gamma = 7$)

где величина

$$\beta = 2\frac{1-g_e^2}{1+2g_e\cos(\varphi_c+\frac{\pi+\varphi_h}{2}+g^2\sin(\varphi_h))+g_e^2} \tag{1.3.17}$$

описывает переход от внешнего слоя к внешней среде ($g_e = \frac{n_e-n_l}{n_e+n_l}$). Для того, чтобы эта формула работала, должны выполняться предположения (1.3.15), что для $g = 0.17$ даёт $\alpha \in [0.55; 1]$ ($\alpha(\pi) = 0.55$) и $\epsilon \gg 0.5$. Для этого также необходимо $\varphi_h \in [\pi/4; 7\pi/4]$. Можно показать численно, что все эти требования могут быть выполнены тремя “разгоночными” слоями на подложке.

Теперь мы можем исключить из уравнений число слоёв, чтобы разрабатывать зеркало для заданного пропускания.

$$S_{Br}^2 = A\left((N+M)(\gamma\varphi_h+\varphi_l)+\varphi_c-\varphi_l\right) \quad [\text{м}^2/\text{Гц}], \tag{1.3.18}$$

где $A = \frac{\xi_2\varphi_l}{2k_0n_l}$ - размерная константа, M – число “разгоночных” слоёв. Тогда мы можем проводить минимизацию безразмерного шума

$$\frac{S_{Br}^2}{A} = M\gamma\varphi_{\epsilon h} + M\varphi_{\epsilon l} - \varphi_{0\epsilon} + \varphi_0 + \tag{1.3.19}$$

$$\frac{\ln T_0 - \ln\beta - \ln\epsilon}{\ln\alpha}(\gamma\varphi_h+\varphi_l) - \varphi_l + \varphi_c. \tag{1.3.20}$$

Здесь $\varphi_{\epsilon h}$ и $\varphi_{\epsilon l}$ означают толщины слоёв в „разгоночных“ парах (они всё так же связаны формулой (1.3.11)), $\varphi_{0\epsilon}$, φ_0 - начальная фаза для разгоночных и регулярных слоёв (1.3.9), φ_h, φ_l - толщины слоёв в регулярных парах (1.3.11), φ_c - толщина внешнего слоя.

Таким образом всё может быть выражено через φ_h, $\varphi_{\epsilon h}$, φ_c и минимизировано при заданном пропускании по мощности. Результаты очень близки к полученному в [21] (см. табл. 1.4) и, очевидно, представляют собой аналитический подход к их численному методу.

1.4. Итоги главы 1

Расчёты показали, что интерференционные эффекты и фотоупругость играют роль только во внешних слоях зеркала и там, где мощность излучения не мала. Интерференционная поправка к шуму смещения поверхности для простых зеркал лежит в районе 1.96% (6% без учёта сдвига) и 2.33% (7.45% без учёта сдвига) с учётом фотоупругости. Также показано наличие и дан способ расчёта амплитудного шума, связанного с броуновскими флуктуациями в покрытии зеркала. Этот шум оценен как малый.

Наиболее многообещающим методом подавления шума для простых зеркал является метод изменения толщин слоёв (уменьшение шума порядка 7%). Так же разработан аналитический подход к этому методу и показано, что толщины пар слоёв должны быть меньше половины волны ($\varphi_l + \varphi_h = 2\pi - 2g^2\sin(\varphi_h)$), вопреки считавшемуся ранее.

Большие значения подавления были получены в предварительных расчётах для составных зеркал – порядка 78% (80–90% по толщине). Рассмотрены некоторые недостатки этих конструкций, в частности показана возможность интерференционного усиления шума (до -7 %) вместо ожидаемого подавления. Однако, возможность практической реализации этих зеркал остаётся открытой.

В главе

- Разработан метод расчёта фазового шума произвольных многослойных покрытий с учётом интерференции, фотоупругости и пропускания зеркала.

- Разработан метод расчёта фазового шума модифицированного интерферометра Майкельсона при различных соотношениях длины его плеч.

- Показано, что шумовые коэффициенты Броуновской ветви шумов имеют разные знаки, что формально допускает самокомпенсацию, однако вследствие интерференции такая компенсация имеет место только во внешних слоях.

- Найден обобщённый класс покрытий с неравными оптическими толщинами слоёв, максимизирующий коэффициент отражений.

- Рассмотрены различные методы подавления броуновских шумов в многослойных покрытиях и показано, что подавление для параметров зеркал LIGO не превышает 7 %.

ГЛАВА 2

Добавочные шумы в плавленом кварце

Кроме описанных выше процессов, существуют и другие, приводящие к появлению шумов. Некоторые из них можно отнести к броуновским, добавив источники диссипации в угол потерь $\phi(f)$ в (1.1.12). Некоторые получаются из независимых соображений, и не могут быть просто причислены к одной из ветвей шумов.

2.1. Шум кристаллизации (расстеклования)

плавленый кварц, из которого состоит подложка зеркал, представляет собой оксид кремния, находящийся в состоянии стекла. В этом состоянии твёрдое вещество не имеет кристаллической структуры, условные элементы кристаллизации могут наблюдаться лишь в очень малых кластерах (в так называемом «среднем порядке»). Такое состояние получается когда при переходе из жидкого состояния в твёрдое кристаллическая решётка по каким-либо причинам не может образоваться. Обычно этими причинами являются высокая вязкость и быстрое охлаждение. В общепринятой научной и практической лексике стёкла отличают от твёрдых полимеров, которые также пребывают в аморфном состоянии ввиду огромной длины своих молекул.

Кварц имеет еще несколько полиморфных состояний, однако они, в отличае от стекла, либо не стабильны либо возникают только при повышеных температурах и давлении (рис. 2.1 слева). Проследим полиморфные и фазовые переходы оксида кремния от кварца до образования стекла на энергетической диаграмме 2.2 и оценим разницу энергий кристаллического и стеклянного состояния

$$\delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_g(T_0) - \mathcal{E}_c(T_0) \tag{2.1.1}$$

При нормальных условиях кварц находится в кристаллическом α-состоянии с тригональной решёткой. При нагревании до температуры $T_{\alpha-\beta} = 573°\mathrm{C}$ происходит $\alpha-\beta$-инверсия: α-кварц превращается в β-кварц – так же кристаллическое состояние, но имеющее гексагональную решётку. Это приводит к резкому увеличению плотности, что известно каждому стеклодуву с древнейших времён. Далее при температуре второй инверсии $T_{\beta-\beta C} = 1050°\mathrm{C}$ структура связей опять меняется и β-кварц превращается в ещё мене плотный β-кристобалит.

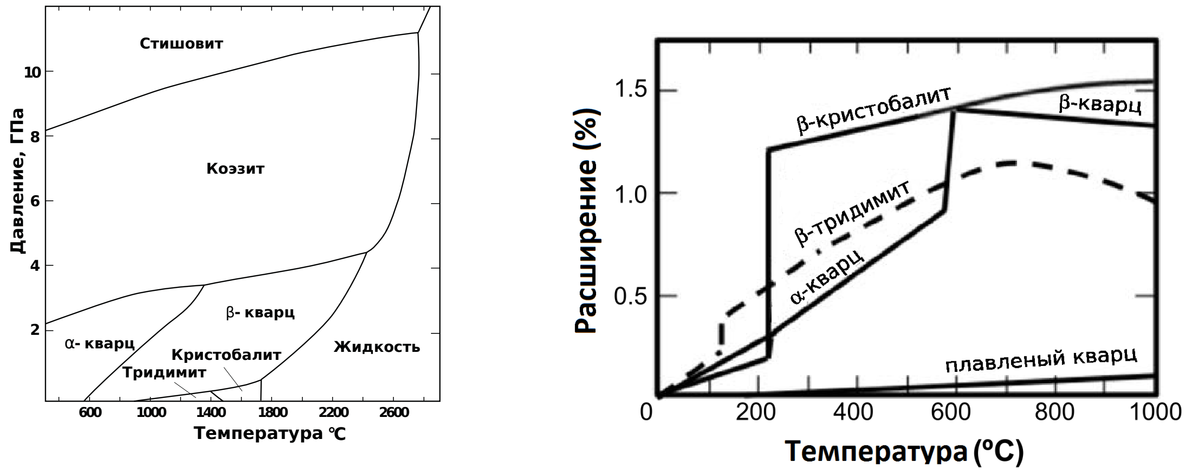

Рис. 2.1: P–T диаграмма стабильных полиморфных состояний кварца [46] (слева) и диаграмма их теплового расширения (справа) [47]. Стоит отметить, что на левой диаграмме α-состояний тридимита и кристобалита нет: это неустойчивые метастабильные состояния.

Только после этого при температуре $T_m = 1705°\text{C}$ кристалл расплавляется (процесс ABC на рис. 2.2 справа). Забавный факт заключается в том, что, строго говоря, обычный кварц никогда не плавится. Для энергии получим

$$\mathcal{E}_{ABC} = m\int_{T_0}^{T_m} C_{p_c}(T)dT + m\Delta\mathcal{E}_m, \tag{2.1.2}$$

где m – масса вещества, C_p – удельная теплоёмкость при постоянном давлении, $\Delta\mathcal{E}_m$ – удельная теплота плавления кварца. Затем требуется охлаждение без обратной кристаллизации до температуры стеклования $T_g = 1450$ (процесс CD), где переохлаждённый расплав (теплоёмкость расплава $C_{p_m}(T)$) превращается в стекло. Далее происходит охлаждение до исходной температуры T_0 (теплоёмкость стекла $c_{p_g}(T)$).

$$\mathcal{E}_{CDE} = -m\int_{T_0}^{T_m} C_{p_g}(T)dT \tag{2.1.3}$$

Масса вещества при этом не меняется и равняется исходной $\frac{4}{3}\pi a^3\rho_c$, так что в результате получим

$$\delta\mathcal{E} = \frac{4}{3}\pi a^3\rho_c\left(\int_{T_0}^{T_m}(C_{p_c}(T) - C_{p_c}(T))dT + \Delta\mathcal{E}_m\right) \tag{2.1.4}$$

Взяв значения $C_p(T)$ из [48] (стр 85, таб. 31 с коррекцией теплоёмкости стекла [49]) получим удельную разность энергий при комнатной температуре $\delta\mathcal{E}/m = 136.8$ Дж/г.

Однако рассчитанная таким способом энергия не совпадает с измеренными в различных работах значениями (см. таб. 2.1), как впрочем и между самими работами.

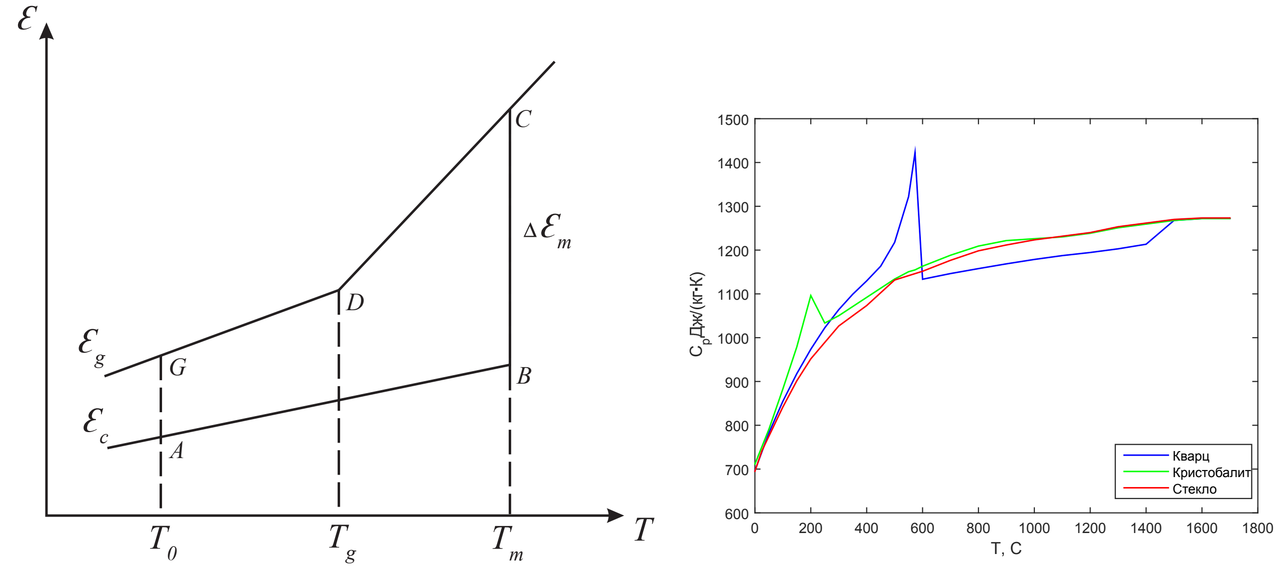

Рис. 2.2: Схематичная энергетическая диаграмма перехода кристалл-стекло (слева) и теплоёмкость некоторых полиморфных состояний кварца [48, 49] (справа). Можно отметить скачки теплоёмкости при α-β инверсии кварца и кристобалита, а так же β-кварца в β-кристобалит.

Важно, что стеклообразное состояние выше по энергии чем кристаллическое и система будет стремиться кристаллизоваться. Такой процесс кристаллизации стекла при температуре, меньшей температуры стеклования T_g называют расстеклованием (devitrification в англоязычной литературе). Этот процесс наблюдается при длительном нагреве, при высокоинтенсивном лазерном облучении [53] или при сильном ударе [50]. Ещё более существенно, что оно характеризуется различными значениями физических и оптических параметров, как и другие полиморфные состояния (см. таб. 2.2). Таким образом возможен спонтанный переход из стеклянного в кристаллическое состояние. При этом, за счёт разности в плотности двух фаз, будет наблюдаться сжатие образца со временем. Подобный эффект был исследован в ряде работ и для различных стекол [34, 54, 55]. Поскольку процесс перехода спонтанный и локализованный, он должен порождать шум подобный дробовому.

2.1.1. Событие кристаллизации

Рассмотрим вещество, малый подобъём которого (нечто типа пузырька) перешло в другое состояние. Тогда материальные параметры такого пузырька изменятся вместе с параметрами его состояния равновесия. Одним из таких параметров будет равновесный объём – объём ненапряжённого вещества, который равен в точности $m_{\text{bubble}}/\rho_{\text{new}}$. Но как часть исходного вещества, этот пузырёк имеет объём, равный равновесному объёму исходного состояния $m_{\text{bubble}}/\rho_{\text{old}}$. Это схематично показано на рисунке 2.3.

Запишем систему уравнений, соответствующую такой эволюции системы. Начальные

Экспериментатор	$\delta\mathcal{E}/m$, Дж/г	$\delta\mathcal{E}$ (сфера 1 нм), эВ
Mulert (1912)	153.1	8.8
Wietzel (1921)	161.5	9.3
Ray (1922)	311.3	17.9
Ray (1922)	481.2	27.7
Моделирование [50]	3700	212.7
Расчёт с данными [48, 51]	152.4	8.7
Расчёт с данными [52, 49]	88.8	5.1

Таблица 2.1: Разница энергий стеклянного и кристаллического состояния кварца при комнатной температуре. Первые четыре – измерения методом растворения, моделирование – методом расчёта матриц плотности на молекулярном уровне, последние два – описанная здесь оценка (2.1.2)–(2.1.4).

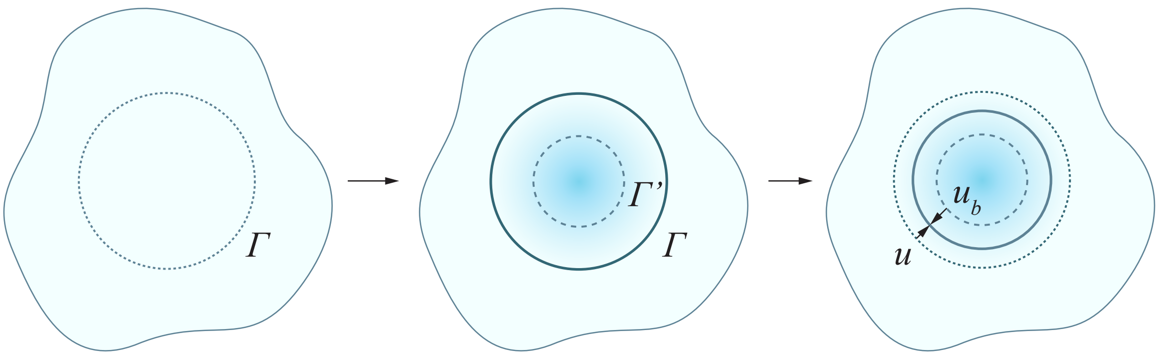

Рис. 2.3: Эволюция кристаллизовавшегося пузырька. Пузырёк радиуса a (контур Γ) претерпевает фазовый переход с равновесным радиусом a' (контур Γ′) и, таким образом, становится напряжён (в центре). Далее система движется к общему равновесию (справа).

условия определяются как напряжение в деформированном кристаллическом пузырьке с известной деформацией

$$\begin{aligned} &v_{t_c}^2 \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_0 - c_{l_c}^2 \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_0 = 0 \\ &u_0|_{\Gamma'} = \Gamma - \Gamma', \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

где Γ и Γ′ – форма равновесного пузырька в исходной и конечной фазе, v_{l_c} и v_{t_c} продольная и поперечная скорости звука в конечной фазе, $\vec{u}_0$ – начальное смещение. Для движения пузырька получим

$$\ddot{\vec{u}}_b + v_{t_c}^2 \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{u}_b - v_{l_c}^2 \mathrm{grad}\, \mathrm{div}\, \vec{u}_b = 0 \tag{2.1.6}$$

$$\vec{u}_b|_{t=0} = \vec{u}_0 \tag{2.1.7}$$

	Плотность ρ, г/см^3	Преломление n	Теплоёмкость, C кДж/(кг×К)	При нормальных условиях
α-кварц	2.65	1.545	0.740	стабилен
α-тридимит	2.35	1.479	0.740	метастабилен
α-кристобалит	2.33	1.486	0.750	метастабилен
Стекло	2.20	1.46	0.740	метастабилен*
β-кварц	2.53	1.535	0.740	не стабилен
β-тридимит	2.25	1.471	0.740	не стабилен
β-кристобалит	2.27	1.479	1.100	не стабилен
Стишовит	4.29	1.80	0.834	метастабилен

Таблица 2.2: Материальные параметры различных полиморфных состояний оксида кремния при нормальных условиях. Стоит отметить, что стекло, в отличие от остальных метастабильных состояний практически стабильно.

Для движения оставшегося полупространства получим

$$\ddot{\vec{u}} + v_{t_g}^2 \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{u} - v_{l_g}^2 \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\ \vec{u} = 0$$
$$\hat{\sigma}\vec{n}_{\perp}|_{\Gamma_0} = 0, \tag{2.1.8}$$

где Γ_0 – граница полупространства, v_{l_g} и v_{t_g} продольная и поперечная скорости звука в начальной фазе, $\vec{u}$ – смещение в полупространстве. И уравнение связи

$$\vec{u}|_{\Gamma} = \vec{u}_b|_{\Gamma'} - \vec{u}_0|_{\Gamma'} \tag{2.1.9}$$

В нашем случае предположим, что равновесные объёмы являются шарами. Тогда для стеклянной фазы радиуса a ($\Gamma = [r = a]$) равновесный объём шара кристаллической фазы будет иметь радиус $a' = a\sqrt[3]{\rho_g/\rho_c}$ ($\Gamma' = [r = a']$).

2.1.2. Приближённая оценка

Точное решение представленной системы затруднительно, поэтому сделаем приближённую оценку. Задача о начальном смещении может быть заменена задачей о термоупругости. Действительно, введём гауссово изменение температуры внутри пузырька эквивалентного в точке $\vec{r}_0$ в виде

$$T(\vec{r}) = T_1 e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}_0|^2}{b^2}} \tag{2.1.10}$$

Термоупругое уравнение с дополнительным локальным нагревом запишется следующим образом:

$$\frac{1-\sigma}{1+\sigma}\text{graddiv}\vec{u} - \frac{1-2\sigma}{2(1+\sigma)}\text{rotrot}\vec{u} = \alpha\text{grad}T. \tag{2.1.11}$$

Такая постановка задачи даст хорошее приближение для системы (2.1.6)-(2.1.9), заменяя локальное изменения давления локальным нагревом (α – коэффициент теплового расширения). Чтобы найти параметры модели T_1 (изменённую температуру пузырька) и b (радиус эквивалентного пузырька) рассмотрим чисто сферический случай (расширение толстой сферической оболочки). В [39] имеется аналитическое выражение для отношения изменений внутреннего и внешнего радиусов в данной задаче, как показано на рисунке 2.4.

$$\frac{\delta a}{\delta R} = \frac{1}{3}\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{R^2}{a^2}. \tag{2.1.12}$$

Здесь, как и в нашей задаче положено $R \gg a$.

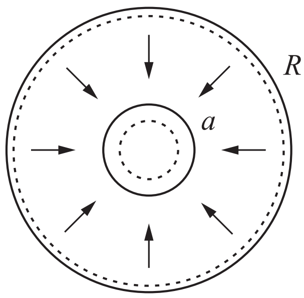

Рис. 2.4: Изменение внешнего и внутреннего радиусов толстой сферической оболочки.

В нашем случае R – это расстояние от центра схлопывающегося пузырька до поверхности зеркала (ближайшей, как будет показано далее), δR – смещение поверхности (в сферических координатах, a – радиус схлопывающегося пузырька и δa это u_{eq} – стационарное решение (2.1.6)-(2.1.9). Для оценки сверху можно положить эту величину равной разности равновесных радиусов пузырька стекла и кварца.

$$\delta a \approx a\left(1 - \sqrt[3]{\frac{\bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_c}}\right). \tag{2.1.13}$$

С другой стороны, можно получить точное решение (2.1.11) в сферическом случае и приближении $R \gg b$:

$$\delta a = \alpha\frac{1+\sigma}{1-\sigma}T_1\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4}\text{berf}\left(\frac{a}{b}\right) - \frac{a}{2}e^{-\frac{a^2}{b^2}}\right), \tag{2.1.14}$$

$$\frac{\delta a}{\delta R} = \frac{\sqrt{\pi}b}{\sqrt{\pi}\text{berf}\left(\frac{a}{b}\right) - 2ae^{-\frac{a^2}{b^2}}}\frac{R^2}{a^2}. \tag{2.1.15}$$

Это позволяет нам оценить T_1 и b. Теперь нам нужно найти решение (2.1.11) в циллиндрических координатах. Для этого запишем решение в виде $\vec{u} = \vec{u}_1 + \mathrm{grad}\phi$ где ϕ является правой частью (2.1.11):

$$\Delta\phi = \frac{1+\sigma}{1-\sigma}\alpha T \tag{2.1.16}$$

и будет задавать граничное условие для $\vec{u}_1$ на поверхности $z = 0$. Таким образом задача для ϕ – это обычное неоднородное уравнение Пуассона с хорошо известным решением, а задача для $\vec{u}_1$ – это задача о действии силы на полупространство, решённая в [13]. Полученное поле смещений $\vec{u}$ необходимо будет далее усреднить по гауссовому пучку радиуса w, чтобы найти собранную лазерным лучом информацию о смещении зеркала:

$$\delta z_j(x_j, y_j, z_j) = \int u_z(x, y, 0, x_j, y_j, z_j)\frac{2}{\pi w^2}e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2}}dS. \tag{2.1.17}$$

После расчётов, аналогичных [16], получится усреднённая реакция поверхности на единичное событие кристаллизации с координатами x_j, y_j, z_j

$$\begin{aligned}\delta z_j(x_j, y_j, z_j) = 2\alpha T_1(1+\sigma)\pi^{3/2}b^3\times \\ \times\int e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-k^2b^2/4}e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}.\end{aligned} \tag{2.1.18}$$

Стоит заметить, что $2\pi^{3/2}\alpha T_1 b^3(1+\sigma) \approx \frac{6\pi(1-\sigma)^2}{1+\sigma}\left(1-\sqrt[3]{\frac{\rho_g}{\rho_c}}\right)a^3 = \xi V_a$ вследствие (2.1.13)-(2.1.15), исключая из уравнений "лишние"термодинамические параметры. Здесь так же можно заменить $4/3\pi a^3$ на V_a – объём схлопывающейся области, в попытке обобщить результаты на произвольную геометрию пузырька.

Шумовой процесс состоит из случайного потока дискретных событий

$$\delta z(t) = \sum_j^{N(t)} H(t-\tau_j)\delta z_j(x_j, y_j, z_j), \tag{2.1.19}$$

где x_j, y_j, z_j, τ_j положение и момент события, а $H(t)$ – функция Хэвисайда (единичная ступенька). Тогда для стационарного процесса получим ([56])

$$\begin{aligned}\langle\delta z(t)\rangle = \lambda\int_V \delta z_j(x, y, z)dV\int_0^t H(t-\tau)d\tau = \\ = \lambda\xi V_a w I_l(R/w, L/w)t\end{aligned} \tag{2.1.20}$$

$$\begin{aligned}S_{\delta z} = \lambda\int_V \delta z_j(x, y, z)^2 dV\tilde{H}(-\omega)\tilde{H}(\omega) = \\ = \frac{\lambda\xi^2V_a^2 I_S(R/w, L/w)}{w\omega^2},\end{aligned} \tag{2.1.21}$$

где λ – плотность частоты событий – количество событий в секунду в единице объёма, I_l и I_S численные значения соответствующих обезразмеренных интегралов (их не удаётся взять аналитически, см прил. П.6.), R и L – радиус и толщина зеркала. Интегралы I_l и I_S, рассчитанные численно представлены на рисунке 2.5.

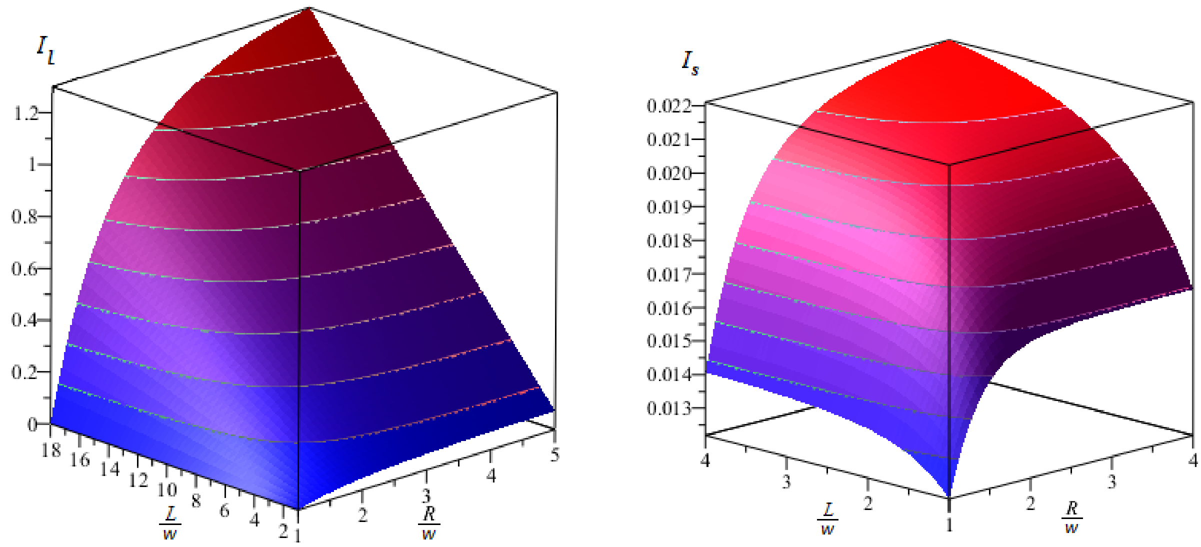

Рис. 2.5: Безразмерные интегралы I_l в случае длинного цилиндра (аналитика, использованная в (2.1.23)) и численный расчёт I_S для широкого зеркала (в соответствии с формулой (2.1.18)).

Для оценки плотности частоты событий используем данные из работы [34], где сжатие эталона Фабри-Перо эталона из оксида кремния было измерено экспериментально. Два зеркала с диаметрами $w_e = 0.66$ см были соединены $L_e = 10$ сантиметровой трубкой диаметра $R_e = 2$ см из плавленого кварца. В такой конфигурации формула (2.1.17) должна быть изменена, так как в данном случае отклик представляется усреднением по площади, а не по гауссову пятну. Более того, использованный нами подход из [16] становится не точным, так как в нём было использовано приближение полубесконечного пространства. Здесь же мы имеем принципиально случай тонкого цилиндра. Чтобы провести соответствие между имеющейся и необходимой моделями, мы используем моделирование методом конечных элементов. Цилиндр с параметрами, указанными выше, был смоделирован в программе Comsol Multiphysics. Был использован Structural Mechanics модуль в двух различных постановках задачи: непосредственная задача о приложении силы к поверхности пузырька и задача о неравномерном фиксированном распределении температуры (узел Thermal expansion на узле Linear Elastic Material). Решения были признаны одинаковыми с точностью до нормировки силы возмущения. Основные результаты представлены на рисунках 2.6–2.7.

Моделирование показало, что весь объём цилиндра можно разделить на две части: 1) сфера с центром в центре пузырька, касающаяся поверхности цилиндра и 2) остальная часть цилиндра. Решение внутри сферы слабо отличается от решения в чисто сферическом слу-

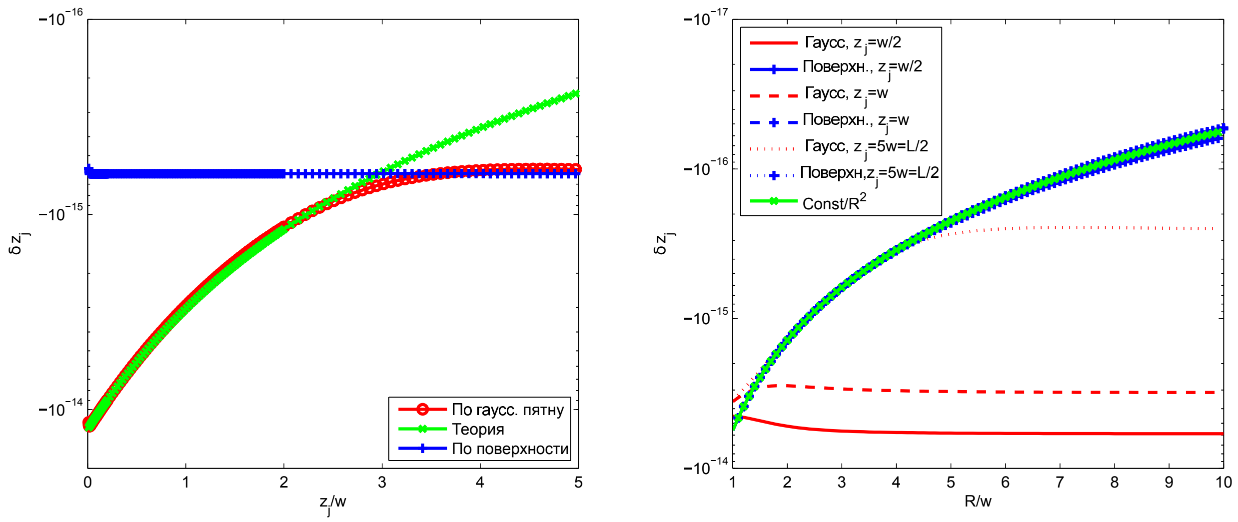

Рис. 2.6: Усреднённое смещение поверхности вдоль z произведённое пузырьком на оси цилиндра в зависимости от глубины пузырька z_j (слева) и радиуса цилиндра (справа). Усреднение производится по гауссовому пятну (красные линии) или по площади (синие с плюсом). Теоретическая кривая (зелёные с крестом) на левой картинке (2.1.18). Зависимость по R изображена для разных глубин z_j и близка к const/R^2 (зелёная линия с крестом) в случаях усреднения по поверхности.

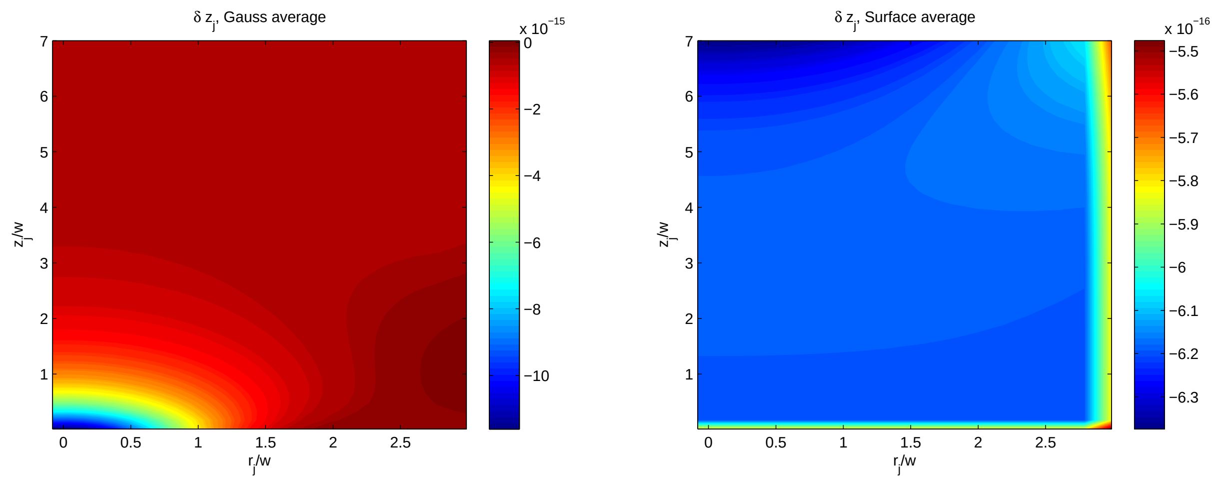

Рис. 2.7: Усреднённое смещение поверхности по оси z произведённое пузырьком в зависимости от его расстояния от оси цилиндра r_j и глубины z_j при усреднении по гауссову пятну (слева) и по поверхности зеркала (справа).

чае(2.1.12). Вне сферы решение близко к постоянному сферическому полю. Усреднённая реакция на один пузырёк в случае усреднения по площади зеркала оказалась практически не зависимой от глубины пузырька на оси цилиндра и меняется менее чем на 0.8% при смещении от оси.

Усреднённая реакция на один пузырёк в случае усреднения по гауссовому пятну совпадает с теорией (2.1.18) до глубины $2.5w$, и приближается к величине реакции при усреднении по площади на глубине $3.6w$ (см. рис. 2.6 слева). Этот результат легко понять, принимая во внимание то, что при моделировании радиус цилиндра был принят $R = 3w$. Идея состоит в том, что пузырёк „чувствует" только ближайшую поверхность цилиндра (ту, которую касается рассмотренная сфера). На глубинах, меньших R (в районе оси цилиндра) определяющей будет передняя поверхность цилиндра, делая задачу близкой к полупространству и демонстрируя соответствующую зависимость от поперечной координаты при гауссовом усреднении и постоянство при поверхностном (см. рис. 2.7). На большей глубине определяющей становится уже боковая поверхность цилиндра. Расстояние до неё практически постоянно вблизи оси, что приводит к результату, не зависимому от глубины в обоих случаях усреднения.

Таким образом, при расчёте шума будем использовать (2.1.18) до значения глубины пузырька $z = R$, а далее экстраполируем постоянной. При этом, судя по результатам моделирования, погрешность должна составить не более 13%. Для оценки частоты событий необходимо пользоваться приближением постоянного отклика. Этот отклик примем равным $\delta z_j(0, 0, R)$ – отклику в случае полупространства с гауссовым пятном на глубине равной радиусу. В этом случае расчёт по формуле (2.1.18) может быть проведён аналитически:

$$\begin{aligned} \delta z_j(0, 0, z) &= \frac{V_a \xi}{2\pi} \frac{1}{w^2} I_{00}(z/w) \\ I_{00}(x) &= \left(1 - \sqrt{\pi} x \left(1 - \mathrm{erf}(x)\right) e^{x^2}\right). \end{aligned} \tag{2.1.22}$$

При этом должен быть взят предел малого w чтобы убрать из выражений радиус гауссового пятна. Тогда равенство величины отклика на глубине R отклику в случае усреднения по площади будет лучше соблюдаться, и мы получим $\delta z_j(0, 0, R) \propto R^{-2}$, что показано зелёной линией на рисунке 2.6 (справа). Для плотности частоты событий получим

$$\lambda = \frac{\langle \dot{\delta z} \rangle}{L_e} \frac{2}{V_a \xi} \frac{2R_e^2}{R_e^2 - w_e^2} \tag{2.1.23}$$

Предполагалось, что радиус пузырька будет определяться из энергетических соображений: энергия связи (2.1.4), выделяющаяся в процессе кристаллизации должна быть равна упругой энергии, запасённой в деформации. Однако, ввиду упомянутой в предыдущем пункте неопределённости этой величины (см таб. 2.1), предположим, что это величина порядка размера атома кварца $a \approx \sqrt{3}\frac{3M_{\mathrm{SiO_2}}}{4\pi\rho_c N_A} = 0.22$ нм, где $M_{\mathrm{SiO_2}} = 60$ г/моль – молярная масса, N_A – число Авогадро.

Теперь используя (2.1.23) можно оценить интенсивность процесса. В [34] измерено $\dot{\epsilon}_{zz} = -5.8e-15$ в секунду. В соответствии с информацией об установке, $R_e \approx 0.5$ см, что позволяет рассчитать $\lambda \approx 1.54 \times 10^{16}$ событий в секунду в кубическом метре. В результате спектральная плотность шума расстеклования на частоте 100 Гц при $R = L = 20$ см и $w = 6$ см равна

$$\sqrt{S_{\delta z}} = \sqrt{\frac{\dot{\epsilon}_{zz}\xi V_a}{w\omega^2}\frac{L_e}{w_e}\frac{I_S(R/w, L/w)}{I_l(R_e/w_e, L_e/w_e)}} = 6.31 \times 10^{-25}\ \ \mathrm{m/Hz}^{1/2}, \tag{2.1.24}$$

что в 8000 раз меньше рассмотренных в первой главе Броуновских шумов в покрытиях и подложки зеркал LIGO [A4][19]. Заметим, что для выбранных параметров зеркал LIGO мы остаёмся в рамках приближения полупространства и нам не нужно использовать расширение на $z > R$.

2.1.3. Шум расстеклования в подвесах зеркал

Оценка другого шума, основанного на дискретных событиях была недавно проведена Ю. Левиным [35]. Он рассмотрел спонтанные события релаксации напряжения (события ползучести) в нитях подвесов. Однако, он так же испытал нехватку данных о плотности частоты событий и объёма события, что не позволило ему получить абсолютные значения спектральных плотностей шума. Можно спорить о происхождении и направлении действия событий ползучести, однако локальное перераспределение связей, соответствующее расстеклованию, должно приводить к схожим последствиям. При этом формализм разработанный в [35] должен сохраниться, и мы можем использовать формулы (49) и (52) из его работы для оценки шума расстеклования в подвесах. Для этого необходимо формально заменить $R\langle V^2\rangle$ (в обозначения Левина) на $NV_s\lambda V_a^2$ (в обозначениях данной работы), где $V_s = \pi r_s l_s$ – объём нити подвеса и N число нитей в подвесах. Три шума расстеклования вместе с учтёнными в LIGO шумами в соответствии с Калькулятором Шумов Гравитационного Интерферометра (GWINC) [38] показаны на рисунке 2.8.

Такие простые оценки шумов в подвесах не учитывают сложную многоуровневую систему подвесов в LIGO. Более того параметр скорости процесса в нагруженном случае (массы зеркал не малые – около 40 кг) может быть меньше, так как растяжение, вызванное массивными зеркалами, противостоит кристаллизации, требующей сжатия. Это указывает на то, что мы произвели оценку, по крайней мере, верхнего предела шума. Так как эта оценка

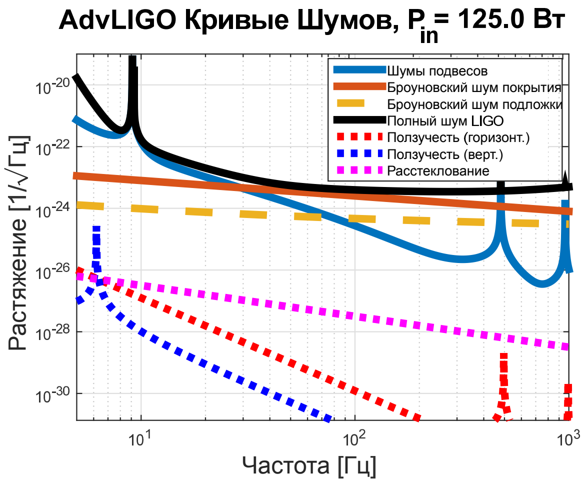

Рис. 2.8: Шумы ползучести подвеса из [35] при использовании плотности частоты расстеклования (2.1.23) и шум расстеклования (2.1.24) в зеркалах вместе с остальными шумами Advanced LIGO.

лежит на уровне в 2×10^5 раз меньшем, чем уже учтённые шумы подвесов и Броуновские шумы, этого вполне достаточно для заключения, что данные шумы никак не повлияют на чувствительность LIGO.

2.2. Шумы вязкости

Вспомним метод расчёта тепловых шумов, использованный нами для получения спектральных плотностей шумов (1.2.48) зеркала. ФДТ утверждает, что источник диссипации в системе является так же источником флуктуаций. Спектральная плотность шума была представлена в виде

$$S(\omega) = \frac{4k_BT}{\omega}\,\mathrm{Im}[\tilde{\alpha}_s(\omega) + \tilde{\alpha}_j^c(\omega) + \tilde{\alpha}_j^s(\omega)], \tag{2.2.1}$$

где ω частота, k_B постоянная Больцмана, T температура, $\tilde{\alpha}_s$ – динамическая восприимчивость подложки, $\tilde{\alpha}_j^c(\omega)$ and $\tilde{\alpha}_j^s(\omega)$ – восприимчивости покрытия и наведённая покрытием добавка к восприимчивости подложки. Выпишем ещё раз эти три формулы

$$\tilde{\alpha}_s(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi}w}\frac{1-\nu_s^2}{Y_s}, \tag{2.2.2}$$

$$\tilde{\alpha}_j^c(\omega) = \sum_j \frac{\beta_j' d_j}{\pi w^2}\frac{(1+\nu_j)(1-2\nu_j)}{Y_j(1-\nu_j)}, \tag{2.2.3}$$

$$\tilde{\alpha}_j^s(\omega) = \sum_j -\frac{d_j}{\pi w^2}\frac{Y_j}{1-\nu_j^2}\frac{(1+\nu_s)^2(1-2\nu_s)^2}{Y_s^2}, \tag{2.2.4}$$

где w ширина гауссового пучка на поверхности зеркала, Y_s и ν_s – модуль юнга и коэффициент Пуассона подложки, Y_j и ν_j – параметры j-го слоя покрытия, d_j и β_j толщина и интерферометрический коэффициент j-го слоя покрытия (1.2.34). Далее потери вводятся в формулы путём введения угла потерь $Y \to Y(1 - i\phi(\omega))$.

Существует несколько моделей, позволяющих описать угол потерь теоретически[57, 58] и феноменологически [59]. Вязкость, очевидно, относится к диссипации. В последующих разделах будет показано, что вязкость может быть введена через частотно-зависимый угол потерь, порождая соответствующий шум по флуктуационно-диссипационной теореме.

2.2.1. Вязкость

Зеркало состоит из плавленого кварца – вещества в состоянии стекла. Как говорилось ранее, стекло – твёрдое вещество, не сумевшее кристаллизоваться вследствие большой вязкости. В гидродинамике вязкость вводится добавлением в уравнение Навье-Стокса тензора вязкости

$$\sigma_{ik}^{v} = \eta \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right] + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \tag{2.2.5}$$

где η – динамическая вязкость и ζ – объёмная вязкость, $\vec{v}$ – скорость частиц, которая по сути является скоростью смещения. Это выражение выглядит как закон Гука в терминах сдвигового ($G = \frac{Y}{2(1+\nu)}$) и объёмного ($K = \frac{Y}{3(1-2\nu)}$) модуля

$$\sigma_{ik} = 2G\epsilon_{ik} + (K - 2G/3)\delta_{ik}\epsilon_{ll} \tag{2.2.6}$$

с точностью до замены их на соответствующие вязкости и тензора деформации $\hat{\epsilon}$ на его производную по времени. Таким образом, при переходе к частотному представлению ввод вязкости может быть представлен комплексным частотно-зависимым добавком к материальным параметрам

$$K \to K + \zeta \frac{\partial}{\partial t} = K + i\omega\zeta \tag{2.2.7}$$

$$G \to G + \eta \frac{\partial}{\partial t} = G + i\omega\eta \tag{2.2.8}$$

Однако подобная теория приводит к тому, что при высокой вязкости (в литературе встречается от 10^{17} до 10^{35} [60, 61, 62, 63]) даже на низких частотах ($\approx G/\eta \propto 10^{-7}$ Гц) движение будет определяться вязкостью, а не упругостью. То есть скорость продольных волн – звука – $\rho v_l^2 = \frac{3K+4G}{3} + i\omega\left(\zeta + \frac{4}{3}\eta\right)$ имеет большую мнимую часть, а закон дисперсии – $k = (1-i)\sqrt{\frac{\omega}{2\eta}}$, что не соответствует действительности. Это значит, что необходимо использовать другую модель упругости.

Стандартная линейная упругость

Более полная общепринятая модель упругости называется Стандартная линейная упругость (Standard linear solid). Её можно представить в виде „элементарной клетки“, состоящей из пружины „дальнего порядка“ и пружины „ближнего порядка“ с вязким трением (рис. 2.9).

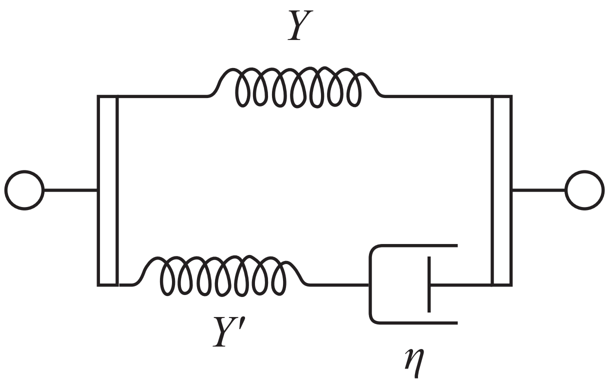

Рис. 2.9: „Элементарная клетка“ стандартной линейной упругости.

Пружина дальнего порядка имеет медленный (статический) модуль Юнга Y и определяет реакцию на статическую нагрузку, а пружина близкого порядка – быстрый (динамический) модуль Юнга Y' и вязкость η. При этом отклик на переменную нагрузку определяется обоими модулями. Это приводит к следующему изменению закона Гука

$$\sigma + \frac{\eta}{Y'}\dot{\sigma} = Y\varepsilon + \eta\frac{Y+Y'}{Y'}\dot{\varepsilon} \tag{2.2.9}$$

или в тензорной форме (выражения (2.2.6))

$$\left(1+\frac{G}{G'}\right)\dot{\varepsilon} + \frac{1}{3}\left(\frac{K}{K'} - \frac{G}{G'}\right)\mathrm{tr}\dot{\varepsilon} + \frac{G}{\eta}\varepsilon + \frac{1}{3}\left(\frac{K}{\zeta} - \frac{G}{\eta}\right)\mathrm{tr}\varepsilon =$$
$$\frac{\dot{\sigma}}{2G'} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3K'} - \frac{1}{2G'}\right)\mathrm{tr}\dot{\sigma} + \frac{\sigma}{2\eta} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3\zeta} - \frac{1}{2\eta}\right)\mathrm{tr}\sigma \tag{2.2.10}$$

где индексы $_{ij}$ у тензора напряжения σ и деформации ε, наряду с дельта-функцией δ_{ij} перед следом tr опущены для упрощения восприятия. Для твёрдых тел часто применяют модель Кельвина-Войта, в которой вторая пружина заменяется на жёсткое крепление $G', K' \to \infty$. Первая пружина при этом гарантирует целостность твёрдого тела – ограниченность деформаций. Однако, при большой вязкости свойства системы при кратковременных воздействиях определяются скорее вязкостью.

Другим важным частным случаем является предел $G, K \to 0$ (называемый моделью Максвелла), когда отсутствует первая пружина. При этом тело может бесконечно растягиваться, что характерно для жидкостей. Стоит заметить, однако, что в этом случае при большой вязкости свойства системы при кратковременных воздействиях определяются второй пружиной и слабо отличимы от случая „отсутствия“ вязкости. Такое поведение характерно для твёрдых тел.

Разделяя уравнения (2.2.10) на уравнение для следов и недиагональные и переходя к частотному представлению получим

$$K \to K + \frac{i\omega\zeta K'}{K' + i\omega\zeta} \tag{2.2.11}$$

$$G \to G + \frac{i\omega\eta G'}{G' + i\omega\eta} \tag{2.2.12}$$

Таким образом, необходимо оценить параметры модели G', K', G, K

2.2.2. Протекание пластин

Не существует измерений вязкости стекол при комнатной температуре. Все измерения проводятся при температуре стеклования (более $T_g = 1446$ K для кварца), когда это значение достаточно невелико (порядка 10^{12} Па·с [64]). При повышении температуры логарифм вязкости практически линеен относительно обратной температуры. Линейной интерполяцией на комнатную температуру можно получить значение вязкости порядка 10^{38} Па·с. Однако в недавних работах о протекании пластин из плавленого [65, 60, 66], в которых в течение пяти лет наблюдалась деформация под действием собственного веса при комнатной температуре, было получено гораздо меньшее значение $\eta = 2 \times 10^{17}$ Па·с. Пластины были диаметром 11.4 см и толщиной 1.9 см [65], диаметром 16.5 см и толщиной 2.7 см [60]. Не существует измерений вязкости стекол при комнатной температуре. Все измерения проводятся при температуре стеклования (более $T_g = 1446$ K для кварца), когда это значение достаточно невелико (порядка 10^{12} Па·с [64]). При повышении температуры логарифм вязкости практически линеен относительно обратной температуры. Линейной интерполяцией на комнатную температуру можно получить значение вязкости порядка 10^{38} Па·с. Однако в недавних работах о протекании пластин из плавленого [65, 60, 66], в которых в течение пяти лет наблюдалась деформация под действием собственного веса при комнатной температуре, было получено гораздо меньшее значение $\eta = 2 \times 10^{17}$ Па·с. Пластины были диаметром 11.4 см и толщиной 1.9 см [65], диаметром 16.5 см и толщиной 2.7 см [60].

Рассмотрим этот эксперимент с точки зрения стандартной линейной модели упругости. Задача цилиндрически симметрична, поэтому азимутальные компоненты вектора смещения, как и все производные с участием азимутального угла будут равны нолю. Мы полагаем, что временная и пространственная части полей могут быть разделены и решение представимо в виде $\hat{\varepsilon}(\vec{r},t) = \hat{\varepsilon}(\vec{r})T(t)$ и $\hat{\sigma}(\vec{r},t) = \hat{\sigma}(\vec{r})T_s(t)$. Тогда, используя (2.2.10) получим

$$\frac{\sigma_{\mu>3}}{\varepsilon_{\mu>3}} = \frac{(1+G/G')\dot{T} + GT/\eta}{\dot{T}_s/(2G') + T_s/(2\eta)} = C_G, \tag{2.2.13}$$

$$\frac{\mathrm{tr}(\sigma)}{\mathrm{tr}(\varepsilon)} = \frac{(1+K/K')\dot{T} + KT/\zeta}{\dot{T}_s/(3K') + T_s/(3\zeta)} = C_K, \tag{2.2.14}$$

где $\mu > 3$ означает недиагональные компоненты тензора. Здесь и далее использована нотация Войта для записи 3-х мерных тензоров ($ij_{i=j} \to i$, $ij_{i\neq j} \to 9-i-j$). Уравнения для диагональных членов по-отдельности, в котором зависящие от времени части могут быть собраны в постоянные, так же может быть получены. Форма соотношений (2.2.13)-(2.2.14) позволяет предположить, что конечное решение будет иметь два не связанных колебательных процесса (т.е. две различных временных зависимости) для диагональных (относящихся к объёмным) и недиагональных (относящихся к сдвиговым) частей тензоров деформации. Таким образом, смещения должны состоять из двух частей, наподобие $\vec{u} = \mathrm{grad}\,\psi + \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}$. Однако, подобное рассмотрение оказывается ненужным для наших целей.

Рассмотрим уравнение движения упругих деформаций

$$\rho\ddot{u}_j = \nabla_k \sigma_{kj} + F_j. \tag{2.2.15}$$

Задача цилиндрически симметрична, поэтому азимутальные компоненты вектора смещения, как и все производные с участием азимутального угла будут равны нолю. Представим вектор смещения и тензор напряжений в виде произведения функции времени и функции координат $\vec{u} = u_i(\rho,z)T(t)$, $\hat{\sigma} = \sigma_{ij}(\rho,z)T_s(t)$. Тогда уравнения движения и модели примут вид

$$\rho_c\ddot{T}u_\rho = T_s\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_\rho) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_5\right) \tag{2.2.16}$$

$$\rho_c\ddot{T}u_z = f + T_s\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\sigma_5) + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_z\right) \tag{2.2.17}$$

Подставляя равенство (2.2.13) в (2.2.16) получим упрощённые уравнения. Частное решение можно записать в форме

$$u_\rho = u_?, \quad u_z = \frac{\beta}{2}(\rho^2 - R^2), \quad T_s = -\frac{f}{2C_0\beta}, \quad T = -\frac{f}{4G\beta} \tag{2.2.18}$$

где R – радиус пластины. Общее решение получается из системы

$$\frac{\ddot{T}}{T_s} = C_0\frac{D_z(D_z u_\rho + D_\rho u_z)}{\rho_c u_\rho} = C_1 \tag{2.2.19}$$

$$\frac{\ddot{T}}{T_s} = C_0\frac{D_\rho(D_z u_\rho + D_\rho u_z) + (D_z u_\rho + D_\rho u_z)/\rho}{\rho_c u_z} = C_1 \tag{2.2.20}$$

$$0 = (C-1)((C+1)D_\rho u_\rho + u_\rho/\rho) \tag{2.2.21}$$

Используя второе равенство (2.2.13) получим уравнение для временной части решения.

$$-k^2\left((1+G/G')\dot{T}+\frac{G}{\eta}T\right)=\frac{1}{2G'}\dddot{T}+\frac{1}{2\eta}\ddot{T}, \tag{2.2.22}$$

где k^2 – параметр разделения. Точное значение этой константы зависит от решения координатной части уравнения. В общем случае это волновое число и по нему будет производиться разложение на моды. Однако, как показано далее, это не нужно для нахождения необходимых нам общих постоянных времени. Соответствующее характеристическое уравнение и решение для объёмной части может быть получено формальной заменой $G \to K$ и $\eta \to \zeta$. Таким образом, временная часть представляет собой экспоненты и полное решение формируется следующим образом

$$u_z=\int U_j(k)u_z(k,\vec{r})e^{-i\gamma_j(k)t}-\frac{f}{8G}\left(\rho^2-R^2\right) \tag{2.2.23}$$

где коэффициенты $U_j(k)$ определяются из граничных условий, γ_j – нули соответствующего 2.2.22 кубического уравнения. Используя приближение большой вязкости можно найти

$$\gamma_0=-\frac{GG'}{\eta(G+G')} \tag{2.2.24}$$

$$\gamma_\pm=-\frac{G'^2}{2\eta(G+G')}\pm ik\sqrt{G+G'} \tag{2.2.25}$$

а так же коэффициенты пропорциональности для $U_i(k)$. Такое движение будет представлять из себя сумму экспоненциально затухающих $(-\frac{G'^2}{2\eta(G+G')})$ колебаний с частотами $k\sqrt{G+G'}$, около положения равновесия, двигающегося по экспоненте $-\frac{GG'}{\eta(G+G')}$ к положению равновесия $\propto \frac{\rho g R^2}{4G}$ (см. рис.2.10).

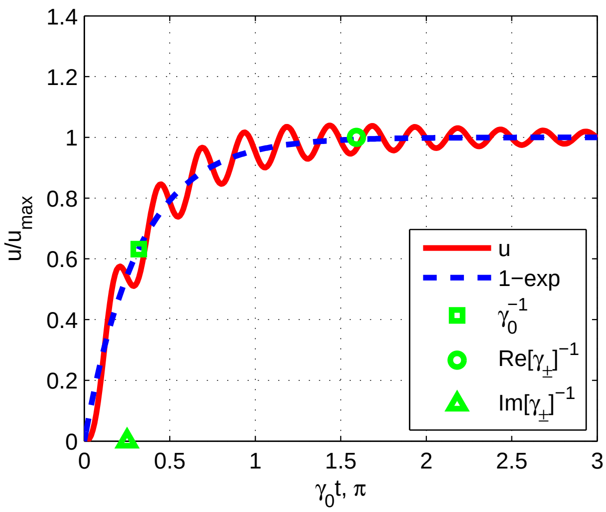

Рис. 2.10: Общий вид временного решения при $\mathrm{Re}\,\gamma_\pm=0.2\gamma_0$, $\mathrm{Im}\,\gamma_\pm=8\gamma_0$

В случае модели Максвелла одно из собственных значений станет равным нолю, и (2.2.13) не позволит взять частное решение в виде (2.2.18). Поэтому необходимо использовать

A, нм	γ^{-1}, год	t_0, год	Ошибка, %
12.4 ± 4.9	7.1 ± 8.8	1992.6 ± 3.2	2.4
13.1	9.1 ± 0.9	1992.3 ± 0.8	2.3
16	14.3 ± 1.7	1991 ± 1.2	2.9
20	21.4 ± 3	1990 ± 1.5	3.4

Таблица 2.3: Результаты аппроксимаций данных [60, 65]. Отсутствие погрешности означает, что величина фиксировалась при расчёте.

$T = -\frac{f}{4\eta\beta}t$. Тогда получим вместо экспоненциального стремления к равновесию, линейный уход на бесконечность со скоростью $\propto \frac{\rho g R^2}{4\eta}$.

Как показано в [65, 66] прогиб кварцевой пластины аппроксимируется экспоненциальной функцией $A(1 - \exp(\gamma(t - t_0))$ с относительной ошибкой 2.4%. Мы делаем неочевидное предположение, что измеренный прогиб, а значит и его постоянная времени, определяется сдвиговой частью процесса. Численно можно показать, что объёмная часть накапливает больше энергии при деформации. С другой стороны, оцениваемой наблюдаемой являлось вертикальное смещение центра пластины, представимое в виде $\int_{\text{thickness}} \varepsilon_{zz} dz + \int_{\text{radius}} \varepsilon_{\rho z} d\rho$. Из этого следует, что вклад сдвиговой части растёт с увеличением радиуса диска, что в нашем случае должно привести к её доминированию.

Параметры A и γ^{-1} экспоненциальной аппроксимации определены не точно (40% и 111% относительной ошибки при 95% уверенности). Результаты аппроксимаций представлены в таблице 2.3.

Однако, в статье [66] исследовались ещё две пластины, движение которых уже практически закончилось (сдвиг за два года составил меньше предела точности 0.5 нм). Предположив, что наблюдавшийся для этой пластины прогиб ≈ 35 нм является окончательным равновесием, получим оценку для модуля сдвига $G = 2.97$ ГПа. Тогда имея скорость звука как функцию G и G', можно определить G' и η.

2.2.3. Затухание звука

Выражения (2.2.11)-(2.2.12) позволяют переписать скорости звуковых волн с учётом вязкости.

$$v_l^2 = \frac{3K+4G}{3\rho} + \omega\left(K'\zeta\frac{\omega\zeta + iK'}{\rho(K'^2+\omega^2\zeta^2)} + 4G'\eta\frac{\omega\eta+iG'}{3\rho(G'^2+\omega^2\eta^2)}\right) \tag{2.2.26}$$

$$v_t^2 = \frac{G}{\rho} + \omega\eta G'\frac{\omega\eta+iG'}{\rho(G'^2+\omega^2\eta^2)}. \tag{2.2.27}$$

Обозначим v^2 действительную и $\mu\omega$ мнимую части скоростей. В зависимости от соотношения действительной и мнимой частей возможно два варианта дисперсионного уравнения

$$k = \frac{\omega}{v} - i\frac{\omega}{v}\frac{\omega\mu}{2v^2} \qquad \omega\mu \ll v^2 \tag{2.2.28}$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{2\mu}} - i\sqrt{\frac{\omega}{2\mu}} \qquad \omega\mu \gg v^2 \tag{2.2.29}$$

Квадрат скорости поперечной волны имеет один минимум действительной части в нуле, высотой $\frac{G}{\rho}$, а у мнимой части – один максимум (антисимметричный) в $\frac{G'}{\eta}$, высотой $\frac{G'}{2\rho}$. Квадрат скорости продольной волны так же имеет один минимум действительной части в нуле, однако мнимая часть в общем случае имеет два максимума (в районе $\frac{G'}{\eta}$ и $\frac{K'}{\zeta}$). Типичные формы дисперсий приведены на рис.2.11. (2.2.28)) находится в районе $\frac{K'}{\zeta}$.

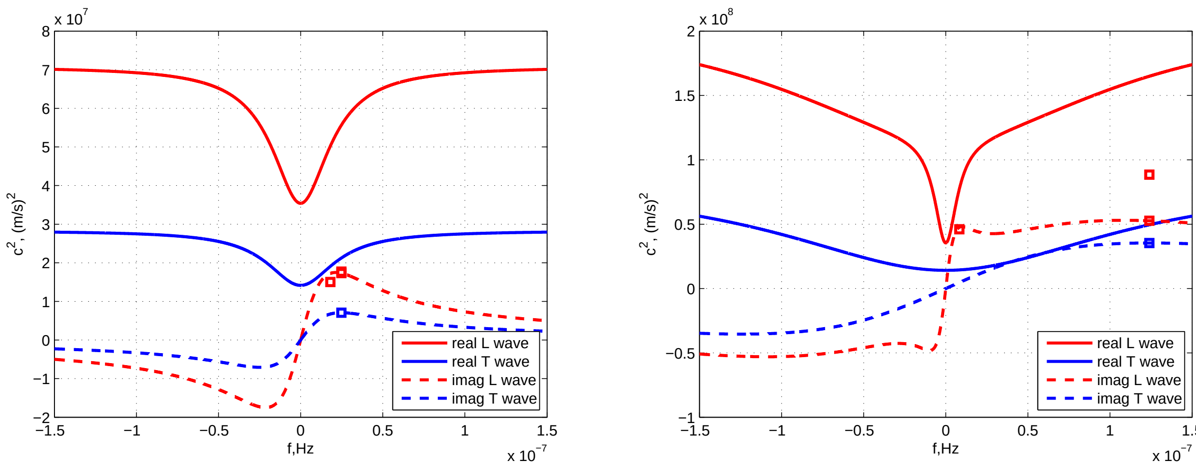

Рис. 2.11: Дисперсия действительной и мнимой частей квадрата скорости звука для параметров плавленого кварца (слева) и абстрактного вещества с увеличенной в 11 раз объёмной вязкостью и в пять раз – G', K' (справа). Скорость продольных колебаний показана красным, поперечных – синим.

Для поперечной волны можно строго показать, что первый вариант (2.2.28) реализуется всегда при $G' < 2(1+\sqrt{2})G$, и область существования случая (2.2.29) находится между вблизи ноля до значений частоты порядка $\frac{G'}{\eta}$. Для продольной волны точные значения получить затруднительно, однако ситуация сходная и точка пересечения (после которой реализуется обычная дисперсия) лежит вблизи максимума $\frac{K'}{\zeta}$.

Таким образом на высоких частотах скорости звука $v_l^2 = \frac{3(K+K')+4(G+G')}{3\rho}$ и $v_t^2 = \frac{G+G'}{\rho}$, а вязкое затухание отсутствует. Имея скорость поперечного ультразвука при нормальных условиях ($T = 297$ K) $v_t = 3760$ м/с и используя результаты предыдущего пункта, получим модуль сдвига $G' = 28.1$ ГПа и вязкость $\eta = 12 \times 10^{17}$ Па·с. Объёмные параметры получить исходя из имеющихся данных не удается. Так же стоит отметить, что второй модуль сдвига на порядок больше первого. Это значит, что плавленый кварц на временах менее 15 лет подчиняется модели Максвелла.

2.2.4. Спектральная плотность шума

Подставляя формулы (2.2.11)-(2.2.12) в (2.2.2)-(2.2.4) и (2.2.1) получим спектральные плотности шумов

$$S_s = \frac{4k_BT}{\omega^2}\frac{1}{4\sqrt{\pi}w(v_l^2-v_t^2)^2v_t^4\rho^2}\left(v_t^4\frac{K'^2}{\zeta}+(3v_l^4-6v_l^2v_t^2+4v_t^4)\frac{G'^2}{3\eta}\right), \tag{2.2.30}$$

$$S_j^c = \frac{4k_BT}{\omega^2}\sum_j\frac{|\beta_j|^2d_j}{\pi w^2}\frac{1}{v_{l_j}^4\rho_j^2}\left(\frac{K_j'^2}{\zeta_j}+\frac{4G_j'^2}{3\eta_j}\right), \tag{2.2.31}$$

$$S_j^s = \frac{4k_BT}{\omega^2}\sum_j\frac{d_j}{\pi w^2}\frac{1}{v_{l_j}^4(v_l^2-v_t^2)^2}\left[-2v_{l_j}^2v_{t_j}^2\frac{\rho_j(v_{l_j}^2-v_{t_j}^2)}{\rho^3(v_l^2-v_t^2)}\left(\frac{K'^2}{\zeta}+\frac{G'^2}{3\eta}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho^2}\left(v_{t_j}^4\frac{K_j'^2}{\zeta_j}+(3v_{l_j}^4-6v_{t_j}^2v_{l_j}^2+4v_{t_j}^4)\frac{G_j'^2}{3\eta_j}\right)\right]. \tag{2.2.32}$$

Здесь v_l v_t – скорости продольной и поперечной волн для подложки и j-го слоя, G' K' – модули сдвига и объёма для подложки и j-го слоя, η ζ – сдвиговая и объёмная вязкости подложки и j-го слоя, ρ – плотности слоёв.

Данные об объёмной вязкости, как впрочем и об отношении объёмных модулей сжатия, отсутствуют. В работе [67] даётся соотношение объёмной и сдвиговой вязкости, но оно получено исходя из модели Кельвина-Войта и предположения, что затухание ультразвука вызвано вязкостью. Выше было показано, что оба предположения не верны. Поэтому численные оценки можно дать только для сдвиговой части шума.

Графики спектральных плоскостей для шума подложки и покрытия (с параметрами (1.2)) построены на рисунке 2.12(слева) вместе со стандартными броуновскими шумами LIGO из GWINC. Часть шума, обусловленного покрытием, на несколько порядков ниже броуновских шумов вследствие малой толщины. Этой частью можно пренебречь, если вязкость тантала меньше вязкости плавленого кварца не более чем на пять порядков (см. 2.12 справа). Вязкий шум подложки преобладает над броуновскими шумами подложки на частотах менее 7 Гц. Стоит отметить, что при использовании значения вязкости из [66] точка их пересе-

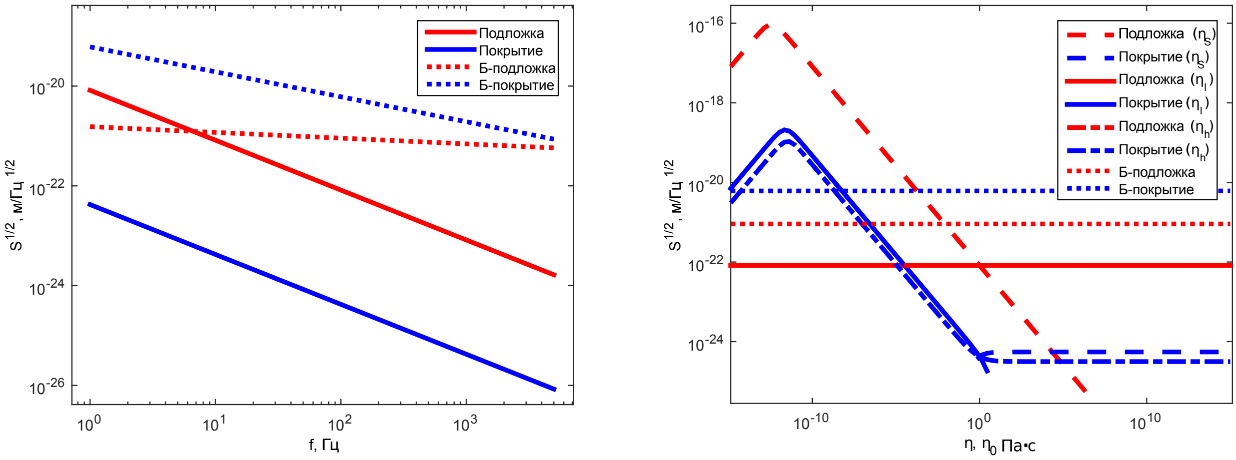

Рис. 2.12: *Слева:* Спектральные плотности броуновских и вязких шумов для параметров LIGO. При оценке вязкого шума в покрытии шум оксида танталла не учитывался. *Справа:* Спектральные плотности броуновских и вязких шумов на 100 ГЦ в зависимости от вязкостей подложки η_S, кварца η_l и оксида тантала η_h в единицах $\eta_0 = 12 \times 10^{17}$ Па·с. Для каждой кривой все прочие вязкости считались равными η_0. Кривые для шума подложки не зависят от вязкостей слоёв и совпадают. Для сравнения пунктиром показаны броуновские шумы подложки и покрытия.

чения сместилась бы на сто герц – центральную частоту кривой чувствительности LIGO. Поэтому получение более точных оценок вязкости необходимо. В то же время вязкий шум не представляет угрозы для проекта пока не будет существенно снижен броуновский шум покрытия, являющийся пока наибольшим.

Стоит также отметить, что на данный момент нет данных о вязкости в тонких плёнках оксида кремния и оксида танталла (например потери в плавленом кварце и его тонких плёнках различаются на три порядка, что приводит к превосходству Броуновского шума покрытия над всеми остальными и делает его главным ограничением чувствительности LIGO). Хотя даже если вязкие потери возрастут на три порядка, как это было с броуновским шумом, вязкий шум покрытия не догонит вязкий шум подложки. Так же заметим, что вязкость стоит в знаменателе, что приводит к тому, что её увеличение приведёт к снижению шума. Это позволяет утверждать, что снижение температуры должно быть эффективным способом снижения данного типа шумов(вязкость обычно растёт при снижении температуры).

2.3. Итоги главы 2

В главе были проанализированы шумы связанные с аморфной природой подложки. Стеклообразное состояние вещества недостаточно исследовано и многие важные параметры не определены или обладают сильной зависимостью от состава и предыстории образования образца. Так определённые разными экспериментаторами разности внутренних энергий стеклообразного и кристаллического состояния различаются в два-три раза, угол механических потерь в зависимости от производителя – на порядки, а измеренная в описанных экспериментах вязкость меньше предсказываемых теорией на 15 порядков. Также очень мало данных, позволяющих определить дополнительные упругие параметры плавленого кварца. В связи с тем, что он находится на границе между жидкостью и твёрдым телом, его поведение описывается не тремя, а шестью величинами. В литературе же для описания используют одно из двух приближений, обычно без обсуждения условия их применимости.

Расчёты показали, что описанные шумы не достаточно сильны, чтобы повлиять на работу существующих приборов и слабее других известных источников. Однако, ввиду отсутствия некоторых данных нельзя говорить о высокой достоверности данного утверждения. Так вязкие параметры плавленого кварца требуют более точного исследования.

В главе

- Построена модель шума спонтанной кристаллизации и проведены оценки спектральной плотности.

- Получена плотность частоты событий процесса спонтанной кристаллизации и на её основе проведены оценки спектральной плотности шумов ползучести в подвесах зеркал.

- Рассмотрена стандартная линейная модель упругости и её следствия для потерь ультразвука.

- Оценены параметры стандартной линейной модели упругости для плавленого кварца и показано, что на коротких временах к нему возможно применение модели Максвелла

- Получены спектральные плотности шума смещения поверхности, связанного со сдвиговой и объёмной вязкостью. Отмечается невозможность численной оценки объёмной части из-за отсутствия данных.

ГЛАВА 3

Шумы в электрооптических модуляторах на основе микрорезонаторов с модами шепчущей галереи

3.1. Введение

Интерферометр Майкельсона, обсуждавшийся ранее, не единственный оптический прибор высокой точности. Существует более интересная с некоторых точек зрения (в частности с практической) резонансная система. Оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи (ММШГ), впервые продемонстрированные на кафедре физики колебаний физического факультета МГУ в 1989 году в группе член-корр. РАН В. Б. Брагинского [68], сочетают высокую добротность (до 10^{11}), малые размеры (от десятков микрон) и высокую концентрацию оптического поля. Оптические микрорезонаторы с модами типа шепчущей галереи вызывают в настоящее время постоянно растущий интерес в связи с возможностями их применения в различных устройствах микрофотоники. ММШГ из плавленого кварца могут быть использованы в пассивных устройствах, таких как фильтры, дискриминаторы, датчики смещения, химические и биологические сенсоры и т. д. Революционным в развитии ММШГ стала технология изготовления оптических резонаторов с модами шепчущей галереи из различных кристаллических материалов [69, 70], что позволяет создавать активные устройства, такие как электрооптические модуляторы [71, 72], приёмники [73, 74] и оптоэлектронные генераторы [75, 76]. В частности, в таких резонаторах, изготовленных из кристаллического флюорита (CaF_2) была продемонстрирована рекордная оптическая добротность для компактных резонаторов $> 10^{11}$ [77]. Метод изготовления резонаторов с предельной добротностью с использованием многократного отжига с последующими асимптотическими переполировками защищен патентом [78]. Возможность применения ММШГ во множестве устройств делает важным исследование их шумовых характеристик[79], в особенности всвязи с реализацией на их основе высокостабильных оптических гребёнок [9][А3].

В последнее десятилетие большое внимание уделяется устройствам оптической передачи и обработки радиочастотных и СВЧ сигналов. Была разработана широкая гамма устройств, предназначенных для обработки радиочастотных и СВЧ сигналов непосредственно в оптическом диапазоне без обратного преобразования частоты. При этом используются преимущества оптических каналов связи большой емкости, позволяющих передавать информацию с большой скоростью, малыми потерями и малым потреблением энергии. Размеры и стоимость устройств оказываются гораздо ниже по сравнению с электронными устройствами, особенно устройствами СВЧ диапазона. Для реализации этой программы требуются эффективные электрооптические амплитудные и фазовые модуляторы, оптические усилители, оптические фильтры, волноводы, разветвители, приемники и т. д. Перспективным базисным элементом для многих из таких устройств являются оптические микрорезонаторы с модами шепчущей галереи. Малые размеры и высокая концентрация оптического поля в ММШГ позволяет ожидать сильное электрооптическое взаимодействие в резонаторах, изготовленных из традиционных нелинейно-оптических кристаллов, при надлежащем подборе оптических мод и конфигурации внешнего высокочастотного поля. Это позволит создавать эффективные оптические модуляторы и приемники. Данная глава посвящена электрооптическим модуляторам на основе ММШГ. В ней разработаны методы численного моделирования электрооптического эффекта и большинства основных шумов. Для некоторых из них существуют готовые аналитические выражения и экспериментальные данные (см. например [25, 79, 80]), что позволит верифицировать применённый метод.

3.1.1. Моды шепчущей галереи

Моду шепчущей галереи в лучевом представлении можно представить как оптическую волну, распространяющуюся вблизи внутренней поверхности аксиально диэлектрического тела так, что угол падения на границу раздела превышает угол полного внутреннего отражения (рис. 3.1 сверху).

Резонанс в таком представлении соответствует тому, что на одном обороте ($\approx 2\pi Rn$, где R – радиус резонатора, n – эффективный показатель преломления) укладывается целое число длин волн $m\lambda$. В реальных оптических микрорезонаторах величина m обычно довольно велика. Моды шепчущей галереи, имеющие наиболее простое распределение поля с одним максимумом в радиальном и зенитном направлении, и, тем самым, самую большую концентрацию электромагнитного поля называют фундаментальными (рис. 3.1 снизу). Эти моды так же обычно обладают наивысшей добротностью. Для оценок можно считать, что

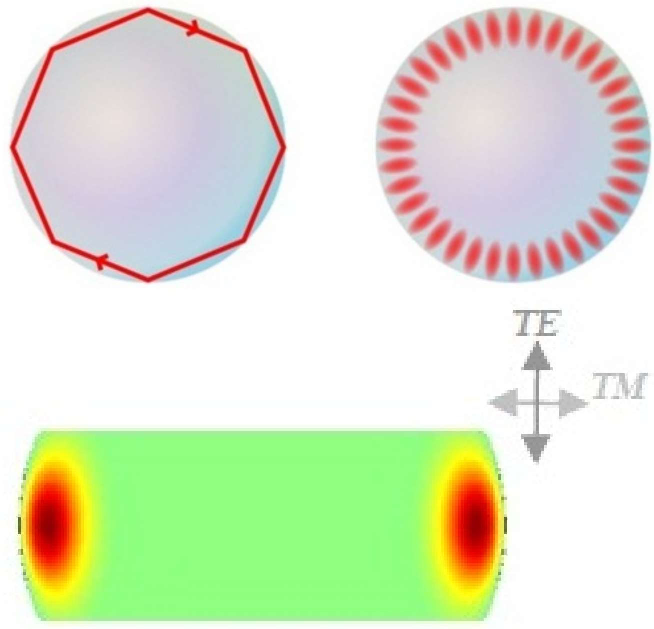

Рис. 3.1: Моды типа шепчущей галереи в лучевом представлении вид сверху (сверху), сечение фундаментальной моды и соглашение о поляризациях (снизу).

они имеют приблизительно гауссов профиль

$$E \propto \exp\left(-\frac{(r-R_m)^2}{2d_r^2} - \frac{z^2}{2d_z^2} + im\varphi\right), \tag{3.1.1}$$

$$d_z = \sqrt{\frac{Rb}{m}},$$

$$d_r = 0.77Rm^{-2/3},$$

$$R_m = T'_{m1}\frac{\lambda}{2\pi n},$$

где T'_{m1} – первый нуль производной функции Бесселя m-порядка, $b = \sqrt{Rr_c}$ – малая полуось эквивалентного сфероида, r_c – радиус кривизны поверхности вблизи моды.

В общем случае моды шепчущей галереи описываются тремя модовыми числами.

- Радиальное модовое число q представляет собой номер корня радиальной функции (обычно функции Бесселя) и численно равен числу максимумов оптического поля на радиусе.

- Азимутальное модовое число m – число, находящееся в стандартном для всех МШГ множителе $e^{im\varphi}$. Очевидно, что оно напрямую задаёт число максимумов по азимутальному углу

- Орбитальное (момент-импульсное) число l – число, находящееся в порядке радиальной функции (обычно функции Бесселя) и численно равно безразмерному расстоянию до первого корня радиальной функции. Так же, совместно с азимутальным числом оно определяет число максимумов в зенитном направлении. Поэтому часто вместо импульсного числа используют зенитное (поперечное) модовое число $p = l - m$, которое точно соответствует уменьшенному на 1 числу максимумов поля в этом направлении.

Орбитальное число называется по аналогии с модовым числом волновой функции электрона в атоме в квантовой механике. По сути волновая функция электрона описывается тем же уравнением, что и МШГ и эта аналогия очень глубока. В частности азимутальное число, называющееся в атомной физике проекцией момента импульса, имеет такие же соотношения с числом l: оно всегда меньше либо равно ему $m \leq l$. Таким образом, интересующие нас в основном фундаментальные моды имеют $q = 1$ и $l = m$ ($p = 0$), то есть максимальную проекцию углового момента. Продолжая аналогию с атомной физикой, это соответствует ридберговскому атому.

Так же моды шепчущей галереи могут быть двух разных поляризаций. Здесь часто возникает путаница: точные решения для цилиндра дают

- TE моды без аксиальной компоненты электрического поля (т.е. электрическое поле горизонтально) и
- TM моды без аксиальной компоненты магнитного поля поля (при этом электрическое поле почти вертикально),

а точные решения в сфере дают

- TE моды не имеющие радиальной компоненты электрического поля (т.е. электрическое поле вертикально) и
- TM моды без радиальной компоненты магнитного поля поля (при этом электрическое поле почти горизонтально).

В общем случае все моды диэлектрических резонаторов гибридны, однако для определённости будем называть TE модами моды, где электрическое поле преимущественно вертикально и TM модами – где электрическое поле преимущественно горизонтально (рис. 3.1 снизу).

Частотное расстояние между фундаментальными модами, называемое областью свободной дисперсии (ОСД), определяется выражением $\Delta f_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{2\pi R n}$. В общем случае расстояние между модами может не равняться Δf_{FSR} и нелинейно зависит от всех модовых чисел, однако этот эффект слабеет с ростом m. Обзор основных свойств оптических микрорезонаторов и их ранних экспериментальных исследований представлен в монографии [5].

3.1.2. Шумы в ММШГ

Практически все источники шумов и методы их расчёта, применявшиеся для зеркал гравитационных антенн, справедливы и для микрорезонаторов. Основной наблюдаемой для резонатора можно считать его резонансную частоту. Тогда, используя приближённое равенство $f_m = \frac{cm}{2\pi Rn}$, аналогом (1.2.38) будет служить выражение

$$\frac{\delta f}{f} \approx -\frac{\delta n}{n} - \frac{\delta R}{R} \tag{3.1.2}$$

с последующим разделением на Броуновскую и тепловую ветви. Также в микрорезонаторах стоит выделить шумы, вызванные взаимодействием с окружением. Далее будет приведён обзор известных формул, с которыми будут сравниваться результаты численного моделирования, проведённого в данной работе.

Тепловая ветвь

Для тепловой ветви имеем терморефракцию $\delta n = \beta \delta T$ и тепловое расширение $\mathrm{div}\vec{u} = \alpha \delta T$, где $\vec{u}$ – поле смещений в деформированном резонаторе. Тогда для шума можно записать

$$\frac{\delta f}{f} \approx -\left(\frac{\beta}{n} + \alpha\right) \delta T \tag{3.1.3}$$

где α – коэффициент теплового расширения, β – коэффициент терморефракции. Для ниобата лития эти значения зависят от направления, однако обычно полагается что ось оптическая ось кристалла направлена вдоль оси z и, таким образом, действующими параметрами являются x и y компоненты. В результате коэффициент расширения равен $\alpha = \alpha_x = \alpha_y = 13.5 \times 10^{-6}$ (для справки $\alpha_z = 3.4 \times 10^{-6}$) [81], а коэффициент терморефракции $\beta_x = \beta_y = 3.3 \times 10^{-6}$ (для справки $\beta_z = 37 \times 10^{-6}$) [82]. Здесь, в отличие от многослойного зеркала, коэффициенты при флуктуирующей величине имеют один знак и самокомпенсация шума невозможна.

Выражение для изменения температуры рассчитано в [25] или [5] в рамках Ланжевеновского подхода

$$S_{\delta T}(\omega) = \frac{k_B T^2}{\sqrt{\pi^3 \kappa \rho C \omega}} \sqrt{\frac{l}{2p+1}} \frac{1}{R^2 \sqrt{1 - d_r^2/d_z^2}} \frac{1}{(1 - (\omega \tau_d)^{3/4})^2} \tag{3.1.4}$$

$$\tau_d = \frac{\pi^{1/3}}{4^{1/3}} \frac{\rho C}{\kappa} \frac{d_r^2 d_z^2}{d_r^2 + d_z^2} \tag{3.1.5}$$

для фундаментальных мод, где κ – теплопроводность, ρ – плотность, C – теплоёмкость, R – радиус микрорезонатора, d_r и d_z – полуширина фундаментальной моды (по энергии) с азимутальным числом m (3.1.1), l – орбитальное число. Хотя это выражение получено без учёта границ (а значит и формы) микрорезонатора, оно показало лучшее согласие с экспериментом [25] для терморефрактивного шума на низких частотах, чем выведенное там же выражение для конечной микросферы (см. рис.3.17 слева). Было высказано предположение, что метод разложения по тепловым модам даёт ошибку, так как микросфера не достаточно теплоизолирована от внешней среды. Таким образом низкочастотные тепловые моды оказываются не в полной мере запрещёнными конечным размером резонатора и продолжают давать вклад в шум. Таким образом передача тепла в воздух, а так же в ножку (крепление микросферы) приводит к повышению шума на низких частотах. В работе [80] формула (3.1.4) так же показала хорошее согласие с экспериментом для микротороидов.

В [79] получено выражение для терморефрактивного шума микродиска. Для решения уравнения теплопроводности применяют метод разложения по тепловым модам диска. Приближение полученого точного решения даётся в виде асимптотик:

$$S_{\delta T}(\omega) = \frac{k_B T^2}{V_{\text{eff}}} \frac{R^2}{12\kappa} \left(1 + \left(\frac{R^2 \rho C}{\kappa} \frac{\omega}{3^{5/2}} \right)^{3/2} + \frac{1}{6} \left(\frac{R^2 \rho C}{\kappa} \frac{\omega}{8 l^{1/3}} \right)^2 \right)^{-1}, \tag{3.1.6}$$

где V_{eff} – эффективный объём МШГ. График спектральной плотности терморефрактивного шума для CaF_2 диска изображён на рисунке 3.17 справа.

В статье [79] заявлено так же рассмотрение термоупругого шума. Однако под этим термином там, помимо собственно термоупругого шума, понимается так же броуновский шум (прибавляемый не когерентно). Там утверждается, что в отличие от терморефрактивного шума, при расчёте этих необходимо использовать усреднение не по объёму МШГ, а по объёму всего резонатора, который на много больше. Далее исходя из общей формулы

$$\langle \Delta T^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{C_p V \rho}, \tag{3.1.7}$$

где V – объём усреднения, делается вывод, что термоупругий шум будет меньше терморефрактивного пропорционально отношению объёма резонатора к объёму моды, и расчёт его спектральной плотности не производится. Справедливость этого факта ставится под сомнение в связи с результатами моделирования, проведённого в данной работе далее.

Отметим также, что далее в работе [79] наблюдается небольшая путаница. Так как под терморефрактивным шумом там понималась сумма термоупругого и броуновского шумов, то после пренебрежения термоупругой частью, рассчитываемый далее броуновский шум назывался термоупругим шумом, хотя к флуктуациям температуры уже не имел никакого отношения.

Броуновская ветвь

Для Броуновской ветви получим

$$\frac{\delta f}{f} \approx -\left(1 - \frac{n^2}{2}p\right)\delta R \tag{3.1.8}$$

где n – невозмущённый показатель преломления, p – фотоупругий коэффициент. Опять же для ниобата лития фотоупругий тензор сольно анизотропный, однако за счёт симметрии (цилиндр, оптическая ось вверх) этот коэффициент можно положить $p = p_{11} = p_{22} = -0.026$ [33]. В работе [79] дана оценка для спектральной плотности броуновского шума (называемого там терморефрактивным по причинам, описанным в предыдущем пункте). В рамках одномерной модели сделано предположение, что изменение радиуса микродиска подчиняется уравнению

$$\frac{\partial\delta R}{\partial t} + (-i\Omega_0 + \Gamma_0)\delta R = F_R(t), \tag{3.1.9}$$

где $\Omega_0 = \frac{\pi v_s}{R}$ – частота низшей радиальной механической моды, v_s – скорость звука, Γ_0 – акустические потери. Для спектральной плотности получено

$$S_{\delta R/R} = \frac{k_B T \beta_T}{9V_R}\frac{\Gamma_0}{(\omega - \Omega_0)^2 + \Gamma_0^2}, \tag{3.1.10}$$

где V_R – объём микрорезонатора, $\beta_T = -[(1/V)(\partial V/\partial p)]_T$ – изотермическая сжимаемость.

В статье [80] приводится аналогичная формула и демонстрируется, её качественное согласие с экспериментом.

$$S_{\delta R/R} = \frac{2k_B T}{m_{\text{eff}} R^2}\frac{\Gamma_0}{(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \omega^2\Gamma_0^2}, \tag{3.1.11}$$

где m_{eff} – эффективная масса – параметр инкапсулирующий сложную механику системы и устанавливающий правильную размерность. Его обычно получают из эксперимента в соответствии с определением [83]:

$$m_{\text{eff}} = \frac{2W_x}{\Omega^2 x^2} = \frac{2W_{\text{mech}}}{\Omega^2 R^2 (\delta\omega/\omega)^2}, \tag{3.1.12}$$

где x – обобщённая координата. Для приближённых оценок мы положим, что $m_{\text{eff}} = \rho_{\text{CaF}_2} 2\pi^2 R d_r d_z$ – массе резонатора в объёме МШГ. Броуновские шумы для CaF_2 диска представлены на рисунке 3.18 слева.

Описанное выше – внутренние шумы резонатора. В случае модулятора, нам более интересно как эти флуктуации отпечатываются на сигнале накачки, то есть в переданном сигнале. Этот процесс происходит аналогично модуляции, и для его понимания надо рассмотреть сначала простую модуляцию. Необходимая теория гармонической модуляции будет построена в разделе 3.2.1..

Шумы обратного влияния

Для возбуждения микрорезонатора и получения сигнала используют лазерное излучение. Нестабильность накачки, помимо прямого перехода в нестабильность сигнала, приводит так же к появлению шумов обратного влияния. В первую очередь в микрорезонаторах рассматривают пондеромоторные шумы, как классические источники обратного влияния [84]. При этом частота меняется за счёт светового давления изнутри резонатора, что приводит как к изменению радиуса, так и к изменению показателя преломления вследствие фотоупругого эффекта

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \left(1 + \frac{\epsilon p_{\text{eff}}}{2}\right)\frac{\delta R}{R}, \tag{3.1.13}$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость, p_{eff} – эффективный коэффициент фотоупругости. Эти эффекты могут быть значительными, так как активно используются в оптомеханике [85, 86] и квантовом оптическом охлаждении [87]. В [80] получена спектральная плотность этого шума в виде

$$S_{\delta R/R} = \frac{16\hbar\omega_m P}{m_{\text{eff}}^2 R^4}\frac{\gamma_c/\kappa_m}{4\omega^2+\kappa_m^2}\frac{1}{(\omega^2-\Omega_0^2)^2+\Gamma_0^2\omega^2}, \tag{3.1.14}$$

где m_{eff} – эффективная масса механической моды (в [79] даётся $m_{\text{eff}} \approx \rho V_R$ – через объём резонатора, но мы будем пользоваться указанным в предыдущем пункте приближением с объёмом моды), $\kappa_m = \gamma_{0_m} + \gamma_c$ – полная ширина резонанса МШГ, γ_{0_m} и γ_c – собственная и обусловленная связью ширины резонанса МШГ, P – средняя мощность накачки. В работе [79] используется формула с такой же частотной зависимостью, но вместо κ_m стоит $2\gamma_c$, как если бы рассматривался случай согласованной нагрузки, хотя речь идёт о недогруженном случае ($\gamma_{0_m} \ll \gamma_c$)

Так же к шумам обратного влияния можно отнести Керровскую самомодуляцию, так как она зависит от мощности внутри резонатора (мощности накачки):

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{n_2 \delta P}{n}\frac{2\pi R}{V_m}, \tag{3.1.15}$$

где n_2 – коэффициент Керровской нелинейности. В [79] для шума получено

$$S_{\delta\omega/\omega} = \frac{16 n_2^2 c^2 \hbar\omega_m P}{n^4 V_m^2}\frac{\gamma_c/\kappa_m}{4\omega^2+\kappa_m^2}, \tag{3.1.16}$$

Шумы обратного влияния для CaF_2 диска при мощности накачки $P = 1$ мВт представлены на рисунке 3.2.

Описанные выше шумы являются основным набором шумов ММШГ.

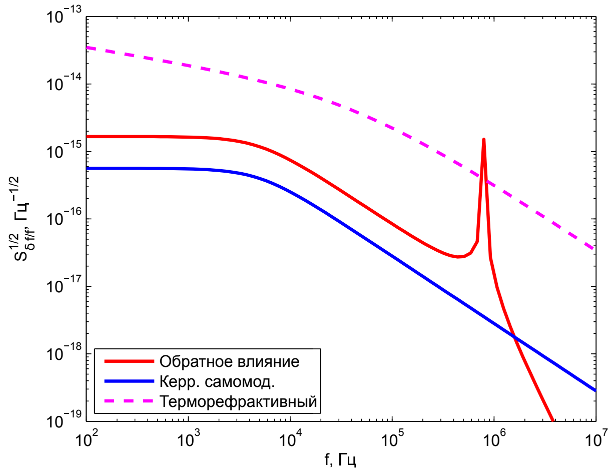

Рис. 3.2: Шум обратного влияния (пондеромоторный) (3.1.14) и керровская самомодуляция (3.1.16) в CaF_2 диске при мощности накачки 1 мВт. Для сравнения показан так же показан терморефрактивный шум (3.1.4).

3.2. Электрооптические модуляторы

Перейдём к рассмотрению электрооптического модулятора. Если ММШГ выполнен из электрооптического материала, то приложение внешнего поля приведёт к изменению показателя преломления и сдвигу резонансной частоты. Эффективное резонансное взаимодействие между многими оптическими модами и микроволновой модой достигалось за счет специальной формы СВЧ резонатора и давало выигрыш за счет двойного резонанса. Схема устройства, разработанная в ранних работах, и в целом повторяющаяся в дальнейшем представлена на рис. 3.3. Резонатор помещен на металлическую подложку с радиочастотным полосковым элементом связи и призмой оптической связи. На резонатор нанесен металлический электрод в виде полукольца, являющийся полуволновым СВЧ полосковым резонатором с частотой резонанса равной ОСД оптического резонатора.

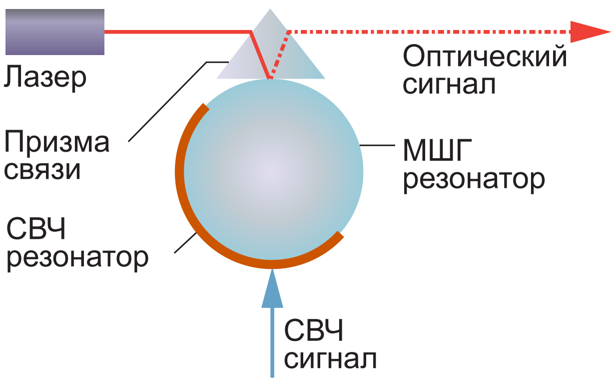

Рис. 3.3: Схема простейшего электрооптического модулятора на ММШГ.

Схема на рисунке 3.3 не является единственно возможной. Можно предложить множество различных конфигураций СВЧ резонаторов, включая диэлектрические резонансные и линзовые антенны [74, 88], для которых можно ожидать хорошее перекрытие мод и эффективное электрооптическое взаимодействие (см. рис. 3.4).

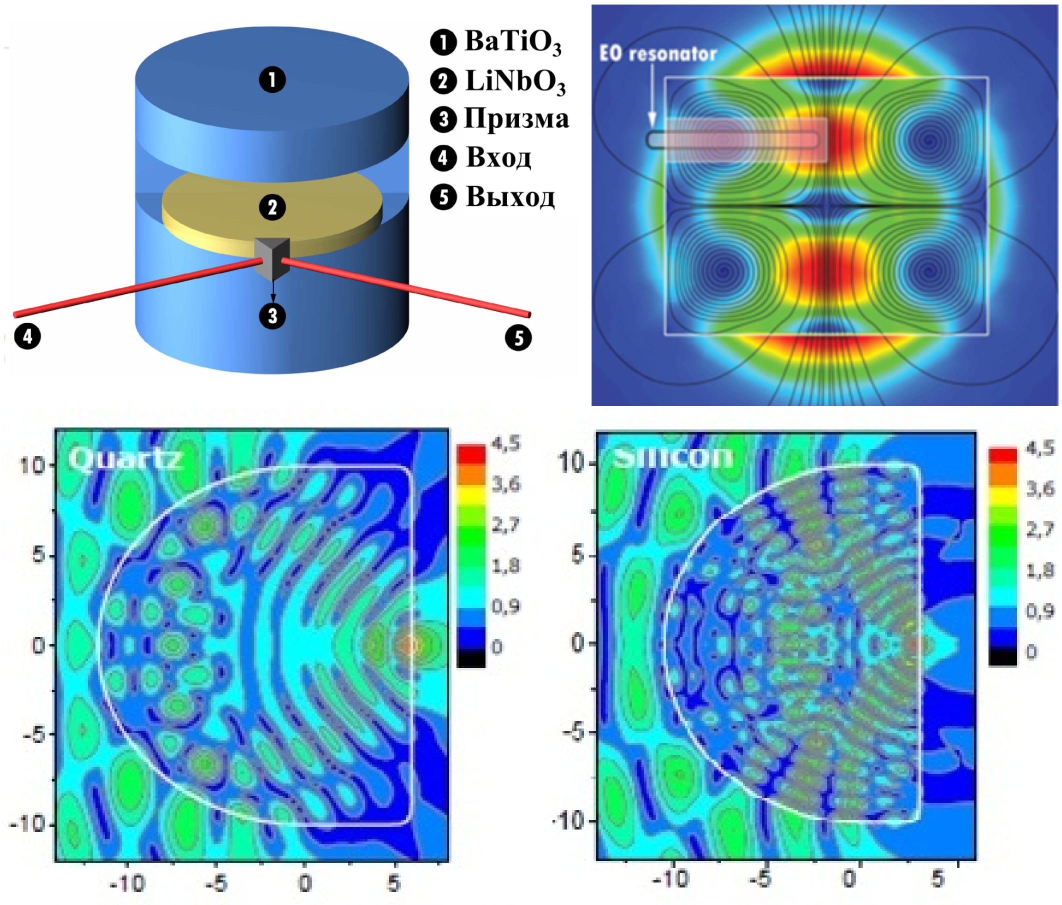

Рис. 3.4: Резонансная (сверху) и линзовая (снизу) диэлектрические антенны. В точках повышенной концентрации поля ставятся ММШГ.

Недостатком модуляторов на одновременном резонансе является то, что спектр сигнала и спектральные компоненты модулированного сигнала должны находиться внутри полос резонансов. В сочетании с высокой добротностью ММШГ это приводит не только к ограниченности полосы модуляции, но и к тому, что частота модуляции должна совпадать с частотным расстоянием между модами, либо быть меньше полосы оптического резонанса. Если модуляция происходит на частоте f_{RF}, то в оптическом спектре вблизи основной линии оптической несущей f появляются боковые компоненты $f \pm f_{\mathrm{RF}}$. Для получения максимальной модуляции все эти три частоты должны находиться вблизи резонансов. Таким образом возможно три режима работы модулятора на ММШГ:

1. Модуляция накачки – накачиваемая мода является сигнальной (рис. 3.5 слева). При этом частота модуляции $f_{\mathrm{RF}} \leq f_p Q_p^{-1}/2$ должна быть меньше полуширины линии резонанса МШГ, а ширина полосы $\Delta f_{\mathrm{mod}} \leq f_p Q_p^{-1}/2 - f_{\mathrm{RF}}$ – ещё меньше.

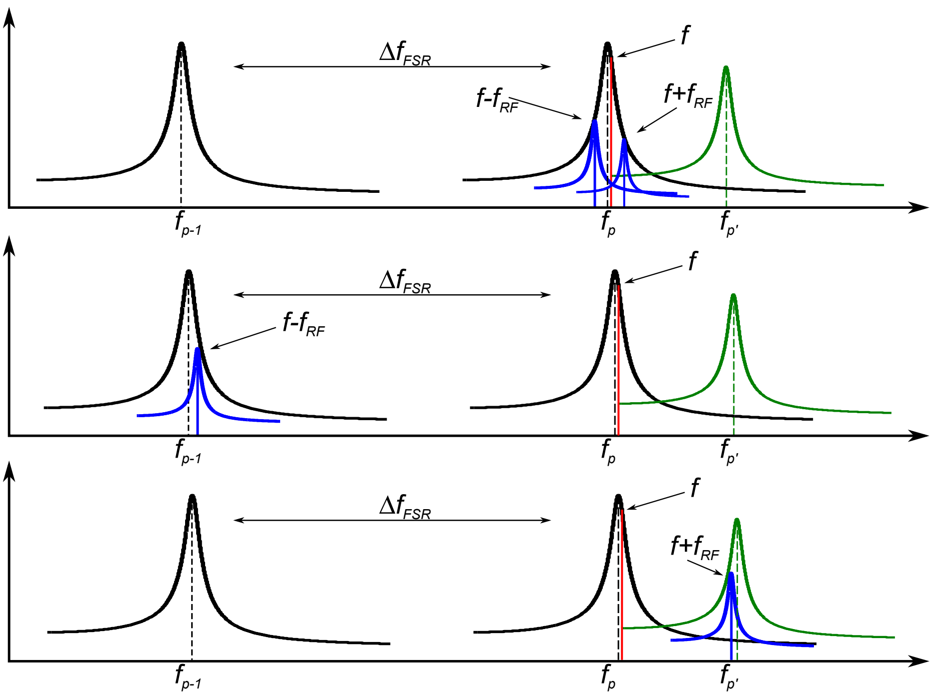

Рис. 3.5: Частотное расположение МШГ и модуляции в различных режимах. f – частота накачки, f_p – частота накачиваемой моды, $f_{p'}$ – частота не фундаментальной моды

2. Модуляция в соседнюю моду – сигнальная мода соседняя к накачке (рис. 3.5 в центре). При этом частота модуляции $f_{\mathrm{RF}} \approx \Delta f_{\mathrm{FSR}}$ порядка расстояния между модами, а ширина полосы – порядка ширины сигнальной линии.

3. Модуляция в не фундаментальную моду – сигнальная мода не фундаментальная (рис. 3.5 в справа). При этом f_{RF} должна быть порядка разности частот моды накачки и сигнальной моды (которую можно подобрать под необходимое значение), а ширина полосы – порядка ширины сигнальной линии.

3.2.1. Закон модуляции

Рассмотрим общую теорию модуляции в микрорезонаторе. Это позволит нам понять не только как происходит, собственно, модуляция, но и как будут влиять на работу системы шумы. Практически любое воздействие на микрорезонатор можно свести к изменению его показателя преломления или тензора диэлектрической проницаемости. При этом полезная модуляция будет отличаться от шумового воздействия только детерминированностью. Из уравнений Максвелла получим

$$\vec{\mathrm{rot}}\, \vec{\mathrm{rot}}\, \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\hat{\epsilon} + \hat{\epsilon}_1(\vec{r})U(t)}{c^2} \vec{E} + \gamma_0 \dot{\vec{E}} = \vec{F}_0 \tag{3.2.1}$$

где $\vec{F}_0$ поле возбуждения, $\hat{\epsilon}_1(\vec{r})$ и $U(t)$ – пространственная и временная части модулированной СВЧ сигналом или шумом части диэлектрической проницаемости и γ_0 представляет внутренние потери. Представим поле в виде разложения по невозмущённым МШГ $\vec{E} = \mathrm{Re}\,[\sum \vec{e}_j(\vec{r})u_j(t)] = \sum \mathrm{Re}\,[\vec{e}_j(\vec{r})A_j(t)e^{-i\omega t}]$, для которых справедливо $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{e}_j - \frac{\omega_j^2}{c^2}\hat{\epsilon}\vec{e}_j = 0$. Для простоты положим, что поле накачки также разбивается на пространственную и временную часть $\vec{F}_0 = \vec{f}_p(\vec{r})F(t)$. Тогда:

$$\sum \mathrm{Re}\left[\frac{\omega_j^2}{c^2}\hat{\epsilon}\vec{e}_j u_j + \frac{\ddot{u}_j}{c^2}\hat{\epsilon}\vec{e}_j + \frac{U_j(t)\ddot{u}_j}{c^2}\hat{\epsilon}_1(\vec{r})\vec{e}_j + \gamma_j\dot{u}_j\vec{e}_j\right] = \vec{f}_p(\vec{r})F(t) \tag{3.2.2}$$

где $U_j(t) = \frac{U\ddot{u}_j + 2\dot{U}\dot{u}_j + \ddot{U}u_j}{\ddot{u}_j}$ для простоты записи. Отметим, что операции взятия действительной части были сняты с обоих частей уравнения. Применим метод обобщённого гармонического баланса по $\vec{r}$ (то есть $\int \vec{e}_k^{\dagger}\hat{\epsilon}...dV$ с уравнением), используя свойства ортогональности $\int \vec{e}_k^{\dagger}\hat{\epsilon}\vec{e}_j dV = \int \vec{e}_j^{\dagger}\hat{\epsilon}\vec{e}_j dV\delta_{kj} = W_j\delta_{kj}$.

$$\frac{\omega_k^2}{c^2}u_k + \frac{\ddot{u}_k}{c^2} + \sum_j \frac{U_j(t)\ddot{u}_j}{c^2}2\delta_{\omega_{kj}} + \sum \dot{u}_j\frac{2}{c^2}\kappa_{kj} = F(t)X_k \tag{3.2.3}$$

где $\kappa_{kj} = \frac{c^2}{2}\gamma_j\frac{\int \vec{e}_k^{\dagger}\vec{e}_j dV}{W_k}$ – интегралы перекрытия с соседними модами, $X_k = \frac{\int \vec{e}_k^{\dagger}\vec{f}_p dV}{W_k}$ – интеграл перекрытия мод с полем накачки, а

$$\delta_{\omega_{kj}} = \frac{1}{2}\frac{\int \vec{e}_k^{\dagger}\hat{\epsilon}_1\vec{e}_j dV}{W_k} \tag{3.2.4}$$

по сути является эффективностью электрооптического взаимодействия. Далее будет показано, что эта величина напрямую связана с величиной сдвига частоты в статическом случае и величиной боковых частот в динамическом. Перепишем (3.2.3) в приближении вращающейся волны. Представим каждую моду осциллирующей на частоте накачки с медленно меняющейся амплитудой $u_j = A_j(t)e^{-i\omega t}$. Тогда

$$(\omega_k^2 - \omega^2)\frac{A_k}{c^2} + \frac{\ddot{A}_k}{c^2} - 2i\omega\frac{\dot{A}_k}{c^2} + \sum_j \frac{U_j(t)\ddot{u}_j}{c^2}2\delta_{\omega_{kj}} - \sum i\omega A_j\frac{2}{c^2}\kappa_{kj} = FX_k \tag{3.2.5}$$

Модуляцию можно представить в двух видах – стоячей волной и бегущей. Это соответствует случаю разомкнутого полуволнового микрополоскового СВЧ резонатора (стоячая) или замкнутого кольцевого (бегущая). В случае модуляции бегущей волной азимутальная и временная зависимости радиочастотного поля находятся под одним и тем же косинусом $\hat{\epsilon}_1 \propto \cos(m_{\mathrm{RF}}\varphi - \omega_{\mathrm{RF}}t)$. Разложив косинус на комплексные экспоненты мы видим, что можно ввести $\delta^+_{\omega_{kj}}$ и $\delta^-_{\omega_{kj}}$, рассчитываемые по формуле (3.2.4) при $m_{\mathrm{RF}} = +m_{\mathrm{RF}}$ и $m_{\mathrm{RF}} = -m_{\mathrm{RF}}$ соответственно. Полагая производную A и m вместе с коэффициентами перекрытия $\delta_{\omega_{kj}}$ первым порядком малости получим

$$\dot{A}_k = \sum_j (-i\Delta_k\delta_{kj} + i(\delta^-_{\omega_{kj}}\mu_+ e^{i\omega_{RF}t} + \delta^+_{\omega_{kj}}\mu_- e^{-i\omega_{RF}t}) - \kappa_{kj})A_j + i\frac{Fc^2}{2\omega}X_k \tag{3.2.6}$$

где $\Delta_k = \frac{\omega_k^2-\omega^2}{2\omega} \approx \omega_k - \omega$ и $\mu_\pm = \frac{(\omega\mp\omega_{\mathrm{RF}})^2}{2\omega}$.

Для стоячей волны временной и пространственный косинусы разделены, так что $\hat{\epsilon}_1 \propto \cos(m_{\mathrm{RF}}\varphi)\cos(\omega_{\mathrm{RF}}t)$. Легко видеть, что в этом случае коэффициенты при временных экспонентах в (3.2.6) равны, как если бы $\delta^+_{\omega_{kj}} = \delta^-_{\omega_{kj}} = \frac{\delta^+_{\omega_{kj}}+\delta^-_{\omega_{kj}}}{2}$.

Будем искать решение в виде $b_k + a^-_k e^{-i\omega_{RF}t} + a^+_k e^{i\omega_{RF}t}$ с постоянными a и b. Пренебрегая быстро осциллирующими членами получим (приложение П.7.)

$$a^\pm_m = \mu_\pm M^{-1}_\pm \delta^\mp_{\omega_{kj}} b_j, \tag{3.2.7}$$

$$b_j = \frac{Fc^2}{2\omega}B^{-1}X_k, \tag{3.2.8}$$

где

$$M = \Delta_k \pm \omega_{RF} - \mathrm{e}(\omega_{RF})\mu_\pm\delta^\mp_{\omega_{kj}} - i\kappa_{kj} \tag{3.2.9}$$

$$B = \Delta_k - \mu_+\mu_-(\delta^-_{\omega_{km}}M^{-1}_-\delta^+_{\omega_{nj}} + \delta^+_{\omega_{km}}M^{-1}_+\delta^-_{\omega_{nj}}) - i\kappa_{kj} \tag{3.2.10}$$

где $\mathrm{e}(\omega_{RF})$ мало для высоких частот и близко к 1 на низких для учёта квазистатики. Не сложно таким же методом произвести учёт высших гармоник, положив $A(t) = \sum_n a^{(n)}_k e^{-in\omega_{RF}t}$ с постоянными $a^{(n)}$ и суммированием от $-\infty$ до ∞ (подробнее приложение П.7.1.). Тогда $\mathrm{e}(\omega_{RF})$ будет заменено на член с амплитудой следующей гармоники. Однако это не приведёт к существенному изменению физики процесса.

Таким образом легко показать (приложение П.7., а именно формула (0.7.10)), что действительная часть $\delta^\mp_{\omega_{kj}}$ точно равна сдвигу резонанса при приложении постоянного поля (см. формулу (0.7.10)). Считая, что сдвиги частот $\mu\delta_{\omega_{km}}$ малы, очевидно вторым слагаемым в B можно пренебречь. Для оценки приведённых выражений предположим, что интегралы перекрытия κ_{ij} почти δ-образны. Другими словами

$$\kappa_{ij}|_{i\neq j} \propto \epsilon \tag{3.2.11}$$

где ϵ – параметр „малости“. Раскладывая полученные выражения в ряд по ϵ, в первом порядке получим

$$b_k \approx \frac{Fc^2}{2\omega}\frac{1}{\Delta_k - G_{kk} - i\kappa_{kk}}\left(X_k - \sum_{j\neq k} X_j \frac{\kappa_{kj}}{\Delta_j - G_{jj} - i\kappa_{jj}}\right) \tag{3.2.12}$$

где $\hat{G} = -\mu_+\mu_-(\delta^-_{\omega_{km}} M_-^{-1}\delta^+_{\omega_{nj}} + \delta^+_{\omega_{km}} M_+^{-1}\delta^-_{\omega_{nj}})$ отвечает за взаимодействие с соседними гармониками. Для амплитуд модуляции получим

$$a_k^\pm \approx \frac{(\omega \mp \omega_{\mathrm{RF}})^2}{2\omega}\frac{1}{\Delta_k \pm \omega_{\mathrm{RF}} - i\kappa_{kk}}\left(\delta^\mp_{\omega_{kj}} b_j - \sum_{l\neq k}\delta^\mp_{\omega_{lj}} b_j \frac{\kappa_{kl}}{\Delta_l \pm \omega_{\mathrm{RF}} - i\kappa_{ll}}\right) \tag{3.2.13}$$

Таким образом мы показали, что в результате каждая мода колеблется с частотой накачки с постоянной амплитудой b_k, пропорциональной прямому перекрытию с модой накачки X_k. Модулированная часть состоит из колебаний на частотах сдвинутых относительно накачки на $\pm\omega_{\mathrm{RF}}$, с амплитудами $a_k^\pm$, пропорциональными $\omega\delta^\mp_{\omega_{kp}}$. Случаи модуляции бегущей и стоячей волной различаются только тем, является ли δ_ω выражением с азимутальным числом соответствующего знака, или же их полусуммой.

Отличие данного подхода от разработанного в [89] заключается в том, что там рассмотрены только колебания мод на их собственных частотах в стационарном режиме. Если мы положим $\delta^-_{\omega_{km}} = \delta^+_{\omega_{mk}}$ (что является случаем стоячей волны), опустим пропорцональные потерям члены суммы и ограничимся рассмотрением только соседних с накачкой мод, выражения для амплитуд совпадут. С данными упрощениями амплитуда основной гармоники получится в виде

$$G_{kk} \approx \frac{\omega^2}{2}\delta_{\omega_{kj}}\delta_{\omega_{jk}}\frac{\Delta_j - i\kappa_{jj}}{(\Delta_j - i\kappa_{jj})^2 - \omega_{\mathrm{RF}}^2} \approx \frac{\omega^2}{2}\delta^2_{\omega_{kk}}\frac{\Delta_k - i\kappa_{kk}}{(\Delta_k - i\kappa_{kk})^2 - \omega_{\mathrm{RF}}^2} \tag{3.2.14}$$

$$b_k \approx \frac{Fc^2}{2\omega}\frac{X_k}{\Delta_k - i\kappa_{kk}}\frac{1}{1 + \omega^2\delta^2_{\omega_{kk}}/(\omega_{\mathrm{RF}}^2 - (\Delta_k - i\kappa_{kk})^2)}. \tag{3.2.15}$$

Теперь наглядно видно, что резонанс не смещается напрямую, но уменьшается вместе с увеличением радиочастотной накачки вследствие перекачки энергии в соседние моды и гармоники. Это так же приводит к насыщению – при увеличении мощности СВЧ амплитуда гармоник начинает падать, что было продемонстрировано в [89].

Проиллюстрируем полученные формулы. Допустим, накачка ММШГ ведётся свободным гауссовым пучком. Известно, что связь обеспечивается тогда, когда луч сфокусирован на расстоянии $\frac{p+1/2}{2\pi} - r$, где r – радиус резонатора, а p – номер моды. Это означает, что при заданном расстоянии интеграл перекрытия возбуждающего поля будет максимален для моды p и убывать по мере уменьшения или увеличения номера (см. рис. 3.6)

Тогда, сканируя частоту накачки, мы пропишем обычную лоренцеву резонансную кривую шириной κ_{kk}, с центром на резонансной частоте этой моды ω_k. Отметим, что на частотах соседних мод на резонансной кривой появляются провалы или усиления (рис. 3.7 справа), пропорциональные перекрытию мод, связанные с перетеканием энергии. Допустим мы накачиваем моду под номером p. Будем отстраиваться от резонансной частоты этой моды. При

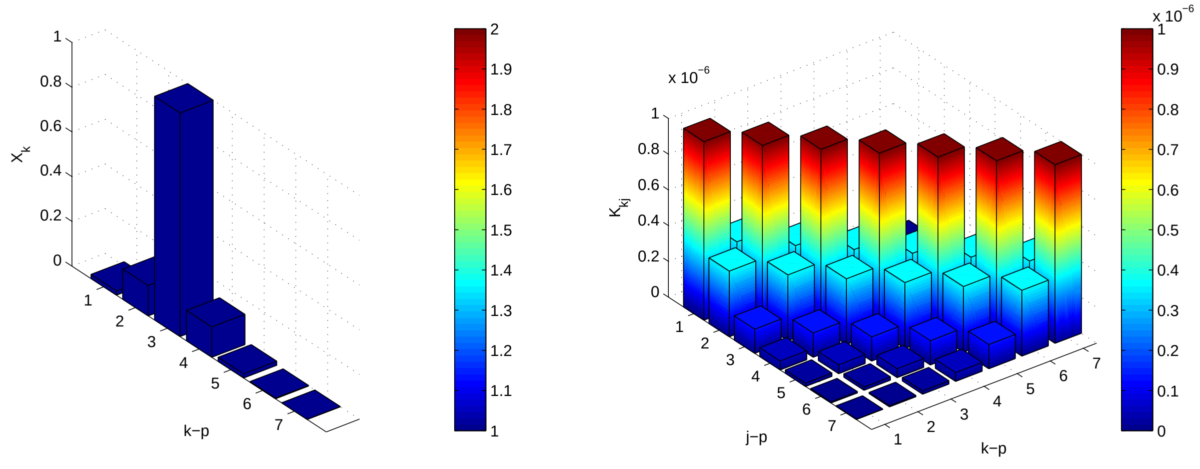

Рис. 3.6: Интегралы перекрытия поля накачки и мод резонатора X_k (накачивается мода p), нормированный на максимум (слева) и интегралы перекрытия мод κ_{kj}(справа), иллюстрация

нулевой отстройке возбуждена накачиваемая мода, однако немного энергии есть и в соседних модах. Когда мы отстраиваемся на межмодовое расстояние, возбуждается соседняя мода, а у накаченной и всех предыдущих провал. Если отстраиваться в противоположную сторону наблюдается та же картина: в модах со стороны накаченной моды провалы, а в остальных – усиления.

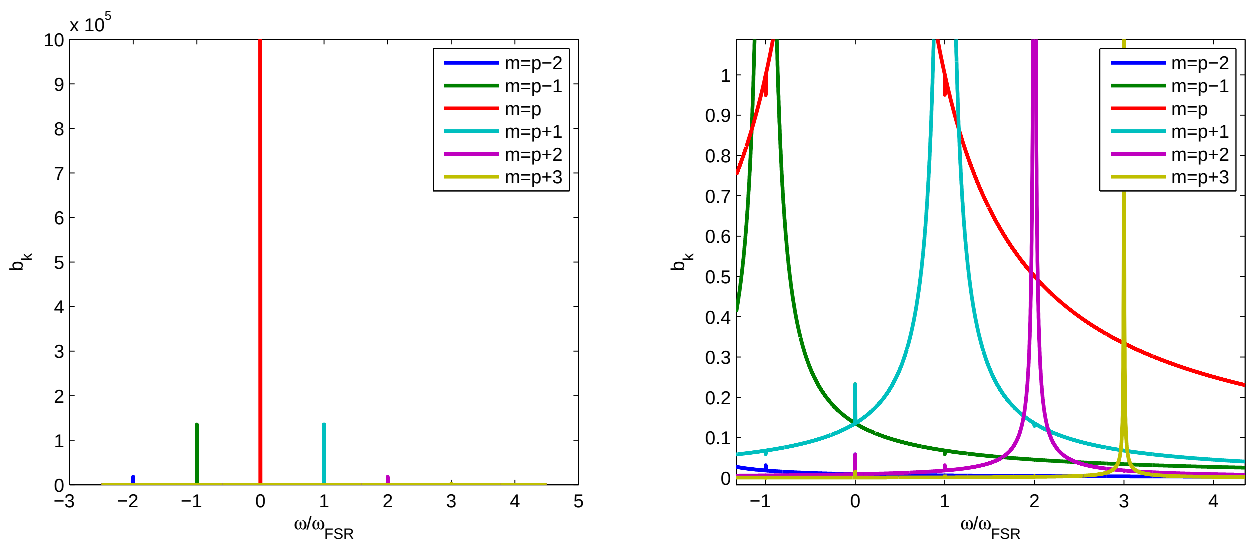

Рис. 3.7: Резонансные кривые, согласно (3.2.12) для параметров, изображённых на рис. 3.6. Справа то же в другом масштабе. По оси абсцисс отстройка от резонансной частоты накачиваемой моды

За счёт модуляции поле в каждой моде колеблется не только с частотой накачки, но и с частотами, сдвинутыми вправо и влево но частоту модуляции. Из формулы видно, что амплитуды модуляции имеют максимумы как на частоте накачиваемой моды, так и на частоте сдвинутой на частоту модуляции. Однако, расчёты показывают, что высота этих максимумов может сильно отличаться. На рисунке 3.8 изображено a_k^-, согласно (3.2.13) при допущении, что все электрооптические эффективности равны $\delta_{\omega_{kj}} = 1$. Подчеркнём ещё раз, что там изображены амплитуды колебания мод на частоте $\omega - \omega_{RF}$ при накачке на частоте ω в моду с номером p. Из рисунка видно, что для достижения максимальной амплитуды стоксовской частоты накачиваемой моды накачка должна быть на частоте $\omega - \omega_{RF}$, а не на резонансной частоте (рис. 3.8 красная линия). При накачке же на резонансной частоте накачиваемой моды, наибольшая энергия на частоте $\omega - \omega_{RF}$ наблюдается в следующей $(p+1)$ моде.

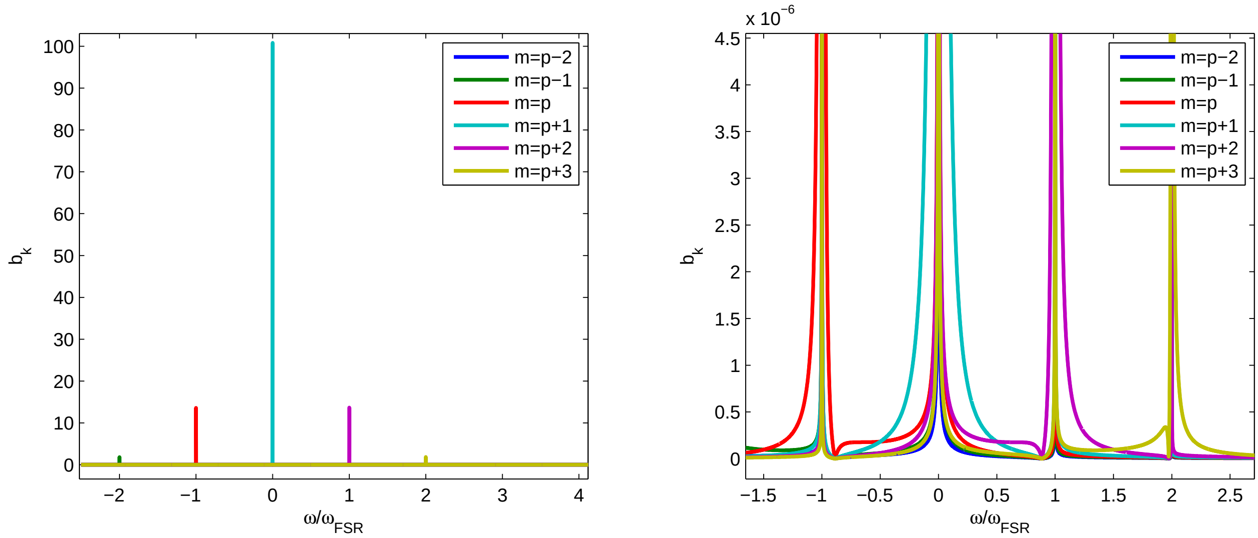

Рис. 3.8: Резонансные кривые, согласно (3.2.13) для параметров, изображённых на рис. 3.6. Справа то же в другом масштабе. По оси абсцисс отстройка от резонансной частоты накачиваемой моды

Однако, сигнал должен будет быть выведен из резонатора. При выводе в волновод моды снова перемешаются, и в результате мы получим колебание на трёх частотах в модах волновода. Перепишем ещё раз выражение для поля резонатора

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \sum \mathrm{Re}\left[\vec{e}_j(\vec{r})\left(b_j + a_j^+ e^{i\omega_{RF}} + a_j^- e^{-i\omega_{RF}}\right)e^{-i\omega t}\right] \\
&= \sum \mathrm{Re}\left[\vec{e}_j(\vec{r}) b_j e^{i\omega t}\right] + \\
&\quad \sum \mathrm{Re}\left[\vec{e}_j(\vec{r}) a_j^+ e^{-i(\omega-\omega_{RF})t}\right] + \\
&\quad \sum \mathrm{Re}\left[\vec{e}_j(\vec{r}) a_j^- e^{-i(\omega+\omega_{RF})t}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.16}
$$

Допустим, волновод одномодовый. Тогда выходное поле представится в виде

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_{\text{out}} &= \sum \mathrm{Re}\int \left[\vec{e}_j(\vec{r})\left(b_j + a_j^+ e^{i\omega_{RF}} + a_j^- e^{-i\omega_{RF}}\right)e^{-i\omega t}\right]\vec{g}dV \\
&= \sum \mathrm{Re}\left[X_j^{\mathrm{o}} b_j e^{i\omega t}\right] + \\
&\quad \sum \mathrm{Re}\left[X_j^{\mathrm{o}} a_j^+ e^{-i(\omega-\omega_{RF})t}\right] + \\
&\quad \sum \mathrm{Re}\left[X_j^{\mathrm{o}} a_j^- e^{-i(\omega+\omega_{RF})t}\right]
\end{aligned} \tag{3.2.17}
$$

где $X_j^o = \int \vec{e}_j(\vec{r})\vec{g}(\vec{r})dV$ – коэффициенты перекрытия мод резонатора с модой волновода съёма $\vec{g}(\vec{r})$, аналогично матрице X_k, введённой ранее для поля накачки. На рисунке 3.9 приведены частотные характеристики выходного сигнала в предположении, что $X_j^o \propto X_k$

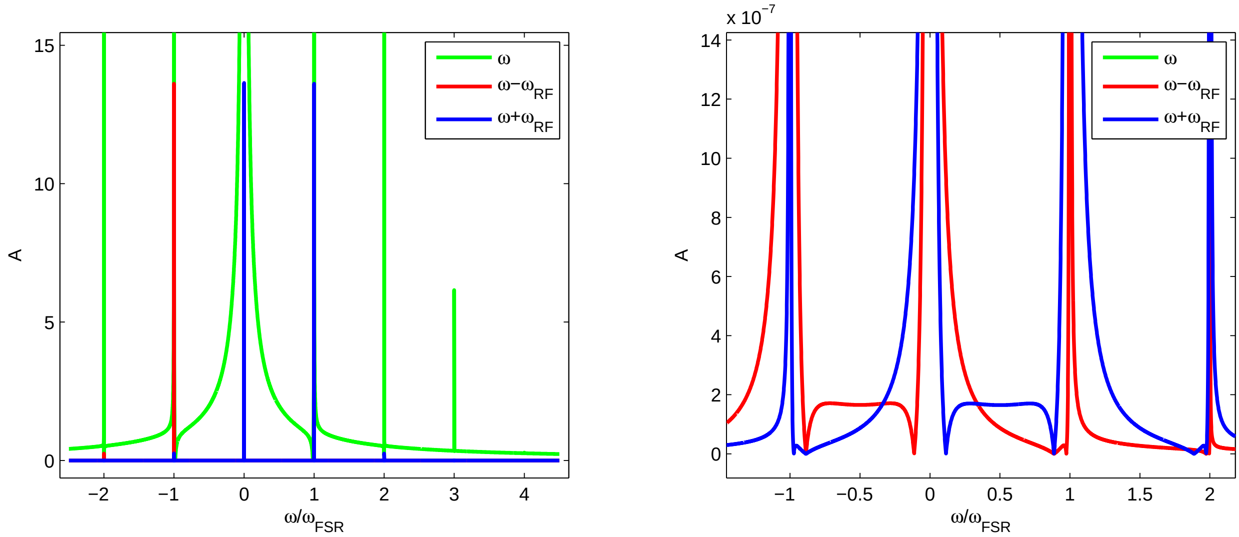

Рис. 3.9: Резонансные кривые, согласно (3.2.17) для параметров, изображённых на рис. 3.6. Справа то же в другом масштабе. По оси абсцисс отстройка от резонансной частоты накачиваемой моды

Стоит отметить так же, что в вышеприведённых рассуждениях индексы представляют собой не азимутальные числа, а просто порядковые номера мод.

3.2.2. Электрооптическое взаимодействие

Электрооптическим эффектом называется явление изменения показателя преломления среды под действием электрического поля. Этот эффект анизотропен и обычно описывается в терминах оптической индикатрисы, которая представляет собой эллипсоид, построенный на основе обратного тензора диэлектрической проницаемости и показывающий показатель преломления для поля в заданном направлении $\widehat{\epsilon}\widehat{B} = 1$. Изменение диэлектрической проницаемости имеет следующий вид

$$\Delta B_{ij} = r_{ijk} E_k, \tag{3.2.18}$$

где r_{ijk} – электрооптический тензор, E_k – компоненты низкочастотного электрического поля. Отметим, что электрооптический тензор, ввиду симметрии кристаллической решётки рассматриваемого материала, обычно имеет менее 27 независимых коэффициентов и может быть записан в нотации Войта. Переходя к изменению показателя преломления $\Delta\epsilon_{ij} \approx -\epsilon_{il} r_{lmk} E_k \epsilon_{mj}$ и используя теорию возмущений, аналогично [5], получим относительный сдвиг частоты ММШГ

$$\frac{\delta f_m}{f_m} = \frac{1}{2}\frac{\int E_q^{\mathrm{WGM}*}\epsilon_{qi}r_{ijk}E_k^{\mathrm{RF}}\epsilon_{jp}E_p^{\mathrm{WGM}}dV}{\int E_j^{\mathrm{WGM}*}\epsilon_{jk}E_k^{\mathrm{WGM}}dV} \tag{3.2.19}$$

где δf_m – сдвиг частоты оптической моды под номером m (сигнальной), f_m – её исходная частота, E_j^{WGM} – j-компонента моды (распределения поля), а $*$ – комплексное сопряжение. Интегрирование ведётся по области с электрооптическим материалом (ММШГ) и по всем индексам в правой части ведётся суммирование. Стоит отметить, что формула справедлива и в случае модуляции „в соседнюю моду“, то есть для расчёта сдвига частоты в моде, отличной от накачки. Тогда E_p^{WGM} в числителе принадлежит моде накачки, а все остальные – сигнальной моде. Отметим, что эта формула уже была получена ранее (см. (3.2.4)) при рассмотрении общей теории и определяет не только сдвиг частоты, но и амплитуду модулированных компонент сигнала. Эту формулу так же можно записать через электрическое смещение $\vec{D}$:

$$\frac{\delta\omega^{(1)}}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\int D_i^{\mathrm{WGM}*}r_{ijk}E_k^{\mathrm{RF}}D_j^{\mathrm{WGM}}dV}{\epsilon_0 W^{\mathrm{WGM}}} \tag{3.2.20}$$

где $D^{\mathrm{WGM}*}$ и W^{WGM} – комплексно-сопряжённое поле электрического смещения и полная энергия (удвоенная электрическая) сигнальной моды и D^{WGM} электрическое смещение моды накачки. Такая формулировка более удобна для численного моделирования типа [90], так как получение этого вектора из модели более простое. При этом также исчезает тензор диэлектрической проницаемости, сильно усложняющий аналитические расчёты.

Цилиндрическая симметрия

Интеграл (3.2.19) можно упростить, используя свойства мод шепчущей галереи и цилиндрической симметрии. А именно, азимутальная часть может быть проинтегрирована, так как МШГ имеют известную простую зависимость по углу $e^{im\varphi}$, а взяв поле в виде $\vec{D} = \{D_\rho, iD_\varphi, D_z\}$ мы получим все амплитуды действительными [90]. Так же необходимо помнить о преобразовании векторных компонент из декартова (D_x, D_y, D_z) в цилиндрический вектор (D_ρ, D_φ, D_z). Получим для числителя (3.2.19)

$$\int_S r_{lmn}^{\mathrm{cyl}}E_n^{\mathrm{RF}}D_l^{\mathrm{WGM}*}D_m^{\mathrm{WGM}}rdrdz \tag{3.2.21}$$

где

$$r_{lmn}^{\mathrm{cyl}} = \int_\Phi C_{pl}^\dagger r_{pqk}C_{qm}C_{kn}e^{iM\varphi}d\varphi, \tag{3.2.22}$$

и все вектора цилиндрические. Здесь $M = m_p - m_s + m_{\mathrm{RF}}$, $\hat{C}$ – матрица перехода к цилиндрическим координатам, зависящая от азимутального угла:

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.2.23}$$

Величина $e^{iM\varphi}$ представляет собой произведение азимутальных зависимостей МШГ накачки (азимутальное число m_p), сигнальной (азимутальное число m_s) и радиочастотной моды. Ввиду общей цилиндрической симметрии задачи логично положить, что радио-мода так же имеет азимутальную зависимость в виде $e^{im_{\mathrm{RF}}\varphi}$ (они могут быть и МШГ при соответствующем выборе резонатора). Тогда классические моды резонатора с сосредоточенной ёмкостью будут иметь $m_{\mathrm{RF}} = 0$. Так же такая форма позволит учесть случай широко используемого микрополоскового полуволнового резонатора, аналогичного разомкнутой двупроводной линии. Для этого просто переопределим $m_{\mathrm{RF}} \to \frac{m_{\mathrm{RF}}}{l_\varphi}$, где m_{RF} – число резонансных волн на длине резонатора (т.е. полуцелое), l_φ – угловая длина микрополоска, т.е. отношение его длины к длине окружности ММШГ. Тогда область интегрирования представляет собой $\Phi = [0; 2\pi l_\varphi]$. Считая $\hat{\epsilon}$ диагональным (мы всегда можем повернуть систему координат таким образом) получим

$$r^{\mathrm{cyl}}_{lmn}(M) = \sum_{k=-3}^{3} r^{\mathrm{cyl}_k}_{lmn} \frac{\sin(\pi(M+k)l_\varphi)}{\pi(M+k)} e^{i\pi(M+k)l_\varphi}, \tag{3.2.24}$$

где $r^{\mathrm{cyl}_{-k}}_{lmn} = \left(r^{\mathrm{cyl}_k}_{lmn}\right)^*$ и

$$r^{\mathrm{cyl}_0}_{lmn} = \pi \begin{pmatrix} 0 & 0 & r_{13} + r_{23} \\ 0 & 0 & r_{13} + r_{23} \\ 0 & 0 & 2r_{33} \\ r_{41} - r_{52} & r_{42} + r_{51} & 0 \\ r_{42} + r_{51} & -(r_{41} - r_{52}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.25}$$

$$r_{lmn}^{\mathrm{cyl}_1} = \frac{\pi}{4}\begin{pmatrix} \alpha_1 & i\alpha_2 & 0 \\ \alpha_2 & i\alpha_1 & 0 \\ 4(r_{31} - ir_{32}) & i4(r_{31} - ir_{32}) & 0 \\ 0 & 0 & i4(r_{53} - ir_{43}) \\ 0 & 0 & 4(r_{53} - ir_{43}) \\ i\alpha_3 & \alpha_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.26}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (3r_{11} - ir_{12}) + 2(r_{62} - ir_{61}) + (r_{21} - 3ir_{22}), \\ \alpha_2 &= (r_{11} - 3ir_{12}) - 2(r_{62} - ir_{61}) + (3r_{21} - ir_{22}), \\ \alpha_3 &= (r_{11} + ir_{12}) + 2(r_{62} - ir_{61}) - (r_{21} + ir_{22}), \end{aligned}$$

$$r_{lmn}^{\mathrm{cyl}_2} = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & (r_{13} - r_{23} - i2r_{63}) \\ 0 & 0 & -(r_{13} - r_{23} - i2r_{63}) \\ 0 & 0 & 0 \\ \alpha_4 & i\alpha_4 & 0 \\ -i\alpha_4 & \alpha_4 & 0 \\ 0 & 0 & i(r_{13} - r_{23} - i2r_{63}) \end{pmatrix}, \tag{3.2.27}$$

$$\alpha_4 = r_{41} + r_{52} - i(r_{42} - r_{51}), \tag{3.2.28}$$

$$r_{lmn}^{\mathrm{cyl}_3} = \frac{\pi}{4}\left((r_{11} - ir_{12}) - 2(r_{62} + ir_{61}) - (r_{21} - ir_{22})\right)\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.2.29}$$

Отметим, так же, что расчёт энергии с использованием цилиндрических векторов так же меняется. Здесь стоит перейти к действительным полям $D = \{D_r\cos(\omega t); -D_\phi\sin(\omega t); D_z\cos(\omega t)\}$. Для энергии внутри полоскового резонатора получим

$$W = \int_0^{2\pi l_\varphi}\int \frac{D_j^* C_{jm}\epsilon_{ml}^{-1}C_{lk}D_k}{2\epsilon_0} r dr dz d\phi = \int \frac{D_j^*\epsilon_{jk}^{-\mathrm{cyl}}D_k}{2\epsilon_0} r dr dz \tag{3.2.30}$$

$$\epsilon_{jk}^{-\mathrm{cyl}} = \frac{\pi l_\varphi}{2}\begin{pmatrix}\epsilon_{11}^{-1}+\epsilon_{22}^{-1} & 0 & 0\\ 0 & \epsilon_{11}^{-1}+\epsilon_{22}^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 2\epsilon_{33}^{-1}\end{pmatrix} + \frac{\sin\pi l_\varphi}{2}\begin{pmatrix}\epsilon_1^{-\mathrm{cyl}}(2l_\varphi^2-m^2) & \epsilon_1^{-\mathrm{cyl}}l_\varphi m & \epsilon_2^{-\mathrm{cyl}}(l_\varphi^2-2m^2)\\ \epsilon_1^{-\mathrm{cyl}}l_\varphi m & \epsilon_1^{-\mathrm{cyl}}m^2 & \epsilon_2^{-\mathrm{cyl}}l_\varphi m\\ \epsilon_2^{-\mathrm{cyl}}(l_\varphi^2-2m^2) & \epsilon_2^{-\mathrm{cyl}}l_\varphi m & 0\end{pmatrix} \tag{3.2.31}$$

$$\epsilon_1^{-\mathrm{cyl}} = \cos\pi l_\varphi\frac{\cos 2\pi a(\epsilon_{11}^{-1}-\epsilon_{22}^{-1})+\sin 2\pi l_\varphi(\epsilon_{12}^{-1}+\epsilon_{21}^{-1})}{l_\varphi^2-m^2} \tag{3.2.32}$$

$$\epsilon_2^{-\mathrm{cyl}} = \frac{\cos\pi l_\varphi(\epsilon_{13}^{-1}+\epsilon_{31}^{-1})+\sin\pi l_\varphi(\epsilon_{23}^{-1}+\epsilon_{32}^{-1})}{l_\varphi^2-4m^2} \tag{3.2.33}$$

где m – азимутальное число рассматриваемой моды, ϵ_{ij}^{-1} – элементы обратной матрицы диэлектрической проницаемости (индикатрисы).

Таким образом мы видим, что в случае цилиндрических резонаторов или замкнутого кольцевого микрополоска $r_{lmn}^{\mathrm{cyl}}(M) \neq 0$ только в случае если M равно 0, ±1, ±2, ±3. В ниобате лития ($LiNbO_3$), где $\epsilon_{11} = \epsilon_{22}$ и

$$r_{ijk} = \begin{pmatrix}0 & r_{12} & r_{13}\\ 0 & -r_{12} & r_{13}\\ 0 & 0 & r_{33}\\ 0 & r_{42} & 0\\ r_{42} & 0 & 0\\ r_{12} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{3.2.34}$$

ввиду внутренних симметрий, r^{cyl_1} и r^{cyl_2} зануляются, а допустимыми M остаются только $0, \pm3$.

В частности, в ёмкостной конфигурации (низкочастотное поле вертикально), при совпадении оси резонатора z с осью кристалла, можно получить для модуляции в пределах полосы резонанса простое выражение

$$\frac{\delta f_m}{f_m} = \frac{1}{2}\epsilon_1 r_{13}E^{\mathrm{RF}}\left(1+\left(\frac{\epsilon_3 r_{33}}{\epsilon_1 r_{13}}-1\right)\frac{\int\epsilon_0\epsilon_3|E_z^{\mathrm{WGM}}|^2 r dr dz}{2W^{\mathrm{WGM}}}\right). \tag{3.2.35}$$

Из этой формулы можно сделать вывод об отношении эффективности модуляции для TE и TM мод. Действительно, в TE модах поле в основном сосредоточено в вертикальной компоненте и $|E_z^{\mathrm{WGM}}|^2 \approx |E^{\mathrm{WGM}}|^2$, в то время как в ТМ моде $|E_z^{\mathrm{WGM}}|^2 \approx 0$, что позволяет сократить интегралы в правой части. В частности, считая в ниобате лития $\epsilon_3 \approx \epsilon_1$ и $r_{33} \approx 3r_{13}$ получим, что ТЕ моды в три раза эффективней.

Тут необходимо вспомнить, что мы представляли электрическое поле в виде $\vec{E} = \{E_\rho, iE_\varphi, E_z\}$ Учёт этого обстоятельства прост. В случае представления мод в виде стоячих волн это означает, что реальное поле выглядит как $\vec{E} = \{E_\rho \cos m\varphi, -E_\varphi \sin m\varphi, E_z \cos m\varphi\}$. Можно показать, что тогда правильный ответ записывается в виде суммы произведений всех комбинаций из косинусов и синусов азимутальных чисел (см. прил П.8.). В итоге после преобразования произведений тригонометрических функций к сумме получим немного более сложную комбинацию действительных и мнимых частей $r_{\lambda n}^{\mathrm{cyl}}(M)$, взятых от разных значений обобщённого азимутального числа $M = m_p \pm m_s \pm m_{\mathrm{RF}}/l_\varphi$. Однако, как будет показано в следующем пункте, подобные усложнения не нужны, вследствие того, что операция взятия реальной части может быть факторизована и снята.

Стоит также отметить, что в силу присутствия M в знаменателе (3.2.24) и большой величины азимутальных чисел МШГ, случаи $M = m_p + m_s \pm m_{\mathrm{RF}}/l_\varphi$ практически не вносят вклада во взаимодействие.

3.2.3. Моделирование

Для анализа конфигураций резонаторов применим численное моделирование методом конечных элементов [90]. Это позволяет с хорошей точностью оценить собственные частоты резонаторов произвольной формы и материала и соответствующие распределения полей. Используя эти распределения можно рассчитать сдвиги резонансных частот оптических мод под действием радиочастотных мод используя выражение (3.2.19) или (3.2.20).

Для численного моделирования распределения полей использовался пакет программ Comsol Multiphysics 4.4 (PDE модуль) и уравнения для полей в вертикальной плоскости слабой форме [90]. Как отмечалось в источнике, помимо искомых мод программа находит много мусора, поэтому для отбора и сортировки решений и последующей обработки использовались скрипты написанные на Matlab R2013b.

Далее рассчитывалась СВЧ мода в том же поперечном сечении x-z и цилиндрической симметрии. Считалось, что полученное распределение поля по радиусу и оси z сохраняется по азимутальному углу с точностью до модуляции комплексной экспонентой $e^{im_{\mathrm{rf}}\varphi}$. Тогда для расчётов можно использовать выражение основанное на формуле (3.2.24). Важно, чтобы при этом электрооптические коэффициенты находились под интегралом для учёта их неоднородности (подразумевается, что неоднородность показателя преломления уже содержится в $\vec{D}$), то есть сначала создаются матрицы свёрток электрооптических коэффициентов с компонентами мод, а потом проводится суммирование с функциями угловой длины резонатора.

$$\delta_{\omega_{kj}}(M) = \frac{\delta\omega(M)}{\omega} = \frac{1}{2\epsilon_0 W^{\mathrm{WGM}}} \sum_k \left[\int_S r_{\lambda n}^{\mathrm{cyl_k}} E_n^{\mathrm{RF_P}} D_\lambda^{\mathrm{2WGM_P}} r dr dz \right] \frac{\sin(\pi(M-k)l_\varphi)}{\pi(M-k)} e^{i(M-k)l_\varphi} \tag{3.2.36}$$

Здесь используется нотация Войта для симметричных тензоров: индексы $\lambda = i = j$ при $i = j$ и $\lambda = 9 - i - j$ при $i \neq j$. Вектора $D_\lambda^{\mathrm{2WGM_P}}$ состоит из необходимых произведений компонент поля МШГ, а $E_\lambda^{\mathrm{RF_P}}$ – из компонент радиочастотного поля. В случае стоячих мод МШГ расчёт более трудоёмкий, как было описано в прил П.8..

При численном моделировании некоторые задачи, такие как задача на собственные значения, имеют неопределённую амплитуду. Поэтому результат подобного моделирования – поле, относительно которого писалась численная схема – нужно нормировать на максимум, или среднее. Нашем случае удобно использовать корень электрической энергии СВЧ резонатора $\sqrt{W_{\mathrm{RF}}} = \sqrt{\int \epsilon_0 \epsilon |\vec{E}_{\mathrm{RF}}|^2/2 dV}$, как физически значимую величину: в эксперименте можно контролировать СВЧ мощность, подводящуюся к резонатору и пересчитать в энергию внутри резонатора. Таким образом введём энергетическую эффективность электрооптического взаимодействия (сдвиг частот на единицу корня из энергии в резонаторе), уже не зависящий от амплитуды поля

$$s_{\delta_{kj}} = \frac{\mathrm{Re}\left[\delta_{\omega_{kj}}\right]}{\sqrt{W_{\mathrm{RF}}}}. \tag{3.2.37}$$

Эта величина и будет изображена на графиках 3.14, 3.16. Похожей величиной пользуются при квантовом рассмотрении взаимодействия двух систем, используя нормировку на число фотонов [89, 74] и фононов в случае оптомеханики [91, 92]. При такой нормировке коэффициент взаимодействия превратится в так называемый темп связи с вакуумом (англ. vacuum coupling rate). Он имеет размерность частоты и определяется через энергию взаимодействия одного кванта накачки с одним квантом сигнала. По теории возмущений отношение этой энергии к энергии фотона накачки равна относительному сдвигу частоты (3.2.19). Тогда

$$g_0 = \frac{\delta W_{\mathrm{int}}}{\hbar} = \omega_m \,\mathrm{Re}\left[\delta_\omega\right] = \omega_m s_\delta \sqrt{\hbar \omega_{\mathrm{RF}}}. \tag{3.2.38}$$

Так как в тех статьях взаимодействие обычно рассматривалось на других частотах, пересчитаем их результаты в энергетическую эффективность, не зависящую от частоты. Из статьи [89], где $\omega_m = 1 \times 10^{15}$, $\omega_{\mathrm{RF}} = 7 \times 10^{10}$ рад/с, получим эффективность электрооптического взаимодействия 0.055 Дж$^{-1/2}$ для их теоретического значения и 0.047 Дж$^{-1/2}$ для экспериментального, что близко к значениям полученным в моделировании (см. рис. 3.14, 3.16). Эффективность оптомеханического взаимодействия в случае фотонного кристалла [92] оказывается на порядки больше – от 10 до 550 Дж$^{-1/2}$.

Стоит так же отметить, что для характеризации модуляторов часто пользуются полуволновым напряжением. Для модулятора на основе интерферометра Маха-Цандера это такое напряжение при котором фаза волны, прошедшей через электрооптическую пластинку изменится на π по отношению к фазе при отсутствии напряжения. В случае сложной резонансной СВЧ части это напряжение становится некоторой абстракцией, так как профиль напряжений между различными точками может быть достаточно сложным. Тем не менее, полуволновое напряжение часто вводят как наклон фазовой характеристики в области малых напряжений в квазистатическом режиме в соответствии с $\arg(A_k) = \pi\frac{U}{U_\pi}$. В соответствии с (3.2.9) для стационарного случая (см. приложения П.7. и (0.7.10))

$$\frac{\partial \arg(A_k)}{\partial U} \approx -\frac{\partial}{\partial U}\arctan\frac{\kappa_{kk}}{\Delta_k - \omega\operatorname{Re}[\delta_{\omega_{kk}}]} = \frac{\kappa_{kk}\omega}{(\Delta_k - \omega\operatorname{Re}[\delta_{\omega_{kk}}])^2 + \kappa_{kk}^2}\frac{\partial \operatorname{Re}[\delta_{\omega_{kk}}]}{\partial U}, \tag{3.2.39}$$

где для удобства сделано переобозначение $\kappa = \kappa + \operatorname{Im}\delta_{\omega_{kj}}$. Тогда, положив формально $W_{\mathrm{RF}} = \frac{C_{\mathrm{eff}}U^2}{2}$ для малых напряжений получим

$$U_\pi = \pi\frac{\Delta_k^2 + \kappa_{kk}^2}{\omega\kappa_{kk}s_{\delta_{kj}}}\sqrt{\frac{2}{C_{\mathrm{eff}}}} \approx \frac{\pi}{Qs_{\delta_{kj}}}\sqrt{\frac{1}{2C_{\mathrm{eff}}}}, \tag{3.2.40}$$

где Q – добротность оптической моды и последнее приближение сделано для $\omega \approx \omega_k$. Для простых конфигураций C_{eff} может быть рассчитано по стандартным формулам через проводимость, хотя уже для микрополоска она принимает не простой вид [93, 94]. Для наших параметров подходит формула с $w/h < 1$:

$$C_{\mathrm{microstrip}} = \frac{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_{\mathrm{microstrip}}}}{Z_0}L = 4\pi^2\epsilon_0 L\frac{\frac{\epsilon_r+1}{2} + \frac{\epsilon_r-1}{2}\left(1+\frac{10h}{w}\right)^{-1/2}}{\ln\left(\frac{8h}{w}+\frac{w}{4h}\right)}, \tag{3.2.41}$$

где $C_{\mathrm{microstrip}}$ – ёмкость микрополосковой линии, $L = 2\pi l_\varphi R$, w и t – длина, ширина и толщина микрополоска, h и e_r – толщина и диэлектрическая проницаемость (на СВЧ) подложки. Уточнённые выражения для $\epsilon_{\mathrm{microstrip}}$ и Z_0 – эффективной диэлектрической проницаемости и волнового сопротивления – можно найти в [93]. Отметим, что в данной формуле может быть так же учтена дисперсия [95], что ещё более усложнит выражение.

Для резонатора большую определённость имеет запасённая энергия. Поэтому в области цифровых модулирующих устройств обычно пользуются битовой энергией, равной энергии, которую нужно сообщить модулятору, чтобы вызвать его переключение. Понятие переключения тоже достаточно условно – при различных системах кодирования битовая энергия может меняться для одного и того же модулятора. Легко получить энергию смещения резонанса на свою полуширину

$$W_{\pi/4} = \frac{1}{4Q^2 s^2_{\delta_{kj}}}, \tag{3.2.42}$$

что соответствует сдвигу фазы на $\pi/4$ и изменению энергии в резонаторе (или энергии, уходящей в резонатор) вдвое. Можно так же получить соответствующее напряжение $U_{\pi/4} = \sqrt{\frac{2W_{\pi/4}}{C_{\text{eff}}}}$, которое будет в π раз меньше полуволнового. Так же стоит отметить, что данное напряжение примерно ограничивает линейный участок фазовой характеристики. Подчеркнём ещё раз, что данную энергию нельзя называть битовой, так как не указан способ кодирования.

В нашем случае высокой частоты модуляции, когда смещения резонансной кривой не наблюдается, эти формулы могут использоваться для характеризации эффективности модулятора и сравнения с аналогами. Однако следует помнить, что эти величины фиктивна и не имеют реального физического смысла. Так же стоит отметить, что записанные формулы задают напряжение и энергию внутри резонатора и при пересчёте на вход должны быть уменьшены в ηQ_{RF} раз по энергии, где Q_{RF} и η – добротность радиочастотного резонатора и его коэффициент связи.

Было проведено моделирование различных конфигураций радиочастотных резонаторов. Последующие картинки показывают моделируемые системы и их радиочастотные моды. Графики изображены в цилиндрически симметричной системе координат ρ-z, данные в логарифмической шкале.

Резонатор с сосредоточенной ёмкостью

Металлический радиочастотный резонатор на 2.08 ГГц изображен на рис. 3.10 (сечение ρ-z). Он представляет собой классический объёмный резонатор с двумя полостями. В данной геометрии возможно численное решение задачи на собственные значения.

Основная мода такого резонатора имеет наибольшую концентрацию электрического поля в своей тонкой части. Для усиления электрооптического взаимодействия этот ёмкостной зазор должен находиться над областью локализации МШГ. Полая часть резонатора образует индуктивную часть, и подбирая её форму, можно регулировать частоту радио-моды. Электрооптический сдвиг рассчитывается по формуле (3.2.36) при $m_{\text{RF}} = 0$ (основная мода не модулирована по азимутальному углу) и $l_\varphi = 1$ (взаимодействие идёт по всему периметру диска).

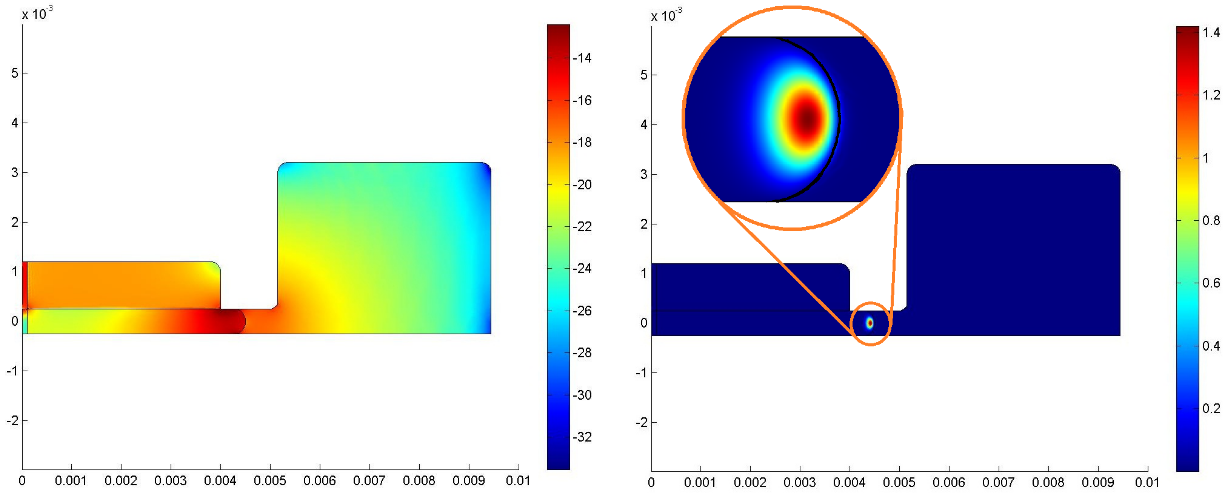

Рис. 3.10: Радиочастотная мода $f_{\text{RF}} = 2$ ГГц (слева) и МШГ $m = 420$ (справа) в металлическом резонаторе с сосредоточенной ёмкостью, в которую вставлен ММШГ. Цилиндрические координаты в метрах, плотность энергии в условных единицах.

Микрополосковый резонатор

Микрополосковый резонатор – микрополосок, отделённый от заземлённой металлической подложки МШГ резонатором, проложенный по образующей диска (рис. 3.11). Микрополосок может быть замкнут или разомкнут (угловой длины $2\pi l_\varphi$, $l_\varphi < 1$). В данной геометрии приходится решать статическую задачу – микрополосок имеет постоянное напряжение. Стоит отметить, что результаты практически не зависят от толщины микрополоска.

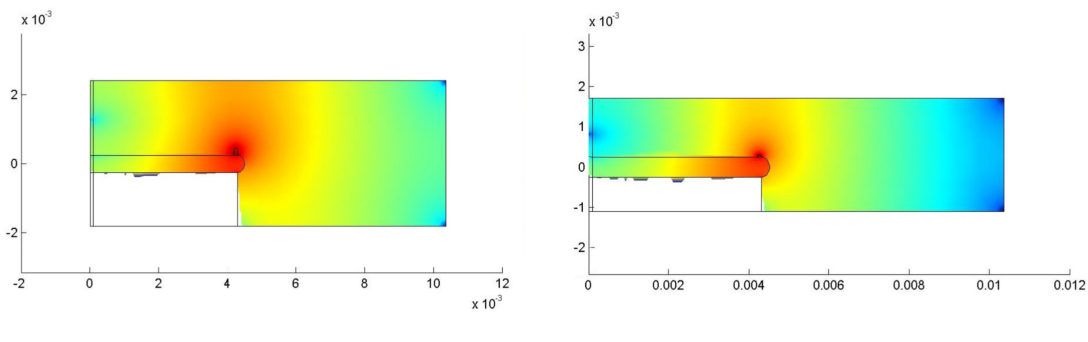

Рис. 3.11: Статические моды микрополоскового резонатора с микрополоском толщиной 0.2 и 0.05 мм. Цилиндрические координаты в метрах, плотность энергии в условных единицах.

При $m_{\text{RF}} = 0$ мы имеем случай квазистатического поля (по сути плоский конденсатор). На высоких частотах возможны ещё два варианта – полуволновой или дисковый резонатор.

Кольцевой микрополосковый резонатор имеет замкнутые моды, аналогичные модам шепчущей галереи за исключением того, что МШГ являются как-бы свободными (по дисперсии) и удерживаются разностью показателя преломления, в то время как данные моды имеют волноводную дисперсию и удерживаются направляющей структурой (как половинка двупроводной линии). Для них $l_\varphi = 1$, m_{RF} принимает малые целые значения, а амплитуды модуляции на ω_{RF} и $-\omega_{\text{RF}}$ будут получаться из сдвигов для $+m_{\text{RF}}$ и $-m_{\text{RF}}$ соответственно.

Полуволновой резонатор аналогичен разомкнутой с двух концов двупроводной линии. Для него нужно брать m_{RF} полуцелое. При этом амплитуды модуляции равны полусумме сдвигов при $+m_{\text{RF}}$ и $-m_{\text{RF}}$.

Двукольцевой

Двукольцевой резонатор – вариация микрополоскового резонатора, более напоминающая двупроводную линию 3.12.

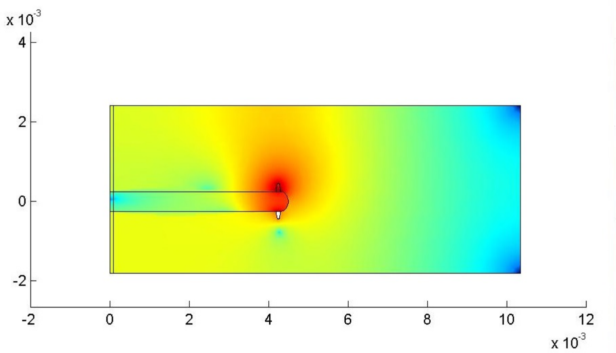

Рис. 3.12: Статическая мода двукольцевого резонатора. Цилиндрические координаты в метрах, плотность энергии в условных единицах.

Эта вариация полностью аналогична полосковой линии, имея при этом более сильное взаимодействие за счёт более сильной локализации электрического поля.

Скошенный ММШГ

Скошенный ММШГ – вариация ММШГ резонатора, позволяющая приблизить МШГ моду к микрополоску для усиления взаимодействия 3.13. Дело в том, что мода шепчущей галереи стремится быть на максимальном расстоянии от оси цилиндрической симметрии резонатора, как если бы была шариком на который действует центробежная сила. В этой аналогии она как бы скатывается как в лунку в любую выпуклость резонатора. При этом при уменьшении азимутального числа моды, приводящем к уменьшению её радиуса, мода как бы закатывается глубже в угол. Достоинством такой геометрии так же можно считать то, что хотя сам кончик угла может быть плохого качества, участки поверхности, которых „касается“ мода можно сделать достаточно гладкими и качественными, тем самым сохранив высокую добротность. Необходимо только подобрать угол таким образом, чтобы мода не „скатилась“ в „плохую“ область.

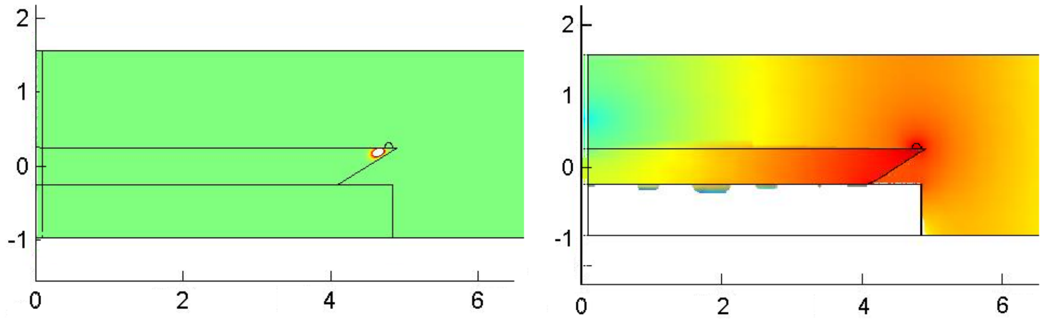

Рис. 3.13: МШГ мода (слева) и статическая мода скошенного ММШГ. Цилиндрические координаты в метрах, плотность энергии в условных единицах.

К сожалению, как показали расчёты, это приближение микрополоска к МШГ увеличивает так омические потери (см. рис. 3.15). Однако для некоторых приложений это скорее плюс – снижение добротности означает так же увеличение полосы модуляции.

Результаты

На рисунках 3.14 показаны зависимости эффективности электрооптического взаимодействия TE и TM МШГ от азимутального числа для различных конфигураций радиочастотных резонаторов. Учтя, что $f_m \approx \frac{c}{2\pi R n} m \approx m \times 5\text{GHz}$, можно воспринимать эти графики как зависимости сдвига от частоты МШГ.

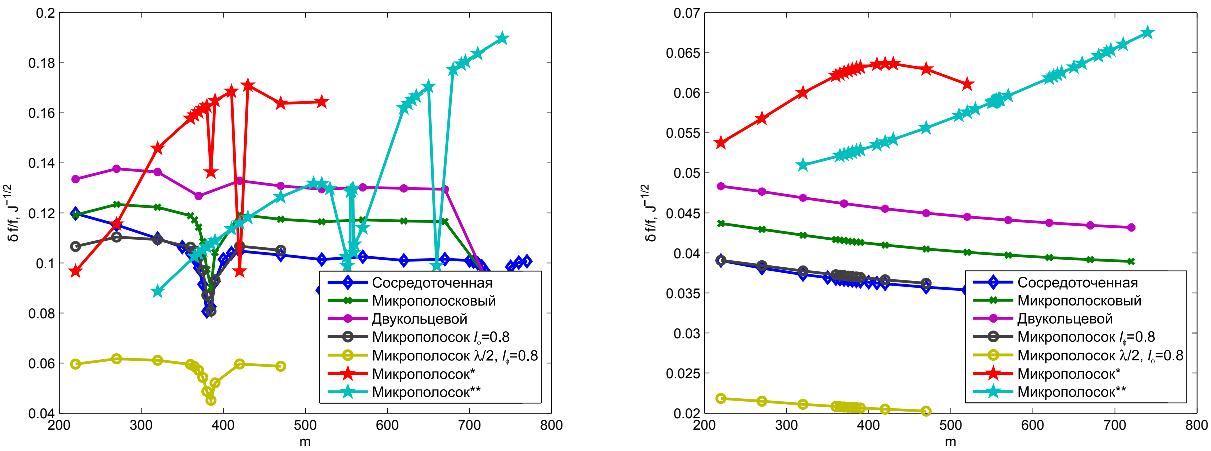

Рис. 3.14: Абсолютная величина сдвига частот TE МШГ мод (слева) и TM МШГ мод (справа) в режиме модуляции накачки. Формула (3.2.35) с ёмкостью (3.2.41) даёт 0.18 и 0.06 Дж$^{-1/2}$ соответственно.

Все кривые, кроме отмеченной $\lambda/2$ и резонатора с сосредоточенной ёмкостью, построены для квазистационарного режима модуляции несущей. Кривые, отмеченные кружками –

микрополосковая линия длинной $2\pi \times 0.8$. Та, что отмечена $\lambda/2$ – полуволновой резонатор в режиме $\Delta m = 1$. Микрополоски со знаком * означают расчёт для скошенного ММШГ с микрополоском на расстоянии моды с m=420 от центра, а со знаком ** - для крайнего правого положения микрополоска. Рисунок (3.15) показывает омические потери МШГ в тех же конфигурациях на микрополоске и остальном окружении.

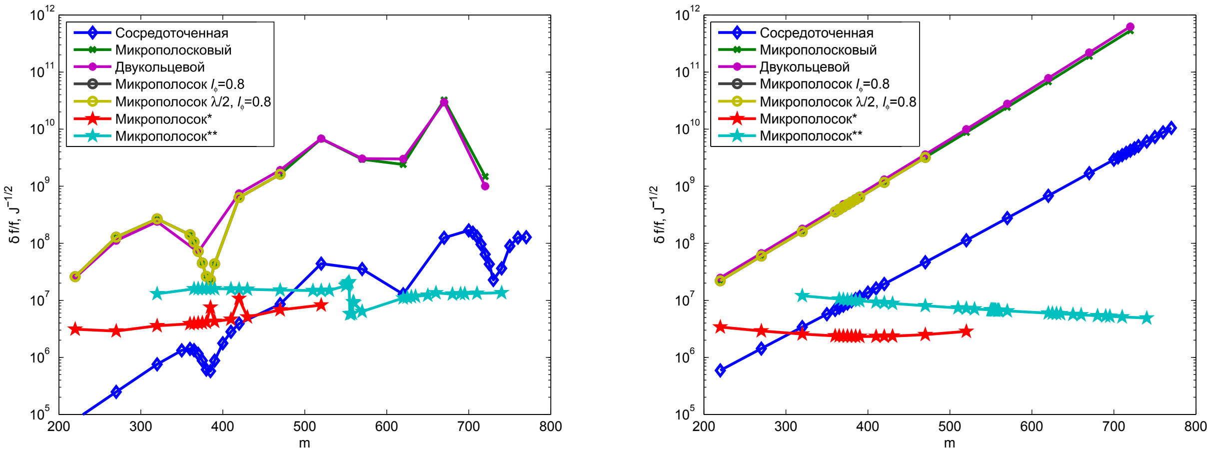

Рис. 3.15: Омическая часть добротности ТЕ МШГ мод (слева) и ТМ МШГ мод (справа) для разных конфигураций от номера МШГ моды.

Моделирование подтверждает, что в большинстве случаев модуляция на ТЕ МШГ модах в три раза более эффективна. При этом оценка (3.2.35) с ёмкостью (3.2.41) даёт результат с ошибкой на 25 %. Эта оценка даёт результат близкий к сдвигу в скошенной геометрии, что означает, что она соответствует оптимальной геометрии.

Результаты для микрополоска близки к результатам [89], где эффективность электрооптического взаимодействия составила 0.047 Дж$^{-1/2}$. На графиках для ТЕ мод видны резкие провалы, обусловленные гибридизацией мод – фундаментальная мода становится близка по частоте к одной из нефундаментальных и они взаимопереходят друг в друга. Искажение формы за счёт гибридизации приводит к уменьшению величины электрооптического взаимодействия. Из рисунка 3.14 так же видно, как в случае скошенного резонатора с изменением азимутального числа мода подходит ближе к полоску, увеличивая взаимодействие, а потом удаляется, уменьшая его. При этом на графике для добротности (рис. 3.15) происходит обратное: чем ближе мода к микрополоску, тем больше потери на металле.

График 3.16 показывает зависимость сдвига частот от длины микрополоска и соотношения азимутальных чисел мод (разности оптической накачки и сигнала $\Delta m = m_p - m_s$ и азимутального числа СВЧ моды m_{RF}). Характер этих кривых практически не зависит от абсолютного значения оптического азимутального числа, причём соблюдается полученный ранее вывод (см. (3.2.35)), что сдвиг TE мод в три раза больше сдвига TM. Однако можно также заметить, что этот принцип нарушается для $\Delta m = 0$, $m_{\mathrm{RF}} = 0.5$, 1, где сдвиг для TM мод в 30 раз больше.

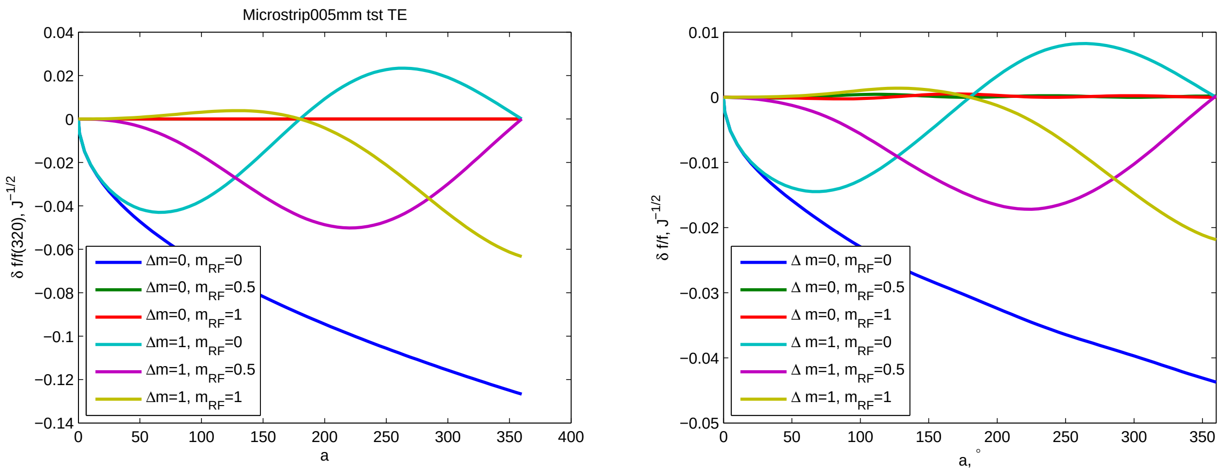

Рис. 3.16: Зависимость сдвига частот TE мод (слева) и TM мод (справа) от длины микрополоска и соотношения азимутальных чисел мод ($\Delta m = m_p - m_s$). Можно заметить аномально низкий сдвиг для TE мод при $\Delta m = 0$, $m_{\mathrm{RF}} = 0.5$, 1.

Более важно то, что для каждой конфигурации чисел есть своя оптимальная длина микрополоска. Например, для полуволновой СВЧ моды ($m_{\mathrm{RF}} = 1/2$) и модуляции в соседнюю моду $\Delta m = \pm 1$ она составляет 220°, а не 180°, как считалось ранее (при этом эффективность возрастает на 13%). Так же важным случаем является случай не резонансного СВЧ малой частоты ($m_{\mathrm{RF}} = 0$), когда распределение поля по полоску близко к постоянному. Однако, малая частота означит невозможность режима модуляции соседней моды (в соответствии с (3.2.13)) что приводит к $\Delta m = 0$ и делает оптимальным кольцевой микрополосок.

В [96] можно найти измерения статического частотного сдвига. Полагая $m_p - m_s = 0$ и $m_{\mathrm{rf}} = 0$ (так как мы хотим сравнивать статический режим) получим для их геометрии $s_\delta = 0.234$ Дж$^{-1/2}$ Для TE мод и $s_\delta = 0.078$ Дж$^{-1/2}$ для TM мод. Величина сдвига для TM мод соответствует значению $\Delta\lambda_{\mathrm{DC}} = 0.16$ пм/В, что хорошо согласуется с величиной, измеренной в работе. Стоит отметить, однако, что в высокочастотном режиме, для оценки параметров их установки должно использоваться $m_p - m_s = -1$ и поле стоячей СВЧ волны с $m_{\mathrm{rf}} = 1$. При этом получается значение s_δ в два раза меньшее: δ^+ останется такой же как в статике, так как при этом $M = 0$, но для $\delta^- \approx 0$ мы получим $M = -2$ и $\delta^- \approx 0$.

3.3. Моделирование шумов в микрорезонаторах и модуляторах

Как уже говорилось во введении к главе, спектральные плотности для основных шумов (терморефрактивный и Броуновский) посчитаны для микросфер и микродисков. При этом пока только формула для микросфер подтверждена экспериментально [25]. Поэтому родилась мысль провести численное моделирование спектральных плотностей и создать программу, позволявшую бы рассчитывать шумы в произвольных телах вращения. Для этого наиболее удобно использование Флуктуационно-Диссипационной Теоремы в формулировке Левина (энергетической) [18].

3.3.1. Флуктуационно-Диссипационная Теорема в энергетической формулировке Левина

Как уже говорилось в главе 1, Флуктуационно-Диссипационная Теорема связывает флуктуации в системе с диссипацией энергии. Напомним классическую формулировку: пусть имеется некая обобщённая координата $x(t)$, чей отклик которой на внешнее воздействие $F(t)$ представим в виде

$$x(t) = \int \alpha(\tau) F(t-\tau) d\tau, \tag{3.3.1}$$

что в частотном представлении соответствует (1.2.45), тогда спектральная плотность флуктуаций этой величины

$$S_x(\omega) = \hbar \tilde{\alpha}''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right), \tag{3.3.2}$$

где $\tilde{\alpha}''$ мнимая часть Фурье-образа $\alpha(\tau)$. Можно показать, что $\tilde{\alpha}''(\omega)$ соответствует диссипации в системе [39]. Таким образом потери в системе возвращают в систему шум. Основываясь на этом утверждении Левин дал более „естественную“ формулировку теоремы и успешно применил к броуновскому шуму подложки [18] и терморефрактивным шумам покрытия [97] и светоделителя [36].

Рассмотрим линейную систему, на которую воздействует слабая периодическая обобщённая сила $f = F_0 \cos(\omega t) q_f(\vec{r})$, где q_f – форм-фактор силы (наблюдаемой, см.далее) – некая нормированная функция. Тогда мы можем рассчитать отклик системы на данное воздействие и рассеянную энергию W_{diss}. Пусть так же существует обобщённая координата x, энергетически сопряжённая к f, т.е. работа этой силы равна $W_f = \int f dx$. Тогда этом флуктуации наблюдаемой величины $y = \int x(\vec{r}) q_f(\vec{r}) d^3 r$ описываются спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = \hbar \frac{2W_{\text{diss}}}{\pi F_0^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \tag{3.3.3}$$

Основной сложностью данного подхода может стать выбор удобной пары сопряжённых величин x и f. Очевидно, что данная формулировка удобна для использования численного моделирования. Действительно, для её использования требуется в основном решение стандартных задач с заданными граничными условиями или возмущением (правой частью). Подобные симуляции были проведены для резонатора Фабри-Перо в [98]. В данной работе метод будет применён для ММШГ.

3.3.2. Шумы осциллятора и модулятор

Рассмотрим гармонический осциллятор с частотой ω_0 и затуханием Γ, испытывающий вынужденные колебания

$$\ddot{x} - \Gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f\cos\omega_p t \tag{3.3.4}$$

Тогда представив решение в виде $x = \operatorname{Re} Ae^{i\omega_p t}$ получим хорошо известное выражение лоренцевой резонансной кривой.

$$x = \operatorname{Re}\left[\frac{f}{\omega_0^2 - \omega_p^2 - i\omega_p\Gamma}e^{i\omega_p t}\right] \tag{3.3.5}$$

В соответствии с ФДТ спектральная плотность шума

$$S_x(\omega) = \frac{2k_B T}{m_{\text{eff}}}\frac{\Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\Gamma^2}, \tag{3.3.6}$$

где m_{eff} – эффективная масса (3.1.12). Стоит подчеркнуть, что шум не зависит ни от мощности ни от частоты накачки, так как связаны с внутренними потерями. Данный спектр (3.3.6) сложится со спектром сигнала вынужденных колебаний (на основе (3.3.5)). Можно показать, что результат будет выглядеть, как флуктуации частоты.

Пусть в системе присутствуют флуктуации фазы (а значит и частоты). Тогда, следуя [99], сигнал в системе

$$x = Ae^{i\omega_0 t + \phi(t)} \tag{3.3.7}$$

где $\phi(t)$ – случайная функция. Тогда автокорреляционная функция

$$B_x(\tau) = A^2 e^{i2\omega_0\tau}\langle e^{i\phi(t+\tau)}e^{-i\phi(\tau)}\rangle_t \tag{3.3.8}$$

Предполагая, что среднее по времени равно среднему по ансамблю и обозначая $\Phi = \phi(t + \tau) - \phi(\tau)$, получим

$$\langle e^{i\phi(t+\tau)}e^{-i\phi(\tau)}\rangle_t = \int(\Phi)e^{i\Phi}d\Phi \tag{3.3.9}$$

Так как флуктуации Ф могут состоять из множества не коррелированы событий, можно применить центральную предельную теорему можно показать [99], что спектральная плотность

$$S_x(\omega) = A^2 \int e^{-i(\omega-\omega_0)\tau} \exp\left(-\int S_\phi(f)(1-\cos(f\tau)\frac{df}{2\pi}\right) d\tau \tag{3.3.10}$$

Тогда для белого шума частоты получим $S_\phi(\omega) = S_{\delta\omega}/\omega^2$

$$S_x(\omega) = \frac{2A^2}{i(\omega-\omega_0)+\pi S_{\delta\omega}} \to 2A^2 \frac{\pi S_{\delta\omega}}{(\omega-\omega_0)^2+\pi^2 S_{\delta\omega}^2} \tag{3.3.11}$$

Теперь можно заметить, что вблизи резонанса, в соответствии с (3.3.6)

$$S_x(\omega) \approx \frac{k_B T}{m_{\text{eff}}\omega^2} \frac{\Gamma/2}{(\omega_0-\omega)^2+\Gamma^2/4}, \tag{3.3.12}$$

получим, что шумовой сигнал осциллятора представляет собой колебание с энергией $m_{\text{eff}}\omega^2 A^2 = k_B T/2$ (что согласуется с теоремой о равнораспределении энергии по степеням свободы) и флуктуирующей частотой с $S_{\delta\omega} = \Gamma/(2\pi)$. Опять в данном рассуждении не было ни слова о накачке, так как рассматривались собственные флуктуации.

Однако, в случае модулятора, нам более интересно как флуктуации отпечатываются на сигнале накачки, то есть в переданном сигнале. Этот процесс происходит аналогично модуляции, и соответственно будет происходить в соответствии с теорией рассмотренной в пункте 3.2.1.. В частности, спектральная плотность относительного сдвига частоты и будет являться спектральной плотностью δ_ω в формулах (3.2.12) и (3.2.13), добавляясь таким образом к шумам модулирующего сигнала. Отметим, однако, что сигнал на частоте несущей (3.2.12) не содержит в первом порядке малости информации о шумах (как и о модулирующем сигнале).

Моделирование будет проводиться для трёх конфигураций: кварцевой микросферы с параметрами [25] для сравнения с экспериментальными данными, микродиска из флюорида кальция [79] для сравнения с имеющимися там формулами и модулятора из ниобата лития, рассмотренного в предыдущих частях и являющегося темой данной главы. Все материальные параметры и основные размеры устройств сведены для удобства в таблицу 3.1.

Величина		Наименование	Плавленый кварц	CaF_2	$LiNbO_3$ (конгр.^{1},стех.^{2})
Плотность	ρ	кг/м^3	2200 [25, 79]	3180 [79]	4600[100]
Теплоёмкость	C_p	Дж/(кг·К)	670 [25, 79]	854 [79]	648[100, 101]
Преломление	n	1	1.46[79]	1.42 [79]	$\{2.21, 2.21, 2.14\}$ [33, 101]
Теплопроводность	κ	Вт/(м·К)	1.4 [25, 79]	9.71 [79]	$\{4.2, 4.2, 4.6\}^1$[102, 101]
Терморефракция	β	10^{-6}/К	14.5 [25], 10 [79]	-12 [103](-7.5 [79])	$\{4.3, 4.3, 37.7\}^1$ [82], 6[100]
Тепловое расширение	α	10^{-6}/К	0.55 [25, 79]	18.9 [79]	$\{13.5, 13.5, 3.4\}^1$ [81] ($\{14.1, 14.1, 4.1\}^1$[101]) ($\{14.1, 14.1, 6\}^2$[101])
Сжимаемость	β_T	10^{-12}/Па	27 [79]	12 [79]	???
Керровская нелинейность	n_2	10^{-21}м^2/Вт	24[104]	32 [79], 12.6[104]	1000[105, 100]
Механические потери	ϕ_{loss}	1	$7.6 \times 10^{-12} \times \omega^{0.77}$[59]	$1.6 \times 10^{-10} \times \omega$[106]	$4 \times 10^{-9} \times \omega$[107]($1.35 \times 10^{-12} \times \omega$[108])

Величина		Наименование	Микросфера[25]	Микродиск[79]	Модулятор
Радиус	R	мкм	69	3000	4500
Сфероид	b	мкм	69	547	1162
Основание	R_b	мкм	23	0	4300
Длина волны накачки	λ	мкм	0.63	1.55	1.55
Номер МШГ	q, l, m	1	$1, 996, 992$	$1, 17330, 17330$	$1, 10^5, 10^5$

Таблица 3.1: Сверху: материальные параметры некоторых материалов. Отметим, что в [25] исследования ведутся на длине волны 0.63 мкм, в [79] – на 1.55 мкм, в [104] – на 1.06 мкм, что частично может объяснить различие в значениях указанных параметров. Снизу: параметры моделированных МШГ. Для анизотропных веществ в аналитических расчётах используется x-компонента.

3.3.3. Терморефрактивный шум в ММШГ

Дисперсия флуктуации температуры в объёме V, как известно [39], записывается в виде

$$\langle \delta T^2 \rangle = \frac{k_B T^2}{C\rho V} \tag{3.3.13}$$

где $\delta T = T - T_0$ отклонение температуры от средней, k_B – постоянная Больцмана, C – удельная теплоёмкость, ρ – плотность. Далее она может быть пересчитана в терморефрактивный шум в соответствии с (3.1.2). Используем ФДТ, чтобы найти спектральную плотность этих флуктуаций. В соответствии с формулой (3.2.19), заменив $\delta\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon}\widehat{rE_{\text{RF}}}\hat{\epsilon}$ на $\delta\hat{\epsilon} = 2n\hat{\beta}\delta T$, получим наблюдаемую в виде

$$\frac{\delta\omega_{\text{TR}}}{\omega} = -\frac{\int \delta T(\vec{r})\epsilon_0\sqrt{\epsilon_j}\beta_j |E_j^{\text{WGM}}(\vec{r})|^2 d^3r}{W^{\text{WGM}}}, \tag{3.3.14}$$

где коэффициент терморефракции $\beta_x = \beta_y = 4.3 \times 10^{-6}$, $\beta_z = 37 \times 10^{-6}$ [82]. Заметим так же, что используя формулу (3.2.30) можно показать, что переход в цилиндрическую систему координат не повлияет на формулу, так как интегрирование идёт по всему азимутам. Очевидно, что при этом обобщённой координатой будет являться отклонение температуры. Тогда потери в системе будут определяться по формуле

$$W_{\text{diss}} = \int \frac{\kappa}{T}(\text{grad }\delta T)^2 d^3r \frac{dt}{2\pi}, \tag{3.3.15}$$

где временной интеграл берётся по периоду вынуждающей силы, а пространственный – по объёму системы [39, 97, 36]. Энергетически сопряжённая температуре величина – энтропия. Она и будет являться обобщённой силой. В соответствии с уравнением теплопереноса (2 начало термодинамики)

$$\delta Q - \text{div } j\delta t = T\delta S, \tag{3.3.16}$$

полагая $T = T + \delta T$, где $T = \text{const}$ и δT, а так же $\dot{S}$, малы в рассматриваемом порядке малости, получим уравнение теплопроводности

$$\rho C_v \delta\dot{T} - \kappa\Delta\delta T = TV\dot{S}, \tag{3.3.17}$$

где κ – коэффициент теплопередачи, S – плотность энтропии. Для удобства моделирования представим решение в виде $\delta T = C_T(\vec{r})\cos(\omega t) + S_T(\vec{r})\sin(\omega t)$. Тогда, подставив форм-фактор наблюдаемой получим систему

$$\begin{aligned}
&\rho C_v \omega S_T - \kappa\Delta C_T = 0, \\
&\rho C_v \omega C_T + \kappa\Delta S_T = T\omega S_0\epsilon_0\sqrt{\epsilon_j}\beta_j |E_j^{\text{WGM}}(\vec{r})|^2 / W^{\text{WGM}}, \\
&C_T|_\infty = S_T|_\infty = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

где $S_0 = 1$ Дж/К – размерная нормировка, граничное условие важно для моделирования в конечной области, позволяя воссоздать более реалистичные потоки тепла.

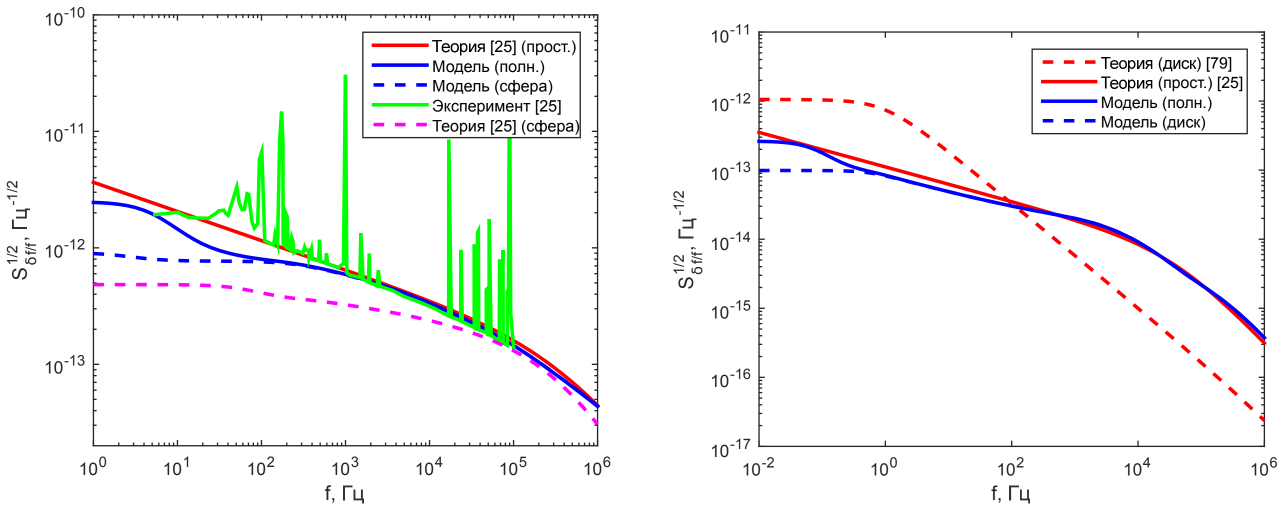

Рис. 3.17: Слева: сравнение теории (3.1.4), моделирования (с окружением и без), эксперимента [25] и формулы из приложения [25] для терморефрактивного шума SiO_2 сферы. Справа: сравнение теории [25](3.1.6), теории [79](3.1.4) и моделирования (с окружением и без) для терморефрактивного шума CaF_2 диска.

На рисунке 3.17 представлено сравнение результатов моделирования с экспериментом [25] и теоретическими выражениями (3.1.6) и (3.1.4). Моделирование показало, что за счёт связи с окружающей средой посредством теплопередачи спектральная плотность шума соответствует выражению для бесконечного открытого пространства. Учёт же границ при помощи решения задачи о теплоизолированном резонаторе приводит к существенной ошибке.

3.3.4. Броуновские шумы в ММШГ

В случае Броуновского шума удобно принять обобщённой координатой поле смещений упругого тела, тогда обобщённой силой будет являться просто сила, действующая на резонатор.

При малых деформациях, можно рассматривать изменение радиуса резонатора как локальное изменение показателя преломления:

$$\epsilon(\vec{r}) \to \epsilon(\vec{r} - \vec{u}(\vec{r}')) \approx \epsilon(\vec{r}) - (\vec{u}\vec{\nabla})\epsilon(r) \tag{3.3.19}$$

Стоит отметить, что вообще говоря, $\vec{u}$ в данной формуле берётся не в точке анализа $\vec{r}$, а в точке, откуда произошло смещение $\vec{r}' + \vec{u}(\vec{r}') = \vec{r}$. Однако малость $\vec{u}$ позволяет закрыть на это глаза. В соответствии с (3.2.19) и считая невозмущённую диэлектрическую проницаемость однородной $\hat{\epsilon}_{\rm WGR} = \text{const}$ получим наблюдаемую в виде

$$\frac{\delta\omega_{\rm Br}}{\omega} = \frac{\int \epsilon_0 \vec{E}^{\rm WGM\dagger}(\vec{r})[\vec{u}(\vec{r})\vec{\nabla}\hat{\epsilon}]\vec{E}^{\rm WGM}(\vec{r})d^3r}{2W^{\rm WGM}} = \frac{\int_S \epsilon_0[\vec{E}^{\rm WGM\dagger}(\hat{\epsilon}_{\rm WGR}-1)\vec{E}^{\rm WGM}]\vec{u}\vec{n}_S d^2r}{2W^{\rm WGM}}, \quad (3.3.20)$$

где S и $\vec{n}_S$ – поверхность резонатора и внешняя нормаль к ней, $(\hat{\epsilon}_{\rm WGR} - 1)$ – разность диэлектрических проницаемостей резонатора и внешней среды (воздух). Легко так же учесть упругооптическую (фотоупругую) частью

$$\delta\hat{\epsilon} = -\hat{\epsilon}[p_{ij\lambda}\varepsilon_\lambda - (\vec{u}\vec{\nabla})p_{ij\lambda}\varepsilon_\lambda]\hat{\epsilon}, \quad (3.3.21)$$

где λ – шестимерный индекс (нотации Войта), $p_{ij\lambda}$ – фотоупругий тензор. Второе слагаемое представляет собой второй порядок малости и им можно пренебречь.

Будем искать решение уравнения упругости (2.2.15) в виде $\vec{u}(t) = \text{Re}\,\vec{u}(\vec{r})\cos\omega t + \text{Im}\,\vec{u}(\vec{r})\sin\omega t$. Тогда

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\vec{u} - \vec{\nabla}\hat{\sigma}^T &= \vec{F}_{PE}, \\ \hat{\sigma}\vec{n}_S|_S &= \vec{F}_B, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

а деформация, тензор деформации и тензор мех. напряжений $\vec{u}$, $\hat{\varepsilon}$, $\hat{\sigma}$ связаны стандартными соотношениями (1.1.3a) и (2.2.6). При расчёте Броуновского шума $\vec{F}_{PE} = 0$ и

$$\vec{F}_B = F_0\frac{\epsilon_0[\vec{E}^{\rm WGM\dagger}(\hat{\epsilon}_{\rm WGR}-1)\vec{E}^{\rm WGM}]\vec{n}_S}{2W^{\rm WGM}} \quad (3.3.23)$$

а при расчёте фотоупругого $\vec{F}_B = 0$ и

$$F_l^{PE} = F_0\nabla_m\frac{D_i^{\rm WGM*}p_{ijlm}D_j^{\rm WGM}}{2\epsilon_0 W^{\rm WGM}}, \quad (3.3.24)$$

где $F_0 = 1$ Н·м – размерная нормировка. Заметим, что благодаря (3.2.30), в цилиндрических координатах можно записать $[\vec{E}^{\rm WGM\dagger}(\hat{\epsilon}_{\rm WGR}-1)\vec{E}^{\rm WGM}] = |E_i^{\rm WGM}|^2(\epsilon_{ii}-1)$ и $\nabla_m D_i^{\rm WGM*}p_{ijlm}\varepsilon_\lambda D_j^{\rm WGM} = p_{iilm}\nabla_m|D_i^{\rm WGM}|^2$ и $\nabla_2 = 0$.

Рассеиваемую энергию найдём используя стандартный подход угла потерь [18, 19, 98] и (2.2.6):

$$W_{\rm diss} = W_{\rm Mech}\phi_{\rm loss}(\omega) = \phi_{\rm loss}(\omega)\int\sum_{i,k}\varepsilon_{ik}\sigma_{ik}d^3r, \quad (3.3.25)$$

что аналогично введению комплексного упругого модуля (например модуля Юнга $E = E(1 + i\phi_{\rm loss}(\omega))$). При этом большинство теоретических моделей предсказывают $\phi_{\rm loss}(\omega) \propto \omega$ [58, 57]. Такие потери можно представить как обычное вязкое трение, которое в терминах осциллятора записывается как $\phi_{\rm loss}(\omega) \propto \omega/\Omega Q^{-1}$, где Q и Ω – добротность и частота ближайшей механической моды. Именно в рамках такой модели получены формулы (3.1.10) и (3.1.11). Однако есть и модели (в большинстве своём феноменологические) с $\phi_{\text{loss}}(\omega) = \text{const} \approx 1/Q$, приписываемые поверхностным потерям [59], или тонким плёнкам. Такие потери можно представить как сухое трение. Проблема такой модели в том, что она не обеспечивает конечность соответствующего шума на низких частотах. Это может свидетельствовать о том, что данная модель может иметь место только на средних частотах, например как переходная область между различными вязкими моделями.

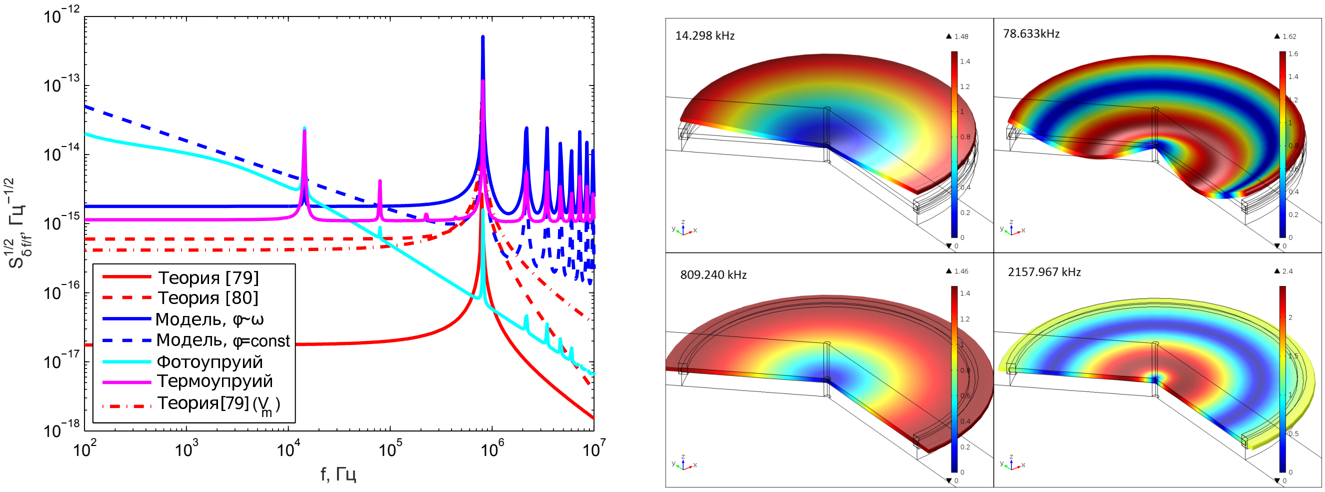

Рис. 3.18: Слева: сравнение теории (3.1.10)[79] (красная), (3.1.11)[80] (красная штриховая) и моделирования броуновского шума CaF_2 диска. На рисунке так же показан термоупругий шум (чёрным), фотоупругий (циановым) и (3.1.10) с подстановкой объёма МШГ вместо объёма резонатора. Справа: первые четыре механические моды микродиска, которые видно в броуновском шуме. Первые две моды являются вертикальными, вторые две – радиальными. Ещё три вертикальные моды между ними отсутствуют в броуновском шуме, но видны на фотоупругом. Радиальная мода с частотой $\Omega_0 = \frac{\pi v_s}{R}$, используемая для расчёта в след за [79] является шестой по частоте механической модой.

На рисунке 3.18 представлено сравнение теории с моделированием. Видно, что помимо предсказанного пика существует множество других, как справа так и слева от него. Первые пять мод являются вертикальными, две низшие из них изображены на рис. 3.18 справа вверху и присутствуют в броуновском шуме. Ещё три вертикальные в нём отсутствуют, но видны на фотоупругом шуме и при решении задачи на собственные моды. Радиальная мода с частотой $\Omega_0 = \frac{\pi v_s}{R}$, используемая для расчёта в след за [79] является шестой по частоте механической модой, а следующая радиальная – десятой (рис. 3.18 справа внизу). Количественного соответствия так же не наблюдается, хотя в случае (3.1.11) приближение эффективной массы моды массой резонатора в объёме МШГ даёт удовлетворительный результат. В случае же (3.1.10) можно предположить, что для шума имеет значение объём, близкий к объёму МШГ, а не всего резонатора, как предполагалось в [79]. Замена V_r на $2\pi^2 R d_r d_z$ показывает лучшее согласие с моделированием.

3.3.5. Термоупругий шум в ММШГ

Заметим, что в Флуктуационно-Диссипационной Теореме не требуется, чтобы рассматриваемые потери соответствовали обобщённой координате. В случае термоупругого шума удобно принять обобщённой координатой поле смещений упругого тела, как это было сделано в [15]. Тогда обобщённой силой будет являться просто сила, действующая на резонатор. При этом её форма будет такой же, как и при расчёте Броуновского шума (3.3.23). При этом необходимо решать уравнения термоупругости и теплопереноса совместно:

$$- \rho\omega^2\vec{u} - \vec{\nabla}\hat{\sigma}^T = -\frac{E}{1+\sigma}\left(\alpha_{jk} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\alpha_{ll}\delta_{jk}\right)\nabla_k T, \tag{3.3.26}$$

$$\hat{\sigma}\vec{n}_S|_S = \vec{F}_B,$$

$$\rho C_v\omega S_T - \kappa\Delta C_T = 0, \tag{3.3.27}$$

$$\rho C_v\omega C_T + \kappa\Delta S_T = \omega T_0\alpha_{ij}\sigma_{ij},$$

$$C_T|_\infty = S_T|_\infty = 0,$$

где α_{jk} – тензор теплового расширения, δ_{jk} – символ Кронекера. Так как возбуждение в данной модели начинается с механической степени свободы, обратное влияние теплового расширения (правой частью уравнения (3.3.26)) можно пренебречь как вторым порядком малости.

Моделирование показало (см. рис. 3.18) что, вопреки утверждению [79], термоупругий шум не является малым и превышает броуновский шум. Это так же связано с тем, что усреднение по-видимому, должно проводиться по объёму МШГ, а не всему резонатору.

3.3.6. Электронные СВЧ шумы в модуляторе

В электрооптическом модуляторе, помимо внутренних шумов ММШГ, описанных выше будут присутствовать так же электронные шумы СВЧ части устройства. В данном случае для сдвига частот имеем те же формулы электрооптического эффекта, что и для модуляции (3.2.19),(3.2.20)

$$\frac{\delta\omega_{\mathrm{EO}}}{\omega} = \frac{1}{2}\frac{\int D_i^{\mathrm{WGM}*} r_{ijk} E_k^{\mathrm{RF}} D_j^{\mathrm{WGM}} dV}{\epsilon_0 W^{\mathrm{WGM}}}. \tag{3.3.28}$$

Таким образом, обобщённой координатой является радиочастотное поле $\vec{E}^{\mathrm{RF}}$, а обобщённой силой – внешнее электрическое смещение $\vec{D}_{\mathrm{D}}$. Чтобы не путать его с электрическим смещением оптического и радиочастотного поля (а так же упрощения использования готовых

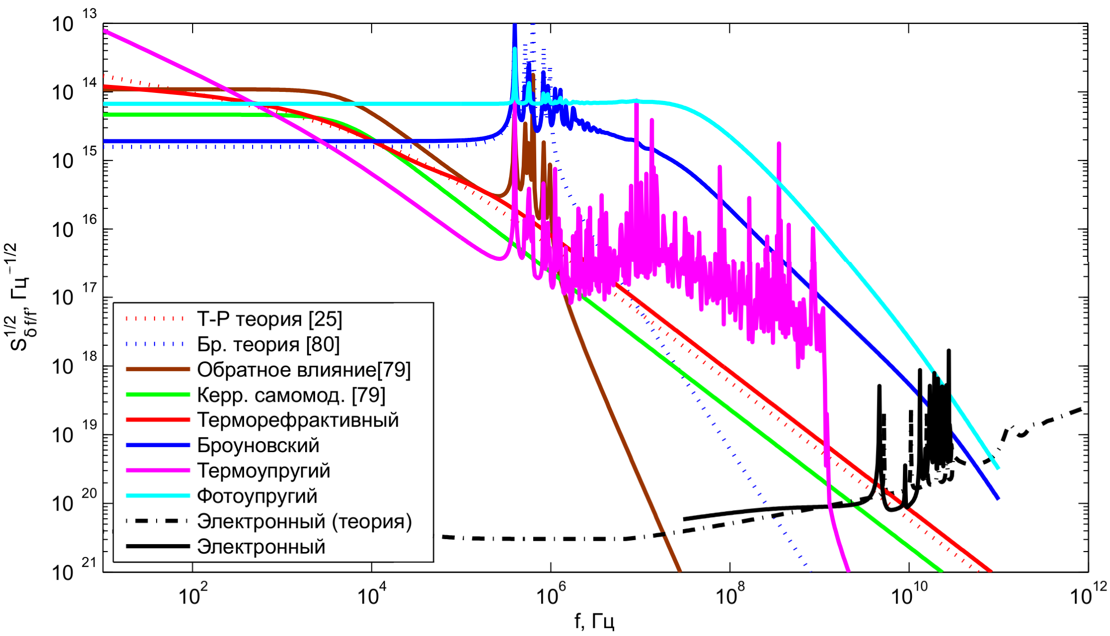

Рис. 3.19: Описанные выше шумы для электрооптического модулятора в геометрии 3.11

интерфейсов Comsol Multiphysics) будем оперировать понятием плотности тока смещения $\vec{j}_{\mathrm{D}} = \frac{\partial \vec{D}_{\mathrm{D}}}{\partial t}$. Тогда из уравнений Максвелла получим, аналогично (3.2.1):

$$\vec{\mathrm{rot}}\ \vec{\mathrm{rot}}\ \vec{E}^{\mathrm{RF}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\hat{\epsilon}_{\mathrm{RF}}}{c^2}\vec{E}^{\mathrm{RF}} + \gamma_{\mathrm{RF}}\dot{\vec{E}}^{\mathrm{RF}} = \frac{\partial \vec{j}_{\mathrm{D}}}{\partial t} \tag{3.3.29}$$

Далее рассчитаем потери

$$W_{\mathrm{loss}} = \int \vec{E}^{\mathrm{RF}}\vec{j}dV \tag{3.3.30}$$

К сожалению, данная задача обладает очень плохой сходимостью в Comsol Multiphysics. Однако была получена теоретическая оценка этого шума, хорошо согласующаяся с моделированием (с точностью до сложных мод). В основе теоретической оценки лежит сходство микрополоскового резонатора с отрезком двупроводной длинной линии. В ней существуют простые моды в виде стоячих волн, для которых телеграфные уравнения преобразуются в стандартную форму (3.3.4), где $\omega_{m_{\mathrm{RF}}} = \frac{c}{l_\varphi R\sqrt{\epsilon_{\mathrm{eff}}}} m_{\mathrm{RF}}$, а ϵ_{eff} – эффективная диэлектрическая проницаемость микрополоска [93]. Тогда спектральная плотность шума напряжения запишется в виде (3.3.6). Для ширины резонанса имеем

$$\Gamma = \frac{R_{\mathrm{RF}}}{L_{\mathrm{RF}}} = \frac{R_{\mathrm{RF}}}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0\epsilon_{\mathrm{eff}}}Z_0}, \tag{3.3.31}$$

где R_{RF}, L_{RF} погонные сопротивление и индуктивность микрополосковой линии, Z_0 – эффективный импеданс микрополосковой линии, ϵ_{eff} –эффективная диэлектрическая проницаемость микрополоска. Формулы для ϵ_{eff} и Z_0 достаточно громоздки, но их легко можно посмотреть в [93]. Сопротивление следует искать с учётом скин эффекта:

$$R_{\mathrm{RF}}L = 2\frac{2\pi R l_\varphi}{2\delta_s(w+t-2\delta_s)\sigma_R}, \tag{3.3.32}$$

где L, w и t – длина, ширина и толщина микрополоска, $\delta_s = \sqrt{2}/\sqrt{\omega\mu_0\sigma_R}$ – глубина скин-слоя, σ_R – проводимость, а множитель 2 перед дробью стоит за счёт тока, текущего по подложке. Для определения эффективной массы запишем энергию переносимую волной за период $W_{\mathrm{RF}} = 2\pi U_{\mathrm{RF}} I_{\mathrm{RF}}/\omega_{m_{\mathrm{RF}}} = 2\pi\frac{U^2}{Z_0\omega_{m_{\mathrm{RF}}}}$. Тогда в соответствии с определением (3.1.12)

$$m_{\mathrm{eff}} = \frac{2\pi}{Z_0\omega^3_{m_{\mathrm{RF}}}} \tag{3.3.33}$$

После пересчёта шума напряжения в шум частоты через коэффициент сдвига (3.2.37) получим

$$S_{\mathrm{El}}(\omega) = \frac{C_{\mathrm{microstrip}}s_\delta^2}{2}S_{\mathrm{U}} = k_B T\frac{s_\delta^2}{\pi Z_0}\sum\frac{\omega^3_{m_{\mathrm{RF}}}R_{\mathrm{RF}}l_\varphi R}{(\omega^2_{m_{\mathrm{RF}}}-\omega^2)^2+\omega^2\Gamma^2}, \tag{3.3.34}$$

где $C_{\mathrm{microstrip}}$ – ёмкость линии (3.2.41). Отметим, что данный шум пропорционален s_δ^2. Это означает, что при увеличении эффективности электрооптического взаимодействия будет увеличиваться и данный шум, в то время как остальные шумы поменяются слабо. Интересно переписать эту формулу через добротность для резонансной частоты микрополоска

$$S_{\mathrm{El}}(\omega) = k_B T s_\delta^2\frac{l_\varphi R\sqrt{\epsilon_{\mathrm{eff}}}}{2\pi c}Q_{\mathrm{RF}} = k_B T s_\delta^2\frac{Q_{\mathrm{RF}}}{\Delta\omega_{\mathrm{FSR_{RF}}}}. \tag{3.3.35}$$

Электронный шум микрополоска длиной представлен на рисунке (3.19). Параметры полоска: ширина $w = 100$ мкм, толщина $t = 50$ мкм, длина $l_\varphi = 0.26$, проводимость $\sigma_R = 60$ МСм/м (медь). Хорошо видны полуволновые резонансы с $m_{\mathrm{RF}} = 0.5$ и 1.5. Так же, в отличие от предыдущих шумов, данный шум растёт с частотой вследствие скин-эффекта. Таким образом, на частотах работы прибора (вблизи СВЧ резонансов микрополоска) чувствительность будет определяться либо этим шумом, либо фотоупругим.

3.3.7. Чувствительность модулятора на основе ММШГ

Под чувствительностью могут понимать две различные характеристики. Первой характеристикой служит величина отклика при фиксированном воздействии. Это может быть обратное полуволновое напряжение (в смысле коэффициента фазового сдвига) или относительный частотный сдвиг на один джоуль накачанной энергии (3.2.37), изображённый на рисунках 3.14 и 3.16, или темп связи с вакуумом (3.2.38). Она позволяет охарактеризовать силу взаимодействия в приборе и понять, насколько малые изменения сигнала может различить прибор, на сколько сложным может быть кодирование и какие из пороговых эффектов могут происходить в системе.

Другой важной характеристикой, которую называют чувствительностью, является минимально обнаруживаемый сигнал. Данное понятие связано как раз со сравнением сигнала с уровнем шумов. При этом чувствительность обычно определяют как такая величина сигнала, которая обеспечивает заданное (обычно равное 1) отношение мощности сигнала на выходе к мощности шума на выходе. В нашем случае амплитуда (мощность) и фаза модулированного сигнала связана с относительным частотным сдвигом (3.2.4). Шумы, полученные в предыдущих разделах как раз определяют мощность флуктуаций данной величины, действующими на различных частотах, параллельно модулирующему её СВЧ сигналу. Таким образом можно утверждать, что минимально обнаружим такой сигнал, при котором

$$\delta_\omega^2 = s_\delta^2 \frac{P_{\min}}{Q_{\mathrm{RF_c}}} \frac{2\omega_{m_{\mathrm{RF}}}^3}{(\omega_{m_{\mathrm{RF}}}^2 - \omega_{\mathrm{RF}}^2)^2 + \Gamma^2\omega_{\mathrm{RF}}^2} \approx s_\delta^2 \frac{2Q_{\mathrm{RF}}^2}{Q_{\mathrm{RF_c}}} \frac{P_{\min}}{\omega_{\mathrm{RF}}} > \sum S_{\delta f/f}(\omega_{\mathrm{RF}})\Delta f, \tag{3.3.36}$$

где Δf – полоса частот сигнала, Q_{RF} и ω_{RF} – добротность и частота СВЧ резонатора, $Q_{\mathrm{RF_c}}$ – добротность СВЧ связи, $P_{\min}$ – искомая минимально обнаруживаемая мощность, подводящаяся к модулятору. Проведём расчёт для параметров, для которых построен рис. (3.19). Имеем для частотного сдвига (см. рис. 3.16 при $l_\varphi = 0.26$) $s_\delta = 10^{-5}$ Дж$^{-1/2}$. Шумы в данном случае определяются фотоупругим шумом $S_{\delta f/f} < 1 \times 10^{-34}$ Гц$^{-1}$ (см. рис. 3.19). Добротность СВЧ примем равной 100, частоту – 4 ГГц и критическую связь. Тогда чувствительность такого модулятора получим $P_{\min} = -126$ дБм/Гц (250 аВт/Гц).

В работе [109] была получена чувствительность 33 аВт/Гц для гораздо меньшего диаметра и толщины: 1.258 мм и 0.1 мм. Они работали в режиме модуляции соседней моды (см. рис. 3.16, $\Delta m = 1$, выигрыш в 4000 раз), при этом уменьшение радиуса почти в 9 раз позволяет увеличить эффективность взаимодействия в 2 раза (за счёт уменьшения номера моды), а уменьшение толщины – в 5 раз, что даёт оценочный сдвиг в 0.4 Дж$^{-1/2}$ то есть в 40000 раз больше. Однако при этом, в соответствии с (3.3.34), электронный шум возрастёт во столько же (по корню из спектральной плотности) плюс ещё примерно в несколько раз за счёт изменения размеров. Очевидно, что именно им и будет определяться чувствительность (другие шумы такого усиления не получают). Используя (3.3.34) получим $S_{\delta f/f} < 2.4 \times 10^{-28}$ Гц$^{-1}$. В итоге для оценки чувствительности их прибора получим $P_{\min} = 4.3$ аВт/Гц, что в 10 раз меньше измеренного ими значения. Это может означать, что у них были дополнительные инструментальные шумы.

Отметим, что при достаточно большом коэффициенте сдвига частоты s_δ, минимальная регистрируемая мощность не зависит от него:

$$\frac{P_{\min}}{\Delta f} \approx \sum \frac{S_{\delta f/f}(\omega_{\mathrm{RF}})\omega_{\mathrm{RF}}}{s_\delta^2 Q_{\mathrm{RF}}} \approx \frac{\omega_{\mathrm{RF}}}{Q_{\mathrm{RF}}}\frac{C_{\mathrm{microstrip}}}{2}S_{\mathrm{U}} = \frac{\omega_{\mathrm{RF}}}{Q_{\mathrm{RF}}}\frac{k_B T}{Z_0}\sum \frac{\omega_{m_{\mathrm{RF}}}^3 R_{\mathrm{RF}} l_\varphi R}{(\omega_{m_{\mathrm{RF}}}^2 - \omega_{\mathrm{RF}}^2)^2 + \omega_{\mathrm{RF}}^2\Gamma^2}. \tag{3.3.37}$$

Более того, учитывая резонансную зависимость энергии в резонаторе от мощности, в полосе резонанса получим точно

$$\frac{P_{\min}}{\Delta f} = k_B T Q_{\mathrm{RF_c}}\frac{\Gamma\sqrt{\epsilon_{\mathrm{eff}}}l_\varphi R}{2\pi c} = k_B T\frac{Q_{\mathrm{RF_c}}}{Q_{\mathrm{RF}}}m_{RF}. \tag{3.3.38}$$

3.4. Итоги главы 3

В главе рассмотрена теория электрооптических модуляторов на основе нелинейных микрорезонаторов с модами типа шепчущей галереи и фундаментальных тепловых шумов в них. Показано, что возможны различные способы организации работы электрооптического модулятора. Для усиления взаимодействия возможно использовать металлические резонаторы радиочастотного сигнала. При этом в силу цилиндрической симметрии радиочастотным модам можно так же приписать азимутальные числа. Взаимодействие оказалось максимально для небольшого числа комбинаций азимутальных чисел участвующих во взаимодействии мод. Для ниобата лития „разрешены“ комбинации $M = m_p - m_s \pm m_{\mathrm{RF}}/l_\varphi = 0, \pm 3$, а так же не целочисленные значения (означающие незамкнутые микрополоски).

Проведённое численное моделирование электрооптическое моделирование показало, что металлический радиочастотный резонатор с сосредоточенной ёмкостью приводит к наиболее сильному электрооптическому взаимодействию. Двукольцевая модификация микрополоскового резонатора лучше обычной линии на 8–12%. При этом величина взаимодействия увеличивается с уменьшением толщины микрополоска и сравнивается с величиной для металлического резонатора при толщине микрополоска порядка 10 мкм (при $M = 0$).

Разработан численный метод оценки внутренних тепловых шумов микрорезонатора. Проведено сравнение существующих формул для спектральных плотностей шумов в резонаторах различной формы с результатами моделирования. Показано, что за счёт теплового взаимодействия с окружением спектральная плотность терморефрактивного шума практически не зависит от формы резонатора, то есть справедлива формула в приближении безграничного пространства. Так же показано, что термоупругий шум не является пренебрежимо малым. При всём при этом

- Рассмотрена модуляция оптических МШГ радиочастотным полем и получены соответствующие резонансные кривые.

- Показано, что в случае замкнутого резонатора азимутальные числа взаимодействующих мод должны удовлетворять соотношению $M = m_p - m_s \pm m_{\mathrm{RF}} = 0, \pm 3$

- Разработана система программ для расчёта эффективности электрооптического взаимодействия в ММШГ

- Получены зависимости эффективности взаимодействия для различных радиочастотных резонаторов от азимутального числа моды накачки в различных режимах работы модулятора.

- Получена зависимости эффективности взаимодействия от толщины и длины микрополоска.

- Разработан новый метод расчёта тепловых шумов в микрорезонаторах на основе ФДТ и численного моделирования методом конечных элементов.

- Показано, что за счёт связи с окружающей средой посредством теплопередачи спектральная плотность терморефрактивного шума соответствует выражению для бесконечного открытого пространства.

- Разработан метод оценки чувствительности модулятора на основе ММШГ.

- Показано, что в модуляторе с хорошим электрооптическим взаимодействием чувствительность ограничена шумом СВЧ резонатора.

Заключение

3.5. Основные результаты работы

В работе проведено исследование различных шумов в высокоточных оптических устройствах.

1. Разработан метод точного расчёта фазовых шумов в диэлектрических многослойных покрытиях с учётом проникания света внутрь покрытия и прохождения сквозь зеркало, а также метод расчёта для сред с плавно меняющимся показателем преломления. Выделены две ветви термодинамических шумов – броуновские и температурные. Шумы внутри этих ветвей коррелированы и их рассмотрение должно проводиться совместно, так как возможны эффекты усиления или самоподавления. Показано, что за счёт интерференции проникающего света во внешних слоях происходит ослабление броуновской ветви шума от 2% (простое покрытие) до 20 % (малое число слоёв).

2. Найден класс покрытий с неравными оптическими толщинами слоёв, максимизирующий коэффициент отражения. Оптимизация толщин слоёв внутри этого класса позволяет снизить шумы покрытия на 7 %. Другие рассмотренные методы подавления броуновских шумов в многослойных покрытиях либо не устойчивы, либо не дают лучшего результата.

3. Построены модели двух избыточных шумов – шума спонтанной кристаллизации (расстеклования) и шума вязкого трения. Оценена плотность частоты событий расстеклования для плавленного кварца. Проведены оценки спектральной плотности и показано, что данные шумы не превышают уже известные шумы в гравитационных антеннах.

4. Разработана численная модель для оценки и оптимизации электрооптического взаимодействия в резонаторах с модами типа шепчущей галереи. Проанализированы различные режимы работы электрооптического модулятора на их основе и показана возможность улучшения взаимодействия за счёт применения резонаторов специальной формы.

5. Разработан численный метод расчёта внутренних тепловых шумов микрорезонаторов с модами шепчущей галереи. Показана необходимость учёта открытости системы на низких частотах при расчёте терморефрактивного и термоупругого шумов. Дан метод теоретической оценки чувствительности модулятора и показано определяющее действие электрических шумов СВЧ части устройства.

3.6. Благодарности

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Михаилу Леонидовичу Городецкому за участие в эволюции темы, рекомендации интересных её направлений и плодотворных конференций, помощи в обработке текста диссертации; своим соавторам за плодотворную совместную работу, и своей жене Юлии за помощь в подготовке рисунков и текста. Также хотелось бы поблагодарить сотрудников кафедры физики колебаний и других преподавателей за помощь в постижении наук, одногрупников и коллег за поддержку.

Список обозначений

Список обозначений организован в таблицу.

Символ	Величина	Размерность	Использование
δx	смещение поверхности зеркала	м	Глава 1
L	Длина плеча интерферометра	м	Глава 1
V	объём	$м^3$	Везде
T	температура	К	Везде
$\Delta *$	конечное отклонение величины $*$	ед. $*$	Везде
$\delta *$	малое отклонение величины $*$	ед. $*$	Везде
β_T	изотермическая сжимаемость	$Па^-1$	Везде
p	давление	Па	Везде
k_B	постоянная Больцмана	Дж/К	Везде
C	удельная теплоёмкость	Дж/(кг·К)	Везде
ρ	плотность	$кг/м^3$	Везде
ε_{ik}	деформация	1	Везде
σ	мех. напряжение	Па	Везде
F	сила	Н	Везде
u	смещение	м	Везде
$\mathcal{E}$	внутренняя энергия	Дж	Везде
S	энтропия	Дж/К	Везде
μ	хим. потенциал	Дж	Введение к главе 1
N	число частиц	1	Введение к главе 1
d_e	глубина проникновения (по амплитуде)	м	Введение к главе 1
n_*	показатель преломления *-сущности	1	Везде
k_0	волновой вектор в вакууме	рад./м	Везде
φ	фаза волны	рад.	Глава 1
z	координата в глубь зеркала	м	Глава 1
$\phi(f)$	угол потерь	1	Везде
f	частота	Гц	Везде
ν_*	коэффициент Пуассона *-сущности	1	Везде
Y_*	модуль Юнга *-сущности	Па	Везде

Символ	Величина	Размерность	Использование
w	ширина гауссового пятна (по e^2)	м	Глава 1
S_*	спектральная плотность *-сущности	(ед.$*$)^2/Гц	Везде
α_*	коэффициент теплового расширения	1/К	Везде
κ	теплопроводность	Вт/(м·К)	Везде
d_j	толщина j-слоя	м	Везде
G, R, ξ	местные безразмерные коэффициенты	1	Введение к главе 1
ω	круговая частота	рад./с	Везде
Ω	круговая частота	рад./с	Везде
β	терморефракция	1/К	Везде
σ_B	постоянная Стефана-Больцмана	Вт/м^2/К^4	Везде
B	оптическая индикатриса	1	Везде
$p_{\lambda\mu}$	тензор фотоупругости	(В/м)$^{-1}$	Везде
Γ_j	комплексный коэфф. отражения	1	Везде
τ_j	комплексный коэфф. пропускания	1	Везде
E	электрическое поле	В/м	Везде
H	магнитное поле	А/м	Везде
Z_j	импеданс E/H	Ом	Глава 1
η_j	импеданс μ/ϵ	Ом	Глава 1
ϵ	диэлектрическая проницаемость	1	Везде
μ	магнитная проницаемость	1	Везде
ϵ_0	электрическая постоянная	Ф/м	Везде
μ_0	магнитная постоянная	Гн/м (Н/А^2)	Везде
g_{ij}	элементарный коэффициент отражения	1	Везде
φ_j	двойной набег фазы в слое $2k_0n_jd_j$	рад.	Глава 1
λ	длина волны	м	Глава 1,3
m, j, k	номера слоёв	1	Везде
z_j	местный безразмерный коэффициент	1	Глава 1
β'_j	фазовый шумовой коэффициента	1	Глава 1,2
β''_j	амплитудный шумовой коэффициента	1	Глава 1,2
$\tilde{\alpha}(\omega)$	динамическая восприимчивость	Н/м	Глава 1,3
χ_*	относительное отклонение $*$	%	Глава 1

Символ	Величина	Размерность	Использование
Γ	граница области	–	Глава 2
v_*	скорость звука	м/с	Глава 2
a	радиус пузырька	м	Глава 2
L	толщина зеркала	м	Глава 2
R	радиус зеркала	м	Глава 2
λ	плотность частоты событий	Гц/м^3	Глава 2
I	численные интегралы	1	Глава 2
η	динамическая (сдвиговая) вязкость	Па·с	Глава 2
ζ	объёмная вязкость	Па·с	Глава 2
G	статический сдвиговый модуль	Па	Глава 2
K	статический объёмный модуль	Па	Глава 2
G'	динамический сдвиговый модуль	Па	Глава 2
K'	динамический объёмный модуль	Па	Глава 2
C_K	перекрёстная размерная постоянная	Па	Глава 2
C_G	диагональная размерная постоянная	Па	Глава 2
k	волновой вектор в среде	рад./м	Везде
m	азимутальное число МШГ	1	Глава 3
l	орбитальное число МШГ	1	Глава 3
q	радиальное число МШГ	1	Глава 3
p	поперечное число МШГ	1	Глава 3
R	радиус резонатора	м	Глава 3
R_m	радиус центра локализации МШГ	м	Глава 3
d_r	радиальный радиус МШГ	м	Глава 3
d_z	аксиальный радиус МШГ	м	Глава 3
r_c	радиус кривизны резонатора	м	Глава 3
b	вертикальная полуось сфероида	м	Глава 3
f_m	частота моды с номером m	Гц	Везде
κ	теплопроводность	Вт/(м·К)	Везде
x	обобщённая координата	ед.	Везде
F	обобщённая сила	Дж/ед.	Глава 3
m_{eff}	эффективная масса	Дж/(ед.·рад./с)^2	Везде
W	электромагнитная энергия	Дж	Везде
P	мощность накачки	Вт	Везде

Символ	Величина	Размерность	Использование
$\hbar$	постоянная планка	Дж·с/рад.	Везде
Γ	ширина резонанса механической моды	Гц	Глава 3
Ω	частота механической моды	рад/с	Глава 3
γ_{0_m}	собственная ширина МШГ моды	Гц	Глава 3
κ_m	полная ширина МШГ моды	Гц	Глава 3
γ_c	ширина, обусловленная связью	Гц	Глава 3
n_2	коэффициент Керровской нелинейности	$м^2$.Вт	Глава 3
ω	частота оптической накачки	рад/с	Глава 3
ω_{RF}	частота СВЧ несущей	рад/с	Глава 3
A_m	медленно меняющаяся амплитуда моды	В/м	Глава 3
$\vec{e}_m$	пространственная форма моды	1	Глава 3
$\delta_{\omega_{kj}}$	отн. сдвиг частоты моды j под действием k	1	Глава 3
X_k	интеграл перекрытия моды k с накачкой	1	Глава 3
Δ_k	отстройка накачки от частоты моды	рад/с	Глава 3
b_k	амплитуда колебаний k-моды на частоте накачки	В/м	Глава 3
$a_k^{\pm}$	амплитуда колебаний k-моды на частоте $\omega \pm \omega_{\mathrm{RF}}$	В/м	Глава 3
r_{ijk}	электрооптический тензор	$(В/м)^{-1}$	Везде
D	электрическое смещение	$А·с/м^2$	Везде
φ	азимутальный угол	рад.	Глава 3
l_{φ}	угловая длина микрополоска	1	Глава 3
w	ширина микрополоска	м	Глава 3
t	толщина микрополоска	м	Глава 3
h	толщина ММШГ (она же подложка микрополоска)	м	Глава 3
e_r	диэлектрическая проницаемость ММШГ (на СВЧ)	1	Глава 3
$s_{\delta_{kj}}$	эффективность частотной модуляции	$Дж^{-1/2}$	Глава 3
$g_{0_{kj}}$	темп связи с вакуумом	рад/с	Глава 3
$P_{\min}$	чувствительность по обнаружимой мощности	Вт	Глава 3
U_{π}	Полуволновое напряжение	В	Глава 3
Q	добротность	1	Глава 3
σ_R	проводимость	$Ом^{-1}$	Глава 3

Список опубликованных статей

A1. Pavlov N. G., Kondratyev N. M., Gorodetsky M. L. Modeling the whispering gallery microresonator-based optical modulator // Appl. Opt. 2015. Vol. 54, No. 35. P. 10460–10466.

A2. Kondratiev N. M., Braginsky V. B., Vyatchanin S. P., Gorodetsky M. L. Spontaneous crystallization noise in mirrors of gravitational wave detectors // Phys. Rev. D. 2015. Vol. 92. P. 041101.

A3. Herr T., Brasch V., ... Kondratiev N,... et al. Temporal solitons in optical microresonators // Nature Photonics. 2014. Vol. 8, No. 2. P. 145–152.

A4. Kondratiev N. M., Gurkovsky A. G., Gorodetsky M. L. Thermal noise and coating optimization in multilayer dielectric mirrors // Phys. Rev. D. 2011. Vol. 84. P. 022001.

A5. Кондратьев Н. М., Городецкий М. Л. Электрооптическое взаимодействие в резонаторах с модами шепчущей галереи и их приложение в СВЧ-резонаторах // Известия РАН. Серия физическая. 2013. Т. 77, № 12. С. 1740–1743.

A6. Кондратьев Н. М., Городецкий М. Л. СВЧ приемники и модуляторы на основе резонаторов с модами шепчущей галереи // УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА. 2013. Т. 5, № 7. С. 56–59.

A7. Кондратьев Н. М., Городецкий М. Л. Электрооптическое взаимодействие в резонаторах с модами шепчущей галереи и СВЧ модуляторы на его основе // Журнал радиоэлектроники (электронный журнал). 2012. № 11.

Литература

1. B. P. Abbott et. al. LIGO: the Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory // Reports on Progress in Physics. 2009. Vol. 72, No. 7. P. 076901.

2. Harry G. M., The LIGO Scientific Collaboration. Advanced LIGO: the next generation of gravitational wave detectors // Classical and Quantum Gravity. 2010. Vol. 27, No. 8. P. 084006.

3. The LIGO Scientific Collaboration, Aasi J., et.al. B. P. A. Advanced LIGO // Classical and Quantum Gravity. 2015. Vol. 32, No. 7. P. 074001.

4. Gorodetsky M. L. Thermal noises and noise compensation in high-reflection multilayer coating // Physics Letters A. 2008. Vol. 372, No. 46. P. 6813 – 6822.

5. Городецкий, М.Л. Оптические микрорезонаторы с гигантской добротностью. Фундаментальная и прикладная физика. Физматлит. 2011. ISBN: 9785922112833.

6. Ilchenko V. S., Yao X. S., Maleki L., Lute Y. Microsphere Integration in Active and Passive Photonics Devices // Proc. SPIE. 2000. Vol. 3930.

7. Ilchenko V. S., Maleki L. Novel whispering-gallery resonators for lasers, modulators, and sensors // Proc. SPIE. 2001. Vol. 4270. P. 120–130.

8. Ilchenko V. S., Matsko A. B., Savchenkov A. A., Maleki L. High-efficiency microwave and millimeter-wave electro-optical modulation with whispering-gallery resonators // Proc. SPIE. 2002. Vol. 4629. P. 158–163.

9. Herr T., Hartinger K., Riemensberger J. et al. Universal formation dynamics and noise of Kerr-frequency combs in microresonators // Nature Photonics. 2012. Vol. 6, No. 7. P. 480–487.

10. Hulse R. A., Taylor J. H. Discovery of a pulsar in a binary system // Astrophysical Journal. 1975. Vol. 195. P. L51–L53.

11. Weisberg J. M., Taylor J. H. The Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis // Binary Radio Pulsars / Ed. by F. A. Rasio, I. H. Stairs. Vol. 328 of Astronomical Society of the Pacific Conference Series. 2005. P. 25.

12. Герценштейн, М.Е., Пустовойт, В. И. К вопросу об обнаружении гравитационных волн малых частот // ЖЭТФ. 1962. Vol. 43. P. 605–607.

13. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика том 7. Теория упругости. Наука. 1987.

14. Harry G. M., Armandula H., Black E. et al. Thermal noise from optical coatings in gravitational wave detectors // Appl. Opt. 2006. Vol. 45, No. 7. P. 1569–1574.

15. Braginsky V., Gorodetsky M., Vyatchanin S. Thermodynamical fluctuations and photothermal shot noise in gravitational wave antennae // Physics Letters A. 1999. Vol. 264, No. 1. P. 1 – 10.

16. Braginsky V., Vyatchanin S. Thermodynamical fluctuations in optical mirror coatings // Physics Letters A. 2003. Vol. 312, No. 3–4. P. 244 – 255.

17. Braginsky V., Gorodetsky M., Vyatchanin S. Thermo-refractive noise in gravitational wave antennae // Physics Letters A. 2000. Vol. 271, No. 5–6. P. 303 – 307.

18. Levin Y. Internal thermal noise in the LIGO test masses: A direct approach // Phys. Rev. D. 1998. Vol. 57. P. 659–663.

19. Harry G. M., Gretarsson A. M., Saulson P. R. et al. Thermal noise in interferometric gravitational wave detectors due to dielectric optical coatings // Classical and Quantum Gravity. 2002. Vol. 19, No. 5. P. 897.

20. G. M. Harry, M. R. Abernathy et al. Titania-doped tantala/silica coatings for gravitational-wave detection // Clas. and Quant. Grav. 2007. Vol. 24, No. 405.

21. A. E. Villar et al. Measurement of thermal noise in multilayer coatings with optimized layer thickness // Phys. Rev. D. 2010. Vol. 81, No. 12.

22. M. M. Fejer, S. Rowan et al. Thermoelastic dissipation in inhomogeneous media: loss measurements and displacement noise in coated test masses for interferometric gravitational wave detectors // Phys. Letts. A. 2004. Vol. 70, No. 82003.

23. Wanser K. H. Fundamental phase noise limit in optical fibres due to temeperature fluctuations // Electron. Letts. 1998. Vol. 28, No. 53.

24. Knudsen S., Tveten A. B., Dandridge A. Measurements of fundamental thermal induced phase fluctuations in the fiber of a Sagnac interferometer // Photonics Technology Letts. 1995. Vol. IEEE 7, No. 90.

25. Gorodetsky M. L., Grudinin I. S. Fundamental thermal fluctuations in microspheres // J. Opt. Soc. Am. B. 2004. Vol. 21, No. 4. P. 697–705.

26. S.-C. Wu, Z.-Z. Wan, et al. Photothermal shot noise in end mirrors of LIGO due to Correlation of power fluctuations // Chin.Phys.Lett. 2006. Vol. 23, No. 3173.

27. van Vliet K. M., Menta H. Theory of transport noise in semiconductors // Phys. Stat. Solidi. 1981. Vol. B106, No. 11.

28. van Vliet K. M., van der Ziel A., Scmidt R. R. Temperature fluctuation noise of thin films supported by a substrate // J.Appl. Phys. 1980. Vol. 51, No. 2947.

29. Liu Y. T., Thorne K. S. Thermoelastic noise and homogeneous thermal noise in finite sized gravitational-wave test masses // Phys. Rev. D. 2000. Vol. 62, No. 122002.

30. M. Cerdonio, L. Conti et al. Thermoelastic effects at low temperatures and quantum limits in displacement measurement // Phys. Rev. D. 2003. Vol. 63, No. 082003.

31. Балакший ., Парыгин ., Чирков . Физические основы акустооптики. Радио и связь. 1985.

32. Wille D. A., Hamilton M. C. Acousto-optic deflection in Ta_2O_5 waveguides // Appl. Phys. Letts. 1974. Vol. 24. P. 159.

33. Weis R., Gaylord T. Lithium niobate: Summary of physical properties and crystal structure // Applied Physics A. 1985. Vol. 37, No. 4. P. 191–203.

34. Berthold J. W., Jacobs S. F., Norton M. A. Dimensional Stability of Fused Silica, Invar, and Several Ultra-low Thermal Expansion Materials // Metrologia. 1977. Vol. 13, No. 1. P. 9.

35. Levin Y. Creep events and creep noise in gravitational-wave interferometers: Basic formalism and stationary limit // Phys. Rev. D. 2012. Vol. 86. P. 122004.

36. Benthem B., Levin Y. Thermorefractive and thermochemical noise in the beamsplitter of the GEO600 gravitational-wave interferometer // Phys. Rev. D. 2009. Vol. 80. P. 062004.

37. Gurkovsky A., Vyatchanin S. The thermal noise in multilayer coating // Physics Letters A. 2010. Vol. 374, No. 33. P. 3267 – 3274.

38. The LIGO Scientific Collaboration. Gravitational Wave Interferometer Noise Calculator (GWINC). https://awiki.ligo-wa.caltech.edu/aLIGO/GWINC.

39. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Теоретическая физика том 5. Статистическая физика часть 1. Наука. 1976.

40. Kimble H. J., Lev B. L., Ye J. Optical Interferometers with Reduced Sensitivity to Thermal Noise // Phys. Rev. Letts. 2008. Vol. 101, No. 26.

41. Khalili F. Y. Reducing the mirrors coating noise in laser gravitational-wave antennae by means of double mirrors // Phys. Letts. A. 2005. Vol. 334. P. 67–72.

42. S. Kentaro et al. Reduction of coating thermal noise by using an etalon: Tech. Rep. P1000094-v1: LIGO. 2010.

43. Agresti J., Castaldi G., DeSalvo R. et al. Optimized multilayer dielectric mirror coatings for gravitational wave interferometers // Proc. SPIE. 2006. Vol. 6286. P. 628608–628608–10.

44. A. V. Villar, et al. Loss angles from the direct measurement of Brownian noise in coatings // LSC-Virgo meeting in Krakow. No. G1000937. 2010.

45. Furman S. A., Tikhonravov A. V. Basics of Optics of Multilayer Systems. Atlantica Séguier Frontières. 1992.

46. Swamy V., Saxena S. K., Sundman B., Zhang J. A thermodynamic assessment of silica phase diagram // Journal of Geophysical Research. 1994. Vol. 99. P. 11787.

47. Pereira A. H. A., Miyaji D. Y., Cabrelon M. D. et al. A study about the contribution of the α-β phase transition of quartz to thermal cycle damage of a refractory used in fluidized catalytic cracking units // CerÃmica. 2014. Vol. 60. P. 449 – 456.

48. С. Глаголев. Кварцевое стекло. Государственное химико-техническое издательство, Москва. 1934.

49. Bansal N., Doremus R. Handbook of Glass Properties. Academic Press handbook series. Elsevier Science. 2013. ISBN: 9780080523767.

50. Grujicic M., Snipes J., Ramaswami S. et al. Densification and Devitrification of Fused Silica Induced by Ballistic Impact: A Computational Investigation // Journal of Nanomaterials. 2015. Vol. 2015, No. Article ID 650625. P. 14.

51. Hemingway B. Quartz: heat capacities from 340 to 1000 K and revised values for the thermodynamic properties. // American Mineralogist. 1987. Vol. 72, No. 3-4. P. 273–279.

52. Chase J., M.W. NIST-JANAF Themochemical Tables. Monograph 9. 4 edition. Elsevier Science. 1998.

53. Salleo A., Taylor S. T., Martin M. C. et al. Laser-driven formation of a high-pressure phase in amorphous silica // Nature materials. 2003. Vol. 2, No. 12. P. 796–800.

54. Riehle F. Use of optical frequency standards for measurements of dimensional stability // Measurement Science and Technology. 1998. Vol. 9, No. 7. P. 1042.

55. Takahashi A. Long-term dimensional stability and longitudinal uniformity of line scales made of glass ceramics // Measurement Science and Technology. 2010. Vol. 21, No. 10. P. 105301.

56. Тихонов . Статистическая радиотехника. Радио и связь. 1982.

57. Vacher R., Courtens E., Foret M. Anharmonic versus relaxational sound damping in glasses. II. Vitreous silica // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72. P. 214205.

58. Duwel A. E., Lozow J., Fisher C. J. et al. Thermal energy loss mechanisms in micro- to nano-scale devices // Proc. SPIE. 2011. Vol. 8031. P. 80311C–80311C–14.

59. Penn S. D., Ageev A., Busby D. et al. Frequency and surface dependence of the mechanical loss in fused silica // Physics Letters A. 2006. Vol. 352, No. 1-2. P. 3 – 6.

60. Vannoni M., Sordini A., Molesini G. Relaxation time and viscosity of fused silica glass at room temperature // The European Physical Journal E. 2011. Vol. 34, No. 9. P. 1–5.

61. Doremus R. H. Viscosity of silica // Journal of Applied Physics. 2002. Vol. 92, No. 12. P. 7619–7629.

62. Zanotto E. D., Gupta P. K. Do cathedral glasses flow? Additional remarks // American Journal of Physics. 1999. Vol. 67, No. 3. P. 260–262.

63. Stokes Y. M. Flowing windowpanes: a comparison of Newtonian and Maxwell fluid models // Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2000. Vol. 456, No. 2000. P. 1861–1864.

64. Angell C. Perspective on the glass transition // Journal of Physics and Chemistry of Solids. 1988. Vol. 49, No. 8. P. 863 – 871.

65. Vannoni M., Sordini A., Molesini G. Long-term deformation at room temperature observed in fused silica // Opt. Express. 2010. Vol. 18, No. 5. P. 5114–5123.

66. Vannoni M., Sordini A., Molesini G. Fused silica long-term stability: case studies // Proc. SPIE. 2011. Vol. 8169. P. 816906–816906–6.

67. Bömmel H. E., Dransfeld K. Excitation and Attenuation of Hypersonic Waves in Quartz // Phys. Rev. 1960. Vol. 117. P. 1245–1252.

68. Braginsky V., Gorodetsky M., Ilchenko V. Quality-factor and nonlinear properties of optical whispering-gallery modes // Physics Letters A. 1989. Vol. 137, No. 7–8. P. 393 – 397.

69. Savchenkov A. A., Ilchenko V. S., Matsko A. B., Maleki L. Kilohertz optical resonances in dielectric crystal cavities // Phys. Rev. A. 2004. Vol. 70. P. 051804.

70. Ilchenko V. S., Savchenkov A. A., Matsko A. B., Maleki L. Nonlinear Optics and Crystalline Whispering Gallery Mode Cavities // Phys. Rev. Lett. 2004. Vol. 92. P. 043903.

71. Cohen D., Hossein-Zadeh M., Levi A. Microphotonic modulator for microwave receiver // Electronics Letters. 2001. Vol. 37. P. 300–301(1).

72. Ilchenko V. S., Maleki L. Novel whispering-gallery resonators for lasers, modulators, and sensors // Proc. SPIE. 2001. Vol. 4270. P. 120–130.

73. Ayazi A., Hsu R. C. J., Houshmand B. et al. All-dielectric photonic-assisted wireless receiver // Opt. Express. 2008. Vol. 16, No. 3. P. 1742–1747.

74. Matsko A. B., Savchenkov A. A., Ilchenko V. S. et al. On the Sensitivity of All-Dielectric Microwave Photonic Receivers // J. Lightwave Technol. 2010. Vol. 28, No. 23. P. 3427–3438.

75. Matsko A. B., Maleki L., Savchenkov A. A., Ilchenko V. S. Whispering gallery mode based optoelectronic microwave oscillator // Journal of Modern Optics. 2003. Vol. 50, No. 15-17. P. 2523–2542.

76. Savchenkov A., Ilchenko V., Byrd J. et al. Whispering-gallery mode based opto-electronic oscillators // Frequency Control Symposium (FCS), 2010 IEEE International. 2010. P. 554–557.

77. Savchenkov A. A., Matsko A. B., Ilchenko V. S., Maleki L. Optical resonators with ten million finesse // Opt. Express. 2007. Vol. 15, No. 11. P. 6768–6773.

78. Savchenkov A., Matkso A., Iltchenko V., Maleki L. Method of fabricating a whispering gallery mode resonator. 2011. US Patent 8,057,283.

79. Matsko A. B., Savchenkov A. A., Yu N., Maleki L. Whispering-gallery-mode resonators as frequency references. I. Fundamental limitations // J. Opt. Soc. Am. B. 2007. Vol. 24, No. 6. P. 1324–1335.

80. Schliesser A., Anetsberger G., Riviere R. et al. High-sensitivity monitoring of micromechanical vibration using optical whispering gallery mode resonators // New Journal of Physics. 2008. Vol. 10, No. 9. P. 095015.

81. Pignatiello F., Rosa M. D., Ferraro P. et al. Measurement of the thermal expansion coefficients of ferroelectric crystals by a moire interferometer // Optics Communications. 2007. Vol. 277, No. 1. P. 14 – 18.

82. Smith D., Riccius H., Edwin R. Refractive indices of lithium niobate // Optics Communications. 1976. Vol. 17, No. 3. P. 332 – 335. 20, 188 (1977) (errata).

83. Hofer J., Schliesser A., Kippenberg T. J. Cavity optomechanics with ultrahigh-Q crystalline microresonators // Phys. Rev. A. 2010. Vol. 82. P. 031804.

84. Braginsky V., Mitrofanov V., Panov V. Systems with Small Dissipation, Ed. by K. Thorne, C. Eller. University of Chicago Press. 1985. ISBN: 9780226070735.

85. Schliesser A., Kippenberg T. J. Chapter 5 - Cavity Optomechanics with Whispering-Gallery Mode Optical Micro-Resonators // Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics / Ed. by E. A. Paul Berman, C. Lin. Academic Press. 2010. Vol. 58 of Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics. P. 207 – 323.

86. Schliesser A., Kippenberg T. Cavity Optomechanics with Whispering-Gallery-Mode Microresonators // Cavity Optomechanics / Ed. by M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, F. Marquardt. Springer Berlin Heidelberg. 2014. Quantum Science and Technology. P. 121–148.

87. Verhagen E., Deleglise S., Weis S. et al. Quantum-coherent coupling of a mechanical oscillator to an optical cavity mode // Nature. 2012. Vol. 482, No. 7383. P. 63–67.

88. Boriskin A., Godi G., Sauleau R., Nosich A. Small Hemielliptic Dielectric Lens Antenna Analysis in 2-D: Boundary Integral Equations Versus Geometrical and Physical Optics // Antennas and Propagation, IEEE Transactions on. 2008. Vol. 56, No. 2. P. 485–492.

89. Ilchenko V. S., Savchenkov A. A., Matsko A. B., Maleki L. Whispering-gallery-mode electro-optic modulator and photonic microwave receiver // J. Opt. Soc. Am. B. 2003. Vol. 20, No. 2. P. 333–342.

90. Oxborrow M. Traceable 2-D Finite-Element Simulation of the Whispering-Gallery Modes of Axisymmetric Electromagnetic Resonators // Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on. 2007. Vol. 55, No. 6. P. 1209–1218.

91. Gorodetsky M. L., Schliesser A., Anetsberger G. et al. Determination of the vacuumoptomechanical coupling rate usingfrequency noise calibration // Opt. Express. 2010. Vol. 18, No. 22. P. 23236–23246.

92. Gavartin E., Braive R., Sagnes I. et al. Optomechanical Coupling in a Two-Dimensional Photonic Crystal Defect Cavity // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 203902.

93. Bahl I., Garg R. Simple and accurate formulas for a microstrip with finite strip thickness // Proceedings of the IEEE. 1977. Vol. 65, No. 11. P. 1611–1612.

94. Nelatury S., Sadiku M., Devabhaktuni V. CAD Models for Estimating the Capacitance of a Microstrip Interconnect: Comparison and Improvisation // PIERS Proceedings. The Electromagnetics Academy. 2007. P. 18–23.

95. Edwards T., Owens R. 2-18-GHz Dispersion Measurements on 10-100-Omega Microstrip Lines on Sapphire // Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on. 1976. Vol. 24, No. 8. P. 506–513.

96. Hossein-Zadeh M., Levi A. Ring resonator-based photonic microwave receiver modulator with picowatt sensitivity // Optoelectronics, IET. 2011. Vol. 5, No. 1. P. 36–39.

97. Levin Y. Fluctuation–dissipation theorem for thermo-refractive noise // Physics Letters A. 2008. Vol. 372, No. 12. P. 1941 – 1944.

98. Kessler T., Legero T., Sterr U. Thermal noise in optical cavities revisited // J. Opt. Soc. Am. B. 2012. Vol. 29, No. 1. P. 178–184.

99. Riehle F. Frequency Standards: Basics and Applications. Wiley. 2006. ISBN: 978-3-527-60595-8.

100. Li H., Zhou F., Zhang X., Ji W. Picosecond Z-scan study of bound electronic Kerr effect in LiNbO3 crystal associated with two-photon absorption // Applied Physics B. 1997. Vol. 64, No. 6. P. 659–662.

101. Properties of Lithium Niobate, Ed. by K. Wong. EMIS datareviews series. INSPEC/Institution of Electrical Engineers. 2002. ISBN: 9780852967997.

102. Zhdanova V. V., Klyuev V. P., Lemanov V. V. et al. Thermal properties of lithium niobate crystals // Sov. Phys. -Solid State. 1968. Vol. 10, No. 1360.

103. Leviton D. B., Frey B. J., Madison T. J. Temperature-dependent refractive index of CaF2 and Infrasil 301 // Proc. SPIE. 2007. Vol. 6692. P. 669204–669204–11.

104. Adair R., Chase L. L., Payne S. A. Nonlinear refractive index of optical crystals // Phys. Rev. B. 1989. Vol. 39. P. 3337–3350.

105. Garcia-Lechuga M., Siegel J., Hernandez-Rueda J., Solis J. Imaging the ultrafast Kerr effect, free carrier generation, relaxation and ablation dynamics of Lithium Niobate irradiated with femtosecond laser pulses // Journal of Applied Physics. 2014. Vol. 116, No. 11. P. –.

106. Amico P., Bosi L., Carbone L. et al. Mechanical quality factor of large mirror substrates for gravitational waves detectors // Rev.Sci.Instrum. 2002. Vol. 73, No. 192.

107. Ozawa M., Inagaki M., Suzuki S. LiNbO3 composite oscillator for internal friction and modulus measurement at elevated temperatures // Review of Scientific Instruments. 1996. Vol. 67, No. 6. P. 2419–2420.

108. Wang R., Bhave S. A. Free-standing high quality factor thin-film lithium niobate microphotonic disk resonators // ArXiv e-prints. 2014.

109. Ilchenko V., Matsko A., Solomatine I. et al. Ka-Band All-Resonant Photonic Microwave Receiver // Photonics Technology Letters, IEEE. 2008. Vol. 20, No. 19. P. 1600–1612.

110. Bondu F., Hello P., Vinet J.-Y. Thermal noise in mirrors of interferometric gravitational wave antennas // Physics Letters A. 1998. Vol. 246, No. 3–4. P. 227 – 236.

Приложение

П.1. К методу импедансов

Здесь будут получены невозмущённые коэффициенты отражения четвертьволнового покрытия. Рассмотрим уравнения (1.2.1)-(1.2.3) на границе раздела двух диэлектриков. Очевидно, что импеданс непрерывен всюду. Тогда

$$\Gamma(+0) = 0 \tag{0.1.1}$$

$$Z(+0) = \eta_s \tag{0.1.2}$$

$$\Gamma(-0) = \frac{Z(-0) - \eta_1}{Z(-0) + \eta_1} \tag{0.1.3}$$

$$Z(-0) = Z(+0) \tag{0.1.4}$$

Далее внутри слоя коэффициент отражения меняется непрерывно:

$$\Gamma(z + dz) = \frac{E_- e^{i\omega t + ik(z+dz)}}{E_+ e^{i\omega t - ik(z+dz)}} = \Gamma(z) e^{i2kdz} \tag{0.1.5}$$

Тогда

$$\Gamma(-d_1 + 0) = \Gamma(-0) e^{-i2n_1 \frac{\omega}{c} d_1} \tag{0.1.6}$$

$$Z(-d_1 + 0) = \eta_1 \frac{1 + \Gamma(-d_1 + 0)}{1 - \Gamma(-d_1 + 0)} = \eta_1 \frac{1 + \Gamma(-0) e^{-i2n_1 \frac{\omega}{c} d_1}}{1 - \Gamma(-0) e^{-i2n_1 \frac{\omega}{c} d_1}} \tag{0.1.7}$$

$$\Gamma(-d_1 - 0) = \frac{Z(-d_1 - 0) - \eta_2}{Z(-d_1 - 0) + \eta_2} = \frac{Z(-d_1 + 0) - \eta_2}{Z(-d_1 + 0) + \eta_2} \tag{0.1.8}$$

$$\tag{0.1.9}$$

Итого, обозначая $\Gamma_i = \Gamma(\sum_1^{i-1} -d_i - 0)$ и $Z_i = Z(\sum_1^i -d_i - 0) = Z(\sum_1^i -d_i + 0)$, получим

$$\Gamma_i = \frac{Z_{i-1} - \eta_i}{Z_{i-1} + \eta_i} \tag{0.1.10}$$

$$Z_i = \eta_i \frac{1 + \Gamma_i e^{-i2n_i \frac{\omega}{c} d_i}}{1 - \Gamma_i e^{-i2n_i \frac{\omega}{c} d_i}} \tag{0.1.11}$$

Для многослойного четвертьволнового зеркала $\phi_i = -\pi$,

$$Z_{i+1} = \frac{\eta_{i+1}^2}{Z_i} = \frac{\eta_{i+1}^2}{\eta_i^2} Z_{i-1} \tag{0.1.12}$$

$$Z_{2N} = \left(\frac{\eta_0^2}{\eta_1^2}\right)^N \eta_s \tag{0.1.13}$$

$$Z_{2N+1} = \left(\frac{\eta_1^2}{\eta_0^2}\right)^N \frac{\eta_1^2}{\eta_s} \tag{0.1.14}$$

$$\Gamma_{2N+e} = \frac{\eta_0^{2N}\eta_s - \eta_1^{2N}\eta_e}{\eta_0^{2N}\eta_s + \eta_1^{2N}\eta_e} = \frac{\frac{\eta_s}{\eta_e}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^{2N} - 1}{\frac{\eta_s}{\eta_e}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^{2N} + 1} \tag{0.1.15}$$

$$\Gamma_{2N+1+e} = \frac{\eta_1^{2N+2} - \eta_0^{2N}\eta_s\eta_e}{\eta_1^{2N+2} + \eta_0^{2N}\eta_s\eta_e} = \frac{1 - \frac{\eta_s\eta_e}{\eta_1^2}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^{2N}}{1 + \frac{\eta_s\eta_e}{\eta_1^2}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1^2}\right)^{2N}} \tag{0.1.16}$$

Стоит отметить, что все импедансы и коэффициенты отражения действительны.

П.2. К расчёту шумоваой добавки

Здесь будут получены формулы для возмущённых коэффициентов отражения в отсутствие фотоупругости. Допустим, в результате шумов, толщины слоёв покрытия изменились. Тогда это можно учесть в изменении набега фаз в (0.1.6), введя $\phi_i \to \phi_i + \Delta_i$. Будем искать новые импедансы и коэффициенты отражения как возмущения старых:

$$\Gamma`(-d_1 + 0) = \Gamma(-0)e^{i\phi_1 + i\Delta_1} = \Gamma(-0)e^{i\phi_1}(1 + i\Delta_1) \tag{0.2.1}$$

$$\begin{aligned} Z`_1 &= \eta_1 \frac{1 + \Gamma(-d_1 + 0)}{1 - \Gamma(-d_1 + 0)} = \eta_1 \frac{1 + \Gamma_1 e^{i\phi_1}(1 + i\Delta_1)}{1 - \Gamma_1 e^{i\phi_1}(1 + i\Delta_1)} = \\ &= Z_1\left(1 + \frac{2\Gamma_1 e^{i\phi_1}}{1 - \Gamma_1^2 e^{i2\phi_1}} i\Delta\right) = Z_1(1 + z_1 i\Delta_1) \end{aligned} \tag{0.2.2}$$

$$\begin{aligned} \Gamma`_2 &= \frac{Z`_1 - \eta_2}{Z`_1 + \eta_2} = \frac{Z_1(1 + z_1 i\Delta_1) - \eta_2}{Z_1(1 + z_1 i\Delta_1) + \eta_2} = \\ &= \Gamma_2\left(1 + \frac{2\eta_2 Z_1}{Z_1^2 - \eta_2^2} z_1 i\Delta_1\right) = \Gamma_2(1 + g_2 i\Delta_1) \end{aligned} \tag{0.2.3}$$

Здесь мы использовали предположение, что $|z_1 i\Delta_1| = |-\frac{2\Gamma_1 e^{i\phi_1}}{1-\Gamma_1^2 e^{i2\phi_1}} i\Delta| << 1$

$$\begin{aligned} Z`_2 &= \eta_2 \frac{1 + \Gamma`_2 e^{i\phi_2}(1 + i\Delta_2)}{1 - \Gamma`_2 e^{i\phi_2}(1 + i\Delta_2)} = \\ &= \eta_2 \frac{1 + \Gamma_2 e^{i\phi_2}(1 + g_2 i\Delta_1)(1 + i\Delta_2)}{1 - \Gamma_2 e^{i\phi_2}(1 + g_2 i\Delta_1)(1 + i\Delta_2)} = \\ &= Z_2\left(1 + \frac{2\Gamma_2 e^{i\phi_2}}{1 - \Gamma_2^2 e^{i2\phi_2}}(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) = \\ &= Z_2\left(1 + z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) \end{aligned} \tag{0.2.4}$$

Здесь мы использовали, что $g_2 i\Delta_1 + i\Delta_2 << 1, \quad g_2\Delta_1\Delta_2 \approx 0$

$$\begin{aligned} \Gamma`_3 &= \frac{Z`_2 - \eta_3}{Z`_2 + \eta_3} = \frac{Z_2\left(1 + z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) - \eta_3}{Z_2\left(1 + z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) + \eta_3} = \\ &= \Gamma_3\left(1 + \frac{2\eta_3 Z_2}{Z_2^2 - \eta_3^2} z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) = \Gamma_3(1 + g_3 i\Delta_2 + g_3 g_2 i\Delta_1) \end{aligned} \tag{0.2.5}$$

Итого получим

$$z_k = \frac{2\Gamma_k e^{i\phi_k}}{1-\Gamma_k^2 e^{i2\phi_k}} = \frac{2(Z_{k-1}^2-\eta_k^2)e^{i\phi_k}}{(Z_{k-1}+\eta_k)^2-(Z_{k-1}-\eta_k)^2 e^{i2\phi_k}} \tag{0.2.6}$$

$$f_k = \frac{2\eta_k Z_{k-1}}{Z_{k-1}^2-\eta_k^2}; \quad g_k = f_k z_{k-1} = \frac{2\eta_k Z_{k-1}}{Z_{k-1}^2-\eta_k^2}\frac{2\Gamma_{k-1}e^{i\phi_{k-1}}}{1-\Gamma_{k-1}^2 e^{i2\phi_{k-1}}} \tag{0.2.7}$$

$$\Gamma`_i = \Gamma_i \left(1+i\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i} g_k\Delta_j\right) = \Gamma_i\left(1+i\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{ij}\Delta_j\right) \tag{0.2.8}$$

$$Z`_i = Z_i\left(1+iz_i\left(\Delta_i+\sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i} g_k\Delta_j\right)\right) \tag{0.2.9}$$

или рекурентно

$$\Gamma`_{i+1} = \Gamma_{i+1}\left(1+g_{i+1}(\Gamma`_i/\Gamma_i-1+i\Delta_{i+1})\right) = \Gamma_{i+1}\left(1+f_{i+1}(Z`_i/Z_i-1)\right) \tag{0.2.10}$$

$$Z`_{i+1} = Z_{i+1}\left(1+z_{i+1}(\Gamma`_{i+1}/\Gamma_{i+1}-1+i\Delta_{i+1})\right) = Z_{i+1}\left(1+z_{i+1}(f_{i+1}(Z`_i/Z_i-1)+i\Delta_{i+1})\right) \tag{0.2.11}$$

Однако в случае $\lambda/4$ - отражателя при приближении к поверхности $z_i \to \infty$ и разложение (0.2.3) не может иметь место при произвольном шуме. Проверим условие, использовавшееся при разложении

$$\Delta_i = 2k_0 n_i \delta d_i << \frac{1}{z_i} \tag{0.2.12}$$

Получим, положив $\mu = 1, \quad \eta = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$

$$\delta d_j << \frac{1}{k_0 n_j}\frac{n_1^j n_s n_0^{j-1}}{n_1^{2j}-n_0^{2(j-1)}n_s^2} \tag{0.2.13}$$

Для зеркала, использующегося в LIGO получим $\delta d_j << 0.05$. Таким образом формулы (0.2.6)-(0.2.8) оказываются справедливыми.

П.2.1. Упрощения для четвертьволнового отражателя

Для $\lambda/4$-отражателя можно записать

$$z_k = -\frac{2(Z_{k-1}^2-\eta_k^2)}{(Z_{k-1}+\eta_k)^2-(Z_{k-1}-\eta_k)^2} = -\frac{2(Z_{k-1}^2-\eta_k^2)}{4\eta_k Z_{k-1}} = -\frac{1}{f_k} \tag{0.2.14}$$

Соответственно

$$z_j = \frac{1}{2}\left(\frac{Z_j}{\eta_j}-\frac{\eta_j}{Z_j}\right) \tag{0.2.15}$$

$$z_{2N} = -\frac{\eta_1^{4N}-\eta_s^2\eta_0^{4N-2}}{2\eta_1^{2N}\eta_s\eta_0^{2N-1}} \tag{0.2.16}$$

$$z_{2N+1} = -\frac{\eta_0^{4N}\eta_s^2-\eta_1^{4N+2}}{2\eta_1^{2N+1}\eta_s\eta_0^{2N}} \tag{0.2.17}$$

Можно заметить, что

$$z_j = (-1)^j \frac{\eta_0^{2(j-1)}\eta_s^2 - \eta_1^{2j}}{2\eta_1^j \eta_s \eta_0^{j-1}} = \frac{(-1)^j}{2}\left(\frac{\eta_s}{\eta_0}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^j - \frac{\eta_0}{\eta_s}\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)^j\right) \tag{0.2.18}$$

Тогда используя (0.2.14) получим

$$\alpha_{ij} = \prod_{k=j+1}^{i} g_k = \prod_{k=j+1}^{i} z_{k-1} f_k = \prod_{k=j+1}^{i} z_k f_k \frac{z_j}{z_i} = f_i (-1)^{i-j-1} z_j \tag{0.2.19}$$

$$Z`_i = Z_i\left(1 + iz_i\left(\Delta_i + \sum_{j=1}^{i-1}\prod_{k=j+1}^{i} z_{k-1} f_k \Delta_j\right)\right) = Z_i\left(1 + iz_i\Delta_i + i\sum_{j=1}^{i-1}(-1)^{i-j} z_j \Delta_j\right)$$
$$= Z_i\left(1 + i\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j} z_j \Delta_j\right) \tag{0.2.20}$$

И тогда

$$Z`_N = Z_N\left(1 + i(-1)^N \sum_{j=1}^{N} \frac{\eta_0^{2(j-1)}\eta_s^2 - \eta_1^{2j}}{2\eta_1^j \eta_s \eta_0^{j-1}}\Delta_j\right) \tag{0.2.21}$$

$$\Gamma`_{N+e} = \Gamma_{N+e}\left(1 + if_{N+e}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{N-j} z_j \Delta_j\right) \tag{0.2.22}$$

$$f_{N+e} = \frac{2\eta_e Z_N}{Z_N^2 - \eta_e^2}, \quad \alpha_j = \alpha_{N+ej} \tag{0.2.23}$$

П.2.2. К расчёту неоднородного шума в покрытии

Полученные выше формулы легко модифицировать для случая неоднородного шума в толстом слое, например светоделителе или входном (частично пропускающем) зеркале, где световая мощность находится в подложке. Для этого используем предельный переход $n_j = n(z) \approx n$ – невозмущённый показатель преломления слоя, $\delta n_j = \delta n(z)$ и $d_j \to dz \to 0$ ($\varphi_j \to d\varphi$). Тогда

$$\Gamma_{j+1} = \frac{g_{j+1,j} + \widetilde{\Gamma}_j}{1 + g_{j+1,j}\widetilde{\Gamma}_j} = \widetilde{\Gamma}_j = \Gamma_j e^{-i\varphi_j} = \Gamma_1 e^{-i\sum^j \varphi_k}, \tag{0.2.24}$$

Для слоя толщиной L $\Gamma_{N+1} = \Gamma_1 e^{-i\sum^N \varphi_j} = \Gamma_1 e^{-2ik_0 nL}$. Далее для импедансных коэффициентов

$$z_k = \frac{1 - \Gamma_1^2 e^{-2i\sum^{k-1}\varphi_l}}{2\Gamma_1 e^{-i\sum^{k-1}\varphi_l}} = \frac{\Gamma_1^{-1} e^{i\sum^{k-1}\varphi_l} - \Gamma_1 e^{-i\sum^{k-1}\varphi_l}}{2}, \tag{0.2.25}$$

$$\widetilde{z}_k = \frac{1 - \Gamma_1^2 e^{-i2\sum^{k-1}\varphi_l} e^{-i2\varphi_k}}{2\Gamma_1 e^{-i\sum^{k-1}\varphi_l} e^{-i\varphi_k}} = \frac{\Gamma_1^{-1} e^{i\sum^{k}\varphi_l} - \Gamma_1 e^{-i\sum^{k}\varphi_l}}{2}. \tag{0.2.26}$$

Заметим, что $z_k = \widetilde{z}_{k-1}$. Упростим далее выражения используя $\Gamma_1 = |\Gamma_1|e^{-i2\varphi_1}$ и вспоминая, что в следствие предельного перехода $\sum^{k-1}\varphi_l = \sum^{k}\varphi_l - \varphi_k = 2k_0nz - 2k_0ndz$:

$$z_k = i|\Gamma_1|\sin\left(2k_0n(z-dz)+2\varphi_1\right), \tag{0.2.27}$$

$$\widetilde{z}_k = i|\Gamma_1|\sin\left(2k_0nz+2\varphi_1\right). \tag{0.2.28}$$

Переходим к следующему коэффициенту

$$\zeta_k = \widetilde{z}_k - z_k = i|\Gamma_1|(\sin\left(2k_0nz+2\varphi_1\right) - \sin\left(2k_0n(z-dz)+2\varphi_1\right)) = \tag{0.2.29}$$

$$= 2ik_0n|\Gamma_1|\cos\left(2k_0nz+2\varphi_1\right)dz. \tag{0.2.30}$$

Наконец, чтобы переписать основные формулы, необходимо заметить, что $\Delta_j = -2k_0\delta n(z)dz$ и $\delta n_{N+1} = 0$ так как i вне L области.

$$\Gamma'_{N+1} = \Gamma_{N+1}(1+\varepsilon),$$

$$\varepsilon = z_{N+1}\frac{\delta n_{N+1}}{n_{N+1}} + \sum_{j=1}^{N}\prod_{k=j+1}^{N+1}\frac{z_k}{\widetilde{z}_{k-1}}\left(i\Delta_j - \zeta_j\frac{\delta n_j}{n_j}\right) = \tag{0.2.31}$$

$$= \int_0^L\left(-i2k_0\delta n(z)dz - \frac{\delta n(z)}{n}2ik_0n\cos\left(2k_0nz+2\widetilde{\varphi}\right)dz\right) = \tag{0.2.32}$$

$$= -2ik_0\int_0^L\delta n(z)\left(1+\cos\left(2k_0nz+2\widetilde{\varphi}\right)\right)dz \tag{0.2.33}$$

Таким образом, для малой неоднородности в слое толщиной L на начальном коэффициенте отражения Γ_1, отражение на поверхности

$$\begin{aligned}\Gamma'_{N+1} =&\Gamma_1e^{-2ik_0nL}(1-4ik_0\int_0^L\delta n(z)\cos^2\left(k_0nz+i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\Gamma_1}\right)dz) = \\ =&\Gamma_1e^{-2ik_0nL}(1-4ik_0\int_0^L\delta n(z)\cos^2\left(k_0nz+\varphi_1/2+i\ln\sqrt{|\Gamma_1|}\right)dz) \qquad (0.2.34)\\ =&\Gamma_1e^{-2ik_0nL}(1-2ik_0\int_0^L\delta n(z)dz+ \\ &-ik_0\int_0^L\delta n(z)\left(\cos(2k_0nz+\varphi_1)\frac{1+\Gamma_1^2}{\Gamma_1}+i\sin(2k_0nz+\varphi_1)\frac{1-\Gamma_1^2}{\Gamma_1}\right)dz), \qquad (0.2.35)\end{aligned}$$

где Ln обозначает комплексный логарифм. Этот результат совпадает с результатами из [36] с усреднением по $\sin^2$, так как они по-сути положили $\Gamma_1 = -1$.

Замечу, что Γ_1 получено из Γ_0 без шума, т.е формула описывает переход от бесшумного к бесшумному слою при постоянном невозмущённом коэффициенте преломления.

Если нам необходимо остаться внутри шумящей области чтобы описать переход внутри слоя с данным показателем преломления, необходимо обратить скачок показателя преломления на левой (передней)

$$\widetilde{\Gamma}_j = \frac{\Gamma_{j+1} - g_{j+1,j}}{1 - g_{j+1,j}\Gamma_{j+1}} = \frac{\Gamma_{j+1} + \frac{\delta n(d_j)}{2n}}{1 + \frac{\delta n(d_j)}{2n}\Gamma_{j+1}} = \Gamma_{j+1}\left(1 + \frac{1-\Gamma_{j+1}^2}{2\Gamma_{j+1}}\frac{\delta n(d_j)}{n}\right)$$
$$= \Gamma_{j+1}\left(1 + i\sin(i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_{j+1})\frac{\delta n(d_j)}{n}\right) = \Gamma_{j+1}\left(1 + i\sin(i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_j + 2k_0 n_j d_j)\frac{\delta n(d_j)}{n}\right) =$$
$$= \Gamma_{j+1}\left(1 + z_{j+1}\frac{\delta n(d_j)}{n}\right) = \Gamma_{j+1}\left(1 + \widetilde{z}_j\frac{\delta n(d_j)}{n}\right) \tag{0.2.36}$$

и правой (задней) границе слоя

$$\widetilde{\Gamma}_j = \widetilde{\Gamma}_j\left(1 - \frac{1-\Gamma_j^2}{2\Gamma_j}\frac{\delta n(0)}{n}\right) = \widetilde{\Gamma}_j\left(1 - i\sin(i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_j)\frac{\delta n(0)}{n}\right)$$
$$= \Gamma_{j+1}\left(1 - z_j\frac{\delta n(0)}{n}\right). \tag{0.2.37}$$

где $\delta n(d_j)$ означает левую (переднюю) сторону. Заметим, что в случае постоянного δn

$$-iz_j\frac{\delta n(0)}{n} + i\widetilde{z}_j\frac{\delta n(d_j)}{n} - 4ik_0\int_{d_j}\delta n(z)\cos^2\left(k_0 nz + i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\Gamma_j}\right)dz =$$
$$= -i\sin(i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_j)\frac{\delta n(0)}{n} + i\sin(i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_j + 2k_0 n_j d_j)\frac{\delta n(d_j)}{n}$$
$$- 2ik_0 d_j\delta n_j - 2ik_0\int_{d_j}\delta n(z)\cos\left(2k_0 nz + i\,\mathrm{Ln}\,\Gamma_j\right)dz = -2ik_0 d_j\delta n_j \tag{0.2.38}$$

Наконец получим

$$\Gamma'_{N+1} = \Gamma_1 e^{-2ik_0 nL}(1 + i\mu'_j\frac{\delta n_j(0)}{n_j} - 4ik_0\int_0^L\delta n(z)\cos^2\left(k_0 nz + i\,\mathrm{Ln}\sqrt{\Gamma_1}\right)dz) =$$
$$= \Gamma_1 e^{-2ik_0 nL}(1 + i\mu'_j\frac{\delta n_j(0)}{n_j} - 4ik_0\int_0^L\delta n(z)\cos^2\left(k_0 nz + \varphi_1/2 + i\ln\sqrt{|\Gamma_1|}\right)dz)$$
$$= \Gamma_1 e^{-2ik_0 nL}(1 + i\mu'_j\frac{\delta n_j(0)}{n_j} - 2ik_0\int_0^L\delta n(z)dz +$$
$$- ik_0\int_0^L\delta n(z)\left(\cos(2k_0 nz + \varphi_1)\frac{1+\Gamma_1^2}{\Gamma_1} + i\sin(2k_0 nz + \varphi_1)\frac{1-\Gamma_1^2}{\Gamma_1}\right)dz), \tag{0.2.39}$$

П.2.3. Оценка спектральой плотности упругих шумов

Оценим дисперсию шума, считая шум каждого слоя δd независимым, но разным для для чётных и нечётных слоёв (определяющимся материалом) , т.е. $\langle\delta d_j^2\rangle \to S(\Omega)_j = \xi_j(\omega)\delta d$ (1.2.48), $\langle\delta d_j\delta d_k\rangle = 0$. Используя табл. 1.2 получим для кварцевой подложки

$$S(\Omega)_{si} = 0.60 * 10^{-20}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\ \frac{\text{м}}{\sqrt{\text{Гц}}} \tag{0.2.40}$$
$$S(\Omega)_{ta} = 1.26 * 10^{-20}\sqrt{\frac{2\pi}{\omega}}\ \frac{\text{м}}{\sqrt{\text{Гц}}}. \tag{0.2.41}$$

Далее множители $4k_0^2n_e^2$ и $\sqrt{2\pi/\omega}$ в численных расчетах для простоты сравнения будем опускать, и получать „дисперсии“ шума в м/$\sqrt{\text{Гц}}$ на частоте 1 Гц. При желании истинные спектральные плотности флуктуаций фазы можно получить, домножив результаты на эти множители.

$$\begin{aligned}
S_\phi^2 &= 4k_0^2\sum_{j=1}^{N}\left[f_{N+e}(-1)^{N-j}z_jn_j-n_e\right]^2S_{\delta d_j}^2 = \\
&= 4k_0^2\sum_{j=1}^{N}\left[f_{N+e}\frac{(-1)^N}{2}\left(\frac{\eta_s}{\eta_0}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^j-\frac{\eta_0}{\eta_s}\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)^j\right)n_j-n_e\right]^2S_{\delta d_j}^2 \\
&= 4k_0^2S_d^2\sum_{j=1}^{N}[\frac{f_{N+e}^2}{4}\frac{\eta_s^2}{\eta_0^2}\left(\frac{\eta_0^2}{\eta_1^2}\right)^j n_j^2S_{\delta d_j}^2+\frac{f_{N+e}^2}{4}\frac{\eta_0^2}{\eta_s^2}\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)^j n_j^2S_{\delta d_j}^2-\frac{f_{N+e}^2}{2}n_j^2S_{\delta d_j}^2 \\
&-f_{N+e}n_e(-1)^Nn_jS_{\delta d_j}^2\frac{\eta_s}{\eta_0}\left(\frac{\eta_0}{\eta_1}\right)^j+f_{N+e}n_e(-1)^Nn_jS_{\delta d_j}^2\frac{\eta_0}{\eta_s}\left(\frac{\eta_1}{\eta_0}\right)^j+S_{\delta d_j}^2n_e^2]
\end{aligned} \tag{0.2.42}$$

Рассмотрим пределы $Z_{2N}\to 0$ и $Z_{2N}\to\infty$. Отметим, что при этом $f_{2N+e}\to 0$

- $Z_{2N}\to 0\ \ (n_1<n_0)$

$$\begin{aligned}
S_\phi^2 =&4k_0^2n_e^2S_{d0}^2[\frac{n_0^4}{n_0^4-n_1^4}-2\frac{n_0^2}{n_0^2-n_1^2}+N]+ \\
&+4k_0^2n_e^2S_{d1}^2[\frac{n_1^4}{n_0^4-n_1^4}-2\frac{n_1^2}{n_0^2-n_1^2}+N]
\end{aligned} \tag{0.2.43}$$

- $Z_{2N}\to\infty\ \ (n_1>n_0)$

$$S_\phi^2 =4k_0^2(S_{d0}^2+S_{d1}^2)n_e^2[-\frac{n_1^4}{n_e^4}\frac{n_0^4}{n_0^4-n_1^4}+\frac{2n_1^2}{n_e^2}\frac{n_0^2}{n_0^2-n_1^2}+N] \tag{0.2.44}$$

Теперь для $2N+1$ слоя

$$\begin{aligned}
S1_\phi^2 =&S_\phi^2+4k_0^2S_{d1}^2[n_1^2\frac{f_{2N+1+e}^2}{4}\left(\frac{Z_{2N}^2}{\eta_1^2}+\frac{\eta_1^2}{Z_{2N}^2}\right) \\
&+n_en_1f_{2N+1+e}\left(\frac{Z_{2N}}{\eta_1}-\frac{\eta_1}{Z_{2N}}\right)+n_e^2-\frac{f_{2N+1+e}^2}{2}n_1^2] =
\end{aligned} \tag{0.2.45}$$

где в S_ϕ вместо f_{2N+e} используется $-f_{2N+1+e}=\frac{2n_en_1^2Z_vZ_{2N}}{n_1^4Z_{2N}^2-n_e^2Z_v^2}$. Тогда

- $Z_{2N}\to 0\ \ (n_1<n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1}\to\infty$)

$$S1_\phi^2 =4k_0^2n_e^2(S_{d0}^2+S_{d1}^2)[\frac{n_0^4}{n_0^4-n_1^4}\frac{n_1^4}{n_e^4}-2\frac{n_0^2}{n_0^2-n_1^2}\frac{n_1^2}{n_e^2}+N]+4k_0^2n_e^2S_{d1}^2 \tag{0.2.46}$$

- $Z_{2N} \to \infty$ $(n_1 > n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1} \to 0$)

$$\begin{aligned}
S1_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 [-\frac{n_0^4}{n_0^4 - n_1^4}(S_{d0}^2 + S_{d1}^2) + 2\frac{n_0^2}{n_0^2 - n_1^2}(S_{d0}^2 + S_{d1}^2) + (S_{d0}^2 + S_{d1}^2)N] + \\
& 4k_0^2 S_{d1}^2 [n_1^2 \frac{f_{2N+1+e}^2}{4}\frac{Z_{2N}^2}{\eta_1^2} + n_e n_1 f_{2N+1+e}\frac{Z_{2N}}{\eta_1} + n_e^2] = \\
=& 4k_0^2 n_e^2 (S_{d0}^2 + S_{d1}^2)[-\frac{n_0^4}{n_0^4 - n_1^4} + 2\frac{n_0^2}{n_0^2 - n_1^2} + N]
\end{aligned} \tag{0.2.47}$$

Итого для кварц-танталатного зеркала из 42 слоёв получим $S_{norm} = 6.04 \times 10^{-20}$ м/$\sqrt{\text{Гц}}$, с 43 слоями $S_{norm} = 6.18 \times 10^{-20}$ м/$\sqrt{\text{Гц}}$. Для танталат-кварцевого - $S_{norm} = 4.11 \times 10^{-20}$ и 4.13×10^{-20} м/$\sqrt{\text{Гц}}$ соответственно.

П.2.4. Корректирующий слой

Здесь будут получены формулы для дисперсий шума при наличии дополнительного корректирующего слоя. Добавляем корректирующий слой:

$$Z`_{N+c} = Z_{N+c}\left(1 + i(-1)^N z_{N+c} f_{N+c} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{-j} z_j \Delta_j + i z_{N+c}\Delta_{N+c}\right) \tag{0.2.48}$$

$$z_{N+c} = \frac{2(Z_N^2 - \eta_c^2)e^{i\phi_c}}{(Z_N + \eta_c)^2 - (Z_N - \eta_c)^2 e^{i2\phi_c}} \tag{0.2.49}$$

$$z_{N+c} f_{N+c} = \frac{4\eta_c Z_N e^{i\phi_c}}{(Z_N + \eta_c)^2 - (Z_N - \eta_c)^2 e^{i2\phi_c}} \tag{0.2.50}$$

И отражение будет

$$\begin{aligned}
\Gamma`_{N+c+e} &= \Gamma_{N+c+e}\left(1 + f_{N+c+e}(Z`_{N+c}/Z_{N+c} - 1)\right) = \\
&= \Gamma_{N+c+e}\left(1 + i(-1)^N \alpha \sum_{j=1}^{N} (-1)^{-j} z_j \Delta_j + i\beta\Delta_{N+c}\right)
\end{aligned} \tag{0.2.51}$$

$$\alpha(\eta_c, d_c, \eta_e) = f_{N+c+e} z_{N+c} f_{N+c} = g_{N+c+e} f_{N+c} \tag{0.2.52}$$

$$\beta = f_{N+c+e} z_{N+c} = g_{N+c+e} \tag{0.2.53}$$

Применяя рассуждения, сделанные в предыдущем пункте, получим для полного шума фазы

$$\delta\phi = 2k_0 \sum_{j=1}^{N} \left[(-1)^{N-j}\,\mathrm{Re}(\alpha z_j n_j) - n_e\right]\delta d_j + 2k_0\left[\mathrm{Re}(\beta n_c) - n_e\right]\delta d_{N+c} \tag{0.2.54}$$

А учитывая что внутри $\lambda/4$-зеркала $\mathrm{Im}(f_{N+c}) = \mathrm{Im}(z_j) = \mathrm{Im}(n_j) = 0$, получаем

$$\delta\phi = 2k_0 \sum_{j=1}^{N} \left[(-1)^{N-j}\,\mathrm{Re}(\beta) f_{N+c} z_j n_j - n_e\right]\delta d_j + 2k_0\left[\mathrm{Re}(\beta) n_c - n_e\right]\delta d_{N+c} \tag{0.2.55}$$

Рассчитаем дисперсию шума в этом случае.

$$< \delta\phi^2 > = 4k_0^2 \left(\sum_{j=1}^{N} \left[\mathrm{Re}(\beta)(-1)^{N-j} f_{N+c} z_j n_j - n_e \right]^2 S_j^2 + \left[n_c \, \mathrm{Re}(\beta) - n_e \right]^2 S_c^2 \right) \qquad (0.2.56)$$

Выкладки до определённого места аналогичны тому, что было для $S_{\phi_{free}}$, с точностью до замены $f_{2N+e} \to \mathrm{Re}(\beta) f_{2N+c}$ и добавки $S'^2_c = 4k_0^2 \left[n_c \, \mathrm{Re}(\beta) - n_e \right]^2 S_c^2$.

П.2.5. Послойная компенсация

Здесь будет проведена попытка послойной компенсации шумов. Из уравнения (0.2.54) видно, что две компоненты шума можно занулить подбором толщины и показателя преломления корректирующего слоя, причём одним из этих слоёв должен быть он сам. Действительно, меняя α мы можем убрать шум одного из внутренних слоёв, а β - его собственные флуктуации. Тогда

$$\mathrm{Re}(\beta) = \mathrm{Re}(f_{N+c+e} z_{N+c}) = \mathrm{Re}(g_{N+c+e}) = \frac{n_e}{n_c} \qquad (0.2.57)$$

$$\mathrm{Re}(\alpha z_j n_j) = \mathrm{Re}(g_{N+c+e}) \, \mathrm{Re}(f_{N+c} z_j n_j) - \mathrm{Im}(g_{N+c+e}) \, \mathrm{Im}(f_{N+c} z_j n_j) = n_e \qquad (0.2.58)$$

и тогда, учитывая что внутри $\lambda/4$-зеркала $\mathrm{Im}(f_{N+c}) = \mathrm{Im}(z_j) = \mathrm{Im}(n_j) = 0$ для одного из $j \leq N$, получаем

$$\frac{n_e}{n_c} f_{N+c} z_j (-1)^{N-j} = \frac{n_e}{n_j} \qquad (0.2.59)$$

$$\frac{2\eta_c Z_N}{Z_N^2 - \eta_c^2} = \frac{n_c}{n_j z_j (-1)^{N-j}} \qquad (0.2.60)$$

$$\frac{2 Z_v Z_N}{Z_N^2 \epsilon_c - Z_v^2 \mu_c} = \frac{1}{n_j z_j (-1)^{N-j}} \qquad (0.2.61)$$

$$\epsilon_c = 2(-1)^{N-j} z_j n_j \frac{Z_v}{Z_N} + \mu_c \frac{Z_v^2}{Z_N^2} \qquad (0.2.62)$$

Стоит заметить, что хотя у нас есть два независимых параметра, мы не сможем подобрать их так, чтобы компенсировать шумы более чем одного внутреннего слоя. Тогда будем считать, что $\mu_c = 1$, как для большинства материалов.

$$n_c = \sqrt{2(-1)^{N-j} z_j n_j \frac{Z_v}{Z_N} + \frac{Z_v^2}{Z_N^2}} = \sqrt{(-1)^{N-j} n_j \left(\frac{Z_v}{\eta_j} \frac{Z_j}{Z_N} - \frac{Z_v \eta_j}{Z_N Z_j} \right) + \frac{Z_v^2}{Z_N^2}} =$$
$$= \sqrt{(-1)^{N-j} n_j^2 \frac{Z_j}{Z_N} - (-1)^{N-j} \frac{Z_v^2}{Z_N Z_j} + \frac{Z_v^2}{Z_N^2}}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{n_0}{n_s} \left(\frac{n_1}{n_0} \right)^j - \frac{n_s}{n_0} \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^j \right) n_j \frac{Z_v}{Z_N} + \frac{Z_v^2}{Z_N^2}} \qquad (0.2.63)$$

Тогда для компенсации верхнего (N-ного) слоя отражателя получим $n_c = n_N$. Однако для других слоёв получается хуже. Для нечётных слоёв зеркала с кварцевой подложкой получаются показатели порядка $5 * 10^6$, а для чётных - комплексные.

Таким образом шум одного из слоёв устраняется подбором показателя преломления корректирующего слоя. Теперь подберём его толщину так, чтобы компенсировать его собственное влияние.

$$\begin{aligned}
Z_{N+c} &= \eta_c \frac{\eta_c(1-e^{i\phi_c}) + Z_N(1+e^{i\phi_c})}{\eta_c(1+e^{i\phi_c}) + Z_N(1-e^{i\phi_c})} \\
&= \eta_c \frac{(\eta_c + Z_N) - (\eta_c - Z_N)e^{i\phi_c}}{(\eta_c + Z_N) + (\eta_c - Z_N)e^{i\phi_c}} \\
\mathrm{Re}[\beta] &= \mathrm{Re}\left[\frac{2\eta_e Z_{N+c}}{Z_{N+c}^2 - \eta_e^2} \frac{2(Z_N^2 - \eta_c^2)e^{i\phi_c}}{(Z_N + \eta_c)^2 - (Z_N - \eta_c)^2 e^{i2\phi_c}}\right] = \\
&= \frac{2\eta_e\eta_c(Z_N^2 - \eta_c^2)((\eta_c^2 - \eta_e^2)(\eta_c^2 + Z_N^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2)(\eta_c^2 - Z_N^2))}{((\eta_c^2 - \eta_e^2)(\eta_c^2 + Z_N^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2)(\eta_c^2 - Z_N^2))^2 + 4\eta_c^2 Z_N^2(\eta_c^2 - \eta_e^2)^2\sin^2\phi_c}
\end{aligned} \tag{0.2.64}$$

Для хорошего покрытия $Z_{2N} \approx 0, \quad Z_{2N+1} \to \infty$. Попытаемся решить задачу в этих случаях:

1. Нечётное число слоёв, $Z_N \approx \infty$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\beta] &= \frac{2\eta_e\eta_c Z_N^2((\eta_c^2 - \eta_e^2)Z_N^2\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2)Z_N^2)}{((\eta_c^2 - \eta_e^2)Z_N^2\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2)Z_N^2)^2 + 4\eta_c^2 Z_N^2(\eta_c^2 - \eta_e^2)^2\sin^2\phi_c} \approx \\
&= \frac{2\eta_e\eta_c Z_N^2((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2))}{Z_N^2((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2))^2 + 4\eta_c^2(\eta_c^2 - \eta_e^2)^2\sin^2\phi_c} \approx \\
&\approx \frac{2\eta_e\eta_c}{(\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2)}
\end{aligned} \tag{0.2.65}$$

$$\cos\phi_c = -\frac{(\eta_c^2 + \eta_e^2)n_e - 2\eta_e\eta_c n_c}{n_e(\eta_c^2 - \eta_e^2)} = -\frac{(\eta_c^2 + \eta_e^2)\mu_e - 2\eta_e^2\mu_c}{\mu_e(\eta_c^2 - \eta_e^2)} \tag{0.2.66}$$

Теперь, если $\mu_c = \mu_e$ (обычно мы считаем их равными 1), то $\cos\phi_c = -1$; $d_c = \lambda/4$, причём это так вне зависимости от n_c!

2. Чётное число слоёв, $Z_N \approx 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}[\beta] &= -\frac{2\eta_e\eta_c^3((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2))}{\eta_c^2((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2))^2 + 4Z_N^2(\eta_c^2 - \eta_e^2)^2\sin^2\phi_c} \approx \\
&\approx -\frac{2\eta_e\eta_c}{(\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2)}
\end{aligned} \tag{0.2.67}$$

$$\cos\phi_c = \frac{(\eta_c^2 + \eta_e^2)n_e - 2\eta_e\eta_c n_c}{n_e(\eta_c^2 - \eta_e^2)} = \frac{(\eta_c^2 + \eta_e^2)\mu_e - 2\eta_e^2\mu_c}{\mu_e(\eta_c^2 - \eta_e^2)} \tag{0.2.68}$$

Теперь, если $\mu_c = \mu_e$ (обычно мы считаем их равными 1), то $\cos\phi_c = 1$; $d_c = \lambda/2$, причём это так вне зависимости от n_c!

Во что же превратится шум фазы, если выполнить все эти условия?

$$\begin{aligned}\delta\phi &= 2k_0 \sum_{j=1}^{N-1} \left[(-1)^{N-j}\,\mathrm{Re}(\alpha) z_j n_j - n_e\right] \delta d_j \\ &= 2k_0 \sum_{j=1}^{N-1} \left[\pm(-1)^{N-j} f_{N+c+e} z_j n_j - n_e\right] \delta d_j, \end{aligned} \tag{0.2.69}$$

где + берётся при $Z_N \approx 0$, и − при $Z_N \to \infty$ При этом $Z_{N+c} = Z_N$ или $\frac{\eta_c^2}{Z_N}$ соответственно. Тогда $f_{N+c+e} = f_{N+e}$ или $-f_{N+\alpha}$, где $\alpha = \eta_c^2/\eta_e$. Сравним его с тем, что было без „корректирующего“ слоя

$$\delta\phi_{free} = 2k_0 \sum_{j=1}^{N} \left[(-1)^{N-j} f_{N+e} z_j n_j - n_e\right] \delta d_j, \tag{0.2.70}$$

При компенсации внешнего слоя легко получить

$$\begin{aligned}< \delta\phi_{free}^2 > - < \delta\phi^2 > &= 4k_0^2 [f_{N+e} z_N n_N - n_e]^2 S_N^2 = \\ &= 4k_0^2 S_N^2 [\frac{2\eta_e Z_N}{Z_N^2 - \eta_e^2} \frac{1}{2} \left(\frac{Z_N}{\eta_N} - \frac{\eta_N}{Z_N}\right) n_N - n_e]^2 = \\ &= 4k_0^2 S_N^2 [\frac{Z_N^2 - \eta_N^2}{Z_N^2 - \eta_e^2} \frac{\eta_e}{\eta_N} n_N - n_e]^2 \end{aligned} \tag{0.2.71}$$

что равно нолю для $Z_N \to 0$ и $4k_0^2 n_e^2 (n_N^2 - n_e^2)^2$ для $Z_N \to \infty$ т.е. эффективно компенсации не происходит (0.4%). Для анализа других случаев надо считать дисперсию.

П.3. Применение ФДТ

Из [19, 110] известно решение упругой задачи для смещения безграничного полупространства

$$\begin{aligned} u_r &= \int_0^\infty \left[a(k) - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} b(k) + kzb(k)\right] e^{-kz} J_1(kr) k dk \\ u_\varphi &= 0 \quad \text{(аксиальная симметрия)} \\ u_z &= \int_0^\infty \left[a(k) + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} b(k) + kzb(k)\right] e^{-kz} J_1(kr) k dk, \end{aligned}$$

где из гауссового граничного условия

$$a(k) = b(k) = \frac{F}{4\pi\mu k} e^{-\frac{k^2 w^2}{8}} \tag{0.3.1}$$

Преобразуем решение к тензору деформаций

$$\begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{F}{4\pi(\lambda + \mu)} \left(\frac{1}{r^2}\left(1 - e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\right) - \frac{4}{w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\right), \\ \epsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{-F}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{1}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{2r^2}{w^2}}\right) \\ \epsilon_{zz} &= \frac{-F}{4\pi(\lambda + \mu)} \frac{4}{w^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}}, \end{aligned} \tag{0.3.2}$$

где

$$\lambda = \frac{Y\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{Y}{2(1+\nu)} \tag{0.3.3}$$

Теперь используем (0.3.2) со следующим граничным условием на $z = 0$ (здесь и далее величины со штрихом относятся к покрытию, без штриха – к подложке):

$$\begin{aligned} \epsilon'_{rr} &= \epsilon_{rr}, \\ \epsilon'_{\varphi\varphi} &= \epsilon_{\varphi\varphi}, \\ -F' = \sigma'_{zz} &= (\lambda' + 2\mu')\epsilon'_{zz} + \lambda'(\epsilon'_{rr} + \epsilon'_{\varphi\varphi}), \end{aligned} \tag{0.3.4}$$

и получим

$$\epsilon'_{zz} = -\frac{2F'(\lambda+\mu) - \lambda' F}{2(\lambda+\mu)(\lambda'+2\mu')}\frac{2}{\pi w^2}e^{-\frac{2r^2}{w^2}} \tag{0.3.5}$$

Для действующих сил F и F' применяются следующие условия

1. симметричная ($S^t(\Omega)$) - противонаправленные силы приложены к слою – $F = 0$, $F' = P$, ищем изменение толщины слоя ($x = x_0 - x_1 = \delta d$);

2. антисимметричная задача “0” ($S^b(\Omega)$) - сила приложена к поверхности подложки – $F = P$, $F' = 0$, ищем смещение поверхности подложки ($x = x_0$).

3. антисимметричная задача “1” ($S(\Omega)$)[19] - сила приложена к поверхности покрытия – $F = P$, $F' = P$, ищем смещение поверхности покрытия ($x = x_1$).

Симметричная задача ($F = 0$,$F' = P$)

Флуктуации определяются для x – усреднённого изменения толщины и записываемого в виде

$$x_s = \left\langle \int \epsilon'_{zz} dz \right\rangle_S = \int'_V \epsilon'_{zz} \frac{2e^{-\frac{2r^2}{w^2}}}{\pi w^2} d^3 r. \tag{0.3.6}$$

Получим

$$\alpha_\epsilon = \frac{x_s}{P} = d\frac{F'Y(1+\nu')(1-2\nu') - FY'\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 PYY'(1-\nu')}, \tag{0.3.7}$$

и, наконец, для данной задачи

$$\alpha_s = \frac{x_s}{P} = d\frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{\pi w^2 Y'(1-\nu')}. \tag{0.3.8}$$

Антисимметричная задача “0” ($F = P$,$F' = 0$):

Флуктуации определяются для x – усреднённого смещения границы подложки

$$x_0 = \langle u_z(z=0) \rangle_S = \int_S u_z(z=0) \frac{2e^{-\frac{2r^2}{w^2}}}{\pi w^2} d^2 r. \tag{0.3.9}$$

Получим

$$\alpha_{a1} = \frac{1}{P} \int_0^\infty \frac{\sqrt{2\pi} F(\lambda + 2\mu)}{2(\lambda+\mu)\mu w} e^{-\frac{r^2}{w^2}} I_0 \left(\frac{r^2}{w^2} \right) r dr \tag{0.3.10}$$

$$= \frac{F(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} w P Y} \tag{0.3.11}$$

Заметим, что ответ не зависит от F' и других параметров покрытия, что говорит о неполноте решения задачи (упомянутый в основной части обратный шаг последовательного приближения).

П.3.1. Энергетическое ФДТ и пропущенный шаг решения

ФДТ может быть сформулировано через рассеянную энергию. Результаты, полученные через оба подхода должны совпадать, противное означает неверный выбор сопряжённых обобщённых координат или неверное решение задачи.

$$S(f)_x = \frac{2kT}{\pi f} \frac{2U_{diss}}{P^2}. \tag{0.3.12}$$

Введём эмпирические углы потерь:

$$U_{diss} := U\phi_U + U'\phi_{U'}, \tag{0.3.13}$$

и рассчитаем энергии по формулам.

$$U = \int_V (\epsilon_{rr}\sigma_{rr} + \epsilon_{\varphi\varphi}\sigma_{\varphi\varphi} + \epsilon_{zz}\sigma_{zz}) d^3 r \tag{0.3.14}$$

$$U' = \int_{V'} (\epsilon'_{rr}\sigma'_{rr} + \epsilon'_{\varphi\varphi}\sigma'_{\varphi\varphi} + \epsilon'_{zz}\sigma'_{zz}) d^3 r \tag{0.3.15}$$

Тогда

1. В симметричном случае результаты совпадут.
2. В антисимметричной задаче “0” результат по энергии будет больше на $S^b(\Omega)$.
3. В антисимметричной задаче “1” результат по энергии будет больше на $S^b(\Omega)$.

Это следствие того, что не совершён обратный шаг последовательного приближения, тоесть не учитывается влияние слоя на подложку. Результатом этого влияния является её дополнительный выгиб. После совершения обратного шага должно получиться следующее:

$$\alpha_\epsilon = d\frac{F'Y(1+\nu')(1-2\nu') - FY'\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 PYY'(1-\nu')} \tag{0.3.16}$$

$$\alpha_b = \frac{F(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} wPY} - u_{BA} \tag{0.3.17}$$

$$\begin{aligned} 2U =& \frac{F^2(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} wY}\phi - U_{BA}\phi \\ &+ F'^2 d\frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{\pi w^2 Y'(1-\nu')}\phi' + F^2 d\frac{Y'(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}{\pi w^2 Y^2(1-\nu'^2)}\phi' \end{aligned} \tag{0.3.18}$$

Так же должны выполняться следующие соображения: пусть у нас есть полубесконечная подложка. Напылим на неё слой того же материала. В результате получим всё то же полубесконечное пространство и $S(\Omega) = 0$. Теперь предположим, что потери в кварцевом слое отличаются от потерь в кварцевой подложке. Тогда, очевидно получим шум в виде $S(\Omega) = \xi_j^{BA} d_j(\phi_c - \phi_s)$, где ϕ_s - потери в подложке. Теперь положим потери напылённого слоя равными нолю. Тогда отрицательный знак $S(\Omega) = -\xi_j^{BA} d_j \phi_s$ и присутствие в нём потерь подложки связан с тем, что из-за верхнего слоя смещение шумящей границы затруднено и шум подложки заглушается (здесь стоит вспомнить, что $S(\Omega)$ – всего лишь часть полного шума, относящаяся к покрытию и должна быть далее сложена с другими шумами и шумом подложки, в частности). Если взять

$$u'_{BA} = 2d\frac{F'\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 PY(1-\nu')}, \tag{0.3.19}$$

$$u_{BA} = d\frac{FY'(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}{\pi w^2 Y^2(1-\nu'^2)} - d\frac{F'\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 PY(1-\nu')}, \tag{0.3.20}$$

$$U_{BA} = 2d\frac{FY'(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}{\pi w^2 Y^2(1-\nu'^2)} + 2d\frac{F'\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 PY(1-\nu')}, \tag{0.3.21}$$

и используя $Y = Ye^{-i\phi}$ получим выполнение всех логических требований и

$$\frac{S^t\pi f}{2k_BT} = d\frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{\pi w^2 Y'(1-\nu')}\phi' - d\frac{\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 Y(1-\nu')}2\phi, \tag{0.3.22}$$

$$\frac{S^b\pi f}{2k_BT} = \frac{(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} wY}\phi + d\frac{Y'(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}{\pi w^2 Y^2(1-\nu'^2)}(\phi' - 2\phi), \tag{0.3.23}$$

$$\begin{aligned} \frac{S\pi f}{2k_BT} =& \frac{(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} wY}\phi + d\frac{(1+\nu')(1-2\nu')}{\pi w^2 Y'(1-\nu')}\phi' - d\frac{\nu'(1+\nu)(1-2\nu)}{\pi w^2 Y(1-\nu')}2\phi, \\ &+ d\frac{Y'(1+\nu)^2(1-2\nu)^2}{\pi w^2 Y^2(1-\nu'^2)}(\phi' - 2\phi). \end{aligned} \tag{0.3.24}$$

Первый член последних формул $\frac{(1-\nu^2)}{\sqrt{\pi} wY}\phi$ обычно отделяют, и называют шумом подложки. Тогда, пренебрегая ϕ по сравнению с ϕ' получим формулу (1.2.48).

П.4. Учёт фотоупругости

Здесь будут получены формулы интерференционной части шума с учётом фотоупругости. Допустим, в результате шумов, толщины покрытия изменились. Тогда это можно учесть в изменении набега фаз в (0.1.6), введя $\phi_i \to \phi_i + 2k_0\delta n_i d_i - 2k_0 n_i \delta d_i = \phi_i + \Delta_i$. Так же нужно переписать $\eta_i \to \eta_i(1+\delta\eta_i)$. Тогда

$$\Gamma`_1 = \frac{Z_0 - \eta_1(1+\delta\eta_1)}{Z_0 + \eta_1(1+\delta\eta_1)} = \Gamma_1\left(1 - \frac{2Z_0\eta_1}{Z_0^2 - \eta_1^2}\delta\eta_1\right) \tag{0.4.1}$$

$$\Gamma`(-d_1+0) = \Gamma`_1 e^{i\phi_1 + i\Delta_1} = \Gamma_1 e^{i\phi_1}(1 - f_1\delta\eta_1)(1+i\Delta_1) = \Gamma_1 e^{i\phi_1}(1 - f_1\delta\eta_1 + i\Delta_1) \tag{0.4.2}$$

$$\begin{aligned} Z`_1 &= \eta_1 \frac{1+\Gamma(-d_1+0)}{1-\Gamma(-d_1+0)} = \eta_1 \frac{1+\Gamma_1 e^{i\phi_1}(1+i\Delta_1 - f_1\delta\eta_1)}{1-\Gamma_1 e^{i\phi_1}(1+i\Delta_1 - f_1\delta\eta_1)} = \\ &= Z_1\left(1 + \frac{2\Gamma_1 e^{i\phi_1}}{1-\Gamma_1^2 e^{i2\phi_1}}(i\Delta - f_1\delta\eta_1)\right)(1+\delta\eta_1) = \\ &= Z_1(1 + iz_1\Delta_1 - z_1 f_1\delta\eta_1 + \delta\eta_1) = Z_1(1 + iz_1\Delta_1 + z_1\mu_1\delta\eta_1) \end{aligned} \tag{0.4.3}$$

$$\begin{aligned} \Gamma`_2 &= \frac{Z`_1 - \eta_2}{Z`_1 + \eta_2} = \frac{Z_1\left(1 + (iz_1\Delta_1 + z_1\mu_1\delta\eta_1)\right) - \eta_2(1+\delta\eta_2)}{Z_1\left(1 + (iz_1\Delta_1 + z_1\mu_1\delta\eta_1)\right) + \eta_2(1+\delta\eta_2)} = \\ &= \Gamma_2\left(1 + \frac{2\eta_2 Z_1}{Z_1^2 - \eta_2^2}(iz_1\Delta_1 + z_1\mu_1\delta\eta_1) - \frac{2\eta_2 Z_1}{Z_1^2 - \eta_2^2}\delta\eta_2\right) = \\ &= \Gamma_2(1 + g_2 i\Delta_1 + g_2\mu_1\delta\eta_1 - f_2\delta\eta_2) \end{aligned} \tag{0.4.4}$$

Здесь мы использовали предположение, что $|z_1(i+\mu_i)\Delta_1| << 1$, $\gamma_2\Delta_2 << 1$.

$$\begin{aligned} Z`_2 &= \eta_2 \frac{1+\Gamma`_2 e^{i\phi_2}(1+i\Delta_2)}{1-\Gamma`_2 e^{i\phi_2}(1+i\Delta_2)} = \\ &= \eta_2 \frac{1+\Gamma_2 e^{i\phi_2}(1 + g_2 i\Delta_1 + g_2\mu_1\delta\eta_1 - f_2\delta\eta_2)(1+i\Delta_2)}{1-\Gamma_2 e^{i\phi_2}(1 + g_2 i\Delta_1 + g_2\mu_1\delta\eta_1 - f_2\delta\eta_2)(1+i\Delta_2)}(1+\delta\eta_2) = \\ &= Z_2\left(1 + \frac{2\Gamma_2 e^{i\phi_2}}{1-\Gamma_2^2 e^{i2\phi_2}}(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1 + f_2\mu_1\delta\eta_1 - f_2\delta\eta_2) + \delta\eta_2\right) = \\ &= Z_2\left(1 + iz_2(\Delta_2 + g_2\Delta_1) + z_2 g_2\mu_1\delta\eta_1 - z_2 f_2\delta\eta_2 + \delta\eta_2\right) \end{aligned} \tag{0.4.5}$$

Здесь мы использовали, что $g_2 i\Delta_1 + g_2\mu_1\delta\eta_1 + f_2\nu_2\delta\eta_2 + i\Delta_2 << 1, \quad g_2\Delta_1\Delta_2 \approx 0$

$$\begin{aligned} \Gamma`_3 &= \frac{Z`_2 - \eta_3}{Z`_2 + \eta_3} = \frac{Z_2\left(1 + z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) - \eta_3(1+\gamma_3\Delta_3)}{Z_2\left(1 + z_2(i\Delta_2 + g_2 i\Delta_1)\right) + \eta_3(1+\gamma_3\Delta_3)} = \\ &= \Gamma_3\left(1 + \frac{2\eta_3 Z_2}{Z_2^2 - \eta_3^2}\left(iz_2(\Delta_2 + g_2\Delta_1) + z_2 g_2\mu_1\delta\eta_1 + z_2\mu_2\delta\eta_2 - \delta\eta_3\right)\right) = \\ &= \Gamma_3(1 + g_3 i\Delta_2 + g_3 g_2 i\Delta_1 + g_3 g_2\mu_1\delta\eta_1 + g_3\mu_2\delta\eta_2 - f_3\delta\eta_3) \end{aligned} \tag{0.4.6}$$

Итого получим формулы для z_k, f_k, g_k останутся неизменными, но произойдёт очередная добавка:

$$\mu_k = \frac{1}{z_k} - f_k; \tag{0.4.7}$$

$$\Gamma`_i = \Gamma_i \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i} g_k (I\Delta_j + \mu_j \delta\eta_j) + f_i \delta\eta_i \right) \tag{0.4.8}$$

$$Z`_i = Z_i \left(1 + z_i \left((I\Delta_i + \mu_i \delta\eta_i) + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i} g_k (I\Delta_j + \mu_j \delta\eta_j) \right) \right) \tag{0.4.9}$$

где I обозначает мнимую единицу. Так как мы рассматриваем фотоупругость как механизм возмущения показателя преломления, то $\delta\eta_j = -\frac{\delta n_j}{n_j} = -\frac{n_j^2 p_j}{2}\delta d_j = \gamma_j \Delta_j$, и получим

$$\mu_k = \gamma_k \left(\frac{1}{z_k} - f_k \right); \quad \gamma_k = -\frac{n_k^2 p_k}{\phi_k (2 - n_k^2 p_k)} \tag{0.4.10}$$

$$\Gamma`_i = \Gamma_i \left(1 + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i} g_k (I + \mu_j)\Delta_j + f_i \gamma_i \Delta_i \right) \tag{0.4.11}$$

$$Z`_i = Z_i \left(1 + z_i \left((I + \mu_i)\Delta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \prod_{k=j+1}^{i} g_k (I + \mu_j)\Delta_j \right) \right) \tag{0.4.12}$$

или рекурентно

$$\Gamma`_{i+1} = \Gamma_{i+1} \left( 1 + g_{i+1} (\Gamma`_i / \Gamma_i - 1 + (I + \mu_i)\Delta_i) \right) = \Gamma_{i+1} \left(1 + f_{i+1} (Z`_i / Z_i - 1) \right) \tag{0.4.13}$$

$$\begin{aligned} Z`_{i+1} &= Z_{i+1} \left( 1 + z_{i+1} (\Gamma`_{i+1} / \Gamma_{i+1} - 1 + (I + \mu_i)\Delta_{i+1}) \right) \\ &= Z_{i+1} \left(1 + z_{i+1} (f_{i+1} (Z`_i / Z_i - 1) + (I + \mu_i)\Delta_{i+1}) \right) \end{aligned} \tag{0.4.14}$$

Так как для $\lambda/4$-отражателя справедливо (0.2.14), то можно записать

$$\mu_k = \frac{\gamma_k}{z_k} (-\nu_k + 1) = \frac{\gamma_k}{z_k} \frac{2\eta_k^2}{(Z_{k-1}^2 - \eta_k^2)} = \gamma_k \frac{f_k}{z_k} \frac{\eta_k}{Z_{k-1}} \tag{0.4.15}$$

Соответственно

$$Z`_N = Z_N \left(1 + i(-1)^N \sum_{j=1}^{N} \frac{\eta_0^{2(j-1)} \eta_s^2 - \eta_1^{2j}}{2\eta_1^j \eta_s \eta_0^{j-1}} \Delta_j + \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \gamma_j f_j \frac{Z_j}{\eta_j} \Delta_j \right) \tag{0.4.16}$$

$$\Gamma`_{N+e} = \Gamma_{N+e} \left(1 + i f_{N+e} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} z_j \Delta_j + \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} f_{N+c} \gamma_j f_j \frac{Z_j}{\eta_j} \Delta_j \right) \tag{0.4.17}$$

где член $f_{N+e}\nu_{N+e}\gamma_{N+e}\Delta_{N+e}$ отбросим, считая что флуктуации среды, заполняющей плечо интерферометра, малы и не приводят к изменению её показателя преломления,

$$f_{N+e} = \frac{2\eta_e Z_N}{Z_N^2 - \eta_e^2} \tag{0.4.18}$$

Так же как и ранее, мнимая часть того, что является добавком к единице, будет добавочным сдвигом фаз при отражении от шумящего многослойного покрытия, а действительная - дефектом модуля отражения:

$$\delta\phi_{Int} = \sum_{j=1}^{N} f_{N+e}(-1)^{N-j} z_j \Delta_j, \quad \delta\Gamma_{Int} = \sum (-1)^{N-j} f_{N+c}\gamma_j f_j \frac{Z_j}{\eta_j}\Delta_j \tag{0.4.19}$$

Но $f_{N+c}\gamma_j f_j \frac{Z_j}{\eta_j} \to 0$ в приближении „хорошего“ зеркала ($Z_N \to 0$ или ∞), так как $f_j Z_j = \frac{2\eta_j^3}{Z_{j-1}^2 - \eta_j^2} < \infty$ и $f_{N+c} \to 0$. Таким образом, результат совпадает с той формулой, что мы получили ранее (1.2.32), только с изменённым Δ_j. Так происходит из-за того, что в четвертьволновом отражателе все невозмущённые импедансы действительны.

П.4.1. Спектральная плотность при учёте фотоупругости

Рассмотрим влияние фотоупругости в четвертьволновом отражателе на фазу излучения. Для этого достаточно в (1.2.32) положить $\Delta_j = 2k_0 n_j \delta d_j + d_j \delta n_j = 2k_0 n_j \delta d_j \left(1 - \frac{n_j^2}{2} p_{13}\right) = 2k_0 n_j \delta d_j \epsilon_j$. тогда мы получим выражение, аналогичное (1.2.37), но с изменёнными показателями преломления (только там, где они входят явно). Тогда не сложно переписать формулы для дисперсий шума:

- $Z_{2N} \to 0 \quad (n_1 < n_0)$

$$\begin{aligned} S_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [\frac{n_0^4 \epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4} - 2\frac{n_0^2 \epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [\frac{n_1^4 \epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4} - 2\frac{n_1^2 \epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2} + N] \end{aligned} \tag{0.4.20}$$

- $Z_{2N} \to \infty \quad (n_1 > n_0)$

$$\begin{aligned} S_\phi^2 =& 4k_0^2 S_{d0}^2 n_e^2 [-\frac{n_1^4}{n_e^4}\frac{n_0^4 \epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4} + \frac{2n_1^2}{n_e^2}\frac{n_0^2 \epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2} + N] + \\ & 4k_0^2 S_{d1}^2 n_e^2 [-\frac{n_1^4}{n_e^4}\frac{n_0^4 \epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4} + \frac{2n_1^2}{n_e^2}\frac{n_0^2 \epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2} + N] \end{aligned} \tag{0.4.21}$$

Теперь для $2N+1$ слоя

- $Z_{2N} \to 0 \quad (n_1 < n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1} \to \infty$)

$$\begin{aligned} S1_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [\frac{n_1^4}{n_e^4}\frac{n_0^4 \epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4} - 2\frac{n_0^2 \epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_1^2}{n_e^2} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [\frac{n_1^4}{n_e^4}\frac{n_0^4 \epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4} - 2\frac{n_0^2 \epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_1^2}{n_e^2} + N + 1] \end{aligned} \tag{0.4.22}$$

- $Z_{2N} \to \infty \quad (n_1 > n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1} \to 0$)

$$\begin{aligned} S1_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [-\frac{n_0^4 \epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4} + 2\frac{n_0^2 \epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [-\frac{n_1^4 \epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4} + 2\frac{n_1^2 \epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2} + N + 1] \end{aligned} \tag{0.4.23}$$

П.4.2. Учёт фотоупругости с корректиующим слоем

Импеданс корректирующего слоя не обязательно действителен. Следовательно формула для шума уже не совпадёт с (0.2.55) после замены Δ_j. В шуме появятся члены из второй суммы (0.4.11):

$$\begin{aligned} \delta\phi = & 2k_0 \sum_{j=1}^{N} \left[(-1)^{N-j} \operatorname{Re}(g_{N+c+e}) f_{N+c} z_j n_j \epsilon_j - n_e\right] \delta d_j \\ & + 2k_0 \sum_{j=1}^{N} (-1)^{N-j} \operatorname{Im}(g_{N+c+e}) f_{N+c} \gamma_j f_j \frac{Z_j}{\eta_j} n_j \epsilon_j \delta d_j \\ & + 2k_0 \left[\operatorname{Im}(g_{N+c+e}(i + \mu_{N+c})) n_c \epsilon_c - n_e\right] \delta d_{N+c} \end{aligned} \tag{0.4.24}$$

Первая сумма совпадает с тем, что было раньше, с точностью до добавления ϵ_j. Для оценки второй суммы рассчитаем

$$\operatorname{Im}[g_{N+c+e}] = \frac{2\eta_e \eta_c (Z_N^2 - \eta_c^2) 2\eta_c Z_N \sin(\phi_c)}{((\eta_c^2 - \eta_e^2)(\eta_c^2 + Z_N^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2)(\eta_c^2 - Z_N^2))^2 + 4\eta_c^2 Z_N^2 (\eta_c^2 - \eta_e^2)^2 \sin^2\phi_c}$$

В пределе "хорошего"зеркала получим:

- $Z_N \to 0$

$$\operatorname{Im}[g_{N+c+e}] = \frac{4\eta_e Z_N \sin(\phi_c)}{((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2))^2} \propto Z_N = 0 \tag{0.4.25}$$

- $Z_N \to \infty$

$$\operatorname{Im}[g_{N+c+e}] = \frac{4\eta_e \eta_c^2 \sin(\phi_c)}{((\eta_c^2 - \eta_e^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2))^2 Z_N} \propto \frac{1}{Z_N} = 0 \tag{0.4.26}$$

Таким образом, так как $f_j Z_j = \frac{2\eta_j^3}{Z_{j-1}^2 - \eta_j^2} < \infty$ и $f_{N+c} \to 0$, то вся вторая сумма равна нолю. Выходит по сравнению с (0.2.55) изменится только $S_c^{‘2}$

$$S_c^{‘2} = 4k_0^2 \left[\operatorname{Re}(g_{N+c+e}) n_c \epsilon_c + \operatorname{Im}(g_{N+c+e}) f_{N+c} \nu_{N+c} \gamma_c n_c \epsilon_c + \operatorname{Im}(f_{N+c+e}) \gamma_c n_c \epsilon_c - n_e\right]^2 S_c^2 \tag{0.4.27}$$

и в пределе

- $Z_N \to 0$

$$\mathrm{Im}[f_{N+c+e}] = \frac{-2n_e n_c \sin(\phi_c)}{(n_e^2 - n_c^2)\cos\phi_c - (\eta_c^2 + \eta_e^2)} = \mathrm{Re}(g_{N+c+e})\sin(\phi_c) \tag{0.4.28}$$

$$S{`}_c^2 = 4k_0^2 \left[\mathrm{Re}(g_{N+c+e})(1 + \gamma_c \sin(\phi_c))n_c\epsilon_c - n_e\right]^2 S_c^2 \tag{0.4.29}$$

- $Z_N \to \infty$

$$\mathrm{Im}[f_{N+c+e}] = \frac{-2n_e n_c \sin(\phi_c)}{(n_e^2 - n_c^2)\cos\phi_c + (\eta_c^2 + \eta_e^2)} = -\mathrm{Re}(g_{N+c+e})\sin(\phi_c) \tag{0.4.30}$$

$$S{`}_c^2 = 4k_0^2 \left[\mathrm{Re}(g_{N+c+e})(1 - \gamma_c \sin(\phi_c))n_c\epsilon_c - n_e\right]^2 S_c^2 \tag{0.4.31}$$

Тогда

- $Z_{2N} \to 0 \quad (n_1 < n_0)$

$$\begin{aligned} S_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [\frac{n_0^4\epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_c^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2} - 2\frac{n_0^2\epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_c\,\mathrm{Re}(\beta)}{n_e} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [\frac{n_1^4\epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_c^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2} - 2\frac{n_1^2\epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_c\,\mathrm{Re}(\beta)}{n_e} + N] + S{`}_c^2 \end{aligned} \tag{0.4.32}$$

- $Z_{2N} \to \infty \quad (n_1 > n_0)$

$$\begin{aligned} S_\phi^2 =& 4k_0^2 S_{d0}^2 n_e^2 [-\mathrm{Re}(\beta)^2 \frac{n_1^4}{n_e^2 n_c^2}\frac{n_0^4\epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4} + 2\,\mathrm{Re}(\beta)\frac{n_1^2}{n_e n_c}\frac{n_0^2\epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2} + N] + \\ & 4k_0^2 S_{d1}^2 n_e^2 [-\mathrm{Re}(\beta)^2 \frac{n_1^4}{n_e^2 n_c^2}\frac{n_0^4\epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4} + 2\,\mathrm{Re}(\beta)\frac{n_1^2}{n_e n_c}\frac{n_0^2\epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2} + N] + S{`}_c^2 \end{aligned} \tag{0.4.33}$$

Для $2N + 1$

- $Z_{2N} \to 0 \quad (n_1 < n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1} \to \infty$)

$$\begin{aligned} S1_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [\frac{n_0^4\epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_1^4\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2 n_c^2} - 2\frac{n_0^2\epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_1^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e n_c} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [\frac{n_0^4\epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_1^4\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2 n_c^2} - 2\frac{n_0^2\epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_1^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e n_c} + N + 1] + S{`}_c^2 \end{aligned} \tag{0.4.34}$$

- $Z_{2N} \to \infty \quad (n_1 > n_0)$ (тоесть $Z_{2N+1} \to 0$)

$$\begin{aligned} S1_\phi^2 =& 4k_0^2 n_e^2 S_{d0}^2 [-\frac{n_0^4\epsilon_0^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_c^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2} + 2\frac{n_0^2\epsilon_0}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_c\,\mathrm{Re}(\beta)}{n_e} + N] + \\ & 4k_0^2 n_e^2 S_{d1}^2 [-\frac{n_1^4\epsilon_1^2}{n_0^4 - n_1^4}\frac{n_c^2\,\mathrm{Re}(\beta)^2}{n_e^2} + 2\frac{n_1^2\epsilon_1}{n_0^2 - n_1^2}\frac{n_c\,\mathrm{Re}(\beta)}{n_e} + N + 1] + S{`}_c^2 \end{aligned} \tag{0.4.35}$$

П.5. К расчёту оптимального покрытия

Используем метод импедансов получим скачок коэффициента отражения на границе:

$$\Gamma(z-0) = \frac{\eta(z+0)(1+\Gamma(z+0)) - \eta(z-0)(1-\Gamma(z+0))}{\eta(z+0)(1+\Gamma(z+0)) + \eta(z-0)(1-\Gamma(z+0))} = \tag{0.5.1}$$

$$= \frac{g(z)+\Gamma(z+0)}{1+g(z)\Gamma(z+0)} \tag{0.5.2}$$

$$g(z) = \frac{\eta(z+0)-\eta(z-0)}{\eta(z+0)+\eta(z-0)} \approx \frac{n(z-0)-n(z+0)}{n(z-0)+n(z+0)} \tag{0.5.3}$$

Теперь рассмотрим скачок коэффициента отажения на паре слоёв, т.е. две последовательные границы, обозначая $\Gamma_{in} = \Gamma_{0'} = \Gamma(z+0)$ - входной к.о., $\Gamma_1 = \Gamma(z-0)$ - промежуточный к.о., $\Gamma_{out} = \Gamma_2 = \Gamma(z-d_1-0)$ - выходной к.о., $\Gamma_{in+1} = \Gamma_{2'} = \Gamma(z-d_1-d_2-0)$ - к.о., который будет входным для следующей пары:

$$\Gamma_1 = \frac{g_{10}+\Gamma_{0'}}{1+g_{10}\Gamma_{0'}} \tag{0.5.4}$$

$$\Gamma_2 = \frac{g_{21}+\Gamma_1 e^{-i\varphi_1}}{1+g_{21}\Gamma_1 e^{-i\varphi_1}} \tag{0.5.5}$$

$$\Gamma_{2'} = \Gamma_2 e^{-i\varphi_2} \tag{0.5.6}$$

где $g_{ij} = \frac{n_i-n_j}{n_i+n_j}$. Тогда

$$|\Gamma_{in+1}|^2 = |\Gamma_{out}|^2 = \left|\frac{(\Gamma_0 e^{-i\varphi_0}+g)e^{-i\varphi_1} - g(1+g\Gamma_0 e^{-i\varphi_0})}{-g(\Gamma_0 e^{-i\varphi_0}+g)e^{-i\varphi_1} + (1+g\Gamma_0 e^{-i\varphi_0})}\right|^2 = \frac{G_1+B(\varphi_0,\varphi_1)}{G_2+B(\varphi_0,\varphi_1)} \tag{0.5.7}$$

$$G_1 = g_{10}^2 + g_{21}^2 + (1+g_{10}^2 g_{21}^2)\Gamma_0^2 \tag{0.5.8}$$

$$G_2 = 1 + (g_{10}^2+g_{21}^2)\Gamma_0^2 + g_{10}^2 g_{21}^2 \tag{0.5.9}$$

$$\begin{aligned} B(\varphi_0,\varphi_1) = {} & 2g_{10}g_{21}(1+\Gamma_0^2)\cos(\varphi_1) + 2g_{10}\Gamma_0(1+g_{21}^2)\cos(\varphi_0) \\ & + 2g_{21}\Gamma_0(\cos(\varphi_0+\varphi_1) + g_{10}^2\cos(\varphi_0-\varphi_1)) \end{aligned} \tag{0.5.10}$$

Здесь и далее $\Gamma_{0'} \to \Gamma_0 e^{-i\varphi_0}$. Обозначения выбраны так, что символы фазы φ_i - положительные числа. Для чередующихся слоев n_1 и n_2

$$G_1 = \Gamma_0^2 g^4 + 2g^2 + \Gamma_0^2 \tag{0.5.11}$$

$$G_2 = g^4 + 2g^2\Gamma_0^2 + 1 \tag{0.5.12}$$

$$\begin{aligned} B(\varphi_0,\varphi_1) = {} & -2g^2(1+\Gamma_0^2)\cos(\varphi_1) + 2g\Gamma_0(1+g^2)\cos(\varphi_0) \\ & - 2g\Gamma_0(\cos(\varphi_0+\varphi_1) + g^2\cos(\varphi_0-\varphi_1)) \end{aligned} \tag{0.5.13}$$

П.5.1. Оптимизация отражения

Оптимизируем падение отражения по входной фазе

$$\frac{\partial\,|\Gamma_{out}|^2}{\partial\varphi_0} = \frac{(G_2+B)B' - (G_1+B)B'}{G_2+B} = B'\frac{G_2-G_1}{(G_2+B)} = 0 \tag{0.5.14}$$

$$(1+g^2)\sin(\varphi_0) = \sin(\varphi_0+\varphi_1) + g^2\sin(\varphi_0-\varphi_1)$$
$$(1+g^2)\sin(\varphi_0)(1-\cos(\varphi_1)) = (1-g^2)\sin(\varphi_1)\cos(\varphi_0)$$

$$\tan(\varphi_0) = \frac{1-g^2}{1+g^2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1}{2} \tag{0.5.15}$$

Учтём, что $g = 0.17 << 1$.

$$\boxed{\varphi_0 \approx \frac{\pi-\varphi_1}{2} - \sin(\varphi_1)g^2 + (\pi m)} \tag{0.5.16}$$

Отметим, что при $\varphi_1 \in [0; 2\pi]$ имеем $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. И оптимизованный к.о.

$$\boxed{|\Gamma_{out}|^2 = \left(\frac{g\sqrt{2(1-\cos(\varphi_1))} \pm \Gamma_0\sqrt{1-2g^2\cos(\varphi_1)+g^4}}{g\Gamma_0\sqrt{2(1-\cos(\varphi_1))} \pm \sqrt{1-2g^2\cos(\varphi_1)+g^4}}\right)^2,} \tag{0.5.17}$$

где „$-$“ для $\varphi_0 \in [\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ ($\cos(\varphi_0) < 0$), и „$+$“ в остальной области ($\cos(\varphi_0) > 0$). Таким образом „$+$“ - при чётных m. В результате для параметров А Виллара $\frac{277.7-265.68}{277.7} * 100\% = 4.3\%$. Его параметры: 0.618, 1.385; 0.557, 1.623

П.5.2. Фазовое соотношение

Для оптимальности пар слоёв необходимо поддерживать входные фазы следующих пар при помощи толщин вторых слоёв предыдущих:

$$\varphi_{2_j} = \varphi_{0_{j+1}}(\varphi_{1_{j+1}}) + \arg\Gamma_{2_j} \tag{0.5.18}$$

Подробнее в приложении П.5.4.:

$$\operatorname{tg}[\arg\Gamma_2] = \frac{(1-g^2)(-(\Gamma_0^2+1)g\sin(\varphi_1) + g^2\Gamma_0\sin(\varphi_0-\varphi_1) - \Gamma_0\sin(\varphi_0+\varphi_1))}{(1+g^2)((\Gamma_0^2+1)g(\cos(\varphi_1)-1) + \Gamma_0\cos(\varphi_1+\varphi_0) + g^2\Gamma_0\cos(\varphi_1-\varphi_0)) - 4g^2\Gamma_0\cos(\varphi_0)} \tag{0.5.19}$$

Можно замеить, что так как $g = 0.174$, то

$$\arg\Gamma_2 = -\varphi_0 - \varphi_1 - 2\sin(\varphi_1)g^2 + (\pi p) \tag{0.5.20}$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2} - (\pi m) - \sin(\varphi_1)g^2 + (\pi p) \tag{0.5.21}$$

Чётность p фиксирована и определяется знаком действительной части Γ_2 (см. рис 20 и приложение П.5.4.). Таким образом при чётном m, p - чётное.

$$\varphi_{2_j} = \varphi_{0_{j+1}} - \varphi_{0_j} - \varphi_{1_j} - 2\sin(\varphi_{1_j})g_j^2 + (\pi p) \tag{0.5.22}$$

$$= -\frac{\varphi_{1_{j+1}} + \varphi_{1_j}}{2} - g_{j+1}^2 \sin(\varphi_{1_{j+1}}) - g_j^2 \sin(\varphi_{1_j}) + (\pi p) \tag{0.5.23}$$

$$\boxed{\varphi_2 = -\varphi_1 - 2g^2 \sin(\varphi_1) + (\pi p)} \tag{0.5.24}$$

Но так как g мало, а φ_1 порядка π, то $n \geq 1$ в (0.5.24) для обеспечения неотрицательной толщины слоя. Так как для работы зеркала необходимо $\varphi_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (т.е. чётное m), то $\varphi_2 = 2\pi - \varphi_1 - 2\sin(\varphi_1)g^2$

П.5.3. К разложению коэффициента пропускания

Пусть зеркало содержит $2E + 2N$ слоёв ($2E$ слоёв подгоняют под условие упрощения). Представим к.о. в виде $|\Gamma_{2N+2E}| = 1 - \alpha^N \epsilon$.

$$\begin{aligned}|\Gamma_{2N+2E+e}|^2 &= \left|\frac{g_e + \Gamma_{2N+2E}e^{-i\varphi_c}}{1 + g_e\Gamma_{2N+2E}e^{-i\varphi_c}}\right|^2 \\ &= \frac{g_e^2 + 2g_e\left|\Gamma_{2N+2E}\right|\cos(\varphi) + \left|\Gamma_{2N+2E}\right|^2}{1 + 2g_e\left|\Gamma_{2N+2E}\right|\cos(\varphi) + g_e^2\left|\Gamma_{2N+2E}\right|^2} \\ &= 1 - 2\frac{1 - g_e^2}{1 + 2g_e\cos(\varphi) + g_e^2}\alpha^N\epsilon,\end{aligned} \tag{0.5.25}$$

где $g_e = \frac{n_e - n_{2N}}{n_e + n_{2N}}$ - переход во внешнюю среду, $\varphi = \varphi_c + \frac{\pi + \varphi_1}{2} + g^2\sin(\varphi_1)$. Тогда коэффициент пропускания по мощности

$$\boxed{T = \beta\alpha^N\epsilon} \tag{0.5.26}$$

$$\beta = 2\frac{1 - g_e^2}{1 + 2g_e\cos(\varphi) + g_e^2} \tag{0.5.27}$$

Обозначим отдельно числитель и знаменатель дроби (0.5.17) как

$$u(\Gamma) = \left(g\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_1))} \pm \Gamma_0\sqrt{1 - 2g^2\cos(\varphi_1) + g^4}\right)^2 \tag{0.5.28}$$

$$v(\Gamma) = \left(g\Gamma_0\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_1))} \pm \sqrt{1 - 2g^2\cos(\varphi_1) + g^4}\right)^2 \tag{0.5.29}$$

Тогда

$$u|_1 = v|_1 \tag{0.5.30}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'|_1 = \frac{u'v - v'u}{v^2}|_1 = \frac{u' - v'}{v} = 2\alpha \tag{0.5.31}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)''|_1 = \left(\frac{u''}{v} - 2\frac{u'v'}{v^2} - \frac{uv''}{v^2} + 2\frac{uv'^2}{v^3}\right)|_1 =$$

$$= \frac{u'' - v''}{v} - 2\frac{v'}{v}\frac{u' - v'}{v} = 2\alpha\left(1 - 2\frac{v'}{v}\right) \tag{0.5.32}$$

и

$$\alpha = \frac{(1-g^2)^2}{\left(g\sqrt{2(1-\cos(\varphi_1))} \pm \sqrt{1 - 2g^2\cos(\varphi_1) + g^4}\right)^2} \tag{0.5.33}$$

Итого

$$\Gamma = \frac{u}{v} = 1 + 2\alpha\epsilon - \alpha(1-2\alpha)\epsilon^2 \tag{0.5.34}$$

П.5.4. К определению фазы после слоя

Пусть

$$Ze^{i\varphi} = \frac{a + ib}{x + iy} \tag{0.5.35}$$

Тогда

$$Z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{x^2 + y^2}} \tag{0.5.36}$$

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi_\uparrow - \varphi_\downarrow)} \tag{0.5.37}$$

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{bx - ay}{ax + by} \tag{0.5.38}$$

$$\cos(\varphi) = \frac{ax + by}{\sqrt{(x^2 + y^2)(a^2 + b^2)}} \tag{0.5.39}$$

Если $ax + by > 0$ то $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ и т.п.

$$a = \Gamma_0\cos(\varphi_0 + \varphi_1) + g\cos(\varphi_1) - g - g^2\Gamma_0\cos(\varphi_0) \tag{0.5.40}$$

$$b = -\Gamma_0\sin(\varphi_0 + \varphi_1) - g\sin(\varphi_1) + g^2\Gamma_0\sin(\varphi_0) \tag{0.5.41}$$

$$x = -g\Gamma_0\cos(\varphi_0 + \varphi_1) - g^2\cos(\varphi_1) + 1 + g\Gamma_0\cos(\varphi_0) \tag{0.5.42}$$

$$y = g\Gamma_0\sin(\varphi_0 + \varphi_1) + g^2\sin(\varphi_1) - g\Gamma_0\sin(\varphi_0) \tag{0.5.43}$$

$$\arg\Gamma_2 = \operatorname{arctg}\left[\frac{-\Gamma_0\sin(\varphi_0+\varphi_1) - g\sin(\varphi_1) + g^2\Gamma_0\sin(\varphi_0)}{\Gamma_0\cos(\varphi_0+\varphi_1) + g\cos(\varphi_1) - g - g^2\Gamma_0\cos(\varphi_0)}\right] - \\ - \operatorname{arctg}\left[\frac{g\Gamma_0\sin(\varphi_0+\varphi_1) + g^2\sin(\varphi_1) - g\Gamma_0\sin(\varphi_0)}{-g\Gamma_0\cos(\varphi_0+\varphi_1) - g^2\cos(\varphi_1) + 1 + g\Gamma_0\cos(\varphi_0)}\right] \quad (0.5.44)$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{(1-g^2)(-(\Gamma_0^2+1)g\sin(\varphi_1) + g^2\Gamma_0\sin(\varphi_0-\varphi_1) - \Gamma_0\sin(\varphi_0+\varphi_1))}{(1+g^2)((\Gamma_0^2+1)g(\cos(\varphi_1)-1) + \Gamma_0\cos(\varphi_1+\varphi_0) + g^2\Gamma_0\cos(\varphi_1-\varphi_0)) - 4g^2\Gamma_0\cos(\varphi_0)}$$

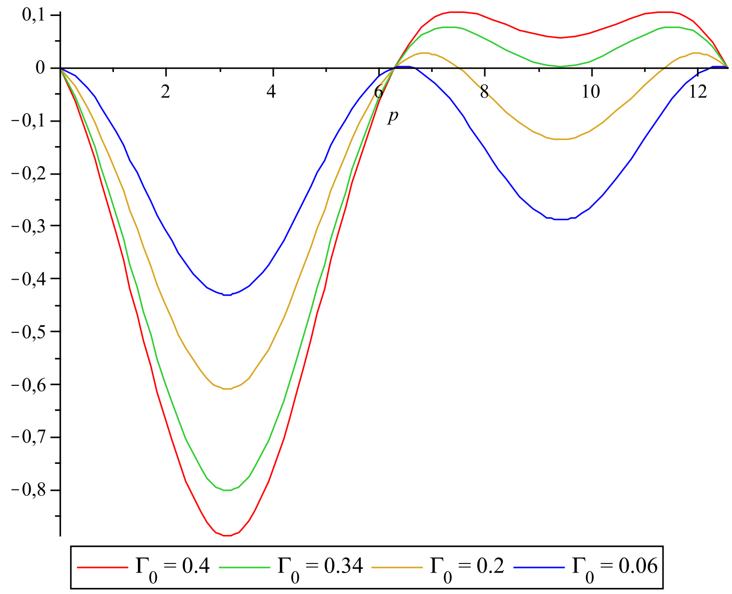

Рис. 20: Знак $\mathrm{Re}[\Gamma_2]$. В областях< 0 в формуле (0.5.20) $\arg\Gamma_2 \in [-3\pi/2; -\pi/2]$. Толщины в $\lambda/4$. В случае m - нечётное, сдвинуть на 2π.

$$\boxed{-\Gamma_0\sin(\varphi_1/2+(\pi m)) + (\Gamma_0^2+1)(\cos(\varphi_1)-1)(g+g^3) - 6\Gamma_0\sin(\varphi_1/2+(\pi m))^3 g^2 > 0} \quad (0.5.45)$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}(x/2)) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\pi/2 - x/2)) = \frac{\pi - x}{2} + (\pi n) \quad (0.5.46)$$

$$\varphi_{0_{g=0}} = \frac{\pi - \varphi_1}{2} + (\pi n) \quad (0.5.47)$$

П.6. К оценке интегралов шума расстеклования

Для расчёта укорачивания стержня и шума необходимо произвести усреднения по объёму отклика на схлопывание пузырька. При этом отклик в случае длинного стержня постоянен и равен отклику полупространства на пузырёк на глубине R, равной радиусу стержня. Таким образом, в обоих случаях вычисления производятся над формулой для отклика (2.1.18), только в разных пределах.

П.6.1. Укорачивание зеркала

Для интеграла (2.1.20), считая эффективный радиус области кристаллизации b малым

$$\begin{aligned}\langle\delta z(t)\rangle =&\lambda\xi V_a t\int_V\int e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}e^{-k^2b^2/4}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}d^3r_j\\ =&\lambda\xi V_a t\int_V\left(\int e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}-b^2\int e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{4}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right)d^3r_j\end{aligned}\qquad(0.6.1)$$

Для первого порядка получим

$$\begin{aligned}I_l(R/w,L/w)=&\int_V\int\frac{1}{w}e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-ik_z z_j}\frac{k_\perp^2}{k^2}J_0(k_\perp\rho)\frac{dk_\perp dk_z}{(2\pi)^2}d^3r_j\\ =&\int_V\int\frac{\pi}{w}e^{-k_\perp^2 w^2/4}e^{-k_\perp z_j}k_\perp J_0(k_\perp\rho)\frac{dk_\perp}{(2\pi)^2}d^3r_j\end{aligned}\qquad(0.6.2)$$

Тогда в случае широкого зеркала ($L=wY\le R$), имеющемся в зеркале LIGO, и усреднения по гауссу получим

$$I_l^{Y<X}(X,Y)=\int_0^\infty\frac{e^{-k^2/4}XJ_0(kX)(1-e^{-kY})}{2k}dk.\qquad(0.6.3)$$

Подставляя в (0.6.2) $\rho=0$ под интеграл по объёму (получим под интегралом результат (2.1.22)) и $z=R$, интегрируя по части цилиндра за глубиной $z=R$ получим добавку к укорачиванию в области неприменимости приближения полупространства

$$I_l^{\mathrm{const}}(X,Y)=X^2(Y-X)\left(1-\sqrt{\pi}X\left(1-\mathrm{erf}(X)\right)e^{X^2}\right)/2\qquad(0.6.4)$$

Итого для оценки смещения длинного зеркала можно использовать $I_l(X,Y)\approx I_l^{Y<X}(X,X)+I_l^{\mathrm{const}}(X,Y)<I_l^{\mathrm{const}}(X,Y+X)$.

Для оценки укорачивания стержня (трубки) так же производится подстановка $\rho=0$ и $z=R$ в (0.6.2). При этом полагается $R\gg w$ и производится разложение в ряд до первого члена, исключая таким образом w. Дальнейшее интегрирование по объёму сведётся к домножению на объём стержня (трубки):

$$\langle\delta z(t)\rangle=\lambda\xi V_a t\frac{V}{4\pi R^2}.\qquad(0.6.5)$$

Здесь $V=\pi R^2L$ для стержня и $V=\pi(R^2-w_e^2)L$ для трубки. Отсюда получается выражение (2.1.23) для нахождения λ. Очевидно так же, что для общности можно так же ввести $I_l^e(X,Y)=Y/4$ для стержня и $I_l^e(X,Y)=(1-1/X^2)Y/4$ для стержня.

П.6.2. Спектральная плотность шума

Для получения квадратур формулы (2.1.21) положим эффективный радиус области кристаллизации b малым и разложим выражение в ряд, как в предыдущем случае.

$$S_{\delta z} =\frac{\lambda}{\omega^2}\xi^2 V_a^2 \int_V \left(\int e^{-k_\perp^2 w^2/4} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2} e^{-k^2 b^2/4}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right)^2 d^3 r_j \tag{0.6.6}$$

$$\begin{aligned}
&=\frac{\lambda}{\omega^2}\xi^2 V_a^2 \int_V \left(\int e^{-k_\perp^2 w^2/4} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} - b^2\int e^{-k_\perp^2 w^2/4} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{4}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\right)^2 d^3 r_j \\
&=\frac{\lambda}{\omega^2}\xi^2 V_a^2 \int_V \Bigg(\int\int e^{-(k_\perp^2+k_\perp^2)w^2/4} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j - i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \\
&\quad -\frac{b^2}{4}\int\int e^{-(k_\perp^2+k_\perp^2)w^2/4} e^{-i\vec{k}\vec{r}_j - i\vec{k}\vec{r}_j}\frac{k_\perp}{k^2}\frac{k_\perp}{k^2}(k^2+k^2)\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\Bigg) d^3 r_j
\end{aligned} \tag{0.6.7}$$

Для первого интеграла получим

$$\begin{aligned}
I_0^S &= \int_V \left(\int e^{-k_\perp^2 w^2/4} e^{-ik_z z_j}\frac{k_\perp^2}{k^2} J_0(k_\perp \rho)\frac{dk_\perp dk_z}{(2\pi)^2}\right)^2 d^3 r_j \\
&= \int_V \left(\int \pi e^{-k_\perp^2 w^2/4} e^{-k_\perp z_j} k_\perp J_0(k_\perp \rho)\frac{dk_\perp}{(2\pi)^2}\right)^2 d^3 r_j \\
&= \int_V \left(\int \pi^2 e^{-(k_\perp^2+k_\perp'^2)w^2/4} e^{-(k_\perp+k'_\perp)z_j} k_\perp k'_\perp J_0(k_\perp \rho) J_0(k'_\perp\rho)\frac{dk_\perp}{(2\pi)^2}\frac{dk'_\perp}{(2\pi)^2}\right) d^3 r_j
\end{aligned} \tag{0.6.8}$$

Для дальнейшего упрощения положим $\vec{K} = \{k_\perp, k'_\perp\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
I_0^S = \int_V\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} &\pi^2 e^{-K^2w^2/4} e^{-K(\cos\phi'+\sin\phi')z_j} K^2 \sin\phi'\cos\phi' J_0(K\rho_j\cos\phi') J_0(K\rho_j\sin\phi') \\
&\frac{KdK}{(2\pi)^2}\frac{d\phi'}{(2\pi)^2} d^3 r_j
\end{aligned} \tag{0.6.9}$$

Теперь проинтегрируем по объёму и получим

$$\begin{aligned}
I_0^S = &\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty \frac{RK\sin(2\phi')}{8\cos(2\phi')(\sin(\phi')+\cos(\phi'))} e^{-\frac{w^2K^2}{4}}(1-e^{-KL(\sin(\phi')+\cos(\phi'))}) \\
&(\cos(\phi')J_1(KR\cos(\phi'))J_0(KR\sin(\phi')) - \sin(\phi')J_1(KR\sin(\phi'))J_0(KR\cos(\phi')))\frac{dKd\phi'}{2\pi}
\end{aligned} \tag{0.6.10}$$

Взять данный интеграл аналитически не представляется возможным.

П.7. К оценке амплитуд модуляции

Препишем ещё раз уравнение (3.2.6)

$$\dot{A}_k = \sum_j (-i\Delta_k\delta_{kj} + i\delta^{\mp}_{\omega_{kj}}\mu_\pm e^{\pm i\omega_{RF}t} - \kappa_{kj})A_j + i\frac{Fc^2}{2\omega}X_k \tag{0.7.1}$$

Заметим, что $\delta^+_{\omega_{kj}}$ всегда идёт с μ_- и наоборот. Поэтому на время уберём $\mu_\pm$ в $\delta^\mp_{\omega_{kj}}$ для упрощения записи. Подставим решение $b_k + a_k^- e^- + a_k^+ e^+$ где $\omega_{RF} t$ в показателях экспоненты опущены для сокращения. Тогда получим

$$\begin{aligned}
-i\omega_{RF} a_k^- e^- + i\omega_{RF} a_k^+ e^+ = &- i\Delta_k(a_k^- e^- + a_k^+ e^+ + b_k) + i\sum_j (a_j^- e^- + a_j^+ e^+ + b_j)(\delta^-_{\omega_{kj}} e^+ + \delta^+_{\omega_{kj}} e^-) \\
&- \sum \kappa_{kj}(a_j^- e^- + a_j^+ e^+ + b_j) + iFX_{kp} = \\
= &- i\Delta_k(a_k^- e^- + a_k^+ e^+ + b_k) + \\
&i\sum_j (\delta^-_{\omega_{kj}} a_j^- + \delta^-_{\omega_{kj}} a_j^+ e^{2+} + \delta^+_{\omega_{kj}} a_j^- e^{2-} + \delta^+_{\omega_{kj}} a_j^+ + b_j(\delta^-_{\omega_{kj}} e^+ + \delta^+_{\omega_{kj}} e^-)) \\
&- \sum \kappa_{kj}(a_j^- e^- + a^+ e^+ + b_j) + iFX_{kp}
\end{aligned} \tag{0.7.2}$$

Так как из одной функции A_j мы сделали несколько, то мы должны будем наложить на $a_j^\pm$ и b_j условия. Применим метод гармонического баланса, сохраняя члены с $e^{\pm 2\omega_{RF}}$ в виде $\mathrm{e}(\pm\omega_{RF})$. Этот член поможет учесть квазистационарный случай, если введённая функция мала на высоких частотах модуляции, и стремится к единице на малых.

$$- i\Delta_k b_k + i\sum(\delta^-_{\omega_{kj}} a_j^- + \delta^+_{\omega_{kj}} a_j^+) - \sum \kappa_{kj} b_j + i\frac{Fc^2}{2\omega} X_{kp} = 0 \tag{0.7.3}$$

$$-i\omega_{RF} a_k^- = -i\Delta_k a_k^- + i\mu_- \sum_j (a_j^- \mathrm{e}(-\omega_{RF}) + b_j)\delta^+_{\omega_{kj}} - \sum \kappa_{kj} a_j^- \tag{0.7.4}$$

$$i\omega_{RF} a_k^+ = -i\Delta_k a_k^+ + i\mu_+ \sum_j (a_j^+ \mathrm{e}(\omega_{RF}) + b_j)\delta^-_{\omega_{kj}} - \sum \kappa_{kj} a_j^+ \tag{0.7.5}$$

Из второго и третьего уравнения получим, восстанавливая $\mu_\pm$ перед $\delta^\mp_{\omega_{kj}}$

$$a_k^\pm = \mu_\pm M_\pm^{-1} \delta^\mp_{\omega_{kj}} b_j \tag{0.7.6}$$

где $M_\pm = \Delta_k \pm \omega_{RF} - \mathrm{e}(\pm\omega_{RF})\mu_\pm \delta^\mp_{\omega_{kj}} - i\kappa_{kj}$. Подставляя в первое, получим

$$b_k = \frac{Fc^2}{2\omega} B^{-1} X_k \tag{0.7.7}$$

где $B = \Delta_k - \mu_+\mu_-(\delta^-_{\omega_{km}} M_-^{-1} \delta^+_{\omega_{nj}} + \delta^+_{\omega_{km}} M_+^{-1} \delta^-_{\omega_{nj}}) - i\kappa_{kj}$. Слагаемые с M малы при малой мощности СВЧ, однако при её повышении приводит к уменьшению (или насыщению [89]) модулированных компонент.

Сравним полученные формулы с квазистационарым случаем, когда $\omega_{RF} \to 0$ (почти постоянное поле). Тогда $2\mu_+ = 2\mu_- = \omega$

$$M_+ = M_- = M = \Delta_k - \omega\delta_{\omega_{kj}} - i\kappa_{kj} \tag{0.7.8}$$

$$B = \Delta_k - \omega^2 \delta_{\omega_{kj}} M^{-1} \delta_{\omega_{kj}} - i\kappa_{kj} \tag{0.7.9}$$

Тогда, учитывая малость недиагональных членов X_{ij} и коэффициентов $\delta_{\omega_{kj}}$ как при выводе (3.2.12)–(3.2.13) получим

$$\begin{aligned} A_k = a_k^+ + a_k^- + b_k = \frac{Fc^2}{2\omega}\left(1+\omega M^{-1}\delta_{\omega_{kj}}\right)B^{-1}X_l \approx \\ \approx \frac{Fc^2}{2\omega}\left(1+\frac{\omega\delta_{\omega_{kj}}}{\Delta_k-\omega\delta_{\omega_{kj}}-i\kappa_{kj}}\right)\frac{X_k}{\Delta_k-i\kappa_{kk}} = \frac{Fc^2}{2\omega}\frac{X_k}{\Delta_k-\omega\delta_{\omega_{kj}}-i\kappa_{kj}} \end{aligned} \tag{0.7.10}$$

С другой стороны в стационарном случае уравнение (3.2.6) является алгебраическим и напрямую даёт

$$A_j = a_j^+ + a_j^- + b_j = \frac{Fc^2}{2\omega}D^{-1}X_k, \tag{0.7.11}$$

$$D^{-1} = (\Delta_k - \omega\delta_{\omega_{kj}} - i\kappa_{kj})^{-1}, \tag{0.7.12}$$

что совпадает с (0.7.10). Вид этих формул однозначно показывает, что $\delta_{\omega_{kj}}$, а точнее её действительная часть, является относительным сдвигом частоты при приложении постоянного поля.

П.7.1. Высшие гармоники

Полученные формулы легко обобщить на большее число гармоник. Для этого просто добавим их в анзац: $b_k + a_k^- e^- + a_k^+ e^- + a_k^{2-}e^{2-} + a_k^{2+}e^{2+} + ...$ Тогда получим

$$\begin{aligned} ... - i2\omega_{RF}a_k^{2-}e^{2-} + i2\omega_{RF}a_k^{2+}e^{2+} - i\omega_{RF}a_k^- e^- + i\omega_{RF}a_k^+ e^+ = \\ = -i\Delta_k(... + a_k^{2-}e^{2-} + a_k^{2+}e^{2+} + a_k^- e^- + a_k^+ e^+ + b_k) + \\ + i\sum_j (... + a_j^{2-}e^{2-} + a_j^{2+}e^{2+} + a_j^- e^- + a_j^+ e^+ + b_j)(\delta^-_{\omega_{kj}}e^+ + \delta^+_{\omega_{kj}}e^-) \\ - \sum \kappa_{kj}(a_j^{2-}e^{2-} + a_j^{2+}e^{2+} + a_j^- e^- + a_j^+ e^+ + b_j) + iFX_{kp} = \\ = -i\Delta_k(a_k^{2-}e^{2-} + a_k^{2+}e^{2+} + a_k^- e^- + a_k^+ e^+ + b_k) + \\ + i\sum_j b_j(\delta^-_{\omega_{kj}}e^+ + \delta^+_{\omega_{kj}}e^-) \\ + i\sum_j (\delta^-_{\omega_{kj}}a_j^- + \delta^-_{\omega_{kj}}a_j^+ e^{2+} + \delta^+_{\omega_{kj}}a_j^- e^{2-} + \delta^+_{\omega_{kj}}a_j^+) \\ + i\sum_j (\delta^-_{\omega_{kj}}a_j^{2-}e^- + \delta^-_{\omega_{kj}}a_j^{2+}e^{3+} + \delta^+_{\omega_{kj}}a_j^{2-}e^{3-} + \delta^+_{\omega_{kj}}a_j^{2+}e^+) \\ + ... \\ - \sum \kappa_{kj}(... + a_k^{2-}e^{2-} + a_k^{2+}e^{2+} + a_j^- e^- + a_j^+ e^+ + b_j) + iFX_{kp} \end{aligned} \tag{0.7.13}$$

Далее, применяя метод гармонического баланса помним, что имеем неограниченное число гармоник:

$$-i\Delta_k b_k + i\sum(\delta^-_{\omega_{kj}} a^-_j + \delta^+_{\omega_{kj}} a^+_j) - \sum \kappa_{kj} b_j + i\frac{Fc^2}{2\omega} X_{kp} = 0 \tag{0.7.14}$$

$$-i\omega_{RF} a^-_k = -i\Delta_k a^-_k + i\sum_j (a^{2-}_j \delta^-_{\omega_{kj}} + b_j \delta^+_{\omega_{kj}}) - \sum \kappa_{kj} a^-_j \tag{0.7.15}$$

$$i\omega_{RF} a^+_k = -i\Delta_k a^+_k + i\sum_j (a^{2+}_j \delta^+_{\omega_{kj}} + b_j \delta^-_{\omega_{kj}}) - \sum \kappa_{kj} a^+_j \tag{0.7.16}$$

$$-i2\omega_{RF} a^{2-}_k = -i\Delta_k a^{2-}_k + i\sum_j (a^{3-}_j \delta^-_{\omega_{kj}} + a^-_j \delta^+_{\omega_{kj}}) - \sum \kappa_{kj} a^-_j \tag{0.7.17}$$

$$i2\omega_{RF} a^{2+}_k = -i\Delta_k a^{2+}_k + i\sum_j (a^{3+}_j \delta^+_{\omega_{kj}} + a^+_j \delta^-_{\omega_{kj}}) - \sum \kappa_{kj} a^+_j \tag{0.7.18}$$

$$\ldots$$

Из второго и третьего уравнения получим, восстанавливая $\mu_\pm$ перед $\delta^\mp_{\omega_{kj}}$

$$a^n_k = M^{-1}_n \left(\mu_+ \delta^-_{\omega_{kj}} a^{n-1}_j + \mu_- \delta^+_{\omega_{kj}} a^{n+1}_j\right) \tag{0.7.19}$$

$$M_n = \Delta_k + n\omega_{RF} - i\kappa_{kj} \tag{0.7.20}$$

Для решения системы следует положить, что амплитуда некоей гармоники под номером $\pm N$ мала и не требует учёта. тогда получим что $a^{(\pm N)}_k = M^{-1}_{N\mp1} \mu_\pm \delta^\mp_{\omega_{kj}} a^{(N\mp1)}_j$. Подставляя в выражение для предыдущей гармоники получим

$$\begin{gathered}\left(M_{N\mp1} - \mu_-\mu_+ \delta^\pm_{\omega_{kj}} M^{-1}_N \delta^\mp_{\omega_{kj}}\right) a^{(N\mp1)}_k = \mu_+ \delta^\mp_{\omega_{kj}} a^{(N\mp2)}_j,\\ \left(M_n - \mu_-\mu_+ \delta^\pm_{\omega_{kj}} M^{-1}_{n\pm1} \delta^\mp_{\omega_{kj}}\right) a^{(n)}_k = \mu_\pm \delta^\mp_{\omega_{kj}} a^{(n\mp1)}_j,\end{gathered} \tag{0.7.21}$$

где верхний знак берётся для амплитуд с $n > 0$. Тогда

$$a^{(n)}_k = M'^{-1}_n \mu_\pm \delta^\mp_{\omega_{kj}} a^{(n\mp1)}_j, \tag{0.7.22}$$

$$M'_n = M_n - \mu_-\mu_+ \delta^\pm_{\omega_{kj}} M'^{-1}_{n\pm1} \delta^\mp_{\omega_{kj}} \tag{0.7.23}$$

Для $a^{(0)}$ получим выражение, совпадающее с полученым ранее:

$$b_k = a^0 = \frac{Fc^2}{2\omega} B^{-1} X_k \tag{0.7.24}$$

$$B = \Delta_k - \mu_+\mu_-(\delta^-_{\omega_{km}} M'^{-1}_- \delta^+_{\omega_{nj}} + \delta^+_{\omega_{km}} M'^{-1}_+ \delta^-_{\omega_{nj}}) - i\kappa_{kj} \tag{0.7.25}$$

П.8. К финальному преобразованию коэффициента электрооптического взаимодействия

Учтём тот факт, что $\vec{E} = \{E_\rho, iE_\varphi, E_z\}$. Это означает, что на самом деле

$$\vec{E} = \{E_\rho \cos m\varphi, -E_\varphi \sin m\varphi, E_z \cos m\varphi\}$$

и нелинейные члены должны считаться более аккуратно. Таким образом, числитель (3.2.21) выглядит следующим образом

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \int \begin{pmatrix} E_\rho^{\mathrm{WGM}*} \cos m_p\varphi \\ -E_\varphi^{\mathrm{WGM}*} \sin m_p\varphi \\ E_z^{\mathrm{WGM}*} \cos m_p\varphi \end{pmatrix}^T \widehat{C}^\dagger \widehat{\epsilon} \left[\widehat{\widehat{r}} \widehat{C} \begin{pmatrix} E_\rho^{\mathrm{RF}} \cos m_{\mathrm{rf}}\varphi \\ -E_\varphi^{\mathrm{RF}} \sin m_{\mathrm{rf}}\varphi \\ E_z^{\mathrm{RF}} \cos m_{\mathrm{rf}}\varphi \end{pmatrix} \right] \widehat{\epsilon} \widehat{C} \begin{pmatrix} E_\rho^{\mathrm{WGM}} \cos m_p\varphi \\ -E_\varphi^{\mathrm{WGM}} \sin m_p\varphi \\ E_z^{\mathrm{WGM}} \cos m_p\varphi \end{pmatrix} dV \tag{0.8.1}$$

Чтобы выделить отдельные синусовые и косинусовые компоненты сделаем следующее. Каждое интегрируемое является суммой произведений векторных компонент, т.е. $c_{ijk} E_i^{\mathrm{WGM}*} E_j^{\mathrm{WGM}} E_k^{\mathrm{RF}}$. Таким образом, чтобы исключить $\sin m_p$ положим $E_\varphi^{\mathrm{WGM}*}$ равным нолю, оставляя только те члены суммы, которые его не содержат. Чтобы вернуть $\sin m_p$ обратно, положим нулём $E_\rho^{\mathrm{WGM}*}$ и $E_z^{\mathrm{WGM}*}$, оставляя только члены суммы, его содержащие. Таким образом

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta\omega}{\omega}(Dra, DraC, Daz, DazC, Dax, DaxC, Era, Eaz, Eax) = \\
&= \frac{\Delta\omega}{\omega}(Dra, DraC, 0, DazC, Dax, DaxC, Era, Eaz, Eax)[\cos m_p\varphi] + \\
+&\frac{\Delta\omega}{\omega}(0, DraC, Daz, DazC, 0, DaxC, Era, Eaz, Eax)[\sin m_p\varphi] = \ldots \\
&= \frac{\Delta\omega}{\omega}(Dra, DraC, 0, 0, Dax, DaxC, Era, 0, Eax)[\cos m_p\varphi \cos m_2\varphi \cos m_{\mathrm{rf}}\varphi] + \\
+&\frac{\Delta\omega}{\omega}(Dra, DraC, 0, 0, Dax, DaxC, 0, Eaz, 0)[\cos m_p\varphi \cos m_2\varphi \sin m_{\mathrm{rf}}\varphi] + \ldots
\end{aligned}$$

Так как векторные компоненты по условию действительны, взятие действительной и

P	$\widehat{A}_{M,P}$	$m_p - m_2 + m_{\rm rf}$	$m_p - m_2 - m_{\rm rf}$	$m_p + m_2 + m_{\rm rf}$	$m_p + m_2 - m_{\rm rf}$
ccc	Re	+	+	+	+
ccs	Im	−	+	−	+
csc	Im	+	+	−	−
css	Re	+	−	−	+
scc	Im	−	−	−	−
scs	Re	−	+	−	+
ssc	Re	+	+	−	−
sss	Im	−	+	+	−

Таблица 2: Table of coincidence 1

мнимой частей от (3.2.21) приведёт нас к следующему равенству

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta\omega}{\omega}(Dra, DraC, 0, 0, Dax, DaxC, Era, 0, Eax)[\cos m_p\varphi \cos m_2\varphi \cos m_{\rm rf}\varphi] \propto \\
&\propto \int \mathrm{Re}\left[\alpha^{\rm cyl}_{lmn}\right] E^{\rm RF}_n E^{\rm WGM*}_l E^{\rm WGM}_m r dr dz\Big|_{ccc, M=m_p+m_2-m_{\rm rf}} + \\
&+ \int \mathrm{Re}\left[\alpha^{\rm cyl}_{lmn}\right] E^{\rm RF}_n E^{\rm WGM*}_l E^{\rm WGM}_m r dr dz\Big|_{ccc, M=m_p+m_2+m_{\rm rf}} + \\
&+ \int \mathrm{Re}\left[\alpha^{\rm cyl}_{lmn}\right] E^{\rm RF}_n E^{\rm WGM*}_l E^{\rm WGM}_m r dr dz\Big|_{ccc, M=m_p-m_2-m_{\rm rf}} + \\
&+ \int \mathrm{Re}\left[\alpha^{\rm cyl}_{lmn}\right] E^{\rm RF}_n E^{\rm WGM*}_l E^{\rm WGM}_m r dr dz\Big|_{ccc, M=m_p-m_2+m_{\rm rf}}
\end{aligned} \tag{0.8.2}$$

Таким образом решение получится в виде

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{2\epsilon_0 W^{\rm WGM}} \sum_{M,P} \int_S \widehat{A}_{M,P} \left[\alpha^{\rm cyl_k}_{\lambda n} E^{\rm RF_P}_n E^{\rm 2WGM_P}_\lambda r dr dz \frac{\sin(\pi(M-k)a)}{\pi(M-k)} e^{i(M-k)a}\right] \tag{0.8.3}$$

где $M = m_p \pm m_s \pm m_{\rm RF}$, $\hat{A}_{M,P}$ – взятие действительной или мнимой части со знаком, взятым из таблицы 2. Здесь используется нотация Войта для симметричных тензоров: индексы $\lambda = i = j$ при $i = j$ и $\lambda = 9 - i - j$ при $i \neq j$. Вектора $E^{\rm 2WGM_P}_\lambda$ состоит из произведений компонент поля МШГ, а $E^{\rm RF_P}_\lambda$ – из компонент радиочастотного поля, включенных или выключеных, в зависимости от P.