

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ТВЁРДОГО ТЕЛА

На правах рукописи

Лебедева Елена Владимировна

ДВУМЕРНЫЕ ЗАРЯЖЕННЫЕ СИСТЕМЫ НА
ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОГО ГЕЛИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ И
РЕКОНСТРУКЦИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ПЛЕНОК
ЖИДКОСТИ.

01.04.07 — физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
В. Б. Шикин

Черноголовка — 2006

Оглавление

1	Введение.	4
2	Массивный гелий.	7
2.1	Геометрия задачи.	7
2.2	Неустойчивость заряженной поверхности гелия.	9
2.3	Реконструкция, динамическое описание.	11
2.4	Реконструкция, вариационное описание.	18
2.5	Экспериментальные результаты.	25
2.6	Луночное описание реконструкции.	28
3	Тонкая пленка в инверсионных условиях.	39
3.1	Особенности инверсионной задачи.	39
3.2	Неустойчивость инверсионной пленки.	41
3.3	Реконструкция пленки бесконечных размеров.	44
3.4	Реконструкция ограниченной нейтральной пленки.	47
3.5	Реконструкция заряженной инверсионной пленки.	56
4	Заряженная тонкая пленка жидкости.	64
4.1	Введение.	64
4.2	Бесконечная заряженная пленка.	65
4.3	Реконструкция бесконечной заряженной пленки с произвольным d	76

4.4	Критическое поведение тонкой пленки.	88
4.5	Деформация заряженной пленки ограниченных размеров . .	92
4.6	Обсуждение экспериментов по неустойчивости и реконструк- ции на тонких пленках	109
5	Двумерная система макроскопических кластеров у поверх- ности жидкого гелия.	114
5.1	Диплоны и ионы большого радиуса.	114
5.2	Заряженные комплексы.	116
6	Заключение	128
	Литература	131

1. Введение.

Двумерные заряженные системы на поверхности жидкости при низких температурах изучаются давно, и интерес к ним не ослабевает. В данной диссертации рассматриваются лишь некоторые аспекты этой обширной тематики. И хотя предпринятые теоретические исследования относятся к достаточно разнородному набору объектов, имеются существенные обобщающие моменты. Во-первых, свойства двумерных заряженных систем исследуются в основном методами электростатики, т.е. рассматривается только такой круг явлений, где квантовые характеристики частиц, составляющих 2D систему, можно не принимать в расчет. Во-вторых, главное внимание уделяется определению тех условий, при которых данные 2D системы устойчивы.

Проблема устойчивости заряженной поверхности жидкости возникла в 30-е годы в связи с обнаружением распада тяжелых атомных ядер. Капельный сценарий этой неустойчивости, предложенный Френкелем [1, 2], и независимо Бором и Уилером [3] оказался первой приемлемой моделью, объясняющей происхождение данного фундаментального явления. Более ранний и менее знаменитый плоский вариант задачи о спектре колебаний заряженной поверхности жидкости (Френкель [4, 5], Тонкс [6]), оказался востребованным по существу лишь в 70-е годы, когда начались интенсивные исследования свойств различных низкоразмерных заряженных образований. Одно из них - 2D заряженная система на поверхности жидких

диэлектриков (гелия, водорода и т.п.) в большой степени контролируется эффектом Френкеля, Тонкса [4, 5, 6], т.к. предсказанная ими неустойчивость ограничивает сверху плотность заряженных частиц на поверхности жидкого диэлектрика.

Среди этапных работ о развитии неустойчивости и реконструкции заряженной поверхности жидкости фигурируют работы Горькова, Черниковой [7, 8], обобщающие "металлические" результаты [4, 5, 6] на случай жидких диэлектриков с поверхностным зарядом на свободной границе вакуум-жидкость или границе двух жидкостей; обнаружение такой неустойчивости (Володин, Хайкин, Эдельман [9, 10]); прямые измерения закона дисперсии колебаний заряженной границы двух жидкостей с демонстрацией его критического поведения (Лейдерер [11]); предсказание возможности реконструкции заряженной поверхности жидкости в закритичных условиях (Горьков, Черникова [8, 12, 13]) и его экспериментальное подтверждение (Лейдерер, Ваннер [14, 15]). Термин "реконструкция", используемый здесь и ниже, не является общепринятым (но нет и ничего адекватного). Речь идет о переходе заряженной поверхности жидкости из плоского состояния в деформированное (периодически или аperiodически) с амплитудой и периодом, зависящими определенным образом от близости к точке перехода.

Интенсивно развиваясь в последние годы, проблема устойчивости поверхности жидкости оказалась весьма продвинутой в нескольких направлениях: реконструкция свободной границы жидких диэлектриков и феррожидкостей [16] - [21], неустойчивость и реконструкция плоской, массивной заряженной поверхности жидкости (наряду с [7] - [15], см. [22] - [34]), устойчивость цилиндрических и сферических жидких поверхностей [35] -

[40], гравитационная неустойчивость жидкой поверхности в инверсионных условиях [41], и т.д. В частности, вполне самостоятельно выглядит задача об устойчивости и реконструкции тонких заряженных пленок. Многие детали этого явления установлены лишь недавно и в совокупности не обсуждались. В данной работе такая попытка реализована.

Идеологически близкой является задача о внедрении в гелий наночастиц. Эти частицы формируют в жидкости структуры с новыми, необычными свойствами (см. например, [84, 85]). Имеется возможность связать такое включение с электроном [87]. Полученные в результате тяжелые заряженные кластеры, локализованные у поверхности гелия действием сил Ван-дер-Ваальса, могли бы стать еще одной необычной реализацией 2D системы. Другая возможность - получение связанного состояния электрона над поверхностью гелия с нейтральной наночастицей под его поверхностью. Такого рода системы тяжелых частиц могли бы стать объектом для визуального наблюдения двумерной кулоновской кристаллизации.

Содержание диссертации складывается из нескольких частей. Вначале речь идет о массивной задаче (изложение известных результатов, удобное для последующего сравнения с пределом тонких пленок). Затем обсуждается задача об устойчивости и реконструкции инверсионной пленки жидкости в нейтральном и заряженном состояниях. Далее излагаются результаты, касающиеся вариантов поведения неустойчивой заряженной тонкой пленки гелия (водорода). В заключение теоретически обосновывается возможность существования устойчивых двумерных систем тяжелых заряженных комплексов в гелии, и обсуждаются условия их кулоновской кристаллизации.

2. Массивный гелий.

2.1. Геометрия задачи.

Рассмотрим систему рис. 2.1.

Электрические поля E_- над и E_+ под заряженной с плотностью n_s поверхностью гелия равны

$$E_- = \frac{V}{h} - 4\pi\sigma \frac{d}{h} \quad (2.1)$$

$$E_+ = \frac{V}{h} + 4\pi\sigma \frac{(h-d)}{h} \quad (2.2)$$

где $\sigma = en_s$, V -разность потенциалов между пластинами ячейки Рис.1.

В условиях полной экранировки внешнего поля над гелием, когда $E_- = 0$, величина E_+ оказывается равной

$$E_+ = V/d \quad (2.3)$$

При заданных d_0 и V , где d_0 -толщина пленки гелия в отсутствии внешнего поля, поверхность гелия прогибается под действием электронного давления (случай $E_- = 0$) $P_{el} = E_+^2/8\pi$ на глубину

$$\xi_0 = d - d_0, \quad (2.4)$$

величина которой определяется условиями механического равновесия и сохранения полного объема жидкости

$$\rho g \xi_0 + \frac{V^2}{8\pi d_0^2} = \rho g \xi_\infty, \quad (2.5)$$

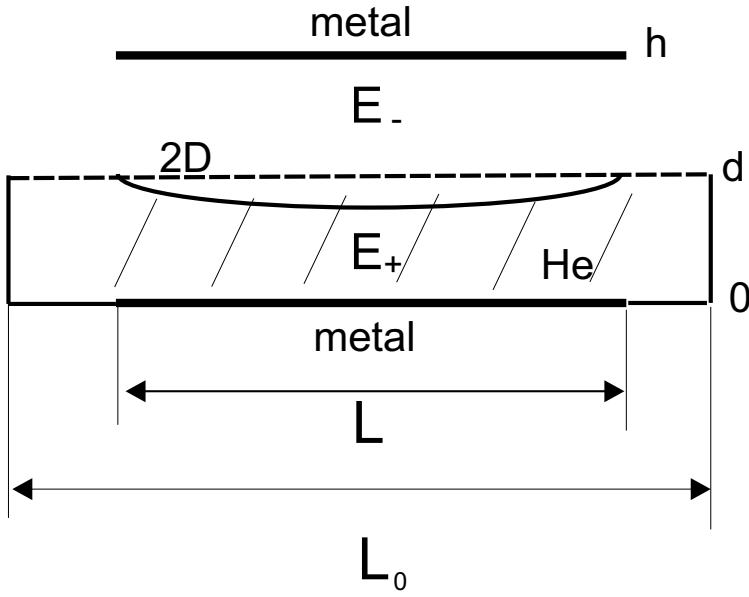


Рис. 2.1. Схема ячейки с 2D электронной системой .

$$L^2 \xi_0 + (L_0^2 - L^2) \xi_\infty = 0, \quad L_0 > L, \quad |\xi_\infty| \ll d. \quad (2.6)$$

Здесь ρ, g - плотность жидкого гелия и ускорение силы тяжести, L - радиус электронного диска на поверхности гелия, L_0, ξ_∞ - радиус и деформация жидкой поверхности за пределами электронного диска. Условие (2.5) имеет место при

$$\kappa^{-1} \ll L, \quad \kappa^{-1} \ll L_0 - L, \quad \kappa_0^2 = \rho g / \alpha \quad (2.7)$$

(α - коэффициент поверхностного натяжения, κ_0 - так называемая капиллярная постоянная). Определяя из (2.6) величину ξ_∞

$$\xi_\infty = -\xi_0 L^2 / (L_0^2 - L^2)$$

и подставляя ее в (2.5), имеем

$$\xi_0 = -\frac{V^2}{8\pi\rho g^* d_0^2}, \quad g^* = g \left(1 + \frac{L^2}{L_0^2 - L^2}\right) \quad (2.8)$$

Пленка считается массивной, если

$$\kappa_0 d \gg 1 \quad (2.9)$$

При этом равновесные и динамические свойства заряженной поверхности жидкости не зависят от d_0 и степени ее деформации (2.8), хотя такой эффект всегда сопровождается появлением электронов на поверхности жидкости. (см., например, Рис. 2 из [42]).

2.2. Неустойчивость заряженной поверхности гелия.

Динамическое поведение заряженной поверхности массивной жидкости в области, далекой от характерных 2D плазменных частот определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned} E_{+\tau} |_{z=\xi(x,y)} + E_{-\tau} |_{z=\xi(x,y)} &= 0, \\ v_z |_{z=\xi(x,y)} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \xi, \\ -\rho g \xi - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{1}{8\pi} (E_{+n}^2 - E_{-n}^2) |_{z=\xi(x,y)} &= \alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь $\mathbf{v} = \nabla \Phi$, Φ - потенциал скорости в гелии; $\mathbf{E}_{\pm} = -\nabla \varphi_{\pm}$ - напряженность электрического поля, индексы τ и n у электрических полей отмечают их касательные и нормальные компоненты, потенциалы Φ и φ удовлетворяют уравнению Лапласа.

Линейный вариант уравнений (2.10) ведет к закону дисперсии малых колебаний заряженной поверхности жидкости [7]:

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho} \left[\rho g + \alpha k^2 - k \frac{E_+^2 + E_-^2}{4\pi} \right] \quad (2.11)$$

Если еще и $E_- = 0$, речь идет о задаче, рассмотренной в [4, 2]:

$$\omega^2 = \frac{k}{\rho} \left[\rho g + \alpha k^2 - k \frac{E_+^2}{4\pi} \right]. \quad (2.12)$$

Из условий

$$\omega(k) = 0, \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial k} = 0, \quad (2.13)$$

следует выражение для критической напряженности внешнего электрического поля

$$E_c^2 = E_{+c}^2 + E_{-c}^2 = 8\pi\sqrt{\alpha\rho g} \quad (2.14)$$

При этом критическая однородная поверхностная плотность заряда равна

$$(n_s^{max})^2 = \frac{\sqrt{\alpha\rho g}}{2\pi e^2}, \quad (2.15)$$

где e - заряд электрона.

Неустойчивость заряженной поверхности жидкости обнаруживается и без решения динамической задачи. Достаточно найти ее эффективную потенциальную энергию V_q в изогнутом состоянии и потребовать обращения V_q ноль.

Несколько слов о пределах применимости уравнений (2.10). Характерным масштабом длины задачи является капиллярная длина, имеющая порядок $a = (\alpha/\rho g)^{1/2} \simeq 0.05 - 0.5$ см. В гидродинамическом приближении заряды можно считать распределенными с поверхностной плотностью n_s , если толщина слоя \tilde{z} , в котором они сосредоточены у поверхности жидкости достаточно мала. Так выражение \tilde{z} , приведенное в [7] для электронов над гелием в сильных электрических полях есть

$$\tilde{z} \sim a_0^{1/3} r_s^{2/3}, \quad (2.16)$$

где a_0 - боровский радиус, r_s - среднее расстояние между электронами на поверхности. Из (2.16) видно, что \tilde{z} мало по сравнению с r_s , поэтому электроны можно считать лежащими в плоскости. В [8] задача о распределении электронов во внешнем поле решается в классическом пределе, когда заселенность нижних уровней мала. Выражение для \tilde{z} , полученное при со-

блюдении условия полной экранировки $E_- = 0$,

$$\tilde{z} = T/2\pi e^2 n_s. \quad (2.17)$$

При гелиевых температурах и характерных $n_s \sim 10^6 - 10^9 \text{ cm}^{-2}$ эффективная толщина заряженного слоя \tilde{z} в (2.17) также оказывается малой по сравнению с a .

Другим важным условием, позволяющим существенно продвинуться в описании картины развития неустойчивости и реконструкции, является эквипотенциальность заряженной поверхности жидкости:

$$\varphi_+ |_{z=\xi(x,y)} = \varphi_- |_{z=\xi(x,y)} = \text{const}. \quad (2.18)$$

Выполнение условия (2.18) обеспечивается высокой подвижностью поверхностных электронов. Согласно [12] и (2.11) характерный временной масштаб рассматриваемых явлений определяется частотой капиллярно-гравитационных волн с волновым вектором k таким, что $ka \sim 1$

$$\omega_g \sim (kg)^{1/2} \simeq 10^2 \text{ sec}^{-1}, \quad (2.19)$$

которая мала по сравнению с частотой плазменных колебаний двумерной системы электронов:

$$\omega_p \sim (2\pi e^2 n_s k / m)^{1/2} \sim 10^4 (n_s k)^{(1/2)} \text{ sec}^{-1} \gg \omega_g. \quad (2.20)$$

Таким образом металлическое приближение выполняется для поверхностных электронов с огромным запасом.

2.3. Реконструкция, динамическое описание.

Задача о реконструкции, так же как и проблема устойчивости, имеет несколько трактовок. Остановимся сперва на динамическом сценарии, в ко-

тором "перевал" через критическую точку стимулирует начало перестройки заряженной поверхности жидкости к новому стационарному состоянию.

Используя параметр

$$\beta = (E_+^2 + E_-^2)/E_c^2 - 1, \quad (2.21)$$

характеризующий близость системы к порогу устойчивости, а также величину S :

$$S = (E_+^2 - E_-^2)/(E_c^2), \quad (2.22)$$

пропорциональную поверхностной плотности электронов в невозмущенном состоянии, и полагая $|\beta| \ll 1$ и $S \ll 1$, можно представить одномерное решение исходной системы (2.10) в виде [12]:

$$\xi(\mathbf{r}) = \frac{a}{2}[Z(x, t) \exp(ikx) + k.c.], \quad a = k_0^{-1} = (\alpha/\rho g)^{1/2}. \quad (2.23)$$

Z мало по сравнению с капиллярной длиной. Разложив все уравнения системы (2.10) до членов третьего порядка по Z , авторы [12] получают уравнение для амплитуды возмущения Z :

$$\begin{aligned} \frac{1}{gk_0} \ddot{Z} = & -\frac{(k - k_0)^2}{k_0^2} Z + \frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \omega^2}{\partial k^2} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2i\omega \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial Z}{\partial x} \\ & + 2\beta Z + \left[8(S^2 - 1) + \frac{11}{2} \right] \frac{|Z|^2 Z}{4} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Формально преобразование (2.23) означает сдвигку начала отсчета в k -пространстве в точку $k = k_0$. В результате в окрестности критической точки амплитуда $Z(x, t)$ является слабозависящей функции координаты x . Близость к порогу означает, что $(k - k_0)^2/k_0^2 \ll 1$ и $\partial \omega/\partial k \ll 1$, поэтому соответствующими слагаемыми в (2.24) можно пренебречь. Оставшаяся правая часть уравнения (2.24) в однородном случае ($\partial Z/\partial x = 0$) есть ва-

риация потенциала

$$V(Z) = -2\beta|Z|^2 - \left[8(S^2 - 1) + \frac{11}{2}\right] \frac{|Z|^4}{8} \quad (2.25)$$

При достаточно малых S потенциал $V(Z)$ имеет минимум, и в это состояние система должна перейти, если в уравнение (2.24) включить эффекты диссипации. В пределе $S \rightarrow 0$ амплитуда стационарного гофра Z_o равна

$$Z_o^2 = 5\beta/8$$

Поведение Z_o такого типа (реконструкция начинается лишь в области $\beta > 0$, причем амплитуда Z_o монотонно растет с увеличением β) принято называть (вслед за Зайцевым, Шлиомисом [19]) переходом (реконструкцией) мягкого типа, хотя для заряженных жидких сред этот "одномерный" тип переходя является скорее экзотическим (на практике он, возможно, наблюдается в виде периодического набора метастабильных каналов, "навязанных" системе граничными условиями эксперимента (см. ниже экспериментальную информацию п.5). Но в целом он энергетически проигрывает альтернативным "двумерным" сценариям реконструкции.

В области $S^2 > 5/16$ решение мягкого типа пропадает, и в зоне перехода $\beta \simeq 0$ амплитуда гофра меняется скачком от нуля до конечного значения $Z_{tr} > 0$.

$$Z_{tr} > 0, \quad \beta \rightarrow 0$$

Этим явлением не исчерпываются особенности жесткого перехода (см. ниже). Но его наличие необходимо.

Следует отметить, что манипуляции с параметром S (2.22) возможны лишь для жидких диэлектриков с варьируемой плотностью подвижных

зарядов на границе. В случае полной экранировки поля, когда одна из величин E_+ или E_- равна нулю, такая степень свободы отсутствует. В самом деле, для металлов

$$S_m = \frac{E_+^2}{E_c^2} \quad (2.26)$$

Величина S_m (2.26) может быть малой, если $E_+ \ll E_c$. Но при этом металлжидкая жидкость устойчива. А если $E_+ \rightarrow E_c$, то S_m стремится к единице.

Реально "одномерное" решение в виде периодических полос (2.23) с амплитудой, соответствующей минимуму (2.25), неустойчиво. Согласно [12] и [13], энергетически более выгодным оказывается симметричная гексагональная структура, характеризуемая тремя волновыми векторами, развернутыми друг к другу под углами 60° . При этом в выражении для энергии появляются качественно важные новые слагаемые третьего порядка по амплитуде со знаком минус, что дает, в конечном итоге, меньшее по сравнению с системой полос или квадратной решеткой равновесное значение энергии.

Следует еще раз подчеркнуть, что все результаты [13] получены для случая $S \ll 1$. При этом энергетический функционал стационарной гексагональной структуры записан как

$$U = \frac{3}{2}\gamma Z_0^4 + 3SZ_0^3 - 6\beta Z_0^2, \quad \gamma \approx 0.96. \quad (2.27)$$

В этом выражении, в отличие от (2.25), слагаемые $\sim S^2 Z_0^4$ не учитываются.

Наиболее интересной особенностью гексагональной реконструкции является жесткий (в духе [19, 20]) характер этого перехода (скачок ам-

плитуды от 0 до значения

$$Z_0 = - \left(\frac{3S}{4\gamma} + \sqrt{\frac{2\beta}{\gamma} + \frac{9S^2}{16\gamma^2}} \right). \quad (2.28)$$

Примечательно также, что минимальное значение энергии гексагональной структуры становится равным энергии плоской границы еще в докритичной области, когда

$$\beta_{min} = -S^2/4\gamma. \quad (2.29)$$

Это утверждение не является неожиданным. Достаточно вспомнить ситуацию с жидкими заряженными каплями. Для того, чтобы такая капля развалилась (в этом суть аналогии задач о капле и неустойчивости тяжелых ядер) необходима ее эллиптическая деформация конечной величины ([2],[43]). В то же время сферическая капля (ядро) того же объема остается еще устойчивым (малые колебания ее формы имеют устойчивый закон дисперсии).

Наблюдать реконструкцию с $\beta < 0$ можно, помещая жидкость с плоской границей в область $0 \geq \beta \geq \beta_{min}$ и ожидая ее флуктационной реконструкции. Либо создавать условия с $\beta > 0$, гарантирующие реконструкцию, после чего следует вернуться в зону $0 \geq \beta \geq \beta_{min}$ (2.29). Обе возможности пока не реализованы экспериментально.

В работе [13] определен также и спектр малых колебаний новой, гексагональной структуры. Показано, что спектр является звуковым и устойчивым как в резонансном (когда волновой вектор \mathbf{k} возбуждения близок к одному из шести основных векторов гексагональной решетки гофра), так и в нерезонансном случаях (если направление \mathbf{k} не коллинеарно с ее базисными векторами).

Параллельно с авторами [12], [13] поведение заряженной поверхности гелия в электрическом поле теоретически изучалось Мимой и Икези [22], [23]. Однако основное внимание эти исследователи уделяют решению нестационарной задачи - распространению нелинейных волн. В целом, применяемые здесь методы те же, что и в [12], [13]. Это разложение уравнений электро- и гидродинамики, описывающих поведение системы, по малому параметру - амплитуде возмущений. В работе [22] где рассматривается одномерная задача, уравнение, полученное для медленно меняющейся амплитуды $A(x, t)$ нелинейной волны

$$\xi(x, t) = A(x, t) \exp(ikx - \omega t) + k.c. \quad (2.30)$$

аналогично (2.24):

$$iA_t - \frac{1}{2\omega} A_{tt} + v_g A_x + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_g}{\partial k} + \frac{v_g^2}{\omega} \right) A_{xx} + k^2 \beta |A|^2 A = 0 \quad (2.31)$$

Здесь ω определяется выражением (2.11), $v_g = \partial\omega/\partial k$, β с точностью до множителя совпадает с коэффициентом при $|Z|^2 Z$ в уравнении (9). При условии сохранения формы волнового пакета

$$A_{tt} \approx v_g^2 A_{xx} \quad (2.32)$$

уравнение (2.31) имеет решение $F(x, t) = kA(x, t)$ вида

$$F(x, t) = F_0 \exp(i\beta |F_0|^2 t) \quad (2.33)$$

Аргумент экспоненты в этом выражении отвечает нелинейному сдвигу частоты. Решения (2.33) неустойчиво по отношению к малым колебаниям амплитуды и фазы при условии $\beta \partial v_g / \partial k > 0$ и устойчиво в при

$$\beta \frac{\partial v_g}{\partial k} < 0. \quad (2.34)$$

Хорошо известно, что при выполнении условия (2.32) уравнение (2.31) имеет решения специального вида, выражаемые через эллиптические функции Якоби. В устойчивой области параметров существует решение в виде солитона:

$$F(x, t) = F_0 \tanh \left[(-\beta |F_0|^2 / \partial v_g / \partial k)^{1/2} (x - v_g t) \right] \exp \left(\frac{i}{2} \beta |F_0|^2 t \right) \quad (2.35)$$

Работа [23] посвящена образованию стационарной макроскопической решетки электронов на поверхности жидкого гелия. Основные полученные результаты - устойчивость гексагональной структуры в электрических полях выше критического, гистерезисный характер перехода от плоской к деформированной поверхности при изменении внешнего поля - совпадают с [12], [13]. Кроме того, получены выражения для спектра акустических и оптических колебаний гексагональной решетки электронов.

В отличие от [13] в работе [23] вычисления выполнены для поверхности с произвольной зарядностью S . Энергетический функционал имеет вид

$$U = \frac{1}{4} \gamma R^4 + S R^3 - \beta R^2, \quad \gamma = \gamma_1 + \gamma_2, \quad \gamma_1 = \frac{5}{2} - 8S^2, \quad \gamma_2 = c_1 - c_2 S^2 \quad (2.36)$$

где $R = R(t) \sim 2Z_0$ (Z_0 из (2.27)) - амплитуда гексагональной структуры, зависящая от времени, c_1, c_2 - численные коэффициенты. Анализ зависимости (2.36) от параметров S , γ и β , показывает, в электрических полях, больших критического, когда $\beta > 0$ и поверхность становится линейно неустойчивой, образование гексагональной структуры стабилизирует систему, если

$$0 < S < 0.27. \quad (2.37)$$

Численные оценки, сделанные авторами [23] показывают, что гистерезисные явления, предсказываемые двумерной нелинейной теорией, очень трудно наблюдать, поскольку диапазон изменения β , в котором эти явления должны наблюдаться, в силу (2.37) очень мал: $0 < \beta < 0.01$.

2.4. Реконструкция, вариационное описание.

Энергетический подход к задаче о реконструкции в наиболее полной форме осуществлен Мешковым и Мельниковым в [25], [26], [27]. Согласно [27] полная энергия заряженной поверхности с учетом сил гравитации, поверхностного натяжения, взаимодействия зарядов с внешним электрическим полем и их кулоновского взаимодействия между собой записывается в виде:

$$\mathcal{E} = \int [1 + (\nabla\xi)^2]^{1/2} d^2r + \frac{1}{2} \int \xi^2 d^2r - E \int n\xi d^2r + \frac{1}{2} \int \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{l} - \mathbf{l}'|} d^2r d^2r' \quad (2.38)$$

где $\mathbf{l} = (\mathbf{r}, \xi)$, $\xi(\mathbf{r})$ - отклонение поверхности гелия от горизонтальной плоскости, \mathbf{r} - координата в плоскости невозмущенной поверхности. Здесь использованы безразмерные переменные, длина измеряется в $(\alpha/\rho g)^{1/2}$, напряженность поля и плотность заряда в $(\alpha\rho g)^{1/4}$ и энергия - в $\alpha^2/\rho g$. Это выражение может быть упрощено; если плотность заряда $n(\mathbf{r}) \ll 1$, в нем остаются члены, квадратичные по ξ и n , а в знаменателе последнего слагаемого можно положить $\mathbf{l} = \mathbf{r}$:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int [(\nabla\xi)^2 + \xi^2] d^2r - E \int n\xi d^2r + \frac{1}{2} \int \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2r d^2r' \quad (2.39)$$

Задача о равновесной форме поверхности решается варьированием (2.39) по $n(\mathbf{r})$ и по $\xi(\mathbf{r})$ при заданном полном заряде поверхности Q . В

результате возникает следующая система уравнений:

$$-\Delta\xi(\mathbf{r}) + \xi(\mathbf{r}) = En(\mathbf{r}) \quad (2.40)$$

$$-E\xi(\mathbf{r}) + \int \frac{n(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \lambda; \quad n(\mathbf{r}) \geq 0 \quad (2.41)$$

Множитель Лагранжа λ отражает наличие условия $Q = const$

Уравнения (2.40), (2.41) для стационарных состояний поверхности исследовались в простейшем случае, когда плотность заряда $n(\mathbf{r})$ положительна для всей поверхности. При этом множитель Лагранжа λ является функцией только средней плотности заряда \bar{n} и им можно временно пренебречь. Уравнения для переменной части $n(\mathbf{r})$, определенной как $\tilde{n}(\mathbf{r}) = n(\mathbf{r}) - \bar{n}$ можно записать в Фурье-представлении:

$$(k^2 + 1)\xi(\mathbf{k}) = E\tilde{n}(\mathbf{k}); \quad E\xi(\mathbf{k}) = 2\pi\tilde{n}(\mathbf{k})/k \quad (2.42)$$

Условие совместности этих двух уравнений есть

$$E^2 = 2\pi(1 + k^2)/k \quad (2.43)$$

Правая часть уравнения (2.43) минимальна при $k = 1$, когда $E^2 = 4\pi$. Это означает, что однородное распределение заряда устойчиво, если $E < E_c = (4\pi)^{1/2}$.

В случае $E > E_c$ может возникнуть волна зарядовой плотности с волновым вектором $k = 1$. В этой области квадратичная по $\tilde{n}(\mathbf{r})$ часть энергии в уравнении (2.39) связана с амплитудой плоской волны $\tilde{n}(1)$ следующим соотношением:

$$\mathcal{E}_2 = \frac{1}{4}(E_c^2 - E^2)\tilde{n}^2(1) \quad (2.44)$$

Таким образом, энергия \mathcal{E}_2 неограниченно возрастает с увеличением $\tilde{n}(1)$, и для стабилизации роста должно быть учтено нелинейное взаимодействие.

Дополнительный вклад в энергию (2.39) с учетом более высоких по $\xi(\mathbf{r})$ порядков выглядит так:

$$\mathcal{E}_4 = -\frac{1}{8} \int (\nabla\xi)^4 d^2r - \frac{1}{4} \int \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')[\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r d^2r' \quad (2.45)$$

или с учетом $n(\mathbf{r}) = \bar{n} - \tilde{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_4 = & -\frac{\bar{n}}{2} \int \frac{\tilde{n}(\mathbf{r})[\xi(\mathbf{r})\xi(\mathbf{r}')]}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^2r d^2r' - \frac{1}{8} \int (\nabla\xi)^4 d^2r - \\ & \frac{1}{4} \int \frac{n(\mathbf{r})n(\mathbf{r}')[\xi(\mathbf{r}) - \xi(\mathbf{r}')]^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^2r d^2r' \end{aligned} \quad (2.46)$$

Теперь ясно, что благодаря наличию средней плотности заряда в выражении для энергии возникает кубическое по \tilde{n} и ξ слагаемые. При малых \tilde{n} и ξ это слагаемое доминирует в определении (2.39). Таким образом, волна зарядовой плотности с треугольной симметрией оказывается энергетически выгодной при пороговой напряженности электрического поля. Она может быть описана комбинацией трех плоских волн, развернутых под углами 120° :

$$\tilde{n}(\mathbf{r}) = \tilde{n} \left[\cos(x) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \right] \quad (2.47)$$

где x и y координаты на поверхности. Подстановка выражения (2.47) в уравнения (2.39) и (2.46), а также подстановка в них аналогичного выражения для $\xi(\mathbf{r})$ дают возможность выразить энергию единицы площади поверхности через амплитуды \tilde{n} и ξ :

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}E\tilde{n}\xi + \frac{3\pi}{2}\tilde{n}^2 - \frac{3\pi}{2}\tilde{n}\tilde{n}\xi^2 - \frac{27}{64}\xi^4 + \frac{3}{8}\pi(9 - 4\sqrt{3})\tilde{n}^2\xi^2 \quad (2.48)$$

Амплитуды \tilde{n} и ξ определяются из требования минимальности энергии (2.48). Варьирование (2.48) по ξ дает связь

$$3\xi - \frac{3}{2}E\tilde{n} - 3\pi\tilde{n}\tilde{n}\xi - \frac{27}{16}\xi^3 + \frac{3}{4}\pi(9 - 4\sqrt{3})\tilde{n}^2\xi = 0 \quad (2.49)$$

Отсюда в нужном порядке малости для переменной \tilde{n} имеем:

$$\xi = \frac{1}{2}E\tilde{n} \quad (2.50)$$

Подстановка (2.50) в (2.48) дает

$$\mathcal{E} = \frac{3}{8}(4\pi - E^2)\tilde{n}^2 - \frac{3\pi}{8}E^2\tilde{n}\tilde{n}^3 + \frac{3}{32}\pi E^2(9 - 4\sqrt{3} - \frac{9}{32\pi}E^2)\tilde{n}^4 \quad (2.51)$$

Это простое выражение можно использовать для анализа неустойчивости поверхности. Ясно, что $\tilde{n} = 0$ соответствует минимуму энергии, пока $E < E_c$. Волна зарядовой плотности (ВЗП) возникает скачком, когда E достигает значения $E = E_c$, и имеет конечную амплитуду.

$$\tilde{n}_c = \frac{3}{\gamma}\bar{n}, \quad \gamma = \frac{63}{8} - 4\sqrt{3} \approx 0.947 \quad (2.52)$$

Из теории фазовых переходов хорошо известно [44], что кубический член в выражении для энергии приводит к конечному скачку параметра порядка, а также к гистерезисным явлениям. Это общее правило срабатывает и в случае (2.51). Условие экстремума энергии (2.51):

$$\gamma\tilde{n}^2 - 3\bar{n}\tilde{n} - \frac{2\Delta}{\pi} = 0, \quad \Delta = \frac{E - E_c}{\sqrt{\pi}} \quad (2.53)$$

Следовательно:

$$\tilde{n} = \frac{3\bar{n} \pm \sqrt{9\bar{n}^2 + 8\gamma\Delta/\pi}}{2\gamma} \quad (2.54)$$

Комбинируя (2.54) и (2.51) нетрудно видеть, что в области $\Delta < 0$ реконструкция энергетически выгодна вплоть до полей

$$E \approx E_c - \delta_1\bar{n}^2, \quad \delta_1 = \pi\sqrt{\pi}/\gamma = 5.58. \quad (2.55)$$

В диапазоне $E \approx E_c - \delta_2\bar{n}^2 < E < E_c - \delta_1\bar{n}^2$ ($\delta_2 = 9\pi\sqrt{\pi}/8\gamma = 6.62$) обуславливаемая "двумерная гофрировка" поверхности с конечной амплитудой

может существовать в виртуальном смысле. Для большей наглядности последних заключений полезен рис. 2.2 из [27].

Полученные численные результаты аналогичны расчетам из [12], [13] но расходятся с данными [23]. Действительно, подставляя в выражение (2.29) значения $S = \bar{n}E$, $\beta_{min} = E^2/4\pi - 1$ получаем $E - \sqrt{4\pi} = \delta_1 \bar{n}^2$ из (2.55).

Независимая проверка динамических предсказаний, конечно, интересна, но не настолько, чтобы дублировать их наличие в обзоре. В действительности вариационный подход содержит и новые утверждения. Авторы [25] - [27] обратили внимание на поведение амплитуды ВЗП. Так значение амплитуды переменной плотности заряда на границе метастабильности

$$\tilde{n} = 1.6\bar{n} \quad (2.56)$$

заметно превышает среднюю плотность. Соотношение (2.56) возможно для поверхности металла, когда полное число зарядов на свободной поверхности жидкости не фиксировано. Если же речь идет об электронах над гелием, когда заданной является средняя плотность заряда \bar{n} , то надо следить за положительностью его локальной плотности

$$n(\mathbf{r}) = \bar{n} + \tilde{n}(\mathbf{r}) \geq 0 \quad (2.57)$$

Функция $\tilde{n}(\mathbf{r})$ достигает минимума в точках $x = 4\pi(n + m/2 \pm 1/3)$, $y = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}m$, где m и n - целые числа, что соответствует узлам гексагональной решетки. В минимуме $\tilde{n}(\mathbf{r}) = -\frac{3}{2}\bar{n}$. Поэтому, в силу (2.57), имеет место неравенство:

$$\tilde{n} \leq \frac{2\bar{n}}{3} = \tilde{n}_0 \quad (2.58)$$

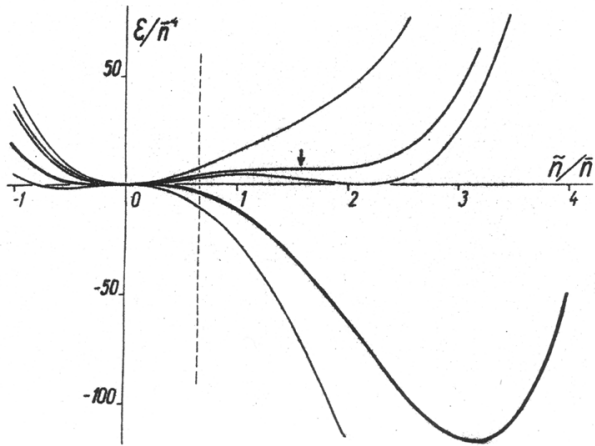


Рис. 2.2. энергия заряженной поверхности как функция плотности заряда в различных внешних полях.

Появление нейтральных точек, а в дальнейшем и нейтральных областей в распределении зарядов на гофрированной поверхности жидкости (см. рис. 2.3) резко ограничивает область применимости эквипотенциальной теории реконструкции для приложений к задачам с фиксированной средней плотностью заряда. На рис. 2.2 эта область находится левее вертикальной штрихованной линии. Для продвижения "вправо" в данном случае надо учитывать разрывность электростатических граничных условий, чего пока не сделано.

Качественно за развитием событий можно проследить в пределе $|E - E_c| \gg \tilde{n}^2$. При этом нелинейные члены из уравнения (2.38) можно не учитывать. Реконструкция поверхности происходит скачкообразно при $E = E_c$, стимулируя развитие ВЗП с амплитудой $\tilde{n} = 2\bar{n}/3$. Плотность заряда здесь имеет нули в отдельных точках - узлах гексагональной решетки (см. рис. 2.3). С увеличением напряженности электрического поля эти точки превращаются в упорядоченную систему островков с $n(\mathbf{r}) = 0$.

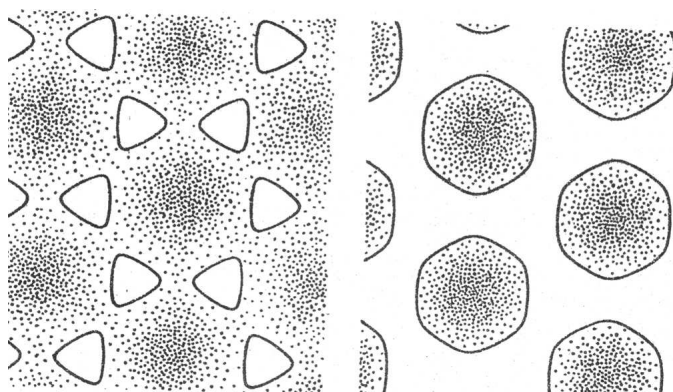


Рис. 2.3. перераспределение зарядов в надкритичной области при увеличении поля.

Изменение поля влечет за собой изменение периода структуры, чтобы обеспечить минимум энергии согласно уравнению (2.39). При достаточно большом поле E^f соседние островки нулевой плотности сливаются, так что заряженные области становятся изолированными друг от друга. Глобальная эквипотенциальность пропадает, и язык, существенно использующий ее наличие в [12], [13], перестает быть эффективным даже качественно.

Таким образом, в описании реконструкции заряженной поверхности массивной жидкости возникает альтернатива. Если заряд на поверхности жидкости может менять знак, что возможно для эквипотенциальной поверхности, то задача хорошо "продвинута". Нелинейность общего выражения для энергии (2.38) является причиной для резкого (жесткого) перехода к новому состоянию с определенной симметрией реконструированной поверхности и большим количеством деталей реконструкции в переходной зоне, включая явление гистерезиса.

Для задачи с фиксированной плотностью заряда над жидким диэлектриком успехи теории менее впечатляющи. Известна лишь граница, на ко-

торой в плотности $n(\mathbf{r})$ ВЗП появляются нули. При этом $\tilde{n} = 2\bar{n}/3$, участки с высокой зарядовой плотностью формируют треугольную решетку, а участки с низкой зарядовой плотностью - гексагональную. Других количественных утверждений о реконструкции в этом варианте задачи пока не имеется. Ничего нельзя сказать о наличии "дырочной" реконструкции в зоне $\beta < 0$.

Дополнительная нелинейность в меру $\tilde{n}(\mathbf{r}) \geq 0$ ограничивает амплитуду \tilde{n} величиной $2\bar{n}/3$. Для полей, значительно превышающих критическое, этот механизм нелинейности полностью определяет состояние поверхности. Эффекты гистерезиса при этом в значительной мере подавляются.

2.5. Экспериментальные результаты.

Обратимся к имеющимся экспериментам. Как отмечалось выше, потеря устойчивости заряженной поверхности гелия впервые наблюдалась Володиным, Хайкиным, Эдельманом [10]). Закон дисперсии (формула (2.12) детально промерен Лейдерером и к. [11] для системы ионов на границе расщеления $He^3 - He^4$ (именно такая реализация модели заряженной массивной границы не принципиальна). Рис. 2.4, 2.5 из этой работы демонстрирует экспериментальные данные о дисперсии $\omega(q)$ колебаний заряженной границы в области достаточной заряженности $S \leq 1$ (термин заряженность естественно присвоить параметру S из (2.22)) и ее соответствие теории, представленной формулой (2.12). Рис. 2.6 иллюстрирует детали поведения закона $\omega(q)$ в его "вмятине" на фоне теор. предсказания. Как видно из данных рис. 2.4 - 2.6, согласие между теорией и экспериментом в области $S \leq 1$ вполне удовлетворительно.

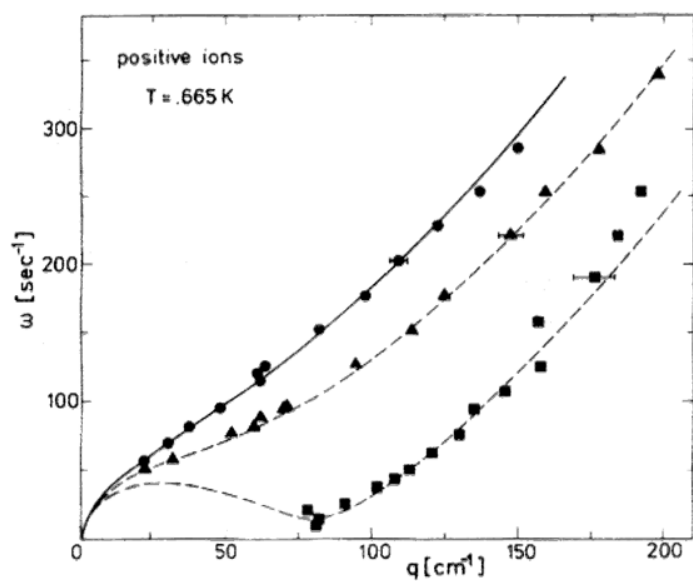


Рис. 2.4. закон дисперсии риплонов на поверхности раздела фаз $He^3 - He^4$, теория (пунктирные линии) и эксперимент. $E/E_c = 0.12, 0.71, 0.99$.

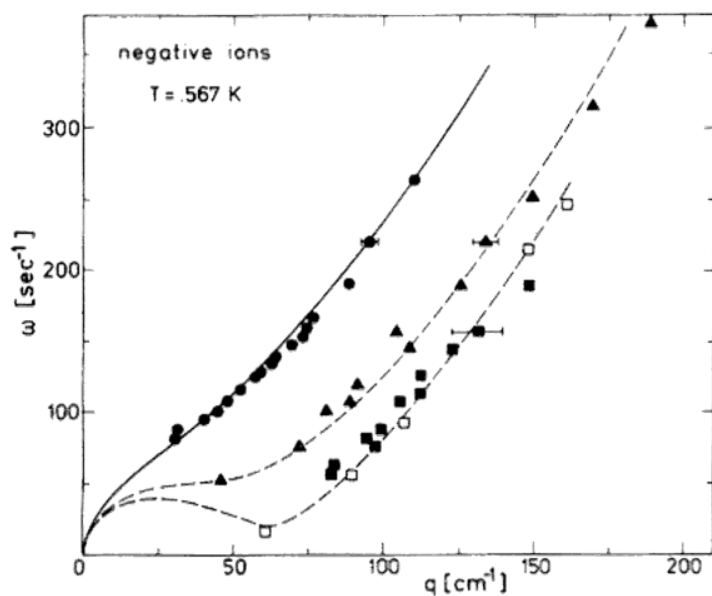


Рис. 2.5. закон дисперсии риплонов на поверхности раздела фаз $He^3 - He^4$, теория (пунктирные линии) и эксперимент. $E/E_c = 0.1, 0.88, 0.99$.

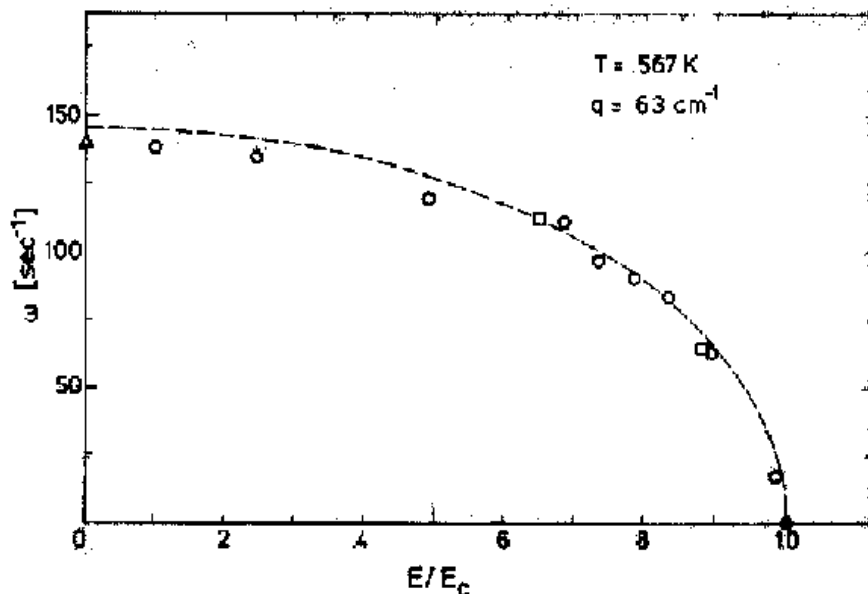


Рис. 2.6. частота, соответствующая волновому вектору $q = 1/a$ в зависимости от электрического поля.

Реконструкция заряженной поверхности гелия при сохранении полного числа зарядов на жидкой поверхности обнаружена в серии работ [14, 15, 32]. Никаких указаний на сотовую реконструкцию в области $\beta < 0$ эти эксперименты не содержат. В области $\beta > 0$ и $S \leq 1$ наблюдается четкая плотноупакованная гофрировка, заполняющая все заряженное зеркало ячейки (см. Рис. 2.7, 2.8 из [29]). Сначала видна одномерная гофрировка, а затем желобки распадаются на соты. В этой ситуации теория отсутствует, т.к. нет возможности использовать малость отношения амплитуды гофрировки к капиллярной длине (основной малый параметр теории эквипотенциальной реконструкции).

Что касается зоны $\beta > 0$ и $S \ll 1$, то здесь эксперимент качественно не следует рекомендациям теории. Наблюдаемая реконструкция неперiodична. Поверхность гелия не покрывается здесь периодическим гофром,

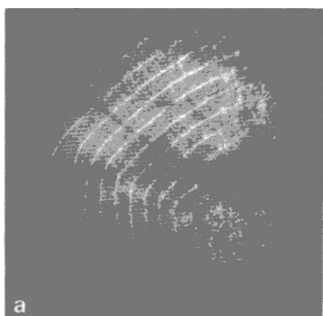


Рис. 2.7. одномерная реконструкция.

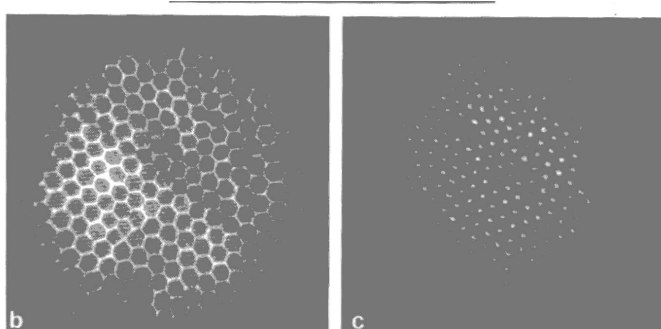


Рис. 2.8. сотовая реконструкция.

заполняющим все жидкое зеркало, как это следует из предсказаний [12], [26]. Вместо этого электроны собираются в одну или несколько многоэлектронных лунок, занимающих лишь небольшую часть общей поверхности гелия. Для иллюстрации на Рис.2.9 приводится картина луночной реконструкции из [29] в области $S \ll 1$ при постепенном увеличении S . Очевидно, луночный сценарий реконструкции энергетически более выгоден, и это обстоятельство требует осмысления.

2.6. Луночное описание реконструкции.

Следует отметить, что исторически вероятность появления многоэлектронных лунок в области $\beta > 0$ начала обсуждаться примерно в то же время, что и построение теории эквипотенциальной реконструкции (см.

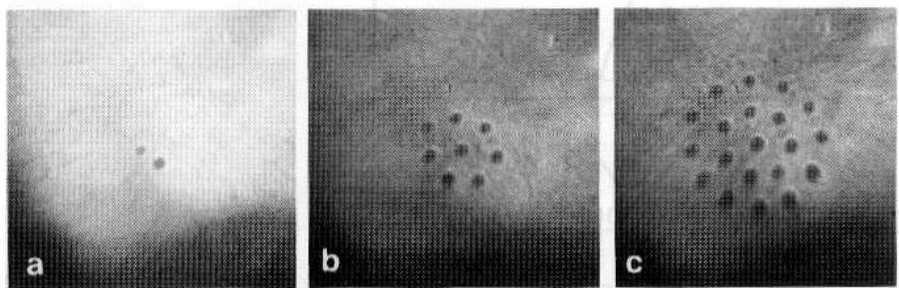


Рис. 2.9. картина образования лунок при увеличении S .

Шикин, Лейдерер [30]). Однако, реальное место этих "поляронных образований" в иерархии состояний, определяющих реконструкцию заряженной поверхности гелия, начинает осознаваться лишь в последнее время. Особенно показателен в этом смысле именно предел $\beta > 0$ и $S \ll 1$.

Для количественных оценок в этих условиях необходимо, во-первых, определение параметров многоэлектронной лунки. Кроме того, полезны дополненные комментарии к динамическому поведению заряженной границы гелия в пределе $S \rightarrow 0$

Начнем с более простого динамического вопроса. Дело в том, что предел $S \rightarrow 0$ в определении закона дисперсии линейных колебаний (2.11) в действительности не имеет реального смысла, так как на пути к нему перестает выполняться условие эквипотенциальности деформированной поверхности гелия. Существуют разные оценки положения этой границы, хотя конкретные расчеты закона дисперсии в переходной области отсутствуют. Для ориентировки можно полагать, что эквипотенциальность пропадает в области

$$V_c \leq T, \quad V_c \sim e^2 \sqrt{n_s^*}. \quad (2.59)$$

Для $T \leq 1K$ переходная область для электронной плотности имеет

масштаб $n_s^* \leq 10^6 \text{ cm}^{-2}$.

В условиях $n_s < n_s^*$ задача о колебаниях заряженной поверхности гелия должна решаться заново без использования свойств ее эквипотенциальности. Подходящей альтернативой, учитывающей влияние деформации жидкой границы на электронную плотность $n(x)$, является требование

$$n(x) = n_s \exp[-eE_{\perp}\xi(x)/T] \quad (2.60)$$

где $\xi(x)$ - амплитуда колебаний заряженной поверхности, E_{\perp} - прижимающее электрическое поле.

С учетом (2.60) (точнее, его линейного разложения, когда $eE_{\perp}\xi(x) < T$), и электронного давления на поверхность гелия в форме $P_{el} = eE_{\perp}n(x)$, закон дисперсии малых колебаний заряженной поверхности принимает вид

$$\rho\omega^2/\alpha = (\kappa^2 - \eta^2)k + \alpha k^3, \quad \eta^2 = n_s E_{\perp}^2 / (\alpha T) \quad (2.61)$$

где $\kappa^2 = \rho g / \alpha$ - капиллярная постоянная. Как и в задаче Френкеля-Тонкса, колебания с законом дисперсии (2.61) теряют устойчивость. Но это происходит в другой области, а именно

$$\eta^2 > \kappa^2, \quad E_{\perp} \simeq V/h \quad (2.62)$$

Согласно (2.62) для достижения неустойчивости слабо заряженной поверхности гелия надо использовать поле, растущее с уменьшением n_s , как $E_{\perp} \propto n_s^{-1/2}$. Это утверждение качественно отлично от "эквипотенциальных" предсказаний (2.11), когда $n_s \rightarrow 0$, но электрическое поле продолжает влиять на устойчивость жидкой границы.

Полезно отметить также, что неустойчивость (2.62) развивается, в первую очередь, на малых волновых числах (а не на капиллярной длине,

как это имеет место в случае (2.11)). Следовательно, пропадает и ожидание универсальной гофрировки реконструированной поверхности гелия с периодом, равным капиллярной длине.

Альтернативой "выступает" луночная реконструкция. Ее обсуждение следует начать с описания свойств отдельной многоэлектронной лунки. Приступая к изложению полученных в этом направлении результатов, обратимся сперва к упрощенному варианту теории, не претендуя на описание деталей распределения $n(r)$ электронов в лунке. Упрощение сводится к выбору функции $n(r)$ в следующем модельном виде:

$$n(r) = \frac{N}{\pi R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right) \quad (2.63)$$

где N - полное число электронов в лунке, являющееся внешним параметром задачи, R - вариационный параметр, имеющий смысл радиуса заряженного пятна.

Выражение для избыточной энергии комплекса "лунка + самосогласованная деформация поверхности гелия" при условии $\nabla\xi \ll 1$ может быть записано в виде [30]:

$$W = \int d^2r \left[\frac{\alpha}{2} [(\nabla\xi)^2 + \kappa^2\xi^2] + eE_{\perp}n(r)\xi + e^2 \int d^2r' \frac{n(r)n(r')}{|r-r'|} \right] \quad (2.64)$$

Здесь $\xi(r)$ - самосогласованная деформация поверхности гелия, ρ и α - плотность и коэффициент поверхностного натяжения, g - ускорение силы тяжести, $\kappa = \sqrt{\rho g / \alpha}$ - капиллярная постоянная жидкого гелия. Слагаемое $(\nabla\xi)^2 + \kappa^2\xi^2$ учитывает деформационный вклад в энергию W , выражение $eE_{\perp}n(r)\xi$ характеризует взаимодействие между деформационной и электронной частями задачи, и, наконец, последнее слагаемое, записанное в

виде интеграла, есть полная энергия кулоновского взаимодействия электронов, сосредоточенных в плоском пятне радиуса R .

Используя явный вид (2.63) $n(r)$, можно привести выражение для W к следующей форме

$$W = \frac{Q^2 E_{\perp}^2}{8\pi\alpha} \exp\left(\frac{\kappa^2 R^2}{2}\right) Ei\left(-\frac{\kappa^2 R^2}{2}\right) + V_c(R), \quad V_c(R) = C_0 Q^2 / R, \quad Q = eN \quad (2.65)$$

Для распределения (2.63) $C_0 = 1/2(\pi/2)^{1/2}$.

Нетрудно убедиться в том, что устойчивое решение уравнения $\partial W / \partial R = 0$ относительно R возможно лишь при условии

$$\kappa R < 1, \quad (2.66)$$

В предельном случае $\kappa R \ll 1$ величина R и полная энергия W приобретают вид

$$R = R^* = C_0 \frac{4\pi\alpha}{E_{\perp}^2}, \quad \xi(0) = -\frac{QE_{\perp}}{2\pi\alpha} \ln \frac{1}{\kappa R^*},$$

$$W = -\frac{Q^2 E_{\perp}^2}{4\pi\alpha} \left(\ln \frac{C_1}{\kappa R^*} - 1 \right), \quad C_1 \approx 1. \quad (2.67)$$

Среди результатов (2.67) интересно отметить независимость от Q величины R^* . Естественно, с ростом Q кулоновское взаимодействие в заряженном ядре лунки возрастает, что, казалось бы должно приводить к возрастанию R^* . Однако параллельно с такой же скоростью растут силы деформационного происхождения, удерживающие электроны в лунке. Поэтому величина R^* , определяемая конкуренцией двух указанных факторов, не зависит от Q .

Полезно также прокомментировать квадратичную зависимость W (2.67) от E_{\perp} и Q . Независимость деформационных результатов от направ-

ления E_{\perp} имела место и выше (см. законы дисперсии (2.12)) без специальных разъяснений. Что касается лунок, то здесь подразумевается, что поле E_{\perp} "гонит" заряд данного знака к центру лунки. При смене знака E_{\perp} надо менять и знак заряда, иначе лунка не существует.

В окрестности $\kappa R \leq 1$ асимптотики (2.67) становятся неточными, и для определения соответствующих величин приходится использовать численные методы. При этом удобно представить энергию (2.65) в следующем виде:

$$\tilde{W} = 2 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{W}{Q^2 \kappa} = s \exp \left(\frac{x^2}{2} \right) Ei \left(-\frac{x^2}{2} \right) + \frac{1}{x}, \quad s = \frac{1}{2\kappa R^*}, \quad x = \kappa R, \quad (2.68)$$

где R^* определено в (2.67). Задавая s и строя функцию $\tilde{W}(s, x)$, можно найти положение минимума этой функции и ее значение в точке минимума. Эта информация достаточна для определения свойств \tilde{W} и R в окрестности $\kappa R \leq 1$. Так, минимум функции \tilde{W} впервые появляется при $s = s_{min} = 0.9$ в точке $x_{max} = 1.14$. Функция \tilde{W} впервые обращается в нуль при $s = s^* = 1.05$ в точке $x^* = 0.72$. Приведенная на рис. 2.10 зависимость x от параметра $1/2s = \kappa R^*$ в области $s \geq s_{min}$ дает представление о величине истинного безразмерного радиуса лунки x по сравнению с его асимптотическим значением κR^* .

Информация (2.61)- (2.68) достаточна для определения условий возникновения лунок. Ясно, что конкурирующими здесь являются энергии лунки с одной стороны, и электростатическая энергия конденсатора с 2D электронами, в котором флуктуационно возникла лунка. Неопределенность заключается в оценке оптимального заряда, образующего критическую лунку. Ситуация относительно проста лишь в предельном случае $s \ll 1$.

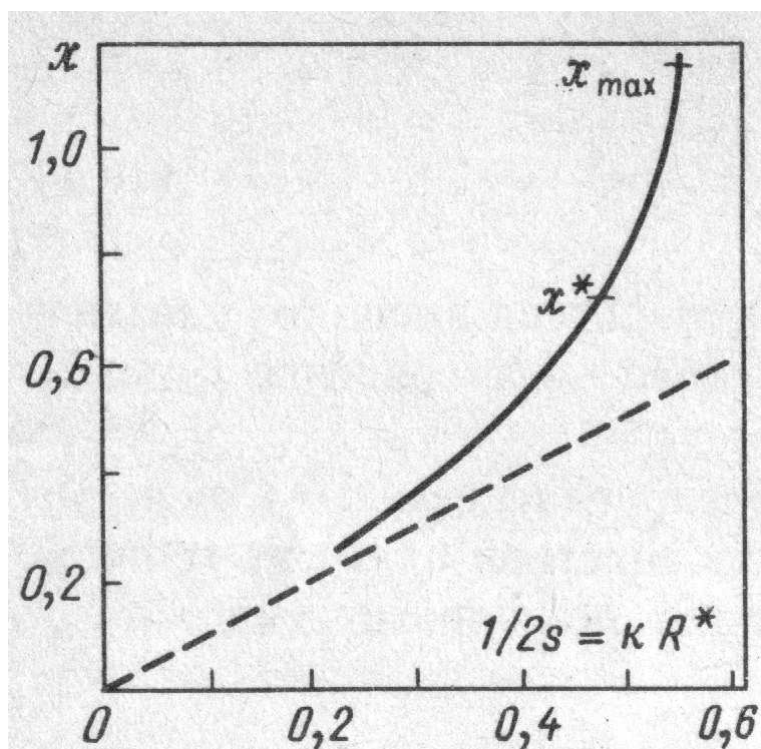


Рис. 2.10. зависимость x от параметра $1/2s$.

Здесь, с учетом развития неустойчивости (2.61) на малых волновых числах все свободные электроны в момент перехода "скатываются" в лунку. Это происходит в условиях, когда кулоновская энергия V_c электронной системы, занимающей круг радиуса L между пластинами конденсатора рис. 2.1, сравнивается с энергией W многоэлектронной лунки с тем же зарядом Q

$$V_c = W \quad (2.69)$$

$$V_c = Q^2 \frac{(h-d)d}{L^2 h}, \quad Q = \pi L^2 e n_s, \quad W = 2^{3/2} \pi^{1/2} Q^2 \kappa \tilde{W}(x, s) \quad (2.70)$$

где $\tilde{W}(x, s)$ из (2.68).

При $L \gg h$ энергия V_c (2.70) достаточно мала и вместо общего выражения $W(x, s)$ (2.68) в условии (2.70) можно воспользоваться его разложением вблизи нулевой точки

$$W(s_*, x_*) = 0, \quad s_* = 1.05, \quad x_* = 0.72, \quad E_-^0 \simeq E_+^0 = (2\pi)^{3/2} s_* \kappa \alpha \quad (2.71)$$

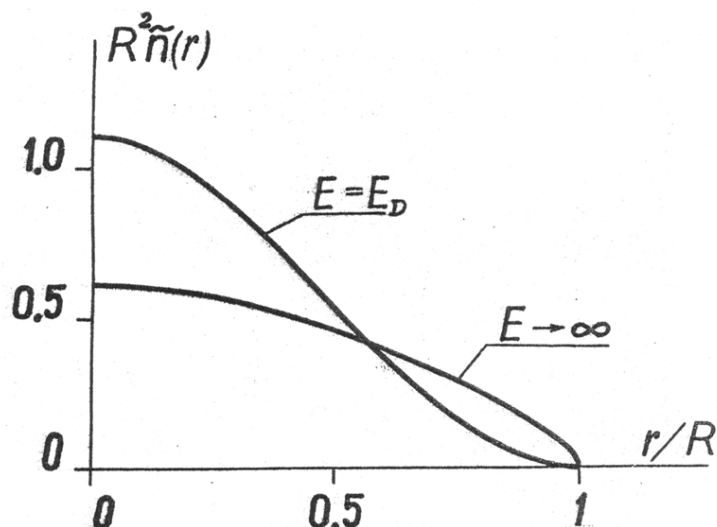


Рис. 2.11. плотность электронов в лунке.

$$W(s, x_*) \simeq \frac{\partial W}{\partial s}(s - s_*) \quad (2.72)$$

В результате, вместо (2.69), (2.70) имеем

$$Q^2 \frac{(h-d)d}{L^2 h} = \frac{\partial W}{\partial s}(s_{max} - s_*) \quad (2.73)$$

С учетом малости левой части (2.73), величина s_{max} близка к s_* .

Поле E_-^{min} , связанное с s_{max} формулами (2.67), (2.68), (2.73) конечно и не зависит от n_s (величина n_s , или точнее, Q , выпадает из определения (2.73)). Следовательно, в пределе $n_s \rightarrow 0$ лунки возникают раньше, чем наступает динамическая неустойчивость! Этим объясняется происхождение картинок рис. 2.9.

Более тщательный вариационный расчет параметров многоэлектронной лунки, выполненный Мельниковым и Мешковым [25, 26] показал, что плотность электронов действительно монотонно убывает при удалении от центра лунки, обращаясь в пределе $\kappa R \ll 1$ корневым образом в нуль на границе электронного пятна. В области $\kappa R \leq 1$ распределение $n(r)$ близ-

ко к гауссову. Численные расчеты функции $n(r)$ из [26], иллюстрирующие поведение локальной электронной плотности в разных предельных случаях приводят к зависимостям, изображенным на рисунке рис. 2.11. Что касается усредняемых характеристик лунки, как например, минимального поля E_{\perp}^{min} при котором становится возможным существование отдельной многоэлектронной лунки, то они близки к данным [30]. Так, согласно [26], поле $E_{\perp}^{min} = 4.06(\kappa\alpha)^{1/2}$, что хорошо совпадает с результатом (2.73). Здесь критерием выгодности образования лунок является требование $s > s_*$, из которого, как ясно из изложенного выше, можно получить:

$$E_{\perp} \geq E_{\perp}^{min}, \quad (E_{\perp}^{min})^2 = (2\pi)^{3/2} s_* \kappa \alpha = (16.52 \pm 0.005) \kappa \alpha. \quad (2.74)$$

Прямые наблюдения отдельных лунок содержатся в [31, 29, 34], рис. 2.9.

Имеет смысл отметить, что две лунки могут находиться в равновесии на конечном расстоянии друг от друга. Взаимодействие W_{dd} между ними содержит кулоновскую и деформационные части

$$W_{dd}^b = -\frac{Q^2 E_{\perp}^2}{2\pi\alpha} K_o(\kappa r) + \frac{Q^2}{r} \quad (2.75)$$

Как и выше, Q - полный заряд лунки, E_{\perp} - прижимающее поле, r - расстояние между лунками, $K_o(x)$ - модифицированная функция Бесселя. Энергия (2.75) имеет минимум $\partial W_{dd}^b / \partial r = 0$, в точке r_{min} , следующей из

$$K_1(x_m) - x_m^{-2} = 0, \quad x_m = \kappa r_{min}, \quad (2.76)$$

$$x_m \geq 1. \quad (2.77)$$

Наличие метастабильной связи (2.76) между лунками качественно поясняет, почему возникающая в ходе распада 2D заряженной системы сово-

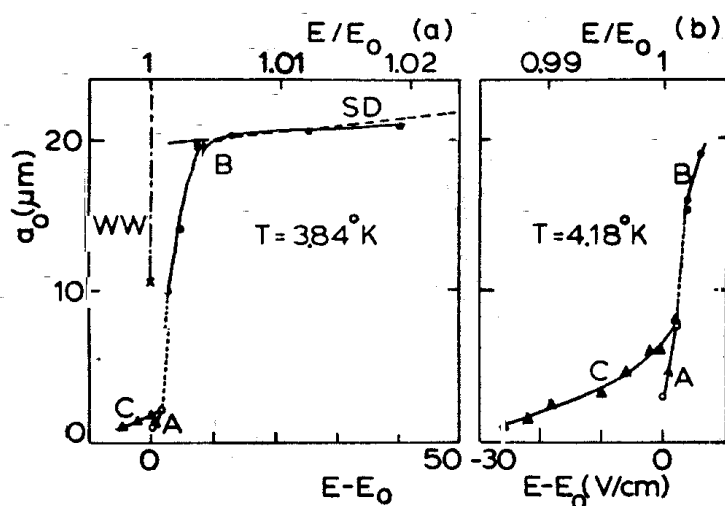


Рис. 2.12. изменение глубины лунки при увеличении поля, отрезок кривой С соответствует желобковой деформации.

купность лунок (рис. 2.9) собирается в кластеры, имеющие внутреннюю периодичность с характерной длиной порядка капиллярной.

Заканчивая описание красивых образований, многоэлектронных лунок, отметим еще предложение [33] трактовать реконструкцию заряженной поверхности жидкости как образование 2D кулоновского кристалла из отдельных заряженных лунок (см. рис. 2.3). Такая альтернатива эквипотенциальным расчетам [12, 26, 27] привлекательна. Но строить решетку с использованием свойств отдельных лунок опасно по нескольким причинам. В частности, для существования одиночной лунки важен параметр $\kappa R < 1$. В кристаллической задаче он меняется на комбинацию $R/a_s < 0$, где a_s - период решетки. Ясно, что $R/a_s > \kappa R$, и потому соседние ядра лунок могут перекрываться между собой, что лишает данную модель большей части привлекательности. Обсуждение этого вопроса в [33] отсутствует. Вместо этого представлены экспериментальные "аргументы" [32] в пользу "луночной" трактовки реконструкции. Утверждается, что свойства отдель-

ной лунки практически не зависят от наличия соседей. Показано, что глубина отдельной лунки в сотовом кристалле соответствует рекомендациям луночной теории (см. рис. 2.12а). Предлагается "луночная" трактовка желобковой реконструкции, которая метастабильна и подвержена гистерезисным явлениям (рис. 2.12). Отметим, что в эквипотенциальном формализме [12] одномерная (желобковая) реконструкция следует "мягкому" сценарию, т.е. является безгистерезисной! А сотовая реконструкция должна сопровождаться гистерезисными явлениями.

3. Тонкая пленка в инверсионных условиях.

3.1. Особенности инверсионной задачи.

Задача об устойчивости и реконструкции тонких жидких пленок специально интересна по нескольким причинам. Во-первых, более разнообразен "состав участников". Кроме заряженных пленок жидкости такой же круг явлений наблюдается на нейтральных (и заряженных) инверсионных жидких пленках (определение инверсии см. ниже). Сюда же следует отнести и проблему устойчивости жидких пленок при переходе от смачивания к несмачиванию твердой подложки.

Во-вторых, развитие неустойчивости в таких объектах происходит, в первую очередь на малых волновых числах без участия выделенной специальной длины типа капиллярной постоянной. Следовательно, динамика реконструкции должна складываться как-то иначе, чем в массивном случае.

И, наконец, в-третьих, реконструкция тонких пленок существенно более разнообразна (по сравнению с массивной) параметрически. Кроме толщины пленки h на ее устойчивость влияет наличие сил Ван-дер-Ваальса, качество подложки, отношение r_s/h , где r_s - среднее расстояние между электронами.

Одной из интересных, нейтральных, двумерных систем, демонстрирующих механическую неустойчивость, является жидкая пленка, висящая

на твердом потолке (инверсионная пленка). Образование подобных пленок осуществляется различными способами. Наиболее известным из них является конденсация жидкости на охлажденные стенки резервуара, в частности, на его потолок [45]. Другие, более специальные примеры из этого ряда обсуждаются ниже.

Чисто гравитационное поведение инверсионной пленки абсолютно неустойчиво [41]. Учет сил Ван-дер-Ваальса ведет к появлению конечного интервала толщин, в пределах которого возможно механическое равновесие однородной пленки. С ростом ее толщины, в окрестности некоего, критического значения h_* теряется механическая устойчивость пленки, что отражается, в частности, на свойствах закона дисперсии малых колебаний формы поверхности пленки. При этом по аналогии с другими известными случаями (заряженная пленка жидкости [46] - [49], устойчивость пленок в задаче о смачивании [50]), неустойчивость инверсионной пленки имеет место в первую очередь на малых волновых числах.

Детали развития неустойчивости и возможности стационарной реконструкции тонкой пленки должны обсуждаться заново. Если для массивной, заряженной жидкости периодическая реконструкция обусловлена, в первую очередь, появлением неустойчивости на конечных волновых числах в окрестности так называемой капиллярной длины, [12], [25], то для тонкой пленки подобные наводящие соображения отсутствуют. В известной и близкой по духу работе [52], посвященной изучению свойств жидких капель на поверхности твердого тела, наклоненной под произвольным углом к горизонту, отмечена, в частности, ситуация когда капля висит на твердом потолке (сила тяжести отрывает жидкость от подложки). Однако, поста-

новка задачи в [52] исключает предельный переход к задаче об однородной пленке жидкости, т.к. здесь отсутствуют силы Ван-дер-Ваальса.

Обсуждение свойств нейтральной жидкой пленки гелия (водорода) в инверсионных условиях с целью определения критериев ее устойчивости и деталей реконструкции наиболее прост с формальной точки зрения. Поэтому обзор "пленочных" результатов естественно начать с инверсионной задачи.

3.2. Неустойчивость инверсионной пленки.

Рассмотрим тонкую пленку жидкости толщины h , сконденсированную на твердом потолке, и имеющую, для начала, плоскую форму. Равновесные, механические свойства пленки определяются двумя факторами: притяжением к потолку Ван-дер-Ваальсовского происхождения, способном удерживать пленку на твердой подложке в плоском состоянии, и гравитацией, ответственной за возможную неустойчивость пленки.

В обычной геометрии (пленка на твердой подложке) потенциал, удерживающий плоский слой жидкости вблизи подложки, формируется давлением Ван-дер-Ваальса и гравитацией

$$P = \rho g h - P_w(h). \quad (3.1)$$

Здесь ρ - объемная плотность жидкости, g - ускорение силы тяжести, P_w - давление Ван-дер-Ваальса:

$$P_w(\zeta) = \frac{f}{\zeta^3} \left(1 + \frac{\zeta}{d_w} \right)^{-1} \quad (3.2)$$

Выражение (3.2) для сил Ван-дер-Ваальса записано для общего случая пленки переменной толщины $\zeta(x, y)$. Эта интерполяционная формула, учи-

тывающая эффекты запаздывания, была предложена в [53], [54]. Она содержит константу взаимодействия Ван-дер-Ваальса f и характерную толщину d_w . Измерение констант f и d_w является сложной экспериментальной задачей. В случае со сверхтекучим гелием они определяются из анализа распространения третьего звука [54]. Для водорода значения f и d_w неизвестны.

Потенциал (3.1) монотонно возрастает (производная $\partial P/\partial h$ положительна), и потому пленка, лежащая на твердой подложке абсолютно устойчива.

Для инверсионной пленки комбинация

$$P = -\rho gh - P_w(h) \quad (3.3)$$

становится немонотонной, проходя через максимум в точке h_* :

$$\partial P/\partial h|_{h_*} = 0. \quad (3.4)$$

Решение уравнения (3.4) существует при любых значениях f и d_w , ибо $\partial P/\partial h < 0$. Неустойчивость инверсионной пленки в точке h_* была впервые отмечена авторами [55].

Для того, чтобы оценить критическую толщину пленки h_* , имеет смысл рассмотреть два предельных случая: $h \ll d_w$ и $h \gg d_w$. В первом случае можно пренебречь эффектами запаздывания, а во втором они будут играть определяющую роль. Тогда для P_w получим:

$$P_w(\zeta) = f/\zeta^3 \quad (\text{at } \zeta \ll d_w) \quad (3.5)$$

и

$$P_w(\zeta) = fd_w/\zeta^4 \quad (\text{at } \zeta \gg d_w). \quad (3.6)$$

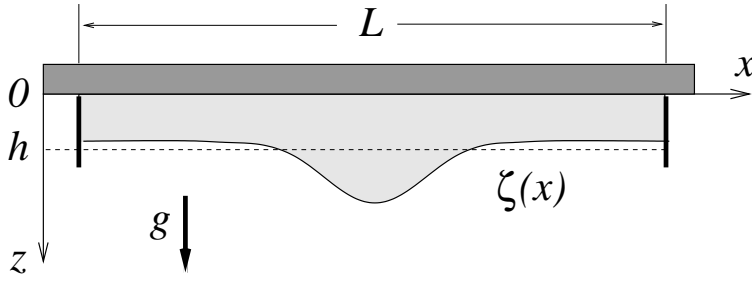


Рис. 3.1. схема реконструкции.

а для h_* в случае $\zeta(x, y) = h = const$

$$h_* = (4fd_w/\rho g)^{1/5} \quad (h_* \gg d_w), \quad (3.7)$$

$$h_* = (3f/\rho g)^{1/4} \quad (h_* \ll d_w). \quad (3.8)$$

В условиях $h > h_*$, силы Ван-дер-Ваальса недостаточны для удержания плоской пленки на потолке, и в задаче возникает неустойчивость.

Однако, если пленка с $h > h_*$ перестает быть плоской,

$$\zeta(x) = h + \xi(x), \quad \int_{-L/2}^{+L/2} \zeta(x) dx = Lh \quad (3.9)$$

(L - размеры пленки в горизонтальном направлении) то можно ожидать сохранения механического равновесия в некоем интервале значений параметра δ , характеризующего степень надкритичности

$$\delta = (h - h_*)/h_*. \quad (3.10)$$

Подобная ситуация возможна благодаря появлению в балансе сил лапласовского давления, способного стабилизировать форму пленки $\zeta(x)$ и в условиях $h > h_*$, где под h мы будем понимать в дальнейшем среднюю по поверхности толщину пленки из (3.9). Схема реконструкции приведена на рис. 3.1.

Следует отметить, что в общем случае конечной температуры $T \neq 0$ все жидко-пленочные образования на потолке неустойчивы. Тем не менее, в условиях $T \ll T_o$, где T_o -температура кипения данной жидкости, можно говорить о метастабильном, механическом равновесии, когда на потолке присутствует слой жидкости с $\delta > 0$. Аналогичные соображения используются и в [52] при постановке задачи о свойствах капель на наклонной подложке.

3.3. Реконструкция пленки бесконечных размеров.

Задача о построении решения, описывающего форму поверхности инверсионной пленки при $\delta > 0$ рассмотрена в [56, 57]. В этих условиях необходимо помимо силы тяжести и сил Ван-дер-Ваальса учесть силы поверхностного натяжения. Давление на свободной поверхности жидкости определяется при этом выражением

$$P = -\frac{\alpha \Delta \zeta}{[1 + (\nabla \zeta)^2]^{3/2}} - \rho g \zeta - P_w. \quad (3.11)$$

Функция ζ , описывающая равновесную форму поверхности, является решением уравнения $P = const = p$, P из (3.11). Новая система уравнений, описывающая равновесную форму поверхности, включает условие постоянства давления:

$$\frac{\alpha \Delta \zeta}{[1 + (\nabla \zeta)^2]^{3/2}} + \rho g \zeta + P_w + p = 0. \quad (3.12)$$

и условие сохранения полного объема жидкости в слое V :

$$\int d^2 \mathbf{r} \zeta(\mathbf{r}) = V, \quad (3.13)$$

Заметим, что требование постоянства объема оказывается здесь нетривиальным. При исследовании волн зарядовой плотности в "массивной задаче" [12, 13, 25, 27] в силу неограниченной глубины жидкости это условие не было необходимым. В случае инверсионной пленки условие (3.13) необходимо учитывать по существу.

Короткодействующий характер сил Ван-дер-Ваальса приводит к тому, что значения h_* , рассчитанные по формулам (3.7) и (3.8) с параметрами f и d_w , взятыми из [54], имеют один порядок величины

$$h_* \sim 10^{-4} \text{ cm} \quad (3.14)$$

что во много раз превосходит $d_w \sim 10^{-6}$ см. Это означает, что при малых значениях δ в (3.11) можно воспользоваться формулой (3.6) для P_w . С другой стороны, ниже будет показано, что количественные характеристики реконструкции висящей пленки при $\delta > 0$, рассчитанные с применением (3.6) и (3.5), отличаются слабо. Поэтому в дальнейшем, обсуждая картину развития неустойчивости с увеличением δ качественно, мы считаем оправданным использование формулы (3.5).

Уравнение (3.12) может быть получено, исходя из вариационного принципа минимума энергии слоя жидкости при дополнительном условии (3.13). Энергия рассматриваемой системы с учетом сил гравитации, поверхностного натяжения и Ван-дер-Ваальса в форме (3.6) есть

$$\mathcal{E} = \int d^2 \mathbf{r} \left[\alpha \sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2} - \frac{1}{2} \rho g \zeta^2 + \frac{f d_w}{3 \zeta^3} \right]. \quad (3.15)$$

В равновесии эта энергия имеет экстремальное значение, что выражается требованием

$$\delta \left[\mathcal{E} - p \int d^2 \mathbf{r} \zeta(\mathbf{r}) \right] = 0. \quad (3.16)$$

При этом условие нормировки (3.13) учитывается в уравнении (3.16) с помощью метода неопределенных множителей Лагранжа. Роль неопределенного множителя Лагранжа играет в данном случае константа p .

Для получения основных количественных характеристик явления реконструкции можно ограничиться рассмотрением одномерной задачи. Кроме того, будем искать точное решения (3.12) с P_w в виде (3.5). В этом случае уравнение (3.12) имеет первый интеграл:

$$-\frac{\alpha}{[1 + (\zeta'^2)]^{1/2}} + \frac{1}{2}\rho g \zeta^2 - \frac{f}{2\zeta^2} + p\zeta = C_1 \quad (3.17)$$

Условие нормировки выглядит как

$$\int dx \zeta(x) = S. \quad (3.18)$$

Здесь C_1 и p - произвольные константы, S - площадь среза пленки в плоскости (x, z) . Полагая угол наклона поверхности к горизонтальной плоскости малым,

$$|\zeta'| \ll 1, \quad (3.19)$$

что с хорошей точностью выполняется при $h < 10^3 h_*$ и соответствует реальным экспериментальным условиям [45], [58] можно упростить уравнение (3.12):

$$\alpha \zeta'' + \rho g \zeta + \frac{f}{\zeta^3} + p = 0. \quad (3.20)$$

Первый интеграл (3.20) примет вид

$$\frac{1}{2}\zeta'^2 + U(\zeta) = C, \quad (3.21)$$

где

$$U(\zeta) = (\rho g \zeta^4 + 2p\zeta^3 - f)/2\alpha \zeta^2 C = 1 + C_1/\alpha. \quad (3.22)$$

Уравнение (3.20) при $h > h_*$ имеет нелинейные периодические решения для неограниченной по оси x пленки. Если обозначить через $\zeta = z_i$, $i = 1, \dots, 4$, $z_4 < z_3 < z_2 < z_1$ корни полинома

$$\rho g \zeta^4 + 2p \zeta^3 - 2\alpha C \zeta^2 - f, \quad (3.23)$$

то такое нелинейное решение в диапазоне значений $z_2 < \zeta < z_1$, отвечающее новому, реконструированному состоянию поверхности можно записать в интегральной форме:

$$\int_{z_2}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{2[C - U(\zeta)]}} = x - x_0. \quad (3.24)$$

Произвольный параметр x_0 появляется здесь вследствие инвариантности исходного уравнения (3.12) по отношению к сдвигу вдоль оси x .

Уравнения, аналогичные (3.17)-(3.24) легко выводятся и для P_w в виде (3.6).

Интеграл в левой части (3.24) можно выразить через эллиптические интегралы первого и третьего рода $F(\mu, r)$ и $\Pi(\mu, n, r)$. При этом период нелинейной стационарной волны поверхностной деформации также выражается через эти функции:

$$T = \frac{4a}{\sqrt{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}} \left[(z_2 - z_3) \Pi \left(\frac{\pi}{2}, \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}, r \right) + z_3 F \left(\frac{\pi}{2}, r \right) \right]. \quad (3.25)$$

Здесь $a = (\alpha/\rho g)^{1/2}$ - капиллярная длина.

3.4. Реконструкция ограниченной нейтральной пленки.

1. Получив решение (3.24), (3.25) одномерной задачи о реконструкции в наиболее общем виде, заметим далее, что корни z_i полинома (3.23) зависят

от двух произвольных констант p и C . Условие нормировки (3.18) дает возможность исключить один из параметров, например, параметр p . Таким образом, форма реконструированной поверхности инверсионной пленки определяется однопараметрическим семейством периодических функций. Период такой поверхностной структуры зависит от параметра C . Возникающая неоднозначность может быть преодолена, если ввести в задачу дополнительные (например, граничные) условия. Одним из таких условий могло бы стать предположение о формировании одиночной стационарной волны деформации, когда $T \rightarrow \infty$, - солитона. Однако условие нормировки запрещает существование такого решения, поскольку в этом случае интеграл $\int dx (\zeta(x) - h)$ расходится. Другая возможность выбора - количественный анализ энергии системы. Численный расчет показывает, что в семействе решений (3.24) наиболее предпочтительным энергетически оказывается решение с наибольшим периодом, т.е. мы вновь приходим к пределу $T \rightarrow \infty$, который в случае неограниченной геометрии вступает в противоречие с требованием сохранения полного объема жидкости (3.18).

Поэтому, чтобы однозначно определить форму реконструированной инверсионной пленки, было бы логично рассмотреть случай, когда слой жидкости ограничен в горизонтальном направлении вертикальными стенками, расположенными на расстоянии L друг от друга, поскольку именно такая ситуация реализуется в условиях эксперимента.

$$-L/2 \leq x \leq L/2 \quad (3.26)$$

Эффективный угол смачивания стенок жидкостью есть θ . Условие $\theta =$

0, что эквивалентно

$$\zeta' \Big|_{\pm L/2} = 0. \quad (3.27)$$

позволяет осуществить гладкий переход от $h < h_*$ к $h > h_*$, т.к. в противном случае, $\theta \neq 0$, при $h < h_*$ поверхность жидкости не была бы плоской вблизи вертикальных стенок. Теперь, в новой геометрии (3.26), (3.27), произвольный параметр C в семействе $\zeta(x)$ решений системы (3.24), (3.18) может принимать лишь счетное множество значений. Задача состоит в том, чтобы выбрать из этого множества такое значение параметра, которое соответствовало бы форме поверхности с наименьшей энергией.

Значение параметра C , при котором выполняются граничное условие (3.27), может быть найдено из требования

$$L/T = N,$$

где N - натуральное число. Величина N совпадает с числом максимумов периодической функции $\zeta(x)$ в интервале $-L/2 < x < L/2$ (начало отсчета помещено в центр ячейки), т.е. реконструированная поверхность представляет собой систему N "капель", соединенных между собой. Для такой системы удобно ввести среднюю толщину слоя

$$h = L^{-1} \int_{-L/2}^{L/2} dx \zeta(x).$$

Численный анализ условий устойчивости инверсионного слоя при средних значениях уровня надкритичности $\delta < 10$, $\delta = h/h_* - 1$ показал, что устойчивым является решение с $N = 1$. Оказалось, что энергия реконструированной пленки с $N = 1$ имеет наибольшее отрицательное по сравнению с другими N значение. Результаты вычислений для $h = 1.78h_*$, $L = 13.3a$

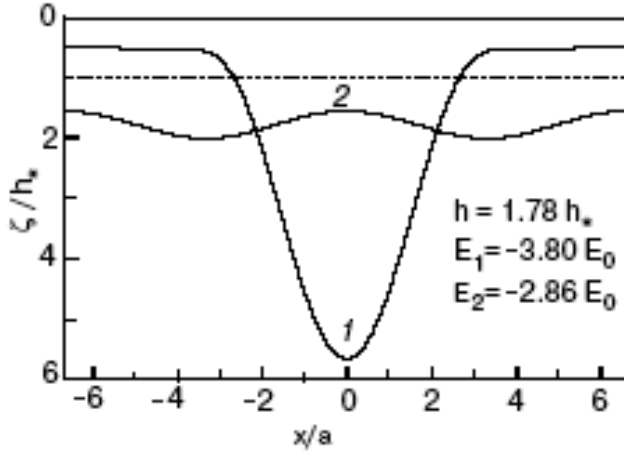


Рис. 3.2. профиль поверхности.

приведены на рис. 3.2 из [57]. Кривая 1 отвечает профилю поверхности с $N = 1$, а кривая 2 - с $N = 2$. Координаты x и y нормированы на капиллярную длину a и критическую толщину пленки h_* соответственно. Энергия пленки с одним максимумом, выраженная в единицах $E_0 = (\alpha\rho g)^{1/2}h^2/4$, оказалась равной $E_1 = -3.80 E_0$, а энергия системы с двумя максимумами - $E_2 = -2.86 E_0$.

Кроме того, было проверено, что вторая вариация энергии жидкого слоя с одним минимумом

$$\delta^{(2)}E = \int_{-L/2}^{L/2} dx \delta\zeta(x) \hat{\Lambda} \delta\zeta(x),$$

где

$$\hat{\Lambda} = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho g}{2} + \frac{3f}{\zeta^4(x)}$$

- линейный дифференциальный оператор, положительно определена для значений $L < 13a$ и $h < 10h_*$. Это означает, что малые возмущения реконструированной пленки с $N = 1$ привели бы к увеличению энергии системы, и это говорит о ее устойчивости.

2. В предельном случае $h > 10h_*$ система из N капель имеет очень тонкие перемычки, объем жидкости в которых перенебрежимо мал. Это позволяет использовать для описания формы каждой капли решение Френкеля [52]:

$$\zeta(x) = \frac{A_0}{2}(1 + \cos x/a), \quad (3.28)$$

где

$$A_0 = S/\pi a \quad (3.29)$$

- вертикальный размер капли, $S = hL$ - двумерный "объем" капли. Энергия капли (3.28):

$$E_1(S) = -\frac{\alpha}{2\pi a^3} S^2 \quad (3.30)$$

Полную энергию жидкости можно оценить как сумму энергий отдельных капель. Если полный объем жидкости распределен на N капель, энергия системы есть

$$E = N E_1(S/N) = -\frac{\alpha}{2\pi a^3} \frac{S^2}{N},$$

что означает увеличение энергии с ростом числа капель. Следовательно, и в макроскопическом пределе $h > 10h_*$ существование одиночной капли более выгодно энергетически.

Покажем, что с ростом надкритичности толщина пленки на границах ячейки падает. Для этого (3.21) найдем универсальную связь между ζ_{min} и ζ_{max} при заданном размере одиночной капли L . Так как $\zeta'(L/2) = \zeta'(0)$ из (3.21) получаем

$$U(\zeta_{min}) = U(\zeta_{max}), \quad (3.31)$$

где U из (3.22). Предположим теперь, что степень надкритичности достаточно велика, так что основная масса жидкости сосредоточена в капле,

а края капли можно считать плоскими. Тогда в уравнении (3.20) можно пренебречь величиной $\alpha\zeta''$ в точке $\zeta(L/2) = \zeta_{min}$, откуда получаем

$$p = -\rho g \zeta_{min} - \frac{f}{\zeta_{min}^3}.$$

Далее, подставляя значение p в (3.31) получаем связь между ζ_{min} и ζ_{max} :

$$\rho g(\zeta_{min} + \zeta_{max}) + \frac{f(\zeta_{min} + \zeta_{max})}{\zeta_{max}^2 \zeta_{min}^2} - 2 \left(\rho g \zeta_{min} + \frac{f}{\zeta_{min}^3} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Считая $\zeta_{min} \ll \zeta_{max}$ и $\zeta_{max} \simeq hL/\pi a$ получаем из (3.32) интерполяционную формулу

$$\zeta_{min} \sim h_* \delta^{-1/3} \frac{\pi a}{L}, \quad (3.33)$$

где h_* из (3.8).

Аналогичная формула с учетом запаздывания имеет вид

$$\zeta_{min} \sim h_* \delta^{-1/4} \frac{\pi a}{L}, \quad (3.34)$$

h_* из (3.7). Интерполяционные выражения (3.33) и (3.34) указывают на уменьшение толщины краев пленки с ростом надкритичности.

Итак, при переходе через нулевой уровень надкритичности, на плоском пьедестале, толщина которого определяется, в основном, силами Ван-дер-Ваальса, постепенно формируется одиночная капля, высота которой растет, а поперечный размер стремится к $2\pi a$ с ростом надкритичности. В пределе $\delta \gg 1$ эта капля хорошо описывается формулой, полученной Френкелем.

Изменение формы капли с ростом надкритичности демонстрирует рис. 3.3 из [57]. Средняя толщина пленки для кривых 1, 2, и 3 равна соответственно $h = 2h_*$, $h = 5h_*$, $h = 7h_*$. Видно, что характерный горизонтальный размер капли составляет несколько капиллярных длин и слабо

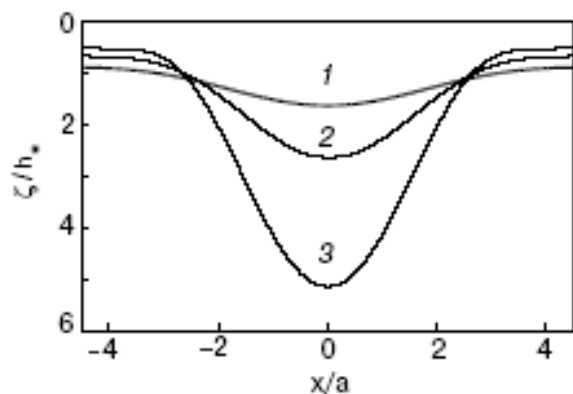


Рис. 3.3. изменение формы капли с ростом надкритичности.

зависит от уровня надкритичности. Толщина жидкого слоя вблизи стенок меньше h_* , и она уменьшается с ростом h . В случае $h \gg h_*$ большая часть объема жидкости концентрируется в капле.

Рис. 3.4 показывает, как различаются формы капли, рассчитанные при учете эффектов запаздывания для потенциала Ван-дер-Ваальса и без него. Расчет выполнен для $\delta = 0.5$. Видно, что количественные различия в форме капли ничтожны. При больших степенях надкритичности различия становятся не видны на графике.

На рисунке 3.5 [57] показана зависимость вертикального размера капли $A = \zeta(0) - \zeta(L/2)$ от параметра надкритичности δ (3.10) при $L = 9a$. Чтобы сравнить результаты [57] с макроскопической моделью [52], высота капли A нормирована на высоту A_0 капли Френкеля из (3.29). При высоком уровне надкритичности $\delta \gg 1$ высота капли A близка к высоте капли Френкеля того же объема. При $h \sim h_*$ вертикальный размер капли A значительно отличается от A_0 .

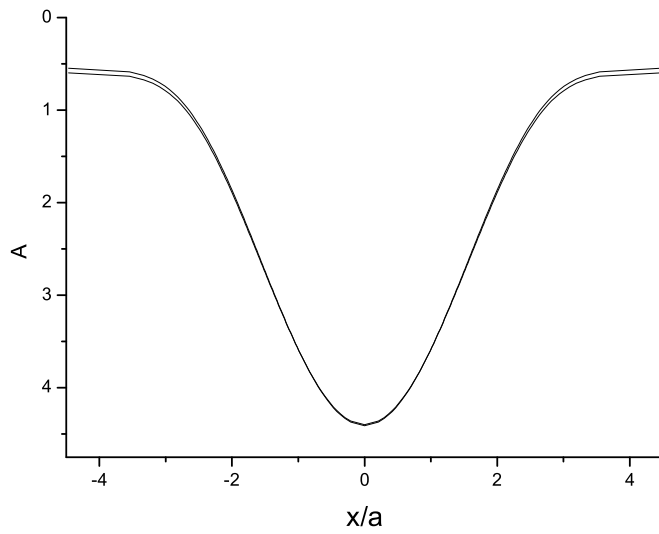


Рис. 3.4. форма капель, рассчитанная для (3.7) и (3.8).

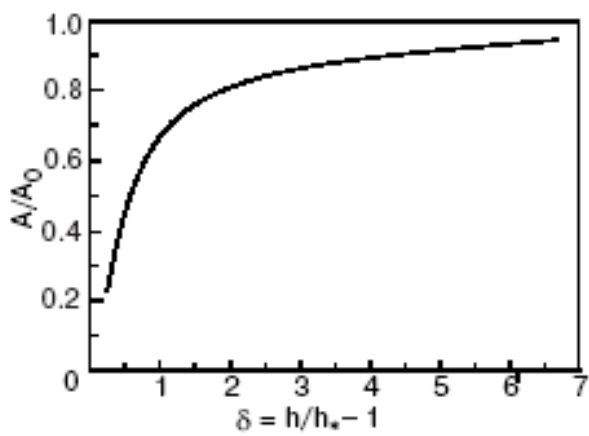


Рис. 3.5. вертикальный размер капли в зависимости от надкритичности.

3. Завершая обсуждение проблемы устойчивости нейтральной тонкой пленки в инверсионных условиях полезно обозначить границы применимости полученных теоретических результатов. Одно из предположений, (3.19), позволившее существенно упростить задачу, означает, что характерные масштабы в горизонтальном и вертикальном направлениях должны значительно различаться. Горизонтальный размер капли имеет порядок капиллярной длины, для жидкого водорода $a \approx 0.2$ см. Характерная толщина пленки может быть оценена через критическую толщину h_* , что для пленки жидкого водорода на диэлектрической подложке составляет $h_* \approx 10^{-4}$ см. Нарушение условия (3.19) эквивалентно $A/a \sim 1$ или $h \sim a^2/L$ с учетом (3.29). Из этих оценок ясно, что предложенное описание поведения пленки должно быть верным при

$$\delta < a^2/Lh_* \sim 10^3 \quad (3.35)$$

или $h < 10^{-2}$ см для $L \sim 10a$.

Условие (3.19) можно рассматривать как грубый критерий устойчивости системы. Действительно, как отмечено в п. 3 данной главы, классический солитон в неограниченной геометрии в задаче о реконструкции не может существовать из-за расходимости интеграла $\int dx (\zeta(x) - h)$. С другой стороны, в задаче с конечным размером роль "крыльев" ограниченного солитона выглядит несущественной (см. комментарии к рис. 3.3). Поэтому имеется характерный размер L^* , разделяющий эти предельные случаи. Этот размер соответствует моменту отрыва капли, когда на кривой $\zeta(x)$ появляются точки с $\zeta' \rightarrow \infty$. Условие (3.35), эквивалентное $\zeta' \sim 1$ означает ослабление сил лапласовского давления, которые вместе с силами Ван-дер-

Ваальса обеспечивают стабильность системы. В этом смысле неравенство (3.35) накладывает ограничения сверху на масштаб L при заданном уровне надкритичности. Ясно, что точное решение уравнения (3.12) без условий (3.19) дало бы менее жесткие ограничения на L .

Со стороны малых толщин нас ограничивает невозможность считать жидкую среду непрерывной, что соответствует $h > 10^{-7}$ см. Таким образом, полученные результаты можно использовать в макроскопически широком диапазоне толщин пленок $10^{-7} < h < 10^{-2}$.

3.5. Реконструкция заряженной инверсионной пленки.

Полученные результаты о поведении нейтральной инверсионной пленки позволяют сформулировать пригодную для сравнения с экспериментом задачу о равновесной форме заряженной капли в условиях антигравитации. Геометрия рассматриваемой системы (см рис. 3.1) соответствует экспериментам [58], когда капля водорода конденсируется на верхней горизонтальной пластине круглого конденсатора, и поверхностный заряд полностью экранирует электрическое поле в объеме жидкости. Поверхность пленки сканируется тонким лазерным пучком, позволяющим изучать ее топографию. В результате была определена зависимость высоты и радиуса капли от приложенного напряжения, а также вычислено критическое напряжение, при котором жидкая поверхность теряет устойчивость. Характерная толщина водородного слоя в рассмотренной ситуации значительно превышает критическую толщину h_* , связанную с силами Ван-дер-Ваальса. Как показано выше, в этих условиях толщина слоя жидкости на крыльях капли мала, и интегральный вклад тонких краев капли в общий

объем жидкости можно не учитывать. Поэтому взаимодействие жидкости с твердой подложкой должно быть учтено только на краях капли в виде граничного условия $\zeta' = 0$, за пределами капли $\zeta = 0$. Приведенные выше результаты анализа поведения реконструированной нейтральной инверсионной пленки позволяют утверждать, что при $h > h_*$ вся жидкость соберется в одну каплю, поскольку только такая структура сохраняет устойчивость в условиях надкритичности. Сингулярный для сил Ван-дер-Ваальса предел $\zeta \rightarrow 0$ на крыльях капли Френкеля в действительности порождает некий жидкий пьедестал, толщина которого падает с ростом массы капли, а интегральный вклад в общую массу жидкой пленки несущественен, если L ограничено.

Основные параметры задачи следующие. Форма капли описывается аксиально симметричной функцией $z = \zeta(|\mathbf{r}|)$, d - расстояние между пластинами конденсатора, U - приложенное напряжение. Для эффективного радиуса капли R выполняется соотношение $d/R \ll 1$. Для дальнейших вычислений существенно также, что высота капли A мала по сравнению с d . При этом угол наклона поверхности жидкости к плоскости пластины конденсатора становится величиной второго порядка малости по отношению к d/R : $|\nabla\zeta| \sim \zeta/R \sim (\zeta/d) \times (d/R)$. Электрический потенциал φ внутри конденсатора является решением уравнения Лапласа с граничными условиями:

$$\Delta\varphi = 0, \quad \varphi|_{z=\zeta(\mathbf{r})} = 0, \quad \varphi|_{z=d} = U. \quad (3.36)$$

При условии $\zeta \ll d \ll R$ потенциал $\psi = \varphi + E_0z$, где $E_0 = -U/d$ можно разложить в ряд по малым ζ и после несложных вычислений получить энергию электрического поля в конденсаторе, выраженную через

функцию ζ :

$$\mathcal{E}_{el} = \frac{U^2}{8\pi d} \int d^2\mathbf{r} (\zeta^2/d^2 + \zeta^3/d^3). \quad (3.37)$$

Полная энергия системы, вычисленная с той же точностью по ζ и $\nabla\zeta$ есть

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\zeta)^2 - \frac{1}{2} \rho g \int d^2\mathbf{r} \zeta^2 - \frac{U^2}{8\pi d} \int d^2\mathbf{r} \left(\frac{\zeta^2}{d^2} + \frac{\zeta^3}{d^3} \right) \quad (3.38)$$

Устойчивая равновесная форма капли должна соответствовать минимуму энергии (3.38) при выполнении условия сохранения полного объема жидкости. Зависимость $\zeta(r)$ можно искать в виде

$$\zeta(r) = Af(x), \quad x = \frac{r}{R}. \quad (3.39)$$

Подстановка пробной функции (3.39) в (3.38) дает зависимость энергии системы от вариационных параметров A и R :

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} c_0 A^2 - \left(\frac{1}{2} \rho g + \frac{U^2}{8\pi d^3} \right) c_2 A^2 R^2 - \frac{U^2}{8\pi d^4} c_3 A^3 R^2 \quad (3.40)$$

$$c_0 = 2\pi \int_0^\infty dx x f'^2(x), \quad c_n = 2\pi \int_0^\infty dx x f^n(x), \quad n > 0 \quad (3.41)$$

Условие сохранения объема капли V можно выразить через вариационные параметры:

$$c_1 A R^2 = V. \quad (3.42)$$

Равновесная форма капли определяется теперь из следующих вариационных уравнений

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\mathcal{E}}}{\partial R} = 0, \quad (3.43)$$

где $\tilde{\mathcal{E}} = \mathcal{E} - p A R^2$, p - множитель Лагранжа. Решение уравнений (3.43)

дает зависимость высоты капли от внешнего напряжения:

$$A = k_1 V \left(\frac{U^2}{4\pi d^3} + \rho g \right) \left(\alpha - \frac{k_2 U^2 V}{4\pi d^4} \right)^{-1}, \quad (3.44)$$

$$k_1 = c_2/2c_0c_1, \quad k_2 = c_3/c_0c_1.$$

Для оценки по величине констант, входящих в (3.44) можно задать функцию $f(x)$ как линейную комбинацию функций Бесселя, удовлетворяющую граничным условиям на краях капли.

$$f(x) = q(J_0(x) - J_0(\beta_1)), \quad 0 < x < \beta_1, \quad f(x) = 0, \quad x > \beta_1. \quad (3.45)$$

Здесь $\beta_1 \approx 3.83$ - минимальное значение аргумента функции Бесселя первого порядка, при котором функция обращается в нуль; $q = (1 - J_0(\beta_1))^{-1} \approx 0.71$ - нормировочный множитель. Тогда константы, вошедшие в выражения (3.41) и (3.44) принимают значения $k_1 = 0.0754$, $k_2 = 0.106$, $c_1 = 18.5$.

Как следует из (3.44) высота капли A бесконечно возрастает, когда внешнее напряжение достигает значения

$$U_{c2} = \left(\frac{4\pi\alpha d^4}{k_2 V} \right)^{1/2}. \quad (3.46)$$

При $U > U_{c2}$ уравнения (3.43) не имеют решения, (отсутствует минимум энергии капли), капля теряет устойчивость: поверхность разряжается, и заряды с захваченными каплями жидкости уходят на нижнюю пластину конденсатора.

Зависимость (3.44) может быть использована также и для описания эволюции формы капли, осажденной на нижней пластине конденсатора. Для этого достаточно заменить в выражении (3.44) знак гравитационной постоянной на противоположный и принять во внимание, что при $U < U_{c1} = \sqrt{4\pi\rho g d^3}$ минимум эффективной энергии $\tilde{\mathcal{E}}$ достигается при $A = 0$:

$$A = 0 \quad \text{at } U < U_{c1} = \sqrt{4\pi\rho g d^3},$$

$$A = k_1 V \left(\frac{U^2}{4\pi d^3} - \rho g \right) \left(\alpha - \frac{k_2 U^2 V}{4\pi d^4} \right)^{-1} \quad \text{при } U > U_{c1}. \quad (3.47)$$



Рис. 3.6. фотография висящей заряженной пленки.

Как видно из (3.46), критическое напряжение U_{c2} не зависит от гравитационной постоянной, поэтому в принятом малоугловом приближении оно одинаково для подвешенной и лежащей на пластине капель.

Напомним, что технически простая возможность сравнения двух решений (3.44) и (3.47) в области $U > U_{c1}$ осуществляется при достаточно большой толщине пленки в обоих рассматриваемых случаях. Качественная разница между каплями (3.44) и (3.47) состоит в том, что при любом U амплитуда висящей капли хорошо определена, а ее края находятся в зоне влияния сил Ван-дер-Ваальса, которые обеспечивают нулевые граничные условия. Для капли (3.47) вопрос о граничных условиях при малых A остается открытым.

Полученные результаты могут быть использована для интерпретации экспериментов [58]. В этих экспериментах капля жидкого водорода конденсировалась на верхней охлажденной пластине конденсатора. Такая методика позволяет варьировать толщину жидкого слоя в широких пределах, изменяя температуру подложки и объем газа, введенного в экспериментальную ячейку. В работе [58] изучалась эволюция формы висящей заряженной капли с изменением ее объема и напряжения в конденсаторе.

Фотография рис. 3.6 дает общие представления о характере рекон-

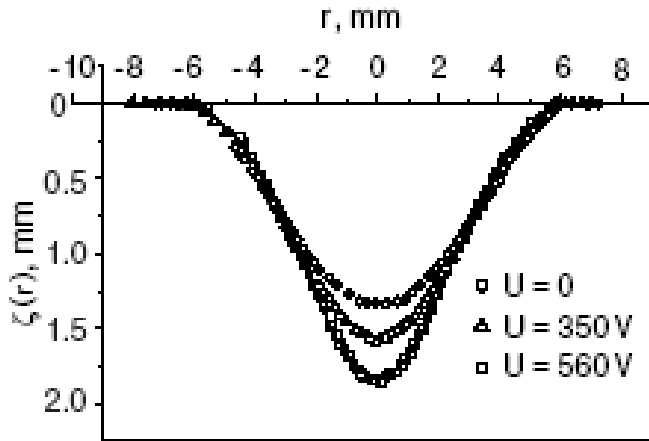


Рис. 3.7. изменение профиля поверхности жидкости с ростом напряжения.

струкции инверсионной пленки жидкости. Диаметр потолка ячейки L специально выбран достаточно большим по сравнению с капиллярной длиной a ($L \geq a$), чтобы сохранилась возможность зарождения нескольких капель. Тем не менее, реальный результат всегда оформляется в виде одной капли. Поучительно сравнение рис. 3.6 с фото рис. 2.7, 2.8, где представлена периодическая реконструкция массивной заряженной жидкости.

На рис. 3.7 из [57] показано изменение профиля поверхности жидкости с ростом напряжения U . Объем капли $V = 60 \text{ mm}^3$. Расстояние между пластинами конденсатора равно $d = 3 \text{ mm}$. Сплошные линии - вариационная функция (3.45). Несмотря на приближенность вариационного описания, его соответствие экспериментальным данным вполне убедительно.

Рис. 3.8 демонстрирует зависимость высоты капли A от напряжения U . Точки соответствуют результатам эксперимента, кривая представляет теоретическую зависимость (3.44). Наконец на рис. 3.9 изображена зависимость вертикального размера капли от ее объема при $U = 0$ и $U = 360 \text{ V}$. Кружки и квадраты соответствуют эксперименту, а кривые - расчету по

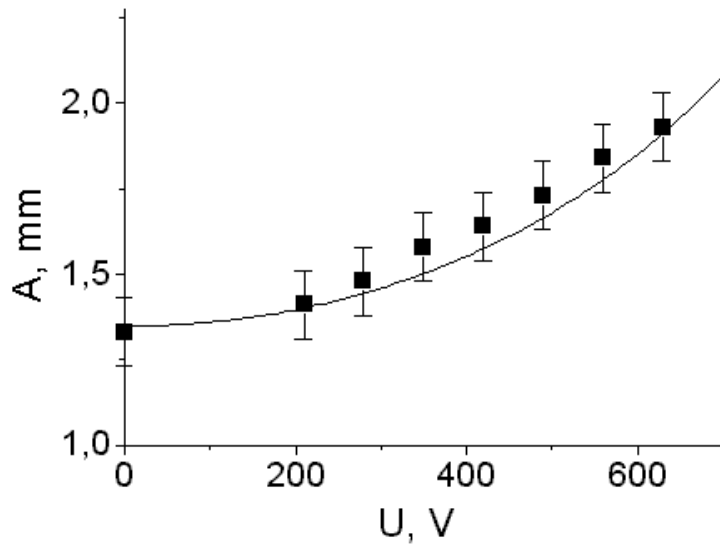


Рис. 3.8. зависимость высоты капли от напряжения.

формуле (3.44). Теория и эксперимент находятся в хорошем соответствии.

Итак, инверсионная задача является удачным примером, в котором общие тенденции (апериодичность реконструкции) сочетаются с возможностью количественно описывать и наблюдать это явление.

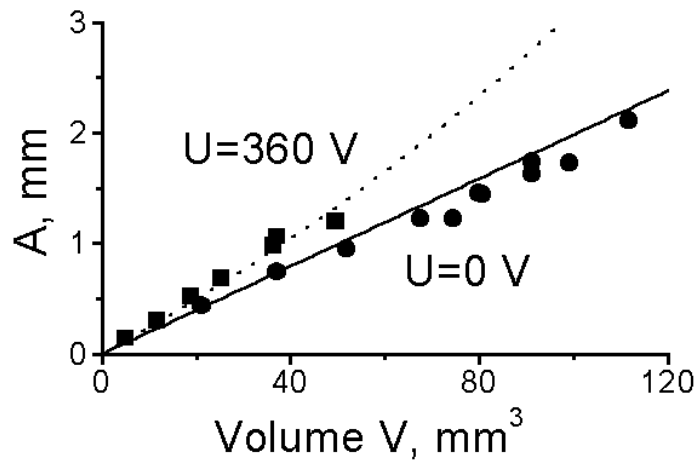


Рис. 3.9. зависимость вертикального размера капли от ее объема .

4. Заряженная тонкая пленка жидкости.

4.1. Введение.

Проблема устойчивости и реконструкции заряженной пленки жидкости технически сложнее задачи о реконструкции пленки в условиях антигравитации. Во-первых, здесь существенны два поля: поле смещений $\xi(r)$ и электрод потенциал $\phi(r)$, взаимодействующие между собой (r - двумерный радиус-вектор в плоскости пленки). Во-вторых - граничные условия. Их явный вид оказывается качественно важным в описании происходящего. Поэтому имеет смысл предварить изложение основной части Главы некой классификацией существующих подходов к решению задачи об устойчивости и реконструкции заряженной пленки жидкости.

Традиционной считается (по аналогии с массивной задачей) обсуждение проблемы устойчивости для бесконечнопротяженной пленки. При этом можно "пожертвовать" краевыми эффектами, если основные события происходят на длинах волн, малых по сравнению с размерами пленки вдоль подложки. Дополнительное упрощение (также восходящее к массивной задаче) касается проводимости поверхности пленки. Она считается идеально проводящей.

Основным достоинством такого подхода является возможность однородного линейного описания момента потери устойчивости заряженной пленкой. Задача о реконструкции сводится к поиску в закритических усло-

виях возможных нелинейных причин, препятствующих развитию неустойчивости. Детали этого анализа собраны в разделах 4.2, 4.3 данной главы.

Более реалистичным является вариант с учетом ограниченности размеров пленки вдоль подложки. Формально речь идет о неоднородной системе уравнений (2.10), и поэтому деформация жидкой поверхности возникает здесь беспороговым образом вслед за появлением на ней конечной плотности заряда. Эффект беспороговой деформации присутствует и в массивной задаче. Но там два типа деформации выглядят независимыми. На пленке это не так. С ростом дестабилизирующего поля беспороговое решение перестает быть стабильным, и потеря устойчивости происходит снова, но уже нелинейным образом. Параметрически этот порог выглядит так же, как и в бесконечной задаче. Но численный коэффициент весьма чувствителен к граничным условиям на краях пленки. Основные результаты неоднородного сценария представлены в разделе 4.4. Здесь же обсуждается и родственная задача о многоэлектронных лунках.

Имеющиеся эксперименты и их соответствие теории см. в разделе 4.5.

4.2. Бесконечная заряженная пленка.

1. Как и в массивном случае обсуждение проблемы естественно начать с задачи об устойчивости. Система уравнений (2.10) с граничными условиями для потенциалов φ и Φ при конечных d и h (см. 2.1) дает следующее выражение для спектра малых колебаний, полученное впервые в [46]

$$\omega^2 = \frac{k \operatorname{th}(kd)}{\rho} \left(\rho g + \alpha k^2 - \frac{k}{4\pi} [E_-^2 \operatorname{cth}(k(h-d)) + E_+^2 \operatorname{cth}(kd)] \right) \quad (4.1)$$

Общая зависимость (4.1) упрощается для случаев симметричной $h - d = d$ и несимметричной $h \rightarrow \infty$ геометрии. В первом случае, согласно (4.1)

$$\omega^2 = \frac{k \operatorname{th}(kd)}{\rho} \left(\rho g + \alpha k^2 - \frac{k}{4\pi} [E_-^2 + E_+^2] \operatorname{cth}(kd) \right) \quad (4.2)$$

Критические параметры задачи, соответствующие границе устойчивости, определяются совместным решением уравнений

$$\omega(k) = 0, \quad \frac{\partial \omega^2}{\partial k} = 0 \quad (4.3)$$

Этим условиям удовлетворяют

$$k = 0, \quad E_{+c}^2 + E_{-c}^2 = 4\pi \rho g d \quad (4.4)$$

а также k_c , являющееся решением трансцендентного уравнения

$$\frac{d^2}{a^2} - \delta^2 = \frac{2\delta^3}{1/2 \operatorname{sh}(2\delta) - \delta}, \quad (4.5)$$

где a - капиллярная длина, $\delta = k_c d$. Из этого уравнения видно, что критические условия (4.4) реализуются при $d < d_0 = \sqrt{3}a$. Характер зависимостей k_c и $E_{+c}^2 + E_{-c}^2$ от d в правой окрестности d_0 можно определить, пользуясь разложением уравнения (4.5) по малому параметру $\delta \ll 1$:

$$\frac{d^2}{a^2} - \delta^2 = 3, \quad (4.6)$$

откуда

$$k_c^2 = \frac{d^2 - d_0^2}{a^2 d^2}. \quad (4.7)$$

Из (4.2), (4.3) подстановкой (4.7) получаем

$$E_{+c}^2 + E_{-c}^2 = \frac{4\pi \rho g d^3}{2d^2 - 3a^2} \quad (4.8)$$

При $d > d_0$ определение зависимости $E_{+c}^2 + E_{-c}^2$ от d требует численного решения (4.5). Соответствующая зависимость приведена на рис. 4.1

из [46]. Кривая 2 на этом рисунке изображает изменение величины $k_c a$ с изменением d/a .

Переход к пределу $\delta \rightarrow \infty$ в уравнениях (4.5), (4.2) соответствует переходу к массивному слою жидкости. При этом из уравнения (4.5) сразу следует, что $k_c = k_0 = \sqrt{\rho g / \alpha}$, а уравнение (4.2) переходит в (2.11), что приводит к значению критического поля $E_{+c}^2 + E_{-c}^2 = E_0^2 = 8\pi\sqrt{\alpha\rho g}$, совпадающему с (2.14).

Учитывая, что при $\delta \rightarrow \infty$ $sh(2\delta) \rightarrow 1/2 exp(2\delta)$ и $cth(\delta) \rightarrow 1 + 2exp(-2\delta)$ можно найти асимптотические выражения для критических полей и волновых векторов, представив в $E_{+c}^2 + E_{-c}^2$ и k_c в виде

$$E_{+c}^2 + E_{-c}^2 = E_0^2(1 - A exp(-2k_0 d)), \quad k_c = k_0(1 - B exp(-2k_0 d)). \quad (4.9)$$

Подстановка этих выражений в (4.5) и (4.2) приводит к следующим значениям ϵ и β :

$$A = 2, \quad B = 4k_0 d. \quad (4.10)$$

Как и в массивном случае величины E_+ и E_- выражаются через независимые переменные V и n_s . Имеются те же ограничения и на величину n_s при ее уменьшении. При этом характер неустойчивости в области $n \rightarrow \infty$ аналогичен (4.4). Поэтому мы не обсуждаем его специально.

В условиях полной экранировки $E_- = 0$ при значениях толщины пленки меньших d_0 критическая напряженность поля определяется выражением

$$E_{+c}^2 = 4\pi\rho g d, \quad (4.11)$$

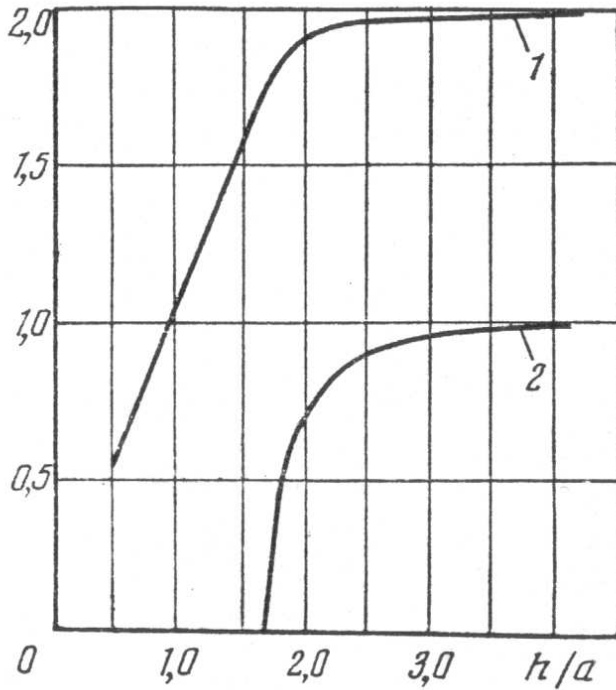


Рис. 4.1. кривая 1 - зависимость критического поля, кривая 2-критического волнового числа от толщины пленки в капиллярных длинах.

критическое внешнее напряжение между пластинами ячейки

$$V_0^2 = 4\pi\rho g d^3, \quad (4.12)$$

а критическое значение поверхностной плотности заряда

$$n_s^{cr} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{\rho g d}{4\pi}} \quad (4.13)$$

Уравнения (4.4-4.13) демонстрируют возрастание критических величин, характеризующих электрическое поле, с ростом толщины пленки.

Рассмотрение несимметричного случая при полной экранировке приводит к формулам (4.4-4.13), полученным для симметричного случая. Если же $E_- \neq 0$, то уравнение (4.5) принимает вид:

$$\frac{d^2}{a^2} - \delta^2 = \frac{2\delta^3}{1/2 \operatorname{sh}(2\delta) - \delta + p \operatorname{sh}^2(\delta)}, \quad (4.14)$$

где $p = (E_-/E_+)^2 < 1$. Решения уравнения (4.14) существуют при любых значениях d . При $\delta \ll 1$, для $1 - p \ll 1$

$$k_c = \frac{pd}{2a^2}, \quad E_{+c}^2 = 4\pi\rho gd, \quad (4.15)$$

следовательно, неустойчивость в этих условиях определяется величиной поля E_+ . Связь между k_c и E_{-c} имеет вид

$$k_c = \frac{E_{-c}^2}{8\pi\rho ga^2}. \quad (4.16)$$

Переход к массивному слою в несимметричном случае также приводит к уже известному выражению (2.14), поскольку подстановка $\delta \rightarrow \infty$ в уравнение (4.1) преобразует его к виду (2.11). Коэффициенты асимптотических формул для E_{-c}^2 и k_c при $\delta \rightarrow \infty$, полученные подстановкой

$$E_{-c}^2 = \frac{E_0^2}{1+p}(1 - \epsilon \exp(-2k_0d)), \quad k_c = k_0(1 - \beta \exp(-2k_0d)).$$

в уравнения (4.1), (4.14), следующие:

$$\epsilon = \frac{2}{1+p}, \quad \beta = \frac{4k_0d}{1+p}. \quad (4.17)$$

2. Имеется два обобщения картины из [46]. Во-первых, с уменьшением толщины пленки в задаче об устойчивости модифицируется понятие гравитации. В "игру" вступают силы Ван-дер-Ваальса, и это обстоятельство радикально меняет полученные результаты. Во-вторых, имеет смысл посмотреть, как ведет себя задача об устойчивости, если подложка не является металлической, а имеет конечную диэлектрическую проницаемость. Соответствующие уточнения [47] ведут к закону дисперсии:

$$\omega^2 = k \left[\left[\frac{3f}{\rho d^4} + g \right] + \frac{\alpha}{\rho} k^2 - \frac{4\pi e^2 n^2}{\rho} k \frac{1 + \delta e^{-2kd}}{1 - \delta e^{-2kd}} \right] \text{th}(kd). \quad (4.18)$$

Здесь f - константа Ван-дер-Ваальса, $\delta = (\epsilon - 1)/(\epsilon + 1)$, ϵ - диэлектрическая проницаемость подложки, $\epsilon = \infty$ для металла. Как и в инверсионной задаче силы Ван-дер-Ваальса представлены здесь вариантом без запаздывания (3.5). Ясно, на количественные утверждения закон (4.18) претендует лишь в области $d \leq d_w$, что, впрочем, наиболее интересно по существу.

Решая систему уравнений (4.3) для закона (4.18), можно получить критическое значение поверхностной плотности заряда n_s^{cr} и соответствующее критическое значение волнового вектора k^{cr} как функции d . Асимптотическое поведение этих величин для толстых пленок при $k^{cr} d \gg 1$ ($d > 10^7 \text{ \AA}$) не зависит от диэлектрической проницаемости подложки:

$$n_s^{cr} = \left[\frac{\alpha}{4\pi^2 e^4} \left[\frac{3f}{d^4} + \rho g \right] \right]^{1/4}, \quad (4.19)$$

$$k^{cr} = \frac{2\pi e^2 (n^*)^2}{\alpha}. \quad (4.20)$$

Для тонких пленок $d < 10^3 \text{ \AA}$ на металлической подложке с учетом условия $kd \ll 1$ получено следующее асимптотическое выражение:

$$n_s^{cr} = \left[\frac{3f}{4\pi e^2} \right]^{1/2} d^{-3/2} \quad (4.21)$$

Следовательно, учет сил Ван-дер-Ваальса приводит к изменению характера зависимости критической плотности заряда от толщины пленки: при монотонном уменьшении d величина n_s^{cr} проходит через минимум и затем резко возрастает.

Общая картина поведения n_s^{cr} и k^{cr} приведена на рис. 4.2.

3. Дополнительная красивая деталь возникает при учете деформации $\bar{\xi}$ в задаче о критических параметрах в зоне действия сил Ван-дер-Ваальса.

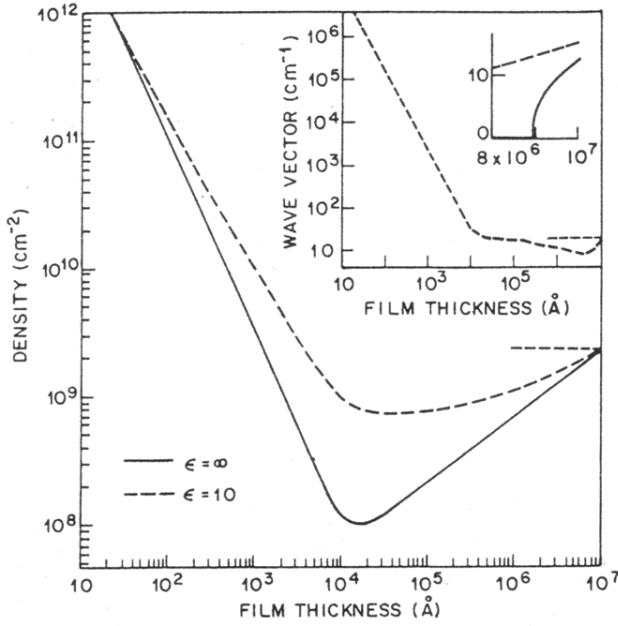


Рис. 4.2. зависимость критической плотности заряда и критического волнового вектора от толщины пленки.

Наличие этих сил ведет к заметной перенормировке критических параметров заряженной пленки (см. (4.19-4.21)). Эти же силы - на первых ролях при формировании самой пленки. Аналогом задачи (2.5-2.8) в данном случае является подсчет Ван-дер-Ваальсовой толщины пленки в условиях определений (2.5-2.8) при наличии на ее поверхности фиксированной плотности заряда n_s . Ответ из [61]

$$d^{-1} = \left(\frac{1}{d_0^3} + \frac{2\pi e^2 n_s^2}{f} \right)^{1/3}, \quad d_0 = \left(\frac{f}{\rho g h_0} \right)^{1/3}, \quad (4.22)$$

где h_0 в данном случае - высота твердой подложки над уровнем жидкого гелия, прижимающее электрическое поле равно своему максимальному значению $E_{\perp} = 2\pi e n_s$, f - константа Ван-дер-Ваальса из (3.5).

Эксперимент [61] подтверждает существенную связь между d , f и n_s . Как видно из рис. 4.3 со сплошными линиями, согласно (4.22), влияние

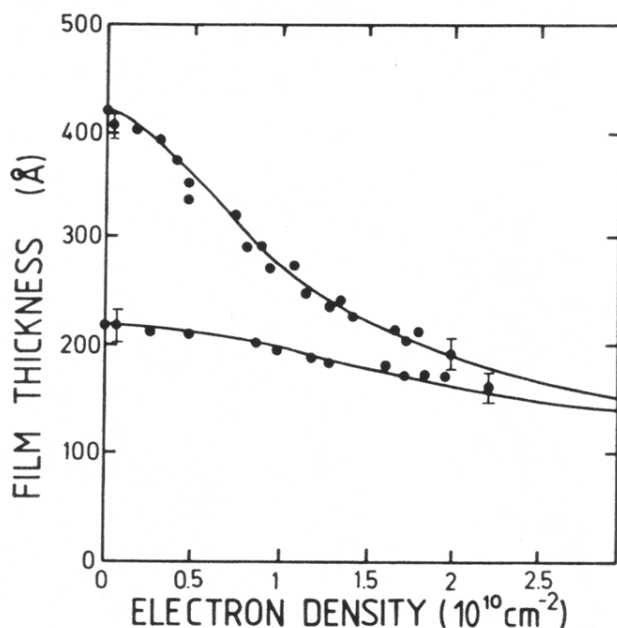


Рис. 4.3. зависимость эффективной толщины пленки гелия от плотности электронов, сплошные линии - расчет по формуле (4.22), и экспериментальные данные [61].

электронного давления может изменить толщину пленки в разы.

Возвращаясь к обсуждению критических параметров заряженной пленки, приходится, очевидно, согласовать два процесса: рост критического значения n_{cr} с уменьшением d , и уменьшению d с ростом степени заряженности пленки. Сосуществование двух этих тенденций отображено на рис. 4.4 из [62]. Кривая 1 - аналог зависимости $n_{cr}(d)$ на рис. 4.2 для $\epsilon \rightarrow \infty$ и сил Ван-дер-Ваальса без запаздывания. Кривые 2-5 отражают процесс утончения пленок разной исходной толщины с ростом плотности заряда. Реальная критическая плотность для пленки толщины d_0 возникает на пересечении линии 1 с графиками 2-6. Очевидно, что с уменьшением d_0 критическая плотность все меньше и меньше зависит от d_0 .

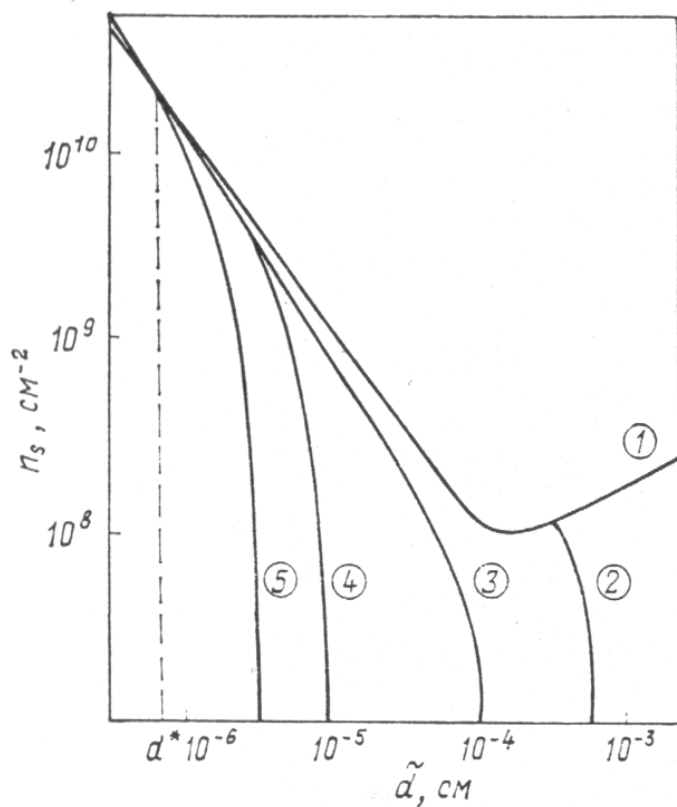


Рис. 4.4. зависимость критической плотности электронов от эффективной толщины пленки гелия.

4. Еще один вопрос явился предметом дискуссии в пленочной литературе. Что происходит с устойчивостью заряженной пленки, если внешние условия допускают образование $2d$ кулоновского кристалла (см. [47, 49, 63, 66])? Такой кристалл можно описать, как решетку диполей (электрон - изображение электрона), когда расстояние между узлами двумерной системы намного превышает размер диполя. Более точный расчет должен учесть все имеющиеся кулоновские взаимодействия. Наиболее подробно эта проблема исследована авторами [49]. Отсылая за деталями к этой работе, имеем критерий устойчивости

$$K(y) < (\sqrt{3}/2)\alpha\kappa^2 (2d)^5/e^2, \quad K(y) = 4y^2 + \frac{1}{11.4y}, \quad (4.23)$$

$$y = \frac{2d}{a}, \quad \kappa^2 = \frac{\rho(g + \tilde{g})}{\alpha}, \quad (4.24)$$

где κ^2 - эффективная капиллярная постоянная, $\tilde{g} = 3f/\rho d^4$ - эффективное ускорение за счет сил Ван-дер-Ваальса (см. (4.18)), d - толщина пленки, a - период $2d$ кристалла. Точное значение $K(y)$ и график зависимости критической концентрации n от толщины слоя жидкого гелия d представлены на рис. 4.5. Из него видно, что, вообще говоря, имеются два критических значения электронной концентрации n_{k1} и n_{k2} , ограничивающих сверху и снизу область устойчивости заряженной пленки. При уменьшении толщины пленки n_{k1} и n_{k2} стремятся к одному предельному значению, достигаемому при некотором d_k . При $d < d_k$ электронный кристалл на тонкой пленке гелия существовать не может. такое поведение $n_k(d)$ обусловлено наличием минимума у функции $K(y)$.

Для газового (неупорядоченного) состояния электронной системы ограничений снизу на концентрацию нет, так как в этом случае функция

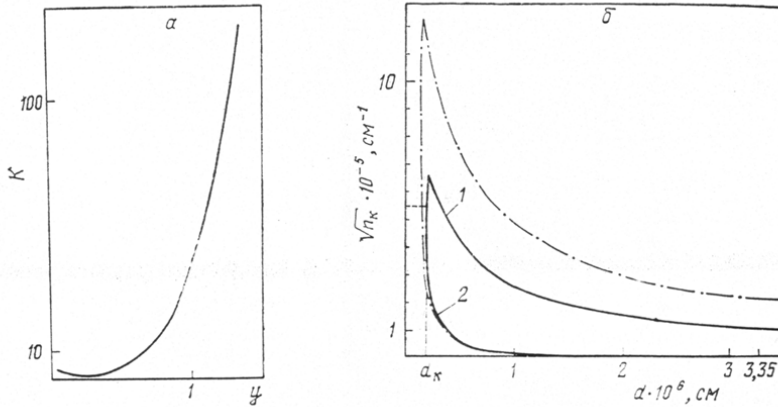


Рис. 4.5. Двумерный кулоновский кристалл, рассматриваемый как решетка диполей. График функции $K(y)$; зависимость критической плотности электронов от толщины слоя жидкого гелия.

$K(y)$ не имеет минимума при конечных y .

Для металлической подложки при естественной толщине пленки гелия ($d = 3.35 \cdot 10^{-6}$ см, $\alpha k^3 = 1.27 \cdot 10^8$ эрг/см⁴) неустойчивость возникает при $y \geq y_k = 0.61$, что соответствует критической концентрации $n_{k1} = 0.96 \cdot 10^{10}$ см⁻². При этом n_{k2} соответствуют столь малые значения $y \ll 1$, что говорить о кристаллическом состоянии электронов не имеет смысла ввиду холодного плавления дипольного кристалла. Дипольное приближение для верхней границы устойчивости $n_{k1}(d)$ всегда дает завышенное в 3-4 раза значение (рис. 4.5). Для определения же нижней границы устойчивости $n_{k2}(d)$ всегда можно пользоваться дипольным приближением.

4.3. Реконструкция бесконечной заряженной пленки с произвольным d .

1. Перейдем к задаче о реконструкции и обсудим сначала ее вариант в самом общем виде, когда толщина вакуумного слоя, где есть электрическое поле в условиях полной экранировки имеет произвольную конечную величину d . Решение такой задачи удобно искать по аналогии с [19]. Рассмотрим слой жидкого водорода, помещенного в конденсатор, поверхность которого заряжена положительными ионами. Предполагается, что тонкий слой положительно заряженных ионов, расположенных под поверхностью, полностью экранирует электрическое поле в объеме жидкого водорода. Будем считать, что однородное электрическое поле E над заряженной поверхностью отличается от критического значения E_0 , соответствующего потере линейной устойчивости на малую величину γ (степень надкритичности):

$$E^2 = E_0^2(1 + \gamma) \quad (4.25)$$

Подчеркнем, что в отличие от задачи о заряженной пленке в условиях антигравитации (см. Главу 3) и задачи о тонкой заряженной пленке, которая будет рассмотрена ниже, мы, как и авторы [19], [13], [23], не фиксируем разность потенциалов между поверхностью жидкости и одной из пластин конденсатора. Эта разность потенциалов равна $V = -Ed$ в нулевом порядке теории возмущений и имеет ненулевые, квадратичные по амплитуде колебаний поправки.

Казалось бы, вопрос о реконструкции сильно заряженной поверхности жидкости "закрыт" в работах [13], [23], [27]. Для массивной жидкости показано, что стационарная периодическая деформация поверхности за пре-

делами линейной устойчивости возможна лишь в случае ее малой заряженности. Достаточно тонкая (но не настолько, чтобы учитывать силы Ван-дер-Ваальса) пленка должна быть более уязвима в смысле устойчивости, чем массивная, благодаря действию сил изображения. Сформулируем, однако, этот вывод более точно: для сильно заряженных поверхностей реконструкция не может быть реализована в виде стационарного, абсолютно устойчивого состояния. Рассмотрим теперь выражение, связывающее энергию системы $U(\zeta_0)$ с амплитудой стационарной деформации, полученное, например, в [13] (см. (2.27)). Оно имеет вид полинома 4-й степени. И хотя в случае сильной заряженности у функции U (см. [23], где это выражение приведено в самом общем виде) нет абсолютного минимума, что означает отсутствие устойчивых состояний поверхности, существование локального минимума вполне возможно. При этом должно существовать метастабильное стационарное состояние, отвечающее надкритическим электрическим полям. Если такое состояние существует, то большая заряженность поверхности должна увеличивать его время жизни. Действительно, воздействие, под влиянием которого может произойти выход системы из метастабильного состояния, должно быть достаточно мощным, чтобы затронуть все электроны (которых "много" в при сильной заряженности).

Периодическая реконструкция в условиях сильной заряженности, несмотря на теоретические "запреты", наблюдалась экспериментально в различных системах: на поверхности раздела $He^3 - He^4$, на поверхности жидкого гелия, на поверхности жидкого водорода. (см., [14], [15], [29], [58]). Все это делает вполне оправданной попытку поиска новых, метастабильных состояний сильно заряженной поверхности в условиях положительной

надкритичности.

2. Рассмотрим сначала одномерный случай. Разложим функцию $\zeta(x)$, которая описывает деформацию поверхности, в ряд

$$\zeta = A\cos(kx) + bA^2\cos(2kx) = \zeta_1(x) + \zeta_2(x). \quad (4.26)$$

Заметим, что такое разложение, сделанное для бесконечной пленки, снимает вопрос о сохранении объема жидкости - это условие выполняется автоматически.

Электростатический потенциал $\varphi(x, z)$, удовлетворяющий уравнению Лапласа внутри конденсатора, и принимающий значение $V = -Ed$ на верхнем электроде, также представим в виде ряда

$$\varphi(x, z) = -Ez + F_1\zeta_1\text{sh}(k(z-d)) + F_2\zeta_2\text{sh}(2k(z-d)) + A^2F_3\zeta_1\text{sh}(k(z-d)). \quad (4.27)$$

В этих уравнениях A - амплитуда деформации в первом порядке, E - однородное электрическое поле в конденсаторе, когда жидкость невозмущена, b, F_1, F_2, F_3 - константы.

На поверхности жидкости выполняются условия постоянства давления и электростатического потенциала:

$$\alpha \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \rho g \zeta + \frac{(\partial\varphi(x, z)/\partial x)^2 + (\partial\varphi(x, z)/\partial z)^2}{8\pi} \Big|_{z=\zeta} = P, \quad (4.28)$$

$$\varphi(x, z) \Big|_{z=\zeta} = \text{const}. \quad (4.29)$$

Уравнение (4.28) учитывает силы поверхностного натяжения, гравитации и электрического давления, действующие на заряженную жидкость.

Предположение о том, что деформация ζ мала по сравнению с другими характерными размерами задачи - капиллярной длиной a и размером вакуумного зазора d позволяет выполнить разложение уравнения (4.29) по ζ

$$\begin{aligned} \varphi(x, z)|_{z=\zeta} = & -E\zeta - F_1\zeta_1(sh(\kappa_0) - kch(\kappa_0)(\zeta_1 + \zeta_2) + \frac{k^2\zeta_1^2}{2}sh(\kappa_0)) - \\ & -F_2\zeta_2(sh(2\kappa_0) - 2k\zeta_1ch(2\kappa_0)) - A^2F_3\zeta_1sh(\kappa_0), \\ \kappa_0 = & kd \end{aligned} \quad (4.30)$$

Процедура вычислений состоит в подстановке разложений (4.26), (4.27) в уравнения (4.28), (4.30), с учетом стационарности возникающей структуры поверхности. Последнее означает, что неустойчивость начинает развиваться на волновых числах k , соответствующих в линейном спектре $\omega(k)$ условию $\omega = 0$, то есть имеется дополнительное условие, связывающее k и однородное критическое поле E_0

$$\alpha k^2 + \rho g - \frac{E_0^2 k}{4\pi} cth(\kappa_0) = 0. \quad (4.31)$$

Как и в [19], мы, рассматривая стационарный случай, не требуем пока выполнения условия $\partial\omega^2/\partial k = 0$. Это позволит, не фиксируя k , получить результат в общем виде. Затем, в случае тонких ($d < \sqrt{3}a$) пленок, можно распространить полученные формулы на случай ограниченной поверхности, а в случае, когда $d > \sqrt{3}a$, считать, что в них $k = k_c$, где k_c вычисляется в соответствии с линейной теорией неустойчивости, используя вышеупомянутое равенство нулю производной.

Выполнение условий (4.28), (4.30) в первом, втором и третьем порядке по a для линейных ζ_1 и нелинейных ζ_2 волн позволяет вычислить константы b, F_1, F_2, F_3 :

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{E}{sh(\kappa_0)}, \\
F_2 &= -\frac{E}{sh(2\kappa_0)}\left(1 + \frac{kcth(\kappa_0)}{2b}\right), \\
F_3 &= -\frac{E}{sh(\kappa_0)}\left(bk\left(\frac{cth(\kappa_0)}{2} + cth(2\kappa_0)\right) + \frac{k^2cth(2\kappa_0)cth(\kappa_0)}{2} - \frac{3}{8}k^2\right), \\
b &= \frac{k(4cth(2\kappa_0)cth(\kappa_0) + cth^2(\kappa_0) - 3)}{4Ccth(\kappa_0) - 8cth(2\kappa_0)}, \\
C &= 1 + \frac{3\tilde{k}^2}{1 + \tilde{k}^2}, \quad \tilde{k} = ka.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

В результате можно найти связь между амплитудой деформации A и степенью надкритичности γ :

$$\epsilon k^3 A^3 + \gamma k cth(\kappa_0) A = 0 \tag{4.33}$$

$$\epsilon = \frac{b}{k} \left(2cth(2\kappa_0)cth(\kappa_0) + \frac{cth^2(\kappa_0)}{2} - \frac{1}{4} \right) + 2cth^2(\kappa_0)cth(2\kappa_0) - \frac{5}{4}cth(\kappa_0) \tag{4.34}$$

Уравнение (4.33) разрешимо относительно A , когда $\epsilon < 0$. Вид выражения (4.34) говорит о том, что для любых k это возможно лишь при $b < 0$. Здесь возникает вопрос о величине волнового числа k , характеризующего описываемую нелинейную деформацию. В случае, когда

$$d < \sqrt{3}a \tag{4.35}$$

линейная неустойчивость, согласно [46], развивается на волновых числах $k = 0$. На рис. 4.6 кривые дисперсии 1-4 демонстрируют потерю устойчивости при росте электрического поля. Можно предположить, что в ячейке,

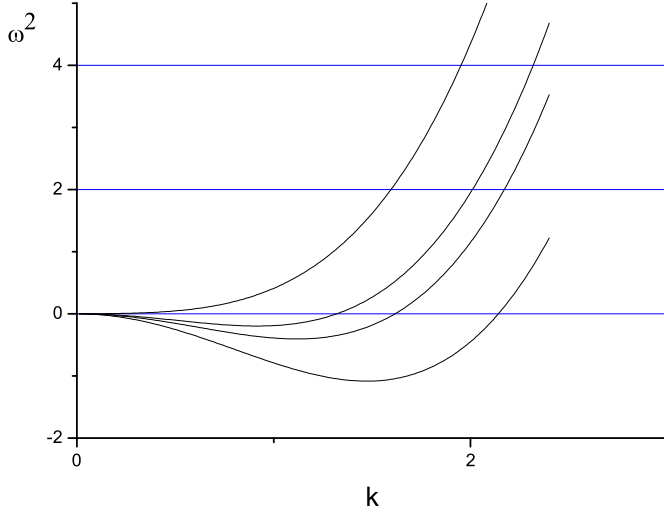


Рис. 4.6. закон дисперсии при $d < d_0$.

имеющей линейный размер L , возмущения описываемого нами вида появятся при $k = 2\pi/L$. Однако, при условии (4.35) $b > 0$ для малых k (см. выражение (4.32) для b). Значит, в тонком слое жидкости, когда напряжение превышает критическое значение E_0 , определяемое из условия (4.31) при $k = 2\pi/L$, устойчивая стационарная структура вида (4.26) появиться не может.

Когда вакуумный слой имеет толщину

$$d > \sqrt{3}a = d_0 \quad (4.36)$$

линейная неустойчивость возникает на конечных волновых числах $0 < ka < 1$. Рис. 4.7 демонстрирует потерю устойчивости при различных d . Случай $ka = 1$, соответствующий толщинам $d \gg a$ рассмотрен в работах [13], [23], где показано, что реконструкция возможна только при достаточно малой заряженности поверхности, когда электрические поля в объеме жидкости и пространстве над ней отличаются слабо.

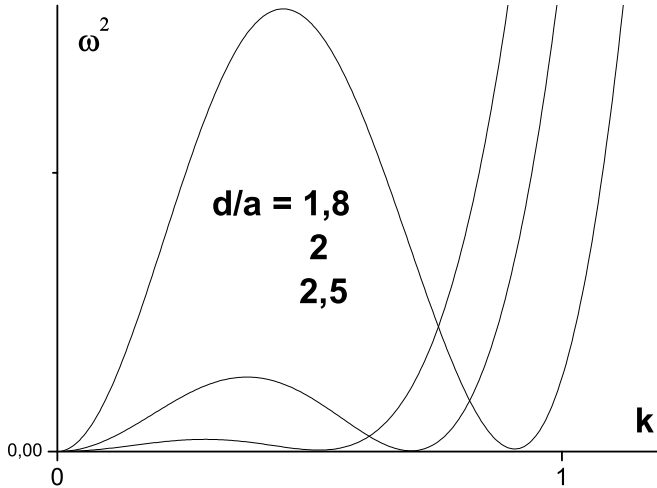


Рис. 4.7. закон дисперсии при $d > d_0$.

Рассмотрим случай $d \geq d_0$. Если не учитывать, как в [13], влияния размеров ячейки на формирование нелинейного возмущения поверхности, то волновое число k_c , на котором теряется устойчивость, находится из трансцендентного уравнения (см.(4.5)):

$$\frac{d^2}{a^2} - \kappa_c^2 = \frac{2\kappa_c^3}{1/2 \operatorname{sh}(2\kappa_c) - \kappa_c}, \quad (4.37)$$

где a - капиллярная длина, $\kappa_c = k_c d$. Расчет показывает, что для таких k_c знак коэффициента b положителен. Это вновь означает невозможность формирования стационарной периодической структуры в условиях полной экранировки.

3. Перейдем к двумерной системе. Будем рассматривать двумерную периодическую деформацию бесконечной поверхности с гексагональной симметрией. Такое ограничение существенно упрощает процедуру вычислений, однако не влияет на основные выводы. Разложение функции $\zeta(x, y)$ в дан-

ном случае имеет вид

$$\zeta = \zeta_1(x, y) + \zeta_{21}(x, y) + \zeta_{22}(x, y) \quad (4.38)$$

$$\zeta_1 = A \sum_{i=1}^3 \cos(\theta_i), \quad \zeta_{22} = A^2 b_2 \sum_{i=1}^3 \cos(2\theta_i), \quad \zeta_{21} = A^2 b_1 \sum_{i+j=3}^3 \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (4.39)$$

$$\theta_1 = kx, \quad \theta_2 = k(x/2 + \sqrt{3}/2y), \quad \theta_3 = k(-x/2 - \sqrt{3}/2y) \quad (4.40)$$

Разложение для электростатического потенциала $\varphi(x, y, z)$,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & -Ez + F_1 \zeta_1 \operatorname{sh}(k(z-d)) + F_{22} \zeta_{22} \operatorname{sh}(2k(z-d)) + \\ & + F_{21} \zeta_{21} \operatorname{sh}(\sqrt{3}k(z-d)) + AF_{12} \zeta_1 \operatorname{sh}(k(z-d)) + A^2 F_3 \zeta_1 \operatorname{sh}(k(z-d)). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Предположение о малой величине деформации ζ позволяет выполнить разложение уравнений (4.28), (4.29), видоизмененных с учетом двумерности задачи, по ζ , аналогично тому, как это было сделано для одномерного случая. В результате получим выражения для констант b_1, b_2 :

$$b_2 = b \quad (4.42)$$

(см. (4.32))

$$b_1 = \frac{k(2\sqrt{3} \operatorname{cth}(\sqrt{3}\kappa_0) \operatorname{cth}(\kappa_0) + \operatorname{cth}^2(\kappa_0) - 5/2)}{2C_1 \operatorname{cth}(\kappa_0) - 2\sqrt{3} \operatorname{cth}(\sqrt{3}\kappa_0)}, \quad (4.43)$$

$$C_1 = 1 + \frac{2\tilde{k}^2}{1 + \tilde{k}^2}, \quad \tilde{k} = ka \quad (4.44)$$

и, как конечный результат, зависимость амплитуды возмущения A от степени надкритичности γ , которую удобно представить в безразмерном виде:

$$\left(\frac{9}{8} \frac{\tilde{k}^2}{\tilde{k}^2 + 1} + \frac{\epsilon}{\operatorname{cth}(\kappa_0)} \right) \zeta_0^3 + \frac{3 \operatorname{cth}^2(\kappa_0) - 3/2}{2 \operatorname{cth}(\kappa_0)} \zeta_0^2 + \gamma \zeta_0 = 0, \quad \zeta_0 = kA, \quad (4.45)$$

$$\epsilon = \frac{b_2}{k} \left(3cth(\kappa_0)cth(2\kappa_0) + \frac{cth^2(\kappa_0)}{2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{b_1}{k} \left(2\sqrt{3}cth(\sqrt{3}\kappa_0) + cth^2(\kappa_0) - \frac{5}{2} \right) - 6cth(\kappa_0) + cth^2(\kappa_0) \left(2\sqrt{3}cth(\sqrt{3}\kappa_0) + \frac{3}{2}cth(2\kappa_0) + 2cth(\kappa_0) \right). \quad (4.46)$$

Таким образом интересующая нас зависимость имеет вид полинома третьей степени

$$4c_3\zeta_0^3 + 3c_2\zeta_0^2 + \gamma\zeta_0 = 0 \quad (4.47)$$

Вопрос об устойчивости решений вида (4.40) с амплитудой, удовлетворяющей (4.47), будем решать аналогично [13]. Заметим, что выражение в (4.47), приравненное нулю, есть не что иное как с точностью до множителя вариация энергии системы по амплитуде возмущения со знаком минус. Вид функционала энергии есть

$$U_- = -c_3\zeta_0^4 - c_2\zeta_0^3 - \frac{\gamma}{2}\zeta_0^2 \quad (4.48)$$

Устойчивое решение (4.40) должно соответствовать абсолютному минимуму функции U_- . Эта функция может иметь 1 локальный минимум, если $c_3 > 0$ и 2 минимума, (локальный и абсолютный), если $c_3 < 0$. И вновь знак c_3 зависит от знаков амплитуд нелинейных волн b_1 и b_2 . Для малых волновых чисел, так же, как и для волновых чисел k_c , удовлетворяющих уравнению (4.5) (случай $d \geq \sqrt{3}a$), знак b_1 и b_2 , а следовательно и c_3 , положителен. Это означает, что функция U_- не имеет абсолютного минимума. Единственный локальный минимум функции U_- соответствует метастабильному состоянию поверхности. Следовательно, при $\gamma < 0$ (область полей ниже критического) сильно заряженная плоская поверхность $\zeta_0 = 0$ является метастабильным состоянием, а при переходе к $\gamma > 0$ реализуется метастабильное состояние вида (4.40) с амплитудой, изменяющейся от нуля

до $\zeta_0^c = -c_2/2c_3$ с ростом γ :

$$\zeta_0 = -\frac{c_2}{2c_3} + \sqrt{\frac{c_2^2}{4c_3^2} - \frac{\gamma}{2c_3}} \quad (4.49)$$

Состояние поверхности при $\gamma = 0$ является неустойчивым.

Заметим, что решения для слабо заряженной поверхности из [13], [23], аналогичные (4.40), являются устойчивыми, так как соответствуют абсолютному минимуму энергии.

Обсудим возможность применения формально полученного результата (4.49) для конкретных значений параметров задачи d и γ . Прежде всего, вследствие нелинейности функции $cth x$ значения коэффициентов b_1 и b_2 , описывающих амплитуды нелинейных волн, оказываются большими (~ 10) в достаточно широком диапазоне $0 < d < 2a$. Следовательно, предположение о малых поправках во втором порядке к ζ_0 становится несостоятельным, и теорию возмущений, вообще говоря, применять нельзя. Таким образом, полученные результаты применимы в области $d > 2a$, когда критический волновой вектор становится порядка единицы. Кроме того, верхний по надкритичности предел существования решений (4.49) дается значением $\gamma_c = c_2^2/2c_3$. Для

$$d = d_* = 2a, \quad \gamma_c = 0.01, \quad \zeta_0^c = -0.04a \quad (4.50)$$

$$d \rightarrow \infty, \quad \gamma_c = 0.02, \quad \zeta_0^c = -0.07a. \quad (4.51)$$

Диапазон значений γ , соответствующий реконструкции данного вида, оказывается очень узким, а амплитуда ζ_0^c - небольшой. Это справедливо и по отношению к результатам для слабо заряженной поверхности [13], [23], где степень надкритичности и амплитуда деформации ограничиваются малым параметром - степенью заряженности.

4. Полученные результаты можно использовать для решения вопроса об устойчивости системы при ограниченных размерах ячейки. Рассмотрим плоскую стационарную волну, возникающую в ячейке радиуса R на границе устойчивости, когда $|\mathbf{k}|$ и E_0 связаны уравнением (4.31)

$$\zeta_{\mathbf{k}} = A_{\mathbf{k}} \cos(\mathbf{k}\mathbf{x}), \quad (4.52)$$

$k = k_c$ при $d > d_*$. Так как возмущения с $|k|$ отличными от заданного затухают или их возбуждение невозможно из-за ограниченных размеров ячейки, можно показать, что амплитуда $A_{\mathbf{k}}$ удовлетворяет уравнению (4.47), где $\zeta_{0\mathbf{k}} = |\mathbf{k}|A_{\mathbf{k}}$. Для каждого \mathbf{k} устойчивым является решение (4.47) вида (4.49), поэтому вид цилиндрически-симметричного возмущения определится интегрированием

$$\zeta = A_{\mathbf{k}} \int_0^{2\pi} \cos(\mathbf{k}\mathbf{x}) d\theta. \quad (4.53)$$

где $A_{\mathbf{k}}$, согласно (4.49), меньше нуля. Таким образом, цилиндрически-симметричная деформация, отвечающая метастабильному состоянию в надкритичных полях имеет углубление в центре.

Для того, чтобы в приведенных рассуждениях можно было пренебречь краевыми эффектами, необходимо выполнение условия $R \gg 1/|k|$.

Двумерная задача об устойчивости заряженной поверхности имеет еще одно решение, связанное с произволом в выборе фазы возмущения. Если сдвинуть фазу возмущения ζ из (4.40) на π , так что

$$\theta_1 = kx + \pi, \quad \theta_2 = k(x/2 + \sqrt{3}/2y) + \pi, \quad \theta_3 = k(-x/2 - \sqrt{3}/2y) + \pi, \quad (4.54)$$

то вместо (4.48) получим

$$U_+ = c_3 \zeta_0^4 - c_2 \zeta_0^3 + \gamma \zeta_0^2 \quad (4.55)$$

Т.к. $c_3 > 0$ для рассмотренных выше случаев, функционал U_+ имеет три экстремума

$$\zeta_{01} = 0, \quad \zeta_{02,3} = \frac{c_2}{2c_3} \pm \sqrt{\frac{c_2^2}{4c_3^2} - \frac{\gamma}{c_3}} \quad (4.56)$$

При $\gamma > 0$ минимумам соответствуют решения с амплитудами ζ_{02} , ζ_{03} которые имеют разные знаки и уменьшаются по модулю при подходе к критической точке. В надкритичной области минимуму соответствуют решения с ζ_{01} , ζ_{02} , т.е. плоская поверхность и возмущение с положительной амплитудой, которая уменьшается по модулю при дальнейшем росте поля. Таким образом, решения со сдвигом фазы имеют парадоксальный, с точки зрения имеющихся на эту тему теоретических исследований и экспериментов, характер.

Надо отметить, что во всех предыдущих рассуждениях волновой вектор k , при котором происходит развитие неустойчивости и реконструкция, считался константой. Учет разложения волнового вектора по малым A в виде $k = k_0 + A^2 k_2$, как это было сделано в [19], приводит лишь к сдвигу критического значения E_0 в сторону больших полей, не влияя на характер возмущения и его поведение при изменении параметров задачи.

Подытоживая кратко все вышеизложенное, сделаем следующее утверждение: для сильно заряженной поверхности в условиях надкритичности возможна мягкая реконструкция в виде двумерной гексагональной деформации, которая реализуется как метастабильное состояние в узком диапазоне надкритичных полей $\gamma_c \sim 0.01$, если только толщина вакуумного слоя не очень мала: $d = d_* > 2a$.

4.4. Критическое поведение тонкой пленки.

1. В условиях $\kappa d \ll 1$ электростатическая часть задачи упрощается, и появляется возможность анализа закритичных явлений без использования громоздких Фурье-разложений. Эта программа реализована в [68] в рамках энергетического подхода, хорошо зарекомендовавшего себя в [27] и [57]. Расчет равновесной формы заряженной поверхности выполнен для случая, когда тонкой является не пленка, а вакуумный промежуток между верхним электродом и свободной поверхностью жидкости. Считается, что заряд под поверхностью жидкости полностью экранирует поле в ее объеме.

Основные предположения, которые, с одной стороны, реализуются в эксперименте, а с другой позволяют существенно упростить задачу, следующие. Угол наклона деформированной поверхности жидкости мал:

$$\nabla\zeta(\mathbf{r}) \ll 1, \quad (4.57)$$

сама деформация поверхности $\xi(\mathbf{r})$, $\zeta(\mathbf{r}) = d + \xi(\mathbf{r})$ также мала по сравнению с расстоянием между плоской поверхностью жидкости и управляющим электродом $\tilde{d} = h - d$:

$$\xi \ll \tilde{d}, \quad (4.58)$$

наконец, само расстояние \tilde{d} значительно меньше капиллярной длины:

$$\tilde{d} \ll a. \quad (4.59)$$

Считается также, что толщина слоя жидкости d достаточно велика, чтобы можно было исключить роль сил Ван-дер-Ваальса в развитии неустойчивости. Существенной особенностью данной вариационной задачи является

предположение о несжимаемости жидкости, что приводит к условию сохранения ее объема.

В этих предположениях выражение для энергии жидкости, выписанное с точностью до кубических по ξ/\tilde{d} слагаемых имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{\alpha}{2} \int d^2\mathbf{r} (\nabla\xi)^2 + \frac{1}{2} \rho g \int d^2\mathbf{r} \xi^2 - \frac{V^2}{8\pi\tilde{d}} \int d^2\mathbf{r} \left(\frac{\xi^2}{\tilde{d}^2} + \frac{\xi^3}{\tilde{d}^3} \right). \quad (4.60)$$

Здесь ось z направлена вверх, \mathbf{r} - вектор в плоскости (x, y) .

В области $V > V_0, V_0$ из (4.12), уравнение для равновесной формы $\xi(\mathbf{r})$ поверхности жидкости можно получить, используя вариационный принцип минимума энергии аналогично (3.16) с учетом требования сохранения объема. Это уравнение в одномерном случае выглядит так

$$\xi'' + \gamma\xi + \frac{3V^2}{2}\xi^2 + p = 0. \quad (4.61)$$

Уравнение (4.61) записано в безразмерных переменных: $\gamma = V^2/V_0^2 - 1$, расстояние x измеряется в капиллярных длинах, ξ - в единицах \tilde{d} , напряжение - в V_0 . Такое уравнение имеет первый интеграл

$$\frac{1}{2}\xi'^2 + U(\xi) = C, \quad (4.62)$$

где $U = \gamma\xi^2 + V^2\xi^3/2 + p\xi$. Форма поверхности $\xi(x)$ может быть найдена интегрированием (4.62) с последующим вычислением величины p из условия

$$\int \xi(x) dx = 0 \quad (4.63)$$

Алгоритм поиска периодических решений уравнения (4.62) уже описан в разделе об инверсионной пленке. Период X_0 таких решений зависит от напряжения V и амплитуды волны, которая выражается через корни уравнения $U(\xi) = C$. Таких корней может быть три: $\xi = \alpha_i, i = 1, 2, 3$ (пусть

$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$). Равновесная форма поверхности соответствует области $\alpha_2 \leq \xi \leq \alpha_1$ и может быть найдена из уравнения

$$\int_{z_2}^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{G(\xi)}} = x - x_0. \quad (4.64)$$

где $G(\xi) = V^2(\alpha_1 - \xi)(\xi - \alpha_2)(\xi - \alpha_3)$. Интеграл в (4.64) выражается через неполный эллиптический интеграл первого рода, поэтому для стационарная волна деформации имеет следующий вид:

$$\xi(x) = \alpha_3 + \frac{\alpha_{32}}{dn^2 u}. \quad (4.65)$$

где $u = \sqrt{\alpha_{31}}V(x - x_0)/2$, dn - эллиптическая функция, ее модуль $k = \sqrt{\alpha_{21}/\alpha_{31}}$, $\alpha_{ik} = \alpha_k - \alpha_i$. Период функции (4.65) равен

$$X_0 = \frac{4K(k)}{\sqrt{\alpha_{31}}V}, \quad (4.66)$$

где $K(k)$ - полный эллиптический интеграл первого рода.

Вычисление интеграла (4.63) с функцией ξ из уравнения (4.65) приводит к уравнению

$$E(k) = \frac{\alpha_3}{\alpha_{31}}K(k), \quad (4.67)$$

которое позволяет неявно определить зависимость p от C . Таким образом, в случае одномерной волны на неограниченной в горизонтальном направлении поверхности, возникающей при $V > V_0$, решения $\xi(x)$ являются однопараметрическим семейством кривых, что, как и для инверсионной пленки не позволяет однозначно определить равновесную форму поверхности.

Следуя далее аналогии с инверсионной задачей, для получения однозначного решения (4.61), (4.63) нужно зафиксировать период (4.66)

$$X_0 = L \quad (4.68)$$

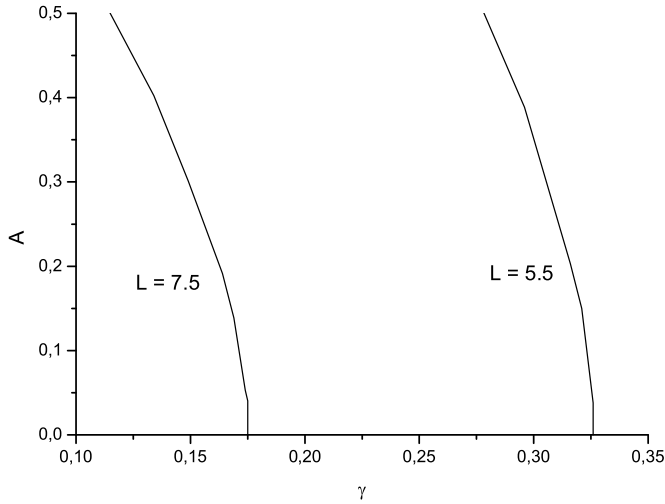


Рис. 4.8. деформация поверхности в зависимости от надкритичности.

и потребовать, чтобы этот период являлся основным для $\xi(x)$ с дополнительным граничным условием

$$\xi'(-L/2) = \xi'(L/2) = 0. \quad (4.69)$$

Результаты численного расчета для зависимости $A = \xi_{max} - \xi_{min}$ от параметра γ представлены на рис. 4.8. Информация рис. 4.8. свидетельствует о возможности реконструкции в области

$$0 < \gamma < \gamma_{max} \quad (4.70)$$

при условии, что энергия (4.60) для состояний (4.61), (4.63), (4.69) отрицательна. Однако вычисление \mathcal{E} (4.60) для этих состояний дает оценку $\mathcal{E} > 0$ (см. рис. 4.9). Таким образом, для данной задачи реконструкция отсутствует.

Уместно отметить, что данные рис. 4.8 свидетельствуют о тенденции к увеличению критических параметров пленки, имеющей ограничен-

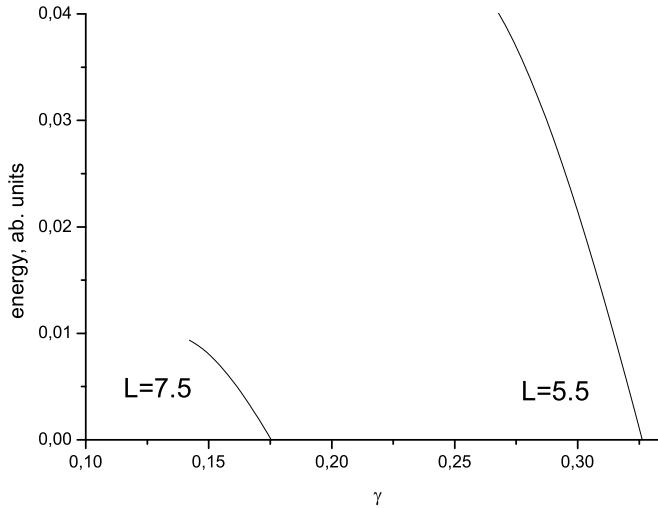


Рис. 4.9. энергия деформированной поверхности в зависимости от надкритичности.

ные размеры. В самом деле, период L из (4.68) можно трактовать как размеры пленки ограниченной площади. В этом случае смещение критической точки вправо с уменьшением L есть прямое свидетельство влияния L на критические параметры пленки. Но последовательно этот эффект должен описываться в неоднородном сценарии из раздела 4.4.

4.5. Деформация заряженной пленки ограниченных размеров

Существующая экспериментальная практика позволяет наметить типичные геометрические схемы, ведущие в задаче об устойчивости к появлению размерных эффектов в латеральном направлении. Информация, собранная ниже, может создавать впечатление о преувеличенном внимании к разного сорта аппаратурным эффектам. Такая тенденция, действительно, имеется. Но речь идет о деталях, влияния которых на интересующее нас явление неустойчивости избежать не удастся.

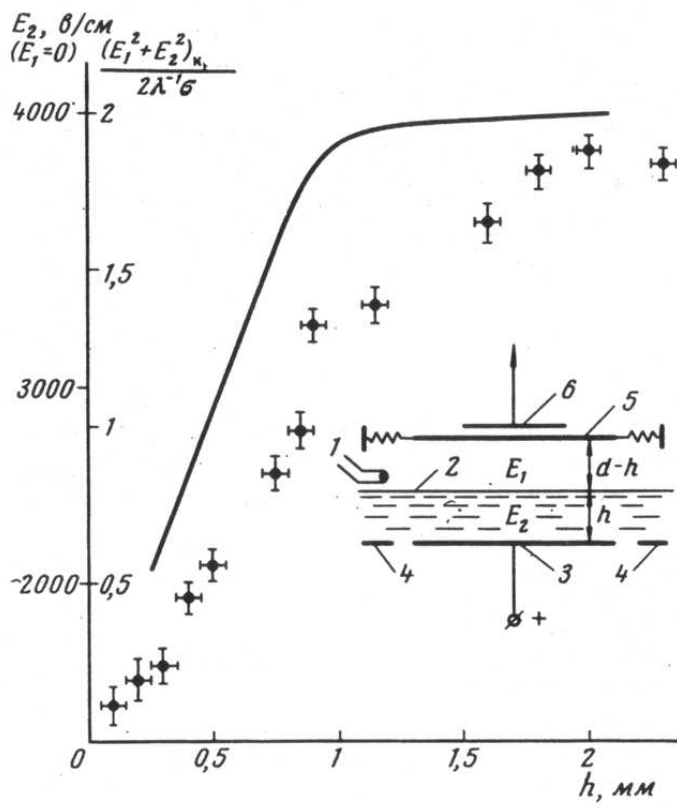


Рис. 4.10. Зависимость критического поля, от толщины пленки, эксперимент [10] (точки) и теория [46]. Схема установки из [10].

1. Пленка с горизонтальным расположением охранного кольца.

Типичная схема таких экспериментов с заряженной пленкой представлена на рис. 4.10 из [10]. Существенным в данном случае является то обстоятельство, что заряженной является лишь часть поверхности пленки между электродами 3 и 5. Ее куски над охранными кольцами 4, а также за пределами колец не подвержены электронному давлению, но участвуют в формировании общего баланса сил, приводя к перенормировке эффективной гравитационной постоянной. Это явление, упоминавшееся в Главе 2 (см. (2.8)) в связи с определением понятий толстой и тонкой пленки, участвует в формировании параметров задачи и может быть "выключено из игры" лишь в экзотическом случае $L_0 \gg L$.

Формально имеется возможность работать и без охранных колец. Но реально такая схема используется лишь при переходе в область так называемых Ван-дер-Ваальсовых пленок. Этот предельный случай выпадает из нашего рассмотрения по причинам, обсуждаемым ниже. Укажем лишь на предосторожности, которые необходимы при визуальном (как это делалось в [67]) определении толщины пленки в области, где она формально стремится к нулю. В нейтральном случае связь между толщиной пленки d и измеряемой высотой столба жидкости за пределами подложки следует из

$$f_{ret}/d^4 = \rho g(d - h) \quad (4.71)$$

Здесь f_{ret} -константа Ван-дер-Ваальса с учетом запаздывания, высота h определена на рис. 4.11.

Пока $h > 0$, толщина нейтральной пленки гелия лишь слегка превы-

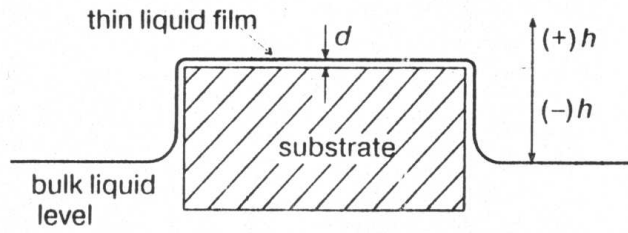


Рис. 4.11. получение тонкой гелиевой пленки.

шает его уровень в резервуаре

$$d \simeq h + f_{ret}/(\rho gh)^4. \quad (4.72)$$

Вся подложка погружена в жидкость.

Если же $h < 0$, определение (4.71) стремится к известной асимптотике

$$d^4 \simeq f_{ret}/(\rho gh_m), \quad h_m = |h|, \quad (4.73)$$

В этом пределе вертикальные стенки подложки поднимаются над уровнем массивного гелия, оставаясь покрытыми пленкой гелия, соединяющей ее горизонтальную часть с резервуаром. Отметим, что определение (4.71) достаточно просто решает фиктивную проблему расходимости $d \propto h_m^{-1/4}$, $h_m \rightarrow 0$. Реально в этом пределе толщина пленки остается конечной

$$d_0^5 = f_{ret}/\rho g \quad (4.74)$$

Специальные измерения зависимости $d(h)$ подтверждают отсутствие расходимости в ее поведении при $h_m \rightarrow 0$ (см. рис. 4.12 из ([67])

Приступая к описанию деформационных эффектов кулоновского происхождения на жидкой пленке (геометрия рис. 2.1) ограничимся простей-

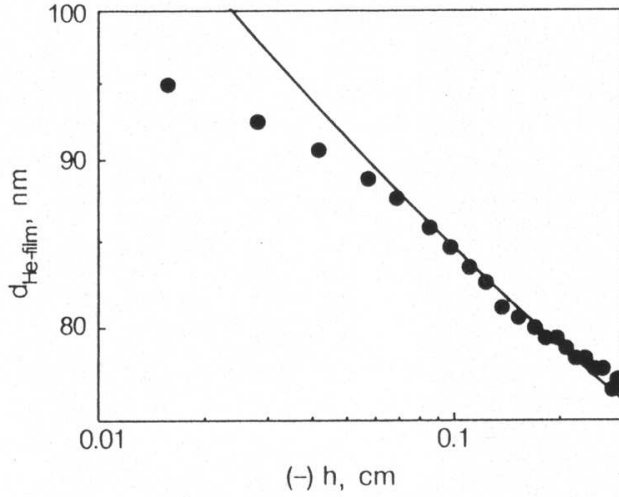


Рис. 4.12. отсутствие расходимости в зависимости $d(h)$, полученное в эксперименте, сплошная линия - закон $h^{-1/4}$.

шим их применением, справедливым в области

$$\kappa^{-1} \ll L_0 - L, \quad \kappa^{-1} \ll L \quad (4.75)$$

(см. рис. 4.15) и сохраняющим участие перенормировки (2.8) в неоднородной задаче об устойчивости. В одномерном случае условие перенормировки выглядит так:

$$g^* = g \left(1 + \frac{L}{L_0 - L} \right) \quad (4.76)$$

Как показано в [60], решение неоднородной одномерной задачи с условием (4.75) дает следующее значение для критического напряжения V_c

$$V_c^2 = \left(\frac{2}{3} \right)^3 V_0^2 \frac{g^*}{g}, \quad V_0^2 = 4\pi\rho g d^3 \quad (4.77)$$

Очевидна линейность деформации $\xi_0(V^2)$ в области малых V - она растет беспороговым образом с увеличением напряжения в конденсаторе.

Кроме того, при конечных V^2 возникает характерная комбинация

$$\xi_0 \sim \frac{V^2}{(d + \xi_0)^2}, \quad (4.78)$$

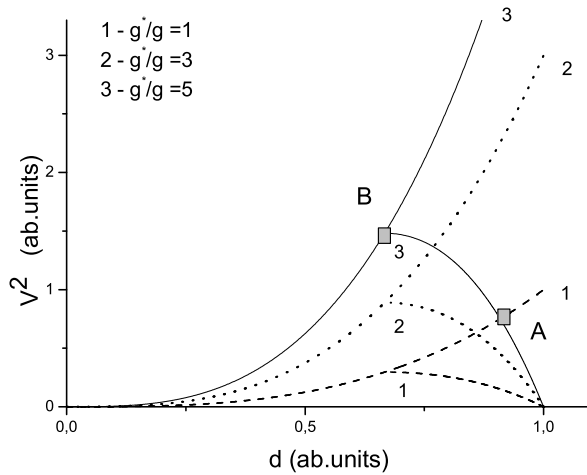


Рис. 4.13. Картина развития неустойчивости с учетом деформационных эффектов.

которая и ведет к неустойчивости.

Важной чертой, дополняющей картину происходящего, является взаимодействие двух факторов - зависимости кулоновской устойчивости жидкой пленки от ее толщины и изменения толщины пленки под действием электронного (ионного) давления. Здесь уместно вернуться к рис. 4.3, 4.4. Как показывает рис. 4.3, для ван-дер-Ваальсовых пленок пробой становится труднодостижимым. Поэтому реальная задача об устойчивости не может быть поставлена левее минимума на рис. 4.4. Правее минимума результаты рис. 4.4, полученные в пределе $g^* \rightarrow g$, нуждаются в модификации, если $g^* \neq g$. Диаграмма, описывающая развитие неустойчивости с учетом деформационных эффектов при различных g^* , приведена на рис. 4.13. Здесь имеются пары кривых 1, 2, и 3, соответствующие $g^* = 1, 3, 5$. Кривые, выходящие из точки $d = 1$, показывают, как увеличивается деформация заряженной поверхности в центре ячейки с ростом напряжения. Соответ-

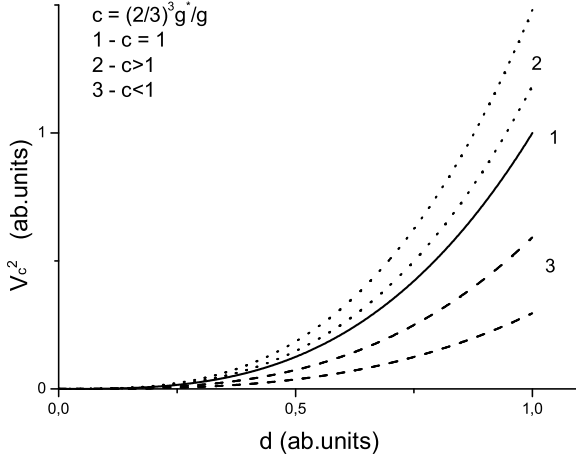


Рис. 4.14. Диаграмма деформационной устойчивости пленки гелия.

ствующие им кривые, изображающие зависимость $(3/2)^3 V_c^2 = 4\pi\rho d^3 g^*/g$, демонстрируют рост критического напряжения с увеличением толщины пленки. Точка пересечения кривых с одинаковым индексом соответствует потере устойчивости, связанной с деформацией жидкости. При $g \sim g^*$ критическое напряжение V_c оказывается меньше V_0 в соответствии с (4.77). С другой стороны, чем больше g^* , тем выше оказывается критическое напряжение. То, что точка А на рис. 4.13 лежит ниже точки В, означает, что критическое деформационное напряжение ограниченной пленки оказывается выше критического напряжения, отвечающего линейной потере устойчивости бесконечной пленки.

На рис. 4.14 приведены зависимости V_c^2 из (4.77) от исходной (в нулевом поле) толщины пленки при различных значениях параметра g^* . Для каждого g^* точки, лежащие ниже соответствующей кривой, отвечают устойчивым состояниям пленки по отношению к кулоновской деформации. Сплошная линия 1 есть зависимость V_0^2 из (4.77). Семейство линий 2, лежа-

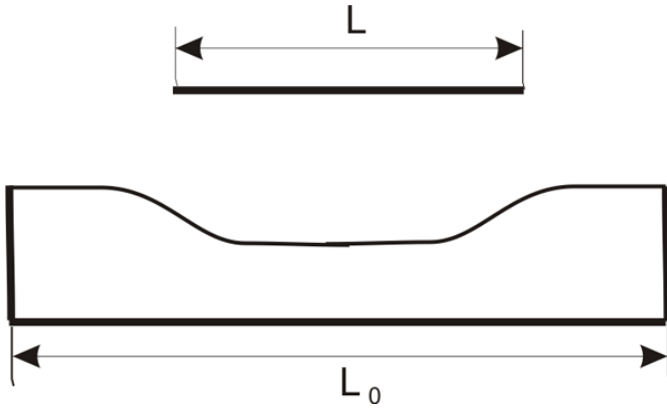


Рис. 4.15. Схема ячейки с жидкой пленкой. Вариант 1.

щих выше кривой 1, соответствует большим g^* , т.е. ячейке, где $L_0 - L \ll L$. Для таких ячеек $V_c > V_0$. Линии 3, лежащие ниже кривой 1 описывают критическое поведение пленки в ячейках большими незаряженными краями. При этом деформационное критическое напряжение ниже, чем V_0 .

2. Пленка при вертикальном расположении охранного кольца.

Эта схема использована в [58]. В идеале речь идет о стакане с жидкостью, на поверхность которой оказывается электронное или ионное давление. Следует сразу же отметить, что изотермическое равновесие в такой ячейке невозможно. Но если дно стакана слегка охлаждено по отношению к внешнему окружению, то уровень жидкости в стакане можно установить на любой желаемой высоте, манипулируя полным количеством газа, введенным в ячейку и разностью температур.

В задаче о емкости с жидкостью возможны два сценария "кулоновской" деформации поверхности, изображенные на рис. 4.15, 4.16. Первый из них аналогичен экспериментам [10], рассмотренным выше. Вторым отвечает ситуации, когда жидкость заполняет весь объем емкости. При наличии электронного давления ее объем не сохраняется. Этот сценарий развития



Рис. 4.16. Схема ячейки с жидкой пленкой. Вариант 2.

неустойчивости тонкой, ограниченной заряженной пленки, когда несжимаемая жидкость может вытекать из конденсатора, рассмотрен в [69].

При описании этого явления для двумерных электронов над поверхностью гелия в простейшем, одномерном случае решалось уравнение равновесия, определяющее стационарную деформацию поверхности ξ , с заданными граничными условиями на стенках ячейки размером $2L$ (жидкость находится в "естественных" гравитационных условиях при заданной внешней разности потенциалов V и полной экранировке электрического поля над ней):

$$\rho g \xi - \alpha \xi'' + \frac{V^2}{8\pi(d + \xi)^2} = 0, \quad (4.79)$$

$$\xi(L) = \xi(-L) = 0, \quad V = const, \quad -L \leq x \leq L \quad (4.80)$$

Равенство нулю давления на поверхности заряженной жидкости означает, что размер резервуара L_0 намного превосходит величину заряженного пятна L , и толщина слоя гелия в незаряженной области ξ_∞ пренебрежимо мала.

В безразмерном виде, по аналогии с (4.61) уравнение (4.80) выглядит так:

$$\xi'' - \xi - \frac{V^2}{2(1 + \xi)^2} = 0. \quad (4.81)$$

Как и в (4.61), здесь расстояние x измеряется в капиллярных длинах a , ξ

- в единицах d , напряжение - в V_0 , V_0 из (4.12).

Уравнение (4.81), как и (4.80), записано в малоугловом приближении и легко интегрируется. Первый интеграл (4.81) есть

$$\xi'^2 = \xi^2 - \xi_0^2 + V^2 \left(\frac{1}{1 + \xi_0} - \frac{1}{1 + \xi} \right) \quad (4.82)$$

Здесь $\xi_0 = \xi(0)$ - деформация поверхности в центре ячейки.

Условие равновесия (4.81) может быть получено из вариационного принципа минимума энергии системы для задачи с закрепленными концами, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе этой главы. Выражение для энергии системы, записанное в безразмерных переменных имеет вид

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\xi'^2 + \xi^2 - \frac{V^2}{1 + \xi} \right) dx. \quad (4.83)$$

Подстановка в (4.83) ξ'^2 из (4.82) дает

$$\mathcal{E} = \frac{L}{2} \left(\frac{V^2}{1 + \xi_0} - \xi_0^2 \right) + \int_0^L \left(\xi^2 - \frac{V^2}{1 + \xi} \right) dx. \quad (4.84)$$

Возвращаясь к (4.81), отметим, что для выявления специфики задачи удобно рассмотреть это уравнение в его линейном варианте:

$$\xi'' + \gamma \xi = \frac{V^2}{2}. \quad (4.85)$$

Это решение в области $\gamma = V^2 - 1 < 0$ имеет вид:

$$\xi(x) = \frac{V^2}{2|\gamma|} \left(\frac{\text{ch}(\sqrt{|\gamma|x})}{\text{ch}(\sqrt{|\gamma|L})} - 1 \right), \quad (4.86)$$

и показывает, что размерные эффекты, связанные с конечностью L , определяются параметром $\sqrt{|\gamma|}$.

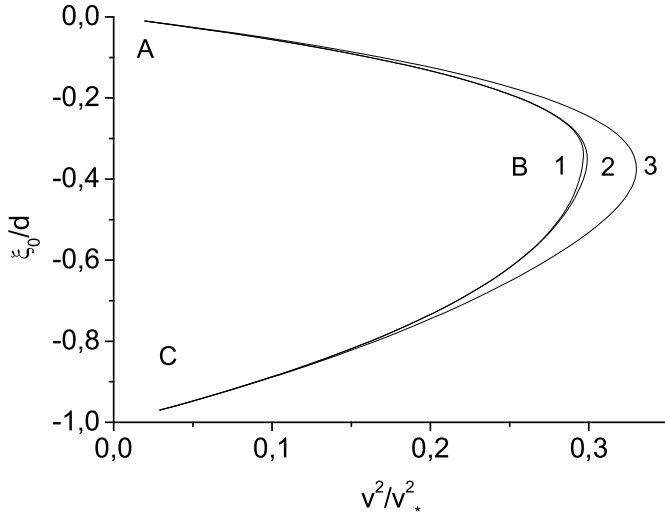


Рис. 4.17. диаграмма устойчивости гелиевой пленки.

При $L \rightarrow \infty$ уравнение (4.81) вдали от концов интервала $2L$ приобретает вид

$$\xi_0 + \frac{V^2}{2(1 + \xi_0)^2} = 0, \quad (4.87)$$

и дает асимптотическое поведение $\xi(x)$. Устойчивое решение (4.87) относительно ξ_0 , удовлетворяющее требованию $\xi_0 \rightarrow 0$ при $V \rightarrow 0$, существует лишь в области [60]

$$V < V_c, \quad V_c^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 V_0^2, \quad V_0^2 = 4\pi\rho g d^3. \quad (4.88)$$

При $V = V_c$ $\xi_0 = -1/3$, это означает, что жидкость в критических полях деформируется значительно.

Интегрирование уравнения (4.82) позволяет получить значение V_{cr} для любых L из возникающей при этом неявной зависимости $\xi_0 = \xi(0)$ от размеров системы. Эта зависимость имеет вид

$$\int_{\xi_0}^0 \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \xi_0^2) + V^2 \left(\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1+\xi} \right)}} = L \quad (4.89)$$

и интерпретируется на рис. 4.17. Здесь используются безразмерные переменные $v = V^2/V_0^2$ и ξ_0/d - деформация жидкости в центре ячейки. Анализ поведения кривых 1-3, соответствующих размерам ячейки от 10 до 2-х капиллярных длин, показывает, что для ячейки любого размера имеется критическая разность потенциалов V_{cr} , выше которой существование пленки становится невозможным. Величина V_{cr} оказывается значительно ниже критического поля V_0 для бесконечного одномерного случая (см. [46]). Эффект связан с выдавливанием жидкости из ячейки действием электрических сил.

На рис. 4.17. имеются две области - AB и BC , соответствующие при одной и той же разности потенциалов двум различным вариантам деформации поверхности жидкости. Участок кривой BC демонстрирует аномальную зависимость величины прогиба поверхности от приложенного напряжения: с ростом разности потенциалов эта величина убывает. Кроме того, на этом участке в области ξ_0 близких к единице нарушается малоугловое приближение, использование которого позволило сформулировать условие равновесия в виде (4.81). Это сразу приводит к предположению, что область BC нефизична. Для решения вопроса о том, какое из решений $\xi(x)$, соответствующих различным ветвям зависимости ξ от V^2 , более выгодно энергетически, найдем численно энергию рассматриваемой системы по формуле (4.84) с функцией $\xi = \xi(x)$, полученной из неявного соотношения

$$\int_{\xi}^0 \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \xi_0^2) + V^2 \left(\frac{1}{1+\xi_0} - \frac{1}{1+\xi} \right)}} = L - x, \quad (4.90)$$

и значениями ξ_0 , взятыми для обеих ветвей кривой ABC .

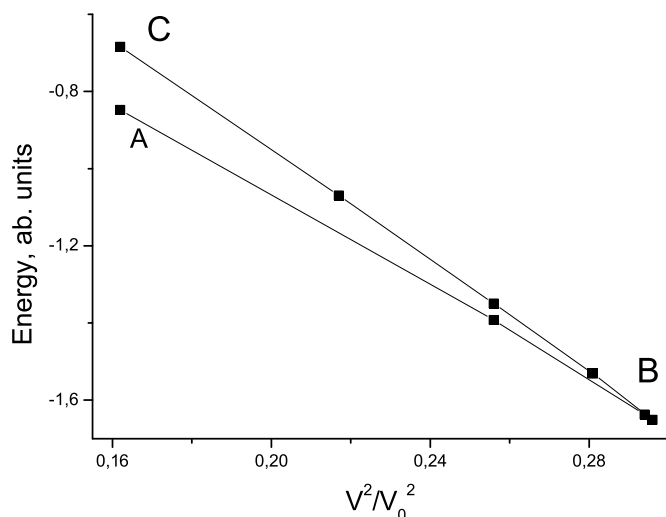


Рис. 4.18. Энергия системы в зависимости от приложенного напряжения.

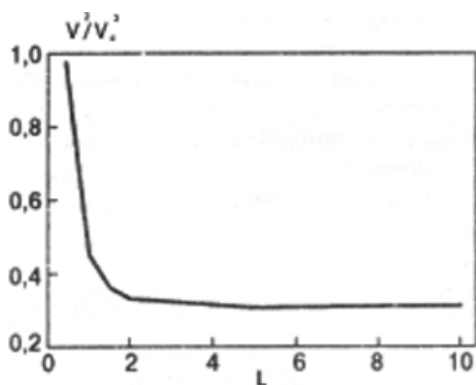


Рис. 4.19. зависимость критического напряжения от размеров ячейки.

Результаты вычислений для случая $L = 10$ представлены на рис. 4.18. Энергия жидкости, соответствующая ветви AB оказывается меньше, чем энергия альтернативных состояний, представленных ветвью BC . Таким образом, картина развития неустойчивости поверхности жидкости в электрическом поле описывается кривой AB на рис. 4.17.

На рис. 4.19 предствлена зависимость критического поля V_c^2/V_*^2 от размера ячейки L . Как видно из рисунка, уменьшение L стабилизиру-

ет ячейку. Это естественно, поскольку неустойчивость тонкой заряженной пленки начинает развиваться на малых волновых числах.

3. Многозарядные лунки. Отдельной строкой идет задача о многозарядных лунках на тонких пленках жидкости [70]. Пусть многоэлектронная лунка расположена на пленке гелия толщиной d , имеющей под собой массивный металл. Влияние конечной толщины пленки на параметры лунки затрагивает несколько частей задачи. Во-первых, в результате взаимодействия электронов с металлической подложкой меняется эффективное прижимающее поле :

$$E = E_{\perp} + F_d/e \quad F_d = \frac{e^2}{4d^2}, \quad (4.91)$$

где E_{\perp} - внешнее электрическое поле, F_d - сила изображения.

Во-вторых, толщина пленки d появляется в определении кулоновской энергии лунки. Поскольку над массивным гелием кулоновская энергия имеет вид

$$W_c = c_0 \frac{Q^2}{R}, \quad Q = eN, \quad c_0 = 15.73, \quad (4.92)$$

(R - радиус заряженного пятна в центре лунки, Q - полный заряд лунки), на пленке гелия в условиях $d/R \ll 1$ эта энергия должна быть выражена так:

$$W_c = \frac{2dQ^2}{R^2}, \quad (4.93)$$

Интерполяция асимптотик (4.92-4.93) дает определение энергии

$$W_c = \frac{c_0 Q^2}{R \left(1 + \frac{c_1 R}{d}\right)}. \quad (4.94)$$

И, наконец, меняется определение эффективной капиллярной постоянной

$\tilde{\kappa}$:

$$\tilde{\kappa}^2 = \frac{\rho\tilde{g}}{\alpha}, \quad \tilde{g} = g + \frac{3f}{\rho d^4} \frac{1}{1 + \frac{d}{d_*}} \quad (4.95)$$

Константа Ван-дер-Ваальса имеет масштаб $f \sim 60K$, d_* - характерная длина, возникающая в теории сил Ван-дер-Ваальса при учете эффектов запаздывания.

Полная энергия многоэлектронной лунки на пленке гелия может быть представлена по аналогии с массивным случаем (2.65)

$$W = \frac{Q^2 E_{\perp}^2}{8\pi\alpha} \exp\left(\frac{\tilde{\kappa}^2 R^2}{2}\right) Ei\left(-\frac{\tilde{\kappa}^2 R^2}{2}\right) + V_c(Rd), \quad (4.96)$$

где R является варьируемым параметром, а значения N , E_{\perp} и d фиксированы.

Удобно ввести безразмерное электрическое поле λ и толщину пленки \tilde{d}

$$E_{\perp}^2 = \lambda\kappa_0\alpha, \quad \kappa_0^2 = \rho g/\alpha, \quad \tilde{d} = d/d_0, \quad d_0 = (3f/\rho g)^{1/4} \simeq 10^{-4} \text{cm}. \quad (4.97)$$

Диаграмма стабильности многоэлектронной лунки находится из условия (см. (2.69))

$$W(\lambda_k^{crit}) \simeq 0. \quad (4.98)$$

Соответствующий график $\lambda_k^{crit}(\tilde{d})$ при разных значениях параметра $k = d_*/d_0$ представлен на рис. 4.20. Параметр k , как видно на рисунке, заметно влияет на диаграмму. Случай $k = 0$ отвечает пренебрежению эффектами запаздывания. Рис. 4.21 показывает зависимость энергии лунки W от безразмерной толщины пленки при фиксированном значении λ , и разных значениях числа электронов в лунке N . Величина N оптимизировалась требованием, чтобы энергия имела масштаб, превосходящий тем-

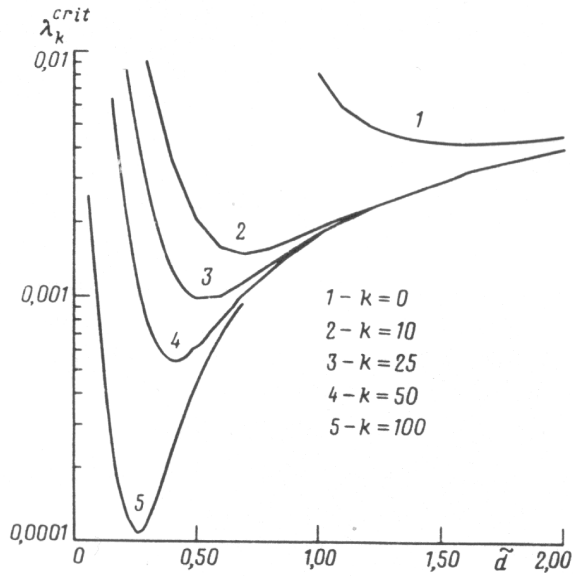


Рис. 4.20. зависимость безразмерного критического поля от эффективной толщины пленки при разных значениях параметра $k = d_*/d_0$.

пературу эксперимента $\simeq 1K$. Существенно, что положение минимума зависимости $W^{onm}(\tilde{d})$ не чувствительно к величине N . Это означает, что многоэлектронные лунки с разными N , возникающие при потере пленкой устойчивости, имеют максимальную энергию связи при одном для всех N значении \tilde{d} .

Рис. 4.22 свидетельствует о сильной зависимости энергии W от амплитуды прижимающего поля.

С точки зрения реконструкции важно не только само существование неоднородных образований на заряженной поверхности жидкости, но и характер их взаимодействия. Сравнивая "массивые" (глава 2, раздел 4) и "пленочные" лунки между собой, нетрудно видеть их качественную идентичность. Как и в случае (2.75) на пленке имеется деформационное, более интенсивное по сравнению с массивным случаем, притяжение между лун-

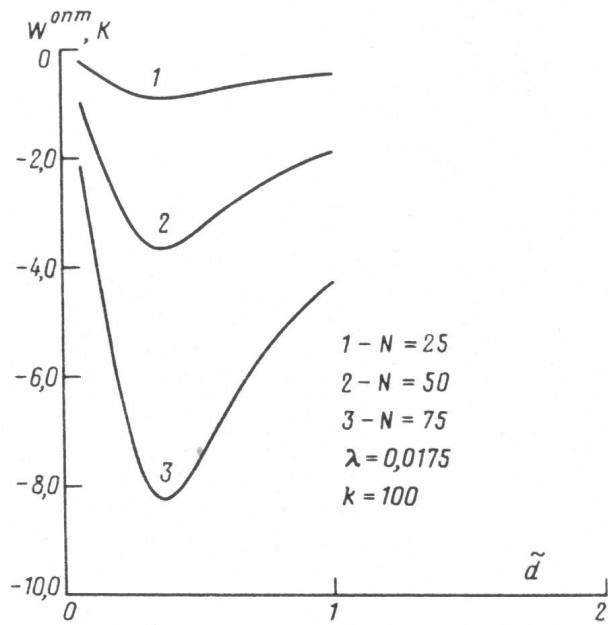


Рис. 4.21. зависимость энергии лунки с разным числом электронов от эффективной толщины пленки.

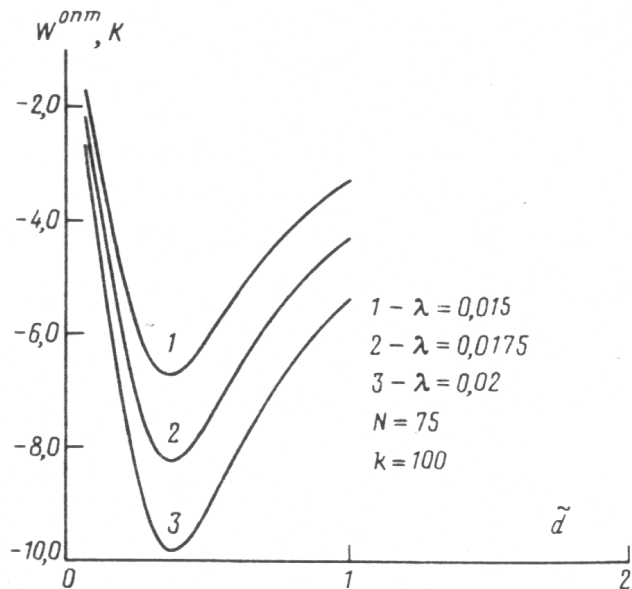


Рис. 4.22. зависимость энергии лунки от эффективной толщины пленки в различных прижимающих полях.

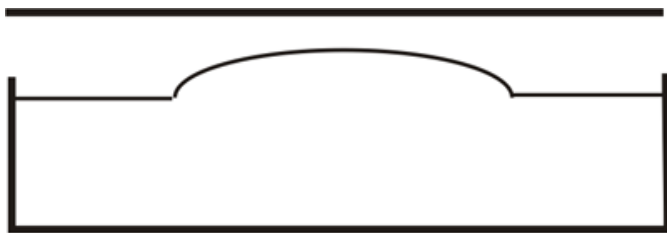


Рис. 4.23. Схема ячейки из [58].

ками. Имеет место и электростатическое отталкивание, которое, напротив, резко ослаблено (диполь-дипольное вместо кулоновского). В результате, отдельные пленочные лунки, если они и возникли в ходе реконструкции, должны сливаться между собой.

4.6. Обсуждение экспериментов по неустойчивости и реконструкции на тонких пленках

Рассмотрим эксперименты по развитию неустойчивости [10] с позиций, изложенных в разделе 4.5. Геометрия установки, соответствующая рис. 4.15, позволяет утверждать, что на величину критического поля влияет как эффект перенормировки g (4.76), так и уменьшение эффективной толщины пленки. Первый стабилизирует поверхность, а второй приводит к уменьшению критического поля. Результаты эксперимента по определению критического поля в области тонких ($d < a$) пленок, представленные на рис. 4.10, демонстрируют систематическое значительное отклонение от формулы (4.4) для критического поля бесконечной пленки в сторону меньших полей. Это расхождение можно объяснить геометрией эксперимента в соответствии с (4.77). В данном случае перенормировка g не компенсирует утоньшение пленки в результате действия сил электронного давления.

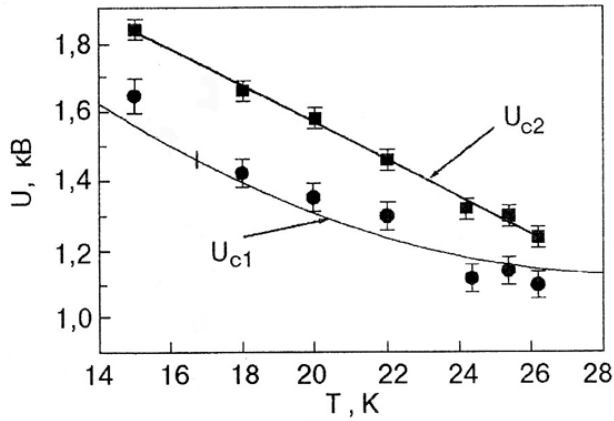


Рис. 4.24. Температурная зависимость критического напряжения (U_{c1}) от температуры. Точки - эксперимент, кривая - расчет. [58].

В экспериментах [45], [58] изучалась устойчивость заряженных пленок водорода. Схема ячейки, принципиально соответствующая рис. 4.16, изображена на рис. 4.23. Пленка помещалась в плоский, цилиндрически симметричный конденсатор. Наблюдения проводились в условиях полной экранировки поля в объеме жидкости $E_+ = 0$ при различных значениях внешнего напряжения на пластинах конденсатора. Наблюдаемые критические поля находятся в хорошем соответствии с формулой (4.4). Это демонстрирует рис. 4.24. Такой факт можно объяснить наличием охранного кольца, которое, несмотря на то, что вся жидкость находится в зоне действия внешнего поля, формирует на поверхности заряженное пятно, радиус которого L меньше радиуса пластин конденсатора L_0 . В данном случае перенормировка g играет большую, чем в [10], роль, так как L и L_0 различаются мало. Эффект компенсирует тенденцию к уменьшению критического поля, связанную с втягиванием жидкости в конденсатор и сужением зазора между поверхностью и верхним электродом.

Эти примеры убедительно демонстрируют важность учета граничных

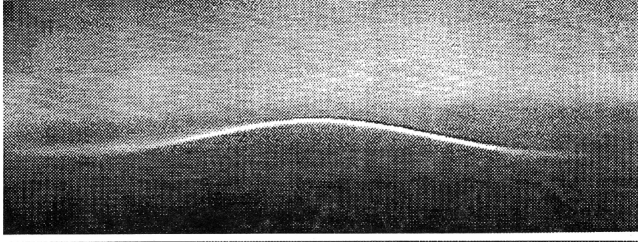


Рис. 4.25. Фотография заряженной поверхности жидкого водорода из [58].

условий, реализуемых на конкретных установках при проведении экспериментов с заряженными пленками.

В экспериментах [45], [58] была поставлена и другая цель - обнаружить (или нет) стационарную реконструкцию заряженной пленки жидкости в условиях насыщения. Необходимо отметить отличие данного случая от массивного [14, 15, 32], когда реконструкция осуществляется на волновых числах, равных обратной капиллярной длине. Геометрия рассматриваемых экспериментов такова, что неустойчивость развивается на малых волновых числах, и поэтому характер реконструкции определяется горизонтальными размерами ячейки.

Экспериментально наблюдалось возникновение одиночной стационарной волны деформации заряженных пленок гелия и водорода, сконденсированных на нижней поверхности плоского конденсатора. Фотография приведена на рис. 4.25. Такая волна на поверхности водорода возникала при увеличении внешнего напряжения до величины $U_{c1} \sim 1200 - 1500$ В. Таким образом, поскольку напряжение превышало критическое значение, заряженная пленка наблюдалась в новом, реконструированном состоянии. Возникающий холм R имел характерный аксиальный размер порядка нескольких капиллярных длин (для водорода $a = 1.8$ мм, $R \simeq 10$ мм). Высота

холма, оцененная по фотоснимку, была мала по сравнению с капиллярной длиной. При повышении напряжения до величины $U_{c2} \simeq 1750$ В поверхность теряла устойчивость и наблюдался разряд.

Следует отметить, что геометрические размеры экспериментальной ячейки, где наблюдалась реконструкция поверхности водорода, находятся на самом стыке тонкой и массивной теорий. Действительно, расстояние между поверхностью жидкости и верхним электродом составляло примерно $d = 3$ мм $\approx 1.7a$. Эта величина меньше d_0 из (4.36) и d_* из (4.50), однако превышает капиллярную длину a . Таким образом, параметр d попадает в ту область, для которой теория разделов 2 и 3 настоящей главы предсказывает отсутствие реконструкции. И все-таки, если учесть, что точность измерения d в эксперименте недостаточно велика, можно предположить, что она приближается к d_* , что дает нам право применить теорию нелинейных волн из раздела 2. Однако, размеры ячейки недостаточно велики, чтобы в ней могло определенно поместиться более одного элемента гексагональной метастабильной структуры, описанной в разделе 2. Только в этом случае мы могли бы не считаться с цилиндрической симметрией задачи, для которой нелинейная теория предсказывает существование углубления, а не холма в центре ячейки.

Поэтому интерпретация экспериментов с заряженной поверхностью жидкого водорода в свете разработанных в данной диссертации теоретических методов в настоящий момент не представляется возможной. Очевидно, что в ячейке таких размеров нужно более аккуратно учитывать краевые эффекты, связанные с тем, что поверхность заряжена неравномерно. Неравномерная заряженность обусловлена потенциалом охранного

кольца, ограничивающего ячейку в горизонтальном направлении, который выше потенциала нижней пластины конденсатора. Наличие постоянно работающего источника приводит к тому, что при изменении поля в объеме водорода количество зарядов на поверхности может изменяться. Это при напряжениях выше критического может привести к значительному отступлению от условий полной экранировки. Вполне возможно, что реконструкция, наблюдаемая в экспериментах [45], [58], может быть описана в соответствии с луночным сценарием. На это указывает характерный размер холма, а его малая (по сравнению с лункой на толстой пленке гелия) амплитуда связана с тем, что количество ионов на поверхности реально оказывается гораздо меньше, чем в условиях сильной заряженности. В самом деле, количество зарядов, которое протекает через коллектор при повышении напряжения до U_{c2} и было измерено в эксперименте, составило $N = 10^8$. При этом поверхность становилась горизонтальной, а значит ушедшие через коллектор ионы изменили полный заряд поверхности заметным образом. С другой стороны, количество зарядов, соответствующее n_s^{cr} (4.13) есть $N_0 = n_s^{cr} S \simeq 50N$ для равномерно заряженной поверхности в критических условиях. Это значительное различие подтверждает предположение о невыполнении условий полной экранировки на поверхности водорода.

Постановка задачи о многоэлектронной лунке на пленке водорода в условиях неоднородной заряженности выглядит достаточно сложной и пока не решена.

5. Двумерная система макроскопических кластеров у поверхности жидкого гелия.

5.1. Диплоны и ионы большого радиуса.

Электроны, формирующие двумерный электронный газ на поверхности жидкого гелия, или внедренные в его объем, могут взаимодействовать с другими, заряженными или нейтральными частицами, образуя локализованные устойчивые комплексы. Дипольные комплексы, содержащие положительный ион в пленке сверхтекучего гелия и электрон на ее свободной поверхности, рассмотрены в работе [81]. Так как положительный ион в такой системе притягивается к подложке силами изображения, а электрон не проникает в гелий, становится возможным образование устойчивого связанного состояния с большим дипольным моментом. Такие комплексы были названы диплонами. Разложение потенциальной энергии электрона по малым параметрам z/d и r/d , (d - толщина гелиевой пленки, r - расстояние, определяющее положение электрона в плоскости поверхности, z - расстояние между электроном и поверхностью гелия) позволяет определить спектр поверхностных электронов, который имеет осцилляторный вид с достаточно большой характерной энергией $\hbar\omega$. Для подложки из стекла при $d = 3.35 \cdot 10^{-6}$ см она составляет $13.3K$.

Имея целью обосновать возможность существования и наблюдения диплонов, авторы [81] проанализировали различные механизмы наруше-

ния устойчивости дипольных комплексов. Было найдено критическое значение толщины пленки d_{k1} , такое что при $d < d_{k1}$ притяжение электрона приводит к отрыву иона от подложки. Другое критическое значение d_{k2} ограничивает снизу интервал толщин, при которых электрон не проникает в гелий. Важным является вопрос об устойчивости системы относительно малых колебаний поверхности. На него отвечает спектр колебаний дипольно-электризованной пленки, в выражение для которого входят d и n_0 - средняя поверхностная концентрация диплонов. Устойчивость нарушается при достаточно больших n_0 и достаточно малых d . В итоге авторы [81] показывают, что существует диапазон параметров d и n_0 , при которых диплоны могут наблюдаться экспериментально.

Возможность формирования аналогичных комплексов в расслоившемся растворе квантовых жидкостей $He^3 - He^4$ обоснована в работе [82].

Для более глубокого понимания природы многочисленных интересных явлений, которые демонстрирует система поверхностных электронов над жидким гелием, было бы полезно иметь возможность увеличивать массу электрона, что позволило бы рассматривать его как классическую частицу. В работе [83] показано, что такая возможность может быть экспериментально реализована, так как в природе существуют ионы Ca^- и Ba^- , имеющие малую энергию связи. Подобно электронам, такие ионы образуют в гелии пузырьки большого радиуса и адсорбируются на его поверхности, где их энергия ниже, чем в вакууме, из-за дальнедействующих сил поляризационного притяжения к границе раздела воздух-гелий. Благодаря большой массе и хорошей локализации в горизонтальной плоскости рассматриваемый ион даже в отсутствие внешнего электрического поля обра-

зует вокруг себя статическую деформацию поверхности (лунку), появление которой обусловлено поляризационным взаимодействием заряда иона с гелием. В электрическом поле из-за наличия лунки подвижность иона падает на несколько порядков, а эффективная масса увеличивается.

Обсуждая вопрос об устойчивости массивного слоя гелия, заряженного ионами большого радиуса, авторы [83] приходят к выводу, что критическая концентрация заряженных частиц должна быть та же, что и для электронов (см. 2.15). Это обусловлено тем, что при $(n^{max} - n)/n^{max} \ll 1$ частота колебаний поверхности (2.13) мала, так что ионы, несмотря на их малую подвижность, успевают подстраиваться под изменение потенциала.

Таким образом, ионы Ca^- и Ba^- , формирующие на поверхности жидкого гелия двумерную заряженную систему, могут оказаться новым объектом экспериментального изучения.

5.2. Заряженные комплексы.

1. В последние годы интенсивно изучаются свойства атомов, молекул и кластеров небольшого размера в гелии, полученных методом лазерного распыления. Для более крупных частиц ($R > 50 \text{ \AA}$) существует хорошо разработанная экспериментальная методика внедрения в гелий через его поверхность [79, 80, 84, 85]. В связи с этим интересен вопрос о существовании вблизи поверхности гелия заряженных комплексов частиц, состоящих из электрона на поверхности гелия и макроскопического кластера (кристалла) под его поверхностью. Кроме того, теоретически возможным оказывается образование под поверхностью гелия заряженных кластеров, в которых электрон прижимается к нейтральной макроскопической части-

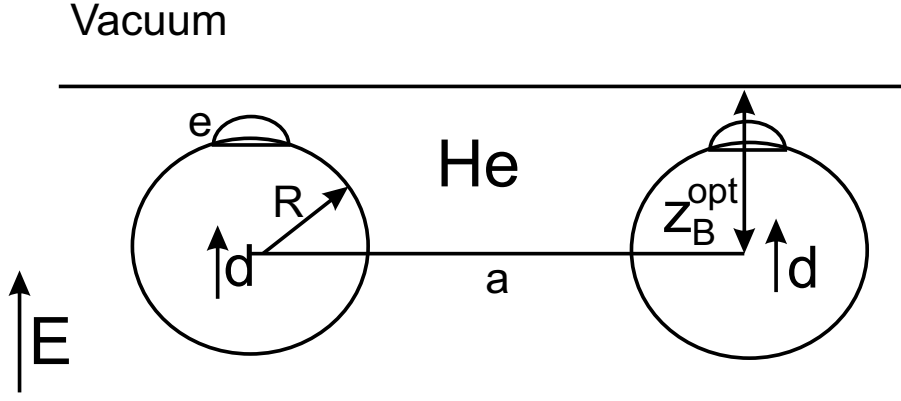


Рис. 5.1. система заряженных кластеров под поверхностью гелия.

це силами поляризационного притяжения. Объекты такого рода образуют вблизи поверхности гелия двумерную систему, которая должна демонстрировать новые по сравнению с двумерными электронами свойства.

2. В работе [86] рассматриваются заряженные комплексы, состоящие из нейтральной частицы большого радиуса ($R > 50 \text{ \AA}$) и электрона, которые формируются под поверхностью гелия во внешнем электрическом поле силами поляризационного притяжения. При этом электрон локализуется вблизи поверхности частицы (рис. 5.1). Энергия связи электрона и нейтрального кластера достаточно велика ($\sim 0.1 - 1 \text{ эВ}$). Внешнее электрическое поле E_{ex} прижимает такие тяжелые заряженные объекты к поверхности гелия, где они образуют двумерную систему.

Равновесное расстояние между кластером и поверхностью гелия z_B^{opt} определяется минимумом потенциальной энергии

$$V_{cl}(z_B) = eE_{ex}z_B + 2\nu_1 \frac{e^2}{z_B} - Mgz_B + \frac{(\mathbf{E}_{ex}R_*^3)^2}{z_B^3} \nu_1 + V_{vdW} \quad (5.1)$$

где

$$\nu_1 = \frac{1}{8} \frac{\epsilon_h - 1}{\epsilon_h + 1} \simeq \frac{1}{300}, \quad R_*^3 = R^3 \frac{\epsilon_B - \epsilon_h}{\epsilon_B + 2\epsilon_h} \quad (5.2)$$

Первый член в (5.1) обусловлен внешним электрическим полем, второй описывает действие сил изображения, возникающих из-за наличия границы раздела гелий-вакуум. Учет третьего, гравитационного члена имеет смысл только для очень больших кластеров радиуса $R > 10^4 \text{ \AA}$, обычно им можно пренебречь. Четвертый член в (5.1) есть потенциал изображения дипольного момента кластера. Вообще говоря, дипольный момент кластера \mathbf{d} возникает благодаря действию внешнего поля и поля электрона. Однако потенциал изображения электронно обусловленного дипольного момента отличается от второго слагаемого в (5.1) малым множителем $[(\epsilon_B - 1)R/(\epsilon_B + 1)z_B]^2/2 < 1/2$. Поэтому для оценки z_B можно учесть только дипольный момент $\mathbf{d} = \mathbf{E}_{ex}R_*^3$. Последнее слагаемое в (5.1) есть потенциал сил Ван-дер-Ваальса, которые удерживают кластер под поверхностью гелия. Потенциал V_{vdW} убывает как $1/z_B^3$ и должен учитываться только когда кластер расположен близко к поверхности.

Переходя к оценке z_B^{opt} , авторы [86] различают два случая: $e/R^2 \gg E_{ex}$ и $e/R^2 \ll E_{ex}$, соответствующие малым и большим размерам кластеров. Для первого случая при $E_{ex} = 3000 \text{ В/см}$ $R \ll 700 \text{ \AA}$. Определение z_B^{opt} для заряженных комплексов такого размера выполняется дифференцированием (5.1) с учетом только двух первых членов:

$$z_B^{opt} = \sqrt{2\nu_1 e / E_{ex}} \quad (5.3)$$

В поле $E_{ex} = 3000 \text{ В/см}$ $z_B^{opt} \simeq 60 \text{ \AA}$. Если $z_B^{opt} < R$, кластер будет находиться вблизи поверхности, однако короткодействующие силы Ван-дер-Ваальсова притяжения между частицей и гелием будут препятствовать выходу кластера наружу.

Для больших кластеров (в поле $E_{ex} = 3000$ В/см и $R \gg 700$ Å) следует учитывать диполь-дипольный потенциал изображения, возрастающий как R^6 . Тогда оптимальное расстояние между кластером и поверхностью z_B^{opt} определяется из квадратного уравнения

$$\frac{dV_{cl}}{dz_B} = eE_{ex} - 2\nu_1 \frac{e^2}{z_B^2} - 3 \frac{(\mathbf{E}_{ex} R_*^3)^2}{z_B^4} \nu_1 = 0, \quad (5.4)$$

что дает

$$z_B^{opt} = \sqrt{\frac{\nu_1 e}{E_{ex}}} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{3}{\nu_1} \left(\frac{E_{ex} R_*^2}{e} \right)^3} \right]^{1/2} \quad (5.5)$$

При $E_{ex} R_*^2 / e \gg 1$

$$z_B^{opt} \approx \sqrt{\frac{\nu_1 e}{E_{ex}}} \left(\frac{3}{\nu_1} \right)^{1/4} \left(\frac{E_{ex} R_*^2}{e} \right)^{3/4} \quad (5.6)$$

Таким образом, равновесное расстояние z_B^{opt} зависит от R и E_{ex} как $z_B^{opt} \propto (E_{ex})^{1/4} R^{3/4}$ и, увеличивая E_{ex} и R , можно добиться выполнения условия $z_B^{opt} > R$. При $\epsilon_B = 80 \approx \infty$ и $E_{ex} = 5000$ В/см это условие выполняется для "гигантских" кластеров $R \geq 5000$ Å = $0.5 \mu m$.

Из того факта, что существует макроскопическое равновесное расстояние z_B^{opt} вытекает возможность формирования двумерной системы заряженных кластеров под поверхностью гелия. При низких температурах амплитуды колебаний тяжелых заряженных комплексов вблизи положения равновесия малы, и можно обсуждать вопрос о кулоновской кристаллизации кластеров.

Потенциальная энергия взаимодействия двух заряженных комплексов расположенных на расстоянии a друг от друга есть

$$V_{int}(a) = \frac{e^2}{a} + \frac{(\mathbf{E}_{ex} R_*^3)^2}{a^3} = V_e + V_d \quad (5.7)$$

Диполь-дипольная составляющая V_d этого взаимодействия доминирует ($V_d > V_e$), когда $ae < E_{ex}R_*^3$. Оценка при $E_{ex} = 5000$ В/см, $R_* = 5000\text{Å}$ и $a = 10R_*$ (это соответствует средней плотности заряженных комплексов $n_s = 1/a^2 = 4 \cdot 10^6$ см $^{-2}$) дает

$$V_e = 3K, \quad V_d = 300K \quad (5.8)$$

Эмпирический критерий $V(a) > 100k_B T$ позволяет определить температуру плавления двумерного кулоновского кристалла, которая оказывается довольно высокой: $T = 3$ К. Необычность ситуации заключается в том, что кристаллическая решетка формируется благодаря короткодействующему диполь-дипольному отталкиванию.

Создать двумерную систему заряженных кластеров можно при помощи метода, впервые использованного 50 лет назад [87]. Нейтральные частицы вводятся в гелий через поверхность и медленно движутся вниз, ко дну экспериментальной ячейки, где работает источник электронов. Под действием электрического поля электроны движутся вверх. В объеме гелия некоторые кластеры связывают по одному электрону, и образуют 2D систему вблизи поверхности. Нейтральные кластеры оседают на дне ячейки, где их удерживают силы Ван-дер-Ваальса. Избыточные электроны, не связанные с кластерами, в конце концов протуннелируют сквозь поверхность в вакуум, где они имеют более низкую энергию. Энергия больших заряженных комплексов, напротив, ниже в гелии благодаря притяжению Ван-дер-Ваальса между кластером и жидкостью.

Для анализа устойчивости двумерной системы заряженных комплексов необходимо рассмотреть силы притяжения Ван-дер-Ваальса, действу-

ющие между ними. На больших расстояниях потенциальная энергия этих сил для двух атомов есть [91]:

$$V_{vdW} = \frac{23\hbar c}{4\pi a^7} \beta^2 \quad (5.9)$$

где β - атомная поляризуемость кластера, которая связана с диэлектрической проницаемостью как $\epsilon_B = 1 + 4\pi\beta n$, n - плотность вещества кластера.

Интегрирование (5.9) по объему кластера дает

$$V_{BB} = \frac{23\hbar c R^6}{36\pi a^7} (\epsilon_B - \epsilon_H)^2 \quad (5.10)$$

Для частицы, состоящей из молекул H_2O с $\epsilon_B \approx 80$, $R = 5000 \text{ \AA}$, $a = 10R$ (те же параметры, что и в (5.8)), оценка дает $V_{BB}(a) = 0.6 \text{ К}$, то есть $V_{BB}(a) \ll V_d(a)$. Это позволяет говорить о большом интервале параметров, при которых в рассматриваемой 2D системе не происходит слипания кластеров.

Если бы двумерную решетку больших заряженных кластеров удалось создать в эксперименте, ее было бы значительно легче наблюдать, чем кулоновскую решетку двумерных электронов, которая "поддается" только непрямому изучению (см., например, [88]). Напротив, 2D структуру, сформированную частицами большого размера, можно было бы исследовать рентгеновскими и нейтронными методами.

3. Возможность существования связанных состояний электрона и макроскопического нейтрального кластера у поверхности жидкого гелия теоретически обосновано в работе [89]. Показано, что в сильном электрическом поле такие связанные состояния реализуются даже для "гигантских" кристаллов размера $R \sim 10^3 \text{ \AA}$. Суть явления состоит в том, что

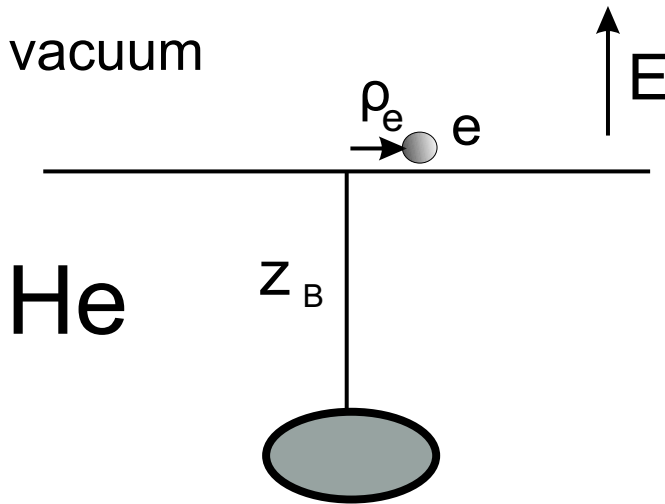


Рис. 5.2. система нейтральный кластер+электрон у поверхности жидкого гелия.

поверхность гелия выступает для электрона и кластера в роли третьего тела, понижающего размерность задачи. Электрон не проникает в гелий, так как энергия его внедрения в жидкость очень велика: $V_0 \sim 1 \text{ eV}$, что отвечает пробойному электрическому полю $E_0 \approx 10^8 \text{ В/см}$. Кластер же удерживается жидкостью, т.е. отталкивается от ее поверхности силами Ван-дер-Ваальса. Оказывается, что при включении взаимодействия электрона и кластера в сильном электрическом поле существует эффект самолокализации. Положение кластера фиксируется на некотором расстоянии z_{B0} под поверхностью гелия, а движение электрона вдоль плоскости жидкости ограничено и носит осцилляторный характер (рис. 5.2).

Потенциальная энергия системы электрон+кластер имеет вид

$$V = V_e(z_e) + V_B(z_B) + V_{eB}(\rho_e, z_e, z_B) \quad (5.11)$$

Координаты ρ_e, z_e отвечают электрону, а z_B кластеру, который предполагается выполненным в виде диэлектрической сферы радиуса R с диэлектрической проницаемостью ϵ_B .

Потенциальной энергии электрона $V_e(z_e)$ отвечает пробная волновая функция $\varphi_0(z_e)$ [90]

$$V_e(z_e) = eEz_e - \frac{\epsilon_h - 1}{\epsilon_h + 1} \frac{e^2}{4z_e} + V_0\theta(-z_e), \quad \varphi_0^2(z_e) = \frac{z_e^2}{2z_0^3} \exp(-z_e/z_0) \quad (5.12)$$

где E - внешнее электрическое поле, $\epsilon_h = 1.054$ - диэлектрическая проницаемость He^4 , а z_0 - характерный масштаб движения электрона по оси z .

При $E = 0$ имеем $z_0 \simeq 100 \text{ \AA}$. Значение z_0 в сильном электрическом поле имеет оценку $z_0 \approx \left(\frac{\hbar^2}{meE}\right)^{1/3}$

Перейдем теперь к анализу потенциальной энергии кластера $V_B(z_B)$, которая, если пренебречь силами тяготения, состоит из двух частей

$$V_B(z_B) = V_{BE}(z_B) + V_{\beta h}(z_B) \quad (5.13)$$

Значение первой, электростатической части $V_{BE}(z_B)$ определяется отталкиванием диполя от поверхности жидкости [92]

$$V_{BE}(z_B) = \frac{d^2}{8z_B^3} \frac{\epsilon_h - 1}{\epsilon_h + 1}; \quad \mathbf{d} = \mathbf{E}R_*^3; \quad R_*^3 = R^3 \frac{\epsilon_B - \epsilon_h}{\epsilon_B + 2\epsilon_h} \quad (5.14)$$

Вывод (5.14) предполагает неравенство $z_B > R$. В однородном электрическом поле E кластер приобретает дипольный момент \mathbf{d} , который связан с его эффективным радиусом R_* (5.14). Вторая, Ван-дер-Ваальсова часть $V_{\beta h}(z_B)$ содержит член, не зависящий от (z_B) , который имеет смысл работы выхода из жидкости $V_{\beta h}(z_\infty)$, и член, отвечающий отталкиванию от поверхности гелия. Эта последняя часть определена при $z_B \gg R$ соотношением:

$$V_{\beta h}(z_B) = V_{\beta h}(\infty) - n_B n_h \frac{4}{3} \pi R^3 \int v_{hB}(\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_B) d\mathbf{r}_h; \quad z_h > 0 \quad (5.15)$$

Здесь n_B и n_h плотности атомов кластера и гелия, а v_{hB} - потенциал взаимодействия их молекул.

Интегрирование в (5.15) по координате атомов Не ограничено полупространством $z_h > 0$. Так как значение z_B предполагается макроскопически большим, то потенциал v_{hB} в (5.15) убывает с расстоянием между взаимодействующими атомами как $1/r^7$ и зависит только от их поляризуемостей β_B и β_h [91]

$$v_{hB} = -\frac{23}{4\pi} \frac{e^2}{\alpha} \frac{\beta_h \beta_B}{|\mathbf{r}_h - \mathbf{r}_B|^7} \quad (5.16)$$

где α - постоянная тонкой структуры. Из (5.15) и (5.16) с учетом определения диэлектрической постоянной $\epsilon = 1 + 4\pi\beta n$, получаем

$$V_{\beta h}(z_B) = \frac{23(\epsilon_h - 1)}{480\pi\alpha} \frac{e^2}{z_B^4} R_*^3 (2\epsilon_h + \epsilon_B) + V_{\beta h}(\infty) \quad (5.17)$$

$$V_{\beta h}(z_B) \simeq 0.11 \frac{e^2 R_*^3}{z_B^4} (2\epsilon_h + \epsilon_B) + V_{\beta h}(\infty) \quad (5.18)$$

Связь R_* с R определена выше (5.14).

Взаимодействие между электроном и кластером описывается двумя составляющими:

$$V_{eB}(\rho_e, z_e, z_B) = -\frac{eER_*^3(z_B + \bar{z}_e)}{[(z_B + \bar{z}_e)^2 + \rho_e^2]^{3/2}} - \frac{e^2 R_*^3}{2[(z_B + \bar{z}_e)^2 + \rho_e^2]^2} \quad (5.19)$$

Здесь ρ_e - координата электрона в горизонтальной плоскости. Поляризованный кластер создает собственное электрическое поле, которое при условии $R \ll z_B$ можно описывать потенциалом точечного диполя $\Phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{d} \cdot \mathbf{r})/r^3$. Действие этого потенциала ограничивает движение электрона в горизонтальной плоскости (первое слагаемое в (5.19)).

Электрон также поляризует кластер. В пределе $r \gg R$ влияние электрона на поляризацию диэлектрической сферы можно учесть, считая поле электрона $\mathbf{E} = -e\mathbf{r}/r^3$ однородным. Дополнительную энергию диполя (кластера) в поле электрона описывает второе слагаемое в (5.19).

Чтобы решить задачу о движении электрона, воспользуемся адиабатическим приближением, как это было сделано ранее для электронов над поверхностью гелия во внешнем электрическом поле [90]. Сначала рассмотрим движение электрона в z направлении, перпендикулярном к поверхности гелия. Это движение определяется потенциальной энергией электрона V_e (5.12). Электрон "прижат" к поверхности внешним полем и силами изображения, так что его нижнему энергетическому уровню соответствует средняя высота над поверхностью $\bar{z}_e \simeq 50 \text{ \AA}$, что в предлагаемой модели значительно меньше z_B и ρ_e : $\bar{z}_e \ll z_B, \rho_e$. Поэтому в выражении (5.19) можно пренебречь величиной \bar{z}_e в сумме $z_B + \bar{z}_e$. Полагая теперь $\rho_e \ll z_B$, мы можем разложить энергию (5.19) в ряд по малым $(\rho/z_B)^2$:

$$V_{eB}(\rho_e, z_e, z_B) = -\frac{eER_*^3}{z_B^2} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{\rho_e^2}{z_B^2} \right] - \frac{e^2 R_*^3}{2z_B^4} \left[1 - 2 \frac{\rho_e^2}{z_B^2} \right]$$

$$V_{eB}(\rho_e, z_e, z_B) = - \left[\frac{eER_*^3}{z_B^2} + \frac{e^2 R_*^3}{2z_B^4} \right] + \frac{\rho_e^2}{z_B^2} \left[\frac{3eER_*^3}{2z_B^2} + \frac{e^2 R_*^3}{z_B^4} \right] \quad (5.20)$$

Второе слагаемое в (5.20) - потенциал гармонического осциллятора. Нулевая частота колебаний:

$$\omega_0^2 = \frac{2}{mz_B^2} \left[\frac{3eER_*^3}{2z_B^2} + \frac{e^2 R_*^3}{z_B^4} \right] \quad (5.21)$$

Разложение вида (5.20) применялось в [81] для определения уровней электрона в потенциале положительно заряженного иона, прижатого к подложке. Приближение (5.20) правомерно только в том случае, когда энергия нулевых колебаний мала по сравнению с энергией связи электрон-кластер:

$$\hbar\omega \ll U_0, \quad U_0 = eER_*^3/z_B^2 + e^2 R_*^3/2z_B^4. \quad (5.22)$$

Для кластера с эффективным размером $R_* = 500 \text{ \AA}$, расположенного на

расстоянии порядка $z_B = 10^4 \text{ \AA}$ от поверхности жидкого гелия условие (5.22) будет выполняться при значениях внешних полей $E \gg 300 \text{ В/см}$. Оценим теперь расстояние z_{B0} , соответствующее минимуму энергии системы. Без учета нулевых колебаний электрона и силы тяготения эта энергия дается выражением

$$V(z_B) \approx \frac{(E_{tot} R_*^3)^2 \epsilon_h - 1}{8z_B^3 \epsilon_h + 1} - \frac{eER_*^3}{z_B^2} + \frac{e^2 R_*^3}{z_B^4} [0.11(2\epsilon_h + \epsilon_B) - 1/2] \quad (5.23)$$

где $E_{tot} = E + e/z_B^2$. Для кластера, состоящего из воды $\epsilon_B = 80$. В этом случае выражение в квадратных скобках положительно. Поскольку $(\epsilon_h - 1)/(\epsilon_h + 1) \approx 1/300$ при выполнении оценок можно пренебречь в выражении (5.23) первым слагаемым. Из условия минимума (5.23) получим следующую зависимость z_{B0} от внешнего поля

$$z_{B0} = \frac{10^{-4}}{\sqrt{E}} \quad (5.24)$$

в единицах СГСЭ. Для кластера с $R_* = 500 \text{ \AA}$ условие $z_{B0} \gg R$ выполняется при внешних полях $E \ll 30000 \text{ В/см}$. Энергия связи с локализованным над поверхностью гелия электроном для такого кластера в поле $E = 3000 \text{ В/см}$ равна $U_0 \approx 4K$. Можно показать, что для кластеров меньших размеров $R_* = 100 \text{ \AA}$ также имеется достаточно широкий интервал значений внешнего электрического поля E , в котором заряженные макроскопические комплексы в гелии устойчивы. В поле $E = 30000 \text{ В/см}$ при $z_{B0} \sim 10^{-5} \text{ см}$ энергия связи U_0 составляет $\sim 3K$.

Интересен вопрос о критической концентрации описанных выше комплексов над поверхностью жидкого гелия. Максимальная поверхностная плотность свободных электронов над толстой пленкой гелия дается выражением (2.15) и составляет 10^9 электронов на квадратный сантиметр. При

более высокой концентрации поверхность гелия линейно неустойчива. Эта неустойчивость связана с большой подвижностью электронов. Описанная выше система заряженных комплексов обладает значительно меньшей подвижностью, которая зависит от размера кластера и напряженности прижимающего поля. Механизм, приводящий к неустойчивости заряженной поверхности гелия при большой концентрации электронов может не работать или быть ослаблен в системе заряженных комплексов. На поверхности тонкой пленки гелия критическая электронная концентрация значительно выше. Это связано с перенормировкой эффективного ускорения свободного падения g за счет ван-дер-Ваальсова притяжения атомов жидкости к подложке [47]. Макроскопические кластеры под поверхностью могут приводить к подобному дополнительному эффекту перенормирования g .

Предложенная система заряженных комплексов дает возможность исследовать кулоновскую кристаллизацию электронов на поверхности по упорядоченному расположению макроскопических частиц под поверхностью, которые можно наблюдать оптически при достаточно большом размере частиц.

6. Заключение

Основные результаты выполненной работы.

1. Решена задача об устойчивости тонкой незаряженной ограниченной пленки жидкости, удерживаемой на твердом потолке силами Ван-дер-Ваальса. Предсказан и описан новый вид неустойчивости - тонкая бесконечная пленка жидкости, удерживаемая на твердом потолке силами Ван-дер-Ваальса теряет устойчивость по отношению к малым колебаниям, когда ее толщина превышает критическое значение h_* . Показано, что при толщине ограниченной инверсионной пленки большей критического значения происходит реконструкция - пленка переходит из плоского в устойчивое искривленное состояние. В центре ячейки образуется капля, амплитуда которой растет, а края утончаются с увеличением средней толщины слоя жидкости.

2. Построена теория метастабильных стационарных состояний сильно заряженных пленок жидкого водородода с произвольным значением параметра d - расстояния между поверхностью жидкости и управляющим электродом. Показано, что такие состояния в одномерном случае не реализуются. Решение двумерной задачи показывает, что метастабильные состояния поверхности в виде гексагональной структуры могут возникать. Определены пределы изменения параметров d , и γ , в которых реализация таких

состояний возможна.

3. Найдены решения нелинейного уравнения, описывающего стационарное состояние сильно заряженной, ограниченной и неограниченной поверхности водорода с малым значением параметра $d \ll a$, при условии сохранения полного объема жидкости. Показано, что состояния, описываемые такими решениями, неустойчивы.

4. Для ограниченной пленки, когда края жидкого слоя оказываются незаряженными, критические условия определяются двумя факторами: деформацией поверхности и развитием линейной неустойчивости малых колебаний. Показано, что критические условия для бесконечной и ограниченной пленок могут сильно различаться.

5. Описано поведение тонкой сильно заряженной пленки гелия ($d \ll a$), в условиях, когда жидкость вытекает из конденсатора конечных размеров под действием сил электрического давления. Определены критические значения напряжения в конденсаторе, при котором поверхность теряет устойчивость, в зависимости от размеров ячейки.

6. Построена диаграмма стабильности многоэлектронной лунки на пленке гелия в условиях действия сил Ван-дер-Ваальса. Показано, что равновесная энергия лунки зависит от эффективной толщины пленки, но не зависит от числа электронов в ней.

7. Предложены и описаны новые объекты, существование которых возможно вблизи поверхности гелия при наличии электрического поля - заряженные комплексы и связанные состояния электрона и нейтрального кластера. Показано, что такие объекты имеют достаточно большую энергию связи и являются устойчивыми в широких диапазонах таких параметров как внешнее поле и размер частицы, внедренной в гелий.

Литература

1. Я.Френкель ЖЭТФ , (1939), 641
2. Ландау, Лифшиц Электродинамика сплошных сред.
3. N.Bohr, J.Wheeler Phys.Rev. **56**, 71, (1939).
4. Ya.Frenkel, Zs der Sowietunion **8**, 675, (1935).
5. Я.Френкель ЖЭТФ **6**, 347, (1936).
6. T.Tonks Phys. Rev. **48**, 562 , (1935).
7. Л.Горьков, Д.Черникова Письма ЖЭТФ **18**, 119, (1973).
8. Д. М. Черникова ЖЭТФ **68**, 250 (1975).
9. А.Володин, М.Хайкин, В.Эдельман Письма ЖЭТФ **23**, 524, (1976).
10. А.Володин, М.Хайкин, В.Эдельман Письма ЖЭТФ **26**, 707, (1977).
11. P.Leiderer Phys.Rev. **B 20**, 4511, (1979).
12. Л.Горьков, Д.Черникова ДАН СССР **228**, 829, (1976).
13. Д. М. Черникова ФНТ **6**, 1513, (1980).
14. P.Leiderer, M.Wanner Phys.Lett. **A 73**, 189, (1979).
15. M.Wanner, P.Leiderer Phys.Rev.Lett. **42**, 315, (1979).

16. J. Melcher Field-coupled Surface Waves, Cambridge, Mass. The MIT Press 1963.
17. G.Taylor, A.McEwan J.Fluid Mech. **22**, 1, (1965).
18. M.Cowley, R.Rosenswieg, J.Fluid Mech. **30**, 671, (1967).
19. В.Зайцев, М.Шлиомис ДАН **188**, 1261, (1969).
20. М.Шлиомис УФН **112**, 437, (1974).
21. Е.Кузнецов, М.Спектор ЖЭТФ **71**, 262, (1976).
22. K. Mima, H.Ikezi, Phys.Rev. **B 17**, 3567, (1978).
23. H.Ikezi Phys.Rev.Lett. **42**, 1688, (1979).
24. Л.Горьков, Д.Черникова ЖЭТФ **80**, 1940, (1981).
25. В.И.Мельников, С.В.Мешков Письма ЖЭТФ **33**, 222, (1981).
26. В.Мельников, С.Мешков, ЖЭТФ **81**, 951, (1981).
27. V.I. Mel'nikov, S.V. Meshkov, Macroscopic Instability and Many-Electron Dimples on a charged Surface of Liquid Helium, Chirigolovka, 1981.
28. H.Ikezi, P.Platzman, Phys.Rev. **B 23**, 1145, (1981).
29. P.Leiderer, W.Ebner, V.Shikin, Surf.Sci. **113**, 405, (1982).
30. В.Шикин, П.Лейдерер, Письма ЖЭТФ **32**, 439, (1980); ЖЭТФ **81**, 134, (1981).
31. D.Savignac, P.Leiderer Phys.Rev.Lett. **49**, 1869, (1982).

32. R.Giannetta , H.Ikezi Surf.Sci. **113**, 412, (1982); Phys.Rev.Lett. **47**, 849, (1981).
33. H. Ikezi, R. Giannetta, and P.Platzman, Phys.Rev. **B 25**, 4488, (1982).
34. V.Shikin, P.Leiderer, Solid St. Com. **47**, 269, (1983).
35. Дж. В. Стретт, Теория звука, том II, Госиздат, Москва, (1955).
36. Д. Палси, В. Галустов, Распылители жидкостей, Москва, Химия, 1979, стр. 176.
37. В. Шикин, С. Назин, А. Изотов, ДАН СССР **283**, 121, (1985).
38. В.Шикин, Письма ЖЭТФ **27**, 30, (1970).
39. M. Salomaa, G. Williams, Phys. Rev. Lett. **47**, 1730, (1981).
40. U. Albrecht, P.Leiderer, Euro.Lett. **3**, 705, (1987).
41. Н.Иногамов, А.Демьянов, Э.Сон "Гидродинамика перемещения "Изд. МФТИ, стр. 464.
42. R.Crandal, Surf. Sci. **58**, 266, (1976).
43. В.В.Маляров Основы теории атомного ядра, Наука, Москва, 1967, 511 стр.
44. Л.Ландау ЖЭТФ **7**, 19, (1937).
45. А.А. Levchenko, E. Teske, G.V. Kolmakov, P. Leiderer, L.P. Mezhov-Deglin, and V.B. Shikin, JETP Lett. **65**, 572, (1997).
46. Д. М. Черникова ФНТ **2**, 1374 (1976).

47. F. Peeters, Phys. Rev. **B 30**, 159, (1984).
48. В.В.Татарский ФНТ **10**, 435, (1984).
49. Вильк, Ю. Монарха ФНТ **10**, 901, (1984).
50. V.S. Mitlin Journal of colloid and Interface Science **156**, 491, (1993).
51. S. Herminghaus et al. Science **284**, 916, (2000).
52. Ya.I. Frenkel, Z. Eksp. Teor. Phys. **18**, 659, (1948); Ya.B. Aron, Ya.I. Frenkel, Z. Eksp. Teor. Phys. **19**, 807, (1949).
53. E. Sabisky, E. Anderson, Phys. Rev. A **7**, 720 (1973).
54. S. Putterman, *Superfluid Hydrodynamics*, North Holland Publish Company, New York, 1974.
55. V.B. Shikin. E.V. Lebedeva, J. Low Temp. Phys. **119**, 469, (2000).
56. G.V. Kolmakov, E.V. Lebedeva, A.A. Levchenko, L.P. Mezhov-Deglin, and V.B. Shikin, J. Low Temp. Phys. **126**, 385, (2002).
57. G.V. Kolmakov, E.V. Lebedeva, A.A. Levchenko, L.P. Mezhov-Deglin, A.B. Trusov, and V.B. Shikin Low. Temp. Phys. **30** (1), 58,(2004).
58. A.A. Levchenko, G.V. Kolmakov, L.P. Mezhov-Deglin, M.G. Mikhailov, and A.B. Trusov, Low Temp. Phys. **25**, 242, (1999).
59. A. Valdesh Diplom C.E.N. SACLAV, 1980, 140 p.
60. В.Шикин, П. Лейдерер, ФНТ **23**, 624, (1997).
61. H.Etz, W.Bombert, P.Leiderer, Phys. Rev. Lett. **53**, 2567, (1984).

62. В.В.Татарский ФНТ **12**, 451, (1986).
63. Ю. Монарха, ФНТ **8**, 215, (1982).
64. Ю. Монарха, ФНТ **8**, 1133, (1982).
65. В.В.Татарский, Н. Шикина, В. Шикин, ФНТ **10**, 117, (1984).
66. A. Dahm, Zeitschrift fur Physik, **В 98**, 333.
67. J. Klier, F. Schletterer, P. Leiderer, and V. Shikin, ФНТ **29**, 957, (2003).
68. Г.В. Колмаков, Е.В. Лебедева ЖЭТФ **115**, 43, (1999).
69. В.Б. Шикин, Е.В. Лебедева ФНТ **24**, 299 (1998).
70. В.Б. Шикин, Е.В. Лебедева Письма ЖЭТФ **57**, 126 (1993)
71. S.M. Sze, Physics of Semiconductor Devices, John Wiley and Sons, New York, Chichster, Brisbane, Toronto Singapur (1981).
72. E. Teske, P. Leiderer, P. Wyder, and V. Shikin J. Low Temp. Phys. **110**,(1998).
73. P. F. Fontain, P. Hendriks, F. A. P. Blom, I. K. Wolter, L. I. Giling, and C. W. I. Beenaker, Surf.Sci.**963**, 91 (1992).
74. R. Knott, W. Dietsche, K. V. Klitzing, K. Plong, and K. Eberle Semicond. Sci. Technol. **10**, 117 (1995).
75. W. Dietsche, K. V. Klitzing, and U. Ploog Surf.Sci.**361/362**, 289 (1996).
76. S. Takaoka, K. Oto, H. Kurimoto, K. Murase, K. Gamo, and S. Nishi, Phys. Rev. Lett.) **72**, 3080 (1994).

77. V. T. Dolgoplov, A. A. Shashkin, G. V. Kravchenko *et al*, Pis'ma ZhETF **63**, 55 (1996), JETP Lett. **63**, 50 (1996).
78. В.Б. Шикин ФНТ **20**, 1158 (1994).
79. Е.В. Гордон, Л.П. Межов-Деглин, О.Ф. Пугачев, Письма ЖЭТФ **19**, 103, (1974).
80. Л.П.Межов-Деглин, А.М. Кокотин, Low. Tem. Phys. **119**, 385 (2000).
81. Ю.П. Монарха, Ю. З. Ковдря, ФНТ **8**, 215 (1982).
82. Монарха, Ю.П., ФНТ **5**, 940 (1979).
83. П.Д. Григорьев, А.М. Дюгаев, ЖЭТФ **115**, 593 (1999).
84. Л.П.Межов-Деглин, А.М. Кокотин, Письма в ЖЭТФ **70**, 744 (1999).
85. Л.П.Межов-Деглин, А.М. Кокотин, ФНТ **28**, 235 (2002). (1978).
86. А.М. Dyugaev, P.D. Grigoriev, E.V. Lebedeva, and Peter Wyder, НАИТ Journal of Science and Engineering **1** (2), 297 (2004).
87. P. Savich and A. Shalnikov, Journ. Phys. USSR **10**, 441 (1946).
88. C.C. Grimes and G. Adams, Phys. Rev. Lett. **42**, 795 (1979).
89. Е.В. Лебедева, А.М. Дюгаев, П.Д. Григорьев, ЖЭТФ **125**, 441 (2004).
90. В.Б. Шикин, Ю.П. Монарха Двумерные заряженные системы в гелии, "Наука", Москва (1989).
91. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, Статистическая физика, часть 2, Наука, Москва (2001).

92. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Наука, Москва (2001).