

СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ПОЛУПРОВОДНИКОВ

На правах рукописи

Махмудиан Махмуд Максуд

**РАЗМЕРНЫЕ ЭФФЕКТЫ В МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ  
КВАНТОВЫХ СИСТЕМАХ**

(01.04.10– физика полупроводников)

Диссертация

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель —

к.ф.-м.н., в.н.с.

Энтин М. В.

Новосибирск - 2003

## Содержание

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>I Квантовые поправки к кинетическим коэффициентам в системах с пространственными ограничениями</b>	<b>17</b>
<b>1 Квантовые поправки к проводимости двумерных систем с антиточками</b>	<b>17</b>
§1 Происхождение квантовых поправок к проводимости . . . . .	19
§2 Расчет квантовых поправок . . . . .	21
§3 $2D$ система с антиточками малого радиуса . . . . .	25
§4 $2D$ система с антиточками большого радиуса . . . . .	30
§5 $2D$ система с антиточками промежуточного радиуса. Результаты численного расчета . . . . .	31
§6 Основные результаты и выводы главы . . . . .	34
<b>2 Эффект Ааронова-Бома в мезоскопическом кольце в нестационарном магнитном поле</b>	<b>36</b>
§1 Расчет квантовых поправок . . . . .	37
§2 О возможности экспериментального наблюдения эффекта . . . . .	42
§3 Основные результаты и выводы главы . . . . .	45
<b>II Термодинамические свойства электронных систем, обусловленные наличием пространственных ограничений</b>	<b>46</b>
<b>3 Реберная энергия ограниченных микрокристаллов</b>	<b>46</b>

§1	Постановка задачи . . . . .	47
§2	Расчет реберного вклада для изотропного энергетического спектра . . .	48
§3	Осциллирующий вклад в $\Omega$ -потенциал . . . . .	51
§4	Влияние примесного рассеяния на $\Omega$ -потенциал . . . . .	55
§5	Анизотропный квадратичный энергетический спектр . . . . .	58
§6	Основные результаты и выводы главы . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Проникновение магнитного поля в размерно-квантованных систе-</b>	
	<b>мах</b>	<b>61</b>
§1	Фриделевские осцилляции проникновения магнитного поля в нормаль-	
	ный металл и размерно-квантованную систему . . . . .	66
§2	Диамагнитный вклад . . . . .	66
§3	Двумерная полоса . . . . .	72
§4	Парамагнитный ток . . . . .	74
§5	Роль примесей . . . . .	74
§6	Краевой ток в 2D системе в конечном магнитном поле . . . . .	75
§7	Диамагнитные токи в квантовом диске и квантовом кольце . . . . .	83
§8	Основные результаты и выводы главы . . . . .	88
	<b>Заключение</b>	<b>90</b>

## Введение

**Актуальность темы.** Современное развитие технологии позволило существенно уменьшить размеры полупроводниковых приборов. В настоящее время наиболее используемыми являются элементы вычислительных схем с типичными размерами порядка тысячи ангстрем и имеется тенденция к переходу к масштабам вплоть до атомных размеров. При достижении этих масштабов возникает необходимость учитывать эффекты, обусловленные конечностью размера системы, когда существенными становятся процессы, связанные с электронной когерентностью и описываемые в рамках физики мезоскопических явлений.

Обычно термин "мезоскопика" применяется к системам, характерный размер которых много меньше длины сбоя фазы электронов  $L_\varphi$  ( $L \ll L_\varphi$ ). Для целей настоящей диссертации термин "мезоскопика" в расширенном смысле применяется также к системам конечных размеров, когда характерный масштаб системы много больше длины волны электронов ( $L \gg \lambda$ ), но в то же время существенны квантовые свойства.

В мезоскопических системах имеют место различные квантовые эффекты при низких температурах, связанные с интерференцией электронных волн, квантованием энергетических уровней и дискретностью электрического заряда.

Когда электронная система заключена в конечный объем, появляется существенно новый энергетический масштаб, который приводит к возникновению размерных поправок, к транспортным и термодинамическим величинам. Эти поправки были объектами различных теоретических, а также экспериментальных исследований последних лет как в чистых, так и в неупорядоченных системах.

В неупорядоченных мезоскопических системах, где из-за малости упругой длины свободного пробега  $l$  электроны двигаются диффузно, возникает вклад в среднее

сопротивление за счет слабой локализации электронов из-за когерентного обратного рассеяния [1]. Этот вклад установлен во многих экспериментальных системах. Особенность слаболокализационного вклада заключается в том, что он ”выживает” в результате усреднения по ансамблю [2].

Используя теорию слабой локализации, Альтшулер, Аронов и Спивак [23] показали, что магнетосопротивление цилиндрической пленки, сделанной из нормального металла, в продольном магнитном поле будет периодически осциллировать как функция приложенного магнитного поля. Период этих осцилляций соответствует кванту потока  $\Phi_0 = hc/2e$  через площадь цилиндра.

Помимо слаболокализационных эффектов, в мезоскопических образцах присутствуют также другие явления, которые не могут быть описаны простым использованием теоретических методов с усреднением по ансамблю. Эти явления включают в себя флуктуации кондактанса [2] с амплитудой флуктуаций порядка  $e^2/\hbar$ , осцилляции Ааронова-Бома в магнетосопротивлении двусвязных структур (типа петли из одномерной проволоки) с периодом потока  $hc/e$  через петлю и нелокальное поведение магнетосопротивления [3, 4]. Величина неусредненных по ансамблю эффектов увеличивается по мере уменьшения размера образца по сравнению с  $L_\phi$ .

В образцах малых размеров из-за конечности объема происходит квантование электронных уровней. В частности, из-за граничных условий на поверхности, переход от массивных объектов к образцам малых размеров сопровождается увеличением вклада поверхностного слагаемого в свободную энергию системы. При этом разделение энергии на объемную и поверхностную части удается ввести, разлагая свободную энергию по степеням  $\lambda_F/L$ . В результате энергия малых частиц становится зависящей от размеров. Размерная зависимость энергии проявляется в самых разнообразных эффектах, таких как работа выхода из малых частиц, зависимость

скоростей химических реакций на поверхности частиц и т.д. [33].

Термодинамические свойства электронного газа, заключенного в конечный объем, во внешнем магнитном поле представляет существенный интерес. В чистой бесконечной системе, как известно, имеет место диамагнетизм Ландау и восприимчивость системы дается выражением  $\chi_L = -e^2 k_F / (12\pi^2 m_e c^2)$ , где  $k_F$  - фермиевский импульс и  $m_e$  - масса электрона. Учет конечности объема приводит к возникновению размерных поправок к диамагнетизму Ландау (см., например, [48] и ссылки там). Интерес к этим поправкам обусловлен тем, что в конечных системах их типичная величина имеет порядок  $(k_F L)^\alpha |\chi_L|$  и может во много раз превышать восприимчивость Ландау. Показатель  $\alpha$  определяется геометрией образца [57].

Размерные поправки к диамагнетизму Ландау конечных систем зависят также от того, находится ли система в контакте с резервуаром электронов (большая каноническая система; фиксирован химический потенциал) или изолирована (каноническая система; фиксировано число частиц). В большой канонической системе, в случае, когда в системе имеются примеси, электроны двигаются диффузно ( $L \gg l$ ), восприимчивость, усредненная по конфигурации примесей, в главном порядке равна восприимчивости Ландау. Однако, для канонической системы усредненная восприимчивость содержит парамагнитный вклад, который зависит от размеров системы, и также может иметь большое значение [73].

Орбитальный магнетизм тесно связан с диамагнитными токами, текущими вдоль границы размерно-квантованной системы. Краевые состояния двумерного электронного газа изучались в работе [77] в режиме квантового эффекта Холла в квазиклассическом приближении. Распределение равновесного тока в двумерной системе с гармоническим потенциалом исследовалось в работе [48], где рассмотрены различные соотношения характеристической энергии гармонического потенциала и температу-

ры с циклотронной частотой.

В настоящей работе рассмотрены различные мезоскопические системы, содержащие большое, но конечное число электронов. Подобные системы к настоящему времени недостаточно полно исследованы экспериментально и теоретически. Дальнейшее изучение систем с пространственными ограничениями позволило бы существенно дополнить физическую картину переноса заряда, а также возникновения орбитального магнетизма в этих системах.

**Цель** данной диссертационной работы состоит в теоретическом исследовании транспортных и термодинамических свойств систем конечных размеров, в том числе:

1. Квантовых поправок к проводимости двумерной системы с антиоточками в стационарном магнитном поле, а также к кондактансу мезоскопического кольца в нестационарном магнитном поле.
2. Размерных поправок к термодинамическим функциям электронного газа в ограниченных микрокристаллах.
3. Распределения диамагнитного тока и магнитного поля в системах с пространственными ограничениями.

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка цитируемой литературы. По основным результатам диссертации в печати опубликовано 13 работ [80–92].

Обзор литературы приведен в начале каждой главы.

**Во введении** обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель работы, указана ее научная новизна и практическая ценность, изложены основные положения, выносимые на защиту, кратко изложено содержание диссертации.

**Первая часть** диссертации посвящена исследованию квантовых поправок к

кинетическим коэффициентам в системах с пространственными ограничениями.

В первой главе изучаются транспортные свойства  $2D$  электронной системы с внутренними ограничениями - антиточками. Антиточка - это область, вырезанная из  $2D$  электронного газа, в которой концентрация электронов равна нулю. Ограничение движения электронов антиточками приводит к мезоскопическим свойствам этой системы. Задача заключается в исследовании влияния антиточек на проводимость  $2D$  системы в режиме слабой локализации. Предполагается, что упругая длина свободного пробега электронов на примесях  $l$  гораздо меньше расстояния между антиточками ( $l \ll n_a^{-1/2}$ ,  $n_a$  - концентрация антиточек), что соответствует диффузионному характеру движения электронов. Размер антиточек  $\rho_a$  считается малым по сравнению с расстоянием между ними. Также рассматривается влияние магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости системы.

В режиме слабой локализации учет интерференции электронных волн, движущихся вдоль одной замкнутой траектории в противоположных направлениях, приводит к возникновению квантовых поправок к проводимости системы. Качественная картина возникновения слаболокализационных поправок к проводимости приведена в §1.

Количественный расчет квантовых поправок подробно излагается в §2. Квантовые поправки выражаются через уровни энергии куперона - частицы с зарядом  $2e$  и массой  $M = (2D)^{-1}$  в плоскости с одной антиточкой. Здесь  $D$  - коэффициент диффузии. Решается уравнение Шредингера для куперона с граничным условием, означающим отсутствие потока частиц через границу антиточки.

В §3 производится расчет квантовых поправок к проводимости и магнетопроводимости  $2D$  системы с антиточками малого радиуса, когда  $\rho_a$  гораздо меньше минимальной из величин - магнитной длины  $a_H = \sqrt{c\hbar/2eH}$  и длины сбой фазы  $L_\varphi$ .



Уравнение Шредингера для куперона в магнитном поле решается аналитически. Получено аналитическое выражение для квантовых поправок в магнитном поле.

Антиоточки большого радиуса, когда  $\rho_a$  гораздо больше максимума из  $a_H$  и  $L_\varphi$ , рассмотрены в §4.

Случай произвольного соотношения характеристических длин рассмотрен в §5. Квантовые поправки были найдены с помощью численного решения уравнения Шредингера для куперона в магнитном поле. В шестом параграфе обобщены основные результаты главы.

**Во второй главе** изучается одномерное кольцо. Предполагается, что радиус кольца много больше длины свободного пробега  $R \gg l$ , т.е. кольцо является мезоскопическим. Нашей задачей было нахождение квантовых поправок к кондактансу мезоскопического кольца. С точки зрения квантовых поправок, одномерность кольца требует малости ширины кольца по сравнению с  $L_\varphi$ . Изучается влияние нестационарного магнитного поля с потоком  $\Phi(t) = \dot{\Phi}t$ . Учитывается наличие туннельных контактов в пределе слабого туннелирования.

Расчет квантовых поправок проводится в §1. Квантовые поправки выражаются с помощью временных функций Грина куперона, которые внутри кольца удовлетворяют уравнению диффузии. В мезоскопической системе они дополняются граничными условиями на контактах, описывающими сохранение тока в модели однопараметрического описания.

Нестационарному магнитному полю соответствует характерное время его изменения, которое в нашем случае равно  $\tau_0 = \Phi_0/\dot{\Phi}$ . Соответственно, рассматриваются пределы медленного ( $\tau_0 \gg \tau_\varphi$ ) и быстрого ( $\tau_0 \ll \tau_\varphi$ ) изменения магнитного поля.

Во втором параграфе анализируется возможность экспериментального наблюдения эффекта Ааронова-Бома в нестационарном магнитном поле. Основные резуль-

таты главы сформулированы в §3.

**Вторая часть** диссертации посвящена изучению размерных поправок к статистическим свойствам систем с пространственными ограничениями.

**В третьей главе** исследуются размерные поправки к термодинамическим функциям трех- и двумерных ограниченных образцов. В системах, размеры которых превышают длину волны электронов, термодинамические функции разлагаются в ряд по степеням размера. В трехмерном случае главный вклад соответствует объемному значению, следующие - поверхностному, реберному и т.д. Кроме постоянной части, термодинамические функции содержат также вклад, осциллирующий с размером. Этот вклад, очевидно, мал по сравнению с объемным и поверхностным вкладом, но может оказаться существенным при рассмотрении поправок следующих порядков.

Рассматривается трехмерная задача с двугранным углом  $0 < \varphi < \phi$ ,  $r < R$  в приближении свободных электронов. Предполагается, что внутри образца отсутствует потенциал, а волновые функции удовлетворяют нулевым граничным условиям.

Расчет размерных поправок проводится в §2. Для выделения вклада ребра используется асимптотическое разложение  $\Omega$ -потенциала по степеням  $r_0$  - радиуса области, примыкающей к ребру. Получено выражение для реберной энергии газа свободных электронов на идеальной поверхности  $3D$  ограниченного микрокристалла. Решена также аналогичная задача для двумерной системы.

Осциллирующий вклад в  $\Omega$ -потенциал размерно-квантованных систем рассматривается в §3 на примере электронного газа, заключенного в двумерной полосе и трехмерной пластине. Изучена температурная зависимость осциллирующего вклада.

В §4 изучается влияние примесного рассеяния на термодинамические функции в борновском приближении. Для простоты рассматриваются примеси с короткодей-

ствующим потенциалом.

В пятом параграфе приводится обобщение выражения для реберного вклада в энергию на случай анизотропного квадратичного энергетического спектра  $E(k) = \sum_{i=1}^3 k_i^2/2m_i$ . Анализируются различные ориентации двугранного угла по отношению к осям тензора эффективных масс.

Основные выводы главы сформулированы в §6.

**Четвертая глава** посвящена изучению орбитального магнетизма в размерно-квантованных системах. Известно, что диамагнетизм Ландау связан с поверхностными (в 3-мерном случае) и краевыми (в двумерном случае) диамагнитными токами. Однако, при изучении диамагнетизма Ландау возникает ряд вопросов, в частности: Как распределены краевые диамагнитные токи?

На каких масштабах магнитное поле переходит от значения внешнего поля к внутреннему?

Как происходит переход от слабых магнитных полей к сильным полям?

Какое влияние на распределение тока оказывает вторая граница и, более обще, геометрия системы?

Эти вопросы тесно примыкают к проблеме орбитального магнетизма. Ответы на них отсутствовали до наших работ.

В главе всюду предполагается, что внутри образца отсутствует потенциал, а волновые функции удовлетворяют нулевым граничным условиям.

В §2 рассматривается электронный газ, заключенный в квантовой пленке конечной толщины, в продольном магнитном поле. Плотность тока выражается с помощью формулы Кубо. Найдено выражение для линейного отклика плотности тока на внешнее магнитное поле и изучена его координатная зависимость. Особое внимание обращается на случай пленки с толщиной, много большей по сравнению с дли-

ной волны электронов. Равновесная плотность диамагнитного тока содержит поверхностный вклад, осциллирующий по толщине с периодом фермиевской длиной волны, который в приближении нулевой температуры медленно спадает внутрь пленки по закону  $1/z$ . Помимо него, имеется малая регулярная компонента, которая линейно зависит от поперечной координаты, но осциллирует с энергией Ферми. Исследовано температурное подавление этих осцилляций. Получено распределение магнитного поля внутри пленки.

В §3 рассмотрены аналогичные задачи для квантовой полосы, "вырезанной" из двумерного электронного газа, в магнитном поле, направленном по нормали к поверхности.

Помимо диамагнитного тока, имеется также парамагнитный ток, обусловленный электронным спином. Расчет этого вклада в пленке и полосе производится в §4 с учетом спиновой части гамильтониана  $-g\mu_B B_0 \sigma_x / 2$  и связанных со спином компонент оператора плотности тока.

В §5 изучено подавление осцилляций за счет примесного рассеяния.

Случаю конечного магнитного поля посвящен §6. Здесь рассмотрена задача о плотности равновесного тока в полубесконечном образце  $x > 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ , помещенном в магнитное поле  $B_z = B$ . Этот предел описывает плотность тока, когда характерные размеры системы превышают область, в которой течет краевой ток. Распределение плотности тока изучается с помощью численного решения уравнения Шредингера.

В §7 рассматривается распределение диамагнитного тока и магнитного поля в системах с круговой геометрией, а именно, в плоском кольце с внутренним и внешним радиусами  $r$  и  $R$ , соответственно. Круглый диск является частным случаем кольца при  $r = 0$ . Магнитное поле направлено вдоль оси системы. Основные выводы главы

приводятся в §8.

**В заключении** приводятся основные результаты и выводы диссертации.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Вклады в магнетопроводимость двумерных систем, обусловленные наличием антиточек малого размера, отрицательны при слабых магнитных полях и меняют знак при увеличении магнитного поля.
2. Характер осцилляций Ааронова-Бома кондактанса мезоскопического кольца в нестационарном магнитном поле определяется скоростью изменения магнитного поля. Быстрое изменение магнитного поля (когда характерное время изменения магнитного поля меньше времени сбоя фазы электронов) приводит к асимметрии пиков кондактанса.
3. Энергия электронного газа в ограниченном кристалле содержит вклады, обусловленные наличием ребер, зависящие от двугранного угла  $\phi$  по закону  $\pi/\phi - \phi/\pi$ . В материале с анизотропной эффективной массой энергия зависит от ориентации ребра и углов.
4. Плотность равновесного тока намагничивания испытывает пространственные осцилляции, связанные с фермиевской длиной волны электронов. Эти осцилляции в слабом магнитном поле при низкой температуре и отсутствии рассеяния спадают с удалением от границы по степенному закону. В сильном магнитном поле область распределения плотности тока ограничивается циклотронным диаметром. Примесное рассеяние и конечная температура приводят к экспоненциальному подавлению осцилляций с расстоянием. В случае квантовой пленки с большим числом заполненных уровней поперечного квантования плотность тока также содержит слагаемое, являющееся линейной функцией расстояния и осцил-

лирующее с энергией Ферми. В ограниченных квантовых системах (квантовый диск или широкое квантовое кольцо) плотность тока намагничивания испытывает сильные осцилляции как функция энергии Ферми, координат и магнитного поля.

**Научная новизна работы.** Все основные результаты и выводы диссертации являются оригинальными.

Впервые рассмотрено влияние антиточек на проводимость двумерной неупорядоченной системы и получены квантовые поправки к проводимости в поперечном магнитном поле.

Впервые изучено влияние нестационарного магнитного поля на кондактанс мезоскопического кольца с туннельными контактами.

Впервые рассмотрен вклад ребра в  $\Omega$ -потенциал ограниченных микрокристаллов и получены поправки обусловленные наличием ребер, величина и знак которых зависят как от длины ребра и ее ориентации по отношению к осям тензора эффективных масс, так и от величины двугранного угла, образующего ребро.

Впервые теоретически исследовано распределение тока и магнитного поля в размерно-квантованных системах в модели ограничивающего потенциала с бесконечными стенками. Изучено распределение тока и наведенного магнитного поля в квантовой пленке и квантовой полосе. Найдены знакопеременные осцилляции краевого тока в полуплоскости, квантовом диске и квантовом кольце. Изучено подавление осцилляций при конечной температуре. Полученные результаты указывают на универсальность распределения тока в размерно-квантованных системах.

**Научная и практическая ценность работы** заключается в следующем:

1. Полученные выражения для квантовых поправок к проводимости двумерной системы с антиточками в поперечном магнитном поле могут быть использованы

для описания эксперимента по измерению проводимости и магнетопроводимости двумерной системы с редко расположенными антиточками.

2. Результаты теоретических исследований кондактанса мезоскопического кольца в нестационарном магнитном поле могут быть полезными в постановке эксперимента по измерению эффекта Ааронова-Бома в нестационарном магнитном поле.
3. Рассмотренный в работе подход, основанный на разложении термодинамических величин по степеням размера, позволяет получить простые оценки термодинамических свойств больших квантовых точек, не прибегая к сложным вычислениям. В частности, он может быть применен для расчетов чисел заполнения самоорганизованных квантовых точек *Ge/Si*, *InAs/GaAs* и др.
4. Особенности распределения тока и магнитного поля в квантовых системах, изученные в работе, могут служить основой для электрического избирательного управления спинами ядер в низкоразмерных системах, а также для экспериментального изучения распределения магнитного поля по сдвигу частоты ЯМР.

**Апробация работы.** Основные результаты диссертационной работы докладывались на научных семинарах лаборатории теоретической физики ИФП СО РАН, на 4 Международном симпозиуме по передовым направлениям в физике: "Квантовые явления в новых материалах в сильных магнитных полях" (Цукуба, 1999), на 4 Российской конференции по физике полупроводников (Новосибирск, 1999), на 9 Международном симпозиуме "Наноструктуры: физика и технология" (С. Петербург, 2001), на 5 Российской конференции по физике полупроводников (Н. Новгород, 2001), на 10 Международном симпозиуме "Наноструктуры: физика и технология" (С. Петербург, 2002), на 26 Международной конференции по физике полупроводни-

ков (Эдинбург, 2002), на 11 Международном симпозиуме "Наноструктуры: физика и технология" (С. Петербург, 2003).

Я искренне признателен своему научному руководителю М. В. Энтину за очень важные для меня научные дискуссии и просто человеческие контакты, Л. И. Магариллу, в соавторстве с которым получены результаты главы 4. Я считаю своим приятным долгом поблагодарить сотрудников лаборатории теоретической физики Института физики полупроводников СО РАН за ценную критику во время докладов на семинарах.



## Часть I

# Квантовые поправки к кинетическим коэффициентам в системах с пространственными ограничениями

## 1 Квантовые поправки к проводимости двумерных систем с антиточками

Благодаря успехам технологии оказалось возможным создавать и исследовать искусственные среды с масштабами, соизмеримыми как с длинами релаксации электронов, так и с квантовыми размерами (длиной волны и магнитной длиной) электронов. Были сконструированы, например, двумерные ( $2D$ ) электронные системы с пространственно модулированной концентрацией электронов. Частным случаем таких систем являются так называемые "квантовые точки" — области, в которых движение электронов ограничено в трех измерениях. Другим примером является система "антиточек" то-есть областей, вырезанных из  $2D$  электронного газа, в которых концентрация электронов равна нулю.

Системы с антиточками теоретически были исследованы в различных предельных случаях движения электронов в этих системах. В баллистическом режиме они изучались как классический объект - "электронный бильярд" так и с квантовой точки зрения (с помощью методов квазиклассики). В диффузионном режиме, в основном, применялась теория слабой локализации.

В ряде работ, в частности, были изучены магнитотранспортные свойства  $2D$  электронных систем с периодической решеткой антиточек, связанные с соизмеримостью циклотронного диаметра и периода решетки [5–9]. Эти особенности имеют классическую природу и определяются стохастическим характером движения элек-

трона в этих системах.

Однако, кроме классических эффектов, системы с антиточками обнаруживают ряд интересных квантовых свойств, связанных с интерференцией электронных волн [10, 11]. В частности, в работе [10] сообщалось о наблюдении отрицательного магнетосопротивления в неупорядоченной решетке антиточек, и в работе [11] - о наблюдении осцилляций Ааронова-Бома в периодической решетке антиточек в слабых магнитных полях. Подобные периодические осцилляции были также обнаружены и в более сильных магнитных полях ( $2R_c \approx d$ ) [12, 13].

Хотя системы с антиточками изучаются довольно давно, интенсивные исследования этих систем продолжаются до сих пор. Например, в работе [19] сообщается об экспериментальном наблюдении отрицательного магнетосопротивления в гексагональной решетке антиточек большой плотности. Обнаруженную необычную зависимость времени сбоя фазы от температуры авторы качественно объясняют тем, что размеры интерферирующих траекторий ограничены размером ячейки, образованной между плотно расположенными антиточками.

Слаболокализационные поправки к транспортным коэффициентам электронной системы с антиточками теоретически изучались в работе [20]. Рассматривая антиточку как статический дальнедействующий потенциал, авторы доказали универсальность слаболокализационных поправок в режиме квантового хаоса.

В данной главе работы изучаются так называемые квантовые (интерференционные) поправки к проводимости  $2D$  системы с антиточками в другом возможном пределе, когда длина свободного пробега электрона на примесях мала по сравнению с характерными размерами системы. В этом пределе движение электронов между антиточками в первом приближении может быть описано с помощью кинетического уравнения. Предполагается, что система помещена в магнитное поле, перпендику-

лярное плоскости системы.

В задаче имеется несколько параметров:  $l$  - упругая длина свободного пробега электронов на примесях,  $L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$  - длина сбоя (релаксации) фазы электронов ( $D$  - коэффициент диффузии,  $\tau_\varphi$  - время сбоя фазы),  $a_H = \sqrt{c\hbar/2eH}$  - магнитная длина,  $\lambda = \hbar/p$  - длина волны электрона ( $p$  - импульс электрона),  $\rho_a$  - радиус антиотечек и  $n_a$  их концентрация.

В рассматриваемом пределе имеется несколько соотношений между этими параметрами. Чтобы имело смысл описание электронов с помощью волнового пакета, нужно, чтобы  $l \gg \lambda$ . С другой стороны, в согласии с ранее сказанным, длину свободного пробега будем считать малой по сравнению с радиусом антиотечки,  $l \ll \rho_a$ . Только в этом случае движение электрона вокруг антиотечки носит диффузионный характер.

Длина сбоя фазы  $L_\varphi$  определяется неупругим рассеянием. Как принято в теории слабой локализации, предполагается выполнение условия  $l \ll L_\varphi$ , гарантирующее сохранение фазы в процессе диффузии электронов. Это условие справедливо при низких температурах (область остаточного сопротивления). Кроме того, будем рассматривать предел  $2D$  системы с редко расположенными антиотечками ( $n_a\rho_a^2 \ll 1$ ).

## §1 Происхождение квантовых поправок к проводимости

Обычная теория транспортных явлений базируется на классическом кинетическом уравнении для электронов проводимости. Это означает, что за время между двумя соударениями электрон двигается по классической траектории. Такое приближение верно, когда интерференция двух волн, рассеянных различными центрами, пренебрежима, то есть когда длина свободного пробега электрона много больше его длины волны,  $l \gg \lambda$ . Тогда между двумя соударениями электрон может быть описан

квазиклассически, что приводит к хорошо известной формуле Друде.

Квантовые поправки для невзаимодействующих друг с другом электронов связаны с интерференцией электронных волновых пакетов, проходящих замкнутые участки траектории в противоположных направлениях, поскольку набег фаз на этих участках  $\Delta\varphi = \oint \mathbf{p}d\mathbf{l}/\hbar$  оказываются одинаковыми [14–16]. Увеличение вероятности возврата в начальную точку из-за интерференции приводит к уменьшению проводимости. Неупругие процессы, приводящие к сбою фазы электронов, подавляют эффекты локализации и увеличивают проводимость. Несмотря на малую величину, квантовые поправки важны, поскольку именно они (через  $\tau_\varphi$ ) определяют температурную зависимость кинетических коэффициентов при низких температурах.

Квантовые поправки выражаются с помощью двухчастичной функции Грина в куперовском канале. Эта функция имеет сингулярность при малом полном импульсе. Сингулярный вклад, связанный с вероятностью возврата электрона в исходную точку, называют купероном.

В [18] было показано, что квантовые поправки к проводимости сильно чувствительны к магнитному полю. В присутствии магнитного поля происходит замена  $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$ . При изменении направления обхода замкнутой петли импульс  $\mathbf{p}$  меняет знак на обратный, но вектор потенциал  $\mathbf{A}$  сохраняет свой знак. В результате, у интерферирующих амплитуд появляется разность фаз, которая зависит от магнитного поля и вида траектории

$$\Delta\varphi_H = \frac{2e}{c\hbar} \oint \mathbf{A}d\mathbf{l} = \frac{2e}{c\hbar} \int \text{rot}\mathbf{A}ds = \frac{2e}{c\hbar} \Phi = 2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

Здесь  $\Phi$  - поток магнитного поля через петлю,  $\Phi_0 = hc/2e$  - квант потока. Появление разности фаз приводит к уменьшению вероятности возврата и, соответственно, к увеличению проводимости.

В системе с антиоточками траектории, дающие вклад в вероятность возвра-

та, можно разделить на группы, в которые входят траектории, охватывающие и не охватывающие антиточки. При этом для траекторий первой группы наименьший временной масштаб в процессе диффузии определяется временем свободного пробега электронов  $\tau$ , для второй группы - временем диффузии электрона вокруг антиточек.

## §2 Расчет квантовых поправок

Количественно квантовые поправки могут быть рассчитаны с помощью диаграммной техники Фейнмана с учетом диаграмм описывающих проводимость электронов, взаимодействующих с примесями. Кратко изложим способ расчета квантовых поправок [17], которым будем пользоваться в дальнейшем для  $2D$  системы с антиточками.

Главные квантовые поправки к проводимости невзаимодействующих частиц происходят от учета куперовских диаграмм, описывающих интерференцию, происходящую при многократном обратном рассеянии. Амплитудой этой интерференции  $C(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  определяются квантовые поправки к проводимости.

Поправка к проводимости при частоте  $\omega$  связана с  $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  соотношением <sup>1</sup>

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{2e^2}{\pi} D\tau C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}). \quad (1.1)$$

Величина  $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r})$  в магнитном поле удовлетворяет уравнению

$$\left\{ -i\omega + D \left( -i\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + \frac{1}{\tau_\varphi} \right\} C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\tau}, \quad (1.2)$$

где  $\mathbf{A}$  - вектор потенциал магнитного поля,  $\omega$  - частота внешнего поля. Уравнение (1.2) формально совпадает с уравнением для функций Грина куперона, частицы с зарядом  $2e$  и массой  $M = (2D)^{-1}$ , двигающейся в магнитном поле.  $E = i\omega - \tau_\varphi^{-1}$  - соответствует энергии куперона.

---

<sup>1</sup>Здесь и далее мы полагаем  $\hbar = 1$ , восстанавливая его в конечных формулах.

Рассмотрим  $2D$  систему без антиточек. Пусть  $E_n$  - собственные значения ("уровни энергии" куперона) и  $\psi_n(\mathbf{r})$  - нормированные собственные функции уравнения Шредингера в магнитном поле

$$\frac{1}{2M} \left[ -i\nabla - \frac{2e}{c} \mathbf{A} \right]^2 \psi_n = E_n \psi_n. \quad (1.3)$$

Тогда выражение для  $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  примет вид

$$C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\tau} \sum_n \frac{\psi_n(\mathbf{r}) \psi_n^*(\mathbf{r}')}{E_n - E}, \quad (1.4)$$

где  $E_n = \omega_H (n + 1/2)$ ,  $\omega_H = 4DeH/c$  - циклотронная частота куперона,  $n$  - главное квантовое число.

Из предыдущих выражений следует хорошо известное выражение для квантовых поправок [14]

$$\delta\sigma(H) = \sigma(H) - \sigma(0) = \frac{e^2}{2\pi^2} f \left( \frac{4DeH\tau_\varphi}{c} \right), \quad (1.5)$$

где

$$f(x) = \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) + \ln x = \begin{cases} \frac{x^2}{24} & \text{при } x \ll 1, \\ \ln x & \text{при } x \gg 1. \end{cases}$$

Здесь  $\psi(y)$  - логарифмическая производная гамма функции.

При наличии антиточек, считая их плотность малой ( $n_a \rho_a^2 \ll 1$ ), мы можем пренебречь влиянием антиточек друг на друга. Полная поправка является суммой вкладов от отдельных антиточек.

Таким образом, для вычисления квантовых поправок к проводимости  $2D$  системы нам нужно решить уравнение (1.2) для  $C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  в магнитном поле для  $2D$  круглого образца большого радиуса, в центре которого находится одна антиточка, с граничным условием [17]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} + \frac{2ie}{c} (\mathbf{A} \mathbf{n}) \right\} C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Big|_{r=\rho_a} = 0. \quad (1.6)$$

Условие (1.6) означает, что поток частиц через границы антиточки равен нулю. Соотношение (1.1) для квантовых поправок к проводимости в этом случае имеет вид

$$\delta\sigma(\omega) = -\frac{2e^2}{\pi} D\tau \int C_\omega(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{S}. \quad (1.7)$$

Здесь  $S$  - площадь образца.

Выражение для квантовых поправок с учетом вкладов от всех антиточек получается из (1.7) с помощью (1.4), умножением на количество антиточек  $n_a S$ . В результате,

$$\delta\sigma(\omega) = -n_a \frac{2e^2 D}{\pi} \sum_n \frac{1}{E_n - E}. \quad (1.8)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать статическую проводимость. Квантовые поправки, обусловленные наличием антиточек, которые обозначим через  $\delta^2\sigma(H, \rho_a)$ , равны разности квантовых поправок к проводимости  $2D$  системы с антиточками и без антиточек

$$\delta^2\sigma(H, \rho_a) = \delta\sigma(H, \rho_a) - \delta\sigma(H, 0) = -n_a \frac{2e^2 D}{\pi} \left( \sum_n \frac{1}{E_n - E} - \sum_n \frac{1}{E_n^0 - E} \right), \quad (1.9)$$

где  $E_n^0$  - уровни энергии куперона в отсутствии антиточек.

Таким образом, для нахождения квантовых поправок нам достаточно определить уровни энергии куперона в постоянном магнитном поле для  $2D$  - системы с антиточками и без антиточек.

В полярных координатах  $\rho, \varphi$  векторный потенциал однородного магнитного поля имеет компоненты:  $A_\varphi = H\rho/2$ ,  $A_\rho = 0$  и уравнение Шредингера (1.3) примет вид

$$-\frac{1}{2M} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{i\omega_H}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} + \frac{M\omega_H^2}{8} \rho^2 \psi = E\psi. \quad (1.10)$$

Граничное условие (1.6) в полярных координатах имеет вид

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_a} = 0. \quad (1.11)$$

Ищем решение в виде

$$\psi = e^{im\varphi} R(\rho), \quad (1.12)$$

и для радиальной части волновой функции получаем уравнение

$$\frac{1}{2M} \left( R'' + \frac{1}{\rho} R' - \frac{m^2}{\rho^2} R \right) + \left[ E - \frac{M\omega_H^2}{8} \rho^2 + \frac{m\omega_H}{2} \right] R = 0. \quad (1.13)$$

Введя новую независимую переменную  $\xi = M\omega_H \rho^2/2$ , переписываем уравнение в виде

$$\xi R'' + R' + \left( -\frac{\xi}{4} + \beta - \frac{m^2}{4\xi} \right) R = 0, \quad (1.14)$$

где введено обозначение  $\beta = E/\omega_H + m/2$ .

При  $\xi \rightarrow \infty$  искомая функция ведет себя как  $e^{-\xi/2}$ , а при  $\xi \rightarrow 0$  - как  $\xi^{|m|/2}$ . В соответствии с этим ищем решение в виде

$$R(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m|}{2}} w(\xi), \quad (1.15)$$

и для  $w(\xi)$  получаем уравнение вырожденной гипергеометрической функции

$$\xi w'' + (1 + |m| - \xi) w' - \left( \frac{1 + |m|}{2} - \beta \right) w = 0. \quad (1.16)$$

Общее решение уравнения (1.16) может быть записано в виде [21, 22]

$$w = AM(a, b; \xi) + BU(a, b; \xi).$$

Здесь  $M(a, b; \xi)$  и  $U(a, b; \xi)$  - функция Куммера и Трикоми, соответственно, где  $a = (1 + |m|)/2 - \beta = (|m| - m)/2 + 1/2 - \varepsilon$ ,  $\varepsilon = E/\omega_H$ ,  $b = 1 + |m|$ .  $A$  и  $B$  - произвольные постоянные.

При  $\xi \rightarrow \infty$

$$M(a, b; \xi) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} e^{\xi} \xi^{a-b} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \right],$$

$$U(a, b; \xi) = \xi^{-a} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\xi}\right) \right].$$



Из граничного условия на бесконечности  $R(\xi)\Big|_{\xi \rightarrow \infty} = 0$  следует, что  $A = 0$ . Тогда решение (1.15) уравнения (1.14) примет вид

$$R(\xi) = B e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\frac{|m|}{2}} U(a, b; \xi). \quad (1.17)$$

Граничное условие (1.11) дает

$$\frac{\partial R(\xi)}{\partial \xi} \Big|_{\xi = \xi_a} = 0. \quad (1.18)$$

Подставляя (1.17) в (1.18), получаем уравнение для  $a$

$$\frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{|m|}{\xi_a} \right] U(a, 1 + |m|; \xi_a) - U(a, 2 + |m|; \xi_a) = 0. \quad (1.19)$$

Решение уравнения (1.19) относительно  $a$  определяет уровни энергии куперона  $\varepsilon$  и через выражение (1.9) - квантовые поправки к проводимости.

### §3 2D система с антиточками малого радиуса

Рассмотрим предел, когда размер антиточек мал по сравнению с характерными размерами задачи,  $\rho_a \ll \min(a_H, L_\varphi)$ . Этому соответствует  $\xi_a \ll 1$ . Условие  $\xi_a \ll 1$  позволяет разложить (1.19) по малому параметру  $\xi_a$ . Выделяя главные члены в разложении, находим

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - a\right) \psi(a) &= \frac{1}{\xi_a} && \text{при } m = 0, \\ |m|(a-1) \dots (a-|m|)(-1)^{|m|-1} \psi(a) &= \frac{(|m|!)^2}{\xi_a^{|m|}} && \text{при } m \neq 0, \end{aligned} \quad (1.20)$$

где  $\psi(a) = \Gamma'(a)/\Gamma(a)$ . Подставляя в (1.20) асимптотику для  $\psi$  [21]

$$\psi(a) \Big|_{a \rightarrow -n_\rho} \sim -\frac{1}{a + n_\rho} \Big|_{a \rightarrow -n_\rho},$$

где  $n_\rho$  - целое неотрицательное число, и используя связь  $\varepsilon = 1/2 + (|m| - m)/2 - a$ , находим уровни энергии (в единицах  $\omega_H$ )

$$\varepsilon_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) (1 - \alpha_{n,m}), \quad (1.21)$$

где  $n = n_\rho + (|m| - m)/2$  - главное квантовое число,

$$\alpha_{n,0} = -\xi_a,$$

$$\alpha_{n,m \neq 0} = \frac{|m|}{n + \frac{1}{2}} \left( n - \frac{|m| - m}{2} + 1 \right) \dots \left( n - \frac{|m| - m}{2} + |m| \right) \frac{\xi_a^{|m|}}{(|m|!)^2}.$$

Из  $\xi_a \ll 1$  следует, что  $\alpha_{n,m} \ll 1$ .

Уровни куперона в отсутствии антиточек получаются приравниванием к нулю радиуса антиточек

$$E_{n,m}^0 = E_{n,m} \Big|_{\rho_a=0}.$$

Подставляя (1.21) в (1.9) и учитывая, что  $\alpha_{n,m} \ll 1$ , получаем

$$\delta^2 \sigma(H, \rho_a) = -n_a \frac{2e^2 D}{\pi \omega_H} \sum_{n,m} \frac{\alpha_{n,m} \left( n + \frac{1}{2} \right)}{\left( n + \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2}. \quad (1.22)$$

Отсюда видно, что основной вклад в сумму дают  $m = -1, 0, 1$ .

Тогда (1.22) сводится к

$$\delta^2 \sigma(H, \rho_a) = -n_a \rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi} \sum_{n_\rho=0}^{\infty} \left[ \frac{\varepsilon}{\left( n_\rho + \frac{1}{2} - \varepsilon \right)^2} + \frac{1}{n_\rho + \frac{1}{2} - \varepsilon} \right]. \quad (1.23)$$

Сумму (1.23) можно переписать с помощью обобщенной дзета-функции  $\zeta(s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+v)^{-s}$ , с  $s = 1$  и  $s = 2$ . Дзета-функция с  $s = 1$  расходится, но эта расходимость устраняется учетом предельного значения энергии куперона, которая определяет верхний предел суммы,  $(n_\rho)_{max} = D/\omega_H l^2$ . В результате с логарифмической точностью получаем

$$\delta^2 \sigma(H, \rho_a) = -n_a \rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi} \left[ \varepsilon \zeta \left( 2, \frac{1}{2} - \varepsilon \right) - \psi \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) + \ln \frac{D}{\omega_H l^2} \right]. \quad (1.24)$$

Здесь  $\psi(y)$  - логарифмическая производная гамма-функции.

Переходя к переменной  $x = \omega_H \tau_\varphi = 4DeH\tau_\varphi/c = -1/\varepsilon$ , имеем

$$\delta^2 \sigma(H, \rho_a) = n_a \rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi} \left[ f_1 \left( \frac{4DeH\tau_\varphi}{c} \right) - \ln \frac{D\tau_\varphi}{l^2} \right], \quad (1.25)$$

где

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \zeta \left( 2, \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) + \psi \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{x} \right) + \ln x = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{24} & \text{при } x \ll 1, \\ \ln x & \text{при } x \gg 1. \end{cases}$$

В (1.25) второе слагаемое не зависит от магнитного поля, и определяет величину квантовых поправок, обусловленных наличием антиточек, в нулевом поле:

$$\delta^2 \sigma(\rho_a) = -n_a \rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi\hbar} \ln \frac{D\tau_\varphi}{l^2}. \quad (1.26)$$

В выражения (1.24,1.25,1.26) входит длина свободного пробега электронов  $l$ . Длина свободного пробега определяется как примесным рассеянием так и антиточками. Строго говоря, формулы (1.24,1.25,1.26) справедливы для изотропного примесного рассеяния. В случае неизотропного рассеяния для справедливости этих формул необходимо, чтобы характерные передачи импульса электрона при рассеянии были больше характерного импульса куперона  $q \sim (D\tau_\varphi)^{-\frac{1}{2}}$ .

Наличие антиточек приводит к изменению  $l$ . Однако в пределе  $l \ll \rho_a$  поправки к длине свободного пробега малы по параметру  $n_a \rho_a l$  и связанные с ними изменения в конечных формулах содержат малый параметр  $l/\rho_a$ . Действительно, только электроны, находящиеся в слое толщиной  $l$  около границы антиточек испытывают влияние антиточки на релаксацию. В результате относительное увеличение частоты столкновений в двумерной среде, содержащей антиточки, определяется долей электронов, которые испытывают соударения с границами антиточек, имеющей порядок величины общего периметра антиточек в единице площади образца  $2\pi n_a \rho_a$ , умноженного на примесную длину свободного пробега  $l$ .

Выражение (1.26) следует сравнить с квантовыми поправками, возникающими в макроскопической среде, содержащей полости. Такую среду можно характеризовать некоторым усредненным коэффициентом диффузии  $\overline{D}$ . Величину  $\overline{D}$  можно рассчитать с помощью поправок к усредненной проводимости двумерной среды, со-

держащей круговые полости  $\bar{\sigma} = \sigma(1 - 2n_a\pi\rho_a^2)$ , и поправок к средней концентрации  $\bar{n}_e = n_e(1 - n_a\pi\rho_a^2)$  :

$$\bar{D} = D \frac{\bar{\sigma}n_e}{\sigma\bar{n}_e} \approx D(1 - n_a\pi\rho_a^2). \quad (1.27)$$

Квантовые поправки к макроскопической проводимости  $2D$  системы в отсутствии магнитного поля  $\delta\sigma$  имеют вид [17]

$$\delta\sigma = -\frac{e^2}{2\pi^2\hbar} \ln \frac{D\tau_\varphi}{l^2}. \quad (1.28)$$

В качестве коэффициента диффузии в (1.28) следует, казалось бы, подставлять эффективный коэффициент (1.27). С учетом малости параметра  $n_a\rho_a^2$ , получаем

$$\delta^2\sigma(\rho_a) = \frac{e^2}{2\pi\hbar} n_a\rho_a^2. \quad (1.29)$$

Формула (1.29) отличается от (1.26) как отсутствием большого логарифма, так и знаком. Такое различие связано с проявлением интерференционных эффектов, связанных с диффузионными траекториями, огибающими антиточки, которые в (1.29) не учтены.

Магнетопроводимость дается первым слагаемым в (1.25), которым определяется зависимость квантовых поправок от магнитного поля

$$\delta^3\sigma(H, \rho_a) = \delta^2\sigma(H, \rho_a) - \delta^2\sigma(0, \rho_a) = n_a\rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left[ f_1 \left( \frac{4DeH\tau_\varphi}{c\hbar} \right) - 1 \right]. \quad (1.30)$$

Характерный множитель у квантовых поправок  $n_a\pi\rho_a^2$ , равен отношению площади, занимаемой антиточками, к полной площади образца. Поведение квантовых поправок в магнитном поле задается функцией  $f_1(x) - 1$ , которая приведена на рис. 1. При больших полях у поправок такое же логарифмическое поведение, как в случае  $2D$  системы без антиточек [17], а в области малых полей поведение поправок тоже квадратичное по полю, но с отрицательным знаком.

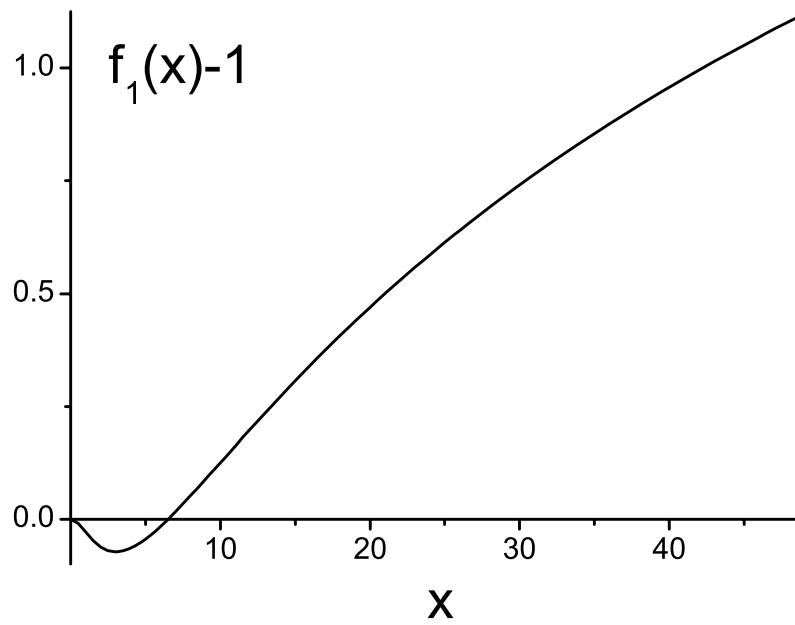


Рис. 1. Квантовые поправки (в единицах  $n_a \rho_a^2 e^2 / 2\pi \hbar$ ) к проводимости 2D системы с антиточками как функция магнитного поля (в единицах  $c \hbar / (4eD\tau_\varphi)$ ).

#### §4 2D система с антиточками большого радиуса

Когда размер антиточек велик  $\rho_a \gg \max(a_H, L_\varphi)$ , мы можем поступить следующим образом. Так как квантовые поправки происходят на длинах порядка  $\min(a_H, L_\varphi)$ , то при  $\rho_a \gg \max(a_H, L_\varphi)$  можно говорить об усредненных поправках к проводимости 2D системы с антиточками. В этом случае 2D систему с антиточками можно рассматривать как макроскопическую среду с некоторой проводимостью  $\sigma$ , включающей и квантовые поправки, в которой вырезаны дырки радиуса  $\rho_a$ , и ее можно характеризовать некоторой эффективной проводимостью  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\sigma}/\sigma = \bar{D}/D$ . Тогда нахождение квантовых поправок к проводимости 2D системы с антиточками сводится к нахождению поправок для среды проводимостью  $\bar{\sigma}$ :

$$\delta^2\sigma(\rho_a) = -2n_a\pi\rho_a^2\delta\sigma, \quad (1.31)$$

где  $\delta\sigma$  дается формулой (1.28).

Рассмотрим поправки к магнетопроводимости, обусловленные наличием антиточек большого радиуса. В слабом магнитном поле квантовые поправки к магнетопроводимости превышают как холловскую проводимость, так и классическую магнетопроводимость, поэтому мы будем пренебрегать классическими поправками. Аналогично предыдущему, находим

$$\delta^3\sigma(H, \rho_a) = -n_a\rho_a^2\frac{e^2}{\pi\hbar}f\left(\frac{4DeH\tau_\varphi}{c\hbar}\right) \quad (1.32)$$

где выражение для  $f(x)$  приведено в (1.5).

Качественно такой результат можно объяснить следующим образом. Так как  $\rho_a \gg \max(a_H, L_\varphi)$ , то траектории с интерференцией не могут обхватить антиточек. Это означает, что введение антиточек в 2D систему в этом случае эквивалентно удалению из 2D системы площади, занимаемой антиточками (исключенная площадь). Тогда относительное изменение квантовых поправок определяется долей всевозмож-

ных траекторий недоступных электронам, которая равна отношению исключенной площади к полной площади  $2D$  системы:  $n_a \pi \rho_a^2$ . Тогда с учетом того, что квантовые поправки уменьшаются, и что каждая траектория с самопересечением соответствует двум обходам, приходим к (1.32).

## §5 $2D$ система с антиточками промежуточного радиуса. Результаты численного расчета

Квантовые поправки для произвольного соотношения характерных длин можно получить численным расчетом по формулам (1.19), (1.9). Для этого сначала перепишем (1.9) с помощью безразмерных переменных:

$$\delta^2 \sigma(H, \rho_a) = n_a \rho_a^2 \frac{e^2}{2\pi} f_2(\xi_a, y), \quad (1.33)$$

где  $y = \rho_a / L_\varphi = \sqrt{4\xi_a/x}$ ,  $\xi_a = \rho_a^2 / 2a_H^2 = \Phi / \Phi_0$ ,  $\Phi = H\pi\rho_a^2$ ,  $\Phi_0 = ch/2e$ ,

$$f_2(\xi_a, y) = \frac{1}{\xi_a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ -\frac{1}{\varepsilon_n + \frac{y^2}{4\xi_a}} + \frac{1}{\varepsilon_n^0 + \frac{y^2}{4\xi_a}} \right].$$

Для нахождения квантовых поправок в выражении для  $f_2(\xi_a, y)$  нужно выполнить суммирование по уровням  $\varepsilon_n$ , которые мы получаем с помощью численного решения (1.19). Результаты численного расчета для функции  $f_2(\xi_a, y)$ , которой описывается поведение квантовых поправок, приведены на рисунках 2, 3, 4. В этих рисунках параметр  $y$  принимает следующие значения:  $y = 7, 5, 3, 1, 1/3, 1/5, 1/7, 1/10$ ,  $y = 7, 6, 5, 4, 3, 2$ , и  $y = 1, 1/2, 1/3, 1/10$ , соответственно. По мере уменьшения  $y$ , что соответствует увеличению  $L_\varphi$ , видно, что величина квантовых поправок увеличивается, и после достижения  $y = 1/5$ , их величина практически не меняется. Величина поправок при больших значениях магнитного поля (большое  $\xi_a$ ) для  $y \leq 1$  также почти не меняется. Такое поведение квантовых поправок объясняется тем, что поскольку величина квантовых поправок определяется минимальной из  $L_\varphi$  и  $a_H$ , то,

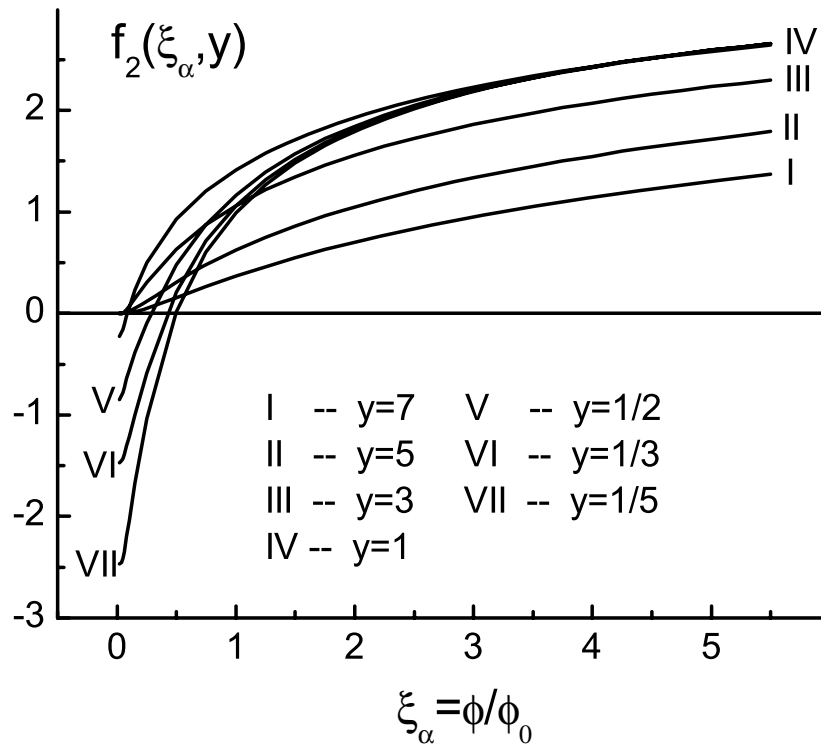


Рис. 2. Квантовые поправки (в единицах  $n_a \rho_a^2 e^2 / 2\pi \hbar$ ) к проводимости 2D системы с антиточками как функция магнитного потока через площадь антиточки, при различных значениях параметра  $y$ .



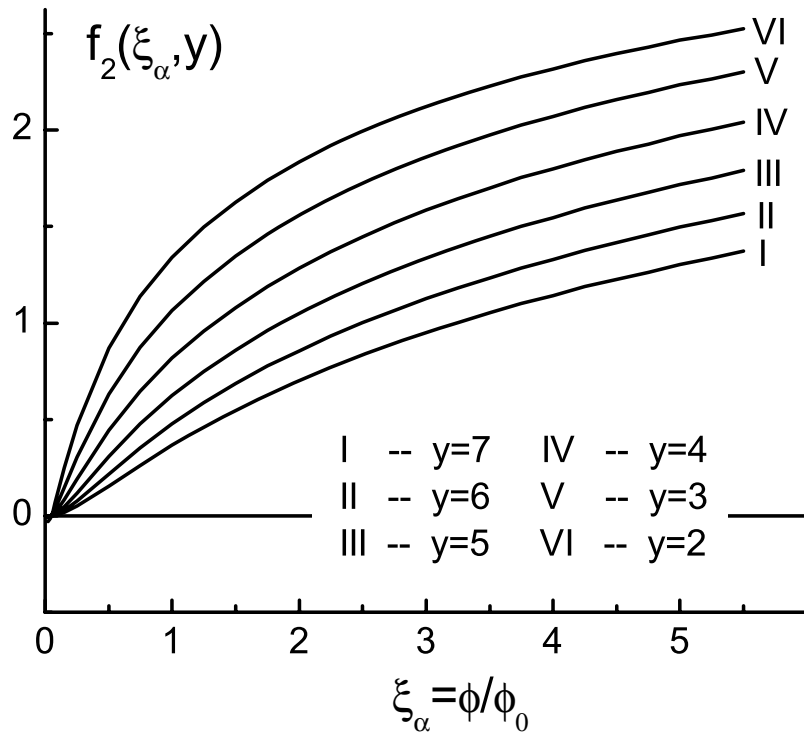


Рис. 3. Такие же кривые для  $y > 1$ .

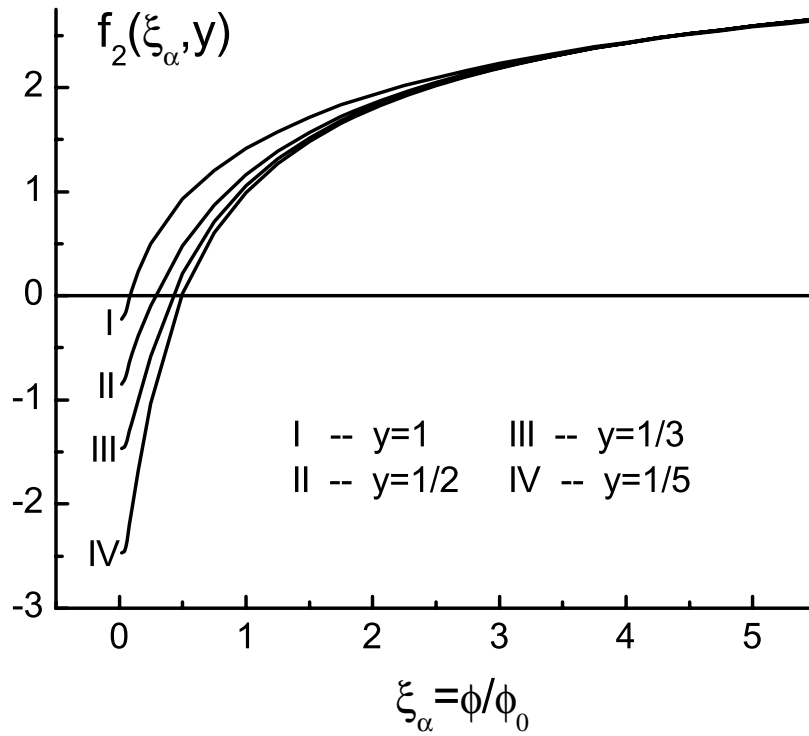


Рис. 4. Такие же кривые для  $y \leq 1$ .

когда  $L_\varphi$  мало ( $y \geq 1$ ), то величина квантовых поправок зависит от  $L_\varphi$ , что показывают кривые  $I, II, III$ , и  $IV$  на рис. 2 (или кривые  $I, II, III, IV, V, VI$  на рис. 3). По мере увеличения  $L_\varphi$  квантовые поправки будут зависеть от  $L_\varphi$  только в начальной области, где  $L_\varphi$  все еще меньше  $a_H$  и по мере уменьшения  $a_H$  кривые  $V, VI, VII$  на рис. 2 (или кривые  $I, II, III, IV$  на рис. 4) совпадают.

Так как параметры  $\xi_a$ ,  $x$  и  $y$  выражаются друг через друга, то  $f_2$  можно построить также как функцию  $x$ . Тогда появляется возможность сравнить функцию  $f_2(x)$  с функцией  $f_1(x) - 1$  из (1.25).

Отметим, что в рассмотренном пределе вклад антиточек является малой добавкой к квантовым поправкам к проводимости  $2D$  системы.

Однако этот вклад вполне измерим. Как известно, размер антиточек легко модулировать с помощью полевого электрода или подсветки. Изменение квантовых поправок в этом случае обуславливается как изменением поверхностной концентрации электронов, так и изменением размера обедненных областей вокруг антиточек. Первый эффект является в нашей задаче паразитным. Его зависимость от концентрации возникает через зависимость от концентрации времен сбоя фазы и релаксации импульса. Мы полагаем, что он может быть исключен экспериментально сравнением с однородным образцом.

## §6 Основные результаты и выводы главы

Рассмотрена двумерная система с антиточками, наличие которых приводит к возникновению поправок к слаболокализационным вкладам в проводимость двумерной системы. Найдены квантовые поправки к проводимости  $2D$  системы с антиточками в поперечном магнитном поле в приближении малой плотности антиточек. Получено аналитическое выражение для квантовых поправок в случае антиточек

малого радиуса. Квантовые поправки в случае промежуточного размера антиточек изучены численно.

Показано, что вклад антиточек в магнетопроводимость существенно зависит от соотношения размера антиточки с длиной сбега фазы и магнитной длиной электронов. Вклады в магнетопроводимость, обусловленные антиточками большого радиуса, отрицательны и связаны с уменьшением доли траекторий с самопересечением при появлении антиточек. В случае антиточек малого радиуса вклады антиточек в магнетопроводимость меняют свой знак с магнитным полем; это объясняется ограничением нижнего предела размера замкнутых траекторий, которые обхватывают антиточку.

## 2 Эффект Ааронова-Бома в мезоскопическом кольце в нестационарном магнитном поле

Данная глава работы посвящена изучению эффекта Ааронова-Бома в мезоскопическом кольце в нестационарном магнитном поле. Хорошо известны периодические осцилляции магнетопроводимости, связанные с эффектом Ааронова-Бома. Впервые подобное явление в неупорядоченных полупроводниках (где  $l$  мала) было предсказано в работе [23] и наблюдалось в [24] при измерении магнетосопротивления тонкостенных металлических цилиндров малых размеров, и в работе [25] в тонких пленках магния, где образец имел вид сотовой сетки. Отметим, что в обоих случаях выполнялось условие малости  $l$ , что совпадает с пределом нашей задачи. Эффект определялся интерференцией электронных траекторий вокруг отверстия в противоположных направлениях, а период осцилляций определялся квантом потока  $\Phi_0$ .

Кондактанс неупорядоченного мезоскопического кольца в стационарном магнитном поле изучался экспериментально, например, в работе [26], где, в частности, осцилляции кондактанса с периодом  $h/e$  наблюдались во всем диапазоне частот электрического поля. Осцилляции подавляются, если частота электрического поля превышает обратное время прохода через образец  $\tau_L^{-1} = D/L^2$  и термическую частоту  $T/\hbar$ .

В [27] обсуждается теория слабой локализации для петли, сделанной из одномерной проволоки. Рассматриваются симметричные контакты к петле с граничными условиями, соответствующими различным реальным экспериментальным ситуациям.

Теоретическому изучению стационарного эффекта Ааронова-Бома в мезоскопическом кольце была посвящена работа [28], где также учитывалось влияние тун-

нельных контактов.

В ряде работ последнего времени изучалось влияние переменного магнитного поля на кондактанс квантовых колец. В частности, в работах [29, 30] было предсказано, что в идеальном кольце под действием магнитного поля с потоком  $\Phi(t) = \dot{\Phi}t + \sum_i A_i \sin(\omega_i t + q_i)$  возникают интерференционные эффекты на частотах, кратных  $\dot{\Phi}$ .

Мезоскопическое кольцо с ограниченным числом примесей, на которое действует нестационарное магнитное поле, линейно зависящее от времени, изучается в работе [32]. Рассматривается кондактанс кольца, определяемый электродвижущей силой, индуцированной в кольце магнитным полем. Исследуется накопление энергии под действием медленно меняющегося магнитного потока.

В мезоскопической физике широко исследовался главным образом отклик наноструктур на постоянное или на медленно меняющееся со временем магнитное поле. В настоящей главе мы будем изучать характер осцилляций Ааронова-Бома кондактанса мезоскопического кольца в зависимости от скорости изменения нестационарного магнитного поля.

## §1 Расчет квантовых поправок

В этой главе будут исследованы квантовые поправки к кондактансу мезоскопического кольца в переменном магнитном поле с потоком, линейно нарастающем во времени  $\Phi(t) = \dot{\Phi}t$ . Будем рассматривать кольцо с туннельными контактами (рис. 5) в пределе, когда туннелирование слабое. Тогда, согласно работе [28], контакты не влияют на состояния в кольце, и квантовые поправки не зависят от места крепления контактов. Ширину кольца будем считать малой, так что с точки зрения квантовых поправок кольцо можно рассматривать как одномерную "проволоку". Для этого ши-

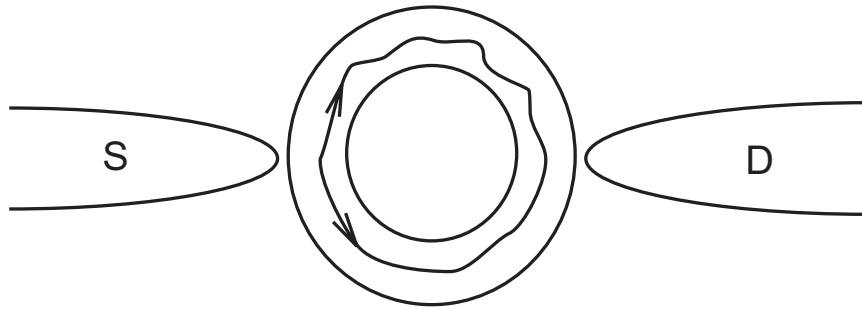


Рис. 5. Мезоскопическое кольцо с туннельными контактами. Внутри кольца изображены две интерферирующие траектории.

рина кольца должна быть меньше  $L_\varphi$ .

Аналитическое выражение для квантовых поправок дается в терминах функции Грина куперона [17], которая внутри кольца удовлетворяет уравнению диффузии

$$\left\{ \partial_\eta + D \left[ -i\nabla - \frac{e}{c} \mathbf{A} \left( t - \frac{\eta}{2} \right) - \frac{e}{c} \mathbf{A} \left( t + \frac{\eta}{2} \right) \right]^2 + \frac{1}{\tau_\varphi} \right\} C_{\eta, \eta'}^t(x, x') = \delta(x - x') \delta(\eta - \eta'), \quad (2.1)$$

В мезоскопической системе уравнение (2.1) дополняется граничными условиями на контактах. Согласно [28], они могут быть представлены феноменологически в виде уравнения непрерывности и сохранения тока

$$\begin{aligned} C(+0, x') &= C(L - 0, x'), \quad C(L/2 - 0, x') = C(L/2 + 0, x'), \\ 2\alpha^{-1} C(0, x') &= L \partial_x C(+0, x') - L \partial_x C(L - 0, x'), \\ -2\alpha^{-1} C(L/2, x') &= L \partial_x C(L/2 - 0, x') - L \partial_x C(L/2 + 0, x'). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь переменная  $0 < x < L$  означает координату вдоль кольца и  $L = 2\pi R$  - периметр кольца. Параметр  $\alpha = G_{wire}/G_{contact}$  используется для описания мезоскопического эффекта в случае, когда контакты между кольцом и электродами имеют туннельный характер [28].  $G_{wire}$  и  $G_{contact}$  - классические величины кондактансов проволоки и контакта. Слагаемое  $\alpha^{-1} C$  учитывает выход электрона в объем. Когда параметр  $\alpha$  мал ( $\alpha \ll 1$ ), он означает вероятность электрона оставаться в области кольца после каждого пролета через контактную область. Изолированное кольцо описывается  $\alpha \gg 1$ .

Квантовые поправки к кондактансу в переменном магнитном поле выражаются с помощью куперона следующим образом [28]

$$\delta G(t) = -\frac{4e^2 D}{\pi \hbar V_0 L} \int dx \int d\eta \int d\epsilon \nabla N(\epsilon, x) C_{\eta, -\eta}^{\eta-t}(x, x). \quad (2.3)$$

Здесь  $V_0$  падение напряжения в образце и  $N(\epsilon, x)$  - функция распределения электронов в кольце, которая удовлетворяет следующему уравнению и граничным условиям

на контактах, аналогичным с (2.2)

$$\begin{aligned}\partial_x^2 N(\epsilon, x) &= 0, \\ \pm \alpha L \partial_x N &= N - N_F(\epsilon + eV_0/2) \quad \text{при } x = +0, L - 0, \\ \pm \alpha L \partial_x N &= N_F(\epsilon - eV_0/2) - N \quad \text{при } x = L/2 - 0, L/2 + 0.\end{aligned}\tag{2.4}$$

где "+" и "-" относятся к "верхнему" и "нижнему" полукругам, соответственно.

$N_F(\epsilon \pm eV_0/2)$  - функции распределения Ферми в объеме.

Решая (2.4), получаем

$$\partial_x N(\epsilon, x) = \frac{\pm 2eV_0}{L(1 + 4\alpha)} \delta(\epsilon - \epsilon_F).\tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.3), с учетом того, что в пределе слабого туннелирования  $\alpha \gg 1$ , получаем

$$\delta G(t) = -\frac{e^2 D}{\alpha \pi L} \int C_{\eta, -\eta}^{\eta-t}(x, x) d\eta.\tag{2.6}$$

Рассмотрим однородное магнитное поле, линейно зависящее от времени  $H \sim t$ .

Решение уравнения (2.1) с периодическими граничными условиями вдоль оси  $x$  имеет вид

$$\begin{aligned}C_{\eta, \eta'}^t(x, x) &= \frac{1}{L} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta(\eta - \eta') \times \\ &\exp \left\{ -D \int_{\eta'}^{\eta} d\eta_1 \left[ p_x^m - \frac{e}{c} A_x \left( t - \frac{\eta_1}{2} \right) - \frac{e}{c} A_x \left( t + \frac{\eta_1}{2} \right) \right]^2 - \frac{\eta - \eta'}{\tau_\varphi} \right\},\end{aligned}\tag{2.7}$$

где  $p_x^m = 2\pi m/L$ . Здесь мы использовали калибровку с единственной компонентой  $A_x(t) = \Phi(t)/L$ . Подставляя (2.7) в (2.6), получим

$$\delta G(t) = -\frac{e^2}{4\alpha\pi^3} \left[ \frac{\tau_0}{\tau_R} \right]^{\frac{2}{3}} \sum_m F(x_m, y),\tag{2.8}$$

$$F(x, y) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ - \left[ (x - \eta)^2 + y \right] 2\eta \right\} d\eta.\tag{2.9}$$

Мы использовали обозначения  $\tau_0 = \Phi_0/\dot{\Phi}$ ,  $\tau_R = R^2/D$ ,

$x_m = (\tau_0/\tau_R)^{1/3}(m + t/\tau_0)$ ,  $y = (\tau_0/\tau_\varphi)(\tau_R/\tau_0)^{1/3}$ .



Функция  $F(x, y)$  осциллирует с периодом  $\tau_0$ . Она достигает своего максимума вблизи  $x = 0$ , и имеет следующие асимптотики:

при  $x \rightarrow -\infty$

$$F(x, y) \simeq \frac{1}{2(x^2 + y)}, \quad (2.10)$$

при  $x \rightarrow +\infty$

$$F(x, y) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-2xy} + \frac{1}{2(x^2 + y)}. \quad (2.11)$$

Эти приближения справедливы при условии  $\tau_0 \gg \tau_R$ .

Как видно из (2.10) и (2.11), функция  $F(x, y)$  при произвольном  $\tau_0$  представляет собой несимметричную функцию времени. Несимметричность является результатом сохранения фазы куперона за время  $\tau_0$ . В стационарном пределе, когда  $\tau_0 \gg \tau_\varphi$  асимптотики (2.10) и (2.11) совпадают, и функция  $F(x, y)$  становится симметричной.

Графики функции  $F(x, y)$ , которые иллюстрируют эти соображения, приведены на рис.6. Как видно, эта функция представляет собой пик несимметричной формы.

Преобразуя сумму по  $m$  в (2.8) с помощью формулы суммирования Пуассона, получаем Фурье представление квантовых поправок к кондактансу

$$\delta G(t) = \delta G_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \delta G_k^a \sin \left[ \frac{2\pi kt}{\tau_0} \right] + \delta G_k^b \cos \left[ \frac{2\pi kt}{\tau_0} \right] \right), \quad (2.12)$$

где

$$\delta G_0 = -\frac{e^2}{4\alpha\pi^3} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\eta\tau_R}} \exp \left\{ -\frac{2\eta}{\tau_\varphi} \right\} d\eta, \quad (2.13)$$

$$\delta G_k^{a,b} = -\frac{e^2}{2\alpha\pi^3} \int_0^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2\eta\tau_R}} \exp \left\{ -\frac{2\eta}{\tau_\varphi} - \frac{\pi^2 k^2 \tau_R}{2\eta} \right\} \begin{bmatrix} \sin \left( 2\pi k \frac{\eta}{\tau_0} \right) \\ \cos \left( 2\pi k \frac{\eta}{\tau_0} \right) \end{bmatrix} d\eta.$$

Верхние индексы  $a$  и  $b$  относятся к верхней и нижней строке в квадратных скобках в (2.13), соответственно.

Интегрируя уравнение (2.13), получаем

$$\delta G_0 = -\frac{e^2}{8\alpha\pi^2} \frac{L_\varphi}{R},$$

$$\delta G_k^{a,b} = -\frac{e^2}{4\alpha\pi^2} \left[ 2\tau_R \left( \frac{1}{\tau_\varphi^2} + \left[ \frac{\pi k}{\tau_0} \right]^2 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\pi k Z_+ \sqrt{2\tau_R} \right\} \quad (2.14)$$

$$\times \left\{ Z_+ \begin{bmatrix} \sin(\pi k Z_- \sqrt{2\tau_R}) \\ \cos(\pi k Z_- \sqrt{2\tau_R}) \end{bmatrix} \pm Z_- \begin{bmatrix} \cos(\pi k Z_- \sqrt{2\tau_R}) \\ \sin(\pi k Z_- \sqrt{2\tau_R}) \end{bmatrix} \right\}, \quad (2.15)$$

$$Z_\pm^2 = \left[ \frac{1}{\tau_\varphi^2} + \left( \frac{\pi k}{\tau_0} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \pm \frac{1}{\tau_\varphi}.$$

В квазистационарном пределе  $\tau_0 \gg \tau_\varphi$ , получаем

$$\delta G_0 = -\frac{e^2}{8\alpha\pi^2} \frac{L_\varphi}{R}, \quad \delta G_k^a = 0, \quad \delta G_k^b = -\frac{e^2}{4\alpha\pi^2} \frac{L_\varphi}{R} \exp \left\{ -\frac{2\pi k R}{L_\varphi} \right\}. \quad (2.16)$$

В противоположном пределе  $\tau_0 \ll \tau_\varphi$ ,

$$\delta G_0 = -\frac{e^2}{8\alpha\pi^2} \frac{L_\varphi}{R}, \quad (2.17)$$

$$\delta G_k^{a,b} = -\frac{e^2}{4\alpha\pi^2} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi k \tau_R}} \exp \left\{ -\sqrt{\frac{2\tau_R}{\tau_0}} (\pi k)^{\frac{3}{2}} \right\} \quad (2.18)$$

$$\times \left( \cos \left[ \sqrt{\frac{2\tau_R}{\tau_0}} (\pi k)^{\frac{3}{2}} \right] \pm \sin \left[ \sqrt{\frac{2\tau_R}{\tau_0}} (\pi k)^{\frac{3}{2}} \right] \right).$$

Имеется сильное подавление гармоник с  $k \neq 0$  в (2.16), если  $R \gg L_\varphi$  и в (2.17), если  $\tau_R \gg \tau_0$ .

Зависимость от времени  $\delta G(t)$  в пределе  $\tau_0 \ll \tau_\varphi$  приведена на (рис.7).

Суммируя (2.12) по  $k$  используя (2.16), получаем хорошо известное выражение для квантовых поправок в стационарном магнитном поле [17]:

$$\delta G(t) = -\frac{e^2}{8\alpha\pi^2 \hbar} \frac{L_\varphi}{R} \frac{\text{sh} \left( \frac{2\pi R}{L_\varphi} \right)}{\text{ch} \left( \frac{2\pi R}{L_\varphi} \right) - \cos \left( 2\pi \frac{t}{\tau_0} \right)}. \quad (2.19)$$

## §2 О возможности экспериментального наблюдения эффекта

Обсудим условия наблюдения эффекта Ааронова-Бома в нестационарном магнитном поле. Наблюдение эффекта в первую очередь возможно при выполнении

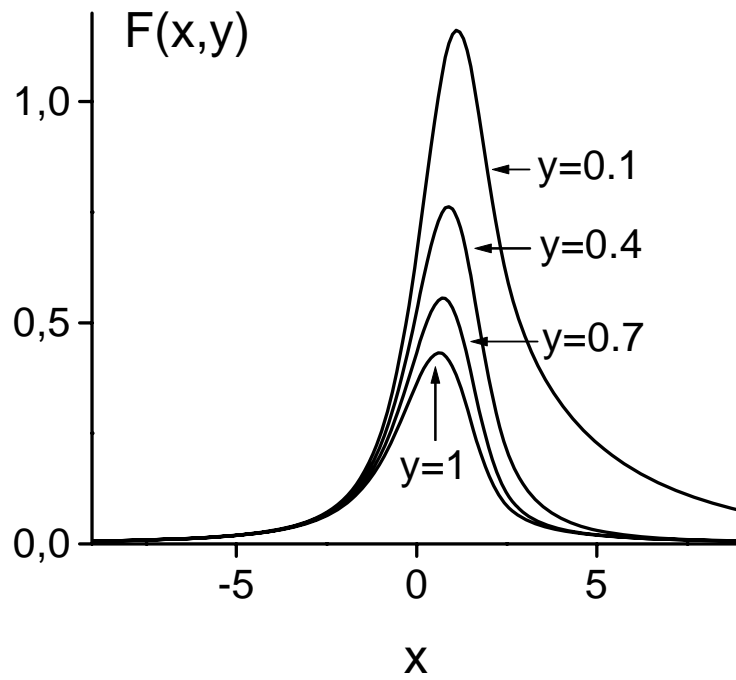


Рис. 6. Функция  $F(x, y)$  при различных значениях параметра  $y$ .

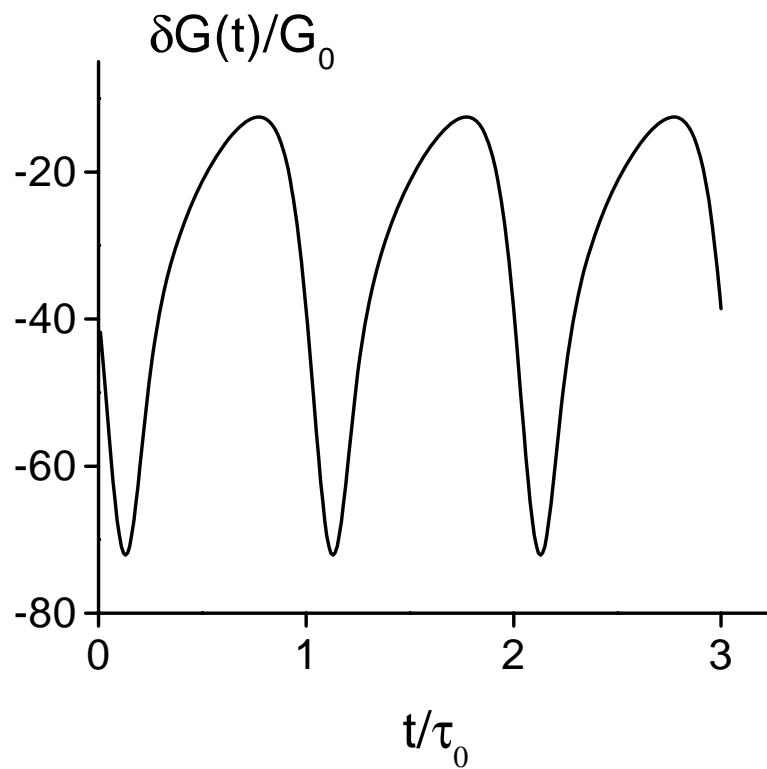


Рис. 7. Квантовые поправки  $\delta G(t)$  (в единицах  $G_0 = e^2/(8\pi^2\alpha)$ ) как функция времени.

Здесь  $\tau_\varphi = 10^{-8}$ сек,  $\tau_0 = 8 \cdot 10^{-9}$ сек,  $\tau_R = 10^{-11}$ сек.

условия  $\tau_0 < \tau_\varphi$ . Следовательно, нужно создать временной градиент магнитного поля, такой, что  $\dot{H} > \Phi_0/(d^2\tau_\varphi)$ .

Для типичных сильно легированных полупроводников  $\tau_\varphi \sim 10^{-9} - 10^{-8}$ с (при  $T = 1K$ ). Тогда для кольца размера  $d \simeq 10^{-4}$ см:  $\dot{H} > (10^5 - 10^6)$ Т/с. Это условие можно выполнить, например, если для создания нестационарного магнитного поля использовать резонатор. Максимальные поля в вакуумных резонаторах превышают 1МВ/см. Если характерное поле в резонаторе  $H \sim 10^{-3}$ Т ( $E \sim 3 * 10^3$ В/см), и характерные частоты  $\omega \sim 10^8 - 10^9$ Гц, то имеем  $\dot{H} \sim (10^6 - 10^7)$ Т/с.

Однако, нужно учесть, что электрическое поле резонатора также будет влиять на измерения. Для этого нужно использовать резонатор, где  $E_{max}$  и  $H_{max}$  имеют пространственный сдвиг. Тогда измерения нужно провести в таком месте резонатора, где электрическое поле равно нулю.

В случае сдвига  $\lambda/4$ , изменение электрического поля на противоположных концах кольца составляет  $\Delta E \simeq E_{max}d/\lambda \simeq 5(10^{-7} - 10^{-6})E_{max}$ . При  $E_{max} \sim 3 * 10^3$ В/см:  $\Delta E \simeq (10^{-3} - 10^{-2})$ В/см ( $\Delta V \simeq (10^{-7} - 10^{-6})$ В). На концах двумерного образца размера  $\sim 10^{-2}$ см:  $\Delta E \simeq 3.3(10^{-5} - 10^{-4})E_{max} \simeq (10^{-1} - 10^{-2})$ В/см ( $\Delta V \simeq (10^{-3} - 10^{-4})$ В).

Можно ожидать, что влияние такого падения напряжения окажется не слишком существенным. Важной проблемой будет исключение наводок и пробоя при измерениях. Наводки на проводники, используемые для измерения, могут быть уменьшены тщательным изготовлением и установкой системы подводящих электродов, поскольку необходимо скомпенсировать максимально возможное поле в резонаторе с точностью  $10^{-7} - 10^{-6}$ . Представляется, что это можно было бы сделать методами микронной технологии. Предполагаемый образец должен представлять собой пластину из изолирующего полупроводника, в центре которого создано измеряемое мезоскопическое кольцо, а измерительные проводники выполнены на поверхности этой

пластины. Пластина должна размещаться в резонаторе, с микронной точностью, вдоль плоскости с нулевым значением компоненты электрического поля, направленного вдоль пластины. Для резонатора в форме параллелепипеда и волн магнитного типа ( $E_z = 0$ ) электрические компоненты  $E_x$  и  $E_y$  равны нулю в середине ребра, перпендикулярного плоскости  $xy$ , а компонента магнитного поля  $H_z$  имеет максимум. Поэтому пластина с кольцом может быть установлена вблизи этой точки перпендикулярно оси  $z$ . В этом случае измерительные головки могут быть выведены наружу через дырки, сделанные на стенке резонатора, что также уменьшит побочные падения напряжения.

### §3 Основные результаты и выводы главы

Изучены квантовые поправки к кондактансу мезоскопического кольца в присутствии нестационарного магнитного поля с потоком  $\Phi(t) = \dot{\Phi}t$ . Влияние нестационарности магнитного поля определяется соотношением характерного времени изменения магнитного потока  $\tau_0 = \Phi_0/\dot{\Phi}$  и времени сбоя фазы  $\tau_\varphi$ . В случае медленного изменения магнитного поля  $\tau_0 \gg \tau_\varphi$ , зависимость от времени квантовых поправок к кондактансу состоит из периодических пиков симметричной формы. Когда магнитное поле меняется быстро  $\tau_0 \ll \tau_\varphi$ , за время  $\tau_0$  электрон сохраняет свою фазу. Это приводит к асимметричности формы пиков.

## Часть II

### Термодинамические свойства электронных систем, обусловленные наличием пространственных ограничений

#### 3 Реберная энергия ограниченных микрокристаллов

Квантовые точки с большим числом электронов являются промежуточным объектом между квантовым и классическим пределами. С одной стороны, их размер уже велик по сравнению с длиной волны электрона. С другой стороны, квантование состояний сказывается на транспортных и термодинамических свойствах системы.

В вырожденной электронной системе вклад поверхности в термодинамику малой частицы определяется малым отношением фермиевской длины волны электрона  $1/k_F$  к ее размеру  $L$ . В ряде работ, в частности, Нагаева и др. (см. обзор [33] и ссылки в нем), а также [34, 35] было показано, что наличие поверхности приводит к регулярным поправкам по этому параметру к химическому потенциалу электронов.

Поверхностный вклад в энергию электронного газа приводит к разнообразным физическим эффектам. В частности, он влияет на поверхностное натяжение в малых частицах и, следовательно, на их равновесную форму. Установление равновесия между электронным газом в разных по размеру или форме микрочастицах сопровождается их спонтанным зарядением [33]. Как показано в [34], вследствие дискретности заряда, химический потенциал в микрочастицах выравнивается не полностью, что приводит к бесщелевому диэлектрическому состоянию системы гранул - бесщелевому хаббардовскому диэлектрику.

Помимо поверхностного вклада в энергию, в ограниченных кристаллитах имеются вклады, обусловленные их ребрами и вершинами. В работе [36] упоминается, что

кроме поверхностной поправки, также имеется поправка, существенно зависящая от формы кристалла. Эта поправка несколько меняет свою структуру, когда поверхность тела ребристая. Для частицы в форме параллелепипеда и граничных условий Дирихле, в [36] было показано, что эта поправка определяется длиной ребер параллелепипеда. Однако, зависимость этих поправок для произвольного угла при ребре, в [36] не рассмотрена.

Компьютерные расчеты энергетических состояний в многоэлектронных квантовых точках являются достаточно сложной проблемой из-за экспоненциального увеличения числа энергетических состояний, включаемых в матрицу гамильтониана с ростом числа электронов. В то же время подход, основанный на разложении термодинамических величин по степеням размера, позволяет получить простые оценки, не прибегая к сложным вычислениям. В частности, он позволяет легко оценивать числа заполнения так называемых самоорганизованных квантовых точек одного полупроводника на поверхности другого, которые обычно (см., например, [37]) представляют собой ограниченные пирамидки.

В настоящей главе будем изучать вклад ребра в термодинамику трех- и двумерных ограниченных образцов.

## §1 Постановка задачи

Мы будем рассматривать трехмерную задачу с двугранным углом  $0 < \varphi < \phi$ ,  $r < R$  в приближении свободных электронов. Нам необходимо вычислить вклад в  $\Omega$ -потенциал, обусловленный окрестностью ребра  $r = 0$ . Для этого рассмотрим плотность  $\Omega$ -потенциала при  $T = 0$

$$\omega(r, \varphi) = - \sum_{n,m,k_z} (\mu - E_{n,m}(k_z)) \Theta(\mu - E_{n,m}(k_z)) |\psi_{n,m}(z, r, \varphi)|^2. \quad (3.1)$$

Здесь  $\psi_{n,m}$  и  $E_{n,m}(k_z) = E_{n,m} - k_z^2/2m_e$  - волновая функция и уровень энергии электрона с главным квантовым числом  $n$ , магнитным числом  $m$  и импульсом вдоль ребра  $k_z$ ,  $\mu$  - химический потенциал. Ось  $z$  направлена вдоль ребра. Множитель  $|\psi_{n,m}|^2$  учитывает плотность электронов в заданной точке внутри двугранного угла.

Устремим радиус  $R$  сектора к бесконечности. В этом пределе  $\omega(r, \varphi)$  перестает зависеть от размера сектора. В то же время эта величина, очевидно, обращается в ноль в окрестности границ и ребра на расстояниях порядка фермиевской длины волны электрона, а вдали от границ переходит в постоянную - объемное значение плотности  $\Omega$ -потенциала электронного газа. Чтобы выделить вклад ребра в  $\Omega$ -потенциал, проинтегрируем  $\omega$  по области  $r < r_0$ , примыкающей к ребру. Результат содержит объемное слагаемое, пропорциональное объему этой области, поверхностный вклад, пропорциональный поверхности сектора и независимый от  $r_0$  вклад, обусловленный ребром:

$$\Omega_r = \int_0^{L_z} dz \int_0^{r_0} r dr \int_0^\phi d\varphi \omega = \omega_3^{3D} L_z \phi r_0^2 / 2 + \omega_2^{3D} 2L_z r_0 + \omega_1^{3D} L_z + o(1). \quad (3.2)$$

С учетом того, что при  $\phi = \pi$  необходимый нам реберный вклад отсутствует, его можно найти при помощи предельного перехода

$$\omega_1^{3D} = \frac{1}{L_z} \left[ \left( \Omega_r - r_0^2 \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Omega_r}{r_0^2} \right] \right)_{\phi} - \left( \Omega_r - r_0^2 \lim_{r_0 \rightarrow \infty} \left[ \frac{\Omega_r}{r_0^2} \right] \right)_{\phi=\pi} \right]. \quad (3.3)$$

В дальнейшем будем рассматривать случай бесконечно глубокой потенциальной ямы для электронов, когда волновая функция  $\psi$  на поверхности удовлетворяет условию  $\psi = 0$ .

## §2 Расчет реберного вклада для изотропного энергетического спектра

Волновая функция, удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$-\frac{1}{2m_e} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] = E\psi, \quad (3.4)$$



и нулевому граничному условию, имеет вид

$$\psi_{n,m}(z, r, \varphi) = C \exp(ik_z z) J_\nu(kr) \sin(\nu\varphi), \quad \nu = \frac{\pi m}{\phi}. \quad (3.5)$$

Нормировочный коэффициент  $C$  и уровни энергии определяются, если ограничить систему на большом расстоянии  $R \gg r$ . Используя асимптотику функций Бесселя на больших расстояниях  $J_\nu(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos(kr - \pi\nu/2 - \pi/4)$ , находим в главном порядке по  $R$ :

$$C = \sqrt{\frac{2\pi k}{\phi R}}, \quad \pi n = kR. \quad (3.6)$$

После перехода от суммы по  $n$  к интегралу получаем

$$\Omega_r = -\frac{L_z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_z \int_0^{\infty} k dk \int_0^{r_0} r dr \sum_{m=1}^{\infty} J_{\frac{\pi m}{\phi}}^2(kr) \left( \mu - \frac{k^2 + k_z^2}{2m_e} \right) \theta \left( \mu - \frac{k^2 + k_z^2}{2m_e} \right). \quad (3.7)$$

Выражение для  $\Omega_r$  после небольших преобразований примет вид

$$\Omega_r = \frac{1}{m_e r_0^2} \frac{L_z}{\pi} \int_0^{k_F} dk_z u^4 \int_0^1 x dx \left[ \ln x + \frac{1}{2} (1 - x^2) \right] \sum_{m=1}^{\infty} J_{\frac{\pi m}{\phi}}^2(ux). \quad (3.8)$$

Здесь  $u = (k_F^2 - k_z^2)^{1/2} r_0$ .

Сумму квадратов функций Бесселя удастся свернуть, если  $\phi = \pi/j$ , где  $j$ - целое число или  $\phi = 2\pi$ . Окончательная формула не зависит от этого предположения, в чем мы удостоверились численным вычислением. Для углов  $\phi = \pi/j$  сумма по  $m$  от квадратов функций Бесселя преобразуется к виду

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_{jm}^2(t) = \frac{1}{j} \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} J_0 \left( 2t \sin \left( \frac{m\pi}{j} \right) \right) + \frac{1}{2j} - \frac{1}{2} J_0^2(t) - \frac{1}{4j} (1 + (-1)^j) J_0(2t). \quad (3.9)$$

В частности, при  $\phi = \pi$

$$\sum_{m=1}^{\infty} J_m^2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} J_0^2(t), \quad (3.10)$$

откуда на асимптотике  $r \rightarrow \infty$  находим известные значения объемного и поверхностного  $\Omega$ -потенциала [33, 34]:

$$\omega_3^{3D} = -\frac{k_F^5}{15\pi^2 m_e}, \quad \omega_2^{3D} = \frac{k_F^4}{32\pi m_e}. \quad (3.11)$$

Выражение для  $\omega_1^{3D}$  получается из (3.3), (3.8), (3.9) и (3.10) интегрированием по  $x$ , в первом неисчезающем квадратичном порядке по  $u$ :

$$\omega_1^{3D}(\phi) = -\frac{\phi}{(2\pi)^2 m_e r_0^2} \int_0^{k_F} dk_z u^2 \left[ \sum_{m=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \frac{1}{\sin^2(m\phi)} - \frac{1}{4} (1 + (-1)^j) \right]. \quad (3.12)$$

Суммируя по  $m$ , окончательно получаем

$$\omega_1^{3D}(\phi) = -\frac{k_F^3}{36\pi m_e} \left( \frac{\pi}{\phi} - \frac{\phi}{\pi} \right). \quad (3.13)$$

Формула (3.13) была выведена для ребра трехмерного кристалла. Аналогичные задачи возникают и при рассмотрении ограниченных двумерных систем, в которых движение по оси  $z$  заковано. Переход к двумерным формулам можно произвести, исключив интегрирование по  $k_z$  и множитель  $L_z/(2\pi)$  в промежуточных формулах. Разложение, аналогичное (3.2), в  $2D$  случае имеет вид

$$\Omega_r = \int_0^{r_0} r dr \int_0^\phi d\varphi \omega = \omega_3^{2D} \phi r_0^2 / 2 + \omega_2^{2D} 2r_0 + \omega_1^{2D} + o(1/r_0). \quad (3.14)$$

Здесь

$$\omega_3^{2D} = -\frac{k_F^4}{8\pi m_e}, \quad \omega_2^{2D} = \frac{k_F^3}{6\pi m_e}. \quad (3.15)$$

Для энергии, связанной с наличием угла у двумерного образца (угловая энергия), получаем

$$\omega_1^{2D}(\phi) = -\frac{k_F^2}{24m_e} \left( \frac{\pi}{\phi} - \frac{\phi}{\pi} \right). \quad (3.16)$$

Как видно, при угле  $\phi = \pi$   $\omega_1(\pi) = 0$ . Для прямого двугранного угла  $\omega_1(\pi/2) = -k_F^3/24\pi m_e$ .

Угол  $\phi = 2\pi$  соответствует трещине в кристалле. Для этого угла из (3.8) с помощью формулы 5.7.11.11. из [38] находим  $\omega_1(2\pi) = k_F^3/24\pi m_e$ . Это выражение также удовлетворяет формуле (3.13), выведенной только для углов  $\phi = \pi/j$ .

Согласно (3.13), при углах больше  $\pi$  величина  $\omega_1$  отрицательна и положительна при углах, меньших  $\pi$ . Физически изменение знака  $\omega_1$  объясняется теми же факто-

рами, что и положительный знак поверхностного вклада в энергию. Из-за нулевого граничного условия приграничная область кристалла обеднена электронами (см. рис.8). Как следствие, область, занятая электронами, уменьшается, что повышает энергию электронного газа при той же средней плотности. Если границу согнуть в угол при неизменной ее площади, то объем обедненной области уменьшается, если  $\phi < \pi$ , и увеличивается, если  $\phi > \pi$ , что приводит, соответственно, к понижению и повышению энергии электронного газа.

С помощью (3.13) число электронов в кристаллите с объемом  $V$ , площадью поверхности  $S$  и ребрами с углами  $\phi_n$  и длинами  $L_n$  выражается через химический потенциал:

$$N = -\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \frac{(2m_e \mu)^{\frac{3}{2}} V}{3\pi^2} - \frac{m_e \mu S}{4\pi} + \frac{(2m_e \mu)^{\frac{1}{2}}}{12\pi} \sum_n L_n \left( \frac{\pi}{\phi_n} - \frac{\phi_n}{\pi} \right). \quad (3.17)$$

Аналогично можно написать выражение для размерного сдвига химического потенциала  $\mu$  ограниченного образца конечных размеров (при постоянном числе электронов):

$$\frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \frac{\pi S}{4k_F V} - \frac{\pi}{6k_F^2 V} \sum_n L_n \left( \frac{\pi}{\phi_n} - \frac{\phi_n}{\pi} \right), \quad (3.18)$$

где  $\mu_0 = (3\pi^2 N/V)^{2/3} / 2m_e$  - химический потенциал неограниченного образца.

### §3 Осциллирующий вклад в $\Omega$ -потенциал

В вычислениях размерных поправок к термодинамическому потенциалу в пределе большого размера сумму по поперечному квантовому числу  $n$  заменяли интегралом, что означает пренебрежение осциллирующим вкладом от суммы. Осциллирующий вклад, очевидно, мал по сравнению с объемным и поверхностным вкладом, но может быть одного порядка с рассмотренным реберным и угловым вкладом.

Для простоты, рассмотрим случаи двумерных электронов, движение которых

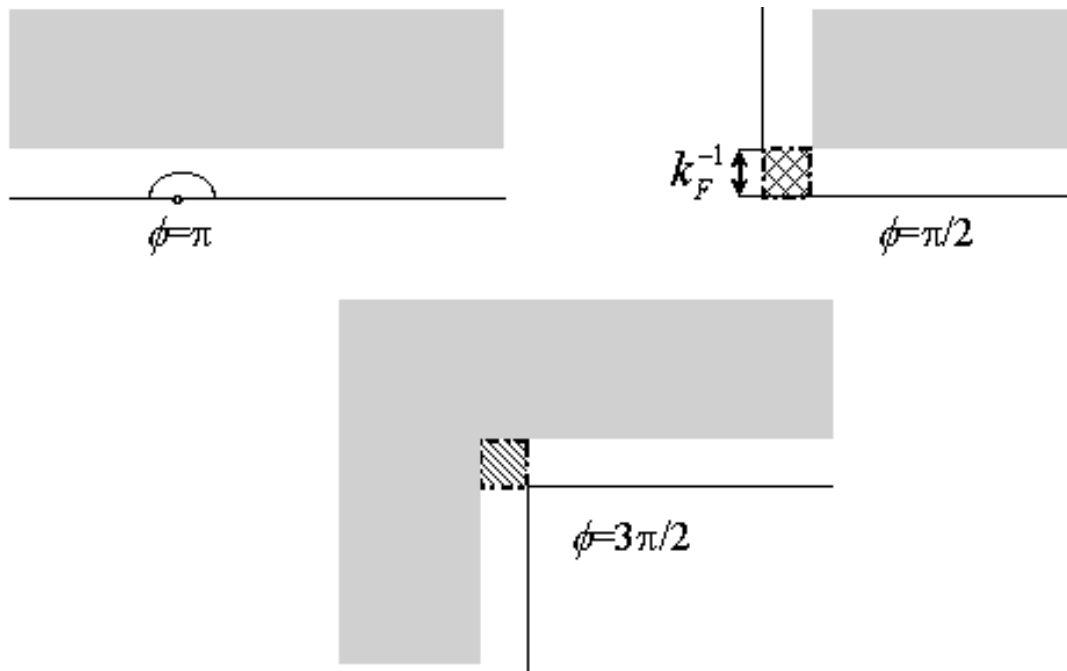


Рис. 8. Качественная иллюстрация происхождения реберного вклада в поверхностную энергию электронного газа. Область, занятая электронами - серая, обедненная область - белая. Заштрихованные области дважды учтены для угла  $\phi = \pi/2$  и не учтены для угла  $\phi = 3\pi/2$ .

ограничено полосой  $0 < y < L_y$ ,  $0 < z < d$ ,  $d \ll L_y$ , и электронного газа, заключенного в трехмерной пластине  $0 < x < L_x$ ,  $0 < y < L_y$ ,  $0 < z < d$ ,  $d \ll L_x, L_y$ .

$\Omega$ -потенциал системы при  $T = 0$  имеет вид

$$\Omega = -2 \sum (\mu - E_n(k)) \Theta(\mu - E_n(k)), \quad E_n(k) = \frac{\pi^2 n^2}{2m_e d^2} + \frac{k^2}{2m_e}, \quad (3.19)$$

где  $E_n(k)$  - уровень энергии электрона с главным квантовым числом  $n$  и продольным импульсом  $k$ ,  $d$  - поперечный размер системы.

Осциллирующий вклад находим, вычисляя сумму по  $n$  в (3.19) с помощью формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(x) dx - \frac{1}{2} F(0) + 2 \operatorname{Re} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x) e^{2\pi i s x} dx. \quad (3.20)$$

Здесь первое, второе и третье слагаемые, примененные к (3.19), дают, соответственно, объемный  $\Omega_3$ , поверхностный  $\Omega_2$  и осциллирующий  $\Omega_{osc.}$  вклады в  $\Omega$ -потенциал ( $\Omega = \Omega_3 + \Omega_2 + \Omega_{osc.}$ ).

В результате после небольших вычислений в случае  $2D$  полосы получаем

$$\begin{aligned} \Omega_3^{2D} &= -\frac{k_F^4 d L}{8\pi m_e}, \quad \Omega_2^{2D} = \frac{k_F^3 L}{3\pi m_e}, \\ \Omega_{osc.}^{2D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^{3/2} L}{2m_e s^{5/2} (\pi d)^{3/2}} \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2s k_F d\right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где  $L$  - продольный размер системы.

Аналогично, в случае  $3D$  пластины получаем

$$\begin{aligned} \Omega_3^{3D} &= -\frac{k_F^5 d S}{15\pi^2 m_e}, \quad \Omega_2^{3D} = \frac{k_F^4 S}{16\pi m_e}, \\ \Omega_{osc.}^{3D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^2 S}{4m_e s^3 (\pi d)^2} \sin(2s k_F d), \end{aligned} \quad (3.22)$$

где  $S$  - площадь пластины.

Очевидно, при разложении в ряд по степеням размера в  $3D$  кристалле, следующим по порядку за реберным, неосциллирующим вкладом является вклад вершин. Этот вклад не зависит от размера образца. Пусть все размеры образца имеют

одинаковый порядок. Тогда порядок осциллирующего вклада перестает зависеть от размеров. Поэтому для такого образца, наряду с вкладом вершин, следует также учитывать осциллирующий вклад.

Поверхностная и реберные вклады являются локальными и могут быть отнесены к элементам площади поверхности или длины ребра, соответственно. Осциллирующий вклад явно зависит от всех масштабов образца, и поэтому нелокален, не универсален и зависит от формы образца в целом. В образце сложной формы осцилляции являются мезоскопическими, а показатель степенной зависимости, видимо, изменяется.

Однако, общий вывод состоит в том, что вклады поверхности и ребра в энергию превышают осциллирующие и поэтому результаты для поверхностного и реберного вклада остаются независимыми от формы образца.

Отметим далее, что, в отличие от поверхностного и реберного вклада, осциллирующие вклады являются сильно чувствительными к сбою фазы электронов и поэтому подавляются примесным рассеянием и температурой.  $\Omega$ -потенциал при конечной температуре можно получить из выражения для  $\Omega$ -потенциала при  $T = 0$  с помощью известной формулы

$$\Omega(\mu, T) = \int dE \Omega(E, 0) \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right). \quad (3.23)$$

В результате, применение (3.23) к полученным ранее осциллирующим вкладам в  $\Omega$ -потенциал (3.21) и (3.22) дает:

$$\begin{aligned} \Omega_{osc.}^{2D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^{3/2} L}{2m_e s^{5/2} (\pi d)^{3/2}} \frac{\pi s k_F d T / \mu}{\text{sh}(\pi s k_F d T / \mu)} \cos\left(\frac{5\pi}{4} - 2s k_F d\right), \\ \Omega_{osc.}^{3D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^2 S}{4m_e s^3 (\pi d)^2} \frac{\pi s k_F d T / \mu}{\text{sh}(\pi s k_F d T / \mu)} \sin(2s k_F d). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Температурный множитель в выражениях из (3.24) приводит экспоненциальному подавлению осциллирующего вклада с ростом температуры.

#### §4 Влияние примесного рассеяния на $\Omega$ -потенциал

Рассмотрим вопрос о влиянии примесного рассеяния на  $\Omega$ -потенциал размерно-квантованной системы. Удобно использовать выражение для  $\Omega$ -потенциала через плотность состояний  $\nu(E)$ :

$$\begin{aligned}\Omega &= - \int dE \nu(E) (\mu - E) \Theta(\mu - E), \\ \nu(E) &= \sum_{n, \mathbf{k}} \delta(E - E_n(k)).\end{aligned}\tag{3.25}$$

Плотность состояний выражается через мнимую часть запаздывающей функции Грина с помощью известной формулы:

$$\nu(E) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n, \mathbf{k}} \text{Im} G_{nn}^+(\mathbf{k}).\tag{3.26}$$

Примеси могут быть включены в рассмотрение на основе (3.26), где функции Грина нужно усреднять по положениям хаотически расположенных примесей. Рассеяние на примесях будем рассматривать в борновском приближении.

Средняя функция Грина удовлетворяет обычной диаграммной технике. В первом борновском приближении нужно суммировать диаграммы вида



Рис. 9.

В качестве пунктирных линий выступают потенциалы отдельных примесей  $U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ . В вершинах, где сходятся несколько пунктирных линий, нужно ставить  $n_i(z_0)$ . Тонкие сплошные линии соответствуют невозмущенной функции Грина  $G_n^0(\mathbf{k}) = [E - E_n(k) + i\eta]^{-1}$ . Жирные сплошные линии относятся к усредненной функции Грина.

Суммирование диаграмм на рис. 9 отвечает учету последовательных столкновений на отдельных примесях. Здесь не учтены диаграммы с пересекающимися ли-

ниями, которые в рассматриваемом приближении, когда  $k_F l \gg 1$  или  $E\tau \gg 1$ , имеют малость по параметру  $(E\tau)^{-1}$ . Также не учтены диаграммы с незамкнутыми пунктирными линиями, поскольку их учет приводит возникновению среднего потенциала, создаваемого примесями, и, соответственно, к несущественной перенормировке собственных значений энергии.

Усредненная функция Грина удовлетворяет уравнению Дайсона, которое в представлении невозмущенных (поперечных) состояний имеет вид

$$[E - E_n(k)] G_{nn''}(k) + \sum_{n'} \Sigma_{nn'}(k) G_{n'n''}(k) = \delta_{nn''} \delta(k - k'). \quad (3.27)$$

Здесь  $\Sigma_{nn'}(k)$  - собственно-энергетическая часть. В борновском приближении собственно-энергетической части соответствует диаграмма



Уравнение (3.27) графически записывается в следующем виде:



Удобно перейти к функциям Грина в представлении поперечных координат. В этом представлении уравнение Дайсона примет вид

$$\left[ E + \frac{1}{2m_e} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{k^2}{2m_e} \right] G_k(z, z'') + \int dz' \Sigma_k(z, z') G_k(z', z'') = \delta(z - z'') \delta(k - k'), \quad (3.28)$$

где  $\Sigma_k(z, z') = \sum_{n, n'} \psi_n(z) \Sigma_{nn'}(k) \psi_{n'}(z')$ .

Согласно (3.28), собственно-энергетическая часть приводит к недиагональности функций Грина по поперечной координате. Однако, рассмотренные нами осциллирующие вклады в  $\Omega$ -потенциал, в основном, формируются на масштабах  $z \sim d \gtrsim k_F^{-1}$ .



Вблизи поверхности, на расстояниях  $z \ll l$  величина  $\Sigma_k(z, z')$  мала (как оператор) по сравнению с  $\frac{1}{2m_e} \frac{d^2}{dz^2}$ , а при  $z \gg k_F^{-1}$  величину  $\Sigma_k(z, z')$  можно считать диагональной. Поэтому на масштабах, определяющих осцилляционный вклад в  $\Omega$ -потенциал, можно пренебречь недиагональностью функций Грина.

Рассмотрим примеси с короткодействующим потенциалом  $U(\mathbf{r}) = U_0 \delta(\mathbf{r})$ . Потенциал системы примесей имеет вид:  $V(z, \rho) = U_0 \sum_i \delta(z - z_i) \delta(\rho - \rho_i)$ .

В приближении  $(E\tau)^{-1} \ll 1$  собственно-энергетическая часть может быть выражена следующим образом

$$\Sigma_k(z, z') = \Sigma \delta(z - z'), \quad \Sigma = n_i U_0^2 \sum_n \psi_n(z)^2 \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} G_n^0(k). \quad (3.29)$$

Когда собственно-энергетическая часть не зависит от  $z$ , решение уравнения Дайсона (3.28) можно написать в виде разложения по собственным функциям поперечных состояний

$$G_k^+(z, z') = \sum_n \frac{\psi_n(z) \psi_n(z')}{E - E_n(k) - \Sigma^+}. \quad (3.30)$$

Вещественная часть  $\Sigma$  определяет смещение энергетических уровней электронов и приводит к изменению периода осцилляций  $\Omega$ -потенциала. Более существенна мнимая часть собственно-энергетической части, которая приводит к размытию энергетических уровней, и, соответственно, к появлению экспоненциального множителя, определяющего затухание осцилляций  $\Omega$ -потенциала.

Усреднение величин по примесям происходит на расстояниях от поверхности  $z \sim l$  и поэтому в рамках нашего приближения влияние поверхности на  $\Sigma$  несущественно. Следовательно, в выражении для функции Грина (3.30) в качестве собственно-энергетической части можно подставить ее значение, полученное в объеме, которое выражается с помощью времени релаксации электронов:  $\tau^{-1} = 2Im\Sigma_{nn}^+(p)$ .

Таким образом, в выражении для  $\Omega$ -потенциала (3.25) следует подставить плот-

НОСТЬ СОСТОЯНИЙ

$$\nu(E) = \frac{1}{\pi} \frac{1/2\tau}{(E - E_n(k))^2 + (1/2\tau)^2}. \quad (3.31)$$

В результате, с учетом (3.31) для осциллирующей части  $\Omega$ -потенциала вместо (3.21) и (3.22), получаем

$$\begin{aligned} \Omega_{osc}^{2D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^{3/2} L}{2m_e s^{5/2} (\pi d)^{3/2}} \exp(-s d/l) \cos(5\pi/4 - 2s k_F d), \\ \Omega_{osc}^{3D} &= \sum_{s=1}^{\infty} \frac{k_F^2 S}{4m_e s^3 (\pi d)^2} \exp(-s d/l) \cos(2s k_F d) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Видно, что примесное рассеяние, так же как и конечная температура, приводит к экспоненциальному затуханию осциллирующего вклада в  $\Omega$ -потенциал.

## §5 Анизотропный квадратичный энергетический спектр

Выражение для реберного вклада в энергию допускает легкое обобщение на случай анизотропного квадратичного энергетического спектра  $\varepsilon(k) = \sum k_i^2/2m_i$ . С помощью аффинного преобразования  $x'_i = x_i(m_i/m_e)^{1/2}$ , где  $m_e = (m_1 m_2 m_3)^{1/3}$  уравнение Шредингера превращается в изотропное, для которого справедливо все предыдущее рассмотрение. Если определить двугранный угол с помощью векторов нормалей  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  к формирующим плоскостям, то преобразованный угол между гранями, входящий в предыдущие формулы, определяется соотношением:

$$\cos \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{n_{1i} n_{2i}}{m_i} \left[ \sum_{i=1}^3 \frac{n_{1i}^2}{m_i} \sum_{i=1}^3 \frac{n_{2i}^2}{m_i} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

а длина ребра  $L_n = \left[ \sum_{i=1}^3 L_{ni}^2 \right]^{1/2}$  заменяется на  $\left[ \sum_{i=1}^3 \frac{m_i}{m_e} L_{ni}^2 \right]^{1/2}$ .

Рассмотрим частный случай, когда ребро совпадает с осью (3) эллипсоида эффективных масс. Пусть  $\alpha$  и  $\beta$ -углы граней кристаллита с плоскостью  $xz$  (предполагается, что  $\alpha > \beta$ ). При этом преобразованный угол между гранями дается соотно-

шением:

$$\operatorname{tg} \phi = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (3.34)$$

Для однозначности угол  $\phi$  следует выбирать в той же полуплоскости, что угол  $\alpha - \beta$ : при  $0 < \alpha - \beta < \pi$ ,  $0 < \phi < \pi$ ; при  $\pi < \alpha - \beta < 2\pi$ ,  $\pi < \phi < 2\pi$ .

При  $m_1 \ll m_2$  основной вклад в  $\omega_1$  определяется большим множителем  $(m_2/m_1)^{1/2}$  и имеет вид:

$$\omega_1^{3D} = -(k_F^3/36m_e)(m_2/m_1)^{1/2}(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)^{-1}, \quad \alpha, \beta \neq 0, \pi.$$

Противоположный предел эквивалентен первому и получается путем замены  $m_1 \rightarrow m_2$ ,  $\alpha \rightarrow \pi/2 - \beta$ ,  $\beta \rightarrow \pi/2 - \alpha$ :

$$\omega_1^{3D} = -(k_F^3/36m_e)(m_1/m_2)^{1/2}(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta)^{-1}, \quad \alpha, \beta \neq \pi/2, 3\pi/2.$$

Допустим, что угол  $\beta$  равен нулю, тогда одна из граней лежит в плоскости  $xz$ , и для преобразованного угла имеем:  $\phi = \operatorname{arctg}((m_2/m_1)^{1/2} \operatorname{tg} \alpha)$ . При  $m_1 \ll m_2$  угол  $\phi \rightarrow \pi/2$ , и, соответственно,  $\omega_1^{3D}$  дается аналогичным выражением, как в случае прямого двугранного угла:  $\omega_1^{3D} = -\pi k_F^3/(24m_e)$ . При  $m_1 \gg m_2$  угол  $\phi \rightarrow (m_2/m_1)^{1/2} \operatorname{tg} \alpha$ , и, соответственно,  $\omega_1^{3D} = -(k_F^3/36m_e)(m_2/m_1)^{1/2} \operatorname{ctg} \alpha$ .

Таким образом, предыдущее рассмотрение показывает, что в случае анизотропного энергетического спектра, реберная энергия существенно зависит от ориентации ребра и соотношения эффективных масс.

## §6 Основные результаты и выводы главы

Изучены поправки к термодинамическому потенциалу, связанные с конечностью размера. Исследована поверхностная и реберная энергия газа свободных электронов на идеальной поверхности ограниченного микрокристалла. Рассмотрена осциллирующая часть термодинамического потенциала. Показано, что учет конечной тем-

пературы, а также примесного рассеяния приводит к экспоненциальному подавлению осциллирующего вклада. Получено обобщение выражения для реберного вклада в случае анизотропной эффективной массы для произвольной ориентации двугранного угла по отношению к осям тензора эффективных масс.

## 4 Проникновение магнитного поля в размерно-квантованных системах

В магнитном поле электроны, совершая круговое движение, создают орбитальный магнитный момент. Магнитный момент вычисленный в рамках классической статистической механики, согласно теореме Бора-ван Левена, равен нулю. При этом объемный вклад в диамагнитный момент в точности компенсируется вкладом от так называемых "скачущих орбит" электронов, которые, сталкиваясь с границей, многократно отражаются и создают "краевой ток".

Учет квантования электронов в магнитном поле приводит к конечному магнитному моменту [39]. С точки зрения конечной системы, это означает неполную взаимную компенсацию моментов внутренних и скачущих электронов. С другой стороны, в рассмотренном Ландау пределе большой системы (термодинамическом пределе) диамагнитная восприимчивость не зависит от размеров и формы системы. Однако, термодинамический предел предполагает, что расстояние между уровнями энергии всей системы мало по сравнению с температурой. В применении к линейным откликам в качестве расстояния между уровнями выступает эта величина в отсутствие магнитного поля. Если температура достаточно мала, условие применимости термодинамического предела нарушается, и восприимчивость начинает существенно зависеть от размеров системы. Более того, при нулевой температуре с ростом размеров системы флуктуации восприимчивости не уменьшаются, как при конечной температуре, а возрастают (с математической точки зрения, предела не существует). При этом меняется и знак восприимчивости - система флуктуирует между диа- и парамагнитными состояниями.

Эффекты, связанные с влиянием конечности размера системы (орбитальный

магнетизм) были исследованы многими авторами [40–59]. В различных работах влияние границ моделировалось при помощи гармонического потенциала [42–49] или жестких стенок (нулевые граничные условия на волновые функции) [50–59].

Эти исследования показали, что при высокой температуре, когда температура превышает циклотронный квант  $\hbar\omega$  или какую-нибудь характеристическую энергию модели, диамагнетизм Ландау существенно не меняется: наличие границы приводит к небольшой поправке к восприимчивости Ландау [50]. С другой стороны, при низкой температуре намагниченность может вести себя совсем по другому.

Например, Дентоном [43] и Немесом [44] было показано, что в системе с гармоническим ограничивающим потенциалом магнитный момент при  $T = 0$  отличается от диамагнетизма Ландау. Йошиока и Фукуяма [46] указали, что в слабом поле и при низких температурах ( $T \lesssim$  типичного расстояния между уровнями в ограничивающем потенциале), магнитный момент всей системы испытывает знакопеременные флуктуации, большие по сравнению с магнитным моментом, связанным с восприимчивостью Ландау, и по мере увеличения температуры при таком же слабом поле флуктуации исчезают и восстанавливается диамагнетизм Ландау. Хажду и Шапиро [47], изучая случай полосы с шириной  $L$ , отметили, что температура, ниже которой появляются такие флуктуации, определяется соотношением  $T \sim \hbar/\tau_{tr}$ , где  $\tau_{tr} = L/v_F$  - время пролета электронов на уровне Ферми через систему.

Кроме того, авторами работ [44, 54–57] было показано, что когда в системе имеется аксиальная симметрия вдоль оси параллельной магнитному полю, становится возможным орбитальный парамагнетизм.

Проблема орбитального магнетизма с точки зрения квантового хаоса впервые была рассмотрена Накамурай и Томасом [58], когда они численно изучали различие магнитных откликов круглого и эллиптического бильярда при нулевой температуре.

Круглый бильярд интегрируем при произвольном поле, в то время как эллипс - не интегрируем, что приводит к хаотическому поведению орбит и спектра при конечном магнитном поле.

Магнитный отклик мезоскопической системы с баллистическим движением электронов ( $L \ll l$ ), хаотической в классическом пределе, рассматривался в [59–61]. В [59] квазиклассические методы применялись для получения формулы для восприимчивости, которая выражена в терминах конечного числа классических периодических орбит. Эта формула используется для изучения флуктуаций восприимчивости по сравнению с флуктуациями случайной системы. Обсуждены некоторые механизмы, приводящие к таким флуктуациям.

Рихтер с соавторами [60] использовали квазиклассическую теорию орбитально-го магнетизма невзаимодействующих электронов, движение которых ограничено по двум измерениям. Они показали, что в ограниченной геометрии всегда присутствует стандартный диамагнитный отклик Ландау, на который накладываются размерные вклады квази-случайного знака; величина последних может значительно превышать диамагнитный вклад. Эти поправки чувствительны к природе классической динамики. В [60,61] показано, что системы, которые интегрируемы в отсутствие магнитного поля, показывают магнитный отклик, больший, чем хаотические системы. Эта разница является результатом больших осцилляций плотности состояний в интегрируемых системах из-за существования семейства периодических орбит.

Авторами [62–73] рассмотрен орбитальный магнитный отклик мезоскопических образцов в диффузионном режиме ( $L \gg l$ ). Было показано, что орбитальная магнитная восприимчивость  $\chi$  флуктуирует от образца к образцу, и типичная флуктуация,  $\langle \Delta \chi^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$  может превышать среднее значение  $\langle \chi \rangle$  (угловые скобки означают усреднение по ансамблю макроскопически идентичных образцов), которое в системе с фик-

сированным химическим потенциалом (также не зависящим от магнитного поля) в главном порядке равен восприимчивости Ландау.

Позже Альтшулер с соавторами [73], рассматривая намагниченность системы изолированных квантовых точек (число электронов фиксировано), показал, что усредненная восприимчивость канонической системы содержит парамагнитный вклад, который зависит от размеров системы и также может принимать большие значения.

Исследование пространственного распределения равновесного тока в размерно-квантованных системах также представляет большой интерес, поскольку равновесный ток непосредственно связан с орбитальным магнетизмом, и существенно дополняет картину возникновения диамагнетизма Ландау. Однако, только в последнее время стали уделять внимание ее изучению [48, 76].

Пространственное распределение электрического тока в магнитном поле и вытекающий отсюда орбитальный магнетизм изучен в работе [48] для двумерных электронов, находящихся под воздействием гармонического ограничивающего потенциала  $V(\mathbf{r}) = m\omega_0^2 r^2/2$ . Разъяснены различные режимы температуры и магнитного поля и микроскопических условий для справедливости диамагнетизма Ландау. При слабом магнитном поле ( $\omega \lesssim \omega_0$ ) и низкой температуре ( $T \lesssim \hbar\omega_0$ ), где орбитальный магнитный момент флуктуирует как функция поля, токи нерегулярно распределены парамагнитно или диамагнитно в объеме. Однако, по мере повышения температуры при таком слабом поле ток в объемной области уменьшается и в итоге остается только диамагнитный ток, текущий вдоль края (границы). В результате для полного магнитного момента получается обычный диамагнетизм Ландау. Происхождение этого критического температурного перехода авторы объясняют многократным отражением электронной волны на границе системы. Граница становится существенной, когда длина когерентности электронов становится больше чем размер системы. При более



сильном магнитном поле ( $\omega \gtrsim \omega_0$ ) токи в объеме приводят к эффекту де Газа - ван Альфена при низкой температуре  $T \lesssim \hbar\omega$ . По мере увеличения температуры ( $T \gtrsim \hbar\omega$ ) при таком сильном поле объемные токи уменьшаются и восстанавливается диамагнетизм Ландау, обусловленный краевым током.

Исхикава и Фукуяма [48] построили фазовую диаграмму поведения намагниченности в плоскости температура - магнитное поле. В этой плоскости имеется три характерных области: диамагнетизма Ландау, осцилляции де Газа - ван Альфена и мезоскопических флуктуаций намагниченности. Это деление дает полную картину для орбитального магнетизма конечных систем в различных температурных и магнито-полевых режимах.

Возможность орбитального магнетизма для двумерных электронов, ограниченных гармоническим потенциалом, при различных режимах температуры и магнитного поля изучена также в [49]. В отличие от [48], где использована формула суммирования Пуассона, в [49] даны точные выражения для термодинамического потенциала, магнитного момента, и числа электронов. Результаты дают полное описание фазовой диаграммы намагниченности.

В работе [76] рассмотрена намагниченность цилиндрического кольца в слабом магнитном поле. Однако, рассматривая незатухающий (бездиссипативный) ток в цилиндрическом кольце, автор работы пренебрегает фриделевскими осцилляциями тока.

В отличие от предшествующих работ, нас интересует пространственное распределение электрического тока и магнитного поля в малых системах с границами в модели жесткого ограничивающего потенциала.

## §1 Фриделевские осцилляции проникновения магнитного поля в нормальный металл и размерно-квантованную систему

Намагничивание нормального металла в магнитном поле связано с диа- и парамагнитными токами, текущими по его поверхности. Эти токи распределены в приповерхностном слое, в котором магнитное поле неоднородно. Из-за слабости диамагнетизма поправки к магнитному полю невелики, поэтому ими обычно пренебрегают при рассмотрении кинетических явлений.

Между тем даже такое слабое изменение магнитного поля может быть существенно в квантовых системах. Так, магнитное поле, действующее на ядро атома, частично экранируется электронными оболочками [78], в результате чего частота ЯМР сдвигается и начинает зависеть от химического окружения атома. Этот сдвиг вполне измерим, так как линия ЯМР имеет весьма маленькую ширину по сравнению с типичным обратным временем релаксации электрона.

В искусственной размерно-квантованной системе электронные диамагнитные токи также создают экранировку внешнего магнитного поля и приводят к изменению магнитного поля, воздействующего на ядра. Состояние электронной подсистемы влияет на величину магнитного поля. В частности, при электрической модуляции электронов полевым электродом появляется возможность электрически воздействовать на ядра. Масштаб неоднородности распределения диамагнитных токов и магнитного поля может сравниваться с поперечным размером системы. Поэтому разные ядра оказываются находящимися в различном по величине магнитном поле.

## §2 Диамагнитный вклад

Рассмотрим электронный газ, заключенный в пленке  $0 < x < L_x$ ,  $0 < y < L_y$ ,  $0 < z < d$ ,  $d \ll L_x, L_y$ . Пусть магнитное поле  $\mathbf{B}$  направлено вдоль оси  $x$  в

плоскости пленки  $(x, y)$ . Оно определяется уравнением Максвелла

$$\partial \mathbf{B} / \partial z = 4\pi \mathbf{j}(z) / c.$$

Плотность диамагнитного тока  $\mathbf{j}$  имеет только  $y$  компоненту. Так как диамагнетизм слабый, мы будем пренебрегать поправками к однородному внешнему полю в выражении для диамагнитного тока. Равновесная плотность тока может быть получена из выражения

$$j_y(z) = \text{Sp}(\hat{j}_y(z) f(\hat{\mathcal{H}})) = \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) \text{Sp}(\hat{j}_y(z) \delta(E - \hat{\mathcal{H}})), \quad (4.1)$$

где  $\hat{\mathcal{H}} = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}/c)^2/2m_e + U(z)$  - гамильтониан электрона в магнитном поле,  $\mathbf{A} = (0, -B_0z, 0)$  - вектор-потенциал внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ,  $U(z)$  - ограничивающий потенциал,  $\hat{j}_y(z) = -e\{\hat{v}_y, \delta(z - \hat{z})\}/S$  - оператор орбитальной плотности тока,  $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}/c)/m_e$  - оператор скорости электрона,  $\{\dots\}$  представляют операцию симметризации,  $f(E) = (\exp((E - \mu)/T) + 1)^{-1}$  - функция распределения Ферми ( $\mu$ ,  $T$  - химический потенциал и температура),  $S = L_x L_y$  - площадь системы.

Ток будет рассматриваться в линейном по внешнему полю приближении. Разлагая по магнитному полю, находим

$$j_y(z) = \frac{e}{mS} \text{Sp} \left( \delta(z - \hat{z}) \left[ \frac{e}{c} B_0 z f(\hat{\mathcal{H}}_0) - \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) \hat{p}_y (\delta(E - \hat{\mathcal{H}}) - \delta(E - \hat{\mathcal{H}}_0)) \right] \right) \quad (4.2)$$

Здесь  $\hat{\mathcal{H}}_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m_e + U(z)$  - гамильтониан в отсутствие магнитного поля. Для величины  $\delta(E - \hat{\mathcal{H}})$  справедливо разложение:

$$\delta(E - \hat{\mathcal{H}}_0 - \hat{V}) = \delta(E - \hat{\mathcal{H}}_0) + \frac{1}{2\pi i} [\hat{G}^- \hat{V} \hat{G}^- - \hat{G}^+ \hat{V} \hat{G}^+] + \dots, \quad (4.3)$$

где  $\hat{G}^{\pm} = (E - \hat{\mathcal{H}}_0 \pm i\eta)^{-1}$  - функции Грина электрона,  $\eta \rightarrow +0$ . Используя возмущение гамильтониана в магнитном поле  $\hat{V} = -(e/m_e c) B_0 z \hat{p}_y$  и вычисляя след в формуле

(4.2) в представлении состояний в отсутствие магнитного поля, находим с помощью

(4.3)

$$j_y(z) = \frac{2e^2 B_0}{m_e c S} \sum_{n, \mathbf{p}} \left[ (z - z_{nn}) \varphi_n(z)^2 f(E_{n, \mathbf{p}}) + \sum_{n' \neq n} \frac{p_y^2}{m_e} \varphi_n(z) \varphi_{n'}(z) z_{nn'} \frac{f_{n, \mathbf{p}} - f_{n', \mathbf{p}}}{E_{n, \mathbf{p}} - E_{n', \mathbf{p}}} \right] \quad (4.4)$$

Здесь  $\varphi_n(z)$  - поперечные волновые функции в отсутствие магнитного поля,  $\mathbf{p}$  - продольный импульс,  $E_{n, \mathbf{p}} = E_n + p^2/2m_e$  - энергия электрона в n-й подзоне поперечного квантования,  $f_{n, \mathbf{p}} \equiv f(E_{n, \mathbf{p}})$ .

В модели прямоугольной квантовой ямы (потенциал с бесконечными стенками:  $U(z) = 0$  при  $0 < z < d$ ,  $U(z) = \infty$  для  $z < 0$  и  $z > d$ ) выражение (4.4) может быть упрощено для  $T = 0$

$$j_y(E_F, 0; z) = \frac{e^2 B_0}{4\pi c d^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E_F - E_n}{E_n} \theta(E_F - E_n) \left[ (E_F + 3E_n) \times d(2z - d) \sin^2(\pi n z/d) - (E_F - E_n) n\pi z(z - d) \sin(2\pi n z/d) \right]. \quad (4.5)$$

Здесь  $E_F = k_F^2/2m_e = \mu(T = 0)$  - энергия Ферми,  $E_n = \pi^2 n^2/2m_e d^2$ .

Формула для тока при конечной температуре может быть получена из (4.5) с помощью соотношения

$$j_y(\mu, T; z) = \int dE j_y(E, 0; z) \left( -\frac{\partial f(E)}{\partial E} \right). \quad (4.6)$$

На рис. 10(а) изображено распределение тока в пленке с бесконечными стенками. Плотность тока антисимметрична относительно середины ямы и осциллирующим образом убывает по мере удаления от границ. Осцилляции отражают явление Фриделя, а именно, особенность восприимчивости на волновом векторе  $2k_F$ . Плотность тока меняет знак, так что термин "диамагнитный", строго говоря, относится только к полному поверхностному току.

В пределе низких температур затухание тока вглубь ямы медленное. Асимптотика плотности поверхностного тока в пределе  $k_F d/\pi \gg 1$  при  $z \ll d$  может быть

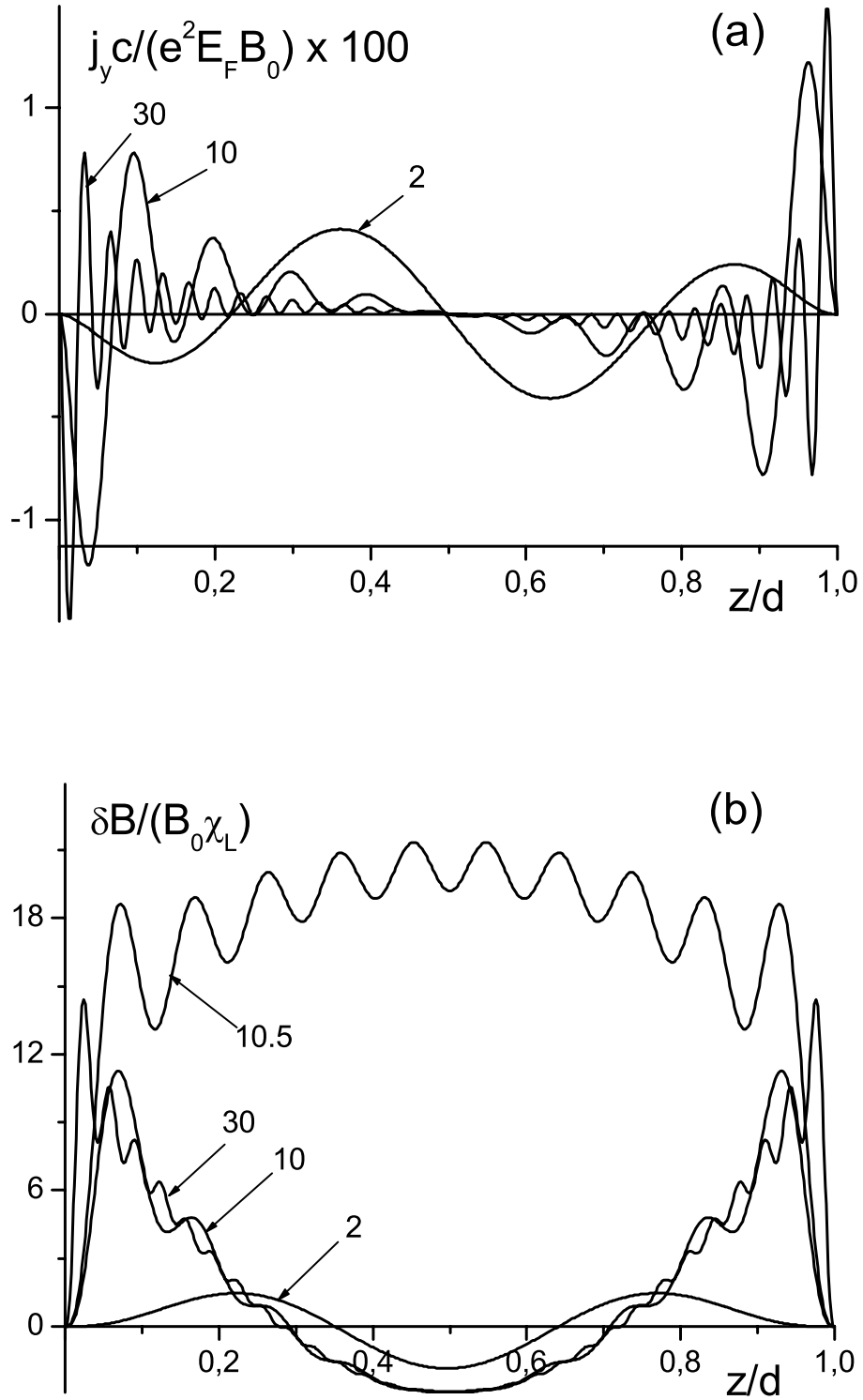


Рис. 10. Эволюция плотности тока (а) и магнитного поля (б) для  $T = 0$  с толщиной квантовой пленки. Величина  $k_F d / \pi$  обозначена на кривых (целая часть  $k_F d / \pi$  дает число заселенных подзон). Для  $k_F d / \pi = 2, 10, 30$  энергия Ферми совпадает с дном подзоны, для  $k_F d / \pi = 10.5$  она лежит между 10-й и 11-й подзонами.

найдена заменой суммы по  $n$  в (4.5) интегралом с помощью формулы суммирования Эйлера-Маклорена

$$\sum_{j=m}^n f(j) = \int_m^n dx f(x) + \frac{1}{2} [f(n) + f(m)] + \dots \quad (4.7)$$

В результате получаем

$$j_y = 3\chi_L c k_F B_0 \left( -\frac{\cos x}{x} + 3x^2 \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^5} dt \right), \quad (4.8)$$

$$\frac{\delta B}{B_0} = 4\pi\chi_L \left( 1 - \frac{3 \sin x}{2x} + \frac{3x^3}{2} \int_x^\infty \frac{\sin t}{t^5} dt \right) \quad (4.9)$$

Здесь  $\chi_L = -e^2 k_F / 12\pi^2 m_e c^2$  - магнитная восприимчивость Ландау при  $T = 0$ ,  $x = 2k_F z$ . Первые слагаемые в (4.8) и (4.9) представляют асимптотики в области  $z \gg \pi/k_F$ . В частности, постоянный вклад в  $\delta B/B_0$  в точности дает магнитную восприимчивость Ландау. Аналогичное поведение  $j_y$  и  $\delta B/B_0$  имеют при  $d - z \ll d$ .

При конечной температуре для  $k_F z \gg 1$  находим

$$\frac{\delta B}{B_0} = 4\pi\chi_L \left[ 1 - \frac{3\pi T \sin(2k_F z)}{4E_F \operatorname{sh}(z/l_T)} \right], \quad (4.10)$$

где  $l_T = k_F / (2\pi m_e T)$  - характерная длина затухания. Заметим, что примесное рассеяние также приводит к затуханию  $\delta B(z)$  на расстоянии длины свободного пробега от поверхности.

Выражения для приповерхностного тока (4.8) и магнитного поля (3.8) справедливы и в пределе нормального массивного металла, когда  $d \rightarrow \infty$ . При этом соотношение длины пробега и толщины образца не играет роли. Отметим, что поскольку рассмотрение ведется в пределе слабого магнитного поля, мы неявно используем малые параметры - отношения характерных длин в задаче и циклотронного радиуса. Для конечного магнитного поля в пределе нормального массивного металла формулы (4.8) и (4.9) остаются справедливыми вплоть до расстояний порядка циклотронного радиуса от границы.

Кроме осциллирующего с координатой поверхностного тока, на рис. 10(a) можно увидеть малую регулярную компоненту в плотности тока, которая линейно зависит от поперечной координаты. Асимптотически при  $k_F d/\pi \gg 1$  этот вклад имеет вид

$$-\frac{e^2 B_0 k_F}{12m_e c d^2} (z - d/2)(1 + 6\zeta(\zeta - 1)), \quad \zeta = k_F d/\pi - [k_F d/\pi]. \quad (4.11)$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа. Линейная компонента меньше, чем поверхностный ток в  $k_F d$  раз. Коэффициент  $(1 + 6\zeta(\zeta - 1))$  при линейном слагаемом осциллирует с химическим потенциалом, причем среднее от него по  $k_F$  или толщине обращается в ноль. (В пределе массивного металла такое усреднение может соответствовать усреднению по ансамблю образцов с неизбежным разбросом толщин.)

При конечной температуре линейное слагаемое равно

$$-\frac{e^2 T B_0}{\pi c d} (z - d/2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nk_F d)}{n \operatorname{sh}(nT/\theta)}, \quad (4.12)$$

где  $\theta = E_F(\pi k_F d)^{-1}$  - характеристическая температура, выше которой линейное слагаемое экспоненциально убывает.

Поправки к магнитному полю показаны на рис. 10(b). Линейная зависимость  $j_y$  от координаты создает параболический по координате вклад в магнитное поле, чувствительный к параметру  $\zeta$ .

Отметим, что линейное слагаемое в плотности тока и параболический вклад в магнитное поле связаны с орбитальным магнетизмом. В квантовой пленке орбитальный вклад в магнитную восприимчивость флуктуационно растет с шириной как  $k_F d$ , что соответствует росту параболического вклада в магнитное поле.

### §3 Двумерная полоса

Рассмотрим двумерные электроны, движение которых ограничено полосой  $0 < y < L_y$ ,  $0 < z < d$ ,  $d \ll L_y$ . Этому соответствует исключение  $x$ -й координаты из формул предыдущего раздела. Пусть магнитное поле  $\mathbf{B}$  также направлено вдоль оси  $x$ . Выражение для плотности тока (4.4) остается справедливым, если оставить суммирование только по  $n$  и импульсу  $p_y$ . В линейном приближении по  $B_0$  для модели прямоугольной ямы при нулевой температуре получаем вместо (4.5)

$$j_y(E_F, 0; z) = \frac{2e^2 B_0 k_F}{3mcd^2} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - E_n/E_F)^{1/2} \theta(E_F - E_n) \left[ (E_F/E_n + 2) \times \right. \\ \left. d(2z - d) \sin^2(\pi n z/d) - (E_F/E_n - 1) n \pi z(z - d) \sin(2\pi n z/d) \right]. \quad (4.13)$$

На рис. 11 приведена зависимость плотности тока и магнитного поля в полосе при  $T = 0$ .

Аналогично (4.8), находим для поверхностной плотности тока при  $k_F d/\pi \gg 1$ ,  $z \ll d$ :

$$j_y = 3\pi \chi_L^{2D} c k_F B_0 x^2 \left( \int_0^x \frac{J_2(t) dt}{t^2} - \frac{1}{3} \right) = 3\pi \chi_L^{2D} c k_F B_0 x^2 \int_x^{\infty} \frac{J_2(t) dt}{t^2}. \quad (4.14)$$

Здесь  $\chi_L^{2D} = -e^2/12\pi m c^2$  - магнитная восприимчивость Ландау для двумерного электронного газа при  $T = 0$ ,  $J_2(t)$  - функция Бесселя.

Выражение для плотности тока (4.14) имеет следующие асимптотики

$$j_y = 3\pi \chi_L^{2D} c k_F B_0 \begin{cases} \frac{x^2}{3} & \text{при } x \ll 1, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin(x - \pi/4) & \text{при } x \gg 1. \end{cases} \quad (4.15)$$

Затухание фриделевских осцилляций на большом расстоянии от границы оказывается более медленным, чем в трехмерном случае.

При конечной температуре для  $k_F z \gg 1$  находим

$$j_y = 3\pi \chi_L^{2D} c k_F B_0 \frac{\sin(2k_F z - \pi/4)}{\sqrt{\pi k_F z}} \frac{z/l_T}{\text{sh}(z/l_T)}. \quad (4.16)$$



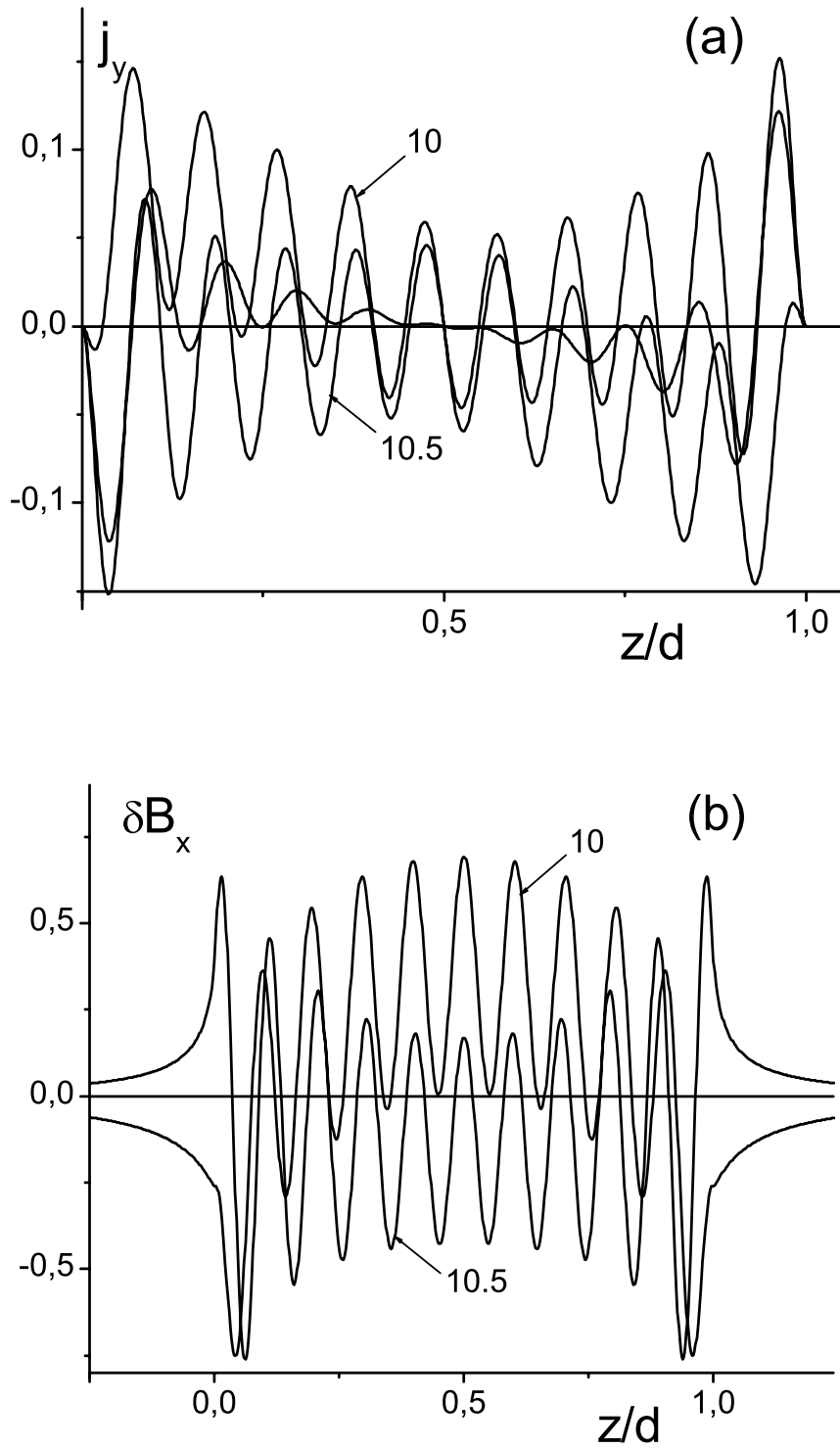


Рис. 11. Распределение плотности тока (а) (в единицах  $e^2 B_0 k_F / (m_e c)$ ), и магнитного поля (б) (в относительных единицах), в двумерной полосе при  $T = 0$ ,  $k_F d / \pi = 10, 10.5$ . Пунктирная кривая, приведенная для сравнения, соответствует безразмерной плотности тока в квантовой пленке при  $k_F d / \pi = 10$ . Видно, что осцилляции плотности тока в 2D случае затухают значительно медленнее, чем в 3D.

#### §4 Парамагнитный ток

Помимо диамагнитного тока, имеется также парамагнитный ток, обусловленный электронным спином. Этот вклад может быть найден из (4.1) с учетом спиновой части гамильтониана  $-g\mu_B B_0 \sigma_x/2$  и связанных со спином компонент оператора плотности тока  $\hat{\mathbf{j}}^{(sp)} = cg\mu_B \nabla \times (\boldsymbol{\sigma}\delta(z - \hat{z}))/S$ . Здесь  $g$  - электронный g-фактор,  $\mu_B$  - магнетон Бора,  $\sigma_i$  - матрицы Паули. В линейном приближении по  $B_0$  после элементарных вычислений находим для плотности парамагнитного тока

$$j_y^{(sp)} = \frac{g^2 \mu_B^2 c B_0}{2S} \sum_{n, \mathbf{p}} \left( -\frac{\partial f(E_{n\mathbf{p}})}{\partial E} \right) \frac{\partial \varphi_n^2(z)}{\partial z} \equiv \frac{g^2 \mu_B^2 c B_0}{4} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial z} n(z), \quad (4.17)$$

где  $n(z)$  - локальная двумерная или трехмерная концентрация электронов. Этот ток и соответствующее магнитное поле должны быть добавлены к диамагнитным вкладам, рассмотренным в предыдущих разделах. Отношение диамагнитного и парамагнитного вкладов зависит от g-фактора и, в принципе, может сильно меняться в различных материалах.

В частном случае трехмерной квантовой пленки с бесконечными стенками при  $T = 0$

$$j_y^{(sp)} = -\frac{g^2 \mu_B^2 m k_F^2 c B_0}{2\pi^2} \left( \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2} \right), \quad \delta B = \frac{g^2 \mu_B^2 m k_F B_0}{\pi} \left( 1 - \frac{\sin x}{x} \right). \quad (4.18)$$

Для двумерной полосы плотность парамагнитного тока имеет вид

$$j_y^{(sp)} = g^2 \mu_B^2 m k_F c B_0 J_1(x)/2. \quad (4.19)$$

#### §5 Роль примесей

Примесное рассеяние аналогично температуре приводит к размыванию осцилляторной плотности тока. В пределе слабого рассеяния ( $k_F l \ll 1$ ), рассеяние влияет на ток на расстояниях порядка длины свободного пробега  $l$  от границы. Следовательно, учет рассеяния имеет смысл для образцов с размером порядка или больше  $l$ . Такие

образцы должны быть шире чем  $1/k_F$ . Краевой ток можно найти, используя (4.1), в котором в гамильтониан системы в отсутствии магнитного поля  $\hat{\mathcal{H}}_0$  будет входит также потенциал примесей  $\mathcal{U}(\mathbf{r})$ . Примеси могут быть включены в рассмотрение на основе (4.2), где функции Грина (и их произведения) нужно усреднять по распределению примесей. В результате получается обычная диаграммная техника.

Ограничиваясь случаем  $\delta$ -примесей, находим, что единственный вклад в средний ток возникает от произведения усредненных функций Грина. В результате имеем

$$j_y(E_F, T, z) = \int dE j_y(E, 0, z) \text{Re} \left( -\frac{\partial f(E + i/2\tau)}{\partial E} \right), \quad (4.20)$$

где функция распределения Ферми продолжена на верхнюю комплексную полуплоскость. При нулевой температуре

$$\text{Re} \left( -\frac{\partial f(x + i/2\tau)}{\partial E} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{1/2\tau}{x^2 + 1/(2\tau)^2}. \quad (4.21)$$

Характерное расстояние от поверхности, при котором разрушается когерентность, равна длине свободного пробега  $l = v_F\tau$ . Выражения, аналогичные к (4.20-4.21), справедливы в любой большой квантовой системе. Далеко от границы осцилляции тока затухают как  $\exp(-z/l)$ .

## §6 Краевой ток в 2D системе в конечном магнитном поле

Рассмотрим задачу о плотности равновесного тока в полубесконечном образце  $x > 0$ ,  $-\infty < y < \infty$ , помещенном в магнитное поле  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ . Этот предел описывает ситуацию, когда характерные размеры системы превышают область, в которой течет краевой ток. В частности, этот предел реализуется, когда размер системы превышает циклотронный диаметр. Ответ применим к ограниченным областям произвольной формы, лишь бы локальная кривизна границы была меньше обратного циклотронного радиуса.

Выберем калибровку вектор-потенциала  $A_y = Bx$ . Состояния в полубесконечном образце в присутствии магнитного поля можно описывать продольным импульсом  $p$  и поперечным номером  $n$ :  $\psi_{n,p}(x)e^{ipy}$ . В случае, когда граница системы представляет жесткую стенку, волновые функции должны удовлетворять нулевому условию на границе  $x = 0$ . Эти волновые функции выражаются через функцию параболического цилиндра  $D_\nu(x)$ :

$$\psi_{n,p}(x) = CD_{\nu_n}(\sqrt{2}(x - x_p)/a), \quad C^2 \int_{-x_p}^{\infty} D_{\nu_n}(\sqrt{2}x/a) dx = 1. \quad (4.22)$$

Здесь  $a = \sqrt{c/eB}$  - магнитная длина,  $x_p = -pa^2$ . Граничное условие  $D_{\nu_n}(-\sqrt{2}pa) = 0$  определяет уровни энергии  $E_{n,p} = \omega(\nu_n(p) + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ ,  $\omega = eB/m_e c$ ,  $m_e$  - эффективная масса электрона.

Плотность тока имеет вид

$$j_y(x) = \frac{j_0}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dpa [(x_p - x) \psi_{n,p}^2(x) (f_+ + f_-) + \frac{gm_e}{2m_0} (f_- - f_+) \frac{a^2 \partial \psi_{n,p}^2(x)}{\partial x}], \quad (4.23)$$

где  $j_0 = e\omega/a = e/(m_e a^3)$  - характерная плотность тока, создаваемая одним электроном на нижнем уровне Ландау в магнитном поле,  $f_{\pm} = f(E_n(p) \pm g\mu_B B/2)$ ,  $f(E) = (\exp((E - \mu)/T) + 1)^{-1}$  - функция распределения Ферми ( $\mu$ ,  $T$  - химический потенциал и температура),  $g$  -  $g$ -фактор. Выражение (4.23) содержит два вклада, возникающих при усреднении орбитальной и спиновой частей оператора плотности тока (первая и вторая строки, соответственно). В дальнейшем мы будем пренебрегать спиновым расщеплением, считая  $g$ -фактор малым.

Результаты вычисления краевого тока согласно формулам (4.22) и (4.23) представлены на рисунках 12-13.

Обсудим поведение плотности тока при низкой температуре. Во-первых, на-

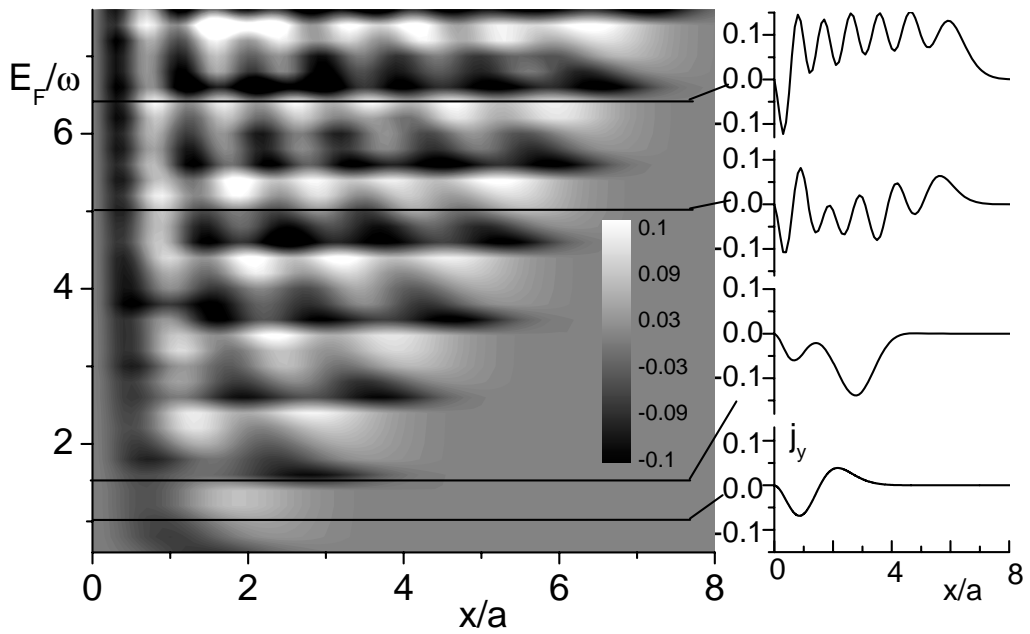


Рис. 12. Слева: рельеф плотности краевого тока в единицах  $j_0$  при конечном магнитном поле как функция расстояния до границы и энергии Ферми. Серый цвет соответствует нулевой плотности тока, белый - положительной, черный - отрицательной. Справа: зависимость плотности тока от расстояния при избранных значениях энергии Ферми (отмечены прямыми на левом рисунке).

правление тока определяется векторным произведением нормали на магнитное поле. Однако, это не означает постоянства знака плотности поверхностного тока. Действительно, пусть заполнен всего один уровень Ландау. Рассмотрим состояния, расположенные вдали от границы. Эти состояния не возмущаются стенкой. Плотность тока, даваемая одним состоянием с заданным  $p$  антисимметрична относительно точки  $x_p$ . По мере приближения к границе уровень выталкивается вверх. Заполненные уровни, лежащие под уровнем Ферми, имеют близкие волновые функции. Усреднение по импульсу компенсирует плотность тока вдали от точки пересечения уровня энергии с уровнем Ферми, в то время как вблизи нее остается некомпенсированный вклад постоянного знака (в данном случае, положительного). По мере приближения уровня Ферми к нижнему уровню Ландау, краевое состояние все более удаляется от границы по закону  $\ln^{1/2}(\mu/\omega - 1/2)$  и становится все более идеальным. При повышении уровня Ферми волновая функция начинает искажаться за счет границы, положительная часть вклада в среднюю плотность тока подавляется, но появляется отрицательный вклад - график плотности тока приобретает отрицательный минимум.

По мере пересечения следующих уровней Ландау к плотности тока добавляются новые вклады от этих уровней. Максимумы этих вкладов вначале расположены на большом расстоянии от границы, затем приближаются к ней, сливаясь вместе с вкладами от нижележащих состояний. Чем выше состояние, тем шире занимаемая им область и тем больше осцилляций испытывает соответствующий вклад в плотность тока. Когда заполненных уровней становится много, то краевые вклады от разных уровней Ландау сливаются в фриделевские осцилляции поверхностной плотности тока, рассмотренные нами в параграфах 2 и 3. Однако, в отличие от рассмотренного ранее предела слабого магнитного поля (линейный отклик), число осцилляций оказывается ограниченным - поверхностный ток распределен на толщине порядка

циклотронного диаметра  $2r_c = 2v_F/\omega$ , где  $v_F$  - фермиевская скорость. Внутри этой области плотность тока осциллирует, снаружи экспоненциально затухает. Число осцилляций определяется числом заполненных уровней Ландау  $N = [\mu/\omega - 1/2]$ , где [...] представляют целую часть. В области  $x \ll 2r_c$  по магнитному полю можно разлагать, влияние магнитного поля на плотность тока сводится к множителю, и поверхностная плотность тока определяется выражением (4.15) из §3.

На пространственные осцилляции накладывается плавная зависимость от координаты  $x$ . Этот плавный вклад определяет полный краевой ток (интеграл по координате), испытывающий знакопеременные шубниковские осцилляции как функция магнитного поля (рис. 13). Плавный вклад в пределе слабого поля переходит в изученный в §2 вклад, линейно зависящий от расстояния, а осцилляции распространяются на бесконечное расстояние от границы, затухая степенным образом.

При повышении температуры (см. рис. 14) осцилляции плотности тока подавляются, причем сильнее на больших расстояниях от поверхности. Это происходит из-за тепловой расфазировки электронов вблизи поверхности Ферми на характерной длине  $l_T = k_F/(2\pi m_e T)$ . При конечном магнитном поле возникает конкуренция двух длин, ограничивающих осцилляции: циклотронного диаметра и  $l_T$  (работает меньшая из длин). Плавный вклад подавляется температурой и рассеянием так же, как и поверхностные осцилляции на большом расстоянии. Так стыкуются результаты, полученные при малых и больших магнитных полях.

Знакопеременные осцилляции полного краевого тока кажутся на первый взгляд странными, если принять во внимание, что при большой энергии Ферми полный ток должен быть диамагнитным и описываться формулой

$$J = -\frac{j_0 a}{12\pi}.$$

Однако, в пределе большой системы полная величина краевого тока  $J$  непо-

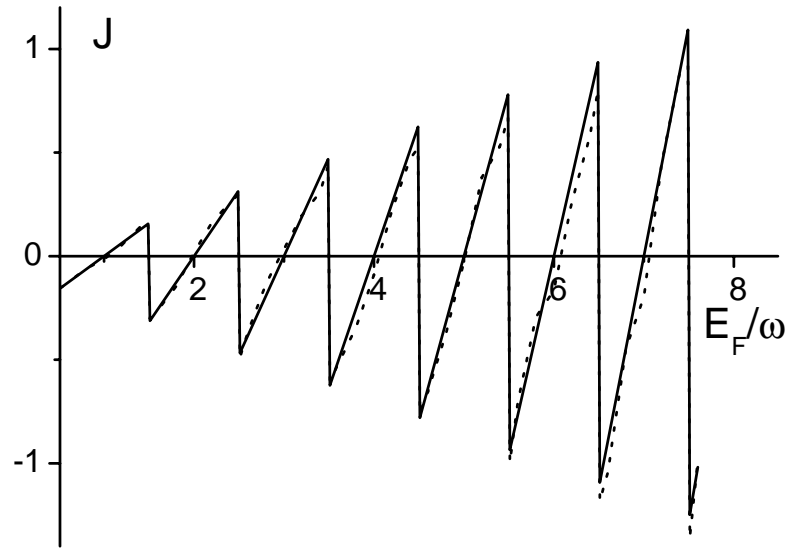


Рис. 13. Полный краевой ток как функция магнитного поля при  $T = 0$ .

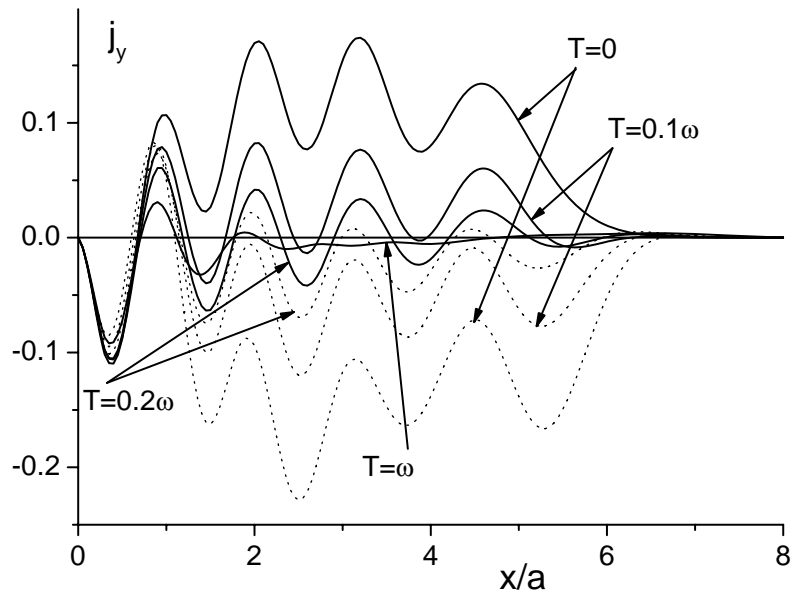


Рис. 14. Зависимость плотности краевого тока от температуры. Уровень Ферми находится вблизи 5 - го уровня Ландау. Сплошные кривые соответствуют  $E_F = 4.4\omega$ , пунктирные -  $E_F = 4.6\omega$ ; в этих случаях при низких температурах интегральный ток направлен в разные стороны. В области температур  $T \gg |E_F - 4.5\omega|$  кривые сливаются. При  $T \gg \omega$  плотность тока перестает зависеть от магнитного поля.



средственно связана с магнитным моментом системы соотношением  $M = JS/c$ , где  $S$  - площадь системы. В то же время полный момент при  $T = 0$  может быть найден с помощью  $\Omega$ -потенциала системы [79]:

$$M = -\frac{\partial\Omega}{\partial B} = \frac{j_0 a S}{\pi c} \sum_{n=0} \left[ \frac{\mu}{\omega} - (2n+1) \right] \theta \left( \mu - \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega \right). \quad (4.24)$$

Это выражение осциллирует с изменением  $\mu$ , испытывая скачки при пересечении уровнем Ферми уровней Ландау. Другим свойством этой формулы является обращение момента в ноль, когда уровень Ферми лежит посередине между уровнями Ландау.

С другой стороны, краевые токи в неравновесных условиях связаны с квантованием сопротивления микроконтакта в режиме адиабатического транспорта при квантовом эффекте Холла. Полный ток в состоянии  $(n, p)$  дается выражением

$$j_{n,p} = -e \frac{\partial E_{n,p}}{\partial p}. \quad (4.25)$$

Поскольку состояния локализованы по координате  $x$ , краевой ток определяется состояниями с  $x_p$ , лежащими вблизи границы. По мере увеличения  $x_p$  парциальный ток  $j_{n,p}$  экспоненциально убывает, следовательно, суммируя токи по всем состояниям, мы получим конечную величину. Именно такие соображения определяют квантование сопротивления микроконтакта.

Полный краевой ток в полубесконечной задаче при  $T = 0$  имеет вид

$$\begin{aligned} J &= -e \sum_{n,p} \frac{\partial E_{n,p}}{\partial p} \theta(\mu - E_n(p)) \\ &= -\frac{j_0 a}{\pi} \sum_{n=0} \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu}{\omega} \right] \theta \left( \mu - \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega \right). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ток через структуру выражается через разность краевых токов (4.26), соответствующих химическим потенциалам краев  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Разность  $\mu_1 - \mu_2$  в неравновесной задаче совпадает с разностью потенциалов  $V$ , приложенной к концам микроструктуры. Отсюда следует, что неравновесный ток  $J = e^2 V N / h$ . В равновесных условиях

химические потенциалы краев равны, но краевой ток от одного края должен определяться тем же выражением, что и в отсутствие равновесия. Однако, понимаемая так формула (4.26) противоречит формуле (4.24) для момента, да и численным расчетам.

Чтобы выяснить природу ошибки, найдем вклад в плотность тока в безграничной задаче от состояний Ландау с импульсом лежащим между  $p_1$  и  $p_2$ , причем  $|x_{p_1} - x_{p_2}| \gg a$

$$\begin{aligned} j_y(p_1, p_2; x) &= -\frac{j_0}{\pi} \sum_n \int_{p_1}^{p_2} (x - x_p) \varphi_n^2 \left( \frac{x - x_p}{a} \right) dp \\ &= -\frac{j_0}{\pi} \sum_n \left( \int_{-\infty}^{p_2} dp \dots - \int_{-\infty}^{p_1} dp \dots \right), \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $\varphi_n(\xi)$  - безразмерные нормированные функции гармонического осциллятора. Вклады от областей вблизи точек  $x_1$  и  $x_2$  независимы и разнесены в пространстве. Таким образом, хотя полный ток в *каждом* состоянии Ландау обращается в ноль, при интегрировании по импульсу получаются два краевых тока. Когда производилось интегрирование по всем импульсам в формуле (4.26), то правильный предел следовало вычислять, ограничивая вначале интегрирование по импульсу снизу некоторой точкой, а затем устремляя ее к  $-\infty$ . Получающийся при этом вклад в полный ток от плотности тока вблизи точки  $x_1$ , соответствующей  $p_1$ , локализован вдали от границы и его следует вычитать из полного поверхностного тока.

Эту часть тока найдем, интегрируя  $j_y(p_1, p_2; x)$  по  $x$  вблизи  $x_p$  по области большой по сравнению с характерным размером волновой функции

$$\int_{x_p - \Delta}^{x_p + \Delta} j_y(p_1, p_2; x) dx = \frac{j_0 a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta \left( \mu - \left( n + \frac{1}{2} \right) \omega \right). \quad (4.28)$$

Здесь  $\Delta \gg a\sqrt{N}$ . Вычитая величину (4.28) из (4.26) получаем правильное выражение для краевого тока  $J = Mc/S$  с  $M$  из формулы (4.24). Численный расчет (см. рис. 13) согласуется с этой формулой.

## §7 ДИАМАГНИТНЫЕ ТОКИ В КВАНТОВОМ ДИСКЕ И КВАНТОВОМ КОЛЬЦЕ

Рассмотрим распределение плотности диамагнитного тока и магнитного поля в системах с круговой геометрией, а именно, в плоском кольце с внутренним и внешним радиусами  $r$  и  $R$ , соответственно. Круговой диск является частным случаем кольца при  $r = 0$ . Будем считать магнитное поле направленным вдоль оси системы  $z$ , а вектор-потенциал имеющим азимутальную калибровку  $A_\phi = B\rho/2$  ( $\rho, \phi$ -полярные координаты). Волновая функция с проекцией момента  $m$  имеет вид  $\Psi(\rho, \phi) = e^{im\phi} \times \psi_{nm}(\xi)/\sqrt{2\pi}$ , где  $\xi = (\rho/a)^2/2$ , а радиальная функция удовлетворяет уравнению

$$\xi\psi_{nm}'' + \psi_{nm}' + \left(-\frac{\xi}{4} + \frac{E_{n,m}}{\omega} - \frac{m}{2} - \frac{m^2}{4\xi}\right)\psi_{nm} = 0, \quad (4.29)$$

нулевым условиям на границах и нормировке  $\int |\psi_{nm}(\xi)|^2 d\xi = 1$ . Ток имеет только азимутальную компоненту  $j_\phi$ :

$$j_\phi(\xi) = -j_0 \sqrt{\frac{2}{\xi}} \sum_{n,m} |\psi_{nm}(\xi)|^2 (m + \xi) f(E_{n,m}). \quad (4.30)$$

В пределе слабого магнитного поля плотность тока можно выразить через волновые функции в отсутствие магнитного поля

$$j_\phi(\rho) = -j_0 a \rho \sum_{n,m} \left[ f(E_{n,m}^0) + \frac{m^2}{m_e \rho^2} \frac{\partial f}{\partial E_{n,m}^0} \right] |\psi_{nm}^0(\rho)|^2, \quad (4.31)$$

$\psi_{nm}^0(\rho)$  и  $E_{n,m}^0$  - невозмущенные волновые функции и уровни энергии. Суммирование выполняется по поперечным  $n, m$  квантовым числам.

В частном случае диска радиуса  $R$  в отсутствие магнитного поля волновые функции  $\psi_{nm}^0(\rho)$  имеют вид

$$\psi_{nm}^0(\rho) = \frac{\sqrt{2} J_m(\lambda_{n,m} \rho / R)}{R J_{m+1}(\lambda_{n,m})}, \quad (4.32)$$

где  $\lambda_{n,m}$  -  $n$ -й нуль функции Бесселя  $J_m(x)$  и уровни энергии  $E_{n,m}^0 = \lambda_{n,m}^2 / (2m_e R^2)$ .

Первое и второе слагаемые в (4.31) имеют отрицательный и положительный знаки и соответствуют диа- и парамагнитным вкладам в восприимчивость системы. При

низкой температуре парамагнитный вклад отличен от нуля, только если химический потенциал совпадает с одним из уровней системы, в то время как диамагнитный вклад постоянен, если  $\mu$  лежит между уровнями. Дельтаобразный характер парамагнитного вклада определяется тем, что система с азимутальной симметрией имеет двукратное вырождение по знаку  $m$ . Это вырождение снимается достаточно слабым магнитным полем, что становится причиной больших положительных (парамагнитных) пиков в восприимчивости в низкотемпературном пределе. Диамагнитный вклад происходит из поправок первого порядка от слагаемого  $e^2 A^2 / 2m_e c^2 = (eB\rho/c)^2 / 8m_e$  в гамильтониане. Помимо осциллирующего с  $\rho$  множителя, плотность тока пропорциональна радиусу, что соответствует квадратичному возрастанию восприимчивости с размером системы.

На рис. 15а представлено распределение плотности тока в диске в частном случае слабого магнитного поля, найденное с помощью (4.31, 4.32). На рис. 16а и 16б приведены результаты расчета плотности тока в квантовом кольце в сильном магнитном поле, найденные с помощью решения уравнения (4.29) и формулы для плотности тока (4.30).

Отметим, что плотность тока осциллирует по радиусу с периодом  $\pi/k_F$ , в то время, как фаза осцилляций на границах является фиксированной. В случае пластины и полосы зависимость плотности тока от поперечной координаты была антисимметричной. В кольце радиальная зависимость приближается к антисимметричной относительно окружности радиуса  $(R - r)/2$  по мере того, как кольцо становится более узким. Для больших  $E_F/\omega$  и  $k_F(R - r)$  амплитуда радиальных осцилляций затухает по мере увеличения расстояния от границ. Этот вклад представляет краевой ток. Кроме радиальных осцилляций, азимутальный ток имеет регулярную зависимость, близкую к линейной. Наклон этой зависимости и знак наклона чувствительны

к величине магнитного поля. В сильном магнитном поле плотность тока осциллирует также и с магнитным полем.

Наличие краевого тока приводит к слабому изменению магнитного поля, действующего на двумерную систему. Неоднородно распределенный ток создает неоднородно распределенное магнитное поле. Добавка к  $z$ -компоненте магнитного поля в плоскости диска ( $z = 0$ ) описывается выражением

$$\delta B(\rho) = \frac{1}{c} \int_0^R d\rho' j_\phi(\rho') \frac{2}{\rho + \rho'} \left[ K(k) + \frac{\rho' + \rho}{\rho' - \rho} E(k) \right], \quad (4.33)$$

$$k = \frac{4\rho'\rho}{(\rho' + \rho)^2},$$

где  $K(k)$  и  $E(k)$  - эллиптические интегралы. Магнитное поле в центре диска может быть выражено через элементарные функции:

$$\delta B(0) = \frac{2\pi}{c} \int_0^R \frac{j_\phi(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (4.34)$$

В первом приближении для достаточно большого диска плотность электронов можно считать однородной. В этом случае поправка к внешнему магнитному полю в центре диска в диамагнитном состоянии диска, определяется простой формулой  $\delta B = B(e^2/m_e c^2)\pi n R$ , где  $n$ -поверхностная концентрация электронов. Если увеличивать размер диска, сохраняя концентрацию, то поправка к магнитному полю растет пропорционально радиусу диска. Для  $GaAs$  диска с поверхностной концентрацией электронов  $10^{12}$  см $^{-2}$  и радиусом  $R \sim 10^{-5}$  см отношение  $\delta B/B \sim 1.2 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 15b изображена величина  $\delta B(\rho)$ , рассчитанная согласно формуле (4.33) в пределе слабого внешнего магнитного поля. Следует отметить, что при  $T = 0$  величина  $\delta B$  растет с размером системы. Этот рост ограничен использованным нами пренебрежением рассеянием электронов: расстояние между уровнями системы должно быть больше затухания электронных состояний. С ростом размера системы расстояние между уровнями становится сравнимым с температурой или затуханием

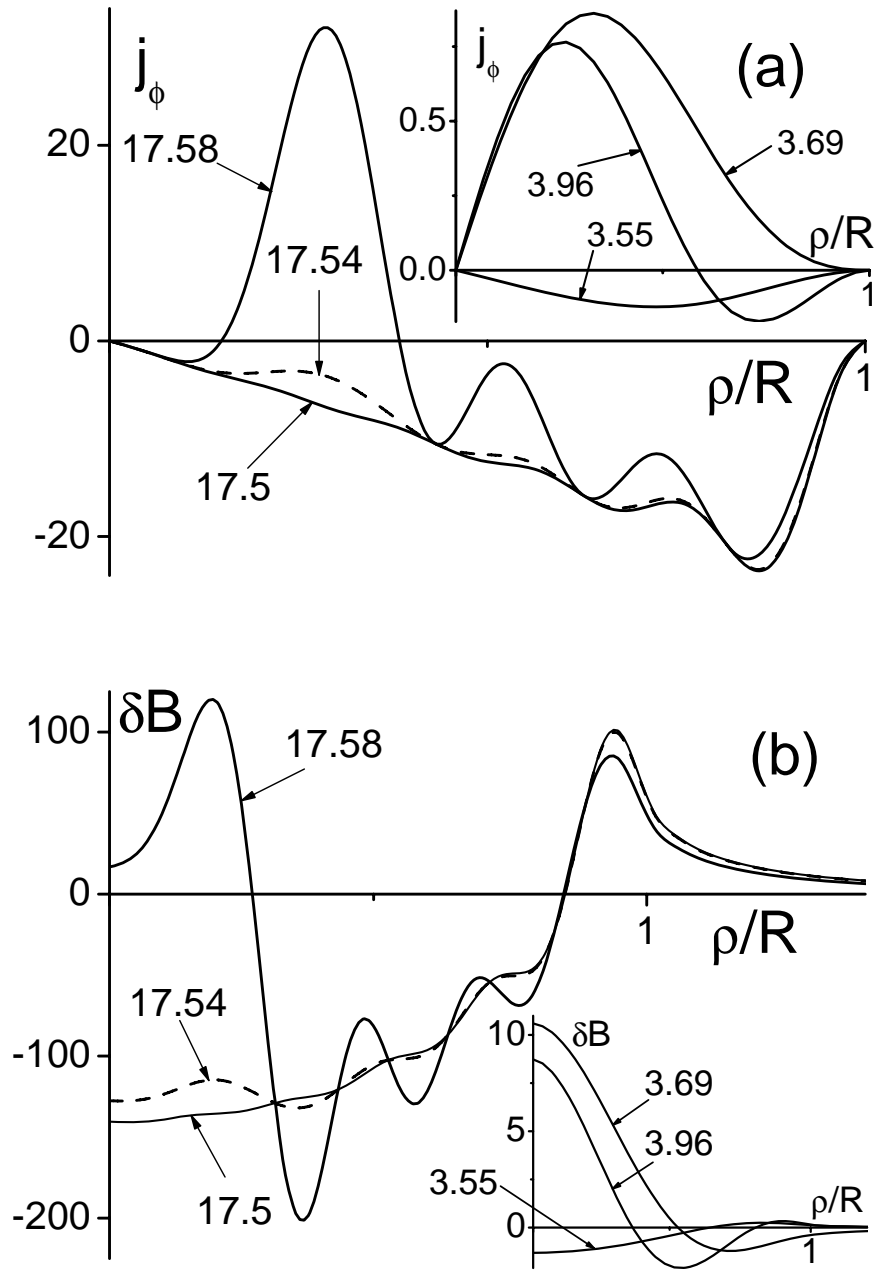


Рис. 15. а) Эволюция плотности тока в диске с параметром  $k_F R$  (отмечен на кривых). Внешнее магнитное поле считается слабым,  $T = 0.5/(2m_e R^2)$ . Плотность тока измеряется в единицах  $j_0(a/R)$ . При  $k_F R \approx 3.7$  уровень Ферми находится в окрестности уровня поперечного квантования с  $E_{1,1}^0 = 14.7/(2m_e R^2)$ , при  $k_F R \approx 17.5$  - в окрестности уровня  $E_{4,4}^0 = 310.3/(2m_e R^2)$ . По мере прохождения уровнем Ферми уровней квантования диамагнитная и парамагнитная зависимости чередуются. б) Распределение наведенного магнитного поля в единицах  $B(e^2/m_e c^2)/R$ .

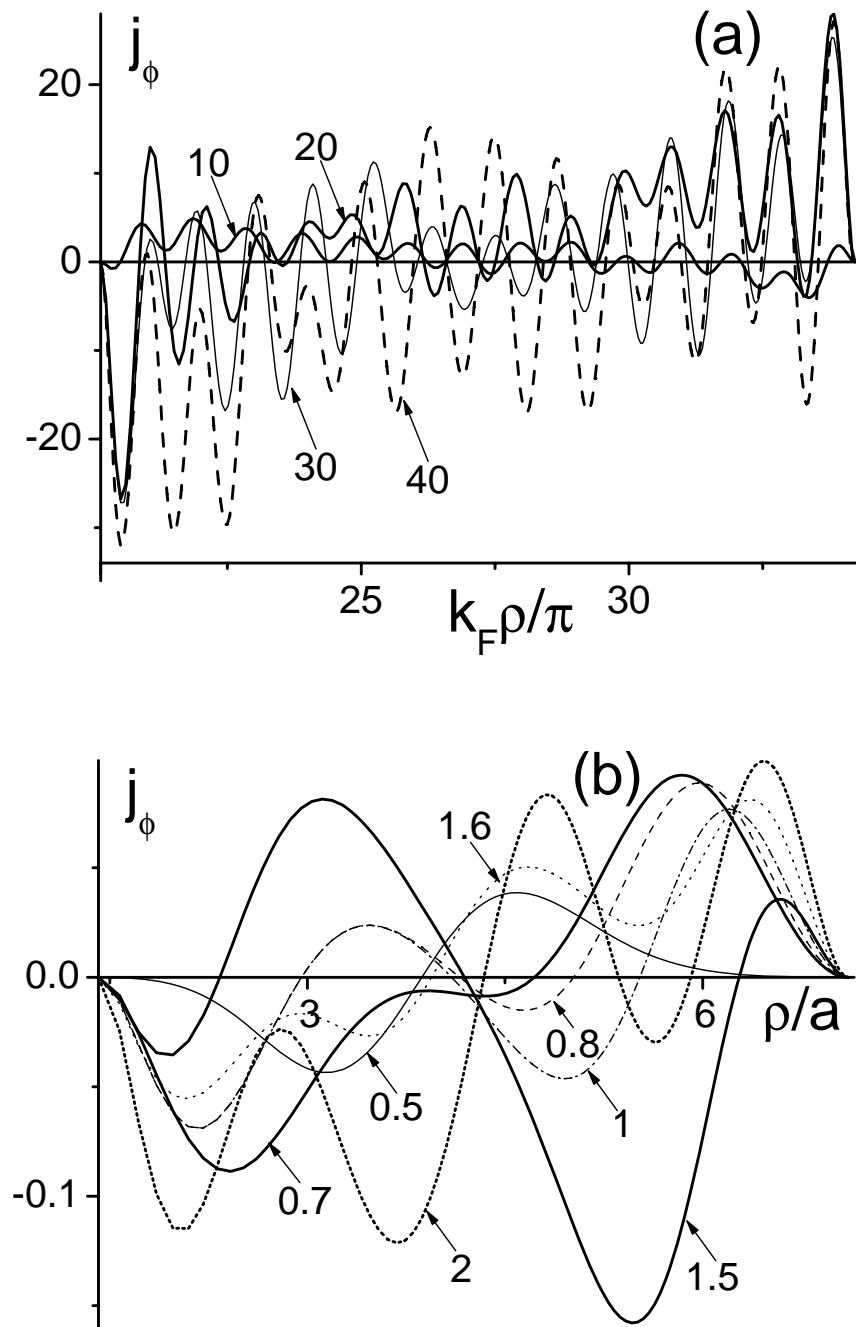


Рис. 16. Распределение плотности тока в квантовых кольцах в сильном магнитном поле. Величины  $E_F/\omega$  обозначены на кривых. а): Эволюция плотности тока (в единицах  $ek_F^3/m_e = j_0(k_F a)^3$ ) с магнитным полем  $B$  при фиксированном  $E_F$ . Волновой вектор Ферми выбран равным  $k_F = 6.4/r$ , а радиусы относятся как  $R : r = 1.7$ . б): Эволюция плотности тока (в единицах  $j_0$ ) с  $E_F$  при фиксированном  $B$ . Выбраны соотношения параметров  $r : a = 1.4$ ,  $R : a = 7.1$ .

и поправка к внешнему полю перестает зависеть от размера. Для диска с радиусом  $10^{-5}$  см среднее расстояние между уровнями энергии  $\Delta E = 1/(m_e R^2) \sim 1K$  и условие  $T < \Delta E$  легко выполнимо.

Заметим, что пространственная неоднородность магнитного поля может сказаться на любых откликах, резко зависящих от магнитного поля, в частности, на шубниковских или геометрических осцилляциях магнетосопротивления (магнитной фокусировке в случае малых образцов). Можно ожидать, что неоднородность приведет к замытию резких особенностей в этих величинах. Другие варианты могут базироваться на чувствительности ядерных спинов к локальному магнитному полю. Примеси, обладающие ядерными спинами, размещенные в определенных атомных плоскостях, могут выступать в роли измерителя локальных магнитных полей. Можно предложить использование как постоянного во времени поля для сдвига положения линии ЯМР, так и переменного магнитного поля для возбуждения переходов. Переменное во времени и неоднородное магнитное поле можно создавать изменением волновых функций при помощи, например, полевого электрода. В качестве другого способа создания переменного магнитного поля можно предложить периодическое изменение температуры электронного газа за счет переменного тянущего напряжения (повышение температуры подавляет фриделевские осцилляции, меняя  $\delta B$ ).

## §8 Основные результаты и выводы главы

Получены аналитические выражения для распределения диа- и парамагнитного тока и наведенного магнитного поля в квантовой пленке и квантовой полосе в пределе слабого внешнего магнитного поля. Найдены аналогичные формулы при конечной температуре.

Численно изучено распределение краевого тока в случае полуплоскости в ко-



нечном магнитном поле.

Исследовано распределение диамагнитного тока в квантовом диске и квантовом кольце конечной ширины. Рассмотрены случаи слабого и сильного внешнего поля. В случае диска найдено распределение магнитного поля.

Показано, что плотность тока испытывает затухающие вдали от границ пространственные осцилляции, связанные с фермиевской длиной волны электронов. Помимо пространственных осцилляций ток, содержит компоненту, плавно меняющуюся с расстоянием, но осцилляционно зависящую от положения уровня Ферми относительно уровней Ландау.

Исследован переход от классических к квантующим магнитным полям. Показано, что увеличение магнитного поля приводит к сужению области, занятой токами. Изучено подавление осцилляций за счет температуры и примесного рассеяния.

## Заключение

В заключение перечислим основные результаты, полученные в работе.

1. Получены квантовые поправки к проводимости  $2D$  системы, обусловленные наличием антиточек, в том числе, в присутствии магнитного поля, перпендикулярного плоскости системы. В приближении малой плотности антиточек исследованы пределы антиточек малого и большого размеров. Показано, что вклады в магнетопроводимость, связанные с наличием антиточек малого радиуса, в зависимости от магнитного поля меняют свой знак. В случае антиточек большого радиуса вклады антиточек в магнетопроводимость отрицательны и связаны с уменьшением доли траекторий с самопересечением при появлении антиточек.
2. Изучены осцилляции Ааронова-Бома кондактанса мезоскопического кольца в нестационарном магнитном поле с потоком  $\Phi(t) = \dot{\Phi}t$ . Рассмотрено влияние туннельных контактов на кондактанс кольца в пределе слабого туннелирования. Показано, что квантовые поправки состоят из периодических пиков. В случае быстрого изменения магнитного поля, когда характерное время изменения магнитного поля  $\tau_0$  ( $\tau_0 = \Phi_0/\dot{\Phi}$ ) меньше времени срыва фазы электронов  $\tau_\varphi$  пики имеют асимметричную форму.
3. Разработан метод расчета реберного вклада в энергию электронного газа в ограниченных микрокристаллах. Получено аналитическое выражение для поверхностной и реберной энергии газа свободных электронов с изотропным квадратичным энергетическим спектром на идеальной поверхности ограниченного микрокристалла. Эта формула обобщена на случай анизотропной эффективной массы и произвольной ориентации двугранного угла. Изучена размерная зависимость осциллирующего вклада в  $\Omega$ -потенциал, и влияние на него примесного рассеяния

и конечной температуры.

4. Получены аналитические выражения для распределения диа- и парамагнитного тока и наведенного магнитного поля в квантовой пленке и квантовой полосе в пределе слабого внешнего магнитного поля. Показано, что плотность тока осциллирует как функция расстояния до границ. В пределе низких температур в толстой пленке или полосе распределение диамагнитного тока состоит из поверхностного вклада, осцилляции которого степенным образом затухают от границ, и добавки, линейно зависящей от поперечной координаты. При конечной температуре или включении рассеяния на примесях поверхностный ток начинает затухать экспоненциально от расстояния, а линейные добавки подавляются.

Численно изучено распределение краевого тока в случае полуплоскости в конечном магнитном поле. Показано, что краевые токи у границы полуплоскости испытывают затухающие вдали от границы пространственные осцилляции, связанные с фермиевской длиной волны электронов. В конечном магнитном поле ток оказывается локализованным в приграничной области размером в циклотронный диаметр, вне этой области падает экспоненциально. Помимо осцилляций, плотность тока содержит компоненту, плавно меняющуюся с расстоянием, но осцилляционно зависящую от положения уровня Ферми относительно уровней Ландау. Изучено подавление осцилляций за счет температуры.

Исследовано распределение диамагнитного тока в квантовом диске и квантовом кольце конечной ширины. Рассмотрены случаи слабого и сильного внешнего поля. Случай диска рассмотрен в приближении линейного отклика по внешнему магнитному полю; найдено также распределение магнитного поля. Показано, что в системах с круговой симметрией распределение тока существенно зависит от положения энергии Ферми относительно уровней системы.

## Литература

- [1] P. A. Lee, T. V. Ramakrishnan. *Disordered electronic systems*. Rev. Mod. Phys. **57**, 287-337(1985).
- [2] P. A. Lee, A. D. Stone, and H. Fukuyama. *Universal conductance fluctuations in metals: Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field*. Phys. Rev. B **35**, 1039-1070 (1987).
- [3] A. Benoit, C. P. Umbach, R. B. Laibowitz, and R. A. Webb. *Length-Independent Voltage Fluctuations in Small Devices*. Phys. Rev. Lett. **58**, 2343-2346(1987).
- [4] W. J. Skocpol, P. M. Mankiewich, R. E. Howard, L. D. Jackel, D. M. Tennant, and A. D. Stone. *Nonlocal Potential Measurements of Quantum Conductors*. Phys. Rev. Lett. **58**, 2347-2350(1987).
- [5] Г. М. Гусев, В. Т. Долгополов, З. Д. Квон, А. А. Шашкин, В. М. Кудряшов, Л. В. Литвин, Ю. В. Настаушев. *Магнетоосцилляции в двумерной электронной системе с периодическим потенциалом антиточек*. Письма в ЖЭТФ **54**, 369-372(1991).
- [6] K. Ensslin and P. Petroff. *Magnetotransport thorough antidot lattice in GaAs – Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As heterostructures*. Phys. Rev. B **41**, 12307-12310(1990).
- [7] D. Weiss, M. L. Roukes, A. Menschig, P. Grambow, K. von Klitzing and D. Weimann. *Electron pinball, commensurate orbits in a periodic array of scatterers*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2790-2793(1991).
- [8] Э. М. Баскин, Г. М. Гусев, З. Д. Квон, А. Г. Погосов, М. В. Энтин. *Стохастическая динамика двумерных электронов в периодической решетке антиточек*. Письма в ЖЭТФ **55**, 649-652(1992).

- [9] Э. М. Баскин, А. Г. Погосов, М. В. Энтин. *Классическая хаотическая динамика двумерных электронов в периодической решетке антиточек*. ЖЭТФ **110**, 2061-2086(1996).
- [10] G. M. Gusev, P. Basmaji, Z. D. Kvon, L. V. Litvin, Yu. V. Nastaushev, A. I. Toropov. *Negative magnetoresistance and anomalous diffusion of two-dimensional electrons in a disordered array of antidots*. Surface Science **305**, 443-447(1994).
- [11] Г. М. Гусев, З. Д. Квон, Л. В. Литвин, Ю. В. Настаушев, А. К. Калагин, А. И. Торопов. *Осцилляции Ааронова-Бома в двумерном электронном газе с периодической решеткой рассеивателей*. Письма в ЖЭТФ **55**, 129-132(1992).
- [12] F. Nihey and K. Nakamura. *Aharonov-Bohm effect in antidot structures*. Physica B **184**, 398-402(1993).
- [13] D. Weiss, K. Richter, A. Menshig, R. Bergmann, H. Schweizer, K. von Klitzing, and G. Weinmann. *Quantized periodic orbits in large antidot arrays*. Phys. Rev. Lett. **70**, 4118-4121(1993).
- [14] Л. П. Горьков, А. И. Ларкин и Д. Е. Хмельницкий. *Проводимость частицы в двумерном случайном поле*. Письма в ЖЭТФ **30**, 248-252(1979).
- [15] D. J. Thouless. *Maximum Metallic Resistance in Thin Wires*. Phys. Rev. Lett. **39**, 1167-1169(1977).
- [16] P. W. Anderson, E. Abrahams, and R. Ramakrishnan. *Possible Explanation of Nonlinear Conductivity in Thin-Film Metal Wires*. Phys. Rev. Lett. **43**, 718-720(1979).

- [17] B. L. Altshuler, A. G. Aronov, D. E. Khmelnitskii, and A. I. Larkin, *Quantum Theory of Solids*, ed. I. M. Lifshitz. Moscow: Mir, 1982.
- [18] B. L. Altshuler, D. E. Khmelnitsky, A. I. Larkin, and P. A. Lee. *Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas*. Phys. Rev. **B22**, 5142-5153(1980).
- [19] A. Pouydebasque, A. G. Pogosov, M. V. Budantsev, A. E. Plotnikov, and A. I. Toropov, D. K. Maude, J. C. Portal. *Negative magnetoresistance due to ballistic weak localization in a dense hexagonal lattice of antidots*. Phys. Rev. **B64**, 245306-1-245306-7(2001).
- [20] I. L. Aleiner, A. I. Larkin. *Divergence of classical trajectories and weak localization*. Phys. Rev. **B54**, 14423-14444(1980).
- [21] Г. Бейтмен и А. Эрдейи. *Высшие трансцендентные функции*, т.1. Москва: Наука, (1965).
- [22] М. Абрамовиц и И. Стиган. *Справочник по специальным функциям*. Москва: Наука, 321(1979).
- [23] Б.Л.Альтшулер, А.Г.Аронов, Б.З.Спивак. *Эффект Ааронова-Бома в неупорядоченных проводниках*. Письма в ЖЭТФ, **33**, вып. 2, 101-103(1981).
- [24] Д. Ю. Шарвин, Ю. В. Шарвин. *Квантование магнитного потока в цилиндрической пленке из нормального металла*. Письма в ЖЭТФ **34**, 285(1981).
- [25] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal, P. Gandit. *Magnetic Flux Quantization in the Weak-Localization Regime of a Nonsuperconducting Metal*. Phys. Rev. Lett. **53**, 718-721 (1984).

- [26] J. B. Pieper, J. C. Price. *Frequency dependence of  $h/e$  conductance oscillations in mesoscopic Ag rings*. Phys. Rev. Lett. **72**, 3586-3589(1994).
- [27] P. Santhanam. *Weak localization in normal-metal loops: Influence of boundary conditions*. Phys. Rev. B **39**, 2541-2547(1989).
- [28] V. I. Fal'ko. *The Aharonov-Bohm effect in a mesoscopic ring of diluted magnetic alloy*. J. Phys.: Condens. Matter **4**, 3943-3954(1992).
- [29] A. Vourdas. *Electron Interference in the Presence of AC Non-Classical Electromagnetic Fields*. Europhys. Lett. **32**, 289-294(1995).
- [30] A. Vourdas. *Correlations in ac Aharonov-Bohm phenomena*. Phys. Rev. A **56**, 2408-2411(1997).
- [31] D. Maude, E. Olshanetsky, J. C. Portal, M. Baxendale, G. A. J. Amaratunga, A. Vourdas. *Aharonov-Bohm rings in low frequency electromagnetic fields*. Grenoble High Magnetic Field Laboratory. Annual Report, p.19(1998).
- [32] Л. Горелик, С. Кулинич, Ю. Гальперин, Р. Шехтер, М. Джонсон. *Накачка энергии в мезоскопическое кольцо. Точно решаемая модель*. УФН **168**, 192-196(1998).
- [33] Э. Л. Нагаев. *Малые металлические частицы*. УФН **162**, 49-124(1992).
- [34] Э. М. Баскин, М. В. Энтин. *Равновесный заряд малых металлических частиц и прыжковый транспорт в металл-диэлектрическом композите*. Письма ЖЭТФ **70**, 510-515(1999)
- [35] М. В. Энтин, Л. С. Брагинский. *Поверхностная энергия электронного газа в модельных кристаллах*. ЖЭТФ **97**, 174-179(2003)

- [36] R. Balian, C. Bloch. *Distribution of eigenfrequencies for the wave equation in a finite domain - I. Three-dimensional problem with smooth boundary surface*. Ann. of Phys., **60**, 401-447(1970).
- [37] L. Chuan-Pu, J. M. Gibson, D. G. Cahill, T. I. Kamins, D. P. Basile, R. S. Williams. *Strain Evolution in Coherent Ge/Si Islands*. Phys.Rev.Lett. **84**, 1958-1962(2000).
- [38] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Марычев. *Интегралы и ряды. Специальные функции*. М.: Наука, 1983.
- [39] L. D. Landau. *Diamagnetismus der Metalle*. Z. Phys. **64**, 629-637(1930).
- [40] R. Kubo. *Wigner representation of quantum operators and its applications to electrons in a magnetic field*. J. Phys. Soc. Jpn. **19**, 2127-2139(1964).
- [41] R. Allen. *Surface corrections to Landau diamagnetism*. Phys. Rev. B **12**, 2869-2870(1975).
- [42] D. Childers and P. Pincus. *Size Effects on the Diamagnetic Susceptibility of a Free-Electron Gas*. Phys. Rev. **177**, 1036-1040(1969).
- [43] R. V. Denton. *Thermodynamic Properties of Electrons in Small Metal Particles*. Phys. Rev. B **7**, 3589-3607(1973).
- [44] R. Nemeth. *Diamagnetism in small metal particles*. Z. Phys. B **81**, 89-93(1990).
- [45] Y. Meir, O. Entin-Wohlmann and Y. Gefen. *Magnetic-field and spin-orbit interaction in restricted geometries: Solvable models*. Phys. Rev. B **42**, 8351-8360(1990).
- [46] D. Yoshioka and H. Fukuyama. *Orbital Magnetism of Two-Dimensional Electrons in Confining Potential*. J. Phys. Soc. Jpn. **61**, 2368-2381(1992).
- [47] J. Hajdu and B. Shapiro. *Mesoscopic enhancement of orbital magnetism*. Europhys. Lett **28**, 61-64(1994).



- [48] Y. Ishikawa and H. Fukuyama. *Orbital Magnetism and Current Distribution of Two-Dimensional Electrons under Confining Potential*. J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 2405-2413(1999).
- [49] J. P. Gazeau, P. Y. Hsiao, and A. Jellal. *Exact trace formulas for two-dimensional electron magnetism*. Phys. Rev. B **65**, 094427-1-094427-9(2002).
- [50] L. Friedman. *Question of size corrections to the steady diamagnetic susceptibility of small systems*. Phys. Rev. **134**, A336-A344(1964).
- [51] Э. Н. Богачек, Г. А. Гогодзе. *Осцилляционные эффекты типа "квантования потока" в нормальном металле*. ЖЭТФ **63**, 1839-1848(1972).
- [52] D. B. Bivin and J. W. McClure. *Orbital magnetic susceptibility of electrons confined in a rectangular box*. Phys. Rev. B **16**, 762-769(1977).
- [53] M. Robnik. *Perimeter corrections to the Landau diamagnetism*. J. Phys. A: Gen. Phys. **19**, 3619-3630(1986).
- [54] F. Meier and P. Wyder. *Magnetic moment of small Indium particles in the quantum size-effect regime*. Phys. Rev. Lett. **30**, 181-184(1973).
- [55] A. I. Buzdin, O. V. Dolgov and Yu. E. Lozovik. *Anomalous magnetism of small metallic clusters in a weak magnetic field*. Phys. Lett. **100A**, 261-263(1984).
- [56] J. M. van Ruitenbeek and D. A. van Leeuwen. *Model calculation of size effects in orbital magnetism*. Phys. Rev. Lett. **67**, 640-643(1991).
- [57] E. Gurevich and B. Shapiro. *Orbital Magnetism in Two-Dimensional Integrable Systems*. J. Phys. I France **7**, 807-820(1997).
- [58] K. Nakamura and H. Thomas. *Quantum Billiard in a Magnetic Field: Chaos and Diamagnetism*. Phys. Rev. Lett. **30**, 181-184(1973).

- [59] O. Agam. *The magnetic response of chaotic mesoscopic systems*. J. Phys. I France **4**, 697-730(1994).
- [60] K. Richter, D. Ullmo, R. A. Jalabert. *Orbital magnetism in the ballistic regime: geometrical effect*. Phys. Reports **276**, 1-83(1996).
- [61] F. von Oppen. *Magnetic susceptibility of ballistic microstructures*. Phys. Rev. B **50**, 17151-17161(1994).
- [62] Л. Г. Асламазов, А. И. Ларкин. *Флуктуационная магнитная восприимчивость сверхпроводников и нормальных металлов*. ЖЭТФ **67**, 647-660(1974).
- [63] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов. *К теории неупорядоченных металлов и сильнолегированных полупроводников*. ЖЭТФ **79**, 2028-2044(1979).
- [64] Б. Л. Альтшулер, А. Г. Аронов, А. Ю. Зюзин. *Термодинамические свойства неупорядоченных проводников*. ЖЭТФ **84**, 1525-1537(1983).
- [65] О. Д. Чеишвили. *Флуктуации диамагнитной восприимчивости неупорядоченных металлов*. Письма в ЖЭТФ **48**, 206-208(1981).
- [66] H. Fukuyama. *Fluctuations of Landau Diamagnetism in Mesoscopic Systems*. J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 47-49(1989).
- [67] E. Akkermans and B. Shapiro. *Fluctuations in the Diamagnetic Response of Disordered Metals*. Europhys. Lett **11**, 467-472(1990).
- [68] R. A. Serota and S. Oh. *Theory of Landau diamagnetism of dirty metals*. Phys. Rev. B **41**, 10523-10528(1990).
- [69] S. Oh, A. Yu. Zyuzin and R. A. Serota. *Orbital magnetism of mesoscopic systems*. Phys. Rev. B **44**, 8858-8868(1991).

- [70] R. A. Serota, A. Yu. Zyuzin. *Orbital magnetism of mesoscopic metals: Extension to the nonperturbative regime*. Phys. Rev. B **47**, 6399-6407(1993).
- [71] B. L. Altshuler, Y. Gefen, Y. Imry. *Persistent Differences between Canonical and Grand Canonical Averages in Mesoscopic Ensembles: Large Paramagnetic Orbital Susseptibilities*. Phys. Rev. Lett. **66**, 88-91(1991).
- [72] A. Altland and Y. Gefen. *Spectral statistics of nondiffusive disordered electron systems: A comprehensive approach*. Phys. Rev. B **51**, 10671-10690(1995).
- [73] B. L. Altshuler, Y. Gefen, Y. Imry, G. Montambaux. *Nonlinear orbital magnetic response in isolated quantum dots*. Phys. Rev. B **47**, 10335-10341(1993).
- [74] D. Ullmo, K. Richter, H. U. Baranger, F. von Oppen, and R. A. Jalabert. *Semiclassical Approach to Orbital Magnetism of Interacting Diffusive Quantum Systems*. Physica E **1**, 268-273(1998).
- [75] B. Shapiro. Orbital magnetism in disordered metals, cond-mat/9810330.
- [76] M. Ya. Azbel. *Aharonov-Bohm-induced Meissner-type effect and orbital ferromagnetism in normal metals*. Phys. Rev. B **48**, 4592-4598(1993).
- [77] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii, and L. I. Glazman. *Electrostatics of edge channels*. Phys. Rev. B **46**, 4026-4034(1992).
- [78] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. *Статистическая физика*. М.: Наука, 1995.
- [79] А.А. Абрикосов. Основы теории металлов. М. Наука, 1987.
- [80] М. М. Махмудиан, М. В. Энтин. *Квантовые поправки к проводимости 2D-системы с антиточками*. Физика и техника полупроводников, том 32, No 12, 1461-1466(1998).

- [81] M. V. Entin, M. M. Mahmoodian. *Aharonov-Bohm effect in a mesoscopic ring in a nonstationary magnetic field*. J. Phys.: Condens.Matter **12**, 6845-6850(2000).
- [82] М. В. Энтин, М. М. Махмудиан. *Реберный вклад в электронную энергию ограниченных микрокристаллов*. Письма в ЖЭТФ **73**, 167-169(2001).
- [83] Л. И. Магарилл, М. М. Махмудиан, М. В. Энтин. *Фриделевские осцилляции проникновения магнитного поля в нормальный металл и размерно-квантованную систему*. Письма в ЖЭТФ **75**, 560-564(2002).
- [84] Л. И. Магарилл, М. М. Махмудиан, М. В. Энтин. *Распределение равновесных токов намагничивания в системах с размерным квантованием в конечном магнитном поле*. ЖЭТФ **124**, 154-160(2003).
- [85] M. V. Entin, M. M. Mahmoodian. *Quantum corrections to conductivity of two dimensional system with antidots*. Proceedings of the 4th International Symposium on Advanced Physical Fields: Quantum Phenomena in Advanced Materials at High Magnetic Fields, Tsukuba, Japan, 1999, 9-12 March, pp. 123-126.
- [86] М. М. Махмудиан, М. В. Энтин. *Эффект Ааронова-Бома в мезоскопическом кольце в переменном магнитном поле*. 4-я Российская конференция по физике полупроводников, 25-29 октября 1999 года, Новосибирск, стр.234.
- [87] M. V. Entin, M. M. Mahmoodian. *Surface and edge energy of electron gas in nanocrystals*. 9th International symposium "Nanostructures: Physics and Technology", St Petersburg, Russia, June 18-22, 363-366(2001).
- [88] М. М. Махмудиан, М. В. Энтин. *Поверхностная и реберная энергия электронного газа в ограниченных микрокристаллах*. 5-я Российская конференция по физике полупроводников, 10-14 сентября 2001 года, Нижний Новгород, 344(2001).

- [89] M. V. Entin, L. I. Magarill, M. M. Mahmoodian. *Friedel oscillations of the magnetic field penetration in systems with spatial quantization*. 10th International symposium "Nanostructures: Physics and Technology", St Petersburg, Russia, June 17-21, 237-240(2002).
- [90] M. V. Entin, M. M. Mahmoodian. *Distribution of persistent currents and magnetic field in quantum wire and disc*. 10th International symposium "Nanostructures: Physics and Technology", St Petersburg, Russia, June 17-21, 290-291(2002).
- [91] M. V. Entin, M. M. Mahmoodian. *The screening of magnetic field and persistent current distribution in quantum wires and discs*. 26th International Conference on the Physics of Semiconductors, Edinburgh, United Kingdom, July 29 - August 2, 261(2002).
- [92] L. I. Magarill, M. M. Mahmoodian, M. V. Entin. *Distribution of equilibrium edge currents*. 11th International symposium "Nanostructures: Physics and Technology", St Petersburg, Russia, June 23-28, 349-350(2003).