

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ТИХООКЕАНСКИЙ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМ. В.И. ИЛЬЧЕВА
ДАЛЬНЕВОСТОЧНОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

УДК 530.182

МАКАРОВ ДЕНИС ВЛАДИМИРОВИЧ

**ПРОЯВЛЕНИЯ ГАМИЛЬТОНОВА ХАОСА В
КЛАССИЧЕСКОЙ И ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКЕ**

Специальность 01.04.02 —

«Теоретическая физика»

Диссертация на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:

доктор физ.-мат. наук, профессор

Пранц С.В.

Владивосток – 2014

Содержание

1	Особенности хаоса в гамильтоновых системах	13
1.1	Классический хаос в гамильтоновых системах	13
1.1.1	Немного истории	13
1.1.2	Нелинейные резонансы и их перекрытие	15
1.1.3	Вырожденный резонанс	23
1.2	Квантовый хаос	24
1.2.1	Полуклассическое приближение как метод расчета квантовой эволюции	25
1.2.2	Квантовая диффузия в фазовом пространстве	26
1.2.3	Воспроизводимость квантовой эволюции в условиях хаоса	28
1.2.4	Спектральные свойства квантового хаоса	29
1.3	Волновой хаос в акустике океана	34
1.3.1	Дальнее распространение звука в океане	34
1.3.2	Общие формулы	35
1.3.3	Внутренние волны	38
1.3.4	Акустическая термометрия и эксперименты по дальнему распространению звука в океане	39
1.4	Эффект рэтчета	44
2	Резонансное воздействие волнообразного возмущения на классическую колебательную систему	48
2.1	Общая теория резонанса с быстрыми пространственными колебаниями возмущения	48
2.1.1	Общее описание проблемы	48
2.1.2	Динамика в окрестности резонанса	50

2.1.3	Возникновение хаотического слоя его расположение в фазовом пространстве	53
2.2	Использование резонансного воздействия волнообразного возмущения для генерации направленного баллистического транспорта	57
2.3	Гигантское ускорение частиц при воздействии возмущения вида плоской волны с медленно меняющейся ориентацией	64
2.4	Вертикальный лучевой резонанс в подводном звуковом канале . .	72
2.4.1	Общие свойства вертикального лучевого резонанса	72
2.4.2	Режимы прохождения через резонанс	75
2.5	Сценарий зарождения хаоса при воздействии быстро осциллирующего по координате возмущения	78
2.6	Заключение к главе 2	84
3	Волновой хаос в периодических акустических волноводах . .	86
3.1	Модель волновода	86
3.2	Лучевая картина	88
3.3	Влияние вертикального лучевого резонанса на межмодовое взаимодействие	93
3.4	Анализ собственных функций оператора Флоке	101
3.4.1	Оператор Флоке для периодического волновода	101
3.4.2	$\lambda_z = 2000$ м.	103
3.4.3	$\lambda_z = 1000$ м.	105
3.4.4	$\lambda_z = 500$ м.	108
3.4.5	$\lambda_z = 200$ м.	110
3.4.6	Расплывание волнового пакета внутри хаотического слоя .	114
3.5	Заключение к главе 3	116
4	Квантовый и волновой хаос в гамильтоновых системах со случайным возмущением	118
4.1	Оператор эволюции на конечное время	118
4.1.1	Одношаговое отображение Пуанкаре	118
4.1.2	Оператор эволюции на конечное время: определение	124
4.1.3	Спектральные свойства оператора эволюции на конечное время	126

4.1.4	Волновой аналог оператора эволюции на конечное время	129
4.2	Спектральная статистика ОЭКР в модели случайно-неоднородного акустического волновода в Японском море	131
4.2.1	Подводный звуковой канал между полуостровом Гамова и банкой Кита-Ямато	131
4.2.2	Лучевое моделирование с помощью одношагового отображения Пуанкаре	135
4.2.3	Статистика межуровневых расстояний для ОЭКР, описывающего распространение звука в Японском море	138
4.2.4	Статистика собственных функций ОЭКР	141
4.3	Неуниверсальность спектральной статистики в присутствии тонкой структуры возмущения	149
4.4	Квантовый рэтчет с гармоническим шумом	152
4.4.1	Описание модели	153
4.4.2	Классическая динамика	156
4.4.3	Спектр оператора эволюции на конечное время	161
4.4.4	Транспортные свойства	165
4.5	Заключение к главе 4	169
5	Двухкомпонентный конденсат Бозе-Эйнштейна с линейной межкомпонентной связью, погруженный в оптическую решетку	171
5.1	Краткий обзор проблемы	171
5.2	Общая теория	173
5.2.1	Основные уравнения	173
5.2.2	Случай $J = 0$	175
5.3	Пространственная динамика двухкомпонентной смеси БЭК в оптической решетке	177
5.4	Внутренняя динамика	182
5.4.1	Режим слабой нелинейности	182
5.4.2	Режим умеренной нелинейности	183
5.5	Заключение к главе 5	188
	Заключение	190

Список рисунков200
Литература201

Введение

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Осознание того, что даже динамические системы с малым числом степеней свободы могут демонстрировать хаотическое и непредсказуемое поведение произвело в прошлом столетии переворот в головах физиков. Само по себе явление хаоса можно рассматривать как некий особый режим динамики, качественно отличающийся не только от регулярного интегрируемого движения, но и от нормальной диффузии. Действительно, простейшее статистическое описание хаотической динамики с использованием, например, обычного уравнения Фоккера-Планка нередко дает некорректную картину из-за свойственной хаосу перемежаемости. Применение же методического аппарата аномальной кинетики часто оказывается достаточно затруднительным, когда мы сталкиваемся с более-менее реалистичными моделями. Таким образом, несмотря на колоссальный интерес к хаосу в последние десятилетия, вопрос об эффективном описании хаотической динамики по-прежнему остается открытым. Все это заставляет нас с большим вниманием относиться к выявлению механизмов возникновения хаоса в каждой конкретной ситуации, к анализу его проявлений на фазовых портретах, в надежде дать хотя бы огрубленное описание хаотического движения или сделать это движение более контролируемым. Если говорить о хаосе в гамильтоновых системах, то теорема Лиувилля лишь в малой степени облегчает решение возникающих перед нами задач. Более того, в гамильтоновых системах гораздо сложнее, чем в диссипативных, добиться контроля над хаотической динамикой.

Одной из важнейших проблем в современной физике является вопрос о квантовом хаосе – поведении квантовых систем, классические аналоги которых демонстрируют хаотическое поведение. Известно, что по мере усиления квантовых эффектов динамика системы все сильнее и сильнее отклоняется от классической картины. Как следствие в глубоком квантовом режиме поведение системы не обнаруживает практически никаких следов хаоса. Вместе с тем, всегда существует некоторый переходный режим, в котором и влияние кван-

товых эффектов, и влияние хаоса является существенным. Именно этот режим представляет наибольшую сложность для описания. Согласно принципу оптико-механической аналогии, данная проблема также возникает в различных задачах, связанных с распространением волн в неоднородных средах. К их числу относится дальнейшее распространение звука в океане, подверженное волновому хаосу, являющемуся математическим аналогом квантового хаоса. Хаос является серьезным ограничителем для практического использования дальнего распространения звука, например, в целях акустической томографии или для подводной акустической связи. Ситуация дополнительно осложняется тем обстоятельством, что неоднородность океана в горизонтальной плоскости, ответственная за возникновение хаоса, является стохастической. Поэтому детальное исследование механизмов возникновения хаоса, а также его проявлений при низких частотах акустического сигнала, обладающих наименьшим поглощением в морской воде, имеет принципиально важное значение. Отметим, что теория лучевого и волнового хаоса в акустических волноводах может быть напрямую применена к волноводам других типов, например к оптическим.

Другой физической задачей, где исследование хаоса имеет первостепенную важность, является динамика холодных атомов в оптических решетках. Развитие методов манипуляции ансамблями холодных атомов представляет ценность с точки зрения приложений, связанных с созданием квантового компьютера. Так, например, квантовые рэтчеты с холодными атомами можно рассматривать как перспективный метод транспортировки квантовых состояний в заданную область. В полуклассическом режиме, возникающем при достаточно большой высоте оптического потенциала, перевод атомов из локализованного в делокализованное состояние сопряжен с разрушением динамических барьеров в фазовом пространстве. Одним из возможных решений проблемы является создание в фазовом пространстве хаотического слоя с заданными свойствами. В глубоком квантовом режиме хаос может появляться совсем в другом облике. Динамика атомарного конденсата Бозе-Эйнштейна может быть описана в приближении среднего поля с помощью уравнения Гросса-Питаевского, которое является нелинейным и, как следствие, может иметь неустойчивые решения.

Основные цели работы можно сформулировать следующим образом:

1. Выявление основных свойств лучевого и волнового хаоса при дальнейшем распространении звука в океане.
2. Исследование проявлений хаоса в динамике взаимодействующих и невзаимодействующих холодных атомов в нерезонансных оптических решетках.
3. Построение моделей классических и квантовых гамильтоновых рэтчетов, допускающих генерацию направленного транспорта при минимальных значениях амплитуды возмущения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследование условий возникновения хаоса при воздействии волнообразного возмущения с быстрыми осцилляциями по координате на нелинейную колебательную систему;
2. Развитие теории вертикального лучевого резонанса в акустике океана;
3. Исследование соответствия между лучевой и волновой картиной в условиях волнового хаоса с помощью теории Флоке;
4. Исследование структуры классического фазового пространства и ее связи с квантовой (волновой) динамикой при воздействии случайного возмущения;
5. Исследование взаимодействия между внутренними и внешними степенями свободы в динамике двухкомпонентного атомного конденсата Бозе-Эйнштейна в оптической решетке при наличии линейной связи между компонентами.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Статистический анализ собственных функций оператора эволюции на конечное время, описывающего квантовую динамику системы со случайным возмущением, позволяет найти квантовые состояния, соответствующие зонам устойчивости по Ляпунову на конечном времени в классическом фазовом пространстве, если последние удовлетворяют условию инвариантности

на конечном времени. Формальная аналогия соответствующих уравнений позволяет перенести данный подход на задачи о распространении волн в случайно-неоднородных волноводах. Применение указанного подхода к задаче о распространении звука в подводном звуковом канале в Японском море позволило установить, что одним из главных факторов, отвечающих за стабильность акустических сигналов, распространяющихся под малыми углами к оси канала, является образование слаборасходящегося пучка.

2. Возникновение хаоса при воздействии волнообразного возмущения на классическую гамильтонову систему связано с селективным усилением нелинейного резонанса в определенной области фазового пространства. При этом переход к глобальному хаосу может быть связан либо с перекрытием резонансов, либо с бифуркациями эллиптических и гиперболических точек доминирующего нелинейного резонанса в данной области фазового пространства.
3. При воздействии возмущения в виде плоской волны с адиабатической модуляцией волнового числа на ансамбль классических частиц, движущихся в поле периодического потенциала, возможно возникновение эффекта гигантского ускорения частиц вдоль резонансных каналов в фазовом пространстве.
4. При распространении звука в глубоком океане, с понижением частоты сигнала происходит подавление проявлений вертикального лучевого резонанса в волновой картине акустического поля, что сопровождается качественными изменениями в спектральных свойствах оператора эволюции на конечное расстояние.
5. Находящийся в оптической решетке двухкомпонентный конденсат Бозе-Эйнштейна, в котором разные компоненты соответствуют различным состояниям сверхтонкой структуры и связаны внешним электромагнитным полем, может демонстрировать спонтанную синхронизацию осцилляций Раби, происходящих в различных узлах оптической решетки.

Научная новизна: Основные результаты работы являются новыми, что подтверждается их публикацией в ведущих мировых научных журналах. Среди полученных новых результатов выделим следующие:

- Разработан новый квазидетерминированный подход для анализа квантовых систем, находящихся под воздействием случайного возмущения.
- Предложена новая схема классического рэтчета, в котором генерация направленного транспорта достигается за счет наложения возмущения в виде суперпозиции плоских волн, каждая из которых обеспечивает разрушение динамических барьеров в определенной области фазового пространства, создавая таким образом асимметричный по импульсу хаотический слой.
- Предложена новая схема квантового рэтчета с холодными атомами, погруженными в оптическую решетку. Схема обеспечивает генерацию направленного атомного транспорта при воздействии малого возмущения, состоящего из суперпозиции двух дополнительных оптических решеток с широкополосной амплитудной модуляцией.
- Впервые дано подробное описание режимов динамики двухкомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна с линейной межкомпонентной связью, погруженного в оптическую решетку.
- Впервые подробно исследованы механизмы перехода от хаоса к регулярности, происходящие при понижении частоты в акустических полях в глубоком океане.

Практическая значимость диссертационной работы определяется возможными приложениями полученных результатов. В частности, результаты исследования волнового хаоса в акустике океана, в особенности касающиеся механизмов подавления хаоса, могут быть использованы для построения новых методов акустической томографии океана, сохраняющих эффективность в условиях лучевого хаоса. Результаты, полученные при исследовании волнового хаоса в периодически-неоднородных акустических волноводах могут быть использованы при разработке нового поколения оптических волокон на основе периодически-сегментированных оптических волноводов. В работе предложено

несколько новых схем для классических и квантовых рэтчетов, которые могут быть использованы для манипуляции холодными атомами. Результаты исследований двухкомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна представляют ценность с точки зрения создания макроскопических перепутанных состояний, которые могут быть использованы в квантовых вычислениях.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на международных и российских конференциях: XV сессия Российского акустического общества, совмещенная с III Нижегородской акустической сессией (Нижний Новгород, 2004), XI школа-семинар им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенная с XVII сессией Российского акустического общества (Москва, 2006), научная школа “Нелинейные волны” (Нижний Новгород, 2006, 2008 и 2010), международная конференция “Nonlinear Dynamics in Quantum Systems” (Красноярск, 2009), международная конференция “Tunneling and Scattering in Complex Systems — From Single to Many Particle Physics” (Германия, Дрезден, 2009), международная конференция “Dynamics Days Europe” (Великобритания, Бристоль, 2010), XIII школа-семинар им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенная с XXIII сессией Российского акустического общества (Москва, 2011), международная конференция “Fluxes and Structures in Fluids: Physics of Geospheres” (Владивосток, 2011), международная конференция “Wave Chaos from the Micro- to the Macroscale” (Германия, Дрезден, 2012), конференция “Физика ультрахолодных атомов” (Новосибирск, 2012), XIV школа-семинар им. акад. Л.М. Бреховских, совмещенная с XXVI сессией Российского акустического общества (Москва, 2013), международная конференция “ICONO/LAT” (Москва, 2013), международная конференция “International Conference on Quantum Technologies” (Москва, 2013), международная конференция “Advances in Quantum Chaotic Scattering: From (Non-)Linear Waves to Few-Body Systems” (Германия, Дрезден, 2013).

Помимо этого, результаты работы неоднократно докладывались на семинарах по нелинейной динамике в Тихоокеанском океанологическом институте им. В.И.Ильичева ДВО РАН, а также семинарах лаборатории физики нелинейных процессов Института Физики им. Л.В. Киренского СО РАН (г.Красноярск).

Диссертационная работа была выполнена при поддержке грантов РФФИ 09-02-01257-а, 09-05-98608-р_восток_а, 12-05-33022-мол_а_вед, грантов Прези-

дента РФ МК-9007.2006.5, МК-4324.2009.5, в которых соискатель являлся руководителем. Помимо этого, соискатель являлся стипендиатом фонда “Династия” (конкурс молодых ученых–кандидатов наук, работающих в области фундаментальной физики), а также Фонда содействия отечественной науке. Соискатель является обладателем медали Российской Академии наук с премией для молодых ученых, полученной за цикл работ “Динамический хаос в физических процессах в океане” (совместно с М.Ю. Улейским и М.В. Будянским, 2006 год), обладателем премии имени академика В.И. Ильичева ДВО РАН для молодых ученых за серию работ “Хаос при распространении звука в океане”, а также обладателем медали имени академика Л.М. Бреховских от Российского акустического общества.

Личный вклад. Все представленные в диссертации новые результаты получены автором, либо при его прямом участии. Автор осуществлял постановку задач, выбор методов исследования, обработку и анализ полученных результатов. Автором лично разработана часть вычислительных программ, использованных в численном моделировании.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 23 печатных изданиях, 1 из которых представляет собой монографию, опубликованную международным издательством World Scientific на английском языке, 22 — изданы в журналах, рекомендованных ВАК.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **228** страниц текста с **66** рисунками. Список литературы содержит **283** наименования.

Глава 1

Особенности хаоса в ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМАХ

1.1 Классический хаос в гамильтоновых системах

1.1.1 Немного истории

В 2013 году в журнале *Physics Today* появилась статья А.Е. Моттера и Д.К. Кэмпбелла под названием “Chaos at fifty” (“Хаосу – пятьдесят лет”) [1]. Статья была посвящена 50-летней годовщине опубликования статьи метеоролога Эдварда Лоренца [2]. В этой статье были представлены результаты исследования динамической модели, описывающей климатические изменения. Главным свойством этой модели было то, что Лоренц назвал “эффектом бабочки”: любое сколь угодно малое изменение начальных условий порождает траекторию, которая достаточно быстро расходится с исходной. Столь острая чувствительность к начальным условиям означает принципиальную непредсказуемость поведения системы, т. е. то, что мы сегодня называем хаосом. Все это дало основание Моттеру и Кэмпбеллу назвать работу Лоренца не иначе как рождение хаоса (“рождение области, которая до сих пор процветает”). Это утверждение было подвергнуто достаточно жесткой критике со стороны авторитетных Д. Рюэля и Д.Л. Шепелянского [3, 4]. Рюэль указал на то, что острая чувствитель-

ность к начальным условиям была известна еще около века назад, со времен Анри Пуанкаре и его исследований задачи трех тел. Шепелянский же упомянул о вышедшей в 1959 году работе Б.В. Чирикова [5], в которой был впервые предложен знаменитый критерий Чирикова – критерий перекрытия резонансов, при котором возникает стохастическая неустойчивость движения системы. Поскольку работа Чирикова вышла на четыре года раньше работы Лоренца (на английский язык статья Чирикова была переведена в следующем, 1960 году), непонятно, почему именно Лоренцу, а не Чирикову, предписывается открытие хаоса. Отметим, что хаотическое поведение в той или иной степени обнаруживалось и в более ранних работах.

Оставляя определение истины в вопросе об истинном первооткрывателе (или первооткрывателях) хаоса более компетентным людям, все же отметим, что данное противоречие отчасти является следствием некоторого размежевания среди исследователей хаоса, занимающихся диссипативными и гамильтоновыми системами. На сегодняшний день это два почти независимых направления, каждое со своей историей и логикой развития. Теория диссипативного хаоса является бурно развивающейся областью, во многом за счет колоссальной прикладной востребованности. Для развития теории диссипативного хаоса работы Лоренца действительно носят эпохальное значение, хотя нельзя и забывать о более ранних работах, в том числе представителей советской школы А.А. Андронова, А.А. Витта, С.Э. Хайкина, Л.И. Мандельштама и других. Если же говорить о гамильтоновом хаосе, то, здесь, безусловно, первостепенное значение имеют работы Чирикова.

В настоящее время интерес к гамильтонову хаосу сузился до нескольких магистральных направлений. Здесь можно отметить, например, многомерные гамильтоновы системы и возникающие в них динамические аномалии, такие как образование квазистационарных состояний [6–9], хаос в системах с непериодическими возмущениями [10–12], а том числе применимо к задачам лагранжева транспорта в океане [13–18], теория хаотического рассеяния [19, 20] и ее обобщение на квантовые системы [21], аномальная диффузия [22–26] и ускорение Ферми [27–30], а также системы с вырожденными торами [31–33]. Настоящая глава носит обзорный характер, и некоторые из упомянутых проблем, имеющие непосредственное отношение к данной работе, будут вкратце рассмотрены

здесь. Особое место среди задач, связанных с гамильтоновым хаосом, занимает квантовый хаос [34], которому в этой главе будет уделено особое внимание.

1.1.2 Нелинейные резонансы и их перекрытие

Одним из ключевых понятий, используемых в данной работе, являются нелинейный резонанс в гамильтоновых системах, а также сценарий глобального хаоса, связанный с перекрытием нелинейных резонансов в фазовом пространстве. По этой причине мы остановимся на нем достаточно подробно. Здесь мы вкратце представим теорию нелинейного резонанса, адаптированную для случая достаточно сильной нелинейности [35, 36].

Рассмотрим движение точечной частицы в поле одномерного потенциала $U(x)$, на который наложено малое возмущение $V(x, t)$, являющееся периодической функцией времени

$$V(x, t + T) = V(x, t) = \varepsilon F(x, t). \quad \varepsilon \ll 1. \quad (1.1)$$

Запишем гамильтониан задачи

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + U(x) + V(x, t), \quad (1.2)$$

m и p – масса и импульс частицы, соответственно. Относительно потенциала $U(x)$ сделаем предположение, что он имеет минимум при некотором значении x , т. е. существует положение устойчивого равновесия, а соответствующие колебания частицы относительно этого положения в общем случае являются ангармоническими. Помимо этого, будем предполагать, что возмущение является плавно-меняющейся функцией координаты x , т. е.

$$\frac{dV}{dx} = O(\varepsilon). \quad (1.3)$$

С помощью канонического преобразования перейдем к переменным действие-угол

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dx, \quad \vartheta = \frac{\partial}{\partial I} \int_{x_0}^x p dx. \quad (1.4)$$

После преобразования гамильтониан 1.2 принимает вид

$$H = H_0(I) + \varepsilon F(I, \vartheta, t), \quad (1.5)$$

где член $H_0(I)$ соответствует стационарной части гамильтониана. Уравнения Гамильтона в терминах переменных действия и угла имеют вид

$$\frac{dI}{dr} = -\varepsilon \frac{\partial F}{\partial \vartheta}, \quad \frac{d\vartheta}{dr} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial I}, \quad (1.6)$$

где $\omega = dH_0/dI$ частота колебаний в отсутствие возмущения ($V = 0$). Функция F может быть представлена в виде ряда Фурье

$$F = \frac{1}{2} \sum_{l,m} F_{l,m}(I) e^{i(l\vartheta - m\nu t)} + \text{к.с.}, \quad (1.7)$$

$$F_{l,m}^* = F_{-l,-m},$$

где $\nu = 2\pi/T$ – частота возмущения, а сокращение к. с. означает комплексно-сопряженные члены. После подстановки разложения (1.7) в уравнения движения (1.6), последние преобразуются к виду

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{i\varepsilon}{2} \sum_{l,m} l F_{l,m}(I) e^{i(l\vartheta - m\nu t)} + \text{к.с.}, \quad (1.8)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega(I) + \frac{i\varepsilon}{2} \sum_{l,m} \frac{\partial F_{l,m}}{\partial \vartheta} e^{i(l\vartheta - m\nu t)} + \text{к.с.} \quad (1.9)$$

При выполнении условия

$$l\omega(I) - m\nu = 0, \quad (1.10)$$

где l и m целые числа, в системе уравнений движения возникает резонанс. Положим, что условие (1.10) выполняется для некоторой пары чисел (l_0, m_0) , которой соответствует значение действия I_0 . Тогда мы можем переписать (1.10) как

$$l_0\omega(I_0) = m_0\nu. \quad (1.11)$$

Вследствие ангармоничности невозмущенных колебаний, проявляющейся как зависимость частоты ω от действия I , условие (1.11) может выполняться для огромного множества комбинаций $(l_0, m_0; I_0)$. Для краткости, будем называть резонанс, соответствующий l_0 и m_0 резонансом $l_0 : m_0$.

Рассмотрим поведение траектории вблизи изолированного резонанса $l_0 : m_0$, пренебрегая влиянием остальных членов в разложении (1.7). В этом случае уравнения (1.8) и (1.9) упрощаются:

$$\frac{dI}{dr} = \varepsilon l_0 F_0 \sin(l_0\vartheta - m_0 k_r r + \varphi_0), \quad (1.12)$$

$$\frac{d\vartheta}{dr} = \omega(I) + \varepsilon \frac{\partial F_0}{\partial I} \cos(l_0\vartheta - m_0 k_r r + \varphi_0), \quad (1.13)$$

где

$$F_{l,m} = |F_{l,m}| e^{i\varphi_0} = F_0 e^{i\varphi_0}. \quad (1.14)$$

Предположим, что отклонение действия от резонансного значения

$$\Delta I = I - I_0 \quad (1.15)$$

является малым. Это означает, что мы будем рассматривать поведение системы в непосредственной близости от точного резонанса. Можно упростить (1.12) и (1.13) при использовании следующих приближений :

1. В правой части уравнений (1.12) и (1.13) положим $F_0 = F_0(I_0) = \text{const}$;
2. Представим частоту $\omega(I)$ в виде ряда Тейлора:

$$\omega(I) = \omega_0 + \omega'_I \Delta I, \quad (1.16)$$

где $\omega_0 = \omega(I_0)$, $\omega'_I = d\omega(I_0)/dI$;

3. Пренебрежем членом порядка ε в уравнении (1.13).

В результате уравнения (1.12) и (1.13) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta I) &= -\varepsilon l_0 F_0 \sin \psi, \\ \frac{d}{dt} \psi &= l_0 \omega'_I \Delta I, \end{aligned} \quad (1.17)$$

где введена новая фазовая переменная

$$\psi = l\vartheta - m\nu t + \varphi_0 - \pi. \quad (1.18)$$

Уравнения (1.17) могут быть записаны в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Delta I) &= -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi}, \\ \frac{d}{dt} \psi &= \frac{\partial \tilde{H}}{\partial(\Delta I)}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где \tilde{H} – так называемый *универсальный гамильтониан нелинейного резонанса*.

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} l_0 \omega'_I (\Delta I)^2 - \varepsilon l_0 F_0 \cos \psi. \quad (1.20)$$

Система уравнений (1.19) может быть представлена в виде единственного уравнения маятникового типа

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \Omega^2 \sin \psi = 0, \quad (1.21)$$

где Ω – частота малых фазовых колебаний в окрестности эллиптической точки резонанса. Она задается формулой

$$\Omega = l_0 \sqrt{\varepsilon \omega'_I F_0}. \quad (1.22)$$

Использованные выше приближения являются применимыми при выполнении следующих условий:

$$\varepsilon \ll \alpha \ll \varepsilon^{-1}, \quad (1.23)$$

где безразмерный параметр α характеризует степень нелинейности колебаний частицы

$$\alpha = \frac{I_0}{\omega_0} |\omega'_I|. \quad (1.24)$$

Левое неравенство в (1.23) означает, что нелинейность должна быть достаточно сильной, в то время как правое дает критерий для отбрасывания нерезонансных членов.

Амплитуда фазовых колебаний в окрестности резонанса характеризуется выражением

$$\frac{\max \Delta I}{I_0} = \left(\varepsilon \frac{F_0}{|\omega'_I|} \right)^{1/2} \frac{1}{I_0} \sim \left(\frac{\varepsilon}{\alpha} \right)^{1/2}, \quad (1.25)$$

где мы положили $F_0 \sim H_0 \sim \omega_0 I_0$. Аналогичным образом можно оценить ширину резонанса по частоте

$$\frac{\max \Delta \omega}{\omega_0} = \frac{\Omega}{l_0 \omega_0} \sim (\varepsilon \alpha)^{1/2}. \quad (1.26)$$

Выражения (1.25) и (1.26) означают, что относительные изменения действия и частоты ω , обусловленные нелинейным резонансом, должны быть малыми.

На Рис. 1.1(а) представлен фазовый портрет, соответствующий системе уравнений (1.19) в случае резонанса 5:1. Он совпадает с фазовым портретом нелинейного маятника, включая в себя области финитного и инфинитного движения, разделенные сепаратрисой. Сепаратриса имеет две ветви, пересекающие друг друга в гиперболических точках

$$\Delta I = 0, \quad \psi = \pi \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

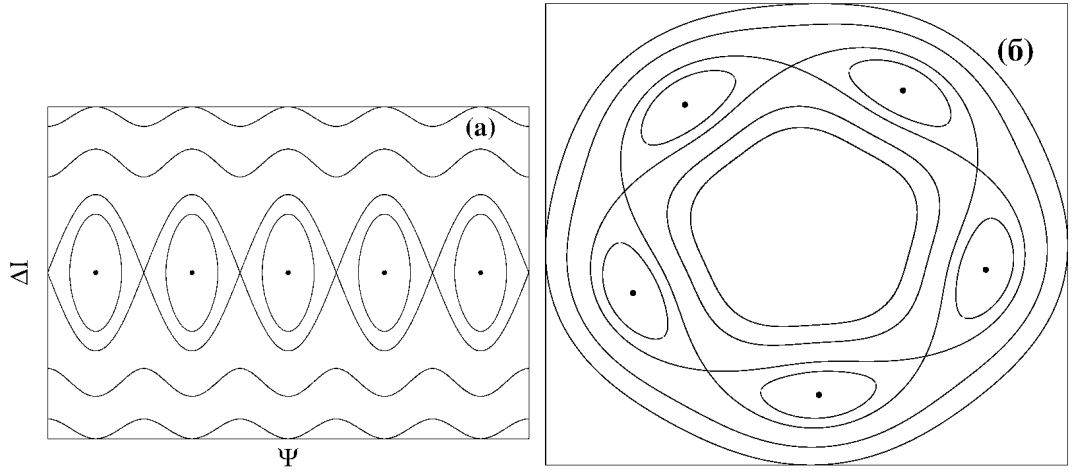


Рисунок 1.1: (а) Фазовый портрет, соответствующий универсальному гамильтониану нелинейного резонанса в случае резонанса 5 : 1. (б) То же самое, но уже в полярных координатах, соответствующих переменным действие–угол [36]

Финитное движение представляет собой вращение вокруг эллиптических точек, что соответствует движению в окрестности точного резонанса (1.11). Инфинитные траектории соответствуют движению вне резонанса. В пространстве переменных действие–угол (1.4) тот же самый резонанс выглядит как цепочка из пяти островов, соединенных гиперболическими точками (Рис. 1.1(б)). Нерезонансные траектории выглядят как замкнутые кривые вне резонансной цепочки.

Сделанные выше предположения позволяют свести исходную задачу (1.6) с $3/2$ степенями свободы к задаче (1.17), в которой присутствует только одна степень свободы, что подразумевает интегрируемость. Это упрощение становится возможным за счет пренебрежения нестационарными членами в универсальном гамильтониане нелинейного резонанса (1.20), которые обусловлены нерезонансными гармониками в разложении (1.7). Однако здесь резонно возникает вопрос: а действительно ли они не оказывают влияния на динамику частицы? Для ответа на этот вопрос, извлечем из (1.8) и (1.9) один нерезонансный член с $l = l'$ и $m = m'$, добавив его в систему уравнений (1.17). В этом случае имеем [36]

$$\frac{d}{dt}(\Delta I) = -\varepsilon l_0 F_0 \sin \psi - \varepsilon l' F' \sin(\psi + \omega' t + \Delta \varphi), \quad (1.27)$$

$$\frac{d}{dt} \psi = l_0 \omega_I' \Delta I, \quad (1.28)$$

где $\Delta\varphi = \varphi' - \varphi_0$, F' и φ' — соответственно, модуль и фаза комплексной Фурье-амплитуды $F_{l',m'}$,

$$\omega' = (l' - l_0)\omega + (m' - m_0)\nu. \quad (1.29)$$

Резонансный гамильтониан принимает вид

$$\tilde{H} = \frac{1}{2}l_0\omega'_I(\Delta I)^2 - \varepsilon l_0 F_0 \cos \psi - \varepsilon l' F' \cos(\psi + \omega' t + \Delta\varphi). \quad (1.30)$$

В отличие от (1.20), этот гамильтониан зависит от времени, поэтому система уравнений (1.27) и (1.28), в общем случае, является неинтегрируемой.

Предположим, что второй и третий члены в правой части (1.30) имеют один и тот же порядок, т. е. нестационарное возмущение не является малым. Тогда мы можем свести задачу к интегрируемой, устранив зависимость гамильтониана от времени, только в случае

$$\Omega \ll |\omega'|. \quad (1.31)$$

Действительно, в этом случае можно воспользоваться методом усреднения, что позволяет вновь привести систему к виду (1.17) и воспроизвести гамильтониан (1.20).

При выполнении условия (1.31) метод усреднения неприменим только в малой окрестности сепаратрисы. Действительно, в гамильтоновых системах сколь угодно малое возмущение способно вызвать расщепление сепаратрисы, сопровождающееся возникновением крайне запутанной сети “новых” гиперболических точек, каждая из которых играет роль своеобразного рассеивателя для траекторий. Все это порождает экстремальную чувствительность к сколь угодно малым изменениям начальных условий и, как следствие, хаос. Таким образом, мы приходим к важному выводу: даже хорошо изолированный резонанс имеет узкий хаотический слой в окрестности сепаратрисы, обусловленный влиянием малых нестационарных возмущений. С уменьшением разности $|\omega' - \Omega|$ критерий (1.31) начинает нарушаться и ширина хаотического слоя постепенно возрастает, пока вся область внутри сепаратрисы не становится хаотической [37], что связано с усилением влияния резонанса $l' : m'$ на резонанс $l_0 : m_0$.

Таким образом, возникает вопрос: как определить, насколько хорошо тот или иной резонанс изолирован от своих соседей? Ответ на этот вопрос был дан

Б.В. Чириковым [5, 38], который ввел параметр

$$K_c = \frac{\Delta I}{\delta I}, \quad (1.32)$$

где ΔI максимальная ширина резонансной цепочки по действию и δI расстояние между соседними цепочками. Условие

$$K_c \gtrsim 1 \quad (1.33)$$

было предложено Чириковым как качественный критерий слияния присепаратрисных хаотических слоев в единое хаотическое море. Часто критерий Чирикова (1.33) упоминается как критерий возникновения *глобального хаоса*.

Здесь следует сделать небольшое отступление. Вообще говоря, резонансы всюду плотно заполняют фазовое пространство, поскольку целые числа l и m в (1.10) могут быть выбраны произвольно. Однако, нужно учитывать то, что Фурье-амплитуды $F_{l,m}$ в разложении (1.7) достаточно быстро спадают с увеличением $|l| + |m|$. В частности, если $F(\vartheta)$ является всюду аналитической функцией, то спадание Фурье-амплитуд, в среднем, экспоненциальное

$$F_{l,m} \propto e^{-\varsigma(|l|+|m|)}, \quad (1.34)$$

где ς расстояние от ближайшей особенности в комплексной плоскости до действительной оси [39]. Таким образом, резонансы высокого порядка, т. е. соответствующие большим значениям l_0 и m_0 , не оказывают значительного влияния на динамику. Если функция $F(\vartheta)$ имеет особенности на действительной оси, то Фурье-амплитуды спадают по степенному закону и влияние резонансов высокого порядка несколько выше. Известно, что в этом случае хаос может возникнуть при сколь угодно малом возмущении. Резонансы высокого порядка обеспечивают более плотное перекрытие резонансов, однако хаотическая диффузия в их окрестности является довольно медленной. Из этого всего следует, что в формуле (1.33) следует учитывать только главные резонансы, соответствующие малым значениям l_0 и m_0 .

Нередко удобно переформулировать критерий Чирикова в частотном пространстве

$$K_c = \frac{\Delta \omega}{\delta \omega} \gtrsim 1, \quad (1.35)$$

где $\Delta\omega$ и $\delta\omega$ – ширина резонанса и расстояние между соседними резонансами по частоте. При малых ΔI и δI мы можем записать

$$\Delta\omega = |\omega'_I|\Delta I, \quad \delta\omega = |\omega'_I|\delta I. \quad (1.36)$$

Рассмотрим два случая:

- Пусть $\nu \ll \omega_0$. Тогда главные резонансы будет соответствовать $l_0 = 1$.

Имеем

$$\omega(I_0 + \delta I) = (m_0 \pm 1)\nu \quad (1.37)$$

или

$$\delta\omega = |\omega(I_0 + \delta I) - \omega(I_0)| = \nu. \quad (1.38)$$

Таким образом, из уравнений (1.35), (1.38) и (1.26) получаем

$$K_c = \frac{\Delta\omega}{\nu} = (\varepsilon\alpha)^{1/2} \frac{\omega_0}{\nu} \gtrsim 1. \quad (1.39)$$

С учетом (1.23) мы получаем $\varepsilon\alpha \ll 1$ и $\omega_0/\nu \gg 1$. Отсюда следует, что левая часть неравенства (1.39) является произведением большого и малого параметров, что придает условию (1.39) некую нетривиальность.

- Далее рассмотрим обратную ситуацию, когда $\nu \gg \omega_0$. Опять таки, принимая во внимание только главные резонансы, мы можем положить $m_0 = 1$. В этом случае имеем

$$(l_0 \pm 1)\omega(I_0 + \delta I) = \nu \quad (1.40)$$

или

$$\delta\omega = |\omega(I_0 + \delta I) - \omega(I_0)| = \left| \frac{\nu}{l_0} - \frac{\nu}{l_0 \pm 1} \right| \sim \frac{\omega_0^2}{\nu} = \frac{\omega_0}{l_0}. \quad (1.41)$$

Подставляя уравнения (1.41) и (1.26) в (1.32), получаем

$$K_c = (\varepsilon\alpha)^{1/2} \frac{\nu}{\omega_0} \gtrsim 1. \quad (1.42)$$

Это условие похоже на (1.39) в том смысле, что это тоже произведение $(\varepsilon\alpha \ll 1)$ и большого $(\nu/\omega_0 \gg 1)$ параметров.

Легко увидеть, что оба рассмотренных случая соответствуют неравенству

$$\Omega \gtrsim |\omega'|. \quad (1.43)$$

Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно сделать подстановку $\nu = l_0 \Delta\omega$ и выразить ω' через $\delta\omega$. Тогда в случае $\nu \gg \omega_0$

$$l_0 = l' = 1, \quad |m' - m_0| = 1, \quad \omega' = \nu = \delta\omega, \quad (1.44)$$

а в случае $\nu \ll \omega_0$

$$m_0 = m' = 1, \quad |l' - l_0| = 1, \quad \omega' = \omega_0 = l_0\omega. \quad (1.45)$$

Таким образом, в обоих случаях (1.43) превращается в критерий Чирикова (1.35).

1.1.3 Вырожденный резонанс

Представленная выше теория относится к случаю невырожденных гамильтоновых систем, когда $\omega'_I \neq 0$. Если производная ω'_I обращается в нуль в малой окрестности резонансного значения переменной действия, динамика системы может быть описана в рамках подхода, идейно близкого к приведенному выше. Для этого следует включить в разложение (1.16) члены более высокого порядка [40]. В общем случае имеем

$$\omega(I) = \omega_0 + \omega'_I \Delta I + \frac{\omega''_{II}}{2} \Delta I^2 + \frac{\omega'''_{III}}{6} \Delta I^3 + \dots + \frac{\omega^{(i)}}{i!} \Delta I^i + \dots, \quad (1.46)$$

где $\omega^{(i)} = d^i \omega / dI^i (I = I_0)$. Положим, что все производные $\omega^{(i)}$ вплоть до некоторого порядка j обращаются в нуль. Тогда оставляя старший из оставшихся членов, мы можем переписать гамильтониан (1.20) в следующем виде

$$\tilde{H} = l_0 \omega^{(j)} \frac{(\Delta I)^{j+1}}{(j+1)!} - \varepsilon l_0 F_0 \cos \psi. \quad (1.47)$$

Из этого выражения можно оценить максимальное отклонение действия от резонансного значения

$$\Delta I = \left(\frac{2\varepsilon F_0 (j+1)!}{|\omega^{(j)}|} \right)^{1/(j+1)}. \quad (1.48)$$

Аналогичная оценка для частоты колебаний

$$\Delta\omega = |\omega^{(j)}| \frac{(\Delta I)^j}{j!} = |\omega^{(j)}|^{1/(j+1)} \frac{[2\varepsilon F_0 (j+1)!]^{1/(j+1)}}{j!}. \quad (1.49)$$

Простейший анализ формул (1.48) и (1.49) свидетельствует о том, что ширина вырожденного резонанса как по действию, так и по частоте, должна быть существенно меньше, нежели в невырожденном случае. Это обстоятельство само по себе предполагает ослабление перекрытия резонансов и, соответственно, более высокое пороговое значение амплитуды ε для возникновения глобального хаоса. Однако в действительности ситуация еще сложнее – даже в при достаточно больших значениях амплитуды в такой системе могут сохраняться инвариантные кривые, представляющие из себя тонкие, но все же непроницаемые динамические барьеры [41–43].

1.2 Квантовый хаос

После открытия явления динамического хаоса в классических системах, естественным образом встал вопрос: каким образом хаос проявляется в динамике квантовых систем, демонстрирующих хаотическое поведение в классическом пределе? Действительно, динамика квантовой системы описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{q}), \quad (1.50)$$

которое является линейным, что не предполагает необходимой для хаоса неустойчивости по Ляпунову. С другой стороны, принцип соответствия предписывает непрерывный переход от квантовой механики к классической при

$$\frac{\lambda_{\text{dB}}}{L} \rightarrow 0, \quad (1.51)$$

где $\lambda_{\text{dB}} = h/p$ – длина волны де Бройля, L – характерный масштаб движения рассматриваемой системы. Разрешение этого кажущегося противоречия легло в основу теории квантового хаоса. Ключевую роль здесь играет вопрос о квантово-классическом соответствии в условиях хаоса. Для установления связи между квантовой и классической картинами обычно привлекается та или иная разновидность полуклассического приближения, что позволяет описать динамику волновой функции в терминах классических траекторий. Ниже мы постараемся дать краткий обзор некоторых аспектов теории квантового хаоса, представляющих важность в контексте данной работы.

1.2.1 Полуклассическое приближение как метод расчета квантовой эволюции

Уравнению Шредингера (1.50) соответствует пропагатор

$$K(\mathbf{q}', \mathbf{q}'', t) = \langle \mathbf{q}'' | \hat{\Lambda} | \mathbf{q}' \rangle, \quad (1.52)$$

где $\hat{\Lambda}$ – оператор эволюции, представляющей собой операторную экспоненту

$$\hat{\Lambda} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t\right). \quad (1.53)$$

В полуклассическом приближении (1.52) обращается в пропагатор Ван Флека-Гутцвиллера

$$K_{\text{sc}} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar i}\right)^{d/2} \sum_j \left| \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{q}' \partial \mathbf{q}''} \right|^{1/2} e^{iS(\mathbf{q}'', \mathbf{q}', t+\Delta t, t) - i\mu_j \pi/2}, \quad (1.54)$$

где d – размерность пространства, j маркирует классические траектории, соединяющие точки (\mathbf{q}', t) и $(\mathbf{q}'', t + \Delta t)$, μ_j – индекс Маслова,

$$S(\mathbf{q}'', \mathbf{q}', t + \Delta t, t) = \int_{\mathbf{q}'(t)}^{\mathbf{q}''(t+\Delta t)} L dt. \quad (1.55)$$

В (1.55) L обозначает лагранжиан, а интегрирование производится вдоль классической траектории. Чисто классическое описание, не учитывающее фазу волновой функции, становится неприменимым на временах, превышающих так называемое время перемешивания [44]

$$t_{\text{mix}} \simeq \frac{1}{\lambda_{\text{L}}} \ln \frac{I}{\hbar}, \quad (1.56)$$

где λ_{L} – максимальный показатель Ляпунова, I – характерное значение действия. Отношение I/\hbar задает эффективную размерность гильбертова пространства. В работах [45–47] показано, что пропагатор (1.54) дает достаточно точное описание квантовой эволюции в условиях классического хаоса на временах, существенно превышающих t_{mix} . Это связано с тем, что расчет с помощью пропагатора учитывает интерференцию. Однако, число необходимых для расчета траекторий экспоненциально возрастает со временем. Достаточно интересный

результат был получен в работе [48]: было показано, что ошибка полуклассических вычислений в случае хаотической динамики нарастает со временем медленнее, чем в случае регулярной динамики. В первом случае рост линейный, во втором – квадратичный.

Впрочем заметим, что точность полуклассического описания естественным образом теряется при появлении туннельного эффекта. При этом речь может идти как об обычном туннелировании сквозь энергетические барьеры, так и о так называемом динамическом туннелировании сквозь барьеры в фазовом пространстве [49]. Проблема туннелирования может быть решена путем учета комплексных траекторий [50–52]. Однако, в этом случае окончательно теряется простота полуклассического приближения, поскольку вычисление комплексных траекторий является уже не задачей Коши, а краевой задачей, решение которой в условиях хаоса может быть сопряжено с существенными методическими трудностями [53], несмотря на несомненную эстетическую ценность получающихся результатов [50].

1.2.2 Квантовая диффузия в фазовом пространстве

В п. 1.1.2 описан сценарий возникновения глобального хаоса, связанный с перекрытием нелинейных резонансов. В полуклассическом режиме это явление проявляет себя и на квантовом уровне. Можно показать [36, 54, 55], что условие квантового резонанса

$$E_{l+m} - E_l = n\hbar\nu, \quad (1.57)$$

соответствующего n -фотонному поглощению, сводится в полуклассическом режиме к условию нелинейного резонанса (1.10)

$$m\omega(I) = n\nu. \quad (1.58)$$

Каждый нелинейный резонанс занимает некоторую область в пространстве перемен действия I

$$I_0 - \max \Delta I \leq I \leq I_0 + \max \Delta I, \quad (1.59)$$

где $\max \Delta I$ определяется по формуле (1.25), I_0 – резонансное значение действия, определяемое по формуле (1.58). Правило квантования Эйнштейна-Бриллюэна-

Келлера

$$\frac{I}{\hbar} = m - 1/2, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.60)$$

позволяет связать интервал (1.59) с соответствующими ему собственными состояниями невозмущенной системы:

$$m^* - \Delta m \leq m \leq m^* + \Delta m, \quad (1.61)$$

где

$$\Delta m = \frac{\max \Delta I}{\hbar}. \quad (1.62)$$

Если число Δm достаточно велико, то поведение квантовых квантовых состояний, отвечающих неравенству (1.61), хорошо согласуется с поведением классических траекторий, захваченных в нелинейный резонанс. Это означает, что межуровневые переходы, описываемые (1.57), происходят только внутри группы состояний, удовлетворяющей (1.61). Данное явление получило название квантового нелинейного резонанса [54].

Перекрытие двух соседних нелинейных резонансов вызывает глобальный хаос, проявляющийся как появление обширной области в фазовом пространстве, внутри которой движение имеет характер хаотической диффузии. На квантовом уровне, при перекрытии квантовых нелинейных резонансов происходит делокализация межуровневых переходов. Как следствие, квантовое состояние, являющееся суперпозицией состояний, удовлетворяющих (1.61), будет быстро расплываться в гильбертовом пространстве, демонстрируя квантовую хаотическую диффузию. Однако, если спроецировать волновую функцию на классическое фазовое пространство, воспользовавшись, например, преобразованием Вигнера [56, 57], или вычисляя квантовомеханическое среднее для энергии, мы приходим к выводу, что квантовая хаотическая диффузия почти всегда слабее своего классического аналога. Объяснением этому служит эффект динамической локализации [58–61]. Суть динамической локализации можно объяснить следующим образом. Проекция квантового волнового пакета на классическое фазовое пространство дает некоторое лагранжево многообразие. В условиях хаоса лагранжево многообразие испытывает каскад деформаций в виде растяжений и складок. В результате, оно становится сложным и запутанным, обретая тонкую структуру, масштаб которой быстро уменьшается со временем.

Однако, интерференция размывает те детали лагранжева многообразия, размер которых меньше \hbar [62]. Как следствие, расплывание квантового волнового пакета оказывается меньше, чем предсказывается классической картиной. При всем этом, длина локализации пропорциональна классическому коэффициенту диффузии [61]. Проявление тонкой структуры классических многообразий в квантовой динамике исследовалось в работе [63] путем оценки числа гармоник функции Вигнера. Было показано, что в квантовом случае рост числа гармоник всегда является конечным. Вместе с тем, согласие между классической и квантовой картинами может быть восстановлено при внесении в систему внешнего шума, который сам по себе “размывает” тонкую структуру лагранжевых многообразий [64, 65], тем самым продлевая время соответствия.

1.2.3 Воспроизводимость квантовой эволюции в условиях хаоса

Одно из главных противоречий квантовой и классической механики заключается в принципиально разной чувствительности к малым вариациям начальных условий. В классических хаотических системах сколь угодно малое отклонение приводит к экспоненциальной расходимости относительно исходной траектории, в то время как в квантовых системах никакой расходимости нет вследствие унитарности. Тем не менее, в квантовых системах с хаотическим поведением в классическом пределе тоже возникает определенный вид экспоненциальной расходимости. Он связан с поведением воспроизводимости (англ. fidelity).

$$F(t) = |\langle \Psi(t) | \Psi'(t) \rangle|^2 = \left| \langle \Psi(0) | [\hat{\Lambda}'(t)]^+ \hat{\Lambda}(t) | \Psi(0) \rangle \right|^2, \quad (1.63)$$

где $\hat{\Lambda}$ и $\hat{\Lambda}'$ – операторы эволюции, соответствующие двум слабо отличающимся друг от друга квантовым гамильтонианам. Воспроизводимость была введена А. Пересом в работе [66]. Она может быть интерпретирована как перекрытие начального состояния $|\Psi(0)\rangle$ с этим же состоянием, после эволюции вперед по времени с одним гамильтонианом, а затем назад по времени с другим, несколько измененным. Иногда воспроизводимость называют “эхо Лошмидта”.

Как следует из уравнения (1.63), F равно 1 только когда состояния совпадают. Чем больше отклонение от единицы, тем сильнее разница между состояниями. Скорость убывания воспроизводимости со временем зависит от начальных условий, типа возмущения, наложенного на гамильтониан, а также от того, насколько устойчивым является поведение системы в классическом пределе. В хаотическом режиме воспроизводимость $F(t)$ быстро затухает до малой константы, в то время как в устойчивом режиме она демонстрирует сильные осцилляции и возвраты. В работе [67] на примере поведения квантовой частицы показано, что $F(t)$ убывает экспоненциально, причем показатель экспоненты равен усредненному по времени показателю Ляпунова. В работе [62] было показано, что затухание воспроизводимости может быть как экспоненциальным, так и гауссовым. Гауссов режим реализуется, если возмущение гамильтониана является очень слабым.

1.2.4 Спектральные свойства квантового хаоса

Классический хаос находит свое отражение и в спектральных свойствах квантовых систем. В случае периодических во времени систем под спектром квантовой системы следует понимать спектр соответствующего оператора Флоке [34]. В полуклассическом приближении плотность состояний квантовой системы может быть представлена в виде суммы двух составляющих: монотонной и осциллирующей

$$\rho(E) = \rho_0(E) + \rho_{\text{osc}}(E). \quad (1.64)$$

Если $\rho_0(E)$ является плавной функцией энергии, то $\rho_{\text{osc}}(E)$ вычисляется как сумма по классическим периодическим орбитам с помощью формулы следа Гутцвиллера [34, 68]

$$\rho_{\text{osc}}(E) = \frac{1}{\pi\hbar} \sum_n \frac{(T_{\text{orb}})_n}{\| |\mathbf{M}_{\mathbf{n}} - 1| \|^{1/2}} \cos \left[\frac{2\pi}{\hbar} I_n(E) - \frac{\mu_n \pi}{2} \right], \quad (1.65)$$

где $(T_{\text{orb}})_n$ – период n -й периодической орбиты, I_n – значение действия, соответствующее этой орбите, \mathbf{M}_n – ее матрица устойчивости (матрица монодромии)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial x(T_{\text{orb}})}{\partial x(0)} \right|_{p_0} & \left. \frac{\partial x(T_{\text{orb}})}{\partial p(0)} \right|_{x_0} \\ \left. \frac{\partial p(T_{\text{orb}})}{\partial x(0)} \right|_{p_0} & \left. \frac{\partial p(T_{\text{orb}})}{\partial p(0)} \right|_{x_0} \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

μ_n – соответствующий индекс Маслова.

Одним из ключевых положений спектральной теории квантового хаоса является гипотеза Бохигаса-Джаннони-Шмита [69] или гипотеза об универсальности: спектры систем, инвариантных по отношению к инверсии времени, классические аналоги которых являются К-системами, имеют такие же статистические свойства, какие предсказываются для гауссова ортогонального ансамбля (GOE) случайных матриц. В настоящее время гипотеза об универсальности используется в более широком смысле: статистические свойства спектра квантовой системы, классический аналог которой обладает свойством эргодичности движения, совпадают со статистическими свойствами ансамбля случайных матриц, относящихся к тому же классу универсальности, что и гамильтониан системы. Среди гауссовых ансамблей, т. е. ансамблей матриц с гауссовой статистикой матричных элементов, различают три класса универсальности: уже упомянутый GOE, GUE (гауссов унитарный ансамбль) и GSE (гауссов симплектический ансамбль). Гауссов ортогональный ансамбль состоит из симметричных действительных матриц и соответствует гамильтонианам, обладающим симметрией относительно инверсии времени. Гауссов симплектический ансамбль из матриц, состоящих из кватернионов, и соответствует системам со спином, также обладающим симметрией от отношению к инверсии времени. Наиболее общим случаем является гауссов унитарный ансамбль, состоящий из унитарных матриц, не обладающих каким либо свойством симметрии. Помимо гауссовых ансамблей следует отметить круговые (или циркулярные). Круговые ансамбли соответствуют матрицам, собственные значения которых принадлежат единичной окружности в комплексной плоскости. Важность круговых ансамблей связана с тем, что они описывают спектральные свойства оператора Флоке. Как и гауссовы ансамбли, круговые ансамбли порождают три класса универсально-

сти: круговой ортогональный ансамбль (COE), круговой унитарный ансамбль (CUE) и круговой симплектический ансамбль (CSE).

Основной характеристикой, используемой при статистическом анализе спектров, является распределение межуровневых расстояний, т. е. разностей между соседними собственными значениями. На распределение межуровневых расстояний накладываются условия нормировки

$$\int P(s) ds = 1, \quad \int sP(s) ds = 1. \quad (1.67)$$

Распределение межуровневых расстояний систем с эргодическим хаосом в классическом пределе описывается распространением Вигнера-Дайсона, которое имеет вид

$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (1.68)$$

для ортогональных ансамблей,

$$P(s) = \frac{32}{\pi^2} s^2 \exp\left(-\frac{4}{\pi} s^2\right) \quad (1.69)$$

для унитарных ансамблей и

$$P(s) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} s^4 \exp\left(-\frac{64}{9\pi} s^2\right) \quad (1.70)$$

для симплектических ансамблей. Отметим, что во всех приведенных случаях $p(s)$ обращается в нуль при $s = 0$. Это связано с “расталкиванием” уровней, свойственным эргодическому хаосу: соответствующие собственные функции сильно перекрываются в конфигурационном пространстве, что способствует снятию вырождения между ними, по аналогии со спектральным расщеплением при туннельном эффекте. Совсем иная ситуация наблюдается в случае регулярной классической динамики, когда все собственные числа являются статистически независимыми друг от друга. Как следствие, распределение межуровневых расстояний описывается формулой Пуассона

$$P(s) = \exp(-s). \quad (1.71)$$

Формулы (1.68)-(1.70) соответствуют глубокому полуклассическому режиму и не учитывают динамическую локализацию. Динамическая локализация способствует уменьшению пространства, занимаемого собственной функцией и, как

следствие, ослабляет спектральное расщепление. В частности, режим сильной локализации предполагает пуассоновскую статистику межуровневых расстояний. Попытка учесть эффект локализации была предпринята Ф.М. Израилевым [70]. Им была предложена формула

$$P(s) = As^\gamma \exp \left[-\frac{\pi^2}{16} \gamma s^2 - \left(C - \frac{\gamma}{2} \right) \frac{\pi}{2} s \right], \quad (1.72)$$

где константы A и C подбираются исходя из условий нормировки (1.67), а параметр γ характеризует степень локализации. На практике для учета локализации часто используется эвристическое распределение Броди

$$P(s) = (\beta + 1) a_\beta s^\beta \exp(-a_\beta s^{\beta+1}), \quad (1.73)$$

где значения параметра β ограничены неравенством $0 \leq \beta \leq 1$,

$$a_\beta = \left[\Gamma \left(\frac{\beta + 2}{\beta + 1} \right) \right]^{\beta+1}, \quad (1.74)$$

Γ – гамма-функция Эйлера. В частности, в работе [71] было показано, что распределение Броди дает более точное приближение в присутствии динамической локализации.

В случае смешанного фазового пространства, когда области регулярного и хаотического движения сосуществуют друг с другом, распределение межуровневых расстояний представляет собой некую комбинацию распределений Вигнера-Дайсона и Пуассона. Для случая, когда матрица гамильтониана состоит из двух независимых блоков, один из которых соответствует регулярной динамике и описывается пуассоновской статистикой, в второй соответствует хаотической динамике и ортогональному ансамблю, была выведена формула Берри-Робника [72]

$$P(s) = \left[v_r^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} v_c s \right) + \left(2v_r v_c + \frac{\pi}{2} v_c^3 s \right) \exp \left(-\frac{\pi}{4} v_c^2 s^2 \right) \right] \exp(-v_r s), \quad (1.75)$$

где v_r и v_c относительные фазовые объемы регулярного и хаотического движения, соответственно, $v_r + v_c = 1$. К сожалению, формула (1.75) справедлива только в глубоком полуклассическом режиме. Она не учитывает не только динамическую локализацию, но и динамическое туннелирование между областями регулярного и хаотического движения [73, 74]. Попытка учесть эти процессы

была предпринята в работе [75], однако полученное в итоге распределение еще нуждается в проверке в более широком круге задач.

Квантовый хаос проявляет себя и в структуре собственных функций, придавая им достаточно сложную форму. Существует несколько подходов для идентификации следов хаоса и оценки связанной с ним сложности. Часть из них основаны на проецировании собственной функции на классическое фазовое пространство с помощью функции Хусими. Функция Хусими представляет собой функцию Вигнера, сглаженную по импульсам и координатам на масштабах, соответствующих соотношению неопределенностей Гейзенберга. В одномерном случае функция Хусими выглядит следующим образом:

$$W_h(x, p) = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta_x^2}} \int dx' \varphi_n(x', t) \exp\left(ip\frac{(x' - x)}{\hbar} - \frac{(x' - x)^2}{4\Delta_x^2}\right) \right|^2, \quad (1.76)$$

где Δ_x масштаб сглаживания по координате. По виду функции Хусими мы можем ассоциировать ту или иную собственную функцию с соответствующим классическим многообразием, определив какому режиму она соответствует, регулярному или хаотическому, по структуре классического фазового портрета. Впрочем, определить это однозначно удастся не всегда, поскольку могут существовать собственные функции, которые одновременно принадлежат как хаотическим, так и регулярным областям в фазовом пространстве [76]. Такие собственные функции несут основную ответственность за динамическое туннелирование между регулярными и хаотическими областями [73, 74]. Кроме того, можно оценить степень сложности той или иной собственной функции по второму моменту распределения Хусими, характеризующего площадь в фазовом пространстве, которую занимает данное собственное состояние [77]. При этом следует иметь в виду, что далеко не всегда большая площадь означает хаотическое поведение.

В работе [78] П.Лебёфом и А.Воросом был предложен достаточно интересный критерий оценки степени сложности квантового состояния по распределению нулей функции Хусими. К регулярном случае нули распределяются вдоль кривых на расстоянии $O(\hbar)$ друг от друга. В хаотическом случае они заполня-

ют область между пиками функции Хусими подобно газу, при этом средняя дистанция между соседними нулями составляет $O(\sqrt{\hbar})$. Критерий Лебёфа-Вороса исследовался во многих работах, например в [79–81].

Среди методов, не связанных с проецированием волновой функции на классическое фазовое пространство, выделим оценку сложности по статистике нодалных точек [82–84].

1.3 Волновой хаос в акустике океана

1.3.1 Дальнее распространение звука в океане

Возможность распространения звука в океане на расстояния порядка сотен и даже тысяч километров обусловлена существованием рефракционного волновода естественного происхождения, который называется подводным звуковым каналом (сокращенно ПЗК) [85, 86]. Вертикальный профиль скорости звука в глубоководных ПЗК обычно имеет минимум на глубине около одного километра. Вследствие этого часть звуковой энергии оказывается захваченной волноводом, что “предохраняет” ее от сильного затухания в результате отражений от поглощающего дна. Опыты по дальнему распространению звука чаще всего проводятся на частотах порядка 100 Герц, для которых диссипация в морской воде невелика (лишь несколько дБ на 1000 км). Поэтому сигналы на таких частотах удается уверенно регистрировать даже на дистанциях, превышающих 10000 км [87].

Волновое поле в ПЗК подчиняется обычному линейному волновому уравнению. Поэтому для его описания можно использовать общеизвестные методы, которые традиционно применяются для анализа полей в волноводах разной физической природы. Интенсивные теоретические и экспериментальные исследования дальнего распространения звука в океане ведутся более шестидесяти лет. Уже в середине 1980-х годов этот вопрос считался хорошо изученным. Однако впоследствии выяснилось, что существует фактор, не принимавшийся ранее во внимание, который в значительной степени определяет структуры звуковых полей на тысячекилометровых трассах. Речь идет о лучевом хаосе, значение которого в акустике океана было осознано лишь в начале 1990-х годов [36, 55]. Важ-

ную роль здесь сыграли работы С.С. Абдуллаева и Г.М. Заславского [88–92], результаты которых суммированы в их обзоре, опубликованном в УФН в 1991 году [93]. Несмотря на то, что эти работы посвящены анализу общих вопросов, связанных с хаотической динамикой лучей в неоднородных волноводах, они в значительной мере инициировали активное изучение хаотических явлений в приложении к задачам подводной акустики. Примерно в это же время (конец 1980-х – начало 1990-х годов) в США был опубликован ряд статей, с которых фактически началось систематическое исследование лучевого и волнового хаоса в глубоководных ПЗК [94–97].

Явление лучевого хаоса заключается в том, что траектория луча, заданная детерминированными уравнениями Гамильтона, ведет себя подобно случайному процессу. Хаотические траектории крайне чувствительны к малым вариациям начальных условий: разность вертикальных координат (глубин) z двух траекторий с близкими начальными условиями с увеличением расстояния r растет (в среднем) по экспоненциальному закону [93, 98–100]

$$\Delta z \sim e^{\lambda_L r}, \quad (1.77)$$

где λ_L – так называемый показатель Ляпунова. Закон (1.77) выполняется до тех пор, пока Δz не становится порядка вертикального размера волновода. По тому же закону (и с тем же λ_L) растут разности углов скольжения лучей. Оценки показывают, что значения λ_L в реалистичных моделях ПЗК имеют величины порядка 0.01 км^{-1} [101]. На дистанциях, превышающих 1000 км, хаос уже хорошо развит и его учет становится принципиально необходимым. В настоящее время изучение лучевого хаоса, а также его проявлений при конечной длине волны – волнового хаоса – рассматривается как одно из главных направлений теории дальнего распространения звука в океане [102].

1.3.2 Общие формулы

Рефракция звуковых волн определяется пространственной изменчивостью показателя преломления звуковых волн

$$n(z, r) = \frac{c_0}{c(x, y, z)}, \quad (1.78)$$

где $z > 0$ – глубина океана, x и y – горизонтальные координаты, c_0 – некоторое характерное значение скорости звука внутри водной толщи. Обычно в качестве c_0 используется скорость звука на оси подводного звукового канала. Поскольку горизонтальная изменчивость океана гораздо слабее, чем вертикальная, можно понизить размерность задачи, предположив, что поле скорости звука, как и акустическое поле, является цилиндрически симметричным. Это предположение представляется вполне резонным, когда речь идет о дальнем распространении звука, поскольку в этом случае влияние боковой рефракции, т. е. рефракции в горизонтальном направлении, перпендикулярном направлению распространения, является пренебрежимо малым. Таким образом, мы можем заменить обе горизонтальные координаты на единственную радиальную r .

Вариации скорости звука в океане, как правило, могут быть представлены в виде суммы

$$c(z, r) = c_0 + \Delta c(z) + \delta c(z, r). \quad (1.79)$$

Члены, входящие в правую часть этого выражения, удовлетворяют двойному неравенству

$$|\delta c|_{\max} \ll |\Delta c|_{\max} \ll c_0. \quad (1.80)$$

Левое неравенство подчеркивает упомянутую выше слабость горизонтальной изменчивости океана по сравнению с вертикальной. Правое неравенство отражает тот факт, что вариации скорости звука являются малыми по сравнению с ее абсолютным значением. Последнее обстоятельство означает, что только волны, скользящие относительно горизонтальной плоскости под малыми углами, способны распространяться на дальние расстояния без отражений от поглощающего дна океана. В связи с этим мы можем воспользоваться малоугловым приближением, в котором акустическое волновое поле описывается стандартным параболическим уравнением

$$\frac{i}{k_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + [U(z) + V(z, r)] \Psi, \quad (1.81)$$

где волновая функция Ψ связана с акустическим давлением u с помощью формулы $u \propto \Psi \exp(ik_0 r) / \sqrt{r}$. Здесь знаменатель \sqrt{r} отвечает за цилиндрическое расплывание звука, параметр $-k_0$ это волновое число в однородной среде со скоростью звука c_0 , которое связано с частотой звука f с помощью соотношения

$k_0 = 2\pi f/c_0$. Функции $U(z)$ и $V(z, r)$ определяются изменчивостью скорости звука. В малоугловом приближении они могут быть выражены как

$$U(z) = \frac{\Delta c(z)}{c_0}, \quad V(z, r) = \frac{\delta c(z, r)}{c_0}. \quad (1.82)$$

В соответствии с (1.80)

$$|V|_{\max} \ll |U|_{\max}, \quad (1.83)$$

т. е. $V(z, r)$ может рассматриваться как малое возмущение. Легко заметить, что подстановка

$$k_0^{-1} \rightarrow \hbar, \quad r \rightarrow t \quad (1.84)$$

обращает параболическое уравнение (1.81) в уравнение Шредингера для квантовой частицы с единичной массой. Это обстоятельство позволяет исследовать распространение волн с помощью методов и подходов развитых в квантовой механике. В частности, методы и подходы теории квантового хаоса могут являться основным средством исследования волнового хаоса [103]. Следуя аналогии с квантовой механикой, функция $U(z)$ играет роль невозмущенного потенциала, горизонтальная координата r выполняет функции времени, а $V(z, r)$ является нестационарным возмущением.

В коротковолновом пределе $k_0 \rightarrow \infty$, решение параболического уравнения (1.81) может быть представлено в виде суммы лучей траектории которых определяются гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2} + U(z) + V(z, r), \quad (1.85)$$

где $p = \tan \chi$, χ угол скольжения луча (т. е. угол относительно горизонтальной плоскости). Соответствующие уравнения Гамильтона имеют вид

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\partial H}{\partial p} = p, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (1.86)$$

Следуя оптико-механической аналогии, в англоязычной литературе величину p часто называют ray momentum, что можно перевести как “импульс луча”. К сожалению, буквальный перевод на русский в данном случае может привести к путанице, т. к. в отечественной акустической терминологии слово “импульс” прочно закреплено за импульсными сигналами. В связи с этим, в дальнейшем мы будем называть величину p просто как тангенс угла скольжения.

Главной измеряемой характеристикой в экспериментах по дальнему распространению звука являются времена прихода акустических сигналов. В лучевом приближении время прихода сигнала на расстоянии R от источника выражается следующим образом

$$t = \frac{R}{c_0} + \int_{r=0}^R L dr, \quad (1.87)$$

где L – лучевой лагранжиан

$$L = p^2 - H. \quad (1.88)$$

1.3.3 Внутренние волны

В современной акустике океана принято считать, что основным фактором горизонтальной изменчивости, ответственным за хаотическое поведение лучевых траекторий в глубоком море, являются флуктуации скорости звука, индуцированные случайными внутренними волнами [55, 85, 101]. Несмотря на относительную малость этих флуктуаций, $|\delta c|_{\max}/c_0 \simeq 5 \cdot 10^{-4}$, вызываемые ими искажения звукового поля, накапливаясь по мере распространения звука, оказываются заметными уже на дистанциях порядка 100 км. Флуктуации скорости звука можно оценить, основываясь на модели спектра внутреннего волнения Гарретта–Манка [85, 104, 105]. При этом

$$\frac{\delta c}{c_0} = \frac{\mu}{g} N^2(x, y, z) \zeta(x, y, z), \quad (1.89)$$

где $\mu = 24.5$, N – частота плавучести, которая максимальна на глубине термоклина, $\zeta(x, y, z)$ описывает вертикальные смещения частиц жидкости во внутренней волне. Эту функцию представляют в виде суперпозиции мод внутренних волн со случайными амплитудами, статистика которых задается эмпирическим спектром Гарретта–Манка. Дисперсия флуктуаций скорости звука, вызванных внутренними волнами, уменьшается с глубиной. Вблизи поверхности средне-квадратичная величина δc по порядку величины равна 1 м/сек. Случайное поле внутренних волн в океане содержит большое число мод. Их горизонтальные длины волн варьируются от сотен метров до сотен км, а вертикальные – от единиц до сотен метров. Спектральные веса высших мод относительно

малы, однако они порождают тонкую структуру поля скорости звука. Аналитические оценки и данные численного моделирования свидетельствуют о том, что расчеты параметров поля, выполненные с использованием модели Гарретта-Манка, удовлетворительно согласуются с результатами натуральных экспериментов на трассах длиной порядка сотен и тысяч километров [85, 106].

1.3.4 Акустическая термометрия и эксперименты по дальнему распространению звука в океане

Исследования дальнего распространения звука в океане направлены, в первую очередь, на решение задач акустического мониторинга температурных полей в водной толще. Вариации температуры вызывают возмущение поля скорости звука δc , которое, в свою очередь, приводит к вариациям звукового поля. Долговременные измерения параметров звукового поля, в принципе, позволяют восстанавливать вариации δc (путем решения соответствующей обратной задачи), которые затем легко пересчитываются в вариации температуры. Акустический мониторинг имеет ряд преимуществ по сравнению с другими дистанционными методами. Например, возможности спутникового зондирования ограничены поверхностным слоем, тогда как использование акустических методов позволяет "заглянуть" вглубь океана.

Наиболее известная схема акустической томографии океана была предложена в классической работе Манка и Вунша [107]. Их подход базируется на том факте, что на достаточно больших дистанциях могут неплохо разрешаться звуковые импульсы, приходящие в точку приема по разным лучам. Более того, времена прихода этих лучевых импульсов с хорошей точностью предсказываются в рамках простейшей модели среды, которая не учитывает флуктуаций скорости звука, вызванных внутренними волнами и другими относительно мелкомасштабными неоднородностями.

Процедура решения обратной задачи в методе акустической томографии океана основана на следующих простых соображениях. Представим поле скорости звука в виде $c(x, y, z) = c_{\text{ref}}(x, y, z) + \delta c(x, y, z)$, где $c_{\text{ref}}(x, y, z)$ – некоторое типичное поле на исследуемой акватории, построенное на основе многолетних наблюдений (информация извлекается из соответствующих баз данных), а

$\delta c(x, y, z)$ – подлежащее восстановлению возмущение данного поля. Если возмущение не слишком велико, в первом приближении можно считать, что оно не приводит к заметному искажению лучевых траекторий. При этом изменение времени прихода луча δt выразится соотношением [107]

$$\delta t = - \int_{\Gamma} \frac{\delta c}{c_{\text{ref}}^2} ds, \quad (1.90)$$

где интегрирование идет вдоль невозмущенной траектории Γ , а ds – элемент длины дуги. Формула (1.90) дает необходимую для решения обратной задачи связь между неизвестным возмущением δc и измеряемыми смещениями времен прихода лучей δt . В работе [107] предложен метод решения обратной задачи, который потом получил развитие в многочисленных работах других авторов (см. монографию [108] и ссылки в ней).

Метод Манка и Вунша был успешно апробирован в демонстрационном эксперименте, выполненном в 1981 году в Атлантике на акватории размерами 300×300 км² [109]. Полученные данные оказались в хорошем соответствии с результатами прямых измерений вариаций температурного поля контактными методами.

Лучевой хаос накладывает жесткие ограничения на возможности метода Манка-Вунша. Дело в том, что схема Манка-Вунша предполагает вычисление семейства собственных лучей, связывающих приемник и источник звука. В условиях лучевого хаоса – вследствие крайне высокой чувствительности траекторий к малым вариациям начальных условий – количество собственных лучей экспоненциально растет с увеличением дистанции, а решение обратной задачи на длинных трассах становится практически невозможным [97].

Рядом авторов рассматривается аналог метода акустической томографии океана, который называется методом модовой томографии. Он основан на использовании в качестве измеряемых акустических параметров либо фаз комплексных амплитуд нормальных мод, либо времен прихода звуковых импульсов, переносимых отдельными модами [110–112]. Изменения этих параметров, как и изменения времен прихода лучей, могут быть просто выражены через возмущение δc . В модовой томографии также существуют ограничения, обусловленные лучевым хаосом: рассеяние на внутренних волнах приводит к уве-

личению длительности модовых импульсов, попутно придавая им крайне нерегулярную форму [113, 114].

Метод акустической томографии был предложен для реконструкции возмущений температурных полей на акваториях с характерными размерами порядка нескольких сотен (до тысячи) километров. В 1990-е годы на повестку дня был поставлен вопрос об акустическом зондировании акваторий с характерными размерами 5-10 тысяч километров (это характерные размеры океанов). Целью ставилась диагностика климатических вариаций средней температуры океана и анализ проявлений парникового эффекта. Вывод о принципиальной возможности решения этой задачи был сделан на основе анализа данных ряда крупномасштабных морских экспериментов.

Самый известный и впечатляющий из них был проведен в 1991 году совместными усилиями ученых разных стран под руководством У. Манка (США) [87]. В этом эксперименте звук когерентного источника был зарегистрирован в различных местах Атлантического и Тихого океанов на рекордном расстоянии порядка 18 тыс. км. (см. рис. 1.2). Удавалось разрешать лучевые импульсы с временами прихода, различавшимися всего лишь на несколько миллисекунд. Этот эксперимент стал проверкой возможностей регистрации звуковых сигналов на столь больших расстояниях перед запланированными работами по акустической термометрии океана. Источники звука размещались на косе, опущенной с борта судна на глубину оси локального ПЗК (175 м) вблизи австралийского о. Хёрд, расположенного в субантарктической зоне Индийского океана. Излучались монохроматические и узкополосные импульсные сигналы на частотах близких к 60 Гц. Максимальная мощность излучения достигала 220 дБ.

Важный натурный эксперимент АЕТ (Acoustic Engineering Test) проводился в течение недели в ноябре 1994 г. Источник широкополосных сигналов с центральной частотой 75 Гц находился в северной части Тихого океана на глубине 625 м вблизи оси ПЗК. Сигналы регистрировались около Гавайских о-вов с помощью вертикальной цепочки из 20 приемных гидрофонов. Расстояние между соседними гидрофонами составляло 35 м (1,75 длины волны звука на частоте 75 Гц) и они перекрывали диапазон глубин от 900 до 1600 м. Акустическая трасса длиной 3252 км не пересекала крупномасштабных гидрологических структур типа фронтов и течений и на ее пути не было больших подводных хребтов.

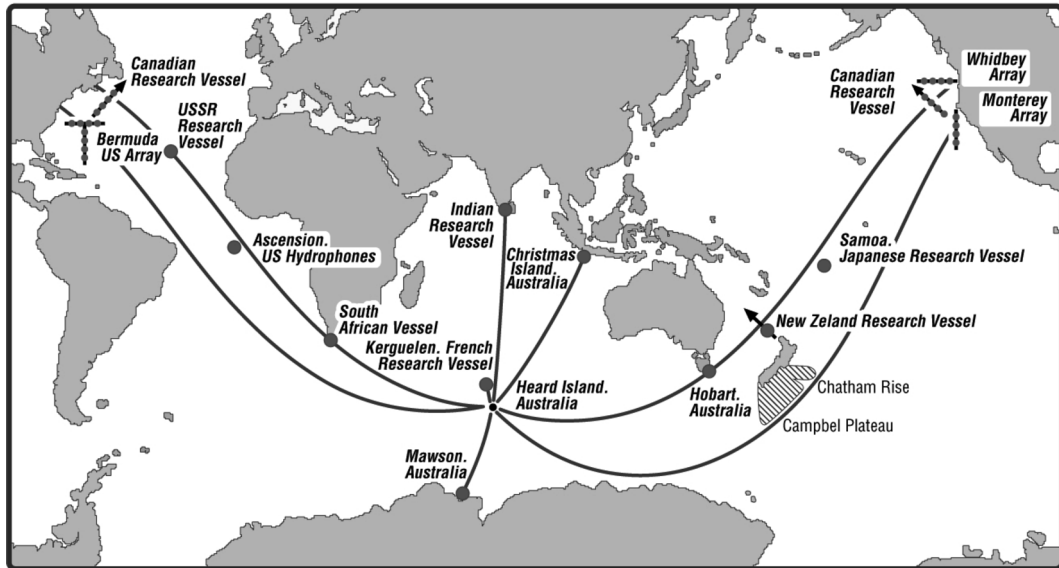


Рисунок 1.2: Схема эксперимента по дальнему распространению звука в океане [87]. Черные кружки показывают места расположения приемных систем [36]

Анализ результатов эксперимента АЕТ был проведен в ряде работ [101, 115–117]. Начальная часть регистрируемого сигнала была достаточно устойчива и в ней можно было уверенно разрешить и идентифицировать приходы импульсов, распространяющихся по крутым лучам. Поздняя часть регистрируемого сигнала, напротив, была неустойчива и в ней нельзя было выделить никаких устойчивых приходов.

Качественное различие свойств ранней и поздней частей звукового сигнала было объяснено с помощью теории лучевого хаоса. В работе [101] было проведено численное моделирование лучевой динамики в условиях эксперимента АЕТ с учетом внутренних волн со спектром Гарретта–Манка. Результаты такого моделирования согласуются в целом с результатами эксперимента (см. рис. 1.3). Расчеты подтверждают, что разбегание траекторий с близкими начальными условиями происходит по закону (1.77). Исследована зависимость показателя Ляпунова ν от угла скольжения χ_0 , под которым луч пересекает ось ПЗК. Для пологих лучей ($|\chi_0| \leq 5^\circ$) типичная величина ν составляет $1/100 \text{ км}^{-1}$, а для крутых ($6^\circ \leq \chi_0 \leq 11^\circ$) она уменьшается до $1/300 \text{ км}^{-1}$. Таким образом, крутые лучи существенно менее хаотичны, чем пологие. Это частично объясняет устойчивость начальной части сигнала, формируемой импульса-

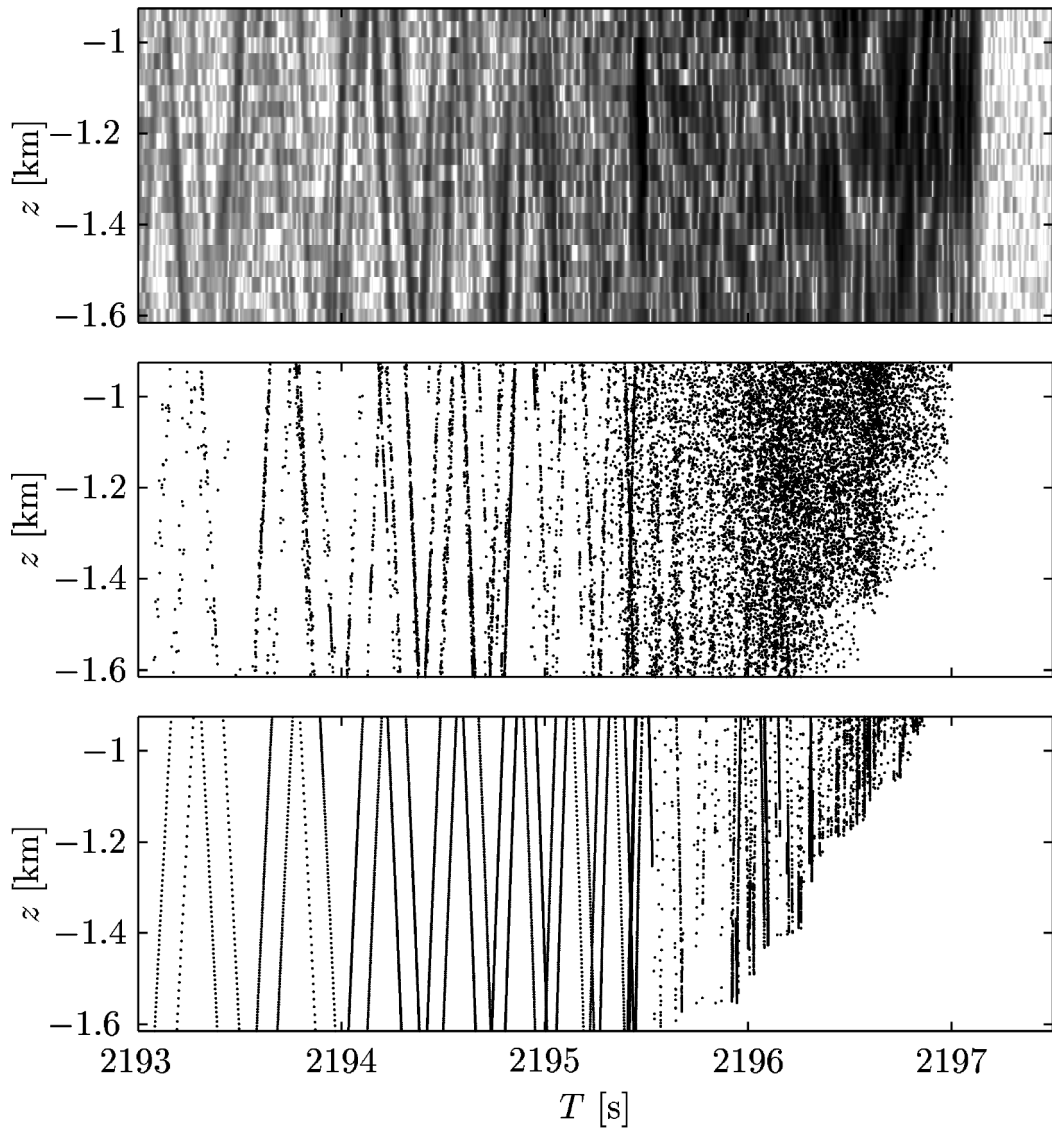


Рисунок 1.3: Измеренная и рассчитанные $t - z$ -диаграммы эксперимента АЕТ. Вверху: типичный результат измерения интенсивности звука с динамическим диапазоном 30 дБ. В середине: рассчитанная $t - z$ -диаграмма с учетом внутренних волн. Внизу: то же без внутренних волн. На рисунке вертикальная ось направлена вверх, поэтому глубина океана принимает отрицательные значения [101]

ми, распространяющимися вдоль крутых лучей. Аналогичная картина была обнаружена в эксперименте SLICE89 [118, 119], проведенном в 1989 г. на трассе длиной 1000 км в северо-восточной части Тихого океана с использованием источника 250 Гц и вертикальной антенны длиной 3 км с 50 гидрофонами.

Заметим, что хаотичность пологих лучей не является общей закономерностью распространения звука в глубоком океане. Например, эксперименты, проведенные в Японском море с источником вблизи полуострова Гамова [120–122] свидетельствуют о достаточно высокой устойчивости приосевых лучей, что связано, по всей видимости, с особенностями поля внутренних волн в данном районе.

Эти и другие натурные эксперименты доказали, что низкочастотные акустические сигналы могут распространяться на многие тысячи километров со сравнительно малым затуханием. Оказалось, что даже на столь длинных трассах важные особенности звукового поля хорошо описываются в рамках геометрической оптики. В частности, звуковые импульсы, приходящие в точку наблюдения по крутым лучам и формирующие начальную часть сигнала, во многих случаях могут быть разрешены и идентифицированы. Более того, было показано, что долговременное наблюдение за вариациями времен прихода лучевых импульсов позволяет отслеживать климатические вариации средней температуры [123]. С другой стороны, эксперименты свидетельствуют, что флуктуации скорости звука, вызванные внутренними волнами и другими гидрологическими неоднородностями, оказывают сильное влияние на распространение звука на большие расстояния. Это указывает на необходимость учета эффектов лучевого хаоса для адекватного описания звуковых полей на больших расстояниях.

1.4 Эффект рэтчета

Эффект рэтчета заключается в возникновении направленного транспорта при отсутствии направленных сил. Само по себе слово рэтчет происходит от английского ratchet, что означает храповик или храповое колесо. Исторически это название возникло в связи с идеей эксперимента, описанной в 1912 году Марианом Смолуховским на конференции в Мюнстере. Предложенный эксперимент имел следующую конфигурацию. Предполагалось на одной оси расположить храповое (зубчатое) колесо с “собачкой”, допускающей вращение колеса только в одном направлении, колесо с лопастями, а между ними расположить еще одно колесо с подвешенным к нему грузом. Все устройство предпола-

лось поместить в сосуд с газом, находящимся в состоянии термодинамического равновесия. Удары молекул газа об лопасти должны вызывать вращение оси. В отсутствие храпового колеса это вращение было бы ненаправленным в том смысле, что повороты в различных направлениях в среднем компенсировали бы друг друга. Наличие храповика с собачкой приводит к тому, что допустимым является только одно направление вращения. Таким образом возникает парадоксальная ситуация, когда равновесный газ совершает ненулевую работу над подвешенным грузом, что, казалось бы, противоречит второму закону термодинамики. Впоследствии эта конфигурация была подвергнута анализу Ричардом Фейнманом в его “Лекциях по физике” [124]. В итоге она получила название рэтчета Смолуховского-Фейнмана. Разгадка озвученного Смолуховским парадокса заключается в том, что само присутствие храповика нарушает равновесность рассматриваемой системы в целом, создавая возможность для совершения работы. Наиболее современное состояние проблемы рэтчетов представлено в новом обзоре [125]. Ниже мы дадим краткое описание тех аспектов проблемы, которые более всего близки к задачам, рассмотренным в последующих главах.

Возникновение направленного транспорта в рэтчетах сопровождается нарушением пространственно-временных симметрий в уравнениях движения. Рассмотрим в качестве примера динамическую систему, описываемую уравнением

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + F(x) + W(t) = 0, \quad (1.91)$$

где функции $F(x)$ и $W(t)$ удовлетворяют условиям периодичности

$$F(x) = F(x + 2\pi), \quad W(t) = W(t + T), \quad (1.92)$$

а также имеют нулевые средние по пространству и времени, соответственно, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} F dx = \int_{-\infty}^{\infty} W dt = 0. \quad (1.93)$$

Тогда направленный транспорт может возникнуть при нарушении следующих симметрий [125, 126]:

$$x \rightarrow -x + x', \quad t \rightarrow t + t', \quad (1.94)$$

$$x \rightarrow x + x', \quad t \rightarrow -t + t', \quad (1.95)$$

где q' и t' – некоторые сдвиги по переменным.

В последнее время наблюдался резкий всплеск интереса к эффекту рэтчета, во многом связанный с перспективами практического применения этого явления (см., например, обзор [127]). Если говорить о рэтчетах в гамильтоновых и близких к ним системах, то среди наиболее актуальными приложениями являются фотогальванические явления в различных твердотельных структурах [128–136], джозефсоновские переходы [137, 138], а также создание направленного атомного транспорта в оптических решетках, на котором мы ниже остановимся поподробнее. Эти направления пересекаются между собой в том смысле, что одним из главным назначений экспериментов с холодными атомами в оптических решетках является симуляция явлений физики твердого тела, в особенности тех, которые в силу объективных трудностей тяжело наблюдать непосредственно в твердотельных экспериментах. Помимо этого, атомные рэтчеты имеют самостоятельную ценность с точки зрения различных нанотехнологий, таких как транспортирование квантовых состояний с целью обеспечения квантовой коммуникации [139, 140].

В классических гамильтоновых системах делокализация частиц возможна только за счет хаотической диффузии в фазовом пространстве. Только в этом случае отдельная частица может пересечь сепаратрису и перейти в состояние баллистического полета. Полеты разных частиц могут иметь противоположное направление, однако, если присепаратрисный хаотический слой асимметричен по импульсу, то противоположные потоки частиц не компенсируют друг друга, и результирующий поток имеет выделенное направление. В нулевом приближении асимптотическая (т. е. полученная при усреднении по бесконечному интервалу времени) скорость потока может быть оценена по границам хаотического слоя с помощью правила сумм [141]. Более аккуратный расчет требует учета так называемых баллистических ловушек, приводящих к "полетам Леви" [23, 24]. Ширина хаотического слоя и, как следствие, скорость потока могут быть увеличены за счет уменьшения частоты действующего на систему переменного возмущения [142, 143]. В последнем случае даже слабого переменного возмущения оказывается достаточно для гигантского ускорения частиц. В работе [144] эффект рэтчета был реализован в случае потенциала, образованного периодической последовательностью потенциальных барьеров конечной высоты.

В качестве нестационарного возмущения выступают горизонтальные смещения этих барьеров. Отметим также работу [145], где рассматривалось возникновение направленного баллистического транспорта в неупорядоченном потенциале.

Эффект рэтчета стал предметом обширного интереса в квантовой оптике как средство манипулирования холодными атомами в оптических решетках. Первая экспериментальная реализация рэтчета с холодными атомами была проведена в работе С. Mennerat-Robilliard с соавторами [146] для атомов рубидия в локально-асимметричной оптической решетке. В эксперименте с атомами цезия в асимметричных пульсирующих решетках была успешно реализована схема рэтчета-ускорителя [147]. Было обнаружено, что квантовые поправки ограничивают ускорение – происходит так называемая динамическая локализация. Другой успешно реализованный метод - использование квазипериодической внешней силы [148, 149]. Вблизи атомно-полевого резонанса возникает дополнительная возможность для создания атомного рэтчета, связанная с диссипацией, обусловленной процессами сизифова охлаждения атомов. Диссипация разрушает симметрию по отношению к обращению времени, что приводит к направленному транспорту [150]. Также отметим создание направленного атомного транспорта при амплитудной модуляции решетки вкупе с осциллирующей внешней силой [151]. В работах [152, 153] рассматривались атомные рэтчеты, образованные с помощью суперпозиции пульсирующих решеток. В статье [154] предлагается модель рэтчета с использованием квазипериодической решетки, находящейся под воздействием однородной силы. Направленный транспорт возникает за счет туннельных переходов Ландау-Зенера. Особый интерес вызывает работа [155], где исследовались пути создания квантового рэтчета, в котором направленный транспорт сопровождался бы минимальным пространственным расплыванием волнового пакета, что является предпочтительным с точки зрения различных приложений, связанных, например, с квантовой информатикой. В последние годы значительный интерес прикован к эффекту рэтчета с атомным конденсатом Бозе-Эйнштейна в оптической решетке [156, 157]. Если речь идет о многоатомном ансамбле, динамика которого может быть описана в приближении среднего поля, то помимо нарушения симметрий (1.94) и (1.95), появляется дополнительный механизм возникновения направленного транспорта, связанный с явлением спонтанного нарушения симметрии [158, 159].

Глава 2

Резонансное воздействие волнообразного возмущения на классическую колебательную систему

2.1 Общая теория резонанса с быстрыми пространственными колебаниями возмущения

2.1.1 Общее описание проблемы

Гамильтоновы системы, в которых на потенциал накладывается некоторое возмущение в форме бегущей или стоячей волны, встречаются в различных областях физики. В качестве примера можно привести задачи физики плазмы [160], ускорители частиц [161], перенос пассивной примеси в меандрирующих течениях [41, 42], электрон-фононное взаимодействие в кристаллах [162], ионы в магнитных ловушках [163], атомы в нестационарных оптических решетках [152] и т. д. Ниже мы обратимся к случаю, когда волновое число возмущения является достаточно большим, т. е. возмущение демонстрирует быстрые пространственные осцилляции. В данной главе будет рассматриваться только классическая динамика.

Рассмотрим одномерное движение частицы в поле потенциала $U(x)$. В отсутствие диссипации движение частицы описывается гамильтонианом

$$H = \frac{p^2}{2M} + U(x) + \varepsilon \cos \psi(x, t), \quad (2.1)$$

где p – импульс частицы, M – ее масса, константа ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon \ll U_0$, где U_0 – высота потенциала $U(x)$ (если $U_0 = \infty$, ε может иметь произвольное конечное значение). Нестационарное возмущение в данном случае представляет собой плоскую волну, фаза которой дается формулой

$$\psi = kx + svt + \varphi(x, \mu t). \quad (2.2)$$

Здесь функция φ описывает адиабатическую модуляцию фазы, при этом константа μ удовлетворяет неравенству

$$\mu \ll \sqrt{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Направление фазовой скорости возмущения задается параметром s , который принимает значения 1 или -1. Траектория частицы удовлетворяет уравнениям Гамильтона

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{M}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -U'_x + \varepsilon (k + \varphi'_x) \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Введем обозначение $\tau = \mu t$. Согласно (2.3), μ является очень малой константой, поэтому можно трактовать τ как параметр, величина которого медленно меняется со временем.

Динамика частицы качественно зависит от величины волнового числа k . Пусть движение частицы является финитным и L – характерное значение расстояния, которое преодолевает частица между двумя точками разворота. Тогда, если k имеет тот же порядок величины, что и $2\pi/L$, или меньше, то влияние возмущения на частицу сводится к обычному нелинейному резонансу

$$l\omega = n\nu_{\text{inst}}, \quad (2.5)$$

где ω – частота невозмущенных колебаний частицы, l и n – целые числа и

$$\nu_{\text{inst}} = s\nu + \mu\varphi'_\tau \quad (2.6)$$

мгновенная частота возмущения.

Качественно иная ситуация возникает в случае $k \gg 2\pi/L$. Если волновое число k велико, возмущение быстро осциллирует вдоль траектории частицы всюду, за исключением некоторой области, где выполняется следующее резонансное условие:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{kp}{M} + s\nu + \mu\varphi'_\tau + \varphi'_x \frac{p}{M} \simeq 0. \quad (2.7)$$

Данное условие может выполняться тогда, когда скорость частицы v близка к фазовой скорости волны

$$v = v_{\text{ph}} = -\frac{\nu_{\text{inst}}}{k_{\text{inst}}}. \quad (2.8)$$

Здесь k_{inst} – мгновенное значение волнового числа возмущения

$$k_{\text{inst}} = k + \varphi'_x, \quad (2.9)$$

являющееся функцией τ . Случай $U = \text{const}$ хорошо известному явлению резонанса “волна-частица” [160, 164]. Присутствие неоднородного потенциала ведет к более сложной ситуации.

2.1.2 Динамика в окрестности резонанса

Вдали от резонанса (2.7) быстрые осцилляции возмущения не оказывают значительного влияния на динамику частицы и задача может быть сведена к интегрируемой с помощью метода усреднения [165].

Для описания движения вблизи резонанса (2.7) дважды продифференцируем фазу ψ по времени. Тогда учитывая, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.10)$$

и принимая во внимание (2.4), получаем уравнение маятникового типа

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \Omega^2 \sin \psi + F(x, p, \tau) = 0, \quad (2.11)$$

где

$$\Omega(x, \tau) = k_{\text{inst}} \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}, \quad (2.12)$$

$$F(x, p, \tau) = U'_x \frac{k_{\text{inst}}}{M} - 2\mu\varphi''_{x\tau} \frac{p}{M} - \varphi''_{xx} \frac{p^2}{M^2}. \quad (2.13)$$

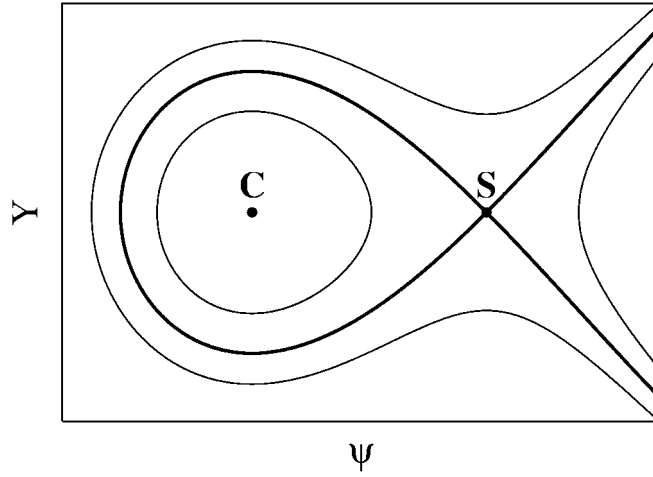


Рисунок 2.1: Фазовый портрет системы уравнений (2.14) при $F < 0$. Буквы **C** и **S** обозначают эллиптическую и гиперболическую особые точки, соответственно [166]

Мы можем переписать (2.11) в виде пары уравнений в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= Y = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial Y}, \\ \frac{dY}{dt} &= \Omega^2 \sin \psi - F = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi} \end{aligned} \quad (2.14)$$

с гамильтонианом

$$\tilde{H} = \frac{Y^2}{2} + \Omega^2 \cos \psi + F\psi. \quad (2.15)$$

Традиционный подход при исследовании этой системы уравнений заключается в привлечении адиабатического приближения [167–169]. Это означает, что динамика рассматривается при “замороженных” значениях x , p и τ , которые рассматриваются как медленно-меняющиеся параметры. Если $\Omega^2 > |F|$, фазовый портрет плоскости $(\psi - Y)$ (см. Рис. 2.1) содержит область финитного движения, которая, собственно, и соответствует попаданию в резонанс (2.7). Эллиптическая и гиперболическая особые точки на фазовом портрете могут быть найдены из уравнения

$$\Omega^2 \sin \psi - F = 0. \quad (2.16)$$

Координаты гиперболической точки даются выражением

$$\psi_s = \arcsin \frac{F}{\Omega^2} + 2\pi n, \quad Y = 0, \quad (2.17)$$

где n – целое число. Соответствующее выражение координат эллиптической точки:

$$\psi_c = -\psi_s + \pi(2n + 1), \quad Y = 0. \quad (2.18)$$

Используя (2.17) и (2.18), мы можем найти сепаратрисное значение гамильтониана (2.15)

$$\tilde{H}_{\text{sep}} = \Omega^2 \cos \psi_s + F\psi_s. \quad (2.19)$$

Ω и F медленно меняются вдоль траектории частицы. Как следствие, размер сепаратрисной петли меняется тоже. Это обстоятельство дает возможность для пересечения изначально нерезонансной частицей сепаратрисы и попадания в резонанс (2.7), равно как и для последующего выхода этой частицы из резонанса. Если ограничить область значений ψ интервалом $[-\pi : \pi]$, можно вывести критерий попадания в резонанс (2.7)

$$\tilde{H} \Big|_{x(t), p(t)} \leq \tilde{H}_{\text{sep}} \Big|_{x(t), p(t)}, \quad (2.20)$$

где подчеркивается, что \tilde{H} и \tilde{H}_{sep} вычисляются вдоль траектории частицы $[x(t), p(t)]$. Кроме того, при вычислении \tilde{H}_{sep} , число n в уравнении (2.17) выбирается из условия $-\pi \leq \psi_s \leq \pi$. Как было указано в работе [167], захват частицы в резонанс возможен только тогда, когда площадь резонансной области возрастает вдоль траектории. Это условие может быть переформулировано в более простой форме, если сделать разумное предположение: площадь резонансной области монотонно возрастает с увеличением ее ширины по переменной Y

$$\Delta Y = 2\sqrt{2(\tilde{H}_{\text{sep}} - \tilde{H}_{\text{min}})}, \quad (2.21)$$

где \tilde{H}_{min} минимальное значение гамильтониана (2.15) при $\psi \in [-\pi : \pi]$, определяемое по формуле

$$\tilde{H}_{\text{min}} = \Omega^2 \cos \psi_c + F\psi_c. \quad (2.22)$$

Здесь $-\pi \leq \psi_c \leq \pi$. Таким образом, траектория может пересечь сепаратрису и попасть в резонанс, если [166]

$$\frac{d(\Delta Y)}{dt} \Big|_{x(t), p(t)} > 0. \quad (2.23)$$

2.1.3 Возникновение хаотического слоя его расположение в фазовом пространстве

Важным свойством резонанса (2.7) является то, что каждое прохождение траектории через него сопровождается скачком переменной действия и, как следствие, энергии. Величина этого скачка обладает острой чувствительностью к малым изменениям начальных условий [167, 168]. Более того, в работе [169] было доказано отсутствие устойчивых периодических траекторий, которые пересекали бы сепаратрису резонансной области. Таким образом, все траектории, пересекающие сепаратрисную петлю, принадлежат хаотическому слою в фазовом пространстве переменных x и p .

Попробуем найти расположение этого хаотического слоя при фиксированном значении τ . Вероятность попадания в резонанс пропорциональна площади, окруженной сепаратрисной петлей, и достигает максимального значения при $F = 0$ и $U'_x = 0$. Это означает, что фазовый поток сквозь резонансную область является максимальным, когда условие (2.7) выполняется вблизи гладкого экстремума невозмущенного потенциала. Тогда имеем $\tilde{H}_{\text{sep}} - \tilde{H}_{\text{min}} = 2\Omega^2$ и, соответственно, $\Delta Y = 4\Omega$. Из (2.7) и (2.14) следует, что

$$Y = k_{\text{inst}} \frac{p}{M} + \nu_{\text{inst}}. \quad (2.24)$$

Отсюда получаем ширину резонанса по импульсу:

$$\Delta p = \frac{m}{k_{\text{inst}}} \Delta Y = \frac{4m}{k_{\text{inst}}} \Omega = 4\sqrt{m\varepsilon}. \quad (2.25)$$

Теперь, введя обозначение

$$p_{\text{res}} = Mv_{\text{ph}}, \quad (2.26)$$

мы можем найти интервал резонансных значений энергии

$$\frac{(p_{\text{res}} - 2\sqrt{M\varepsilon})^2}{2M} + U_{\text{extr}} \leq E \leq \frac{(p_{\text{res}} + 2\sqrt{M\varepsilon})^2}{2M} + U_{\text{extr}}, \quad (2.27)$$

где U_{extr} – значение потенциала в данной точке экстремума. Середина этого интервала:

$$E_{\text{res}} = \frac{p_{\text{res}}^2}{2M} + 2\varepsilon + U_{\text{extr}}. \quad (2.28)$$

Важно отметить, что неравенство (2.27) соответствует лишь части возникающего хаотического слоя. Для того, чтобы убедиться в этом, достаточно вернуться

к выражению (2.15) и учесть, что величина F является осциллирующей функцией времени

$$\tilde{H} = \frac{Y^2}{2} + \Omega^2 \cos \psi + F(t)\psi. \quad (2.29)$$

При этом заметим характерная частота осцилляций $F(t)$ равна частоте невозмущенных колебаний и существенно меньше Ω . Таким образом, возникает выражение для гамильтониана нелинейного маятника при воздействии однородной медленно осциллирующей силы. Как было показано в работе [170], в этом случае возникает хаотический слой в окрестности сепаратрисы маятника, ширина которого в пространстве значений \tilde{H}

$$\Delta \tilde{H} \sim \Omega^4 \sim k_{\text{inst}}^4. \quad (2.30)$$

Отметим также, что возникающий хаотический слой маятника является существенно асимметричным в импульсном пространстве. Это означает, что одна из границ, предписываемых неравенством (2.27) существенно отодвигается от E_{res} . Принимая во внимание, что ширина хаотического слоя в пространстве энергий частицы $\Delta E \sim k_{\text{inst}}^{-2} \Delta \tilde{H}$, получаем

$$\Delta E \sim k_{\text{inst}}^2. \quad (2.31)$$

К сожалению, данная оценка все еще нуждается в проверке, поскольку результаты работы [170] были получены в предположении, что возмущение маятника является слабым, что в нашем случае не так. Насколько это предположение является критичным для оценки (2.31) – еще предстоит выяснить. Впрочем, здесь важно отметить, что, как будет показано в п. 2.5, пересечение сепаратрисы резонанса (2.7) является отнюдь не единственным механизмом возникновения хаоса.

В качестве иллюстрации рассмотрим потенциал

$$U(x) = -\cos x. \quad (2.32)$$

Для того, чтобы увидеть образование хаотического слоя, обусловленного резонансом (2.7), проведем анализ структуры фазового пространства в отсутствие фазовой модуляции, положив $\varphi = 0$. Это позволяет нам воспользоваться обычным для таких целей отображением Пуанкаре. Положим $m = 1$, $s = 1$, $\varepsilon = 0.02$

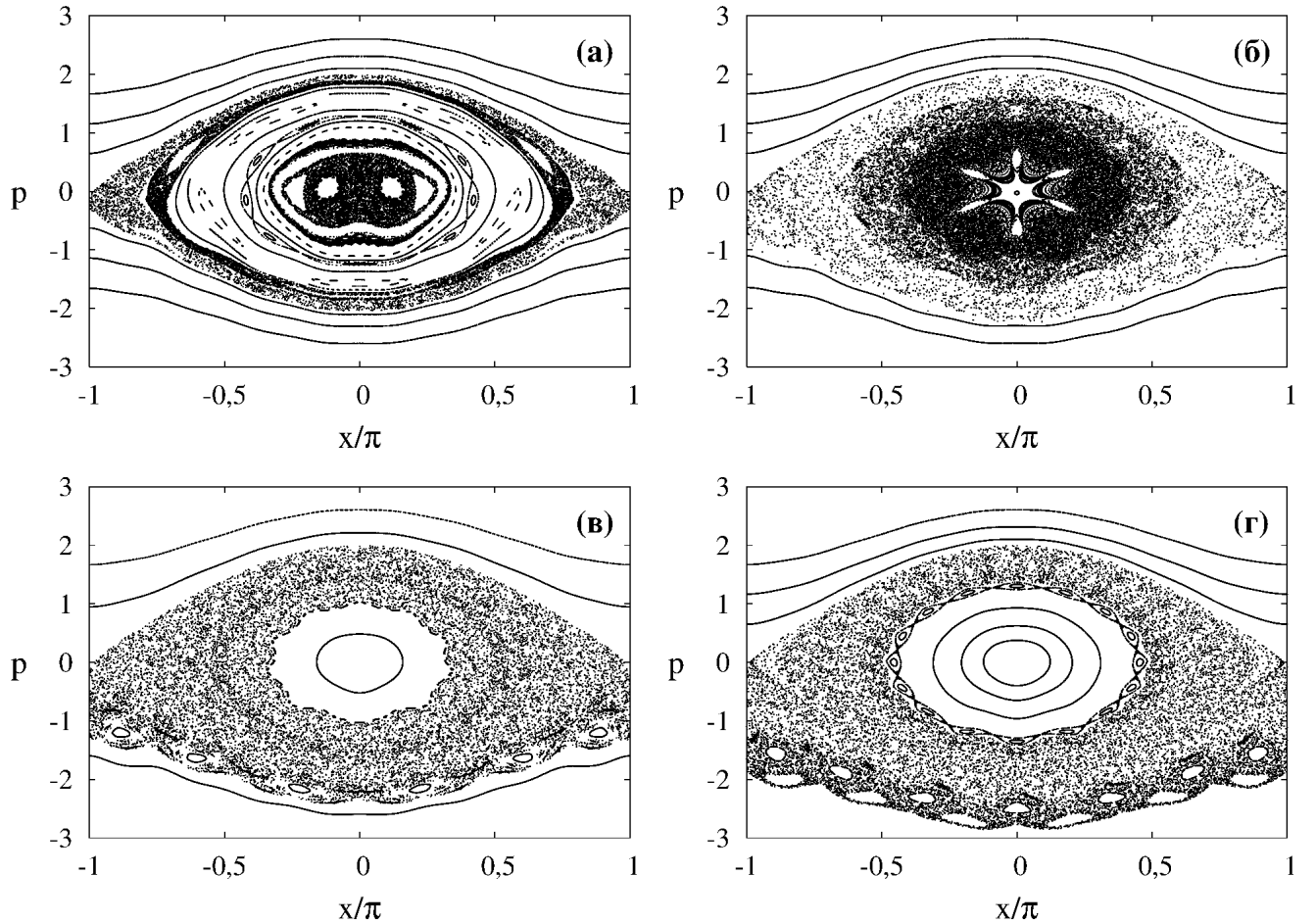


Рисунок 2.2: Сечения Пуанкаре, соответствующие случаю без адиабатической фазовой модуляции. Значения частоты: (а) $\nu = 2$, (б) $\nu = 6$, (в) $\nu = 10$ и (г) $\nu = 14$ [166]

и $k = 8$. Рисунок 2.2 демонстрирует сечения Пуанкаре, рассчитанные для различных значений частоты возмущения ν . Сечение Пуанкаре является визуализацией множества точек, принадлежащих фазовым траекториям в пространстве канонических переменных (x, y) (канонические переменные могут быть выбраны произвольно) и удовлетворяющим условиям

$$x_n = x(t_0 + n\lambda), \quad p_n = p(t_0 + 2\pi n/\nu), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Как правило, значение t_0 выбирается равным нулю. При $\nu = 2$ наблюдаются два хорошо различимых хаотических слоя (см. Fig. 2.2(a)). Внутренний слой соответствует траекториям, пересекающим вертикали $x = 2\pi N$, где N – целое число, со значениями импульса, близкими к $p_{\text{res}} = -0.25$. Этот хаотический слой занимает центральную область в фазовом пространстве, соответствующую минимальным значениям энергии частиц. Внешний хаотический слой включает

в себя невозмущенную сепаратрису и соответствует траекториям, попадающим в резонанс вблизи максимумов невозмущенного потенциала $x = (2N + 1)\pi$. Эти два слоя хорошо изолированы друг друга областью устойчивости, включающую в себя многочисленные цепочки островов, соответствующие нелинейному резонансу (2.5).

С увеличением частоты ν внутренний хаотический слой становится ближе и ближе к сепаратресе, пока, наконец, не сольется с внешним хаотическим слоем. Однако, даже после соединения хаотических слоев транспорт из внутреннего слоя во внешний несколько затрудняется вследствие существования непроницаемых динамических барьеров в окрестности не полностью разрушенных цепочек островов устойчивости [22, 35]. Эта ситуация показана на Рис. 2.2(б), соответствующему $\nu = 6$. На нем видно, что общий хаотический слой, окружающий область устойчивости в форме шестиконечной звезды, может быть визуально разделен на три вложенных слоя с различными плотностями изображающих точек. Различие в плотности точек свидетельствует о том, что траектории пребывают длительное время внутри одного из слоев, несмотря на отсутствие непроницаемых барьеров между слоями. Таким образом, хаотическая диффузия внутри проявляет неэргодичность. Внутренний слой обусловлен резонансом (2.7) с $p_{\text{res}} = -0.75$. Средний слой возникает вследствие усиления нелинейного резонанса (2.5) с $l = 7$ и $n = 1$ (это явление рассматривается в разделе 2.5), являющегося ближайшим к резонансной энергетической зоне, описываемой (2.27). Внешний хаотический слой является присепаратрисным хаотическим слоем, вытянутым в направлении отрицательных значений импульса вследствие асимметрии условия (2.7). При дальнейшем увеличении частоты все остаточные динамические барьеры стираются хаотические слои сливаются окончательно. Возникающее при этом хаотическое море смещается все сильнее и сильнее в область инфинитного движения, в то время как площадь области устойчивости в центре возрастает (см. Рис. 2.2(в) и (г)). Хаотическое море становится почти однородным, за исключением его нижней границы, где возникают цепочки островов.

2.2 Использование резонансного воздействия волнообразного возмущения для генерации направленного баллистического транспорта

Способность резонанса (2.7) селективно разрушать динамические барьеры в заданной энергетической полосе может быть использована в задачах, связанных с переводом системы из локализованного в делокализованное состояние. К числу таких задач относится, например, фотоиндуцированная диссоциация молекул [171] или фотоионизация атомов [172, 173]. Помимо этого, резонанс (2.7) может быть использован для создания рэтчета, т. е. генерации направленного баллистического транспорта при воздействии переменного возмущения на ансамбль частиц, локализованный в поле пространственно-периодического потенциала.

Если ансамбль частиц изначально локализован вблизи минимумов потенциала, необходимым условием для появления потока является глобальный хаос в области финитного движения. Как правило, этого добиваются за счет увеличения интенсивности внешнего возмущения. В этом случае поток возникает тогда, когда интенсивность возмущения становится одного порядка с глубиной потенциальной ямы. В данной работе будет продемонстрирован метод, позволяющий существенно снизить требуемую для генерации потока амплитуду возмущения [174]. В частности, показано, что мы можем добиваться баллистического транспорта при минимальных начальных энергиях частиц, действуя на них возмущением с амплитудой порядка 10^{-2} от глубины ямы. Это имеет особую ценность в тех случаях, когда важно избегать перегрева частиц, например, в рэтчетах с холодными атомами в оптических решетках [148, 150, 151, 175–177].

Рассмотрим гамильтониан следующего вида

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + U(x) + V(x, t), \quad (2.34)$$

где

$$U(x) = -\cos x. \quad (2.35)$$

Предлагаемый нами метод генерации потока с заданным направлением связан с использованием внешнего возмущения в виде суммы слагаемых, каждое из

которых имеет вид

$$V_i = \varepsilon_i[(1 - \alpha_i) \cos \psi_i^+ + \alpha_i \cos \psi_i^-], \quad (2.36)$$

где α_i меняется от 0 до 1, а фазы ψ_i^\pm являются функциями как времени, так и пространственной координаты

$$\psi_i^\pm = k_i x \pm \nu_i t. \quad (2.37)$$

Рэтчеты такого типа известны в международной литературе как travelling wave ratchets [125].

Динамика нелинейного маятника с возмущением вида (2.36) рассматривалась во многих работах (см., например, известный обзор [38]). Структура фазового пространства системы определяется множеством “обычных” нелинейных резонансов

$$m\omega = n\nu_i, \quad (2.38)$$

где m и n — целые числа, ω — частота колебаний частицы внутри потенциальной ямы. Кроме того, значительное влияние на динамику системы оказывают резонансы комбинационных гармоник [178], а также резонансы, соответствующие условиям стационарности фаз ψ_i^+ и ψ_i^- (2.37)

$$k_i p + \gamma_i \nu_i = 0, \quad (2.39)$$

где γ_i равно -1 при резонансе $d\psi_i^+/dt$, и 1 при резонансе $d\psi_i^-/dt$. Условие (2.39) выполняется только при определенном значении импульса $p = p_{\text{res}}$, причем для резонанса с $\gamma_i = -1$ это значение положительно, а для резонанса с $\gamma_i = 1$ — отрицательно.

Даже при малых амплитудах возмущения одновременное влияние резонансов (2.38) и (2.39) приводит к сильному хаосу частиц со значениями энергии, близкими к резонансному (2.26). Для того, чтобы проиллюстрировать это, приведем результаты расчета сечений Пуанкаре для возмущения, состоящего из единственного члена вида (2.36). Сначала рассмотрим возмущение с параметрами $\varepsilon = 0.02$, $k = 10$, $\nu = 2$, $\alpha = 0.5$. В этом случае присутствуют оба резонанса (2.39), с $\gamma_i = -1$ и с $\gamma_i = 1$, влияющие в основном на частицы с малыми энергиями, для которых $p_{\text{max}} = \nu/k = 0.2$. В результате в области малых энергий

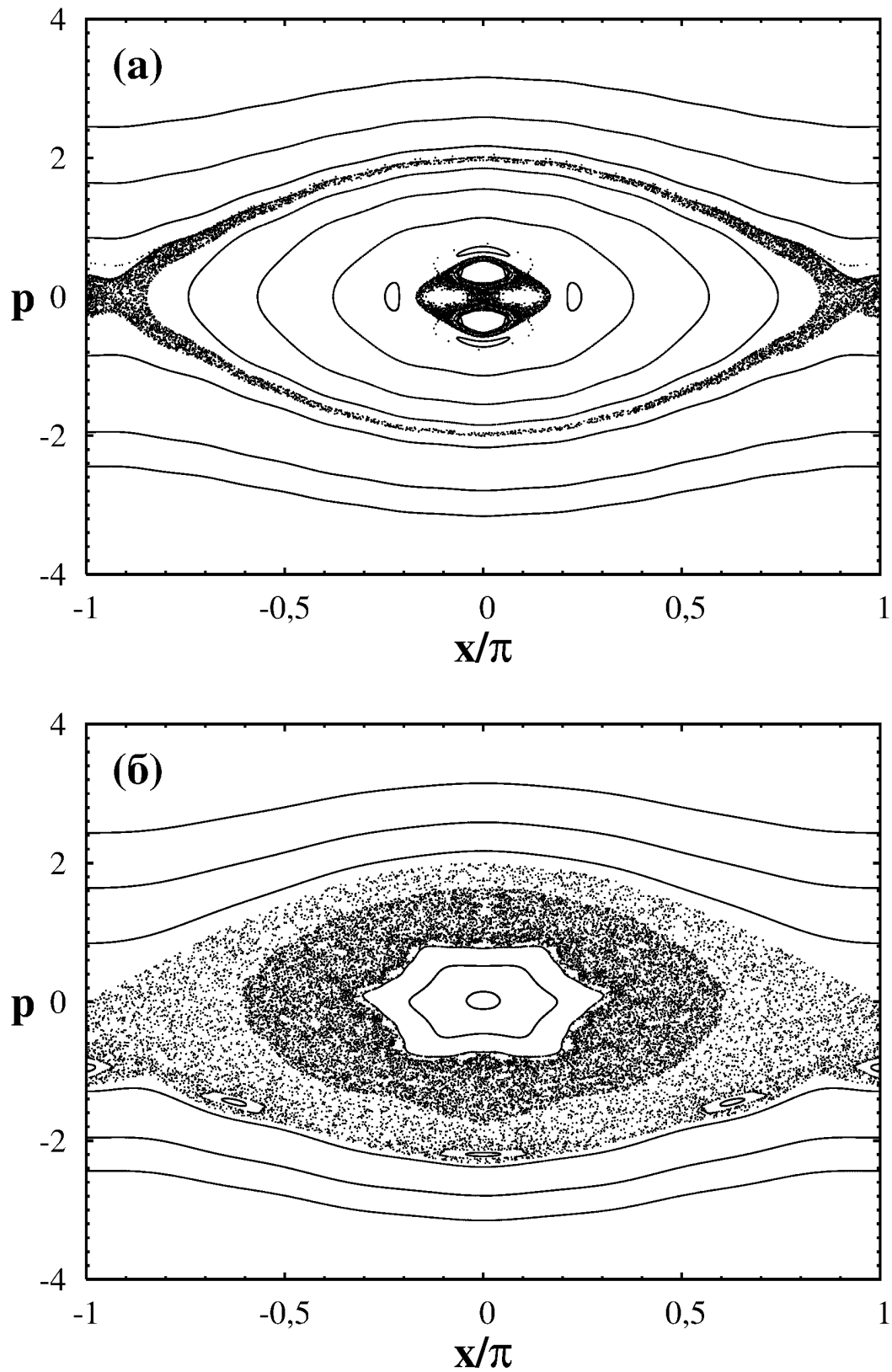


Рисунок 2.3: Сечения Пуанкаре для возмущения (2.36) со следующими значениями параметров: (a) $\varepsilon = 0.02$, $k = 10$, $\nu = 2$, $\alpha = 0.5$, (b) $\varepsilon = 0.02$, $k = 6$, $\nu = 6$, $\alpha = 0$ [174]

возникает хаотический слой, что продемонстрировано на Рис. 2.3(а). Этот хаотический слой изолирован от хаотического слоя, расположенного вблизи сепаратрисы, поэтому хаотическая диффузия низкоэнергетических частиц является ограниченной, а их переход в баллистический режим невозможен.

Рассмотрим теперь возмущение с параметрами $\varepsilon = 0.02$, $k = 6$, $\nu = 6$, $\alpha = 0$. В этом случае присутствует только резонанс с $\gamma_i = -1$ и резонансным значением импульса $p_{\text{res}} = -1$. Соответствующее сечение Пуанкаре изображено на Рис. 2.3(б). В этом случае образуется только внешний хаотический слой, расположенный вблизи сепаратрисы. Он проникает в достаточно глубокие области фазового пространства, достигая резонансной области, определяемой формулой (2.27). Поэтому, его ширина значительно больше, чем ширина аналогичного присепаратрисного хаотического слоя, изображенного на Рис. 2.3(а). Следует особо подчеркнуть резкое отличие ширины хаотического слоя при положительных и отрицательных значениях импульса. Эта асимметрия приводит к тому, что пересечение сепаратрисы в нижней полуплоскости, т. е. с отрицательными значениями импульса, происходит гораздо интенсивнее, чем в верхней. Вследствие этого вероятность полетов в направлении $x = -\infty$ намного больше, чем в направлении $x = \infty$. В то же время центральная область фазового пространства представляет из себя один сплошной остров устойчивости, и в силу “непроницаемости” его границ переход в баллистический режим возможен только для частиц с достаточно большой энергией.

Представленные примеры свидетельствуют о возможности создания режима сильной хаотической диффузии в отдельных областях фазового пространства, действуя на систему возмущением, состоящим из нескольких членов вида (2.36), каждый из которых создает отдельный резонанс (2.39). Хаотическая диффузия приводит к росту энергии частиц с последующим выходом из потенциальной ямы. При этом направление полета частицы после выхода определяется видом некоторого j -го члена, для которого зона наибольшего влияния резонанса (2.39) находится в непосредственной близости от сепаратрисы. Если $\alpha_j < 0.5$, тогда резонанс с $\gamma_j = -1$ доминирует над резонансом с $\gamma_j = 1$, что способствует преобладанию полетов в отрицательном направлении. Обратная ситуация возникает при $\alpha_j > 0.5$.

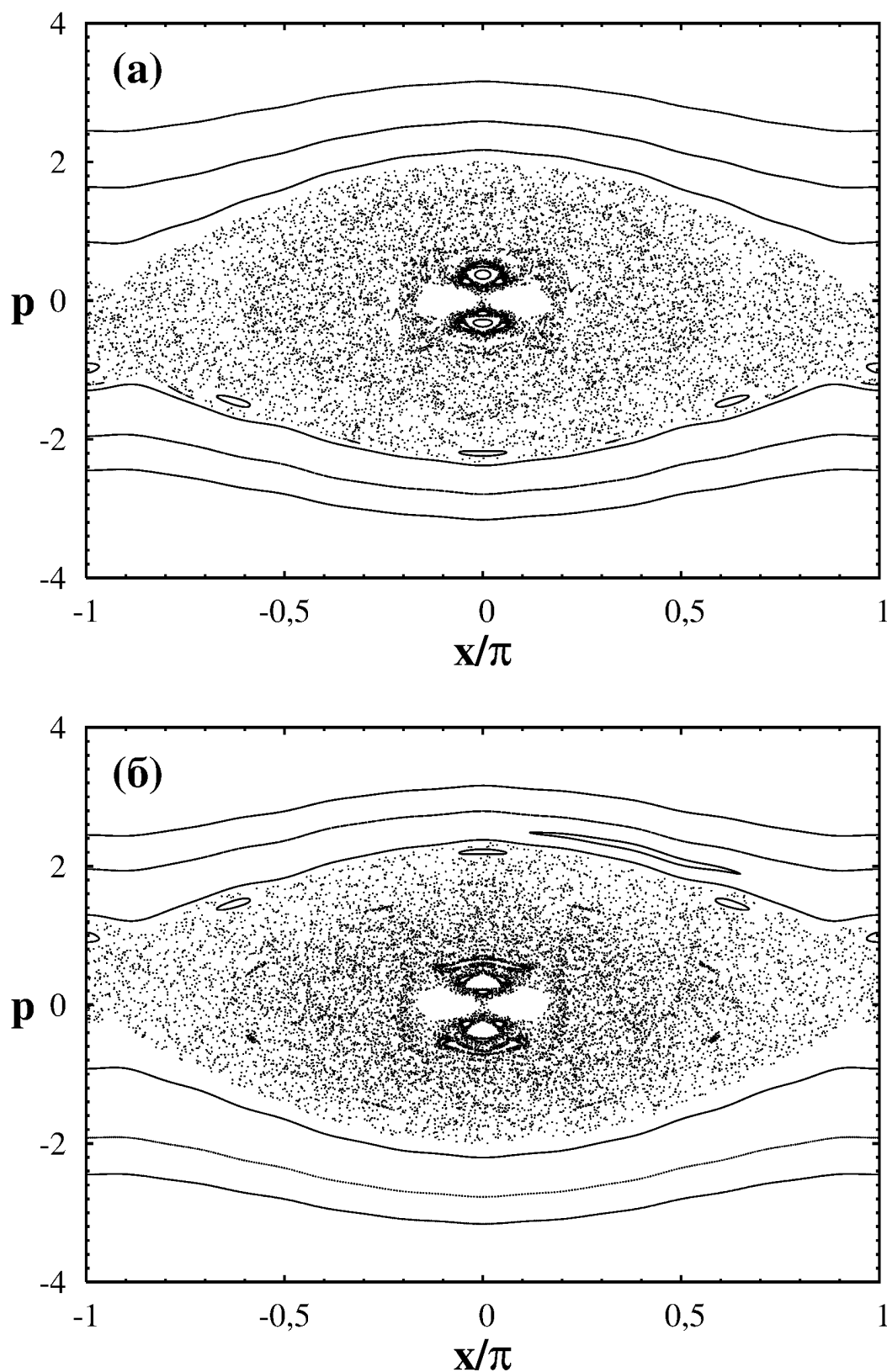


Рисунок 2.4: Сечения Пуанкаре для возмущения (2.40) с параметрами (а) $\alpha_2 = 0$, (б) $\alpha_2 = 1$ [174]

С другой стороны, для активации частиц с малыми энергиями необходимо разрушить сдерживающие их инвариантные кривые, т. е. хаотический слой

должен быть односвязным и покрывать все фазовое пространство. Односвязности хаотического слоя можно добиться без увеличения амплитуды возмущения, комбинируя, по меньшей мере, два возмущения вида (2.36): первое вызывает хаотическую диффузию в области малых энергий, а второе приводит к выходу частицы из потенциальной ямы, попутно задавая направление полета частицы. Следуя этим рассуждениям, рассмотрим результирующее возмущение следующего вида

$$V = \varepsilon_1 \cos k_1 x \cos \nu_1 t + \varepsilon_2 [(1 - \alpha_2) \cos(k_2 x + \nu_2 t) + \alpha_2 \cos(k_2 x - \nu_2 t)], \quad (2.40)$$

что соответствует $\alpha_1 = 0.5$. Для численной проверки высказанного утверждения рассмотрим возмущение с параметрами: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.02$, $\alpha_2 = 0$, $k_1 = 10$, $k_2 = 6$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 6$, что соответствует одновременному действию сил, использованных нами при построении Рис. 2.3. На Рис. 2.4(а) изображено соответствующее сечение Пуанкаре. За исключением нескольких островов, практически вся область финитного движения погружена в хаотическое море. Все частицы, принадлежащие хаотическому морю, могут в процессе диффузии пересечь сепаратрису и попасть в область инфинитного движения. При этом, как и в предыдущем рассмотренном нами случае (см. Рис. 2.3(б)), несимметричность хаотического слоя способствует преобладанию полетов в направлении $x = -\infty$. Иная ситуация наблюдается при $\alpha_2 = 1$ (Рис. 2.4(б)), когда в присепаратрисной области доминирует резонанс с $\gamma_2 = 1$ и, как следствие, преобладают полеты в направлении $x = \infty$.

Для количественной оценки транспорта рассмотрим динамику ансамбля из 10000 частиц с гауссовым начальным распределением по переменным импульса и координаты

$$\rho(x, p, t = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{p^2}{\sigma_p^2}\right), \quad (2.41)$$

где $\sigma_x = \sigma_p = 0.1$, т. е. изначально все частицы находятся вблизи устойчивого состояния покоя $x = 0$, $p = 0$. На Рис. 2.5 изображены зависимости среднего смещения частицы $\langle \Delta x \rangle = \langle x - x(t = 0) \rangle$ от времени, при $\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0.5$ и $\alpha_2 = 1$. Для остальных параметров возмущения использованы те же значения, что и при построении сечения Пуанкаре, изображенного на Рис. 2.4. Приблизительно до $t = 2000$ для всех значений α среднее смещение весьма мало. При

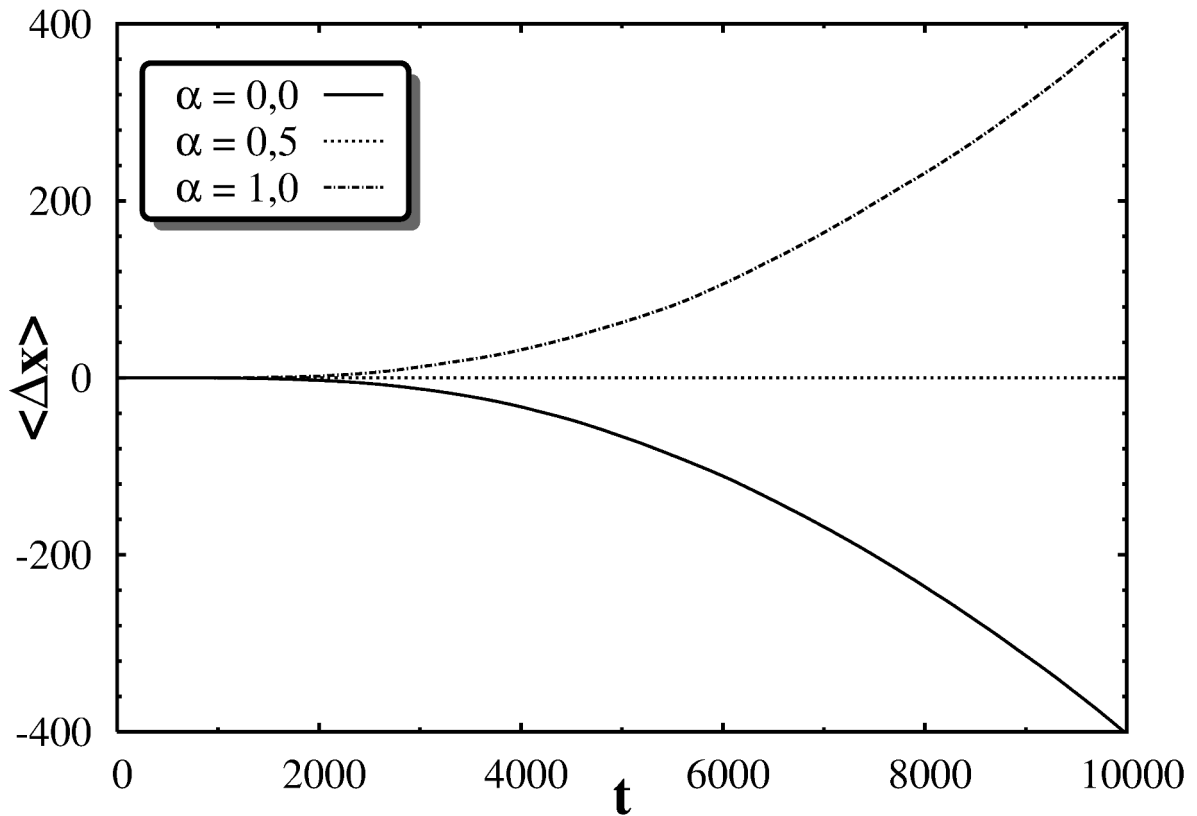


Рисунок 2.5: Зависимость среднего отклонения частиц $\langle \Delta x \rangle$ от времени. Соответствующие значения α_2 представлены на вставке в верхнем левом углу (индекс 2 опущен) [174]

$t > 2000$ достаточно большое количество частиц успевает пересечь сепаратрису и линии, соответствующие $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = 1$ симметрично расходятся вниз и вверх. Таким образом, в обоих этих случаях возникает поток, направление которого определяется асимметрией хаотического слоя, обусловленной резонансами (2.39) и проиллюстрированной на Рис. 2.4. В то же время при $\alpha_2 = 0.5$ среднее смещение частиц остается практически равным нулю. Отметим, что среднее отклонение частиц при $\alpha_2 = 0$ и $\alpha_2 = 1$ нарастает быстрее, чем по линейному закону. Учитывая, что скорость летящих частиц ограничена внешней границей хаотического слоя по импульсу, можно сделать заключение, что нелинейность зависимости $\langle \Delta x \rangle (t)$ связана с тем, что со временем все большее число частиц пересекает сепаратрису и переходит в область инфинитного движения.

Таким образом, мы продемонстрировали метод генерации направленного транспорта в пространственно-периодических гамильтоновых системах, позволяющий активировать низкоэнергетические частицы даже при малых ампли-

тудах внешнего возмущения. Приведенный метод основан на создании режима сильной хаотической диффузии в фазовом пространстве с помощью комбинации возмущений вида (2.36). При этом каждое из них, посредством резонансов (2.39), вызывает хаос в отдельной зоне в фазовом пространстве, определяемой формулой (2.27). Путем подбора параметров k и ν для каждой из компонент возмущения, мы можем вызвать глобальную хаотическую диффузию во всем фазовом пространстве. Направление потока частиц определяется значением α_j , соответствующем компоненте возмущения, влияние которой сконцентрировано вблизи сепаратрисы.

2.3 Гигантское ускорение частиц при воздействии возмущения вида плоской волны с медленно меняющейся ориентацией

До сих пор мы не учитывали влияние адиабатической фазовой модуляции в уравнениях (2.4). Вместе с тем, как будет показано ниже, ее включение способно резко изменить поведение системы, в особенности ее транспортные свойства.

Рассмотрим ансамбль невзаимодействующих частиц с единичной массой, двигающихся в поле периодического потенциала в присутствии нестационарного волнообразного возмущения. В частности, гамильтониан отдельной частицы выглядит следующим образом:

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos x + \varepsilon \cos(\tilde{k}x + \nu t), \quad (2.42)$$

где $\varepsilon \ll 1$. Положим, что волновое число возмущения \tilde{k} является медленно меняющимся параметром $\tilde{k} = \tilde{k}(\mu t)$, где $\mu \ll \sqrt{\varepsilon}$. Физически такой вид модуляции соответствует медленному изменению ориентации внешней силы по отношению к оси x . Траектории частиц удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -\sin x + \varepsilon \tilde{k} \sin \psi, \quad (2.43)$$

где $\psi = \tilde{k}x + \nu t$. В дальнейшем будем предполагать, что k и ν принимают достаточно большие значения. Это значит, что неравенство $d\psi/dt \gg 1$ выпол-

няется всюду вдоль траектории, за исключением малой резонансной области, где выполняется условие (2.7). В данном случае оно имеет вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \tilde{k}(\mu t)p + \frac{d\tilde{k}(\mu t)}{dt}x + \nu \simeq 0. \quad (2.44)$$

Согласно (2.44), резонансная область в фазовом пространстве расположена вдоль линии, описываемой следующим уравнением:

$$p_{\text{res}} = -\frac{1}{\tilde{k}} \left(\nu + \frac{d\tilde{k}}{dt}x \right), \quad (2.45)$$

где $\tau = \mu t$. Маятниковое уравнение (2.11), описывающее динамику вблизи резонанса, в данном случае выглядит следующим образом

$$\ddot{\psi} - \varepsilon \tilde{k}^2 \sin \psi + F(x, p, \tau) = 0. \quad (2.46)$$

Функция F имеет вид

$$F(x, p, \tau) = -\mu^2 \tilde{k}_{\tau\tau} x - 2\mu \tilde{k}_{\tau} p + \tilde{k} \sin x, \quad (2.47)$$

где $\tilde{k}_{\tau} = d\tilde{k}/d\tau$, $\tilde{k}_{\tau\tau} = d^2\tilde{k}/d\tau^2$. Гамильтониан (2.15) принимает вид

$$\tilde{H}(\dot{\psi}, \psi) = \frac{1}{2}\dot{\psi}^2 + \psi F(x, p, \tau) + \varepsilon \tilde{k}^2 \cos \psi. \quad (2.48)$$

При выполнении неравенства

$$|F(x, p, \tau)| < \varepsilon \tilde{k}^2 \quad (2.49)$$

на фазовом портрете в пространстве ψ - $\dot{\psi}$ появляется область финитного движения, соответствующая резонансу. Многократные попадания в резонанс, как уже отмечалось выше, приводят к хаосу.

Естественно предположить, что адиабатическое изменение резонансного значения импульса (2.26) должно привести к постепенному смещению соответствующего хаотического слоя в фазовом пространстве. Если время диффузионного перемешивания внутри хаотического слоя намного меньше, чем характерное время изменения резонансного импульса, то смещающийся хаотический слой увлекает за собой большинство частиц, принадлежащих ему. Таким образом, он играет роль динамической ловушки. Ловушки подобного типа рассматривались в работах [22, 179]. В процессе смещения хаотического слоя меняется средняя энергия частиц, принадлежащих ему.

Однако, как будет показано ниже, адиабатическое изменение ориентации возмущения способно привести к гораздо более сложной картине. Как мы уже отмечали выше, наиболее оптимальные условия для захвата в резонанс возникают вблизи точек экстремума невозмущенного потенциала, где $\sin x = 0$. Тогда подставляя (2.45) в (2.49) и полагая $\sin x = 0$, мы получаем

$$|p| \leq \frac{\varepsilon k^2}{\mu} \left| k \frac{k_{\tau\tau}}{k_\tau} - 2k_\tau \right|^{-1}, \quad (2.50)$$

$$|x| \leq \frac{\varepsilon k^2}{\mu^2} \left| \frac{2k_\tau^2}{ks} - k_{\tau\tau} \right|^{-1}. \quad (2.51)$$

Неравенства (2.50) и (2.51) ограничивают зону действия резонанса (2.44). Заметим, что зона эта достаточно велика – ее размеры по x и по p имеют порядок μ^{-2} и μ^{-1} , соответственно.

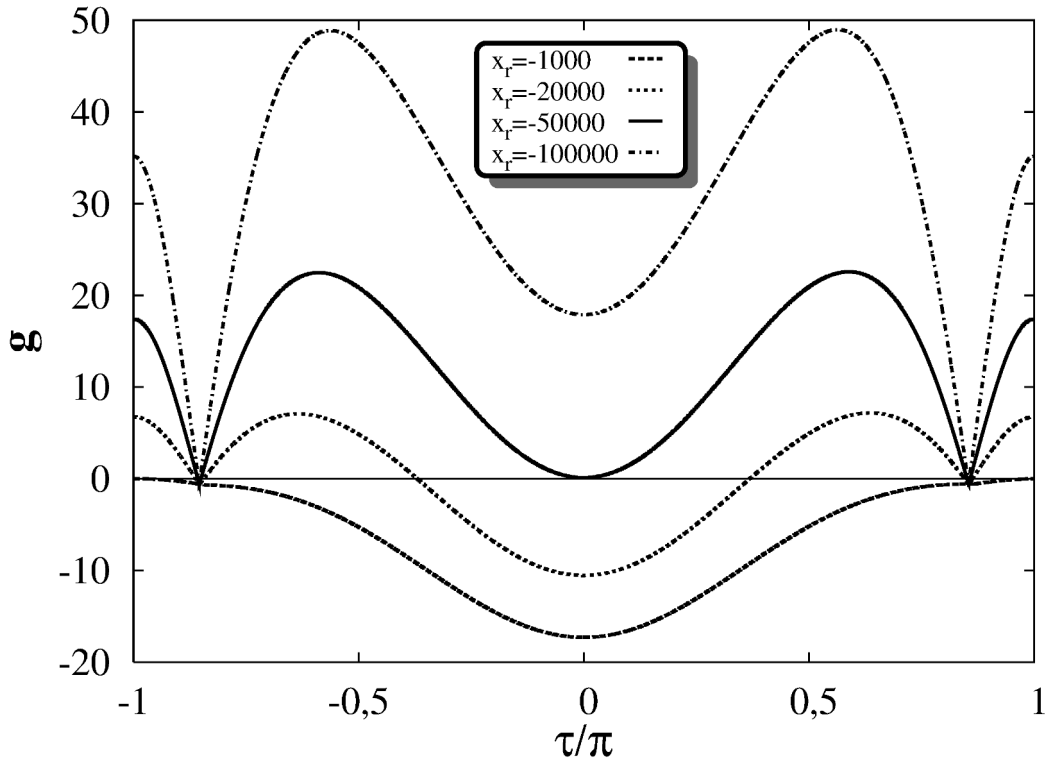


Рисунок 2.6: Функция $g(x, \tau)$ при $x = -1000$, $x = -20000$, $x = -50000$, and $x = -100000$ [180]

Перейдем к примерам. Для начала рассмотрим случай периодической модуляции волнового числа возмущения

$$\tilde{k} = k(1 + a \cos \mu t), \quad |a| < 1, \quad \mu \ll 1. \quad (2.52)$$

В этом случае мы можем переформулировать неравенство (2.49) как

$$g(x, \tau) = \left| \frac{a\mu^2(-a \cos^2 \tau + \cos \tau + 2a)}{(1 + a \cos \tau)^2} x - \frac{2a\mu\nu \sin \tau}{k(1 + a \cos \tau)^2} \right| - \varepsilon \tilde{k} \leq 0. \quad (2.53)$$

Рисунок 2.6 представляет функцию $g(x, \tau)$ для различных значений x . Значения параметров выбраны следующим образом: $\varepsilon = 0.04$, $k = 12$, $\nu = 4$, $a = 0.75$, $\mu = 2\pi/1000$. Как следует из приведенного рисунка, критерий (2.53) удовлетворяется при $|x| < 50000$ в достаточно широком интервале по τ с центром при $\tau = 2\pi m$, где $m = 0, 1, 2, \dots$. Это предполагает существование таких траекторий, который, однажды попав в резонанс, попадают в него и на последующих периодах маятника, до тех пор, пока τ остается достаточно близким к $2\pi m$. Такие частицы двигаются вдоль линий, описываемых (2.45), демонстрируя при этом баллистические полеты с увеличивающейся скоростью. Ускоряющиеся полеты приводят к значительному уширению хаотического моря по импульсу.

Существование таких баллистических полетов подтверждается численным моделированием. Была рассчитана эволюция ансамбля частиц с гауссовым начальным распределением в фазовом пространстве

$$\rho(x, p, t = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_p} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma_x^2} - \frac{p^2}{\sigma_p^2}\right), \quad (2.54)$$

где $\sigma_x = \sigma_p = 0.1$. Рис. 2.7 представляет зависимость от времени для средней координаты, среднего импульса и дисперсии импульса для тех же значений параметров, что были использованы при построении Рис. 2.6. Мы видим, что возникает направленный поток частиц в направлении $x \rightarrow -\infty$. Средний импульс растет немонотонно и резкие ускорения сменяются замедлениями, также достаточно резкими. Ускорения возникают в те моменты, когда “медленная” фаза τ близка к $2\pi m$, что вполне соответствует предсказаниям приведенного выше анализа. Каждый акт ускорения сопровождается скачком дисперсии импульса. Рис. 2.8 показывает, что ускоряющиеся частицы образуют своего рода струи вдоль резонансной линии (2.45), которая обрезается в соответствии с критерием (2.53). Первая значительная струя становится заметной при $t \simeq 1300$. Ускоряющиеся частицы следуют резонансной линии до $t \simeq 1400$ и затем покидают резонанс. Стоит отметить, что подвергнувшиеся сильному ускорению

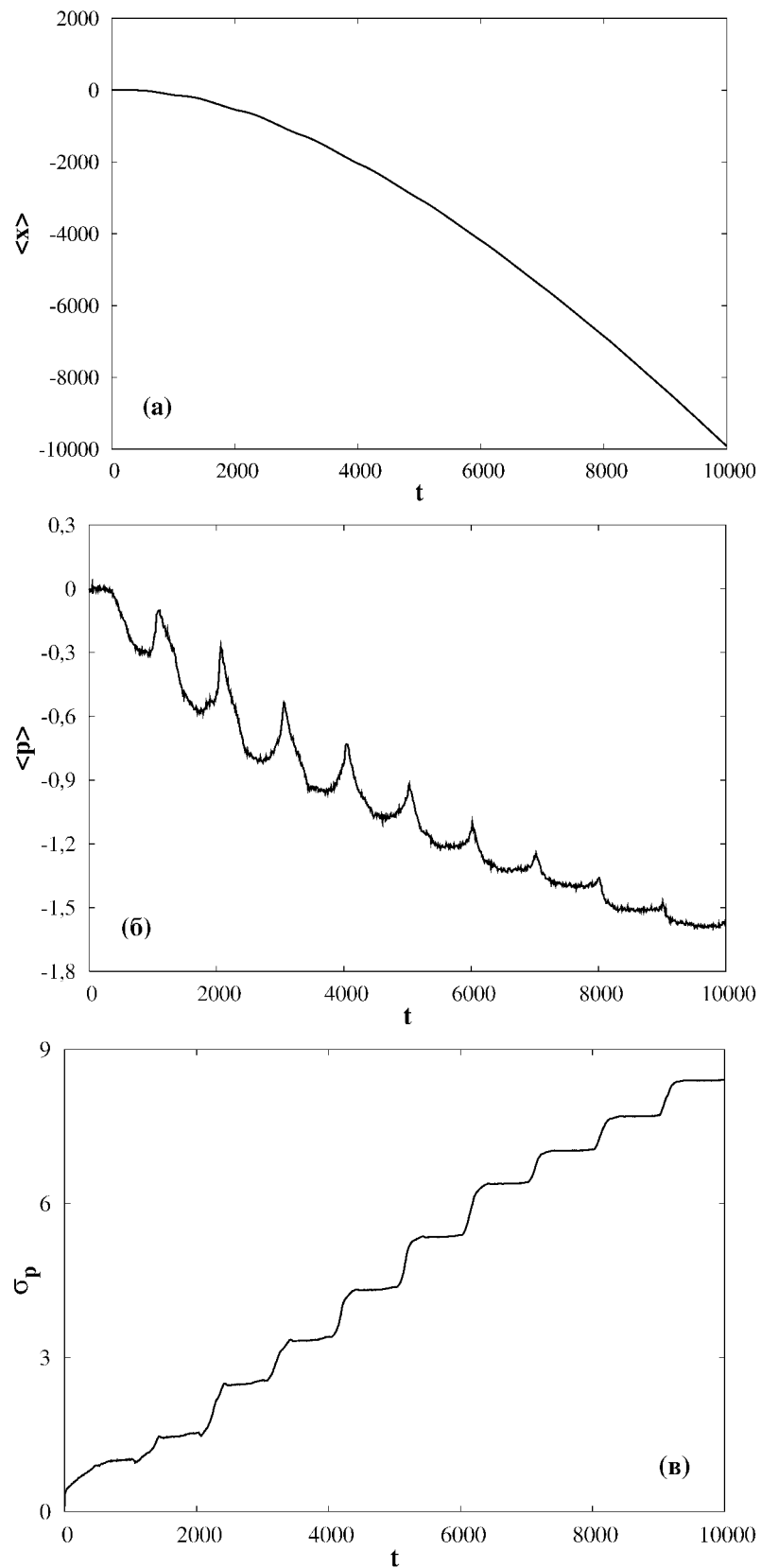


Рисунок 2.7: Средняя координата (а), средний импульс (б) и дисперсия импульса как функции времени (в) [180]

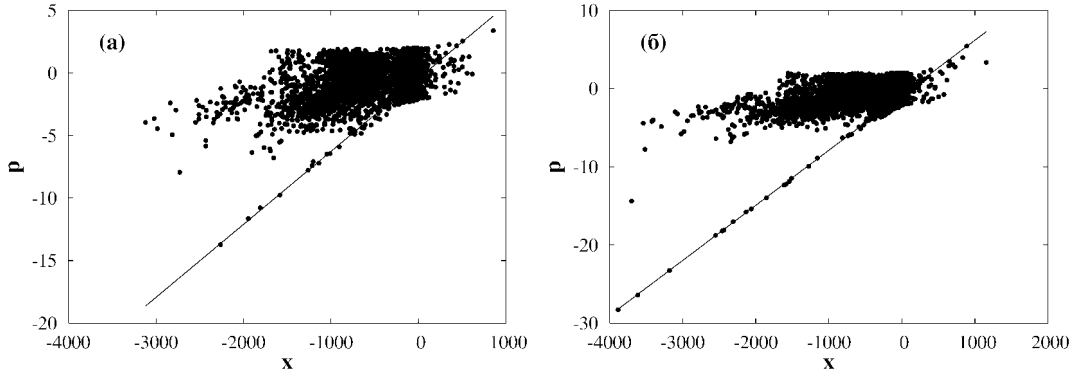


Рисунок 2.8: Распределение частиц в фазовом пространстве при (а) $t = 1300$, (б) $t = 1400$. Резонансный канал обозначен линией [180]

частицы никогда не возвращаются в резонансную область вновь. Последующие струи продемонстрированы на Рис. 2.9, где изображены распределения частиц при $t = 3200$, $t = 5200$ и $t = 9200$.

Следует отметить важную особенность. На Рис. 2.7 и 2.8 хорошо видно, что практически все (!) ускоряющиеся частицы лежат в непосредственной близости от резонансного канала ускорения, несмотря на то, что критерий (2.49) выполняется только тогда, когда значение $\sin x$ близко к нулю. Почему же частицы удерживаются в резонансном канале? Ответ достаточно прост. При больших скоростях частиц $\sin x$ является быстро осциллирующей величиной. Частота ее осцилляций, будучи пропорциональной p , в режиме резонансного ускорения существенно превышает частоту фазовых осцилляций в резонансе, равную $\tilde{k}\sqrt{\varepsilon}$. Как следствие, член, пропорциональный $\sin x$, может быть устранен из уравнений движения с помощью метода усреднения. Это означает, что при достаточно больших энергиях частицы закрепляются внутри резонансного канала ускорения. Также отметим, что сам по себе захват частицы в резонансный канал является случайным и достаточно редким событием, о чем наглядно свидетельствует тот факт, что лишь малая доля ансамбля претерпевает ускорение на Рис. 2.7 и 2.8.

Таким образом, мы можем выделить три стадии эволюции ансамбля частиц. На первой стадии происходит перевод частиц в режим инфинитного движения. До тех пор, пока частица находится вблизи $x = 0$, положение резонанса по импульсу определяется формулой (2.26), т. е. соотношением $\nu/k(t)$.

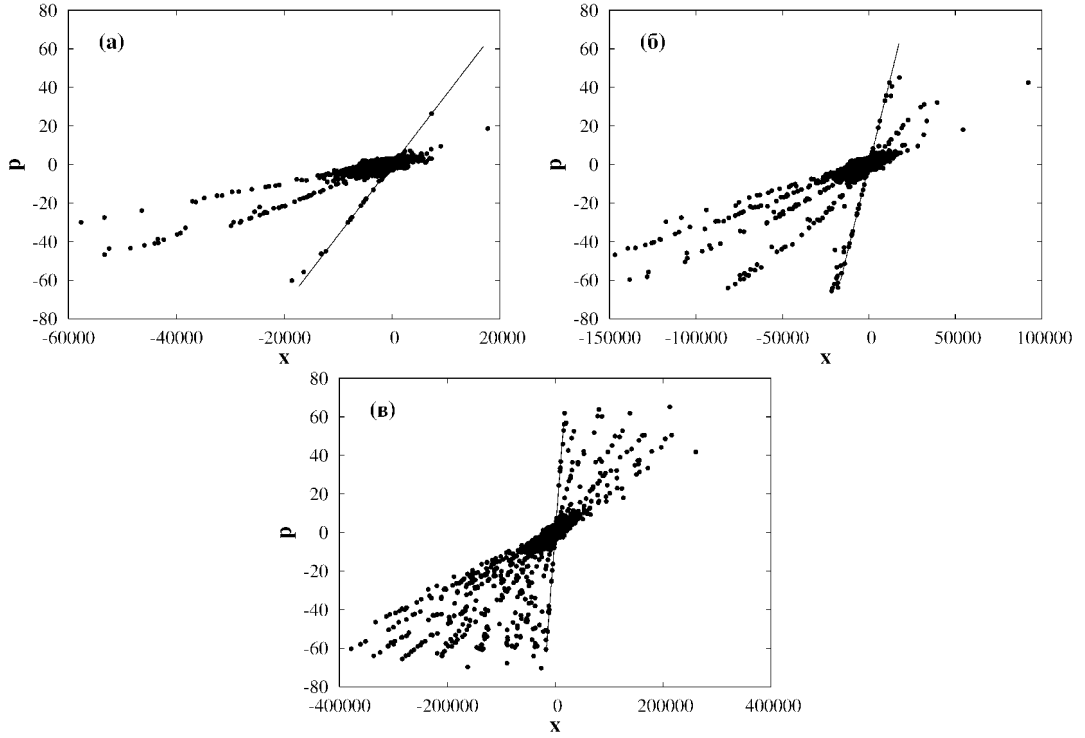


Рисунок 2.9: То же, что и на Рис. 2.8, для моментов времени: (а) $t = 3200$, (б) $t = 5200$, (в) $t = 9200$ [180]

Это подразумевает, что в начальный момент облако частиц находится внутри хаотического слоя, вызванного резонансом с $p_{\text{res}} = -\nu/\tilde{k}(t=0) = -4/21$. Адиабатическое уменьшение \tilde{k} смещает это хаотический слой по направлению к сепаратрисе, при этом значительная часть облака следует за хаотическим слоем. При $\tau = \pi$ хаотический слой сливается с присепаратрисным хаотическим слоем, что сопровождается появлением баллистического потока частиц в направлении $x = -\infty$.

Вторая стадия начинается тогда, когда облако частиц достигает достаточно большого размера и отдельные частицы оказываются способны попасть в резонансный канал, описываемый (2.45). Эта стадия характеризуется быстрым нарастанием дисперсии импульса вследствие актов гигантского ускорения. Отметим, что часть частиц демонстрирует ускоряющиеся полеты в противоположном направлении, т. е. $x \rightarrow \infty$. Тем не менее, число частиц, ускоряющихся в направлении $x \rightarrow -\infty$ гораздо больше. Поэтому, именно они определяют направление результирующего потока.

Третья стадия не показана на рисунках. Она возникает тогда, когда облако частиц становится настолько растянутым, что только незначительная их доля остается внутри зоны ускорения, определяемой неравенствами (2.50) и (2.51). На этой стадии дисперсия импульса перестает нарастать, достигнув насыщения.

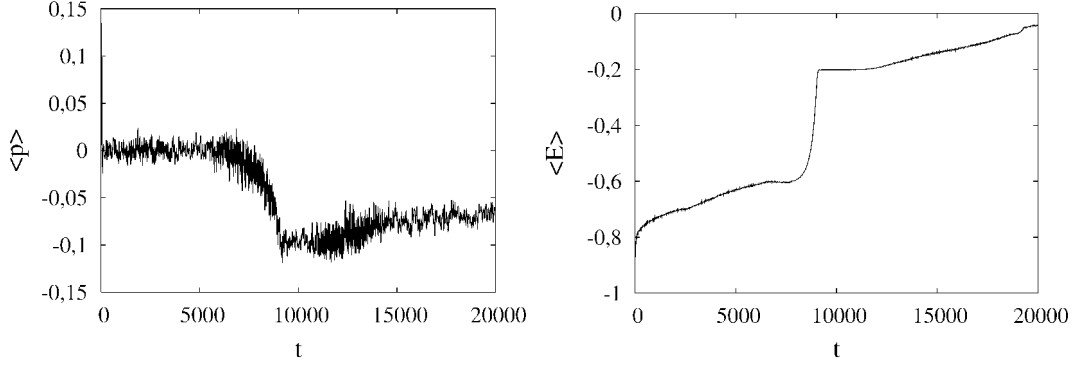


Рисунок 2.10: Зависимость среднего импульса (слева) и средней энергии (справа) времени, рассчитанные для модуляции волнового числа по закону (2.55) [181]

Близкие по смыслу результаты были получены в работе [181], где рассматривался случай однократного поворота возмущения

$$\tilde{k} = k_0(1 - \mu t), \quad t \leq \mu^{-1}, \quad (2.55)$$

$k_0 = 6$, $\mu = 5 * 10^{-5}$. Значения других параметров возмущения: $\varepsilon = 0.04$, $\nu = 2$. На первом этапе происходит активация баллистического потока, среднее значение импульса медленно отклоняется от нуля. Затем некоторая доля частиц попадает в резонансный канал, что сопровождается резким усилением потока и скачком средней энергии частиц (см. Рис. 2.10). На третьем этапе происходит небольшое уменьшение среднего импульса. При этом средняя энергия несколько увеличивается, что свидетельствует о генерации потока частиц в обратном направлении. Однако этот поток является слабее первоначального, поэтому знак среднего импульса не меняется. В дальнейшем скорость потока выходит на стационарный режим.

Подведем итоги этого параграфа. Мы продемонстрировали эффект гигантского ускорения частиц в простых гамильтоновых моделях с волнообраз-

ным возмущением, ориентация которого медленно меняется со временем. Эффект возникает вследствие образования специфических резонансных каналов ускорения в фазовом пространстве.

2.4 Вертикальный лучевой резонанс в подводном звуковом канале

2.4.1 Общие свойства вертикального лучевого резонанса

Задача о резонансном воздействии волнообразного возмущения на колебательную систему также возникает при исследовании распространения звука в неоднородном подводном звуковом канале. Как было отмечено в п. 1.3.2, в малоугловом приближении динамика звуковых лучей описывается уравнениями в гамильтоновой форме

$$\frac{dz}{dr} = p, \quad \frac{dp}{dr} = -\frac{\partial U(z)}{\partial z} - \frac{\partial V(z, r)}{\partial z}, \quad (2.56)$$

где функции $U(z)$ и $V(z, r)$ определяются пространственными изменениями скорости звука

$$U(z) = \frac{\Delta c(z)}{c_0}, \quad V(z, r) = \frac{\delta c(z, r)}{c_0}. \quad (2.57)$$

В математическом смысле уравнения (2.56) эквивалентны уравнениям частицы с единичной массой в поле нестационарного потенциала. Они соответствуют гамильтониану

$$H = \frac{p^2}{2} + U(z) + V(z, r), \quad (2.58)$$

С точки зрения дальнего распространения звука, одним из важнейших факторов горизонтальной изменчивости являются внутренние волны, являющиеся главной причиной лучевого хаоса [36, 55]. Как правило, внутренние волны имеют широкий модовый спектр. Высокие моды внутренних волн приводят к так называемой тонкой структуре профиля скорости звука, проявляющейся в виде мелкомасштабных глубинных осцилляций. Как было показано в работах [182–186], эти мелкомасштабные осцилляции качественно влияют на свойства звуковых лучей. Чтобы исследовать общие механизмы влияния тон-

коструктурного возмущения на лучевую динамику, можно обратиться к идеализированной модели возмущения, включающего в себя единственную моду:

$$\delta c(z, r) = \varepsilon c_0 G(z) \sin k_z z \sin k_r r, \quad (2.59)$$

где $\varepsilon \ll 1$, k_z и k_r – вертикальное и горизонтальное волновые числа возмущения, соответственно. Функция G описывает зависимость амплитуды возмущения от глубины. В реальном океане она определяется профилем частоты Вайсяля-Брента и, как правило, достаточно плавно зависит от глубины. Существуют исключения из этого правила и одно из них, Японское море, будет рассмотрено в п. 4.2. Положим, что значение вертикального волнового числа возмущения k_z является достаточно большим. Это требование можно формализовать в виде неравенства

$$k_z G \gg \left| \frac{dG}{dz} \right|. \quad (2.60)$$

Представляя возмущение скорости звука (2.59) в виде суммы волн, распространяющихся в противоположных направлениях,

$$\delta c = \frac{\varepsilon}{2} c_0 G \left[\cos(k_z z - k_r r) - \cos(k_z z + k_r r) \right], \quad (2.61)$$

и учитывая (2.60), мы можем записать второе уравнение из (2.56) в следующем виде:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{dU}{dz} + \frac{\varepsilon}{2} (k_z G (\sin \psi^- - \sin \psi^+)), \quad (2.62)$$

где $\psi^\pm = k_z z \pm k_r r$. В соответствии с (2.60), член, пропорциональный ε , быстро осциллирует вдоль траектории луча, за исключением участков, где выполняется одно из приведенных ниже условий:

$$\frac{d\psi^+}{dr} = k_z p + k_r \simeq 0 \quad (2.63)$$

или

$$\frac{d\psi^-}{dr} = k_z p - k_r \simeq 0. \quad (2.64)$$

Легко заметить, что условия (2.63) и (2.64) формально совпадают с условиями резонанса, описываемым формулой (2.39). Иными словами, мы имеем дело с еще одной разновидностью резонанса (2.7). Резонансы (2.63) и (2.64) возникают

при определенных значениях угла скольжения, когда луч оказывается ориентирован параллельно нисходящей (в случае резонанса (2.63), т. к. ось z направлена вниз) или восходящей (в случае резонанса (2.64)) компоненте возмущения скорости звука. Поскольку эти резонансы ассоциируются с движением луча относительно глубинных осцилляций возмущения скорости звука, они получили название *вертикальных лучевых резонансов*.

Движение в окрестности вертикального лучевого резонанса может быть описано в рамках того же самого подхода, что был ранее использован в п. 2.1.2. Рассмотрим, в качестве примера, резонанс с нисходящей компонентой возмущения (2.63). Мы можем пренебречь нерезонансным членом $\sim \sin \psi^-$, получая в итоге

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{dU}{dz} - \frac{\varepsilon}{2}k_z G(z) \sin \psi^+. \quad (2.65)$$

Дважды дифференцируя ψ^+ по горизонтальной координате r и учитывая (2.65), получаем маятниковое уравнение (значок $+$ у ψ^+ в дальнейшем будет убран)

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{\varepsilon}{2}k_z^2 G(z) \sin \psi + k_z \frac{dU}{dz} = 0. \quad (2.66)$$

Это уравнение может быть переписано в виде пары связанных уравнений первого порядка в гамильтоновой форме

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dr} &= k_z y = \frac{\partial \tilde{H}(\psi, y)}{\partial y}, \\ \frac{dy}{dr} &= -\frac{\varepsilon}{2}k_z G(z) \sin \psi - \frac{dU}{dz} = -\frac{\partial \tilde{H}(\psi, y)}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Здесь y расстройка вертикального резонанса по тангенсу угла скольжения

$$y = p - p_{\text{res}} = p + \frac{k_r}{k_z}. \quad (2.68)$$

Уравнения (2.67) соответствуют резонансному гамильтониану \tilde{H} следующего вида:

$$\tilde{H}(\psi, y) = \frac{k_z y^2}{2} - \frac{\varepsilon}{2}k_z G \cos \psi + \frac{dU}{dz} \psi. \quad (2.69)$$

Как было показано в п. 2.1.3, резонансы такого типа оказывают максимальное влияние при прохождении гладких экстремумов невозмущенного потенциала. В нашем случае роль потенциала играет функция $U(z)$, вид которой определяется невозмущенным профилем скорости звука. Чаще всего, профиль скорости

звука в океане имеет единственный гладкий экстремум, соответствующий оси подводного звукового канала, т. е. минимальной скорости звука. Это позволяет найти область значений гамильтониана, наиболее подверженную влиянию вертикального лучевого резонанса

$$H \simeq E_{\text{res}} = \frac{k_r^2}{2k_z^2} + U(z_a), \quad (2.70)$$

где z_a – глубина оси канала. Заметим, что этой области соответствует как резонанс (2.63), так и резонанс (2.64).

Главный вывод из формулы (2.70) – мелкомасштабные осцилляции возмущения по глубине, $k_z \gg k_r$, вызывают хаос лучей, распространяющихся под минимальными углами к горизонтальной плоскости, и, соответственно, характеризующиеся малыми значениями E . Это свойство вертикального лучевого резонанса является одним из главных механизмов, ответственных за сильную хаотичность в поздней части принимаемого сигнала, наблюдаемую в экспериментах, проводимых в северо-восточной части Тихого океана [114, 115, 187].

2.4.2 Режимы прохождения через резонанс

Вертикальный лучевой резонанс, как и его классический аналог (2.7), способен захватывать луч только на ограниченном участке его траектории, где вклад возмущения в вертикальный градиент скорости звука является доминирующим. Изменение траектории луча после выхода из резонанса качественно зависит от того, насколько долго пребывал луч в резонансной области. Следуя [167], можно выделить два режима прохождения через вертикальный резонанс: *рассеяние на резонансе* и *длительный захват в резонансе*. Рассмотрим каждый из них подробнее.

Рассеяние на резонансе

В этом случае луч не задерживается в резонансной области надолго и покидает его уже в течение первого цикла вокруг эллиптической точки (2.18). Вместе с тем, пересечение области резонанса, как уже отмечалось выше, сопровождается скачкообразным изменением переменной действия (см. первое уравнение в (1.4)). Приближенная формула для этого скачка может быть выведена

с помощью процедуры, описанной в работе [168]. В качестве отправной точки мы имеем

$$\delta I = \int_{r_1}^{r_2} \dot{I} dr, \quad (2.71)$$

где r_1 и r_2 значения горизонтальной координаты, при которых луч входит в резонанс и выходит из него, соответственно. Точка означает дифференцирование по r . Вдали от резонанса, переменная действия I близка к константе, поэтому мы можем заменить пределы интегрирования $r_{1,2}$ на $\mp\infty$. Затем мы делаем замену переменной, переходя от интегрирования по r к интегрированию по ψ

$$\delta I = \frac{1}{k_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{I}}{y(\psi)} d\psi. \quad (2.72)$$

Изменение действия вдоль луча описывается уравнением

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial V}{\partial \vartheta}. \quad (2.73)$$

Подставляя уравнение (2.61) в (2.73) и оставляя только доминирующий резонансный член, получаем

$$\dot{I} \simeq -\frac{\varepsilon k_z p G \sin \psi}{2\omega}. \quad (2.74)$$

Когда луч находится внутри резонансной области, изменения глубины луча z и тангенса угла скольжения p являются малыми по сравнению с изменением фазы ψ . Отсюда следует, что мы можем зафиксировать значения z и p , взяв их в момент первого пересечения сепаратрисы. Это дает

$$\delta I = \frac{\sqrt{k_z} \varepsilon G^* p^*}{2\omega^*} \int_{\psi^*}^{\infty} \frac{\sin \psi d\psi}{\sqrt{2\tilde{H}_s^* - 2U_z'^* \psi + \varepsilon k_z G^* \cos \psi}}, \quad (2.75)$$

где $U_z' = dU/dz$, а значок * указывает, что значение соответствующей величины взято в момент пересечения сепаратрисы. Как было показано в работах [167, 168, 188], величина δI обладает острой чувствительностью к малым изменениям начальных условий. Это является причиной возникновения хаоса при многократном рассеянии на резонансе.

Длительный захват в резонанс

Если произведение $k_z \varepsilon$ является достаточно большим, возникает возможность для длительного захвата в резонанс, когда луч успевает сделать несколько колебаний внутри сепаратрисной петли, в то время как сама область колебаний медленно смещается по глубине.

В качестве примера, рассмотрим резонанс с восходящей компонентой возмущения, т. е. (2.63). Из определения резонансной фазы следует

$$z(r) = \frac{1}{k_z} \left(\psi(r) - k_r r \right) = \frac{\psi(r)}{k_z} + p_{\text{res}} r. \quad (2.76)$$

Здесь последний член описывает смещение резонансной области в пространстве z . Обозначим как L интервал глубин, внутри которого фазовый портрет гамильтониана (2.69) имеет сепаратрисную петлю. L можно найти по формуле

$$L = |z_2 - z_1|, \quad (2.77)$$

где z_1 и z_2 – корни уравнения

$$|U_z| = \varepsilon k_z G. \quad (2.78)$$

Период колебаний луча внутри сепаратрисной петли вычисляется по формуле

$$L_\psi = \sqrt{\frac{2}{k_z}} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \left[\tilde{H} - U_z \psi + (\varepsilon k_z G / 2) \cos \psi \right]^{-1/2} d\psi. \quad (2.79)$$

Тогда критерий длительного захвата в резонанс может быть выражен как

$$\frac{L}{|p_{\text{res}}|} \gg L_\psi. \quad (2.80)$$

Если этот критерий выполняется, мы можем усреднить (2.76) по быстрым осцилляциям ψ , что приводит к выражению

$$\bar{z}(r) = p_{\text{res}} r + z^*, \quad (2.81)$$

где z^* – глубина в момент попадания в резонанс.

Длительный захват в резонанс допускает довольно простую интерпретацию. Быстро осциллирующее с глубиной возмущение приводит к появлению

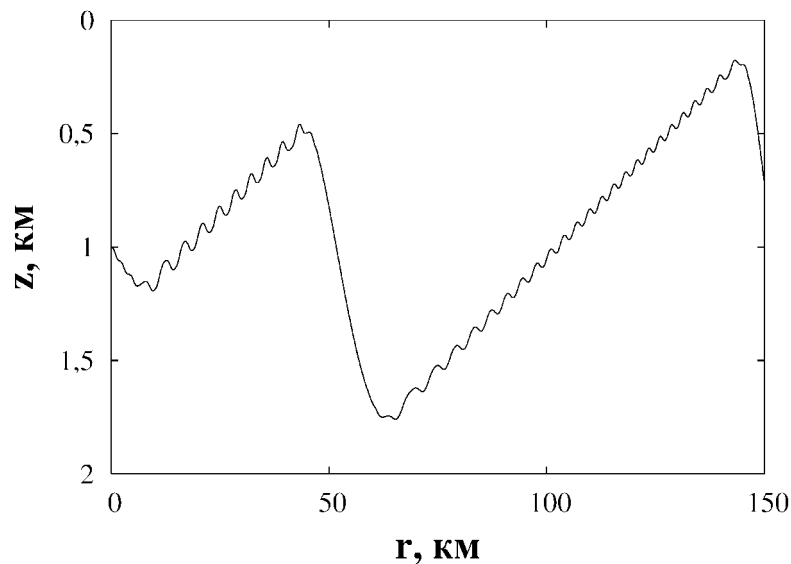


Рисунок 2.11: Схематическое изображение траектории луча в режиме длительного захвата в резонанс [36]

“ряби” на профиле скорости звука, т. е. появлению множественных локальных минимумов. Вокруг каждого из них возникает область резонанса. Эти минимумы смещаются вверх или вниз (или в обоих направлениях), унося с собой, как на “эскалаторе”, захваченные в резонанс лучи, что продемонстрировано на Рис. 2.11.

Луч подвергнувшийся длительному захвату в резонанс, существенно отклоняется от луча с такими же начальными условиями, но распространяющегося в невозмущенном волноводе. Прохождение резонанса в таком режиме может сопровождаться очень большим скачком переменной действия, который, как и в случае рассеяния на резонансе, сильно зависит от начальных условий. Таким образом, режим длительного захвата в резонанс способствует исключительно быстрой хаотической диффузии в фазовом пространстве.

2.5 Сценарий зарождения хаоса при воздействии быстро осциллирующего по координате возмущения

Теория резонанса (2.7) представляет собой совершенно иной подход, нежели теория обычного нелинейного резонанса, описанная в предыдущей главе,

в п. 1.1.2. Это может показаться несколько удивительным, поскольку теория нелинейного резонанса, основанная на теории Колмогорова-Арнольда-Мозера, традиционно рассматривалась как общий подход для гамильтоновых систем с периодическим возмущением. Однако, теория резонанса (2.7) дает совершенно другой взгляд на динамику таких систем. В частности, совсем иным представляется механизм перехода от устойчивости к хаосу, по крайней мере, на первый взгляд. В теории обычного нелинейного резонанса глобальный хаос возникает вследствие перекрытия резонансов. В случае резонанса (2.7), образование хаотического слоя связывается с пересечением медленно пульсирующей сепаратрисы в пространстве резонансных переменных. Вообще говоря, здесь можно возразить, что в обоих случаях возникновение неустойчивости так или иначе сопряжено с пересечением сепаратрис. Однако в случае резонанса (2.7) хаос возникает без участия соседних резонансов, а главная причина, которая его порождает, это эволюция “медленных” переменных. Таким образом, возникает вопрос: каким образом два вышеупомянутых подхода соотносятся друг с другом и где пролегает граница, по пересечении которой один из них становится неприменим, тогда как другой остается работающим?

Формально, главное отличие между моделями, используемых в упомянутых подходах, это присутствие дополнительной фазы kx в выражении для возмущения. В теории обычного нелинейного резонанса этот член “скрыт” в Фурье-амплитудах возмущения, определяющих ширины резонансов по частоте или действию. Попробуем выяснить, каким образом он влияет на Фурье-амплитуды. Для этого рассмотрим гамильтониан

$$H = H_0(I) + \varepsilon F(I, \vartheta, t) \sin kx(I, \vartheta), \quad (2.82)$$

где $F(t) = F(t+T)$. Положим, что рассматриваются динамика частиц с единичной массой, а адиабатическая модуляция фазы отсутствует. Если функция $F(t)$ имеет более одной гармоники Фурье, тогда условие резонанса (2.7) на значение импульса принимает вид

$$p^{(m)}(E, x = x_0) = \frac{m\nu}{k}, \quad (2.83)$$

где m – номер гармоники. Рассмотрим резонанс вида (2.5)

$$l\omega = m\nu = \frac{2\pi m}{T}. \quad (2.84)$$

Запишем выражение для Фурье-амплитуд функции $F \sin kx$

$$H_{l,m} = \frac{1}{8\pi iT} \int_{-T/2}^{T/2} dt \exp\left(i\frac{2\pi mt}{T}\right) W_l(I, t) + \text{к. с.}, \quad (2.85)$$

$$W_l(I, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta F(I, \vartheta, t) e^{il\vartheta + ikx} - \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta F(I, \vartheta, t) e^{il\vartheta - ikx}. \quad (2.86)$$

В случае больших значений k , для интегрирования (2.86) можно воспользоваться методом стационарной фазы. Обозначая соответствующие фазы как

$$\psi = l\vartheta \pm kx(\vartheta), \quad (2.87)$$

мы находим соответствующие условия стационарности

$$\frac{d\psi}{d\vartheta} = l \pm k \frac{dx}{d\vartheta} = l \pm \frac{kp}{\omega} = 0. \quad (2.88)$$

Согласно (2.84), мы можем заменить ω на $m\nu/l$. Тогда условие стационарной фазы принимает вид

$$m\nu \pm kp(I, \vartheta) = 0. \quad (2.89)$$

Вторая производная фазы выглядит следующим образом:

$$\frac{d^2\psi}{d\vartheta^2} = \pm \frac{k}{\omega^2} \frac{dp}{dt}. \quad (2.90)$$

Интегрируя и учитывая, что

$$\frac{dp}{dr} \approx -\frac{dU}{dx} \quad (2.91)$$

находим решение в виде суммы вкладов от стационарных точек

$$W(I, t) \approx \frac{\omega}{4\pi} \sum_j (k |U'_x(\vartheta_j)|)^{-1/2} F(\vartheta_j, t) e^{i\psi_j + i(\pi/4)\text{sgn}(d\psi_j^2/d\vartheta^2)} + \text{к. с.}, \quad (2.92)$$

где мы опустили индекс l , $U'_x = dU/dx$, ϑ_j — j -ое решение (2.89), и ψ_j — соответствующее ему значение фазы. Из (2.92) следует, что функция $H_{l,m}(I)$ имеет особенность в точках гладкого экстремума потенциала, где $U'_x = 0$. С учетом (2.89), условие $U'_x = 0$ приводит к выражению (2.83). Это предполагает сильное уширение нелинейных резонансов, если они оказываются близки в фазовом пространстве к зоне резонанса (2.7). Прямым следствием этого уширения может

являться усиление перекрытия нелинейных резонансов и возникновение глобального хаоса. С другой стороны, нелинейные резонансы, не поддерживаемые резонансами (2.7), должны быть очень слабыми. Действительно, отсутствие корней уравнения (2.89) предполагает, что соответствующие Фурье-амплитуды будут малыми вследствие сильных осцилляций подынтегрального выражения в (2.86).

В качестве иллюстрации обратимся к задаче о распространении звука в океане и рассмотрим волновод, в котором скорость звука описывается формулой

$$c(z, r) = c_0 \left[1 + \frac{b^2}{2} (e^{-az} - \eta)^2 \right] + \varepsilon c_0 \frac{z}{B} e^{-2z/B} \sin k_z z \sin k_r r. \quad (2.93)$$

Опорный (т. е. невозмущенный) профиль скорости звука соответствует биэкспоненциальной модели, впервые использованной в работе [189]. Значения параметров подобраны следующим образом: $c_0 = 1480$ м/с, $a = 0.5$ км⁻¹, $b = 0.557$, $\eta = 0.6065$, $B = 1$ км, $k_z = 2\pi/600$ м⁻¹, $k_r = 2\pi/5000$ м⁻¹. В этом случае возникает вертикальный лучевой резонанс при $p = \lambda_z/\lambda_r = 0.12$. Зона основного влияния находится вблизи нелинейного резонанса порядка 8 : 1. На Рис. 2.12 продемонстрированы сечения Пуанкаре, построенные для различных значений амплитуды возмущения ε . При $\varepsilon = 0.0005$, резонанс 8 : 1 существенно выделяется на фоне остальных нелинейных резонансов, хотя соответствующий фазовый портрет имеет регулярную структуру (см. Рис. 2.12(а)). С увеличением ε резонанс 8 : 1 начинает перекрываться с соседними резонансами с дробным порядком $l : m$. Как следствие, в окрестности его сепаратрисы появляется хаотический слой, внутри которого присутствует паутина островов устойчивости. Хаотический слой хорошо заметен на сечении Пуанкаре, изображенном на Рис. 2.12(б). При дальнейшем росте амплитуды возмущения хаотический слой расширяется и превращается в хаотическое море, занимающее обширную область в фазовом пространстве (см Рис. 2.12(в)).

Таким образом, мы видим, что резонанс (2.7) приводит к локальному усилению нелинейного резонанса. По превышении некоторого порогового значения амплитуды возмущения, это усиление становится причиной возникновения глобального хаоса, обусловленного перекрытием с соседними резонансами.

Однако, при воздействии резонанса (2.7) возможен и более интересный сценарий хаоса. При селективном усилении резонансных Фурье-амплитуд, обу-

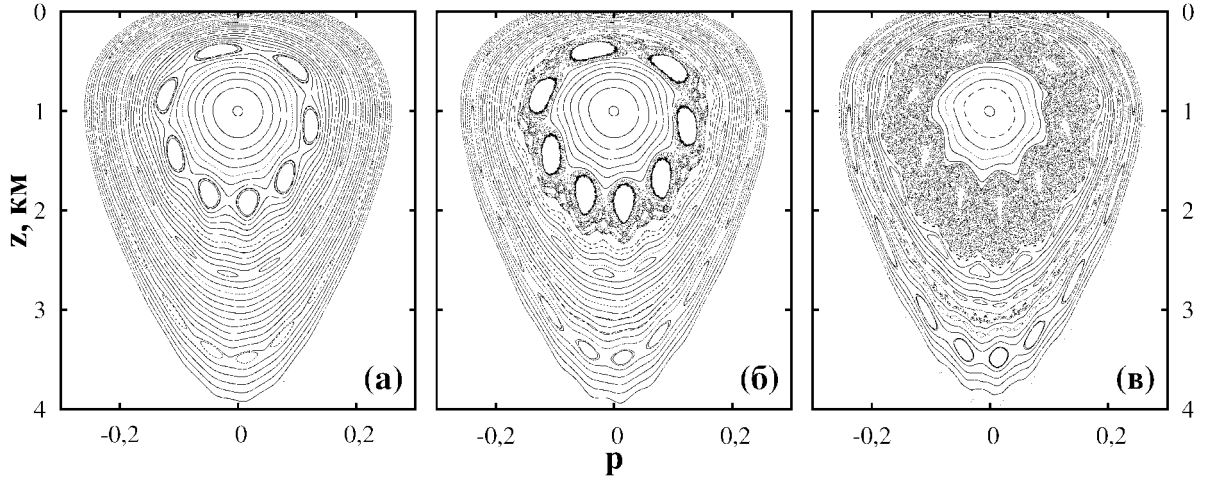


Рисунок 2.12: Расширение резонанса 8 : 1 и зарождение хаотического слоя при содействии вертикального лучевого резонанса с $\lambda_z = 0.6$ км и $\lambda_r = 5$ км; (а) $\varepsilon = 0.0005$, (б) $\varepsilon = 0.001$, (в) $\varepsilon = 0.002$ [36]

словленном резонансом (2.7), также возрастают и производные этих амплитуд по действию, т. е. $dH_{l,m}(I)/dI$ и $d^2H_{l,m}(I)/dI^2$. Посмотрим, к каким последствиям это приведет. Рассмотрим уравнение движения для переменной угла (второе уравнение из (1.4)), канонически сопряженной с переменной действия,

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_{l,m}(I)}{\partial I} \cos \psi_{l,m}, \quad (2.94)$$

где $\psi_{l,m} = l\vartheta - m\nu t + \varphi_0$ и $\varphi_0 = \arg H_{l,m}$. Рассмотрим его свойства в окрестности эллиптических лучевых орбит нелинейного резонанса, удовлетворяющих условиям $\psi_{l,m} = 0$ и $ld\vartheta/dt = m\nu$. Тогда уравнение (2.94) преобразуется к виду

$$\frac{m}{l}\nu = \frac{\partial H_0(I)}{\partial I} + \varepsilon \frac{\partial H_{l,m}(I)}{\partial I}. \quad (2.95)$$

Если

$$\left| \frac{\partial^2 H_0}{\partial I^2} \right| > \varepsilon \left| \frac{\partial^2 H_{l,m}}{\partial I^2} \right|, \quad (2.96)$$

т. е. правая часть (2.95) является монотонной функцией действия I , то уравнение (2.95) имеет единственный корень, определяющий значение переменной действия, соответствующее эллиптической точке. Однако, в присутствие резонанса (2.7) это неравенство перестает выполняться уже при малых значениях амплитуды возмущения ε . В этом случае может появиться пара дополнительных корней, каждый из которых также соответствует периодической орбите, эллиптической или гиперболической. Таким образом, происходит бифуркация

одного из двух типов: либо бифуркация вилки, либо бифуркация седло-центр. Аналогичная ситуация происходит и с гиперболическими орбитами, отвечающими условию $\psi_{l,m} = \pi$. Бифуркации эллиптических и гиперболических орбит происходят почти при одних и тех же значениях ε . Возникающие в результате бифуркации новые эллиптические орбиты могут соответствовать новым цепочкам островков в фазовом пространстве; в этом случае нелинейный резонанс кратности $l : m$ приобретает два сателлита. При дальнейшем росте ε размножение периодических лучевых орбит продолжается.

В качестве иллюстрации вновь рассмотрим задачу о вертикальном лучевом резонансе при распространении звука в океане. Возьмем модель (2.93) и положим $\lambda_z = 200$ м. Проследим как происходит зарождение хаотического слоя при малых значениях амплитуды возмущения ε . Рисунок 2.13 иллюстрирует эволюцию сечения Пуанкаре с ростом ε . Вертикальный резонанс с $p_{\max} = 0.04$ приводит к уширению нелинейного резонанса 15:2. В результате, этот резонанс оказывается заметен на сечении Пуанкаре даже при чрезвычайно малых значениях ε . При $\varepsilon = 0.0001$ цепочка островков, соответствующая резонансу 15:2, выглядит как обычная резонансная цепочка в невырожденных гамильтоновых системах (Рис. 2.13(а)). При $\varepsilon = 0.0002$ этого уже сказать нельзя — островки “вытягиваются” вдоль радиальной координаты (Рис. 2.13(б)). Это “вытягивание” приводит, в конечном счете, к бифуркациям особых точек. Результат бифуркаций представлен на Рис. 2.13(в), где мы видим появление двух цепочек сателлитов с таким же числом островков. Таким образом, нелинейный резонанс 15:2 становится трехкратно вырожденным. При дальнейшем росте ε на месте сепаратрис вырожденных резонансов образуется хаотический слой.

Данный пример свидетельствует о том, что хаос в условиях вертикального резонанса может развиваться по сценарию, характерному для вырожденных гамильтоновых систем [40–43, 190, 191], т. е. через последовательность бифуркаций особых точек, с последующей потерей их устойчивости. Как мы увидим ниже, бифуркации особых точек не только приводят к сложному поведению лучей, но и являются причиной некоторых нетривиальных свойств волновой динамики.

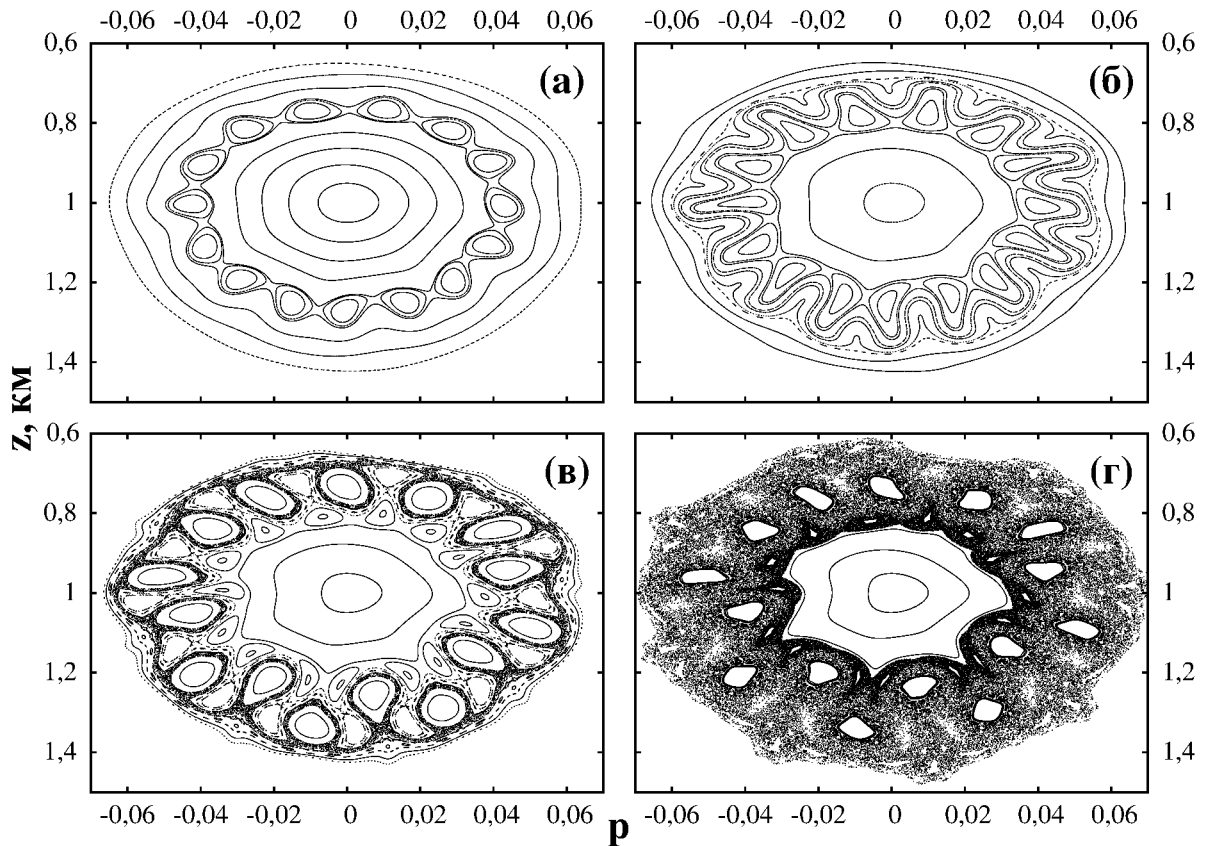


Рисунок 2.13: Рождение хаотического слоя в окрестности вертикального резонанса при $\lambda_z = 0.2$ км и $\lambda_r = 5$ км; (а) $\varepsilon = 0.0001$, (б) $\varepsilon = 0.0002$, (в) $\varepsilon = 0.00035$, (г) $\varepsilon = 0.0005$ [36]

2.6 Заключение к главе 2

В этой главе представлена теория воздействия возмущения в виде плоской волны с большим волновым числом на движение частицы в поле одномерной потенциальной ямы. Показано, что в этом случае может происходить селективное резонансное разрушение устойчивости в определенном интервале энергии частицы. Это явление, вкуче с нарушением симметрий (1.94), может быть использовано для разрушения динамических барьеров в фазовом пространстве и генерации направленного баллистического транспорта, при этом требуемая амплитуда возмущения является достаточно малой. Показано, что зарождение хаоса связано с локальным усилением обычного нелинейного резонанса, причем такое усиление может сопровождаться бифуркациями особых точек. В последнем случае возникает сценарий хаоса, качественно отличающийся от сценария Чирикова, связанного с перекрытием резонансов.

Если пространственная компонента фазы возмущения подвергается адиабатической модуляции, возможно формирование каналов резонансного ускорения, в которых скорость частицы может увеличиваться на несколько порядков. Резонансный канал ускорения существует не постоянно – возникая, он существует в течение ограниченного промежутка времени. Если модуляция является осциллирующей, впоследствии он может возникнуть вновь. Сам по себе захват в резонансный канал ускорения является случайным процессом. Лишь малая доля ансамбля частиц попадает в него при каждом его возникновении.

Представленная теория может быть использована в акустике океана для описания рассеяния звуковых лучей на мелкомасштабных неоднородностях подводного звукового канала. Лучевой аналог резонанса с быстрыми пространственными осцилляциями возмущения называется вертикальным лучевым резонансом. Описаны основные свойства вертикального лучевого резонанса.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [36, 55, 166, 170, 174, 180, 181, 183–186, 192, 193] в соавторстве с М.Ю. Улейским, Л.Е. Коньковым, Е.В. Соседко, Р. Чаконом, А.Л. Вировлянским, Г.М. Заславским и С.В. Пранцем.

Глава 3

Волновой хаос в периодических акустических волноводах

3.1 Модель волновода

В предыдущей главе было введено понятие вертикального лучевого резонанса, который представляет собой один из возможных механизмов неустойчивости звуковых лучей в океане. В настоящей главе мы продолжим исследование этой задачи, сконцентрировав свое внимание на особенностях волнового хаоса при дальнем распространении звука в океане. Будет использована идеализированная модель подводного звукового канала с периодической неоднородностью скорости звука вдоль трассы. Использование этой модели позволит описать базовые механизмы влияния лучевого хаоса на динамику волнового поля. Главное внимание будет уделено проявлениям лучевого вертикального резонанса.

Модель волновода, которая будет использована для численных иллюстраций, уже была задействована в п. 2.5. В качестве опорного профиля скорости звука выступает биэкспоненциальный профиль, для которого функция $U(z)$, играющая роль невозмущенного потенциала, выглядит следующим образом:

$$U(z) = \frac{b^2}{2} (e^{-az} - \eta)^2. \quad (3.1)$$

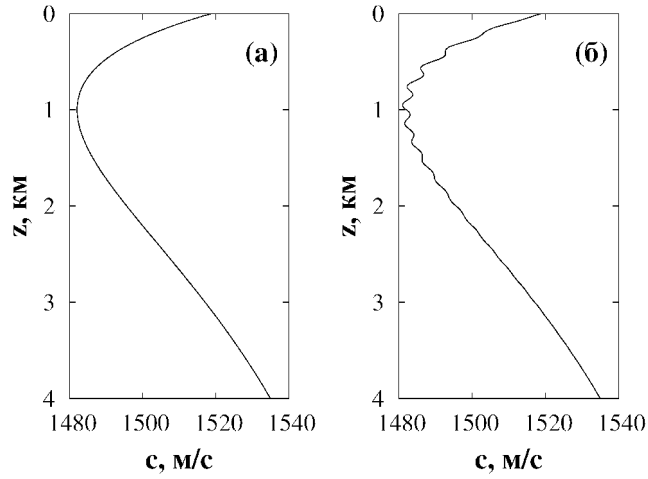


Рисунок 3.1: Профили скорости звука: а) опорный профиль скорости звука, б) профиль при $r = 2.5$ км в присутствии возмущения с $\lambda_r = 5$ км и $\lambda_z = 0.2$ км [184]

Данная форма зависимости $U(z)$ является достаточно типичной для глубокого океана. Достаточно сказать, что биэкспоненциальный профиль скорости звука достаточно близок к так называемому каноническому профилю скорости звука, введенному У. Манком [194]. Возмущение задается формулой

$$V(z, r) = \frac{\delta c}{c_0} = \varepsilon Y(z) \sin \frac{2\pi z}{\lambda_z} \sin \frac{2\pi r}{\lambda_r}, \quad (3.2)$$

где

$$Y(z) = \frac{z}{B} e^{-2z/B}. \quad (3.3)$$

Значения параметров подобраны следующим образом: $c_0 = 1480$ м/с, $a = 0.5$ км⁻¹, $b = 0.557$, $\eta = 0.6065$, $B = 1$ км, $k_r = 2\pi/5000$ м⁻¹. Значение вертикального волнового числа λ_z будет варьироваться от 200 м до 2000 м. На Рис. 3.1 представлен опорный профиль скорости звука, а также профиль с возмущением, демонстрирующим быстрые осцилляции по глубине. Как уже отмечалось выше, эти осцилляции имитируют эффект высоких мод поля внутренних волн. Как мы видим, при этом возникает характерная “рябь” на профиле, которая способна сильно рассеивать звуковые лучи, что будет продемонстрировано ниже.

3.2 Лучевая картина

Перед тем, как перейти к рассмотрению волновой динамики, дадим краткое описание свойств лучевой динамики в используемой нами модели волновода. Особое внимание уделим влиянию вертикального лучевого резонанса. Как было показано в п. 2.4, вертикальный резонанс оказывает наиболее сильное воздействие на лучи, которые пересекают ось подводного звукового канала со значениями тангенса угла скольжения, равными $\pm\lambda_z/\lambda_r$. Это условие можно сформулировать следующим образом:

$$p_0 = |p(z_a, E)| = \sqrt{2E_{\text{res}}} = \frac{\lambda_z}{\lambda_r}, \quad (3.4)$$

где E_{res} дается формулой (2.70). Рассмотрим структуру фазового пространства при различных значениях вертикального масштаба возмущения λ_z . Для этого воспользуемся отображением Пуанкаре. Результаты вычислений представлены на Рис. 3.2.

В случае $\lambda_z = 2000$ м, зона вертикального резонанса в фазовом пространстве соответствует лучам, достигающим поглощающего дна и не представляющим интереса с точки зрения дальнего распространения звука. Лучи же, распространяющиеся без контакта с дном, влиянию вертикального резонанса подвержены слабо. Как следствие, движение лучей является преимущественно устойчивым, что и продемонстрировано на сечении Пуанкаре, изображенном на Рис. 3.2(а). Фазовое пространство лучевых уравнений содержит большой остров устойчивости, охватывающий почти всю область канального распространения. Внутри большого острова находятся несколько цепочек островков, соответствующих нелинейному резонансу. Наиболее заметная из них соответствует резонансу кратности $9 : 1$, находящемуся ближе всех к зоне влияния вертикального резонанса. Остальные цепочки резонансов имеют значительно меньшие ширины.

При двукратном уменьшении λ_z условие (3.4) выполняется для достаточно крутых лучей с $p_0 \simeq 0.2$. Это приводит к существенному сужению центрального острова устойчивости и разрушению островков, соответствующих резонансу $9 : 1$ (см. Рис. 3.2(б)). В то же время происходит значительное усиление резонанса $8 : 1$. Возникающий хаотический слой является открытым, т. е. отсутствуют

динамические барьеры, препятствующие “раскачке” лучей с последующим достижением поглощающего дна. Таким образом, возникает эффект “высвечивания” лучей из подводного звукового канала, способствующий усилению потерь при дальнем распространении звука [183].

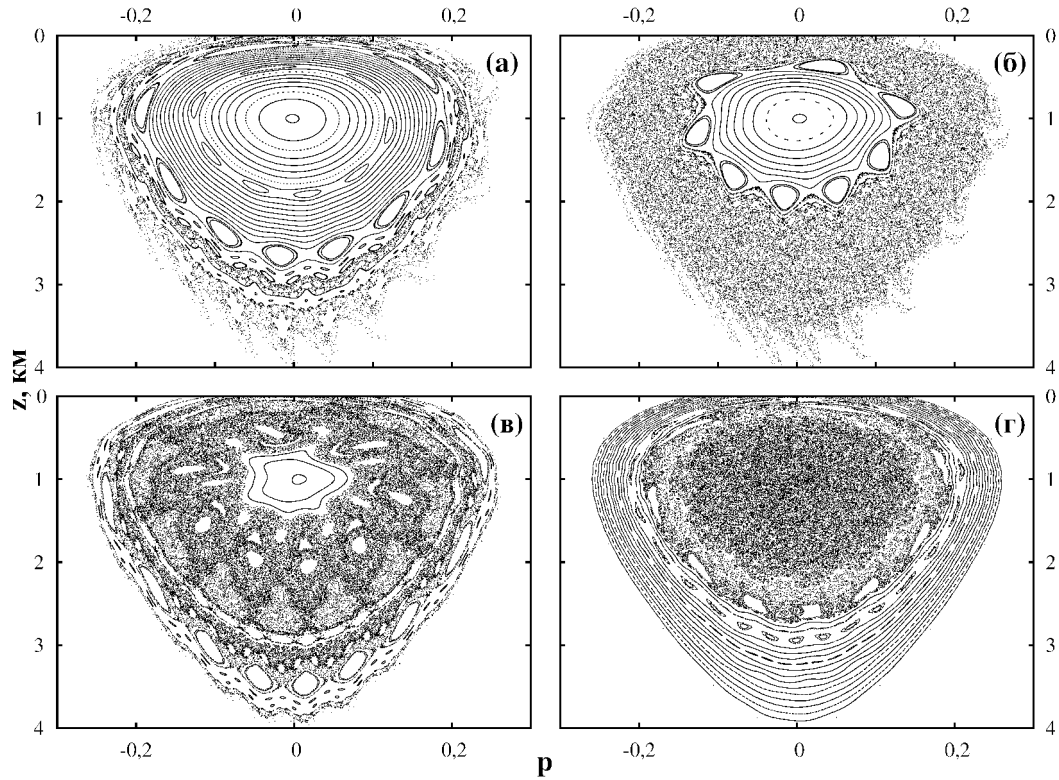


Рисунок 3.2: Сечения Пуанкаре, рассчитанные для $\lambda_z = 2000$ м (а), $\lambda_z = 1000$ м (б), $\lambda_z = 500$ м (в), и $\lambda_z = 200$ м (г) [195]

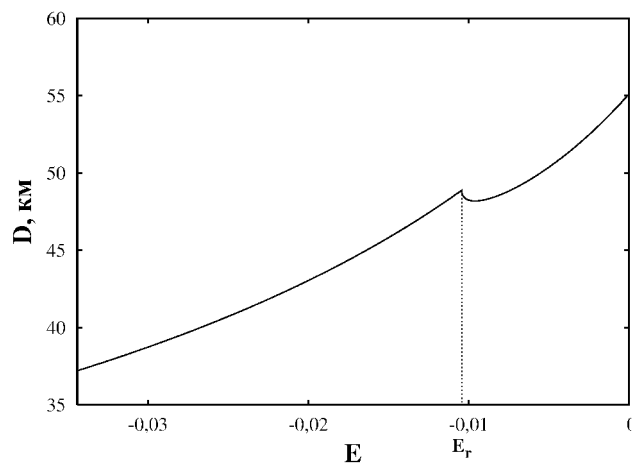


Рисунок 3.3: Длина цикла траектории луча как функция лучевого параметра E для подводного звукового канала с биэкспоненциальным профилем скорости звука [196]

При $\lambda_z = 500$ м структура фазового пространства становится достаточно нетривиальной (Рис. 3.2(в)). Наблюдаются два вложенных друг в друга кольца хаотических слоев, отделенные друг от друга тонкой полосой устойчивого движения. Внутренний хаотический слой, обусловленный вертикальным резонансом с $p_0 \simeq 0.1$, содержит внутри множественные острова устойчивости. При пристальном внимании можно увидеть, что все эти острова принадлежат трем цепочкам. Каждая из этих цепочек состоит из 8 островов, т. е. они соответствуют вырожденным нелинейным резонансам, образовавшимся по сценарию, описанному в п. 2.5. Внешний хаотический слой является сравнительно узким. Его появление можно легко объяснить, если принять во внимание зависимость длины цикла звукового луча от параметра E , представляющего собой математический аналог энергии колебаний в механике. Эта зависимость представлена на Рис. 3.3, где отчетливо видно, что она является немонотонной. Значение E_T , при котором наблюдается локальный максимум, разграничивает лучи отражающиеся ($E > E_T$) и не отражающиеся ($E < E_T$) от морской поверхности. Этот максимум может разделять резонансы одной и той же кратности. Резонансы, находящиеся с разных сторон от E_T , могут перекрываться друг с другом, при условии, что их амплитуда резонансов достаточно велика [197, 198]. При перекрытии возникает хаотический слой, который мы и видим на Рис. 3.2(в). Отметим, что отдельный хаотический слой в окрестности E_T наблюдается и на Рис. 3.2(а), однако там он гораздо уже.

На Рис. 3.2(г) изображено сечение Пуанкаре, соответствующее случаю $\lambda_z = 200$ м. Главная особенность этого сечения – это присутствие обширного и почти однородного хаотического слоя в центральной части фазового пространства, окруженного инвариантными кривыми. Другая деталь, которую следует отметить, это ослабление цепочек нелинейного резонанса по мере отдаления от центра, что связано с уже отмечавшимся в п. 2.5 подавлением нелинейного резонанса вдали от зоны действия вертикального лучевого резонанса (3.4).

Однородность слоя предполагает эргодичность хаотической диффузии. Чтобы удостовериться в этом, обратимся к численному моделированию и рассмотрим эволюцию узкоугольного пучка лучей с начальными условиями, соответствующими хаотическому слою (см. Рис. 3.4(а)). При моделировании ис-

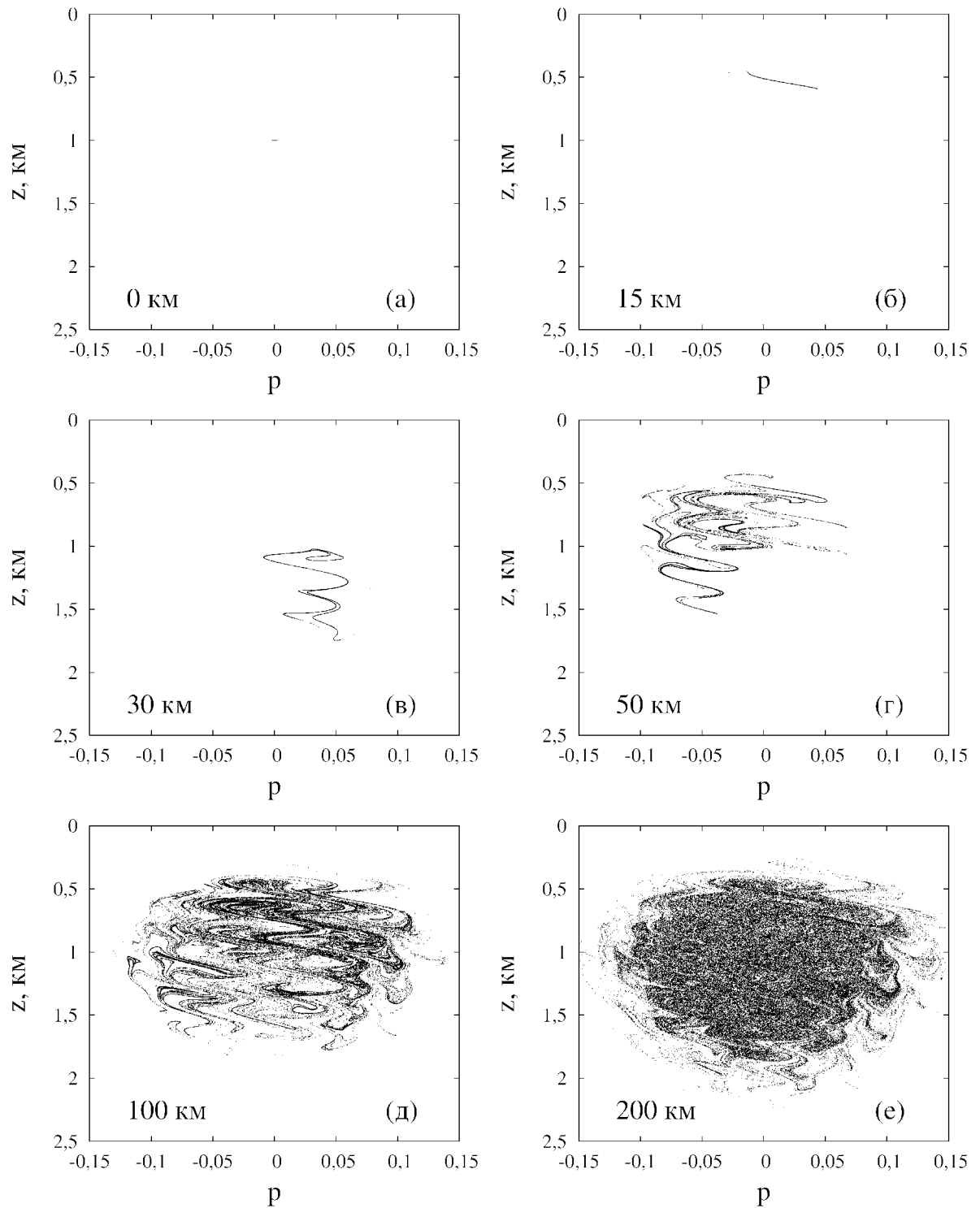


Рисунок 3.4: Эволюция лагранжева многообразия, соответствующего изначально узкоугольному пучку хаотических лучей. Каждый рисунок представляет распределение лучей в фазовом пространстве. На каждом рисунке указано расстояние от источника [36]

пользовался ансамбль из $2 * 10^5$ лучей. Высокая плотность ансамбля позволяет трактовать его как лагранжево многообразие.

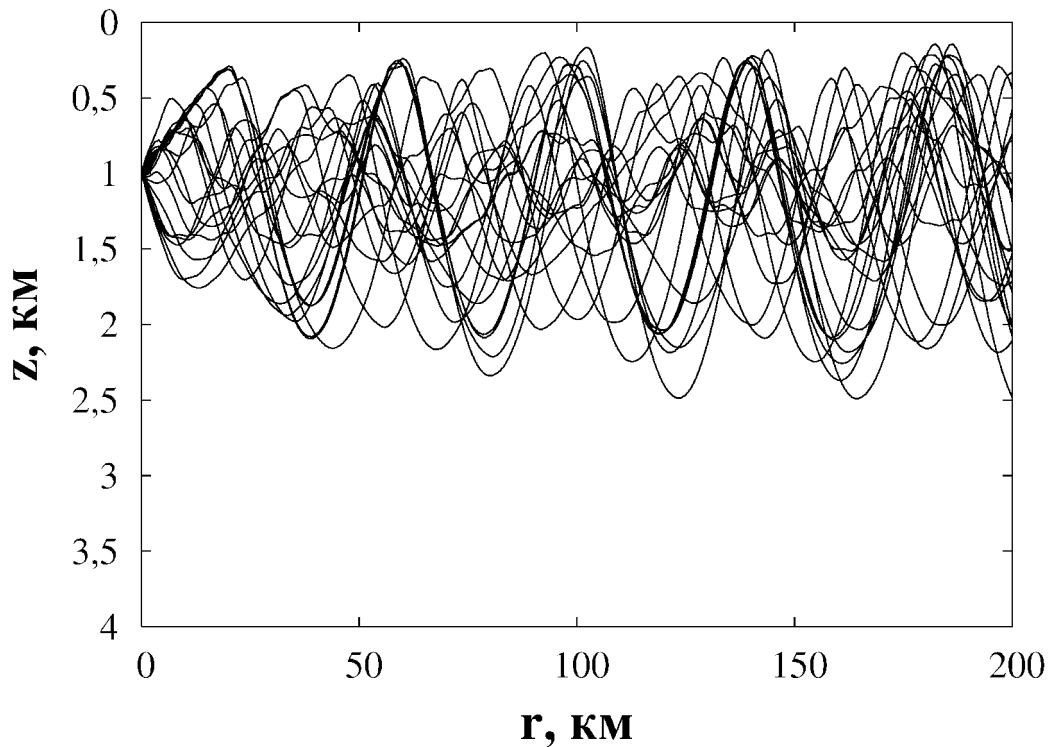


Рисунок 3.5: Траектории нескольких лучей, принадлежащих хаотическому слою на Рис. 3.2(г) [186]

Результаты расчетов представлены на Рис. 3.4. На начальном этапе пятно, соответствующее пучку, вытягивается (Рис. 3.4(б)), а затем превращается в своего рода “пружинку” (Рис. 3.4(в)). Отметим, что вертикальное расстояние между соседними витками “пружинки” приблизительно совпадает с λ_z , что является свидетельством влияния вертикального лучевого резонанса. Затем, после каскада растяжений и скручиваний различные сегменты лагранжева многообразия начинают пересекаться друг с другом. Это приводит, в конечном итоге, к превращению изначально узкого пучка в расплывчатое “облако” (Рис. 3.4(е)). Если взглянуть на траектории отдельных лучей из области хаотического слоя, то стоит отметить, что наиболее крутые из них, не попадающие в вертикальный резонанс, выглядят как почти регулярные колебания, в то время как траектории лучей, скользящих вдоль оси волноводного канала под малыми углами, выглядят как случайные блуждания (см. Рис. 3.5).

3.3 Влияние вертикального лучевого резонанса на межмодовое взаимодействие

Перейдем к анализу волновой динамики в акустических океанических волноводах. Если неоднородность вдоль трассы является слабой, то иногда бывает удобно представить решение параболического уравнения (1.81) в виде разложения по нормальным модам невозмущенного волновода

$$\Psi(z, r) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m(r) \varphi_m(z), \quad (3.5)$$

где модовые функции $\varphi_m(z)$ являются решением задачи Штурма-Лиувилля

$$\frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial z^2} + 2k_0^2 \left(E_m - \frac{\Delta c(z)}{c_0} \right) \varphi_m = 0 \quad (3.6)$$

с соответствующими граничными условиями на поверхности моря $z = 0$ и дне $z = h$. Отражение звука от поверхности моря вполне адекватно описывается граничным условием Дирихле

$$\varphi_m(z = 0) = 0. \quad (3.7)$$

Наше внимание сосредоточено на малоугловом распространении, которое мало подвержено влиянию дна. Поэтому мы можем воспользоваться идеализированным нижним граничным условием, положив, что дно является жестким и неподатливым. Это соответствует условию Неймана

$$\frac{d\varphi_m(z = h)}{dz} = 0. \quad (3.8)$$

В горизонтально-однородном волноводе модовые амплитуды в разложении (3.5) описываются формулой

$$a_m(r) = a_m(0) \exp(-ik_0 E_m r), \quad a_m(0) = \int_{z=0}^h \varphi_m^*(z) \varphi(z, r = 0) dz. \quad (3.9)$$

Таким образом, для заданного волновода модовые амплитуды зависят только от начального состояния. Присутствие неоднородности усложняет ситуацию.

Подставляя (3.5) в (1.81) и учитывая (3.6), получаем уравнения эволюции для модовых амплитуд

$$\frac{i}{k_0} \frac{dc_m}{dr} = E_m c_m + \sum_m v_{mn} c_n, \quad (3.10)$$

где матричные элементы возмущения v_{mn} вычисляются следующим образом:

$$v_{mn}(r) = \int \varphi_m(z) V(z, r) \varphi_n(z) dz. \quad (3.11)$$

При выполнении условия

$$k_0(E_m - E_n) = k_r \quad (3.12)$$

в уравнениях (3.10) возникает резонанс, являющийся волновым аналогом резонанса (1.57). Как было показано в п. 1.2.2, в полуклассическом пределе $k_0 \rightarrow \infty$ условие (3.12) сводится к условию лучевого нелинейного резонанса.

Рассмотрим вопрос о влиянии вертикального лучевого резонанса на взаимодействие мод. Как было показано Вировлянским [199–204], в коротковолновом пределе основной вклад в амплитуду моды с номером m дают лучи, у которых значение действия удовлетворяет условию

$$I(r) \simeq I_m, \quad (3.13)$$

где I_m – действие модового луча, определяемое из условия квантования Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера. Если обе точки заворота модового луча лежат в водной толще, последнее имеет вид

$$k_0 I_m = m - 1/2, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

Таким образом, в лучевом пределе взаимодействие мод связано с изменением действия вдоль лучей. С другой стороны, как уже отмечалось выше, в слабонеоднородных волноводах действие луча является адиабатическим инвариантом и в нерезонансном случае медленно меняется вдоль траектории. Это предполагает приоритет взаимодействия между близкими модами, для которых разница в I_m является малой.

Разложение поля по модам однородного волновода дает возможность оценить влияние вертикальной структуры неоднородности на взаимодействие мод. Подставим (3.2) в (3.11) и представим матричные элементы v_{mn} в следующем виде

$$v_{mn} = J_{mn} \sin k_r r, \quad (3.15)$$

где

$$J_{mn} = \frac{\varepsilon}{B} \int \varphi_m(z) z e^{-2z/B} \sin k_z z \varphi_n(z) dz. \quad (3.16)$$

Для облегчения дальнейшего анализа воспользуемся приближением ВКБ, переписав модовые функции в следующем виде

$$\varphi_m(z) = A_m(z)(e^{ik_0 S_m(z)+i\pi/4} + e^{-ik_0 S_m(z)-i\pi/4}). \quad (3.17)$$

Амплитудный множитель A_m дается выражением

$$A_m(z) = \frac{1}{\sqrt{p_m(z)D_m}}, \quad (3.18)$$

где D_m — длина цикла модового луча, $p_m(z) = p(z, E = E_m)$,

$$p(z, E) = \sqrt{2[E - U(z)]}. \quad (3.19)$$

Функция $S_m(z)$ определяется выражением

$$S_m(z, E_m) = \int_{z_{\min}}^z p(z, E_m) dz. \quad (3.20)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) и раскрывая скобки, получаем

$$J_{mn} = \sum_{l=1}^8 J_{mn,l}, \quad J_{mn,l} = \int dz \Upsilon_{mn}(z) \exp(ik_0 \gamma_{mn,l}), \quad (3.21)$$

где введены обозначения

$$\Upsilon_{mn} = \frac{\varepsilon z}{2iB} \exp(-2z/B) A_m A_n, \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{mn,1} &= S_m - S_n + \frac{k_z}{k_0} z, & \gamma_{mn,2} &= S_n - S_m - \frac{k_z}{k_0} z, \\ \gamma_{mn,3} &= S_m - S_n - \frac{k_z}{k_0} z, & \gamma_{mn,4} &= S_n - S_m + \frac{k_z}{k_0} z, \\ \gamma_{mn,5} &= S_m + S_n - \frac{k_z}{k_0} z + \frac{\pi}{2}, & \gamma_{mn,6} &= -S_n - S_m + \frac{k_z}{k_0} z - \frac{\pi}{2}, \\ \gamma_{mn,7} &= S_m + S_n + \frac{k_z}{k_0} z + \frac{\pi}{2}, & \gamma_{mn,8} &= -S_m - S_n - \frac{k_z}{k_0} z - \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Интеграл из суммы (3.21) может быть представлен в виде суммы интегралов, каждый из которых может быть вычислен методом стационарной фазы. С учетом того, что $\partial S_m / \partial z = p_m$, условия стационарной фазы сводятся к следующим

двум:

$$\frac{k_z}{k_0} = p_m(z) + p_n(z) \quad (3.24)$$

и

$$\frac{k_z}{k_0} = p_m(z) - p_n(z). \quad (3.25)$$

Последние два интеграла из (3.21), $J_{mn,7}$ и $J_{mn,8}$, равны нулю поскольку

$$\frac{d\gamma_{mn,7}}{dz} = -\frac{d\gamma_{mn,8}}{dz} = p_m + p_n + \frac{k_z}{k_0} \neq 0 \quad (3.26)$$

для всех z . Вторые производные фаз $\gamma_{mn,l}$ даются формулами

$$\begin{aligned} \gamma''_{mn,1} = -\gamma''_{mn,2} = \gamma''_{mn,3} = -\gamma''_{mn,4} &= \frac{dp_m}{dz} - \frac{dp_n}{dz}, \\ \gamma''_{mn,5} = -\gamma''_{mn,6} &= \frac{dp_m}{dz} + \frac{dp_n}{dz}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Таким образом, получаем

$$J_{mn,l} = \Upsilon_{mn}(z_l) \left| \frac{dp_m}{dz} \mp \frac{dp_n}{dz} \right|^{-1/2} \times \sqrt{\frac{2\pi}{k_0}} \exp \left[ik_0 \gamma_{mn,l}(z_l) + i \operatorname{sgn}(\gamma''_{mn,l}) \pi/4 \right], \quad (3.28)$$

где z_l – решение уравнения $d\gamma_{mn,l}/dz = 0$, верхний знак соответствует $1 \leq l \leq 4$, а нижний – $l = 5, 6$. Величины $J_{mn,l}$ достигают максимального значения, когда z_l близко к оси волновода, где $dp_m/dz = 0$. Принимая это во внимание, получаем условия

$$\frac{k_z}{k_0} = p_m(z_a) + p_n(z_a), \quad (3.29)$$

и

$$\frac{k_z}{k_0} = |p_m(z_a) - p_n(z_a)|, \quad (3.30)$$

соответствующие наибольшему усилению межмодового взаимодействия за счет вертикальных колебаний неоднородности. В зависимости от того, выполняются или нет приведенные условия, мы можем говорить об усилении или подавлении взаимодействия мод под влиянием вертикальных осцилляций неоднородности. Таким образом, мы видим, что вертикальный лучевой резонанс приводит к селективному росту отдельных матричных элементов возмущения на фоне ослабления остальных.

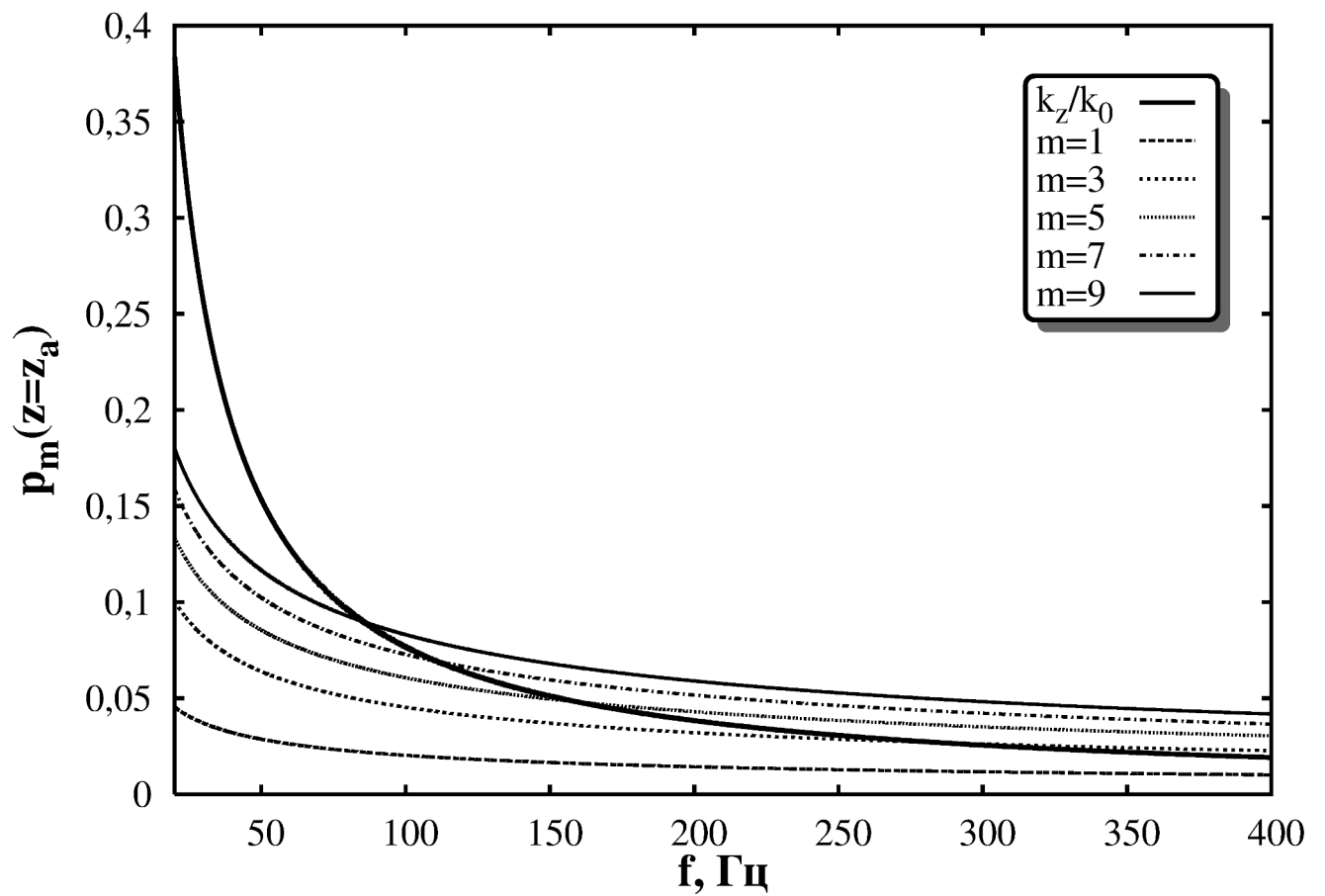


Рисунок 3.6: Зависимость максимального тангенса угла скольжения модового луча от частоты. Жирная линия — частотная зависимость величины k_z/k_0 [186]

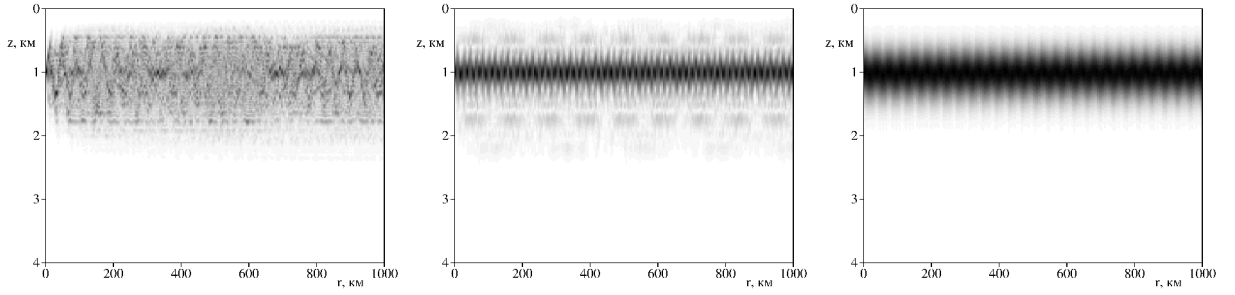


Рисунок 3.7: Акустическое поле в волноводе при $\lambda_z = 200$ м. Частота сигнала: 200 Гц (левая панель), 50 Гц (центральная панель), 20 Гц (правая панель) [186]

Посмотрим как это проявляется на примере волновода, описанного в п. 3.1 при $\lambda_z = 200$ м. Как было показано в предыдущем параграфе, в этом случае возникает сильный хаос наиболее пологих лучей, распространяющихся в непосредственной близости от оси канала. Это должно бы предполагать сильное взаимодействие первых мод между собой. На Рис. 3.6 изображена зависимость тангенса угла скольжения модового луча при пересечении оси канала от частоты сигнала. Результаты приведены для 1-й, 3-й, 5-й и 9-й мод. Для сравнения также представлена частотная зависимость величины k_z/k_0 . Как следует из приведенных графиков, при малых частотах взаимодействие первых мод между собой является нерезонансным и, поэтому, достаточно слабым. Условия для резонансного взаимодействия первых мод возникают лишь начиная с $f \approx 50$ Гц. С дальнейшим ростом частоты условия (3.24) и (3.25) выполняются для все большего и большего числа мод с близкими номерами. Как уже отмечалось выше, это хорошо согласуется с лучевой картиной и предполагает нерегулярную зависимость модовых амплитуд от r .

Для проверки приведенных выше утверждений нами были проведены расчеты акустического поля путем численного решения параболического уравнения (1.81). В качестве начального условия был выбран горизонтально направленный гауссов волновой пакет, описываемый следующей формулой:

$$\Psi(z, r = 0) = (2\pi\sigma_z^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(z - z_a)^2}{4\sigma_z^2}\right). \quad (3.31)$$

Полуширина пакета σ_z связана с частотой сигнала с помощью формулы

$$\sigma_z = \frac{3c_0}{4\pi f \operatorname{tg} \alpha_0}. \quad (3.32)$$

Угол α_0 в формуле (3.32) приближенно равен полуширине угловой апертуры источника. Поскольку в данной работе нас в первую очередь интересует малоугловое распространение звука вблизи оси канала, при расчетах мы положили $\alpha_0 = \arctg 0.1$. Структура акустического поля в случае тонального сигнала с частотой 200 Гц приведена на левой панели Рис. 3.7. Поле имеет ярко выраженный диффузионный характер, при этом все зоны конвергенции и тени сильно размыты. Нерегулярная интерференционная структура свидетельствует о некоррелированности набегов фаз вдоль лучей, формирующих поле в каждой точке, что является атрибутом лучевого хаоса. Таким образом, структура волнового поля качественно согласуется с лучевой картиной изображенной на Рис. 3.5.

Совершенно по иному выглядит поле при 50 Гц (см. Рис. 3.7, центральная панель). Периодичность зон высокой интенсивности вдоль оси канала указывает на конструктивную интерференцию первых мод волновода. При 20 Гц, как мы можем видеть на правой панели Рис. 3.7, структура поля не содержит никаких признаков хаоса и является полностью регулярной.

На Рис. 3.8 приведены зависимости амплитуд первой, пятой и девятой мод от r для частот 200 Гц (а) и 50 Гц (б). Первая и девятая моды связаны между собой резонансным соотношением [202]

$$\frac{k_r}{k_0} \simeq E_9 - E_1. \quad (3.33)$$

При частоте 50 Гц происходит регулярная перекачка энергии между первой и девятой модами, при этом пятая мода практически не возбуждается. В случае же частоты 200 Гц все модовые амплитуды хаотически осциллируют, и значительная часть энергии попадает и в пятую моду. Мы не привели соответствующий график для частоты 20 Гц, укажем лишь, что в этом случае практически вся энергия остается в первой моде.

Таким образом, мы наблюдаем хорошее согласие волновой и лучевой картины при частоте 200 Гц. При частоте 50 Гц, вопреки лучевой картине, амплитуды первых мод достаточно регулярно зависят от r . В соответствии с выводами предыдущего параграфа, последнее связано с ослаблением связи между модами с близкими номерами и, как следствие, ослаблением хаоса. При частоте 20 Гц волновая картина не содержит никаких признаков хаоса и полностью противоречит лучевому приближению.

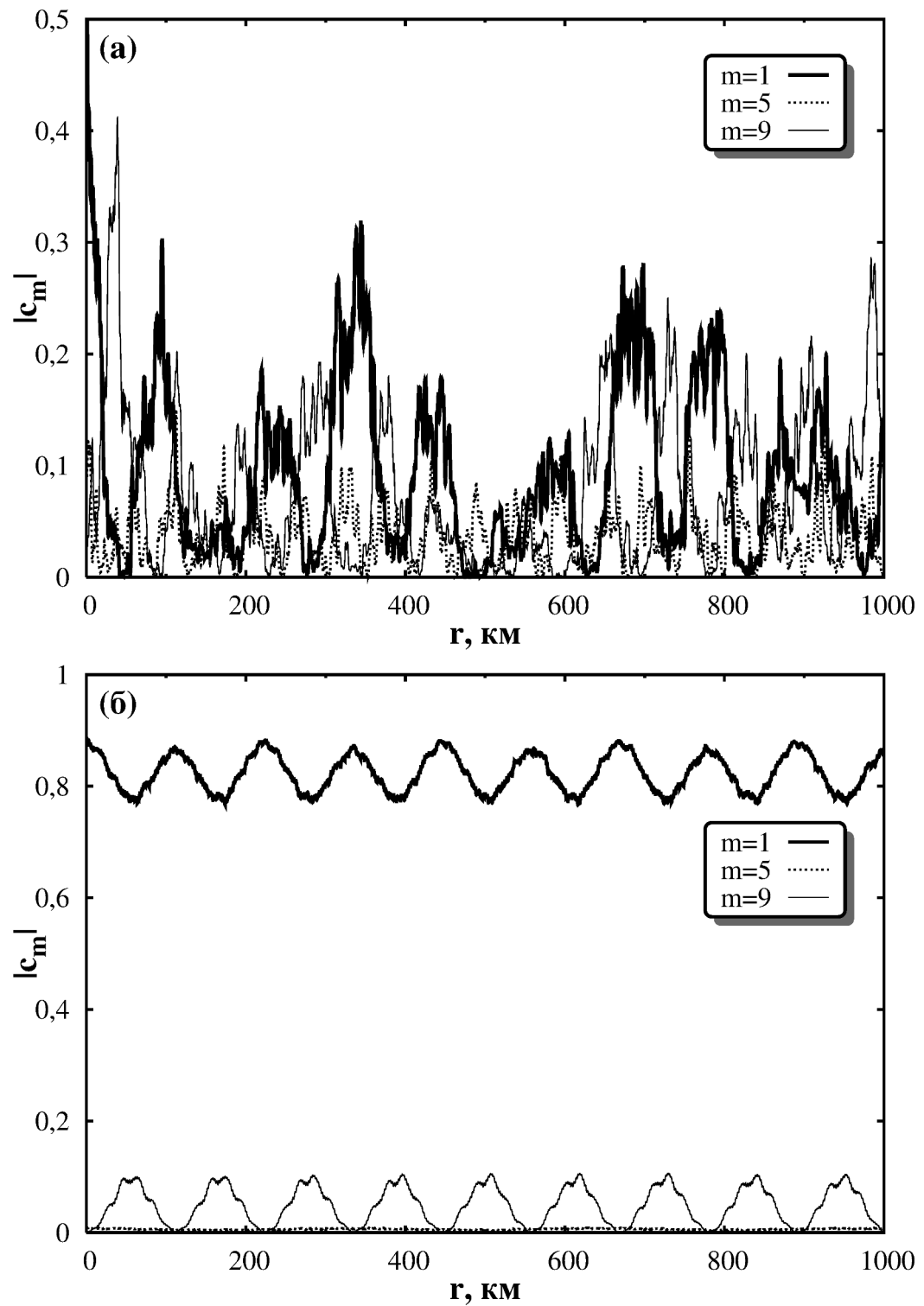


Рисунок 3.8: Амплитуды 1-й, 5-й и 9-й мод как функции горизонтальной координаты. Частота сигнала: (а) 200 Гц, (б) 50 Гц [186]

Таким образом, в этом параграфе показано, что неоднородности подводного звукового канала, осциллирующие как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях, приводят к существенной зависимости взаимодействия мод от частоты сигнала. Так, при частотах, превышающих 100 Гц, неоднородность приводит к сильному межмодовому взаимодействию внутри обширной, но компактной группы мод с малыми номерами. В этом случае структура поля вблизи оси канала принимает крайне нерегулярный характер. На меньших частотах сильные вертикальные колебания горизонтально-неоднородной составляющей профиля скорости звука, напротив, способствуют подавлению взаимодействия соседних мод, что сопровождается установлением регулярной интерференционной структуры поля.

3.4 Анализ собственных функций оператора Флоке

3.4.1 Оператор Флоке для периодического волновода

В математическом смысле периодически-неоднородный волновод эквивалентен квантовой системе с периодическим нестационарным возмущением. Вследствие этого мы можем привлечь для исследования волновой динамики теорию Флоке, которая является удобным инструментом для анализа волновой динамики в рамках спектрального подхода. Оператор Флоке \hat{F} является оператором сдвига

$$\hat{F}\Psi(z, r) = \Psi(z, r + \lambda_r). \quad (3.34)$$

Собственные функции оператора Флоке, моды Флоке, могут быть представлены как

$$u_m(z, r) = e^{i\alpha_m r / \lambda_r} \zeta_m(z, r), \quad (3.35)$$

где $m = 1, 2, \dots$, $\zeta_m(z, r) = \zeta_m(z, r + \lambda_r)$, α_m – вещественная константа. Для того, чтобы сопоставить структуру мод Флоке с фазовыми портретами, полученными с помощью отображения Пуанкаре, следует рассмотреть функции

$$\Phi_m(z) = \zeta_m(z, r = 0). \quad (3.36)$$

Каждая из этих функций может быть представлена в виде суперпозиции нормальных мод волновода

$$\Phi_m(z) = \sum_l c_{lm} \varphi_l(z), \quad (3.37)$$

где коэффициенты c_{1m}, c_{2m}, \dots являются компонентами m -го собственного вектора для матрицы с элементами

$$F_{mn} = \int_{z=0}^h \varphi_m(z) \hat{F} \varphi_n(z) dz. \quad (3.38)$$

Здесь $\hat{F} \varphi_n(z)$ – решение параболического уравнения на расстоянии $r = \lambda_r$ от источника для начального условия в виде $\Psi(z, r = 0) = \varphi_n(z)$.

Рассмотрим структуру мод Флоке в фазовом пространстве для различных значений вертикального масштаба осцилляций возмущения λ_z и частоты акустического сигнала. Моды Флоке будут пронумерованы в порядке возрастания параметра μ

$$\mu = \sum_m m |c_{mm}|^2. \quad (3.39)$$

Такая нумерация позволяет связать каждую моду Флоке с соответствующей ей областью фазового пространства. Действительно, если принять во внимание формулу (3.14), то можно связать значение μ со средним значением переменной действия для данной моды Флоке

$$\mu \simeq k_0 \langle I \rangle. \quad (3.40)$$

Для проекции мод Флоке на классическое фазовое пространство может быть использована функция Хусими

$$W_h(z, p, r) = \left| \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\Delta_z^2}} \int dz' \Phi_n^*(z', r) \exp \left(ik_0 p(z' - z) - \frac{(z' - z)^2}{4\Delta_z^2} \right) \right|^2, \quad (3.41)$$

где Δ_z – масштаб сглаживания, который мы берем равным 100 м.

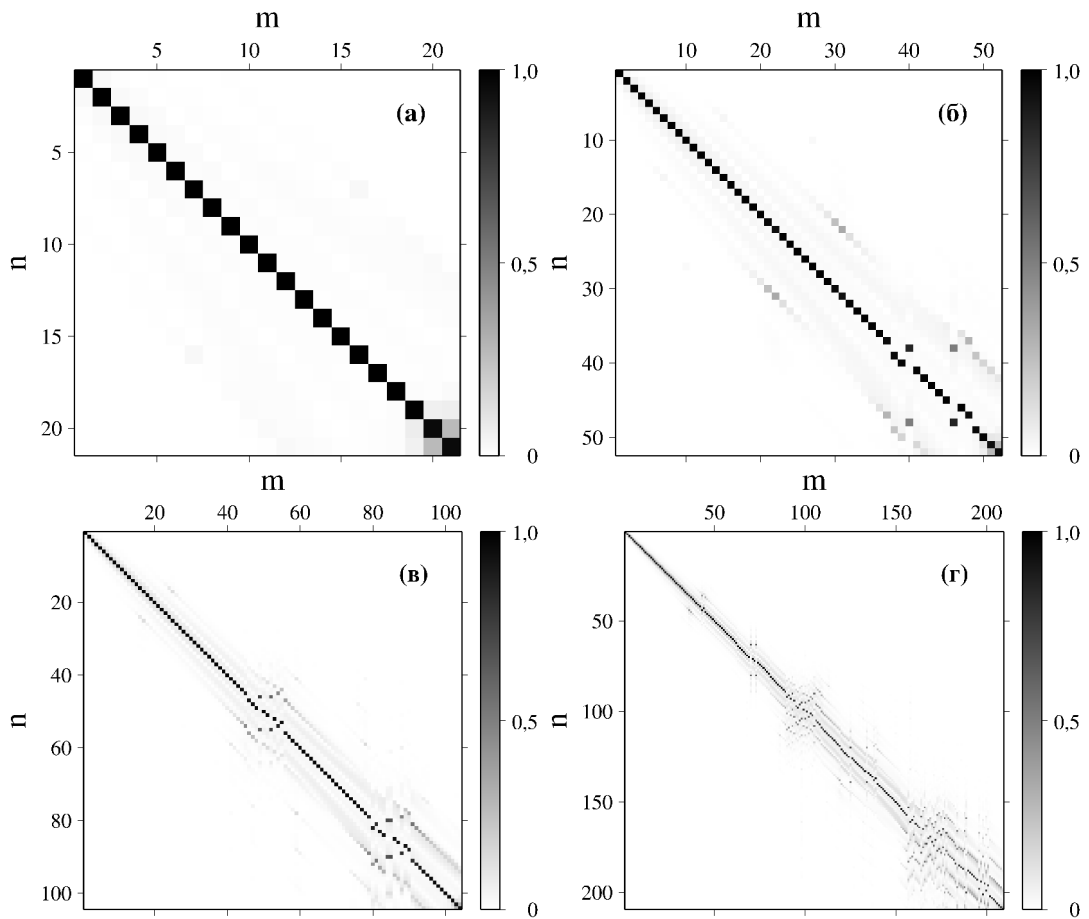


Рисунок 3.9: Структура \mathbf{C} . Случай $\lambda_z = 2000$ м. Частота сигнала: (а) 20 Гц, (б) 50 Гц, (в) 100 Гц и (г) 200 Гц [195]

3.4.2 $\lambda_z = 2000$ м.

Начнем со случая неоднородности с наиболее медленными осцилляциями по глубине, $\lambda_z = 2000$ м. Рисунок 3.9 представляет матрицы \mathbf{C} , состоящие из модулей коэффициентов C_{mn} и рассчитанные для значений частоты f 20 Гц (а), 50 Гц (б), 100 Гц (в) и 200 Гц (г). В случае частоты 20 Гц матрица \mathbf{C} близка к диагональной. Это говорит о том, что взаимодействие мод практически отсутствует и каждая мода Флоке состоит из только одной моды невозмущенного волновода. В этом случае лучевое приближение полностью неприменимо. С увеличением f структура матрицы усложняется. В случае $f = 50$ Гц, диагональные элементы по прежнему доминируют, но появляется дополнительная пара диагоналей. Она проявляется в двух блоках матрицы \mathbf{C} . Вертикальное расстояние от главной диагонали до боковых равно 9 в центральном блоке и 10 в правом нижнем блоке, что соответствует порядкам (т. е. разности $m - n$)

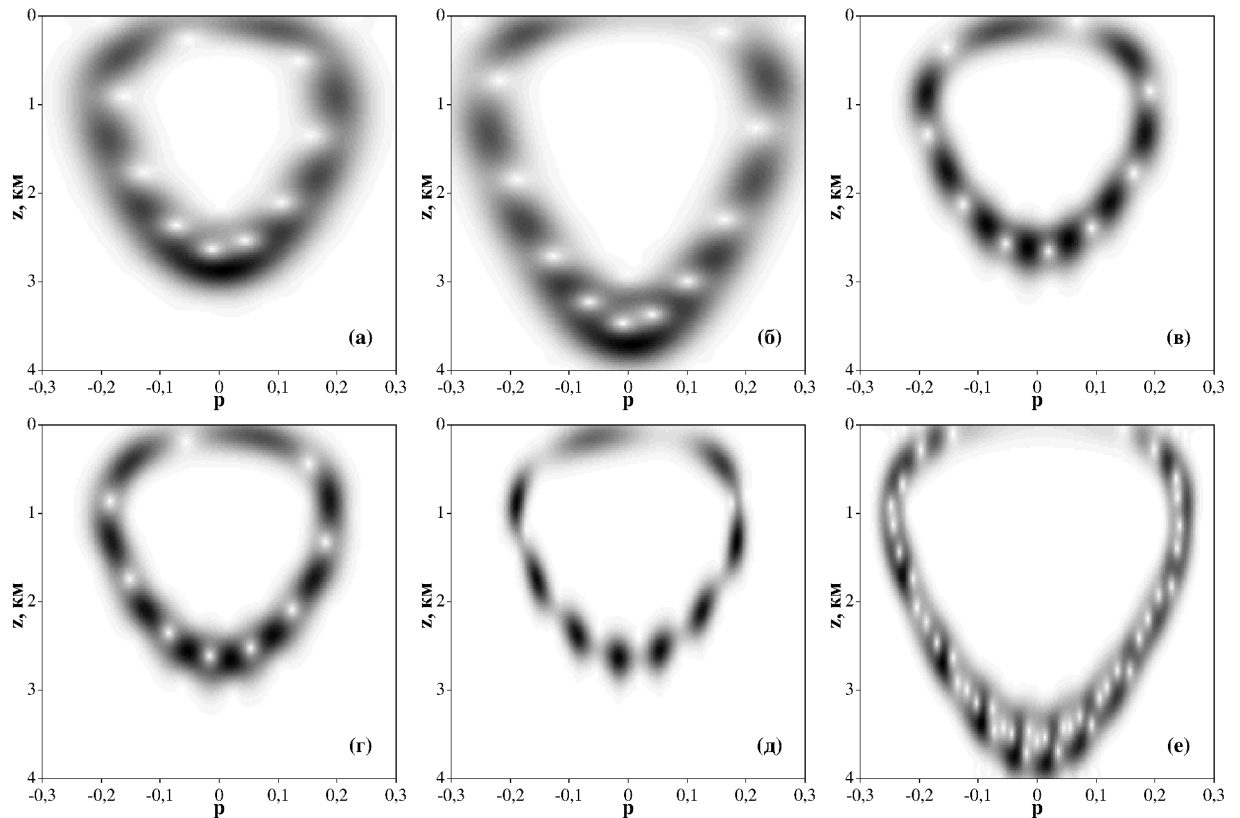


Рисунок 3.10: Примеры мод Флоке в случае $\lambda_z = 2000$ м, изображенных с помощью функции Хусими. Значения частоты: (а) и (б) $f = 50$ Гц, (в) и (г) $f = 100$ Гц, (д) и (е) $f = 200$ Гц [195]

основных резонансов (3.12). При этом аналогичный резонанс с $m - n = 8$ не приводит к появлению трехдиагональности, поскольку соответственный матричный элемент возмущения является слишком малым. Здесь прослеживается связь с нелинейным лучевым резонансом: как следует из Рис. 3.2(а), резонанс 8:1, соответствующий межмодовым переходам с $m - n = 8$, является гораздо слабее резонансов 9:1 и 10:1. Последний не образует островов устойчивости вследствие перекрытия с соседними резонансами и вырожденным тором при $E = E_r$ (см. Рис. 3.3).

Трехдиагональные блоки (ТДБ) матрицы \mathbf{C} порождают моды Флоке, Хусими-образы которых выглядят как последовательность темных и светлых пятен. Примеры таких мод приведены на Рис. 3.10(а) и (б). При более высоких частотах сигнала, ТДБ, соответствующие резонансам 9 : 1 и 10 : 1 становятся многодиагональными (или сокращенно МДБ). На рисунках 3.9(в) и (г) МДБ выглядят несколько искаженными, однако эти искажения могут быть устране-

ны за счет некоторых изменений в нумерации мод Флоке. Возникновение таких искажений связано с существованием ограниченной группы мод невозмущенного волновода, которые сильно взаимодействуют между собой, будучи при этом слабо связанными с другими модами. Такое поведение является волновым аналогом квантового нелинейного резонанса, рассмотренного в п. 1.2.2. Мы можем назвать его *модовым нелинейным резонансом*. В этом контексте появление ТДБ можно трактовать как ослабленное проявление модового нелинейного резонанса. Если мы изначально возбуждаем любую моду из этой группы, то, по прошествии некоторой дистанции, акустическая энергия перераспределяется между всеми модами из этой группы. При этом конечное распределение акустической энергии по модам слабо зависит от того, какая именно из мод возбуждалась изначально. Эта ситуация отражается в спектре мод Флоке как появление семейства мод с очень близкими значениями упорядочивающего параметра μ .

При наличии МДБ, последовательность темных и светлых пятен становится гораздо более контрастной, нежели в случае триплетов. (см. Рис. 3.10(в)–(д)). Темные пятна соответствуют периодическим орбитам, возникающих в окрестности эллиптических и гиперболических особых точек нелинейного резонанса. Моды Флоке, принадлежащие хаотическому слою, являются несколько расплывчатыми, как это показано на Рис. 3.10(е), однако их структура является, в целом, достаточно регулярной.

Таким образом, главная особенность мод Флоке в случае медленно осциллирующего с глубиной возмущения – это формирование трех- и многодиагональных блоков матрицы \mathbf{C} . Такие блоки соответствуют модовому нелинейному резонансу. Особо подчеркнем, что в рассмотренных случаях все МДБ или ТДБ блоки хорошо изолированы друг от друга, т. е. соответствующие модовые резонансы не пересекаются.

3.4.3 $\lambda_z = 1000$ м.

Далее рассмотрим случай $\lambda_z = 1000$ м. Главными особенностями соответствующего сечения Пуанкаре, изображенного на Рис. 3.2(б), являются наличие достаточно сильного нелинейного резонанса $8 : 1$, а также обширное хаотическое море, соответствующее крутым лучам и, как следует из принци-

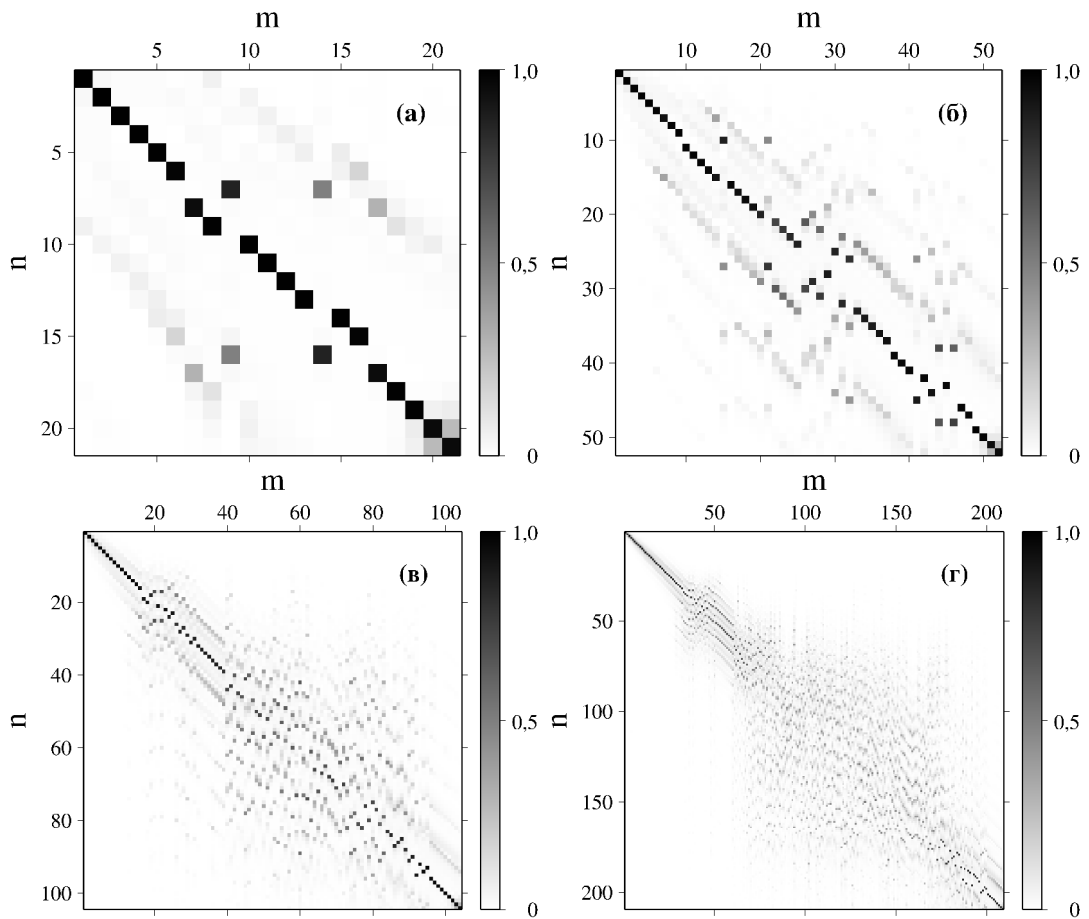


Рисунок 3.11: То же самое, что и на Рис. 3.9, но для $\lambda_z = 1000$ м [195]

па лучевого-модового дуализма [199], модам с высокими номерами. Матрица \mathbf{S} представлена Fig. 3.11. Отметим, что в этом случае взаимодействие мод гораздо сильнее, и уже нет столь явного доминирования главной диагонали, как в предыдущем случае. Даже в случае $f = 20$ Гц возникает ТДБ, соответствующий модовому резонансу $9 : 1$. Пример моды Флоке состояния из ТДБ представлен на Рис. 3.12(а). Матрица \mathbf{S} для частоты 50 Гц имеет хорошо упорядоченные МДБ, часть которых теряют эту упорядоченность при более высоких частотах. Некоторые из мод, принадлежащих МДБ, содержат следы динамического туннелирования [73, 74, 76]. Например, мода, изображенная на Рис. 3.12(б) и состоящая из восьми пиков, одновременно принадлежит островам нелинейного резонанса $8 : 1$ и хаотическому морю. В классическом (лучевом) пределе границы между областями регулярного и хаотического движения являются непроницаемыми, поэтому такие состояния существовать не могут.

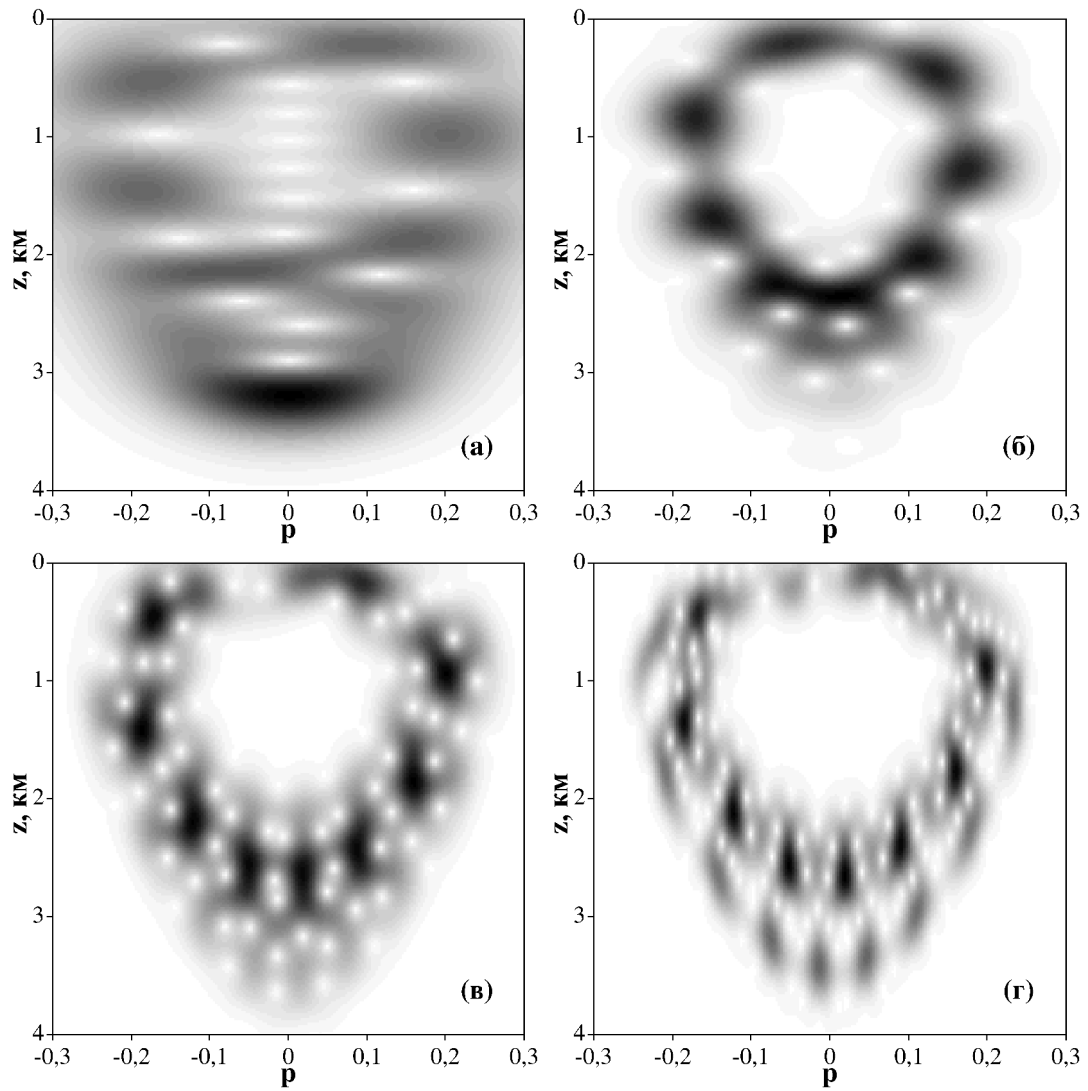


Рисунок 3.12: Примеры Хусими-образов мод Флоке для случая $\lambda_z = 1000$ м. Значения частоты: (а) $f = 20$ Гц, (б) $f = 50$ Гц, (в) $f = 100$ Гц, (г) $f = 200$ Гц [195]

На Рис. 3.12(в)) представлен другой пример “неклассической” моды Флоке. Изображенная там мода имеет цепочку из 9 пиков, соответствующих периодическим орбитам нелинейного резонанса $9 : 1$. Однако сопоставление с сечением Пуанкаре говорит о том, что острова этого резонанса полностью поглощены хаотическим морем. Иными словами, данные пики соответствуют неустойчивым периодическим орбитам. Собственные функции с пиками в окрестности неустойчивых периодических орбит известны в теории квантового хаоса как “шрамы” [205, 206]. Еще один пример состояния, не имеющего классического аналога, представлен на Рис. 3.12(г), где изображена мода Флоке, включаю-

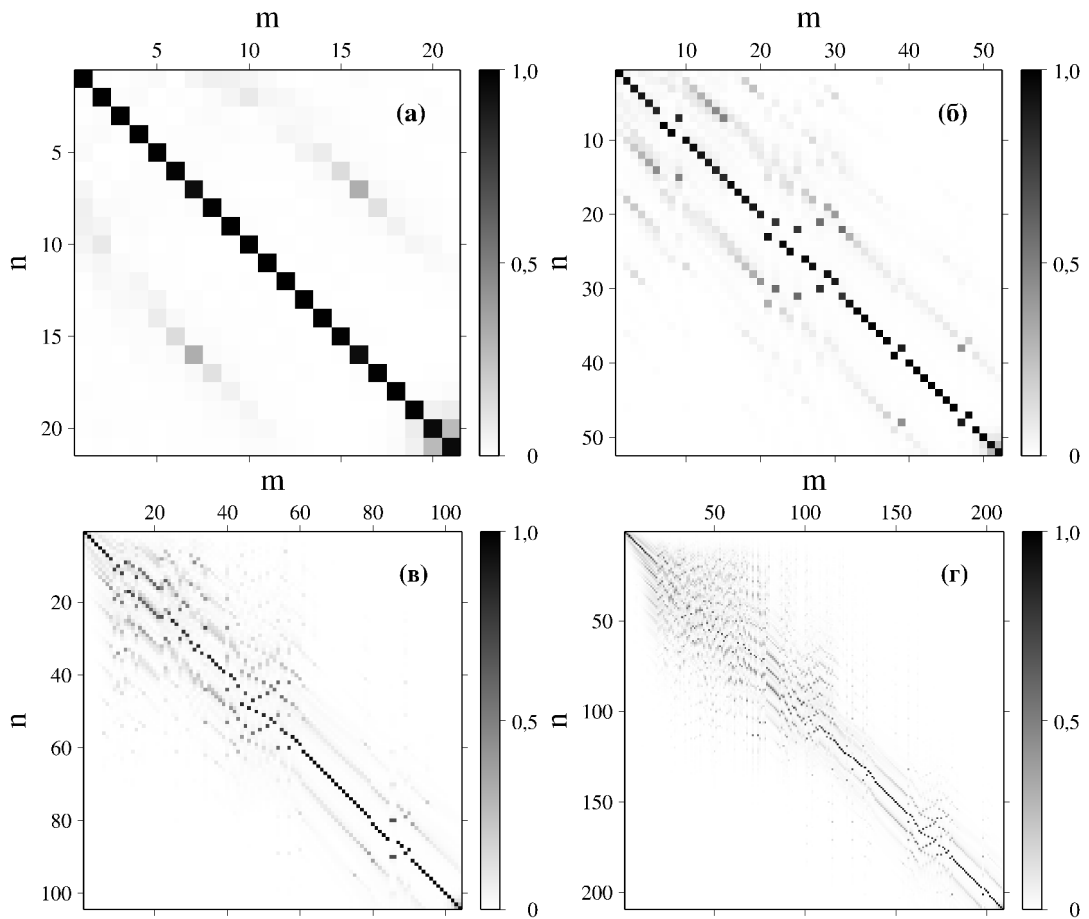


Рисунок 3.13: То же самое, что и на Рис. 3.9 и 3.11, но для $\lambda_z = 500$ м [195]

щая последовательности пиков, соответствующих нелинейным резонансам $9 : 1$ и $10 : 1$, одновременно. Поскольку оба этих резонанса разрушены, эта мода также является “шрамом”.

Таким образом, двукратное уменьшение вертикального масштаба осцилляций возмущения приводит к существенному усилению межмодового взаимодействия. Следует особо отметить появление мод Флоке, свойства которых хотя и противоречат классической картине динамики, но, тем не менее, тесно связаны с классическими периодическими орбитами.

3.4.4 $\lambda_z = 500$ м.

Возмущение с $\lambda_z = 500$ м приводит к образованию в фазовом пространстве двух вложенных хаотических слоев (см. Рис. 3.2(в)). Напомним, что образование широкого внутреннего слоя связано с вертикальным лучевым резонансом.

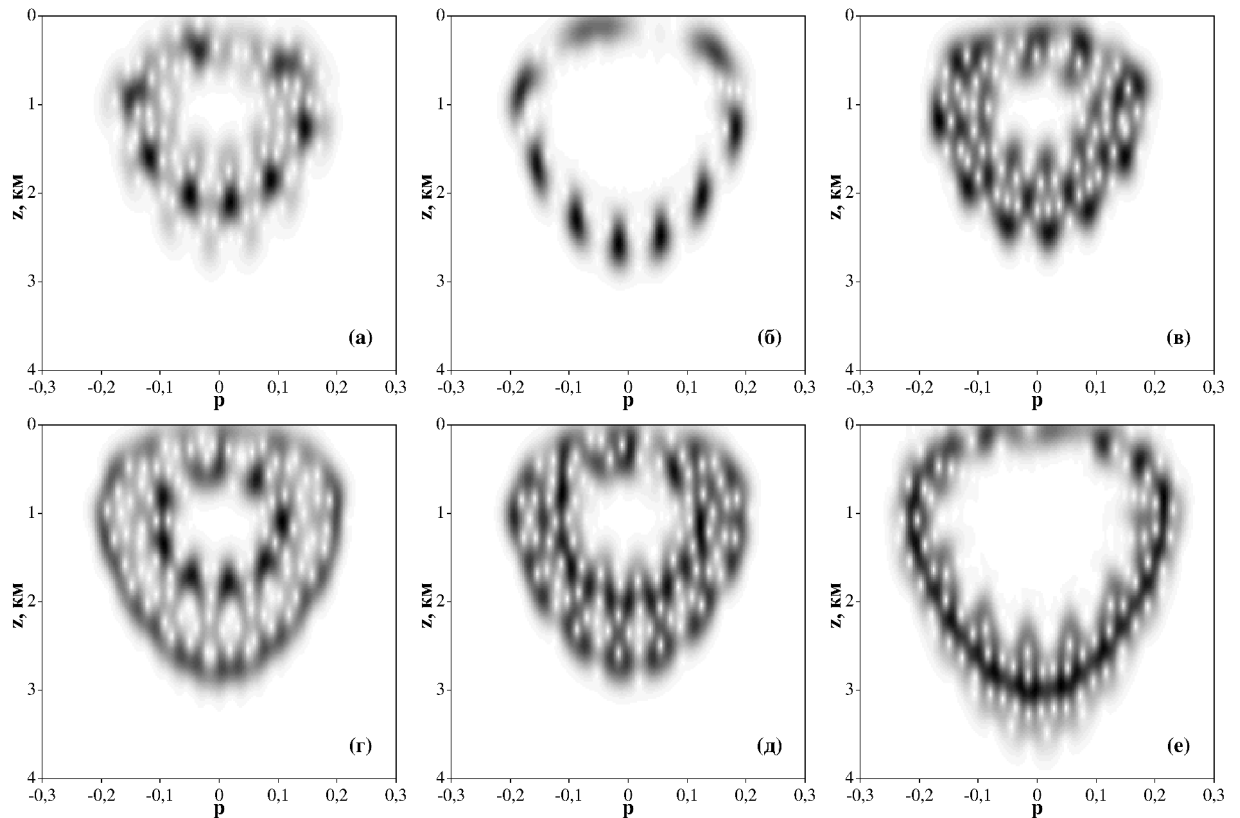


Рисунок 3.14: Примеры Хусими-образов мод Флоке для $\lambda_z = 500$ м и частоты 200 Гц [195]

В случае $f = 20$ Гц, матрица \mathbf{C} имеет трехдиагональную форму. При более высоких частотах возникает обширный МДБ в верхней левой четверти матрицы. Связанные с этим МДБ моды Флоке могут как представлять из себя хорошо упорядоченную последовательность пиков, так и расплываться по области, соответствующей внутреннему хаотическому слою. Отметим, что внешний хаотический слой, соответствующий правому нижнему углу матрицы \mathbf{C} , проявляется гораздо слабее. Сосредоточим свое внимание на случае $f = 200$ Гц. Моды Флоке, соответствующие вырожденным цепочкам островов резонанса $8 : 1$ выглядят несколько расплывчато, что указывает на достаточно сильное динамическое туннелирование в область хаотического слоя. Одна из таких мод представлена на Рис. 3.14(а). Сильное динамическое туннелирование в данном случае обусловлено тем, что расщепленные бифуркациями острова оказываются слишком малы, чтобы обеспечить достаточную локализацию. В то же время локализация мод Флоке в окрестности нелинейного резонанса $9 : 1$ гораздо сильнее, чем в случае резонанса $8 : 1$ (сравните Рис. 3.14(а) и (б)), хотя резонанс $9 : 1$,

в отличие от $8 : 1$, полностью разрушен в лучевом пределе и не имеет никаких островов на сечении Пуанкаре. Данное явление связано с частичным подавлением лучевого хаоса, обусловленным интерференцией. Можно выразиться по-другому: мы имеем дело с ситуацией, когда лучевые пучки ведут себя регулярно несмотря на то, что составляющие их лучи являются хаотическими в смысле неустойчивости по Ляпунову. Вместе с тем, доля таких локализованных мод Флоке очень мала. Большая же часть мод Флоке в окрестности резонанса $9 : 1$ выглядит так, как показано на Рис. 3.14(в)–(д). Мода Флоке, изображенная на Рис. 3.14(е), распространяется на оба хаотических слоя, будучи при этом сконцентрирована в регулярной области между ними. Таким образом, она представляет собой пример состояния, соответствующего динамическому туннелированию сквозь область устойчивости в фазовом пространстве.

Подводя итог, мы видим, что с уменьшением λ_z происходит планомерное усиление межмодового взаимодействия. Вместе с тем, также возрастает влияние “неклассических” эффектов, таких как туннелирование сквозь барьеры в фазовом пространстве или динамическая локализация.

3.4.5 $\lambda_z = 200$ м.

В случае $\lambda_z = 200$ м, центральная часть фазового пространства, соответствующая приосевым лучам, поглощена обширным хаотическим морем, возникновение которого связано с вертикальным лучевым резонансом. Это предполагает наличие обширного МДБ в верхнем левом углу матрицы **C**. Как следует из Рис. 3.15, данное предположение хорошо выполняется для частот 50–200 Гц. В случае же 20 Нз главная диагональ доминирует всюду, кроме середины матрицы, что означает слабое межмодовое взаимодействие для большинства мод. На частотах 100 и 200 Гц, хаотическое море приводит к появлению расплывшихся мод Флоке, подобных изображенным на Рис. 3.16(а) и (б). Такие моды ответственны за быстрое уширение волнового пакета по глубине, проиллюстрированное на Рис. 3.7(а). Может показаться, что данная картина прекрасно согласуется с лучевым приближением. На самом деле это не совсем так. Многие из мод Флоке, принадлежащих хаотическому морю, состоят из последовательности восьми хорошо упорядоченных пиков, как изображено на Рис. 3.16(в)–(е).

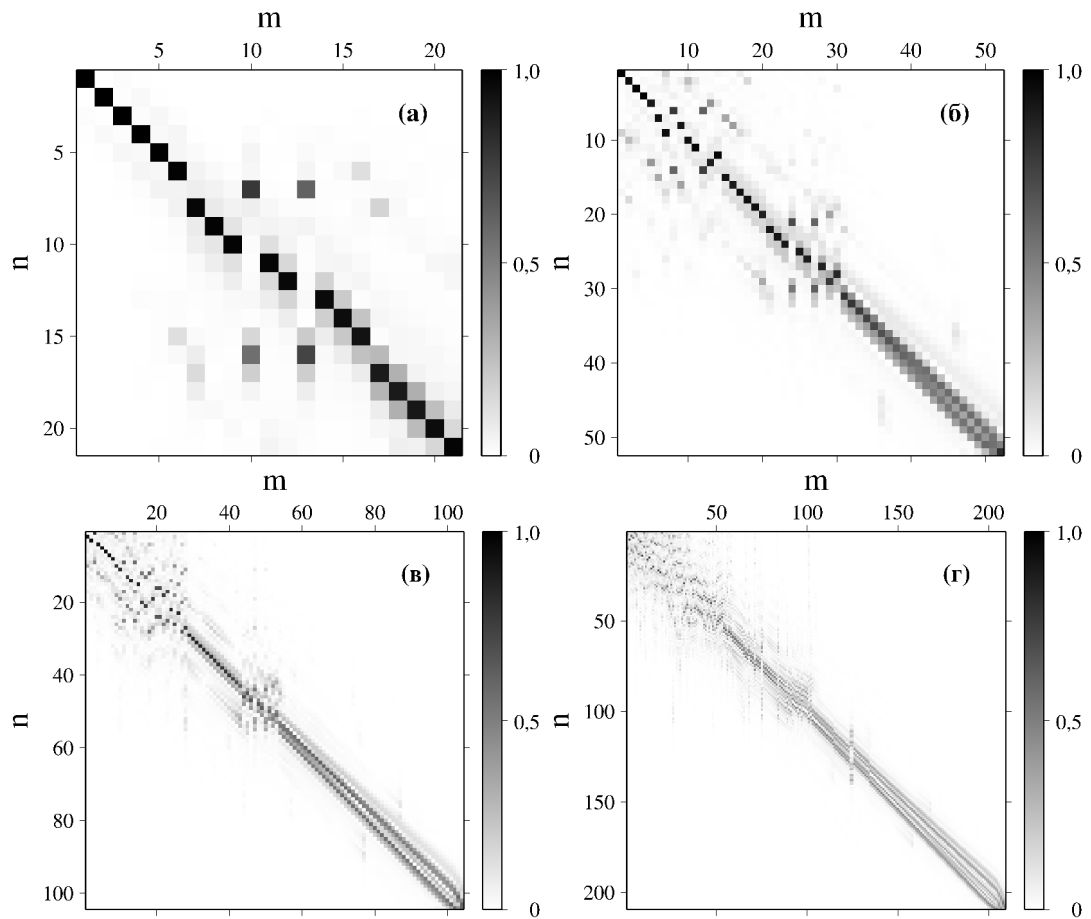


Рисунок 3.15: То же самое, что и на Рис. 3.9, 3.11 и 3.13, но для $\lambda_z = 200$
 $m [195]$

Расположение цепочек, как и число пиков, указывает на их связь с периодическими орбитами нелинейного резонанса $8 : 1$. Кроме того, нули функции Хусими принадлежат отдельным кривым и почти равноудалены друг от друга, что, следуя критерию Лебефа-Вороса, также означает регулярность данных мод Флоке (см. Рис. 3.17) [184]. Согласно сечению Пуанкаре, изображенному на Рис. 3.2(г), все периодические орбиты резонанса $8 : 1$ неустойчивы по Ляпунову. В таком случае волновые функции с регулярными пиками следует отнести к ранее упоминавшимся “шрамам”. Для того, чтобы проверить это, попробуем рассчитать все периодические орбиты с периодом, равным $8\lambda_r = 40$ км. Рисунок 3.18(а) говорит о существовании множества таких орбит с крайне нерегулярным распределением по фазовому пространству. Образование такого количества неустойчивых периодических орбит является следствием каскада бифуркаций, описанных в п. 2.5. Однако, следует принять во внимание, что вклад любой перио-

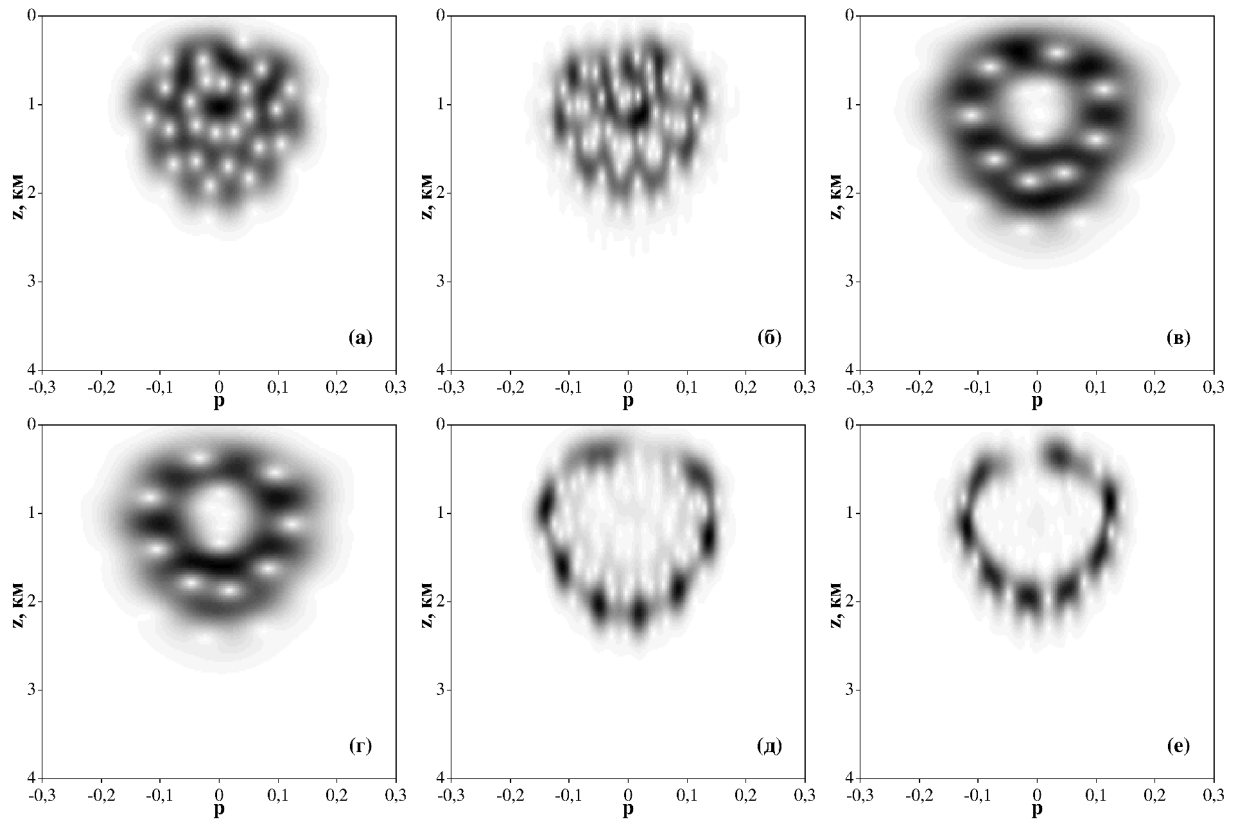


Рисунок 3.16: Примеры Хусими-образов мод Флоке для $\lambda_z = 200$ м. Значения частоты: (а) $f = 100$ Гц, $m = 11$, (б), (д) и (е) $f = 200$ Гц, (в) и (г) $f = 50$ Гц [195]

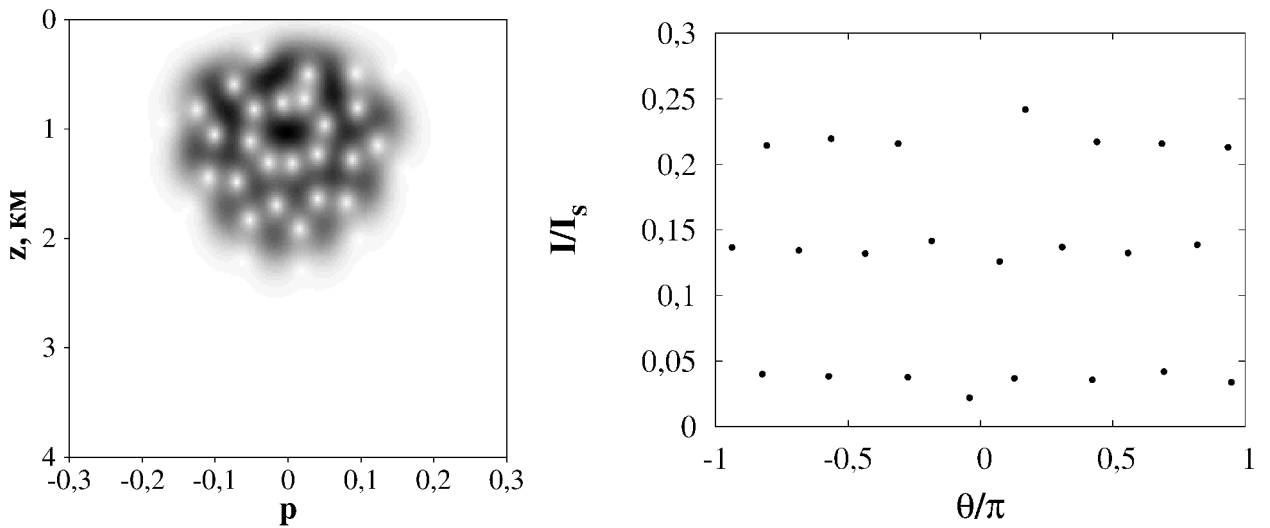


Рисунок 3.17: Слева: мода Флоке, принадлежащая хаотическому слою, справа: расположение нулей соответствующей ей функции Хусими. Случай $\lambda_z = 200$ м [184]

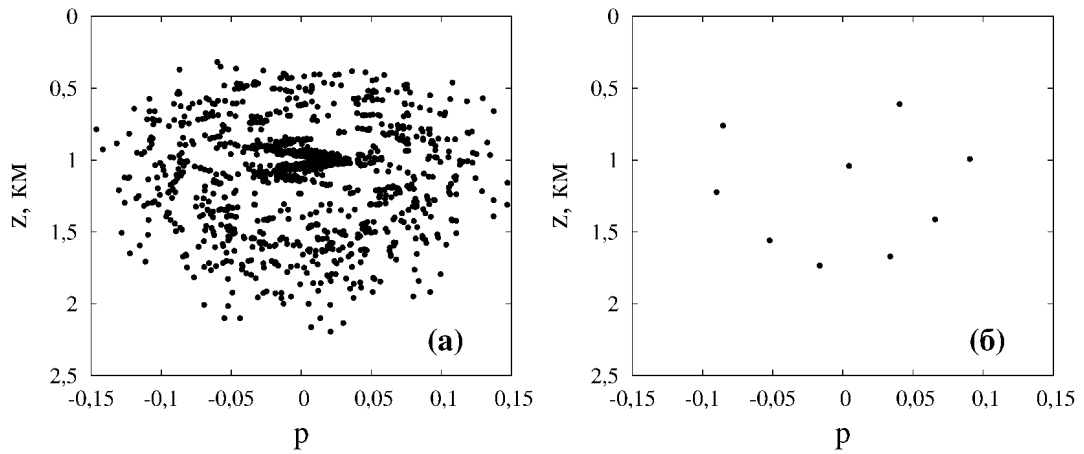


Рисунок 3.18: Расположение периодических орбит с периодом $8\lambda_r = 40$ км в фазовом пространстве: (а) все орбиты данного периода, (б) самые устойчивые из них [195]

дической орбиты в спектр зависит от ее устойчивости [47]. На рисунке 3.18(б) выделены наиболее устойчивые из орбит, изображенных на рисунке 3.18(а). Мы видим, что положения восьми из них совпадают с пиками мод Флоке. Вокруг каждой из этих восьми орбит существует также кластер из менее устойчивых орбит. Поскольку характерный размер каждого кластера имеет порядок k_0^{-1} , отдельные орбиты не способны давать независимые вклады в плотность состояний (1.65) вследствие интерференции [207]. Отсюда следует, что их эффект аккумулируется в единый вклад. Иными словами, интерференция ослабляет влияние каскада классических бифуркаций. Девятая орбита не связана с резонансом $8 : 1$ и соответствует специфическому режиму распространения вблизи оси волновода.

Таким образом, мы видим, что волновые поправки к классической картине могут приводить к воссозданию структуры собственных функций, характерной для волновых проявлений нелинейного резонанса. Следует особо подчеркнуть, что это стало возможным за счет интерференционного подавления бифуркаций периодических орбит. Данный эффект является одним из главных механизмов подавления следов лучевого хаоса в волновой картине. Кроме того, наличие мод Флоке с регулярной структурой внутри хаотического слоя влияет и на транспортные свойства волновой эволюции. Это влияние является предметом следующего параграфа.

3.4.6 Расплывание волнового пакета внутри хаотического слоя

Зададимся вопросом: каким образом динамика волнового пакета внутри хаотического слоя меняется с ростом длины волны. С этой целью мы рассмотрим эволюцию гауссова пакета, задаваемого выражением

$$\varphi(z, r = 0) = (2\pi\sigma_z^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{(z - z_a)^2}{4\sigma_z^2}\right). \quad (3.42)$$

Здесь z_a – глубина оси подводного звукового канала. Полуширина пакета σ_z связана с частотой сигнала с помощью формулы

$$\sigma_z = \frac{3c_0}{4\pi f \operatorname{tg} \alpha_0}, \quad (3.43)$$

где $\operatorname{tg} \alpha_0 = 0.1$.

Чтобы более четко сопоставить свойства волновой и лучевой диффузии, можно использовать то обстоятельство, что функция Вигнера обладает некоторыми свойствами плотности вероятности в фазовом пространстве [57]. Функция Хусими (3.41), будучи неотрицательной по определению, более подходит для роли классической плотности вероятности, хотя такая трактовка не имеет строгого математического обоснования и может быть использована только как качественный метод изучения волнового-лучевого соответствия.

В этом разделе мы используем функцию Хусими в качестве плотности вероятности для описания эволюции волнового пакета в пространстве переменной действия, определяя среднее действие для волнового пакета по формуле

$$\langle I \rangle (r) = \int W_h(z, p, r) I(z, p) dz dp. \quad (3.44)$$

Вычисляя аналогичным образом среднее значение квадрата действия, мы также рассчитаем среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_I(r) = \sqrt{\langle I^2 \rangle (r) - \langle I \rangle (r)^2}. \quad (3.45)$$

Функции $\langle I \rangle (r)$ и $\sigma_I(r)$ имеют простой физический смысл — в соответствии правилами квантования Эйнштейна-Бриллюэна-Келлера (3.14), они характеризуют полосу модового спектра, в которой концентрируется основная энергия:

$$m' - \Delta m \leq m \leq m' + \Delta m, \quad (3.46)$$

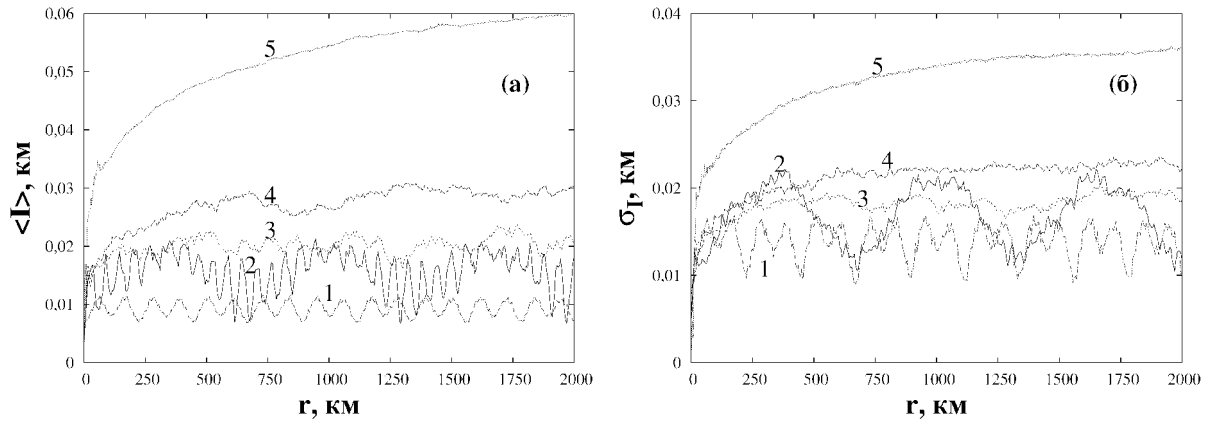


Рисунок 3.19: Зависимость от горизонтальной координаты для среднего действия (а) и дисперсии действия (б), рассчитанных для волнового пакета с помощью функции Хусими. Значения частоты сигнала: 50 Гц (кривая 1), 100 Гц (кривая 2), 500 Гц (кривая 3), 1000 Гц (кривая 4). Кривая 5 представляет результат лучевых вычислений [185].

где $m' = k_0 \langle I \rangle - 1/2$, $\Delta m \simeq \sigma_I/k_0$,

Результаты вычислений приведены на Рис. 3.19. Для сравнения приведены результаты лучевых расчетов тех же величин для ансамбля 10000 лучей с начальным распределением по глубине

$$\rho(z) = |\varphi(z, r = 0)|^2, \quad (3.47)$$

где $\varphi(z, r = 0; k_0)$ дается формулой (3.31), а ширина пакета соответствует $f = 200$ Гц. Все лучи испускаются параллельно оси канала, т. е. для всех лучей $p(r = 0) = 0$. Отметим, что поведение функций $\langle I \rangle(r)$ и $\sigma_I(r)$ оказалось похожим для различных значений ширины распределения (3.47) по глубине, формула для которой (3.43) содержит зависимость от частоты.

Рис. 3.19 указывает на быстрое расплывание лучевого распределения при малых r , после чего этот процесс сильно замедляется. Это связано с тем, что ансамбль лучей полностью занимает хаотический слой. Тем не менее, и $\langle I \rangle(r)$ и $\sigma_I(r)$ сохраняют слабый рост даже при больших значениях r , что может быть связано с прилипанием лучей к островкам, расположенных возле границы хаотического слоя (см. Рис. 3.2). Эти островки приводят к слабому нарушению эргодичности диффузии лучей.

В отличие от лучевого ансамбля, низкочастотные волновые пакеты демонстрируют не монотонное нарастание $\langle I \rangle$ и σ_I , а колебания. Эти колебания являются регулярными при частоте сигнала 50 Гц, слабо-нерегулярными при частоте 100 Гц и хаотическими при частоте 500 Гц. Колебательная динамика меняется на монотонное возрастание только при частоте 1000 Гц, хотя значения $\langle I \rangle$ и σ_I и в этом случае гораздо меньше, чем у лучевого ансамбля.

Возникновение пульсаций свидетельствует о наличии когерентной перекачки энергии между модами волновода. Как было показано в п. 3.3, первые моды могут участвовать в такой перекачке только при частоте сигнала около 50 Гц. В более широком частотном диапазоне такую перекачку могут демонстрировать только моды в окрестности модового резонанса 8 : 1. Как было показано выше, моды Флоке, соответствующие этому резонансу, имеют регулярную структуру даже при частоте сигнала 200 Гц. В случае частоты 20 Гц, модовый резонанс 8 : 1 приводит к появлению многодиагонального блока в середине матрицы \mathbf{C} , что также является отражением межмодового взаимодействия. При высоких частотах происходит ослабление интерференции, которая, как было указано выше, подавляет эффект бифуркаций периодических орбит. Таким образом, бифуркации снова выходят на передний план, а когерентность межмодовой перекачки разрушается вследствие дестабилизации модового резонанса 8 : 1, обусловленной этими бифуркациями. В результате, с ростом частоты пульсации волнового пакета сменяются монотонным расплыванием. Заметим, что даже при частоте 1000 Гц пакет расплывается слабее, чем соответствующий пучок лучей, что свидетельствует о влиянии динамической локализации [61].

3.5 Заключение к главе 3

Основной целью данной главы является исследование соответствия между лучевой и волновой картинами в присутствии вертикального лучевого резонанса. В качестве примера рассматривается модель периодически неоднородного подводного звукового канала с биэкспоненциальным опорным профилем скорости звука. Проведен детальный анализ структуры фазового пространства, выделены основные факторы, ответственные за ее формирование. Отмечено, что с уменьшением масштаба вертикальных осцилляций возмущения волновода лу-

чевой хаос усиливается, смещаясь при этом в область малых значений действия луча. Проведено исследование того, как обнаруженные особенности лучевой динамики проявляют себя в волновой динамике, в частности, во взаимодействии волноводных мод. Показано, что в присутствии быстрых глубинных осцилляций возмущения происходит селективное увеличение определенных матричных элементов возмущения, что способствует усилению перекачки акустической энергии между соответствующими парами мод. При этом остальные матричные элементы, напротив, резко уменьшаются. Обнаружено, что моды Флоке, принадлежащие хаотическому слою, обусловленному вертикальным лучевым резонансом, могут иметь достаточно регулярную структуру даже несмотря на то, что в лучевом пределе динамика внутри хаотического слоя близка к эргодической диффузии. Хусими-образы этих мод образуют упорядоченные последовательности пиков, что характерно для неперекрытого квантового нелинейного резонанса. Данный эффект объясняется конструктивной интерференцией кластеров периодических орбит, являющихся продуктом каскада бифуркаций, которыми сопровождается лучевой вертикальный резонанс.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [36, 55, 183–186, 195] в соавторстве с М.Ю. Улейским, Л.Е. Коньковым, Е.В. Соседко, А.Л. Вировлянским, Г.М. Заславским и С.В. Пранцем.

Глава 4

Квантовый и волновой хаос в гамильтоновых системах со случайным возмущением

4.1 Оператор эволюции на конечное время

4.1.1 Одношаговое отображение Пуанкаре

До сих пор наше внимание было приковано к гамильтоновым системам с периодическим возмущением. В настоящей главе мы рассмотрим более сложный случай, когда возмущение системы является непериодическим и многочастотным. Основное внимание будет уделено особенностям возникновения хаоса в таких системах, а также его проявлениям в квантовой и волновой динамике. Для физической иллюстрации будет вновь, как и в предыдущих двух главах, использована задача о распространении звука в океане, а также рассмотрена задача о динамике невзаимодействующих атомов в оптической решетке.

Хорошо известно, что детерминированные классические системы с малым числом степеней свободы могут демонстрировать сложное хаотическое поведение, во многом напоминающее поведение систем со случайными флуктуациями. Тем не менее, методы исследования детерминированных хаотических систем и систем, находящихся под воздействием случайных процессов, отличаются прин-

ципиально. Представляя возмущение как случайный процесс, мы отождествляем его с неким “черным ящиком”, содержимое которого мы можем предугадать лишь с некоторой вероятностью. Тем самым мы вносим неопределенность в уравнения движения. Каждая реализация случайного возмущения порождает “свою” траекторию, и описание динамики системы предполагает некоторую процедуру усреднения по реализациям.

Вместе с тем, отдельные реализации случайного возмущения могут рассматриваться как детерминированные функции. Широкополосность спектра возмущения означает всюду плотное перекрытие резонансов, что не оставляет шансов на существование непроницаемых зон устойчивости. Вместе с тем, исследование статистики показателей Ляпунова на конечном времени (англ. *finite-time Lyapunov exponent*) показывает [100], что значительная часть траекторий сохраняет устойчивость на расстояниях, существенно превышающих ляпуновское время

$$t_L = \frac{1}{\lambda_L}, \quad (4.1)$$

где λ_L — глобальный показатель Ляпунова (т. е. показатель Ляпунова при $t \rightarrow \infty$). Такие траектории формируют компактные пучки, которым в работе [196] было дано название “когерентные кластеры”. Следует различать когерентные кластеры с областями случайной фокусировки частиц в случайных полях скоростей [208]. Главное отличие заключается в том, что начальные условия для частиц, принадлежащих когерентному кластеру, образуют всюду плотное множество в фазовом пространстве, расположение которого будет меняться от одной реализации случайной неоднородности к другой. Подобного рода множества могут быть выделены различными способами, например, путем расчета карты показателей устойчивости в фазовом пространстве [17] или с помощью вычисления собственных функций оператора Фробениуса-Перрона [15]. Из этого всего следует, что поведение системы при некоторой отдельной реализации процесса может, во-первых, достаточно сильно отличаться от усредненной картины, а во-вторых, обнаруживать свойства, свойственные детерминированным системам — особенности динамики, связанные с неоднородностью фазового пространства, такие как, например, перемежаемость и захваты в динамические ловушки [35]. В связи с этим возникает интерес в создании общего теоретического подхода,

позволяющего эффективно анализировать динамику в фазовом пространстве как детерминированных систем, так и систем с шумом.

Все вышесказанное может быть отнесено и к квантовым системам. Разработанная Гутцвиллером теория периодических орбит [34, 68] достигла значительных успехов в описании квантовой эволюции и не только позволила дать “классическую” интерпретацию квантовой динамики, но и выявила ряд принципиально новых эффектов, например, образование “шрамов” волновых функций [205]. Вместе с тем разумно предположить, что некоторые особенности динамики детерминированных квантовых систем должны также проявляться и в динамике систем со стохастическим возмущением. Отсюда возникает вопрос: каким образом особенности квантовой динамики, ассоциирующиеся в детерминированных системах с влиянием периодических орбит, проявляются в системах со стохастическим возмущением, когда периодических орбит как таковых нет?

В настоящей главе мы демонстрируем подход, позволяющий анализировать системы со слабым случайным возмущением с помощью представлений теории детерминированных динамических систем. В его основе лежит предположение о том, что поведение такой системы при различных реализациях возмущения может иметь похожие черты. Другими словами, в отклике системы может присутствовать некоторая универсальная составляющая, которая будет наблюдаться для всех характерных реализаций возмущения. В таком случае для описания динамики на качественном уровне достаточно рассмотреть лишь малое число реализаций, трактуя каждую из них как детерминированный процесс с некоторыми предписанными свойствами, следующими из статистических характеристик всего ансамбля реализаций в целом.

Начнем с классического случая и рассмотрим гамильтониан

$$\bar{H} = \frac{p^2}{2} + U(x) + \varepsilon V(x, t), \quad (4.2)$$

где $V(x, t)$ – некоторая случайная функция времени. Рассмотрим поведение системы для некоторой произвольной реализации $V(x, t)$. Соответствующие уравнения Гамильтона выглядят следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{dU}{dx} - \varepsilon \frac{dV}{dx}. \quad (4.3)$$

Поскольку мы рассматриваем отдельную реализацию V , можно рассматривать (4.3) как систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Устойчивость по Ляпунову означает отсутствие острой чувствительности решения (4.3) к малым изменениям начальных условий. Это означает, что начальные условия для устойчивых траекторий всюду плотно покрывают некоторые области в фазовом пространстве. Множество фазовых точек, принадлежащих этим областям, эволюционируют со временем как единое целое, не испытывая свойственного хаосу каскада растяжений и складываний. Частным случаем такого множества фазовых точек является множество, удовлетворяющее условию инвариантности на конечном времени, т. е. это множество в фазовом пространстве в момент $t = t'$, которое преобразуется само в себя при $t = t'' = t' + \tau$ без перемешивания при некотором $\tau > 0$. Определяющим свойством такого множества является то, что соответствующие ему траектории сохраняют устойчивость по Ляпунову на интервале $t' \leq t \leq t''$. Для поиска таких множеств мы можем воспользоваться одношаговым отображением Пуанкаре [209–211]

$$p_{i+1} = p(t = \tau; p_i, x_i), \quad x_{i+1} = x(t = \tau; p_i, x_i), \quad (4.4)$$

где $p(t = \tau; p_i, x_i)$ и $x(t = \tau; p_i, x_i)$ — решения уравнений (4.3) для начальных условий $p(t = 0) = p_i$, $x(t = 0) = x_i$ и мы положили $t' = 0$. Как следует из (4.4), значения p и x , вычисленные на i -ом шаге отображения, становятся начальными условиями для следующего, $(i + 1)$ -го шага. Эта процедура эквивалентна обычному отображению Пуанкаре для гамильтониана

$$\bar{H} = \frac{p^2}{2} + U(x) + \varepsilon \tilde{V}(x, t), \quad (4.5)$$

где $\tilde{V}(x, t)$ — периодическая функция времени t ,

$$\tilde{V}(x, \bar{t} + n\tau) = V(x, \bar{t}), \quad 0 \leq \bar{t} \leq \tau, \quad (4.6)$$

n — целое число. Как следует из (4.6), функция $\tilde{V}(x, t)$ представляет собой последовательность идентичных кусков $V(x, t)$, каждый из которых имеет длину τ . Таким образом, мы заменили исходную систему со случайным возмущением на эквивалентную систему с периодическим возмущением. Такая замена является правомерной, если мы ограничиваемся анализом динамики только внутри интервала времен $[0 : \tau]$.

Принимая во внимание аналогию с обычным отображением Пуанкаре, можно сформулировать главное свойство одношагового отображения Пуанкаре: *каждая точка в фазовом пространстве, принадлежащая траектории отображения (4.4), образующей в фазовом пространстве сплошную замкнутую кривую, соответствует начальной точке для решения (4.3), которое сохраняет устойчивость по Ляпунову вплоть до $t = \tau$* . Обратное утверждение, в общем случае, неверно, т. е. одношаговое отображение Пуанкаре дает достаточное условие устойчивости, которое не является при этом необходимым. Из этого следует главный недостаток одношагового отображения Пуанкаре – оно дает заниженную оценку размеров области устойчивости. Это связано с тем, критерий инвариантности на конечном времени, на котором основано одношаговое отображение Пуанкаре, является излишне строгим.

Основные свойства отображения (4.4) могут быть описаны с использованием теории гамильтоновых систем с периодической зависимостью от времени. Для удобства, перейдем к переменным угол–действие. Преобразованный гамильтониан выглядит следующим образом:

$$\bar{H} = H_0(I) + \varepsilon \tilde{V}(I, \vartheta, t). \quad (4.7)$$

Будем действовать в рамках подхода, описанного в п. 1.1.2. Возмущение $\tilde{V}(I, \vartheta)$ может быть представлено в виде ряда Фурье

$$\tilde{V} = \frac{1}{2} \sum_{k,k'=1}^{\infty} V_{k,k'} e^{i(k\vartheta - k'\Omega t)} + \text{к. с.}, \quad (4.8)$$

где $\Omega = 2\pi/\tau$. Подставляя (4.8) в уравнения движения для переменных действие–угол, мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -\frac{i\varepsilon}{2} \sum_{k,k'=1}^{\infty} k V_{k,k'} e^{i(k\vartheta - k'\Omega t)} + \text{к. с.}, \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k,k'=1}^{\infty} \frac{\partial V_{k,k'}}{\partial I} e^{i(k\vartheta - k'\Omega t)} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (4.9)$$

При выполнении условия

$$k\omega(I = I_{k,k'}) = k'\Omega, \quad (4.10)$$

в уравнениях (4.9) возникает резонанс. Следует заметить, что каждому резонансному значению действия одновременно соответствует бесконечное число

число резонансов кратности $(jk) : (jk')$, где j – целое число. Однако, резонансные Фурье-амплитуды $V_{k,k'}$ быстро спадают с увеличением k и k' , поэтому только малое число доминирующих резонансов с низкими порядками способны оказывать существенное влияние на динамику.

Рассмотрим динамику вблизи резонанса. Введем переменные

$$\Delta I = I - I_{k,k'}, \quad \psi = k\vartheta - k'\Omega t \quad (4.11)$$

и выразим $V_{k,k'}$ как $|V_{k,k'}| \exp(i\zeta_{k,k'})$, мы можем переписать (4.9) как

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta I)}{dt} &= \varepsilon \sum_{l=1}^L lk |V_{lk,lk'}| \sin(l\psi + \zeta_{lk,lk'}) = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \psi}, \\ \frac{d\psi}{dt} &= k\omega'_I \Delta I = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial (\Delta I)}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где L – число доминирующих резонансов,

$$\tilde{H} = k \left(\omega'_I \frac{(\Delta I)^2}{2} + \tilde{U} \right). \quad (4.13)$$

Потенциальная часть в правой части уравнения (4.13) описывается формулой

$$\tilde{U} = \varepsilon \sum_{l=1}^L |V_{lk,lk'}| \cos(l\psi + \zeta_{lk,lk'}). \quad (4.14)$$

Максимальное значение ΔI на сепаратрисе определяется по формуле

$$\Delta I_{\max}^{k,k'} = 2\sqrt{\frac{\tilde{U}_{\max}}{|\omega'_I|}}, \quad (4.15)$$

где \tilde{U}_{\max} – абсолютный максимум \tilde{U} . Величина $\Delta I_{\max}^{k,k'}$ представляет собой полуширину резонанса по переменной действия. Если $L = 1$, то $\tilde{U}_{\max} = |V_{k,k'}|$ и \tilde{H} превращается в уже рассматривавшийся в п. 1.1.2 универсальный гамильтониан нелинейного резонанса (1.20). В этом случае фазовый портрет системы уравнений (4.12) имеет вид, характерный для нелинейного маятника. Члены с $l > 1$ приводят к деформации маятникового фазового портрета. Деформация может быть настолько сильной, что на фазовом портрете появятся дополнительные сепаратрисы внутри области финитного движения [210].

Переход к глобальному хаосу в одношаговом отображении Пуанкаре, как и в случае обычных периодических во времени систем, происходит при выполнении критерия Чирикова, который можно записать как

$$\frac{\Delta I_{\max}^{m,m'}(\tau) + \Delta I_{\max}^{n,n'}(\tau)}{\delta I(\tau)} \geq 1. \quad (4.16)$$

Здесь δI – расстояние по действию между ближайшими доминирующими резонансами $m : m'$ и $n : n'$. Вдали от вырожденных торов зависимость δI от шага отображения τ при $\omega > \Omega$ описывается выражением

$$\delta I(\tau) = \frac{2\pi}{\omega'_I \tau}. \quad (4.17)$$

При малых значениях τ резонансы являются слабыми и влияние возмущения можно трактовать как воздействие быстро осциллирующей силы. В этом случае система может быть сведена к интегрируемой с помощью метода усреднения, что предполагает доминирование областей регулярного движения. Когда τ становится одного порядка с периодом невозмущенных колебаний, резонансы перестают быть слабыми и возможно возникновение обширного хаотического слоя. Дальнейшее увеличение τ “сдвигает” резонансы друг к другу, тем самым усиливая их перекрытие. Это можно рассматривать как механизм наступления хаоса при воздействии случайного возмущения.

Зависимость структуры фазового пространства от выбора реализации возмущения обусловлена фазовыми и амплитудными флуктуациями коэффициентов Фурье $V_{k,k'}$. Однако, эти флуктуации достаточно слабо влияют на соотношение между областями регулярного и хаотического движения, которое главным образом определяется значением τ . Эта особенность одношагового отображения Пуанкаре делает его достаточно полезным методом исследования случайно возмущаемых систем различной физической природы [210, 212, 213].

4.1.2 Оператор эволюции на конечное время: определение

Теперь обратимся к случаю квантовой (или волновой) динамики. В присутствии возмущения со случайной зависимостью от времени, $\varepsilon V(\mathbf{x}, t)$, волновая

функция описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\hbar^2}{2M} \Delta \Psi + [U(\mathbf{x}) + \varepsilon V(\mathbf{x}, t)]. \quad (4.18)$$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим поведение квантовой системы для некоторой произвольной реализации возмущения. Квантовым аналогом одношагового отображения Пуанкаре является оператор сдвига, задаваемый выражением

$$\hat{G}(\tau) \bar{\Psi}(\mathbf{x}) \equiv \Psi(\mathbf{x}, t)|_{t=\tau}, \quad (4.19)$$

где $\bar{\Psi}(\mathbf{x}) = \Psi(\mathbf{x}, t = 0)$. В дальнейшем мы будем называть оператор \hat{G} *оператором эволюции на конечное время* или кратко ОЭКВ. Впервые ОЭКВ был использован в работе [214] для задачи о диффузии квантовой частицы. Волновой аналог ОЭКВ был использован в работах [55, 211] для исследования акустического поля в случайно-неоднородном подводном звуковом канале.

По определению ОЭКВ описывает трансформацию волновой функции в процессе эволюции между моментами времени $t = 0$ и $t = \tau$. В замкнутой системе ОЭКВ является унитарным. Каждая реализация возмущения порождает свой ОЭКВ. В дальнейшем наше внимание будет приковано к статистическим свойствам ОЭКВ и их связи с поведением системы в классическом пределе.

Следует отметить аналогию между ОЭКВ и оператором Флоке, описывающим эволюцию квантовых систем с периодической зависимостью от времени. Главное отличие заключается в том, что действие ОЭКВ ограничено интервалом $0 \leq t \leq \tau$, в то время как у оператора Флоке таких ограничений нет. Как и оператор Флоке, ОЭКВ может быть представлен в виде матрицы при использовании некоторого ортогонального базиса. Наиболее естественным выбором такого базиса являются собственные функции невозмущенной системы, являющиеся решением задачи Штурма-Лиувилля

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \varphi_n(\mathbf{x}) + U(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{x}) = E_n \varphi_n(\mathbf{x}), \quad (4.20)$$

с соответствующими граничными условиями. Матричные элементы ОЭКВ определяются как

$$G_{mn}(\tau) = \int \varphi_m^*(\mathbf{x}) \hat{G}(\tau) \varphi_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.21)$$

Таким образом, в данном представлении матричные элементы G_{mn} являются комплексными амплитудами межуровневых переходов под воздействием случайного возмущения. В отсутствие возмущения матрица ОЭКВ является диагональной с $|G_{mm}| = 1$.

4.1.3 Спектральные свойства оператора эволюции на конечное время

Как было показано в п. 4.1.1, даже в динамических системах со случайной зависимостью от времени могут существовать зоны устойчивости в фазовом пространстве, размер которых уменьшается с ростом длины временного интервала, на котором мы рассматриваем динамику системы. На квантовом уровне описания информация об этих зонах “спрятана” в тонких корреляциях между элементами матрицы ОЭКВ. Безусловно, эффективное описание динамики любой квантовой системы со стохастическими членами в гамильтониане предполагает применение некоторого статистического подхода. Однако простое усреднение матрицы оператора эволюции может “смыть” следы любых тонких корреляций, что приведет к потере информации об зонах устойчивости. Ключом к решению проблемы может служить то обстоятельство, что информация о зонах устойчивости должна быть заложена в спектральных свойствах ОЭКВ. Это предполагает, что в качестве ансамбля для усреднения следует использовать не сами матрицы ОЭКВ, а их определенные спектральные характеристики.

Собственные вектора и собственные значения ОЭКВ удовлетворяют уравнению

$$\hat{G}\Psi_m(\mathbf{x}, t) = g_m \Psi_m(\mathbf{x}, t). \quad (4.22)$$

Как правило, чтобы понизить размерность собственных функций, в качестве таковых используются функции

$$\Phi_m(\mathbf{x}) = \Psi_m(\mathbf{x}, t = 0). \quad (4.23)$$

Для многих задач удобно представить функции Φ_m в виде разложения по собственным функциям невозмущенного гамильтониана

$$\Phi_m(\mathbf{x}) = \sum_n c_{mn} \varphi_n(\mathbf{x}). \quad (4.24)$$

Вследствие унитарности, собственные значения g_m могут быть представлены как

$$g_m = e^{-i\epsilon_m/\hbar}, \quad \epsilon_m \in \mathfrak{R}. \quad (4.25)$$

Поскольку собственные значения ОЭКВ принадлежат единичной окружности в комплексной плоскости, ОЭКВ относится к круговому матричному ансамблю [34]. Величина ϵ_m является аналогом квазиэнергии в квантовых системах с периодическим возмущением [54].

В теории квантового и волнового хаоса одной из наиболее презентативных характеристик, указывающих на степень проявления классического хаоса в квантовой динамике, является распределение межуровневых расстояний, определяемых как

$$s = \epsilon_{m+1} - \epsilon_m. \quad (4.26)$$

Как уже отмечалось в п. 1.2.4, регулярная динамика предполагает пуассоновское распределение межуровневых расстояний

$$P(s) \sim \exp(-s). \quad (4.27)$$

Глобальный эргодический хаос предполагает иную картину – волновые функции перекрываются в фазовом пространстве, что приводит к “расталкиванию” ближайших уровней. Как следствие, межуровневые расстояния распределены по закону Вигнера-Дайсона [34, 215]

$$P(s) = As^\zeta \exp(-Bs^2), \quad (4.28)$$

где A и B – константы, подбираемые исходя из условий нормировки

$$\int_0^\infty P(s)ds = 1, \quad \int_0^\infty sP(s)ds = 1, \quad (4.29)$$

а ζ принимает значения 1, 2 или 4 в зависимости от симметрий оператора \hat{G} . Собственные значения оператора \hat{G} унимодулярны (т. е. лежат на окружности единичного радиуса в комплексной плоскости), а сам оператор \hat{F} , в общем случае, не обладает симметрией по отношению к инверсии горизонтальной координаты r . Эти два обстоятельства указывает, что оператор \hat{G} принадлежит

к круговому унитарному ансамблю, для которого $\zeta = 2$, а распределение межуровневых расстояний описывается формулой (1.69) [214].

Как отмечалось в п. 4.1.1, с ростом τ происходит постепенное разрушение областей устойчивости в фазовом пространстве одношагового отображения Пуанкаре. Поскольку одношаговое отображение Пуанкаре является прямым классическим аналогом ОЭКВ, этот процесс должен сопровождаться трансформацией статистики межуровневых расстояний ОЭКВ от пуассоновской к вигнеровской. В промежуточном режиме смешанного фазового пространства, в котором сосуществуют области регулярной и хаотической динамики, распределение межуровневых расстояний может быть аппроксимировано, например, формулами Броди (1.73) или Берри-Робника (1.75). Значение параметра Броди β , соответствующее наилучшей аппроксимации, должно меняться с ростом τ от 0 до 1, отражая наступление хаоса. Если же говорить, о распределении Берри-Робника, то оно явным образом зависит от доли фазового пространства с регулярной динамикой. Таким образом, аппроксимируя распределение межуровневых расстояний с помощью формулы Берри-Робника (1.75), можно получить оценку площади области устойчивости в классическом пределе на основе квантовых вычислений. Впрочем, при этом не следует забывать, что распределение Берри-Робника, во-первых, является достаточно грубым приближением, не учитывающим многие факторы, а во-вторых, выводится для ортогонального ансамбля, в то время как ОЭКВ принадлежит к унитарному. Различие, пускай и не слишком значительное, законов Вигнера-Дайсона для ортогонального и унитарного ансамблей также вносит определенную погрешность в оценку площади области устойчивости.

Как уже отмечалось выше, ОЭКВ является случайным оператором, поэтому при исследовании его спектральных свойств следует использовать некоторую процедуру усреднения по реализациям. Простейший вариант такого усреднения можно выразить формулой:

$$P(s, \tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N P_n(s, \tau), \quad (4.30)$$

где $P_n(s, \tau)$ — распределение межуровневых расстояний, вычисленное с n -й реализацией возмущения.

4.1.4 Волновой аналог оператора эволюции на конечное время

В предыдущем параграфе было указано, что одновременное использование спектрального анализа ОЭКВ и одношагового отображения Пуанкаре позволяет не только выявить следы областей устойчивости на конечном времени, присутствующих в фазовом пространстве, но и дать их “классическую” трактовку на языке теории детерминированных динамических систем. Сосуществование областей регулярного и хаотического движения в фазовом пространстве вносит заметный отпечаток на физические свойства рассматриваемой системы. По этой причине данный подход имеет определенную практическую ценность при исследовании конкретных физических задач.

Первой задачей, которая будет рассмотрена в данном контексте, является задача о дальнем распространении звука в океане. В качестве случайного возмущения здесь выступает неоднородность скорости звука вдоль трассы волновода, обусловленная океаническими внутренними волнами. Распространение волновых пакетов, принадлежащих областям устойчивости в фазовом пространстве, характеризуется пониженной дисперсией как по времени, так и по пространству. Формируемые такими волновыми пакетами акустические импульсы меньше других подвержены декогеренции и хорошо выделяются на фоне общей картины принимаемого сигнала. Таким образом, существование зон устойчивости в фазовом пространстве лучевых уравнений представляет интерес с точки зрения решения прикладных задач акустики океана. В качестве примера можно упомянуть гидроакустическую томографию или подводную связь с помощью акустических сигналов.

Акустическое поле в подводном звуковом канале описывается параболическим уравнением

$$\frac{i}{k_0} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -\frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + [U(z) + V(z, r)] \Psi, \quad (4.31)$$

где функция $U(z)$ определяется опорным профилем скорости звука, а $V(z, r)$ выступает в качестве малого случайного возмущения. Уравнение (4.31) должно быть дополнено соответствующими граничными условиями. Поскольку в дальнейшем нас будет интересовать, в первую очередь, распространение звука под

малыми углами к оси волновода, можно воспользоваться идеализированными граничными условиями вида

$$\Psi|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{d\Psi}{dz} \right|_{z=h} = 0, \quad (4.32)$$

что соответствует “мягкой” поверхности океана ($z = 0$) и “жесткому” дну ($z = h$). Волновым аналогом ОЭКВ является оператор эволюции акустического поля вдоль ограниченного волноводного сегмента, который может быть без труда определен с помощью принципа оптико-механической аналогии [93]:

$$\hat{G}(\tau)\bar{\Psi}(z) \equiv \Psi(z, r)|_{r=\tau}, \quad (4.33)$$

где $\bar{\Psi}(z) = \Psi(z, r = 0)$. Для краткости назовем оператор (4.33) аббревиатурой ОЭКР (оператор эволюции на конечное расстояние). По аналогии с ОЭКВ, ОЭКР может быть представлен в виде матрицы в базисе нормальных мод невозмущенного волновода, являющимися решениями задачи Штурма-Лиувилля

$$-\frac{1}{2k_0^2} \frac{\partial^2 \varphi_n(z)}{\partial z^2} + U(z)\varphi_n(z) = E_n \varphi_n(z) \quad (4.34)$$

с граничными условиями (4.32). Соответствующие матричные элементы выражаются с помощью формулы

$$G_{mn}(\tau) = \int_0^h \varphi_m^*(z) \hat{G}(\tau) \varphi_n(z) dz. \quad (4.35)$$

Граничные условия (4.32) предполагают наличие бесконечного числа мод дискретного спектра. Из физических соображений мы можем оставить только те из них, которые соответствуют распространению без значительного контакта с поглощающим дном. Для их выделения можно использовать простой “лучевой” критерий

$$E_n < U(z = h), \quad (4.36)$$

где E_n – n -е собственное значение задачи (4.34).

Ниже ОЭКР будет применен для анализа двух модельных волноводов. Первый из них построен на основе реальных гидрологических данных по Японскому морю. Второй – это волновод с биэкспоненциальным профилем (3.1) в качестве опорного профиля скорости звука.

4.2 Спектральная статистика ОЭКР в модели случайно-неоднородного акустического волновода в Японском море

4.2.1 Подводный звуковой канал между полуостровом Гамова и банкой Кита-Ямато

Рассмотрим модель подводного звукового канала, соответствующего волноводной трассе между полуостровом Гамова и банкой Кита-Ямато в Японском море. Интерес к этой трассе продиктован результатами недавно проведенных в этом районе экспериментов [121, 122], свидетельствующими о необычайно высокой стабильности приосевого распространения звука, что является крайне нетипичным для глубокого океана [114, 115, 187, 216, 217].

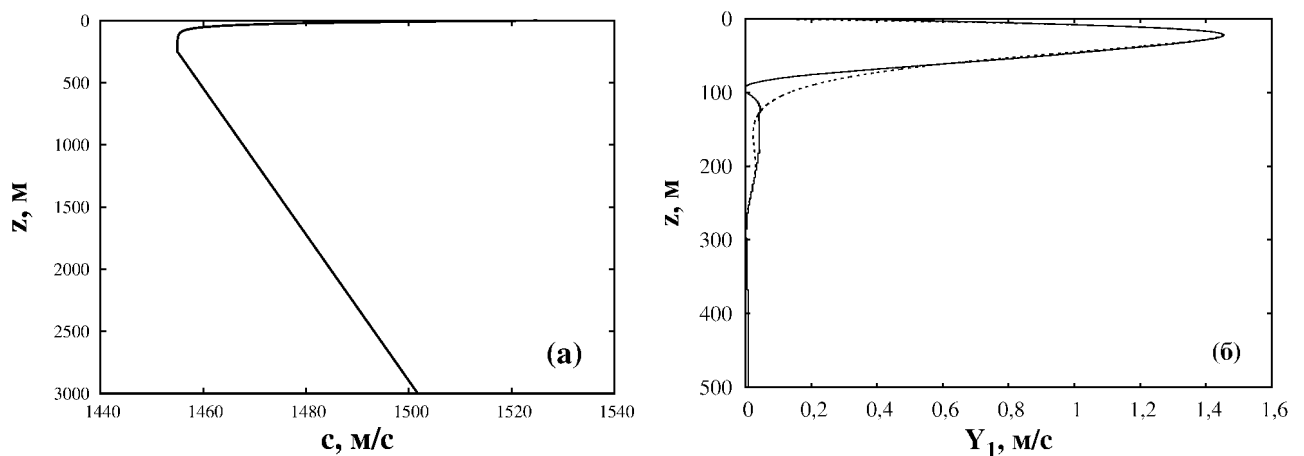


Рисунок 4.1: (а) Невозмущенный профиль скорости звука для модели подводного звукового канала в Японском море, (б) первая эмпирическая ортогональная функция возмущения скорости звука без сглаживания (сплошная линия) и со сглаживанием (пунктирная линия) [211]

Модель подводного звукового канала в Японском море была разработана с использованием базы гидрологических данных [218]. Функция $U(z)$, соответствующая опорному профилю скорости звука, была аппроксимирована

$$U(z) = \begin{cases} U_1(z), & z \leq z_0, \\ U_2(z), & z > z_0. \end{cases} \quad (4.37)$$

где

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \frac{c_1}{c_0} e^{-z/z_1}, \\ U_2(z) &= \frac{c_1}{c_0} e^{-z_0/z_1} + \frac{g}{c_0} (z - z_0), \end{aligned} \quad (4.38)$$

$c_0 = 1455$ м/с, $c_1 = 70$ м/с, $z_0 = 250$ м глубина оси канала, $z_1 = 30$ м, $g = 0.017$ с⁻¹ (см. Рис. 4.1(а)). Предполагается, что дно океана является плоским и расположено на глубине $h = 3$ км. Мы будем рассматривать только глубоководное распространение, хотя в упомянутых выше экспериментах [121, 122] источник находился около дна на мелководье вблизи полуострова Гамова. Однако, мелководная часть волновода имеет протяженность порядка 30 км, что существенно меньше длины глубоководного участка, составляющей около 350 км. Кроме того, мелководная часть не содержит особенностей, которые способны существенно повлиять на устойчивость лучей.

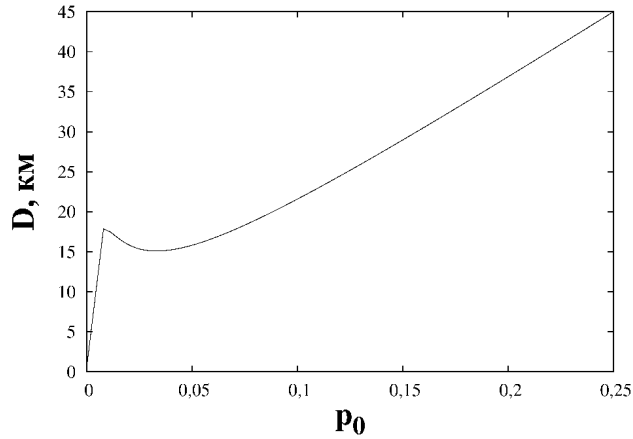


Рисунок 4.2: Длина цикла луча как функция тангенса угла испускания для источника, расположенного на оси подводного звукового канала [211].

Выражения (4.37) и (4.38) допускают аналитическое описание некоторых основных волноводных характеристик в отсутствие горизонтальной неоднородности. В частности, длина цикла луча, т. е. расстояние между двумя ближайшими верхними (или нижними) точками заворота луча, определяется по формуле

$$D(E) = 2z_1 \sqrt{\frac{2}{E}} \ln(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon - 1}) + \frac{2c_0 \sqrt{2E_{\min}}}{g} \sqrt{\varepsilon - 1}, \quad (4.39)$$

где

$$E = \frac{p^2}{2} + U(z), \quad (4.40)$$

$\varepsilon = E/E_{\min}$, $E_{\min} = (c_1/c_0) \exp(-z_0/z_1)$. Рис. 4.2 представляет зависимость длины цикла луча от тангенса угла испускания в случае источника, расположенного на оси канала $z = 250$ м. Тангенс угла испускания p_0 связан с E формулой $p_0 = \pm\sqrt{2(E - E_{\min})}$. Поскольку в горизонтально-однородном волноводе $D(-p_0) = D(p_0)$, на рисунке приведена только ветвь, соответствующая положительным значениям p_0 . Важной особенностью приведенной кривой является наличие двух локальных экстремумов $D(p_0)$, острый максимум и гладкий минимум. Последний приводит к образованию так называемого слаборасходящегося пучка [219–222]. Его слабая расходимость обусловлена тем, что лучи, его составляющие, имеют практически совпадающие длины цикла. Ниже будет показано, что наличие локального минимума $D(p_0)$ играет важную роль в устойчивости лучей.

В численных лучевых расчетах с помощью схем Рунге-Кутты (например, 4-го порядка) скачок производной dU/dz при $z = z_0$ приводит к быстрому росту численной ошибки. По этой причине, при моделировании мы заменили выражение (4.37) для $U(z)$ на сглаженную функцию

$$U(z) = U_1(z) + \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \frac{z - z_0}{\Delta} \right] U_2(z), \quad (4.41)$$

где $\Delta = 1$ м.

Модель случайного возмущения волновода, обусловленного внутренними волнами, строилась в несколько этапов. Сначала по данным [218] был вычислен усредненный вдоль трассы профиль частоты Вьясяля-Брента. Затем, с помощью метода, предложенного в [105], был рассчитан ансамбль реализаций возмущения скорости звука. Для того, чтобы существенно упростить численное моделирование, было использовано разложение неоднородности скорости звука по эмпирическим ортогональным функциям, также известное как разложение Карунена-Лёве [223]

$$\delta c(z, r) = \langle \delta c(z) \rangle + \sum_n b_n(r) Y_n(z). \quad (4.42)$$

Входящие в это выражение эмпирические ортогональные функции $Y_n(z)$ являются собственными векторами ковариационной матрицы \mathbf{K} , элементы которой

определяются по формуле

$$K_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L [\delta c_l(z_i) - \langle \delta c(z_i) \rangle] [\delta c_l(z_j) - \langle \delta c(z_j) \rangle], \quad (4.43)$$

где l индексирует L статистически независимых профилей неоднородности $\delta c(z)$, $\{z_i\}$ – вектор значений глубины, а угловые скобки означают усреднение по ансамблю. Поскольку неоднородность δc вызывается внутренними волнами, можно положить $\langle \delta c \rangle = 0$. Собственные значения матрицы \mathbf{K} характеризуют вклады соответствующих собственных векторов в разложении (4.42). Было обнаружено, что вклад первой ортогональной функции является доминирующим (около 70 процентов), поэтому мы можем представить возмущение скорости звука как произведение

$$V(z, r) = b_1(r)Y_1(z) \quad (4.44)$$

где $Y_1(z)$ – первая ортогональная функция, представленная на Рис. 4.1(б), а $b_1(r)$ – соответствующая ей амплитуда разложения, являющаяся случайной функцией. Для простоты мы положили, что $b_1(r)$ является стохастическим процессом с автокорреляционной функцией вида

$$\langle b_1(r)b_1(r') \rangle = \exp(-|r - r'|/\bar{r}), \quad (4.45)$$

где радиус корреляций \bar{r} взят равным 10 км, что типично для глубокого океана [224]. Отдельные реализации $b_1(r)$ могут быть вычислены по формуле $b_1 = \sqrt{2\bar{r}}\eta$, где η – одномерный стохастический процесс Орнштейна-Уленбека удовлетворяющий уравнению

$$\frac{d\eta}{dr} = -\frac{1}{\bar{r}}\eta(r) + \frac{1}{\bar{r}}\xi(r). \quad (4.46)$$

Здесь ξ – гауссов белый шум, удовлетворяющий

$$\langle \xi(r) \rangle = 0, \quad \langle \xi(r)\xi(r') \rangle = \delta(r - r'). \quad (4.47)$$

Метод численного решения уравнения (4.46) описан, например, в работе [225]. Для получающейся в результате функция $b_1(r)$ имеем $\langle b_1^2(r) \rangle \simeq 1$.

Первая эмпирическая ортогональная функция возмущения $Y_1(z)$ содержит негладкие скачки в интервале глубин от 100 до 300 метров. Эти скачки не

имеют физической природы и обусловлены дискретизацией гидрологических данных. Они не оказывают существенного влияния на результаты волновых расчетов, чего нельзя сказать о расчетах лучевых, где эти скачки вызывают быстрый рост численной ошибки. По этой причине, лучевые расчеты проводились с использованием сглаженной первой ортогональной функции, изображенной на Рис. 4.1(б) пунктирной линией. Сглаженная функция $Y_1(z)$ описывается выражением

$$Y_1 = Ay_a \exp(-y_a^n) + B \exp(-y_b^2), \quad (4.48)$$

где $A = 0.0027$, $y_a = z/z_a$, $n = 1.1$, $z_a = 24$ м, $B = 2 \cdot 10^{-5}$, $y_b = (z - z_c)/z_b$, $z_b = 50$ м, $z_c = 200$ м.

4.2.2 Лучевое моделирование с помощью одношагового отображения Пуанкаре

Лучевой аналог одношагового отображения Пуанкаре выглядит следующим образом [210]:

$$p_{i+1} = p(r = \tau; p_i, z_i), \quad z_{i+1} = z(r = \tau; p_i, z_i), \quad (4.49)$$

где $p(r = \tau; p_i, z_i)$ и $z(r = \tau; p_i, z_i)$ – решения лучевых уравнений при $r = \tau$ для начальных условий $p(r = 0) = p_i$, $z(r = 0) = z_i$.

Рис. 4.3 демонстрирует фазовые портреты, построенные для описанной выше модели подводного звукового канала в Японском море и соответствующие трем разным реализациям возмущения скорости звука. На всех них наблюдается смешанная структура фазового пространства, с сосуществованием регулярных и хаотических областей. Фазовые портреты, соответствующие одним и тем же значениям шага отображения τ в основном отличаются только расположением островов устойчивости по переменной угла, в то время как их общая структура весьма похожа. Главный остров устойчивости расположен вблизи точки $z = z_0$, $p = 0$ и соответствует пологим лучам, пересекающим ось подводного звукового канала под минимальными углами. По мере увеличения τ происходит усиление перекрытия нелинейных лучевых резонансов, и острова устойчивости постепенно поглощаются хаотическим морем. Однако малая

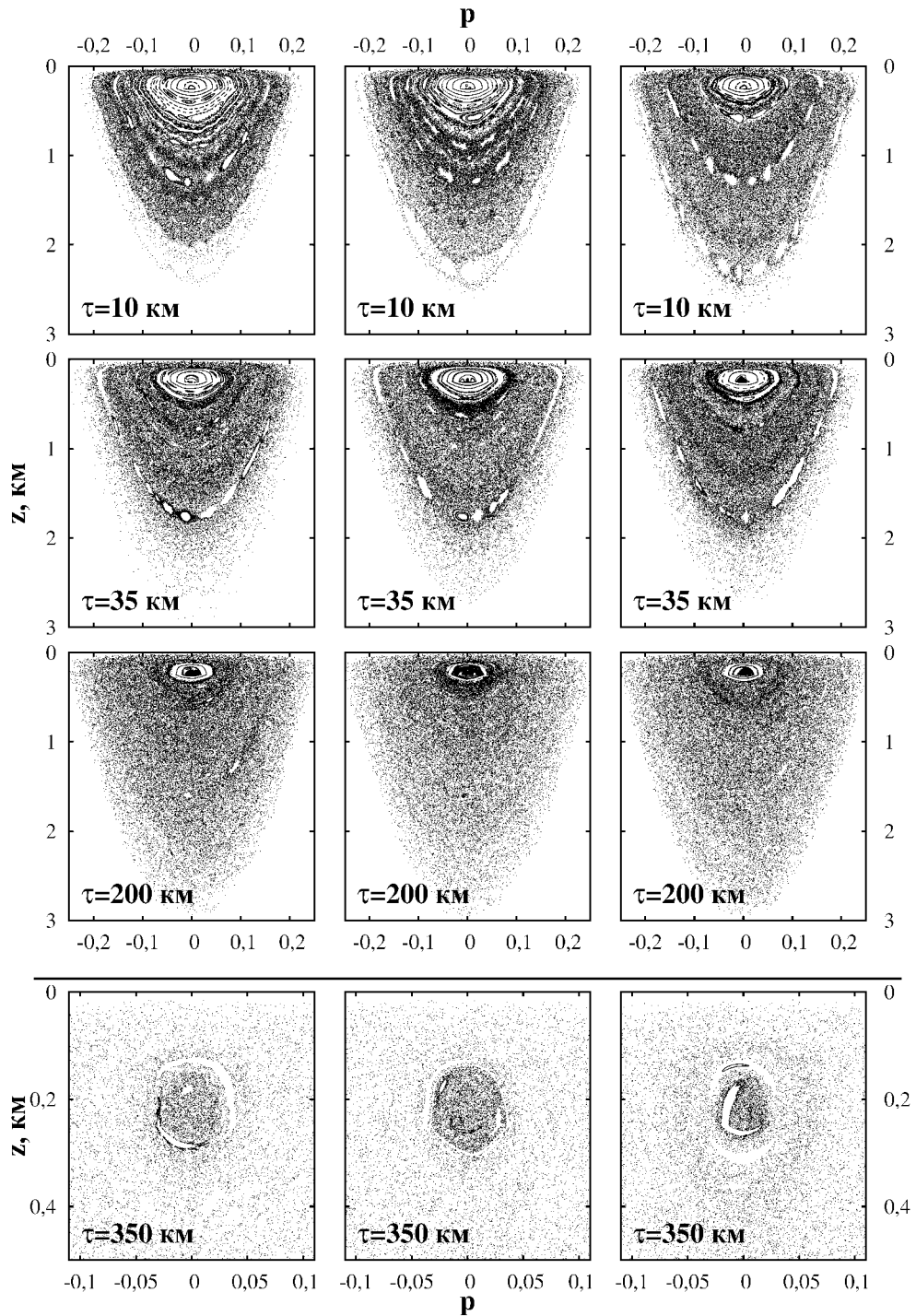


Рисунок 4.3: Лучевые фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре (4.49) для модели подводного звукового канала в Японском море. Каждый столбец соответствует отдельной реализации возмущения поля скорости звука. Значение шага отображения τ изображено в левом нижнем углу каждого портрета [211]

область устойчивости в окрестности $z = z_0, p = 0$ выживает даже при значениях τ порядка сотен километров, превращаясь в цепочку островов. Эта цепочка

соответствует гладкому минимуму функции $D(p_0)$ (см Рис. 4.2), т. е. связана с образованием слаборасходящегося пучка, который сохраняет устойчивость. Действительно, обращение в нуль производной dD/dp_0 означает локальное вырождение соответствующей гамильтоновой системы с образованием так называемого незакручивающегося тора (shearless tori). Исследованию динамики вблизи незакручивающихся торов посвящена обширная библиография (см., например, монографию [190], а также статьи [41–43]). Известно, что незакручивающиеся торы обладают исключительной способностью сохранять устойчивость по Ляпунову [40]. Все это указывает на первостепенную роль слаборасходящегося пучка в необычной устойчивости приосевого распространения звука, обнаруженной в экспериментах в Японском море [121, 122].

Следует еще раз подчеркнуть, что устойчивость пологих лучей является нетипичной для распространения звука в глубоком океане. Множественные эксперименты по дальнему распространению звука в океане указывают на сильную хаотичность пологих лучей, связанную с лучевым хаосом [98, 101, 114, 115, 187, 216, 217]. В качестве механизма хаоса приосевых лучей выступает рассеяние лучей на вертикальных лучевых резонансах, обусловленных мелкомасштабными глубинными осцилляциями возмущения скорости звука [36]. Эти осцилляции порождаются высокими модами поля внутренних волн. В Японском море вклад высоких мод, в силу особенностей стратификации, является слабым, поэтому возмущение скорости звука допускает одномодовую аппроксимацию (4.44), где зависимость от глубины представлена гладкой функцией $Y_1(z)$. Это означает отсутствие рассеяния на вертикальных резонансах. Таким образом, мы наблюдаем в Японском море качественно иной сценарий лучевого хаоса, ассоциирующийся с перекрытием нелинейных лучевых резонансов (4.10).

4.2.3 Статистика межуровневых расстояний для ОЭКР, описывающего распространение звука в Японском море

В случае ОЭКР, межуровневые расстояния определяется как

$$s = \frac{k_0 M (\epsilon_{m+1} - \epsilon_m)}{2\pi}, \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (4.50)$$

$$\epsilon_{M+1} = \epsilon_1 + \frac{2\pi}{k_0}.$$

где последовательность значений ϵ_m выстроена в порядке возрастания, M – полное число рассматриваемых собственных значений, равное числу волноводных мод, распространяющихся без существенного контакта с дном.

Были рассчитаны ансамбли реализаций ОЭКР для модели подводного звукового канала в Японском море. Вычисления проводились для различных частот акустического сигнала: 100, 250, 360 и 500 Гц. Ансамбль, соответствующий 100 Гц включает в себя 500 реализаций, в остальных случаях мы ограничились 100 реализациями. Для каждой реализации было построено семейство ОЭКР $\hat{G}(\tau)$, где $\tau = 5, 10, 15, \dots, 350$ км. С использованием (4.30) были вычислены усредненные по ансамблю реализаций распределения межуровневых расстояний $P(s, \tau)$ для каждого значения τ .

Полученные распределения аппроксимировались с помощью формулы Берри-Робника (1.75). Таким образом была получена зависимость доли фазового пространства, соответствующей устойчивому движению, как функция расстояния τ . Результаты представлены на Рис. 4.4, где мы видим, что v_r быстро спадает на первых 100–150 км, отражая сокращение областей устойчивости вследствие перекрытия лучевых нелинейных резонансов. Затем доля областей устойчивости становится почти постоянной. Это может служить свидетельством вклада долгоживущих островов устойчивости, возникающих в окрестности слаборасходящегося пучка. Отметим, что кривые, соответствующие 250, 360 и 500 Гц проходят очень близко друг к другу, в то время как кривая, соответствующая 100 Гц лежит гораздо выше них и проявляет сильные флуктуации, которые не сглаживаются даже при значительном увеличении числа реализаций ОЭКР. Повышенные значения v_r свидетельствуют о динамической

локализации [58–61]. Динамическая локализация в данном случае означает, что собственные функции ОЭКР, соответствующие хаотической компоненте фазового пространства, не покрывают эту компоненту полностью, т. е. являются локализованными в некоторой ее части. Как следствие, возникает возможность для существования неперекрывающихся в фазовом пространстве собственных функций. При отсутствии перекрытия собственные значения, связанные с такими собственными функциями, являются статистически независимыми друг от друга, что означает подавление “расталкивания” между ними.

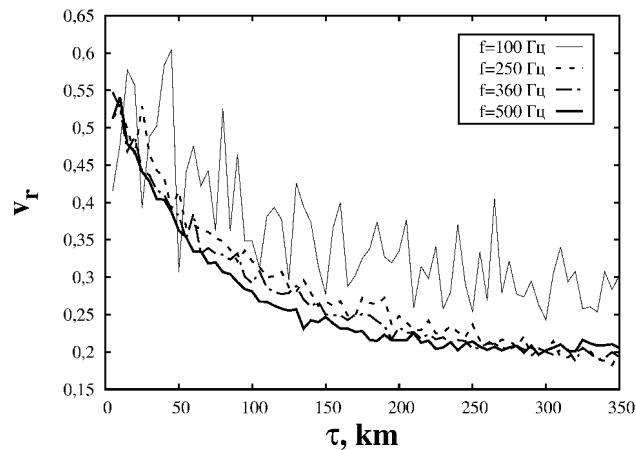


Рисунок 4.4: Доля фазового пространства, соответствующего устойчивому движению, как функция τ для различных акустических частот – оценка с помощью распределения Берри-Робника [211]

Здесь важно упомянуть, что данный метод оценки доли области устойчивости v_r является довольно грубым, поскольку предположения, лежащие в основе формулы Берри-Робника (1.75) выполняются в рассматриваемом случае только приближенно. Как следствие, полученные результаты скорее дают качественное, нежели количественное описание, в особенности при низких частотах сигнала.

Помимо аппроксимации распределения межуровневых расстояний с помощью формулы Берри-Робника, можно использовать метод спектрального анализа, развитый А.Релано с соавторами в работе [226]. Этот метод основан на анализе последовательности

$$\delta_n = \sum_{i=1}^n (s_i - \langle s \rangle), \quad (4.51)$$

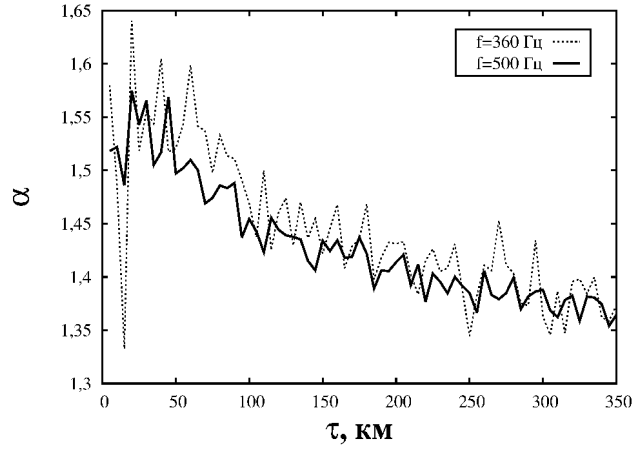


Рисунок 4.5: Параметр Релано α как функция τ [211]

где $n = 1, 2, \dots, N - 1$, N - общее число собственных значений, $\langle s \rangle = 2\pi/N$. Эта последовательность подвергается дискретному преобразованию Фурье

$$\bar{\delta}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \delta_n \exp\left(\frac{2\pi i k n}{N}\right), \quad (4.52)$$

в результате чего находится спектр мощности

$$S(k) = |\bar{\delta}_k|^2. \quad (4.53)$$

В общем случае, после усреднения по ансамблю реализаций, спектр описывается степенным законом

$$\langle S(k) \rangle \sim k^{-\alpha}. \quad (4.54)$$

Релано с соавторами показал, что регулярная динамика предполагает $\alpha = 2$, в то время как в случае глобального эргодического хаоса следует ожидать $\alpha = 1$. В смешанном режиме показатель α принимает некоторое промежуточное значение между 1 и 2 [227]. Рис. 4.5 показывает, что в случае частот 360 и 500 Гц α убывает с увеличением τ , отражая постепенный переход к хаосу. Однако, масштаб изменений α является очень малым и остается вблизи промежуточного значения 1.5 для всех значений расстояния τ , несмотря на достаточно значительные изменения на классических фазовых портретах (см. Рис. 4.3). Аналогичные зависимости для частот 100 и 250 Гц демонстрируют очень сильные флуктуации, поэтому не представлены. Полученные результаты означают, что метод Релано может обеспечивать хорошее согласие только в глубоко полуклассическом (т. е. коротковолновом) режиме, который не годится для дальнего распространения звука из-за сильных потерь энергии в водной толще.

4.2.4 Статистика собственных функций ОЭКР

Исследование особенностей эволюции посредством статистического анализа собственных значений основано на использовании тех или иных допущений о структуре оператора эволюции, с последующим привлечением теории случайных матриц. К сожалению, в реальных физических системах эти допущения нередко оказываются слишком большим приближением, поэтому полученные с их помощью оценки могут оказаться недостаточно точными. В связи с этим возникает потребность в более надежных методах анализа. В этом смысле более предпочтительным выглядит анализ собственных функций, поскольку собственные функции содержат информацию о характере динамики сами по себе, без привлечения каких-то дополнительных предположений. Это касается и собственных функций как ОЭКВ, так и его волнового аналога ОЭКР.

Если нас интересует вопрос о проявлении классической устойчивости по Ляпунову в волновой динамике, ключевое значение приобретает вопрос об идентификации “регулярных” или “хаотических” собственных функций. Существует несколько подходов к такой идентификации (см., например, [77, 228]). Здесь мы приведем только один из них, представляющийся достаточно удобным для статистического анализа. Каждая собственная функция ОЭКР может быть представлена как суперпозиция нормальных мод невозмущенного волновода:

$$\Phi_m(z) = \sum_n c_{mn} \varphi_n(z), \quad (4.55)$$

где c_{mn} – m -ый элемент n -го собственного вектора матрицы оператора \hat{G} , $\varphi_n(z)$ – n -ая нормальная мода. Лучевой хаос соответствует интенсивной перекачке акустической энергии между нормальными модами [186, 199, 229], поэтому “хаотическая” собственная функция всегда состоит из множества нормальных мод. Чем сильнее хаос, тем больше мод включает в себя собственная функция. Следовательно, мы можем охарактеризовать степень хаотичности, оценив число главных компонент (ЧГК) в разложении (4.55) [230]. ЧГК n -ой собственной функции вычисляется по формуле

$$\nu = \left(\sum_{m=1}^M |c_{mn}|^4 \right)^{-1}, \quad (4.56)$$

где M – число рассматриваемых волноводных мод. ЧГК равно единице в невозмущенном волноводе и нарастает по мере усиления рассеяния на неоднородностях.

Возможность ассоциировать каждую собственную функцию с определенным набором нормальных мод является важным преимуществом анализа собственных функций ОЭКР. Это позволяет напрямую охарактеризовать геометрию распространения этой собственной функции. Чтобы упростить процесс ассоциации, можно использовать параметр μ

$$\mu = \sum_{m=1}^M |c_{mn}|^2 m, \quad (4.57)$$

ранее использовавшийся нами в п.3.4.1. В невозмущенном волноводе каждая собственная функция ОЭКР состоит только из одной нормальной моды, а μ совпадает с номером этой моды. Формула

$$\langle I \rangle = \frac{\mu}{k_0} + \frac{1}{2k_0}, \quad (4.58)$$

определяющая квантовомеханическое среднее значение классической переменной действия для данной собственной функции, устанавливает прямую связь этой собственной функции с соответствующей ей областью классического фазового пространства. Рисунки 4.6 и 4.7 иллюстрируют распределения собственных функций в плоскости μ - ν для частот 500 и 100 Гц, соответственно.

Рассмотрим сначала Рис. 4.6, соответствующий частоте 500 Гц. При малых значениях τ перекачка акустической энергии между модами является слабой, поэтому распределение собственных функций сконцентрировано вблизи $\nu = 1$. Следует обратить особое внимание на вытянутые вдоль оси ν структуры с высокой плотностью точек. Они порождаются собственными функциями, соответствующими модовому нелинейному резонансу [199], представляющему собой волновое проявление лучевого нелинейного резонанса. Действительно, изолированный лучевой нелинейный резонанс вызывает колебания действия луча внутри интервала $I_0 - \Delta I_{\max} \leq I \leq I_0 + \Delta I_{\max}$, где I_0 – резонансное значение действия, а ΔI_{\max} – ширина резонанса по действию. В случае невырожденного резонанса ΔI_{\max} определяется по формуле (4.15). Согласно принципу лучевого модового дуализма [199], эти колебания действия означают когерентные перехо-

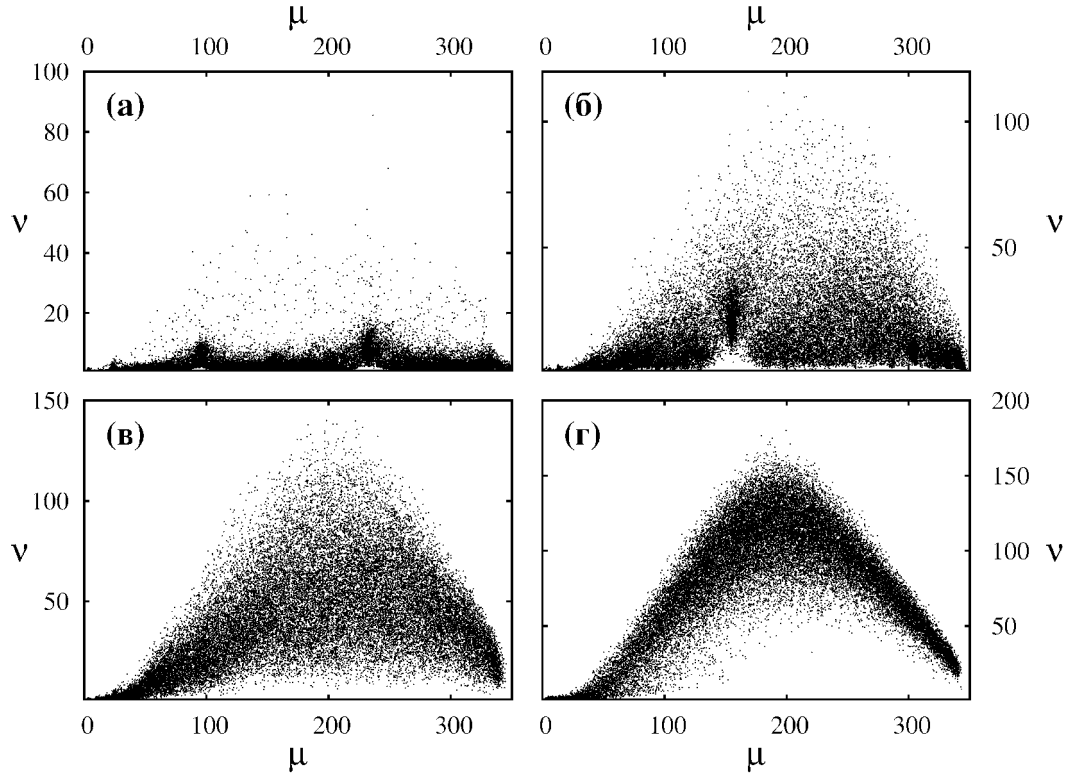


Рисунок 4.6: Распределение собственных функций в плоскости μ - ν , где параметр μ определяется по формуле (4.57) и ν – число главных компонент (4.56). Значения расстояния: (а) $\tau = 10$ км, (б) $\tau = 35$ км, (в) $\tau = 100$ км, (г) $\tau = 350$ км. Частота акустического сигнала 500 Гц [211]

ды между нормальными модами, номера которых удовлетворяют неравенству

$$m_0 - \Delta m \leq m \leq m_0 + \Delta m, \quad (4.59)$$

где $m_0 = k_0 I_0 + 1/2$, $\Delta m = k_0 \Delta I_{\max}$. Собственные функции ОЭКР, отражающие этот процесс, имеют $\mu \simeq m_0$, а их ЧГК ν меняется от 1 до приблизительно $2\Delta m$ в зависимости от того, насколько глубоко данная собственная функция погружена в резонансный остров в классическом фазовом пространстве. Поскольку резонансные значения действия определяются значением τ , они являются одними и теми же для всех реализаций возмущения. Как следствие, такие собственные функции формируют вертикально вытянутые сгущения точек в плоскости μ - ν . В дальнейшем мы будем называть эти сгущения “полосками”. Расположение модового нелинейного резонанса вдоль оси μ может быть найдено по формуле

$$k' D(I = \langle I \rangle) = k\tau, \quad (4.60)$$

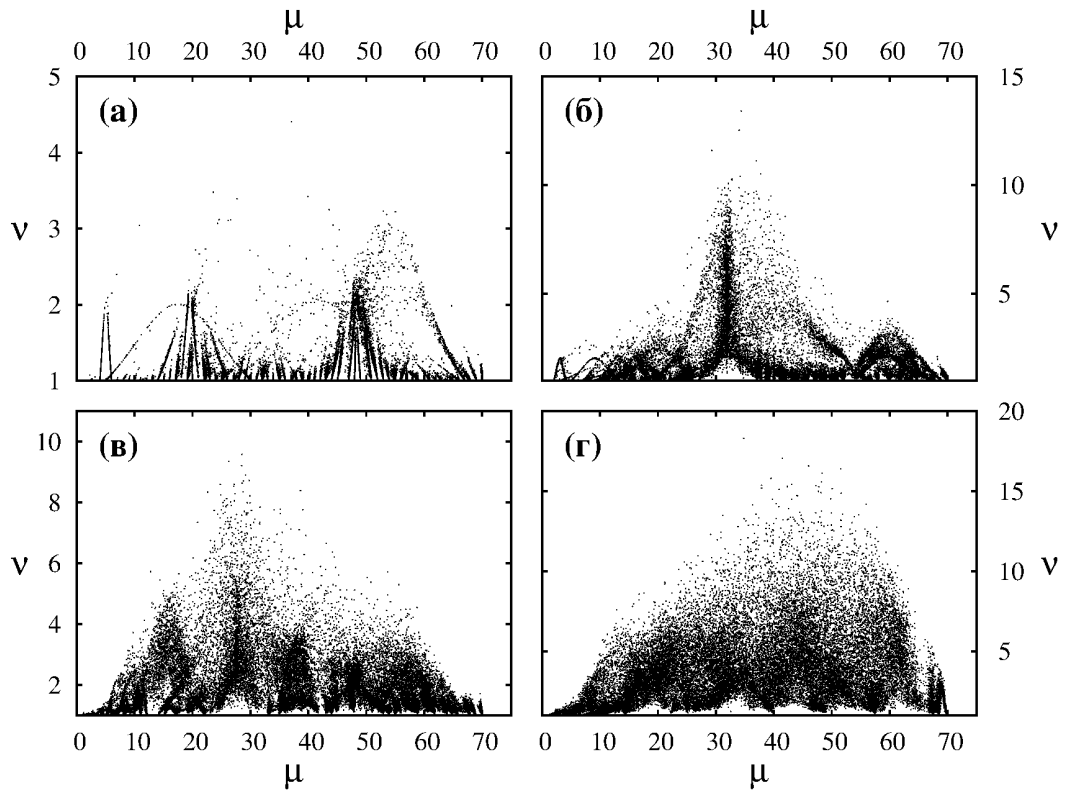


Рисунок 4.7: То же самое, что и на Рис. 4.6, но для частоты сигнала 100 Гц.
 (а) $\tau = 10$ км, (б) $\tau = 35$ км, (в) $\tau = 100$ км, (г) $\tau = 350$ км [211]

где $\langle I \rangle$ связано с μ посредством (4.58). Например, левая полоска на Рис. 4.6(а) соответствует $D = 30$ км и лучевому нелинейному резонансу $3 : 1$, правая полоска соответствует $D = 40$ км и резонансу $4 : 1$, а единственная хорошо заметная полоска на Рис. 4.6(б) соответствует $D = 35$ км и резонансу $1 : 1$. С увеличением τ полоски исчезают вследствие перекрытия модовых нелинейных резонансов, что означает делокализацию межмодовых переходов [199, 231]. Делокализация приводит к резкому росту ЧГК. На больших расстояниях ей оказываются подвержены все собственные функции в интервале между $\mu \simeq 100$ и $\mu \simeq 300$, что приводит к образованию структуры типа “бумеранга” в пространстве $\mu-\nu$. Пример “бумеранга” изображен на Рис. 4.6(г). Левый и правый концы “бумеранга” сформированы собственными функциями, отвечающими режиму слабого рассеяния, при этом левый конец соответствует распространению звука под малыми углами вблизи оси волновода, т. е. его регулярность связана с долгоживущими островами устойчивости одношагового отображения Пуанкаре.

Распределение собственных функций в плоскости μ - ν при звуковой частоте 100 Гц имеет более нетривиальную структуру. Эта структура является исключительно регулярной при $\tau = 10$ км и $\tau = 35$ км, что показано на рисунках 4.7(а) и 4.7(б). Модовые нелинейные резонансы проявляют себя как своеобразные “сталагмиты”. Каждый такой “сталагмит” прорисовывается семейством хорошо различимых почти вертикальных (с легким наклоном) линий. Контуры наиболее выделяющегося “сталагмита” при $\tau = 35$ км, соответствующего лучевому нелинейному резонансу $1 : 1$, являются несколько неупорядоченными и размытыми.

Следует особо подчеркнуть, что некоторые следы “сталагмитов” выживают даже на расстояниях τ порядка сотен километров, вопреки глобальному перекрытию лучевых нелинейных резонансов. Удивительная живучесть “сталагмитов” при больших τ указывает на существование собственных состояний, локализованных вблизи периодических орбит одношагового отображения Пуанкаре. Данное явление можно понимать как подавление делокализации, обусловленной перекрытием модовых нелинейных резонансов. Иными словами, глобальный лучевой хаос оказывается существенно подавлен. С одной стороны, подавление делокализации собственных функций можно связать с динамической локализацией [34, 232], когда деструктивная интерференция ограничивает расплывание волнового пакета в фазовом пространстве. С другой стороны, проявление регулярности в окрестности перекрытых лучевых нелинейных резонансов можно рассматривать как пример реставрации устойчивых периодических орбит, ранее продемонстрированной нами в п. 3.4.1.

Помимо “сталагмитов”, на рисунках 4.7(а) и 4.7(б) можно увидеть структуры в форме “мостиков”. Например, один такой “мостик” в левой части Рис. 4.7(а) соединяет точки $\mu = 5, \nu = 1$ и $\mu = 30, \nu = 1$. “Мостики” создаются собственными функциями, которые состоят из нормальных мод, удовлетворяющих условию

$$k_0(E_m - E_n) = \frac{2\pi l}{\tau}, \quad m > n, \quad (4.61)$$

где l — целое число. Например, вышеупомянутый “мостик” на Рис. 4.7(а) удовлетворяет (4.61) с $m = 30, n = 5$ и $l = 9$. Условие (4.61) эквивалентно в математическом смысле квантовому резонансу между двумя энергетическими уровнями. “Мостики” возникают тогда, когда резонанс (4.61) является хорошо

изолированным, т. е. моды m и n связаны только друг с другом и не взаимодействуют с другими модами. В этом случае, соответствующая собственная функция является линейной комбинацией только мод m и n

$$\Phi_{\text{res}}(z) \simeq c_m \varphi_m + c_n \varphi_n, \quad |c_m|^2 + |c_n|^2 \simeq 1. \quad (4.62)$$

Если это так, соотношение амплитуд $|c_m|/|c_n|$ определяется только фазой резонансной гармоники возмущения. Для возмущения (4.44), комплексная амплитуда l -й резонансной гармоники определяется по формуле

$$B_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi/\tau} b_1(r) \exp\left(-i\frac{2\pi lr}{\tau}\right) dr. \quad (4.63)$$

Фаза резонансной гармоники является случайной величиной с однородным распределением в интервале $[0 : 2\pi]$. Каждое случайное значение фазы однозначно определяет значения μ и ν посредством выражения

$$\mu = |c_m|^2 m + |c_n|^2 n, \quad (4.64)$$

$$\nu = (|c_m|^4 + |c_n|^4)^{-1}. \quad (4.65)$$

Отсюда следует, что μ и ν являются коррелированными для каждой собственной функции, соответствующей резонансу (4.61). Ансамбль независимых реализаций возмущения порождает ансамбль значений фазы резонансной гармоники, что и приводит, в конечном счете, к появлению “мостиков” в плоскости μ - ν . С увеличением τ изолированность резонансов (4.61) нарушается, поэтому корреляции между ν и μ ослабевают. Это приводит к превращению “мостиков” в неупорядоченные облака точек.

Статистический анализ собственных функций ОЭКР, как и анализ собственных значений, позволяет оценить долю фазового пространства, соответствующую устойчивому движению v_r . Сделать это в строгом смысле достаточно затруднительно, поскольку не существует универсального и однозначного критерия идентификации “регулярных” или “хаотических” собственных функций. Некое нестрогое подобие такого критерия может быть сформулировано, если рассмотреть кумулятивную функцию распределения

$$F(\nu) = \int_1^{\nu} \rho(\nu') d\nu', \quad (4.66)$$

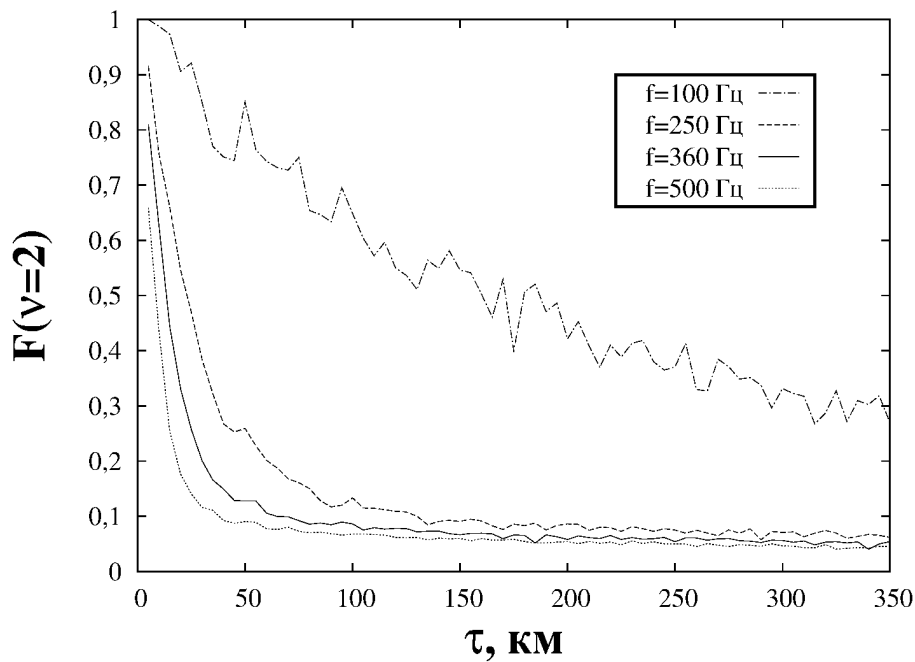


Рисунок 4.8: Доля собственных функций OЭКР с сильной локализацией как функция расстояния. В качестве критерия сильной локализации выступает неравенство $\nu \leq 2$ [211]

где $\rho(\nu')$ – плотность распределения ν . Очевидно, что регулярные собственные функции должны характеризоваться малыми значениями ν (за исключением собственных функций, соответствующих не перекрывающимся модовым нелинейным резонансам). Можно условно выделить два режима локализации: сильная и умеренная. Сильная локализация предполагает, что собственная функция является близкой к одной из нормальных мод невозмущенного волновода. Такие собственные функции могут быть выделены с помощью неравенства $\nu \leq 2$. Зависимость $F(2)$ от расстояния τ изображена на Рис. 4.8. Как мы видим, в случае $f = 100$ Гц доля сильно локализованных собственных функций гораздо выше, чем при более высоких частотах. Также отметим, что кривые, соответствующие частотному интервалу 250–500 Гц очень близки друг к другу. Все они испытывают резкий обвал при малых τ , а затем убывание $F(2)$ становится очень медленным. Наличие “тяжелого хвоста” у зависимости $F(2)$ от τ напрямую связано с наличием долгоживущих островов устойчивости в окрестности слаборасходящегося пучка. В противном случае следовало бы ожидать быстрого стремления $F(2)$ у нулю. Заметим, что доля собственных функций с сильной локализацией является больше и убывает медленнее, чем это предпи-

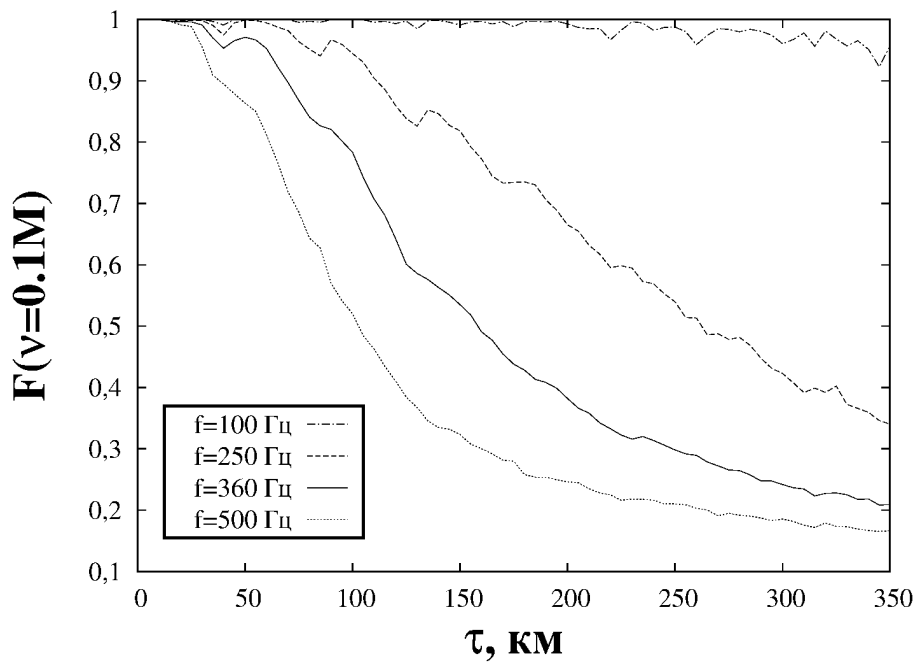


Рисунок 4.9: Доля умеренно локализованных собственных функций ОЭКР как функция расстояния. Критерием умеренной локализации является неравенство $\nu \leq 0.1M$, где M – число волноводных мод, распространяющихся в водной толще без существенного контакта с дном [211]

сывается лучевыми оценками с помощью одношагового отображения Пуанкаре. Это указывает на существенный вклад явлений с волновой природой, таких как динамическая локализация.

В режиме умеренной локализации собственная функция может отвечать достаточно сильному межмодовому взаимодействию, однако соответствующая ей площадь в фазовом пространстве, тем не менее, является малой. Это означает, что значение ЧГК не должно превышать некоторой малой доли от общего числа волноводных мод. Для идентификации умеренно локализованных собственных функций можно использовать неравенство $\nu \leq 0.1M$. Как показано на Рис. 4.9, при частоте сигнала 100 Гц практически все собственные функции являются умеренно локализованными. Это указывает на ограничение диффузионного расплывания, обусловленного динамической локализацией. При более высоких частотах влияние динамической локализации гораздо слабее. Как следствие, доля умеренно локализованных функций заметно уменьшается с ростом τ .

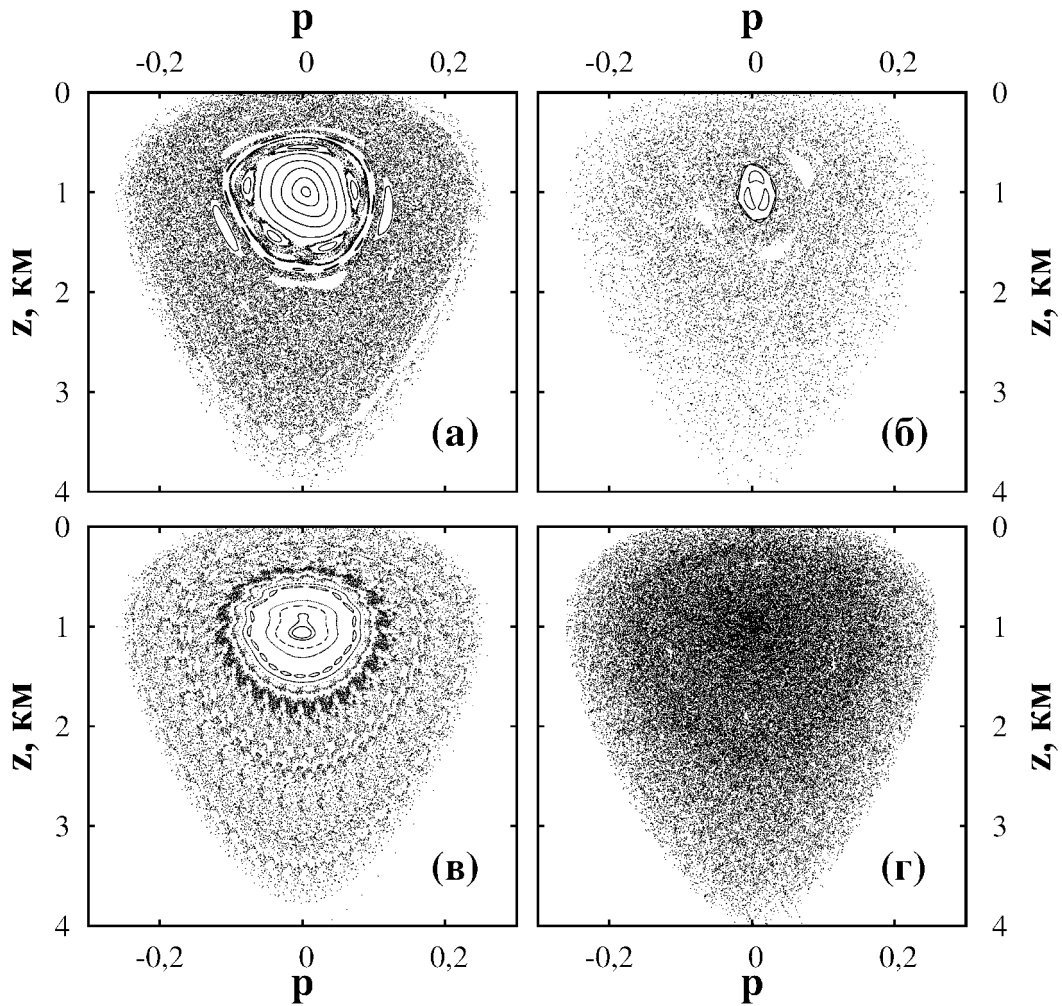


Рисунок 4.10: Примеры фазовых портретов, построенных с помощью отображения (4.4) для подводного звукового канала с биэкспоненциальным профилем скорости звука и возмущением (4.68). Значения параметров: (а) $v = 5$, $\tau = 100$ км, (б) $v = 5$, $\tau = 500$ км, (в) $v = 20$, $\tau = 10$ км, (г) $v = 20$, $\tau = 30$ км [55]

4.3 Неуниверсальность спектральной статистики в присутствии тонкой структуры возмущения

Рассмотренная в предыдущем параграфе модель подводного звукового канала включала в себя возмущение без существенных осцилляций по глубине. Как было показано в предыдущей главе, такие осцилляции способны существенно повлиять на свойства акустического поля. Чтобы восполнить этот пробел,

рассмотрим ПЗК с биэкспоненциальным профилем скорости звука

$$c(z) = c_0 \left[1 + \frac{b^2}{2} (e^{-az} - \eta) \right], \quad (4.67)$$

где $c_0 = 1480$ м/с, $a = 0.5$ км⁻¹, $b = 0.557$, $\eta = 0.6065$, и возмущением

$$\begin{aligned} \delta c(r, z) &= \varepsilon c_0 \frac{z}{z_{\text{th}}} e^{-2z/z_{\text{th}}} \sin \gamma(r, z) \xi(r), \\ \gamma(r, z) &= \pi \left(v e^{-z/z_{\text{th}}} + \xi(r) \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Возьмем следующие значения параметров возмущения: $\varepsilon = 0.0014$ и $z_{\text{th}} = 1$ км. Функция $\xi(r)$ представляет собой сумму 10000 гармоник со случайными фазами. Волновые числа гармоник распределены в интервале от $2\pi/100$ км⁻¹ до $2\pi/1$ км⁻¹ с плотностью, убывающей как k_r^{-2} . На функцию $\xi(r)$ наложено условие нормировки $\langle \xi^2 \rangle = 1$.

Рисунок 4.10 демонстрирует примеры лучевых фазовых портретов отображения (4.4). При $v = 5$ осцилляции возмущения по глубине являются достаточно медленными и лучевой хаос развивается с ростом τ в соответствии со сценарием, связанным с перекрытием резонансов. Площадь области регулярного движения медленно уменьшается с ростом τ , так что небольшой остров устойчивости сохраняется даже на расстояниях порядка сотен километров от источника. В случае $v = 20$ вертикальные осцилляции возмущения являются сильными. Соответственно, на развитие хаоса большое влияние оказывает вертикальный лучевой резонанс. При этом все области устойчивости исчезают достаточно быстро — их нет уже при $\tau = 30$ км.

Для отслеживания перехода от устойчивости к хаосу в волновой динамике, рассчитаем по формуле (4.30) усредненное по ансамблю распределение межуровневых расстояний, а затем проведем аппроксимацию полученного распределения с помощью распределения Броди (1.73)

$$P(s) = (\beta + 1) a_\beta s^\beta \exp(-a_\beta s^{\beta+1}), \quad (4.69)$$

где параметр a_β описывается формулой (1.74). Переход к хаосу предполагает постепенный рост параметра Броди β от 0 до 1, отражая переход от пуассоновской к вигнеровской статистике собственных значений.

Зависимость параметра Броди, соответствующего наилучшей аппроксимации, от τ при частоте сигнала 200 Гц, изображенная на рис. 4.11, в целом

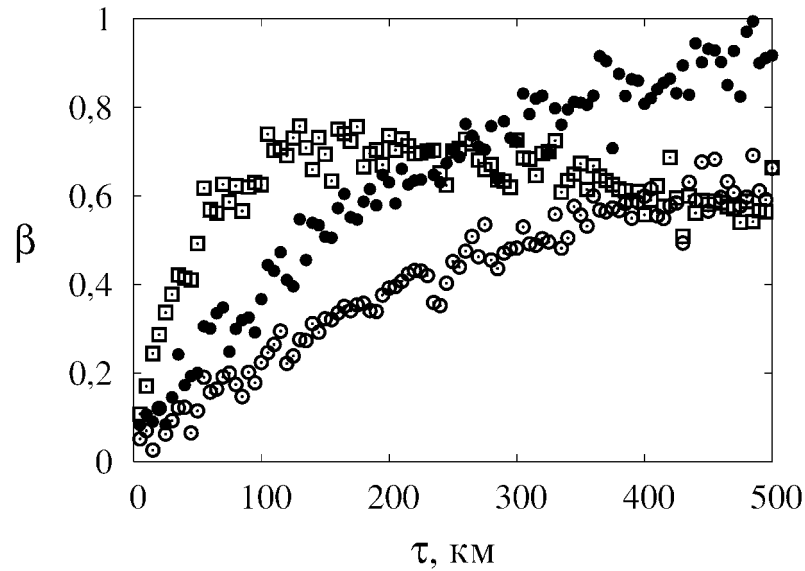


Рисунок 4.11: Параметр Броди β как функция τ . Пустые кружки соответствуют $f = 200$ Гц и $\nu = 5$, черные кружки – $f = 200$ Гц и $\nu = 20$, пустые квадраты – $f = 600$ Гц и $\nu = 20$ [55]

соответствует нашим ожиданиям: β в среднем растет с увеличением τ , причем при $\nu = 20$ этот рост происходит быстрее, нежели при $\nu = 5$. При этом, правда, стоит отметить, что лучевое отображение (4.4) все же предполагает гораздо более высокий темп роста β : глобальный лучевой хаос наступает уже при значениях τ порядка 20–30 км, в то время как β приближается к единице лишь при $\tau \simeq 500$ км. Столь сильное замедление роста β можно связать с тем, что волновые поправки к приближению геометрической оптики обычно существенно ослабляют проявления лучевого хаоса в волновой картине за счет динамической локализации, подобно тому, как мы это видели в главе 3. Казалось бы, при более высокой частоте 600 Гц мы вправе ожидать более резкого перехода от пуассоновской к вигнеровской статистике ввиду ослабления динамической локализации. Однако, здесь нас поджидает сюрприз. Резкий рост параметра β прекращается при $\tau \simeq 120$ км и начинается медленное падение β , связанное с появлением все большего и большего количества вырожденных собственных состояний оператора \hat{G} . Все выглядит так, как будто динамика вновь обретает регулярность. Природа этого явления становится понятной, если принять во внимание, что возникновение лучевого хаоса при наличии быстрых осцилляций возмущения с глубиной сопряжено с бифуркациями периодических орбит, описанными в п. 2.5. Вблизи точек бифуркации, как было показано в [233, 234],

происходят сильные флуктуации спектральной плотности, причем амплитуда этих флуктуаций нарастает с увеличением частоты сигнала, т. е. по мере приближения к лучевому пределу. Таким образом, статистика спектра оператора \hat{G} при наличии сильных вертикальных осцилляций возмущения противоречит гипотезе универсальности Бохигаса-Джаннони-Шмита [69] и связанным с ней представлениям теории случайных матриц. При частоте 200 Гц этот эффект является малозначительным и не оказывает большого влияния на зависимость параметра Броди β от τ , поскольку с ростом длины волны влияние бифуркаций ослабевает.

Таким образом, мы видим, что отслеживание перехода к хаосу посредством анализа статистики межуровневых расстояний может дать некорректную картину, если сценарий развития хаоса связан с бифуркациями периодических орбит. Однако, при увеличении длины волны влияние бифуркаций ослабевает. В этом случае статистика межуровневых расстояний может корректно описывать качественный переход к хаосу.

4.4 Квантовый рэтчет с гармоническим шумом

Если в предыдущем разделе мы рассматривали волновую задачу, которая может быть описана с помощью квантовомеханического методологического аппарата в силу оптико-механической аналогии, что в данном разделе мы рассмотрим пример изначально квантовой системы со случайным возмущением. Речь пойдет о квантовом рэтчете, реализованном с помощью ансамбля невзаимодействующих атомов атомов в оптической решетке. Квантовые рэтчеты такого типа представляют из себя перспективное средство для создания микроскопических устройств нового поколения, например, как средство передачи квантовой информации [139].

Простейшая конфигурация атомного рэтчета предполагает использование оптической решетки с высокой амплитудой [148, 150, 151, 175–177]. В этом случае атомная динамика может быть успешно описана в рамках полуклассического приближения. Активация направленного атомного транспорта требует выхода атомов из потенциальных ям. Этот процесс существенно затрудняется при-

существом динамических барьеров в классическом фазовом пространстве. По этой причине в экспериментах по созданию направленного атомного транспорта в оптических решетках обычно используется достаточно большое возмущение оптического потенциала, гарантирующее разрушение динамических барьеров. Недавно был предложен другой путь решения этой проблемы, основанный на использовании высокочастотной модуляции потенциала, которая приводит к уменьшению эффективной глубины потенциала [235].

В данном параграфе мы предлагаем достаточно простой путь для создания направленного атомного транспорта с помощью возмущения с малой амплитудой, работающего даже в том случае, когда атомы изначально локализованы вблизи минимумов оптического потенциала. Использование возмущения с малой амплитудой является предпочтительным, поскольку позволяет избежать излишнего нагрева атомов, что нежелательно с точки зрения практических приложений. Ключевая идея, лежащая в основе предлагаемого нами подхода, заключается в комбинировании детерминированного и стохастического возмущений. Стохастическая составляющая используется для разрушения динамических барьеров, в то время как детерминированная обеспечивает контролируемое нарушение пространственно-временных симметрий, что является необходимым условием для создания направленного потока атомов в нужном направлении. Помимо этого, должным образом подобранное детерминированное возмущение позволяет уменьшить уровень шума, требуемый для разрушения динамических барьеров.

4.4.1 Описание модели

В приближении вращающейся волны и в случае большой расстройки атомно-полевого резонанса, динамика волнового пакета, образованного двухуровневыми атомами описывается уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \hbar \frac{\Omega^2(X, T)}{\delta} \Psi, \quad (4.70)$$

где X – координата, m – масса атома, δ – расстройка атомно-полевого резонанса, Ω – частота Раби, определяемая конфигурацией лазерного поля

$$\Omega^2(X, T) = \Omega_{\max}^2 U(X, T). \quad (4.71)$$

После преобразования

$$t = 2\Omega_{\max}\sqrt{\frac{\omega_r}{\delta}}T, \quad x = 2kX, \quad (4.72)$$

где k – волновое число лазерной волны, $\omega_r = \hbar k^2/2m$ – частота отдачи фотона, мы можем переписать уравнение Шредингера следующим образом [236]:

$$i\hbar_{\text{resc}}\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar_{\text{resc}}^2}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x,t)\Psi, \quad (4.73)$$

где перенормированная постоянная Планка дается формулой

$$\hbar_{\text{resc}} = 4\sqrt{\delta\omega_r}/\Omega_{\max}. \quad (4.74)$$

В дальнейшем подпись “resc” у \hbar_{resc} будет опускаться.

Предлагаемая нами схема создания направленного атомного транспорта основывается на использовании двух дополнительных оптических решеток, амплитуды которых являются малыми и подвержены широкополосной модуляции. Если точнее, предлагается следующая конфигурация оптического потенциала:

$$U = 1 - \cos x + \varepsilon V(x, t), \quad (4.75)$$

$$V(x, t) = 1 + f(t) \sin x - sf(t + \Delta) \cos x, \quad (4.76)$$

где $\varepsilon \ll 1$, s – параметр, принимающий значения 1 или -1 и $f(t)$ – широкополосный сигнал. Для моделирования этого сигнала мы используем так называемый гармонический шум [237, 238]. Гармонический шум – это двумерный случайный процесс Орнштейна-Уленбека, описываемый системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\dot{f} = y, \quad \dot{y} = -\Gamma y - \omega_0^2 f + \sqrt{2\mu\Gamma}\xi(t), \quad (4.77)$$

где Γ – положительная константа и $\xi(t)$ – гауссов белый шум,

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi(t)\xi(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (4.78)$$

Первые моменты гармонического шума удовлетворяют уравнениям

$$\langle f \rangle = 0, \quad \langle f^2 \rangle = \frac{\mu}{\omega_0^2}. \quad (4.79)$$

Спектр гармонического шума описывается формулой

$$S(\omega) = \frac{\mu\Gamma}{\omega^2\Gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}. \quad (4.80)$$

Положим $\mu = 1$. Тогда амплитуда возмущения определяется только параметром ε . При относительно малых значениях Γ спектр имеет максимум при частоте

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\Gamma^2}{2}}. \quad (4.81)$$

Ширина спектра

$$\Delta\omega = \sqrt{\omega_p + \Gamma\omega'} - \sqrt{\omega_p - \Gamma\omega'}, \quad (4.82)$$

$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \Gamma^2/4}$. Следует особо подчеркнуть, что члены $f(t)$ и $f(t + \Delta)$ в (4.76) соответствуют одной и той же реализации гармонического шума, т. е. они повторяют друг друга с точностью до временного сдвига Δ .

При $\Gamma \rightarrow 0$, $f(t) \rightarrow \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$, где φ_0 определяется начальными условиями для (4.77). Если $f(0) = 1$, $y(0) = 0$ и

$$\Delta = \frac{\pi}{2\omega_0},$$

получаем $f = \cos \omega_0 t$ и

$$V(x, t) \rightarrow \sin(x + s\omega_0 t). \quad (4.83)$$

Таким образом, получается, что $V(x, t)$ при $\Gamma > 0$ ведет себя как плоская волна флуктуирующими фазой и амплитудой (см. Рис. 4.12). При последующем численном моделировании мы положим $\omega_0 = 1$ и $\varepsilon = 0.05$.

Учитывая пространственную периодичность U , мы используем периодические граничные условия

$$\Psi(x) = \Psi(x + 2\pi). \quad (4.84)$$

Использование таких граничных условий означает, что мы пренебрегаем зонной структурой энергетического спектра и рассматриваем только состояния с нулевым квазиимпульсом. Это представляется обоснованным в полуклассическом режиме, характеризующимся малыми значениями постоянной Планка \hbar , когда энергетические зоны являются плоскими, а туннелирование между узлами решетки – пренебрежимо малым.

Стоит упомянуть, что гармонический шум недавно рассматривался в контексте туннелирования Ландау-Зенера в оптических решетках [240, 241].

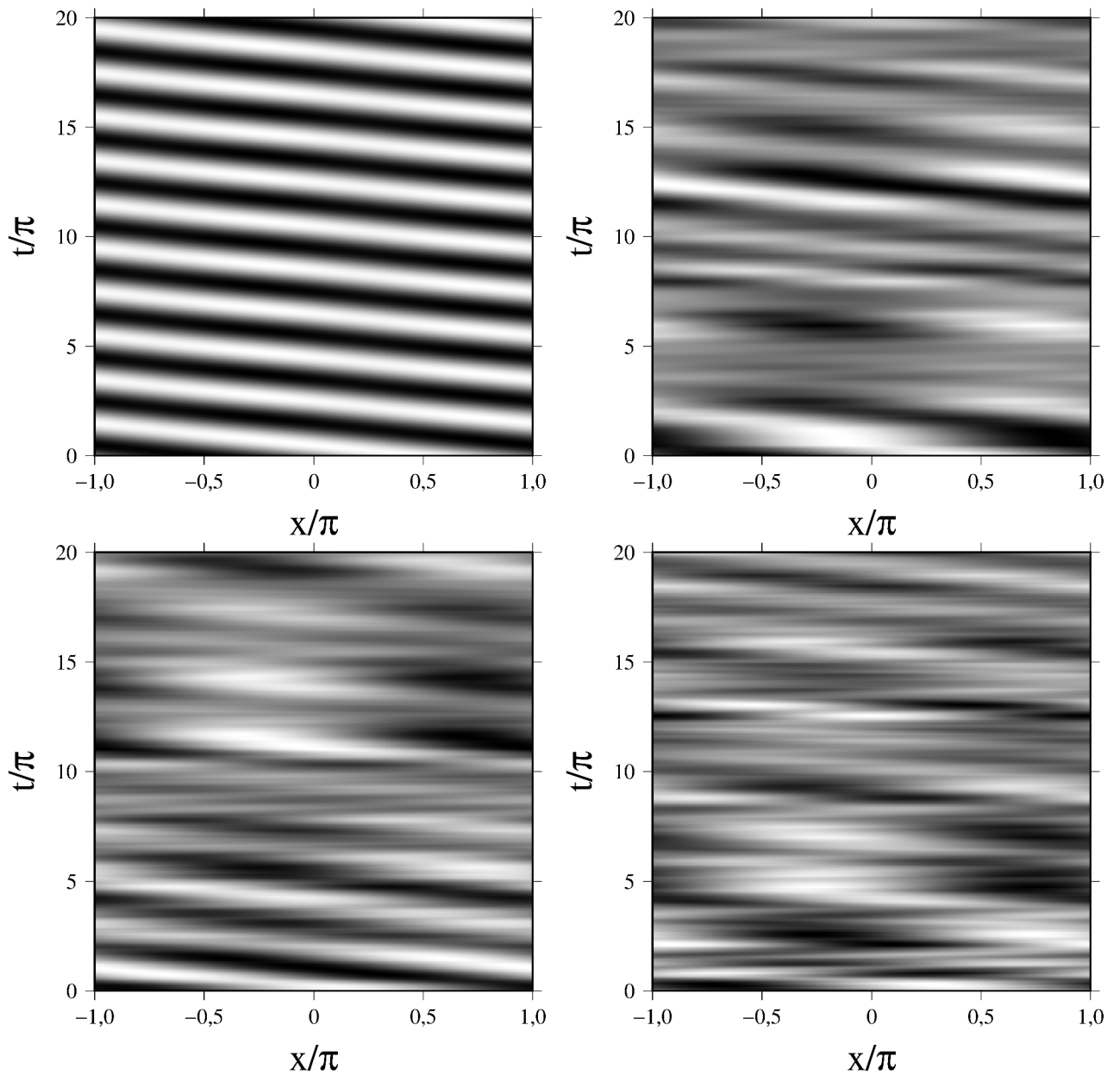


Рисунок 4.12: Возмущение $V(x, t)$ в плоскости $x - t$. Левая верхняя панель соответствует детерминированному случаю $\Gamma = 0$. Остальные панели соответствуют характерным реализациям $V(x, t)$ для ненулевых значений Γ : $\Gamma = 0.5$ (правая верхняя панель), $\Gamma = 1.0$ (левая нижняя панель) и $\Gamma = 1.5$ (правая нижняя панель). Во всех случаях $s = 1$ [239]

4.4.2 Классическая динамика

Перед тем, как обратиться к квантовой эволюции ансамбля атомов, обратим внимание на поведение атомов в классическом пределе. Траектории атомов

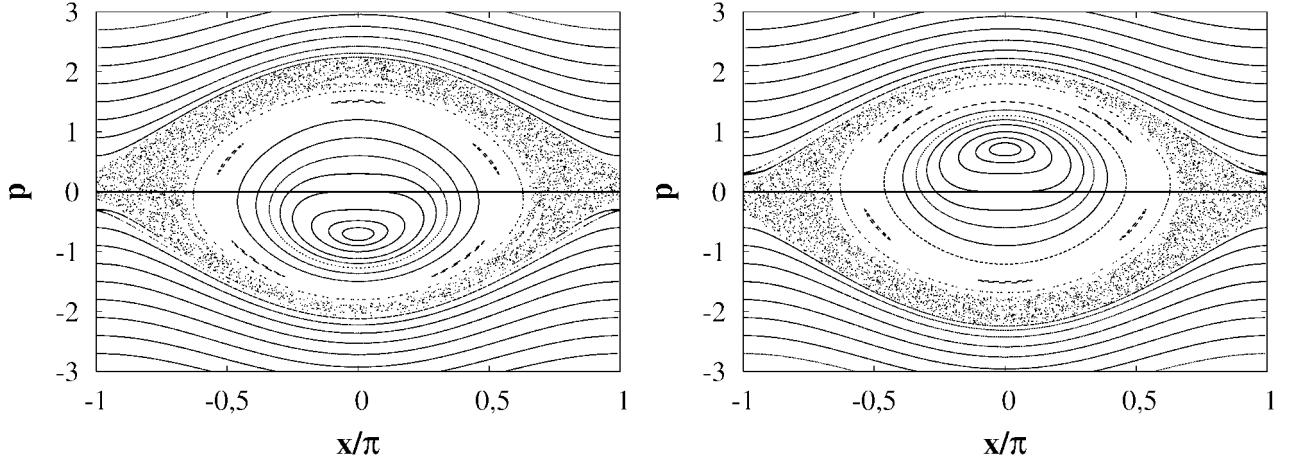


Рисунок 4.13: Сечения Пуанкаре в детерминированном случае $\Gamma = 0$ для $s = -1$ (слева) и $s = 1$ (справа). Горизонтальные линии соответствуют $p = 0$ [239]

описываются уравнениями Гамильтона

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad (4.85)$$

с классическим гамильтонианом H

$$H = \frac{p^2}{2} - \cos x + \varepsilon V(x, t). \quad (4.86)$$

Нестационарное возмущение $V(x, t)$ приводит к неинтегрируемости уравнений (4.85) и возникновению хаоса. При $\Gamma = 0$ и $\varepsilon \ll 1$ хаотическое поведение только в узкой окрестности сепаратрисы. Соответствующий хаотический слой выполняет роль “мостика” между областями финитного и баллистического движения. Напомним, что при $\Gamma = 0$ возмущение имеет вид (4.83), а уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\frac{dx}{dt} = p, \quad \frac{dp}{dt} = -\sin x - \varepsilon \cos(x + s\omega_0 t). \quad (4.87)$$

Легко убедиться, что в этих уравнениях нарушены симметрии (1.94) и (1.95), что делает возможным возникновение направленного транспорта. Плоская волна $V(x, t)$ “тянет” атомы в направлении $x \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow \infty$) при $s = 1$ ($s = -1$), т. е. вдоль линий постоянной фазы на Рис. 4.12. В результате возникает асимметрия хаотического слоя по импульсу, что продемонстрировано на Рис. 4.13. Это означает, что атомы, переходящие из финитного в инфинитный режим,

способны сформировать ненулевой баллистический поток [166, 174, 180, 181], направление которого определяется параметром s . Однако, в фазовом пространстве также присутствует и огромный остров регулярного движения, занимающий значительную часть фазового пространства внутри невозмущенной сепаратрисы. Этот остров препятствует переходу атомов с малыми энергиями в баллистический режим. Таким образом, атомы, локализованные вблизи минимумов потенциала, способны демонстрировать направленный транспорт только за счет туннелирования, которое в случае глубокой оптической решетки является пренебрежимо слабым.

При $\Gamma > 0$, возмущение включает в себя стохастическую составляющую, которая приводит к диффузии атомов сквозь динамические барьеры. Поскольку время корреляции стохастической компоненты можно оценить как $\Delta\omega^{-1}$, где $\Delta\Omega$ дается формулой (4.15), рост Γ предполагает усиление диффузии. При умеренных значениях Γ стохастическая компонента не влияет на пространственно-временные симметрии, поэтому направление транспорта по-прежнему определяется s . Действительно, можно легко увидеть на Рис. 4.12, что линии постоянной фазы возмущения $V(x, t)$ имеют наклонены в одном и том же направлении для всех значений Γ , несмотря на постепенное наступление беспорядка с увеличением Γ .

Отметим, что точка устойчивого равновесия на сечениях Пуанкаре, представленных на Рис. 4.13 смещена с начала координат $x = 0, p = 0$. Это связано с влиянием нелинейного резонанса кратности 1:1 между колебаниями атома внутри потенциальных ям и колебаниями возмущения с частотой $\omega_0 = 1$. Поскольку резонанс 1:1, будучи резонансом наименьшего порядка, имеет достаточно большую ширину в фазовом пространстве, энергия захваченных им атомов может колебаться в больших пределах, оставаясь при этом внутри области регулярного движения. При $\Gamma > 0$ присутствие таких колебаний энергии существенно облегчает перевод атомов, изначально локализованных в окрестности точек устойчивого равновесия, в баллистический режим, поскольку резонанс выполняет роль “лифта” поднимая энергию атомов и, таким образом, уменьшая их энергию активации. Отсюда следует, что частота возмущения $\omega_0 = 1$ представляется близкой к оптимальной с точки зрения активации баллистического потока [242, 243].

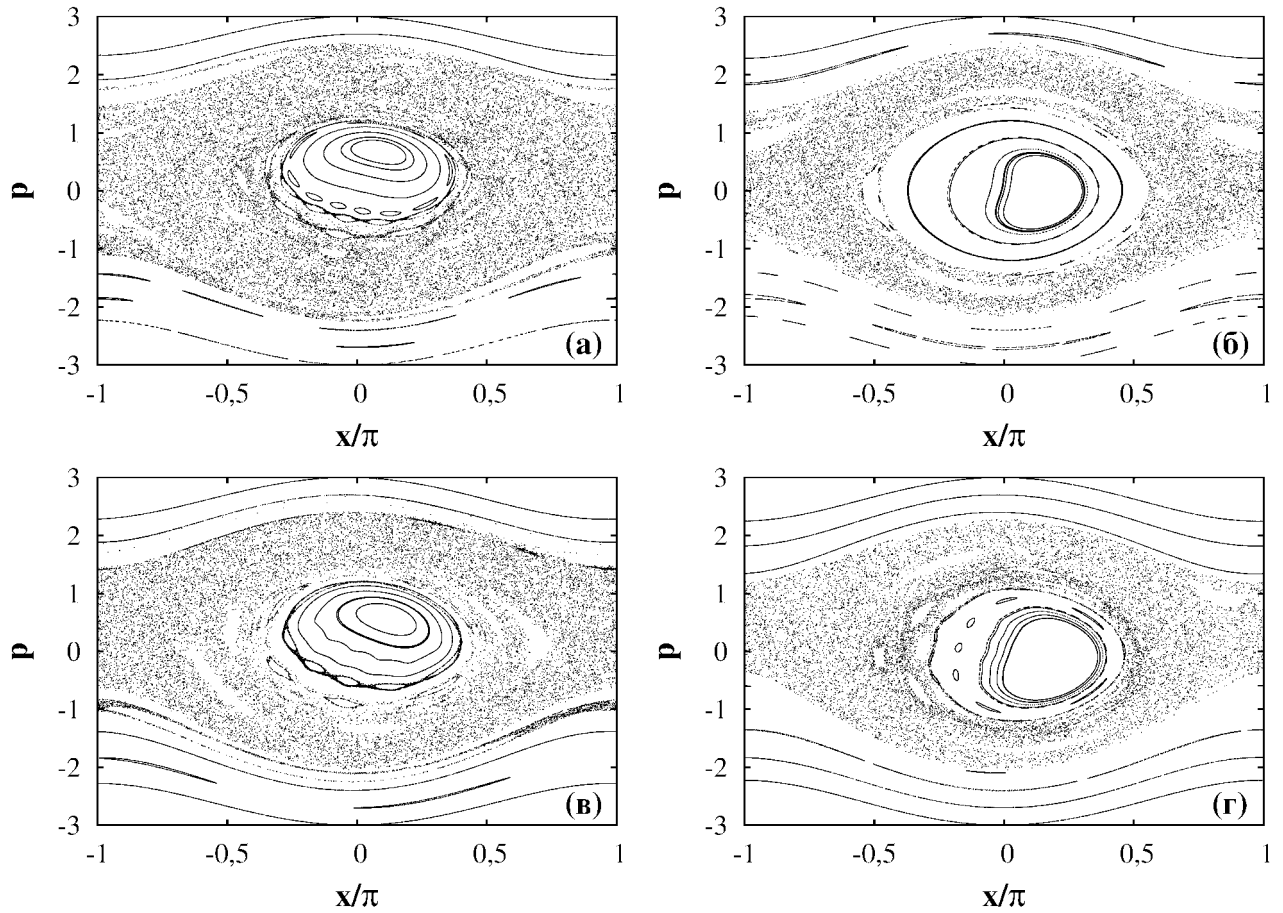


Рисунок 4.14: Фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре с шагом $\tau = 4\pi$. Рисунки (а)-(г) соответствуют разным реализациям гармонического шума. Во всех случаях $\Gamma = 0.1$ и $s = 1$

Для отслеживания процесса разрушения центральной области устойчивости мы можем воспользоваться одношаговым отображением Пуанкаре 4.4. Полученные с его помощью фазовые портреты представлены на Рис. 4.14 и 4.15. Был рассмотрен случай $\Gamma = 0.1$. В случае $\tau = 4\pi$ (Рис. 4.14) центральная область фазового пространства является устойчивой для почти всех реализаций гармонического шума. При четырехкратном увеличении τ вклад стохастической компоненты оказывается более существенным, что продемонстрировано на Рис. 4.14. Почти для всех реализаций область фазового пространства, соответствующая финитному движению, оказывается поглощена хаотическим морем. Области устойчивости могут выживать только в виде островов, которые сохраняются отнюдь не при всех реализациях возмущения. В качестве примера можно привести Рис. 4.15(г), на котором внутренняя часть хаотического мо-

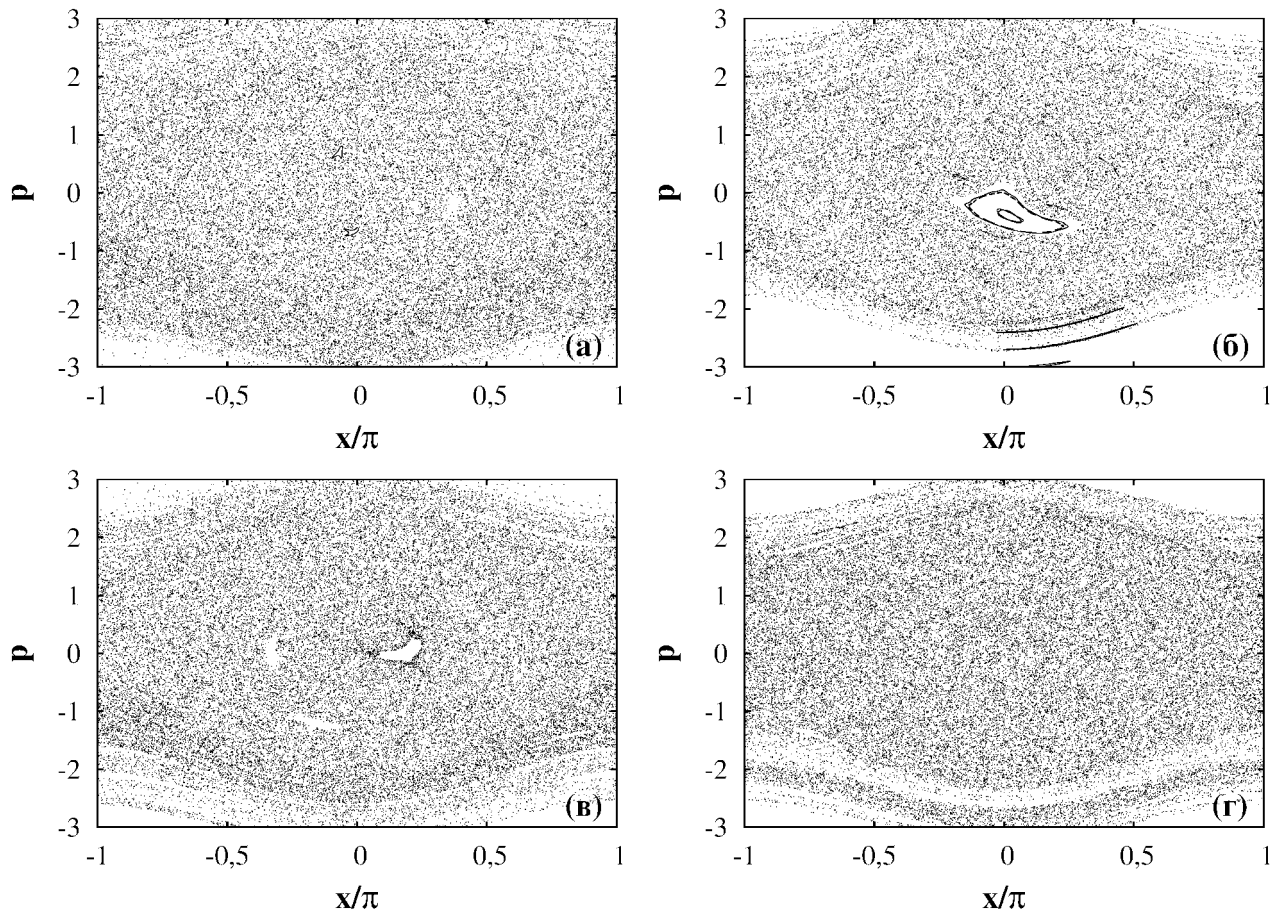


Рисунок 4.15: Фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре с шагом $\tau = 20\pi$. Рисунки (а)-(г) соответствуют разным реализациям гармонического шума. Во всех случаях $\Gamma = 0.1$ и $s = 1$

является практически однородной. При дальнейшем увеличении τ острова устойчивости разрушаются окончательно.

Отметим важную особенность приведенных фазовых портретов. Как мы уже отмечали в п. 4.1.1, исследование структуры фазового пространства с помощью одношагового отображения Пуанкаре основано на излишне строгом критерии устойчивости. Как следствие, оно недооценивает вклад областей устойчивости. Это означает, что существуют области, которые соответствуют регулярной динамике, но при этом выглядят на фазовых портретах, построенных с помощью отображения Пуанкаре как хаотические. Другими словами, одношаговое отображение Пуанкаре, позволяя идентифицировать некоторую часть областей устойчивости, не может быть использовано для идентификации областей хаотических. Это наглядно продемонстрировано в нашем случае. Приведенные выше

рассуждения говорят о том, что хаотический слой должен быть асимметричным по импульсу, причем эта асимметрия управляется параметром s . Однако, как мы видим на представленных фазовых портретах, говорить об “управляемости” хаотического слоя не вполне корректно. Это связано с тем, спектр “за-цикленного” возмущения $\tilde{V}(x, t)$, определяемого выражением (4.6), содержит “вредные” гармоники, оказывающие влияние на свойства хаотического слоя на фазовом портрете, но не проявляющие себя в физических свойствах системы. Данное обстоятельство указывает на то, что следует соблюдать осторожность при использовании одношагового отображения Пуанкаре для анализа фазового пространства и не стоит требовать от него выполнения тех функций, которые оно не может выполнять по определению.

4.4.3 Спектр оператора эволюции на конечное время

Представленные в предыдущем разделе фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре, свидетельствуют о достаточно быстром разрушении островов устойчивости в фазовом пространстве системы. Посмотрим, как это обстоятельство проявляется в спектральных свойствах оператора эволюции на конечное время (ОЭКВ). Принимая во внимание те сложности, с которыми можно столкнуться при анализе собственных значений ОЭКВ (они были описаны в параграфах 4.2.3 и 4.3), мы ограничимся только анализом его собственных функций. Мы воспользовались методологией, ранее примененной в п. 4.2.4. В частности, использовано разложение собственных функций по собственным функциям невозмущенного потенциала (4.24), являющимся решением задачи Штурма-Лиувилля (4.20) с периодическими граничными условиями (4.84). С помощью полученных разложений проведена классификация собственных функций посредством двух параметров, числа главных компонент (ЧГК) ν , вычисляемого по формуле (4.56), и параметра μ , определяемого по формуле (4.57). Для статистического анализа использовано 100 реализаций случайного возмущения. Для каждой реализации при статистическом анализе учитывались 100 собственных функций ОЭКВ, имеющих наименьшие значения параметра μ . Все вычисления проводились для случая $\Gamma = 0.1$ и $s = 1$.

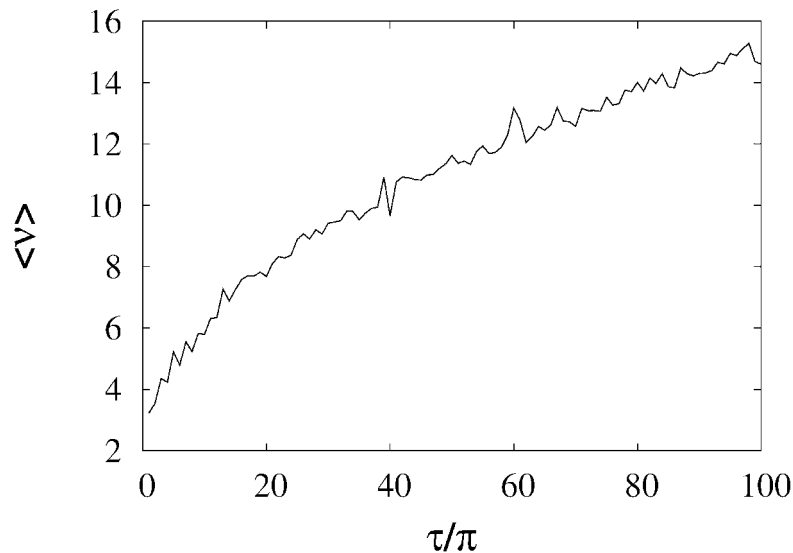


Рисунок 4.16: Среднее число главных компонент, приходящееся на одну собственную функцию ОЭКВ, как функция времени

Случайное возмущение приводит к усилению межуровневых переходов, что проявляется в росте со временем среднего числа главных компонент, приходящегося на одну собственную функцию ОЭКВ (см. Рис. 4.16). Отметим, что этот рост имеет тенденцию к замедлению со временем, что может свидетельствовать как о диффузионном характере процесса, так и о наличии динамических барьеров в области больших энергий атомов.

Большой информативностью обладают распределения собственных функций в пространстве параметров μ и ν . Их примеры, соответствующие различным значениям τ , представлены на Рис. 4.17. При малых значениях τ на распределениях хорошо видны многочисленные “сталагмиты”, т. е. вертикальные сгущения точек, соответствующие резонансам одношагового отображения Пуанкаре (4.4). Напомним, что “сталагмиты” уже рассматривались нами в п. 4.2.4. Они наблюдаются при практически всех значениях μ , за исключением окрестности $\mu = 25$, соответствующей собственными функциями ОЭКВ, относящимся к движению вблизи сепаратрисы. В этой окрестности распределение собственных функций имеет нерегулярный характер, что связано с присепаратрисным хаосом, хорошо заметном на фазовых портретах (см. Рис. 4.14). С ростом τ размер этой окрестности увеличивается, в то время как размеры областей, в которых возникают “сталагмиты”, сокращаются, что указывает на постепен-

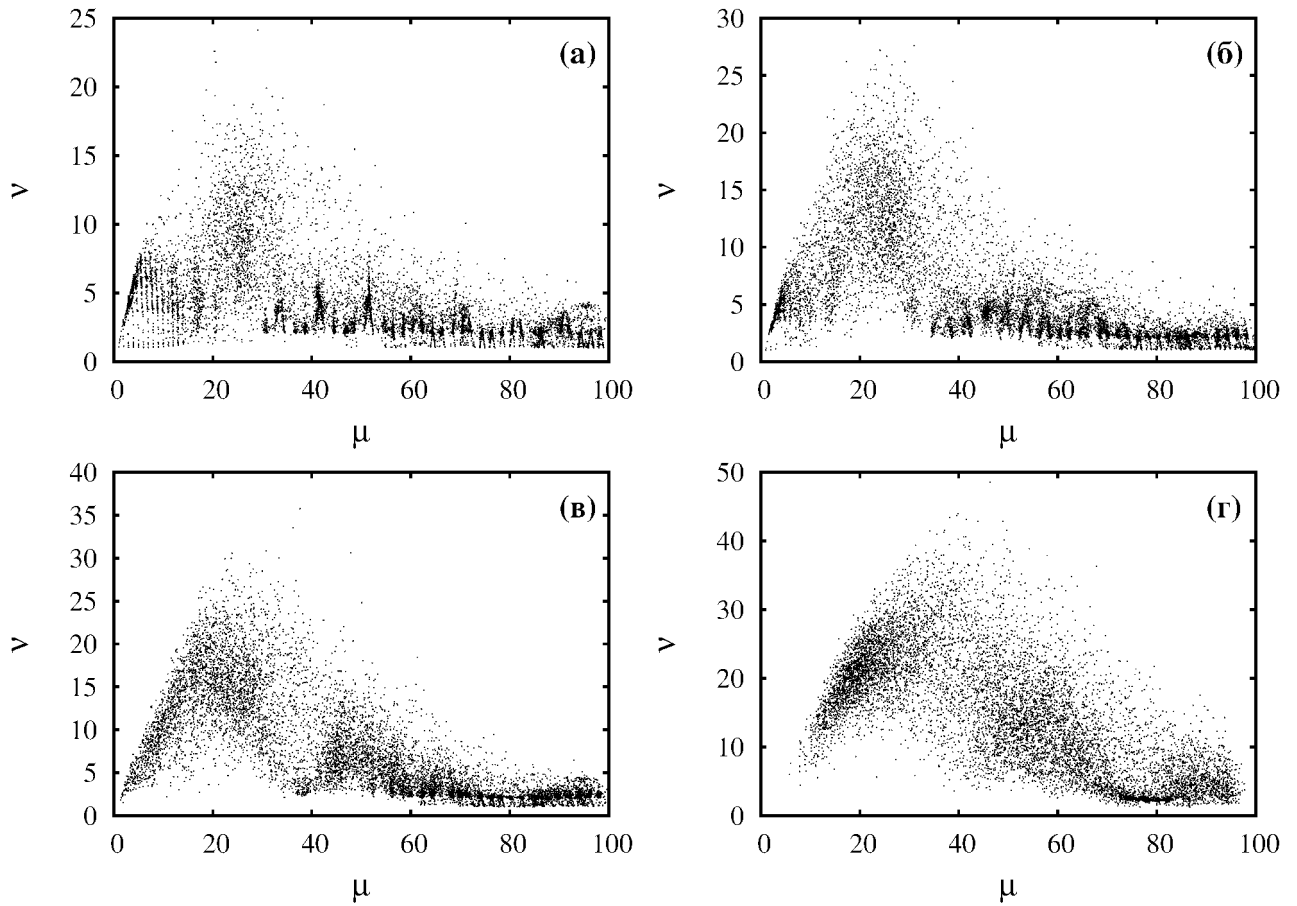


Рисунок 4.17: Распределение собственных функций ОЭКВ в плоскости μ - ν .

(а) $\tau = 4\pi$, (б) $\tau = 10\pi$, (в) $\tau = 20\pi$, (г) $\tau = 100\pi$

ную глобализацию хаоса, обусловленную перекрытием классических резонансов отображения (4.4), равно как и их квантовых аналогов. Важно отметить, что в быстрее всего хаос наступает при малых значениях μ , соответствующих финитному движению атомов. Именно в этой области распределение собственных функций быстрее всего приобретает характерную выпуклость вверх, принимая форму “бумеранга”, что соответствует делокализации подавляющего большинства собственных функций. Это подтверждает наше утверждение о том, что комбинированное воздействие возмущения (4.76), объединяющее в себе детерминированный резонанс 1:1 и стохастическую диффузию, позволяет эффективно разрушать динамические барьеры, препятствующие делокализации финитных частиц, глубокого сидящих внутри потенциальных ям. Вместе с тем, в окрестности $\mu \simeq 80$, соответствующей баллистическим атомам с достаточно большими скоростями, следы “регулярных” собственных функций видны даже

при $\tau = 100\pi$. На Рис. 4.17(г) эти собственные функции формируют горизонтальную полосу, хорошо выделяющуюся на фоне неупорядоченного множества точек, соответствующих нерегулярным собственным функциям. Появление регулярного движения в окрестности $\mu = 80$ можно связать с тем, что эта область соответствует высокочастотному невозмущенному движению, для которого воздействие возмущения является нерезонансным. Наличие долгоживущих “регулярных” является, по всей видимости, одним из факторов, ответственным за некоторое замедление роста $\langle \nu \rangle$ со временем (см. Рис. 4.16).

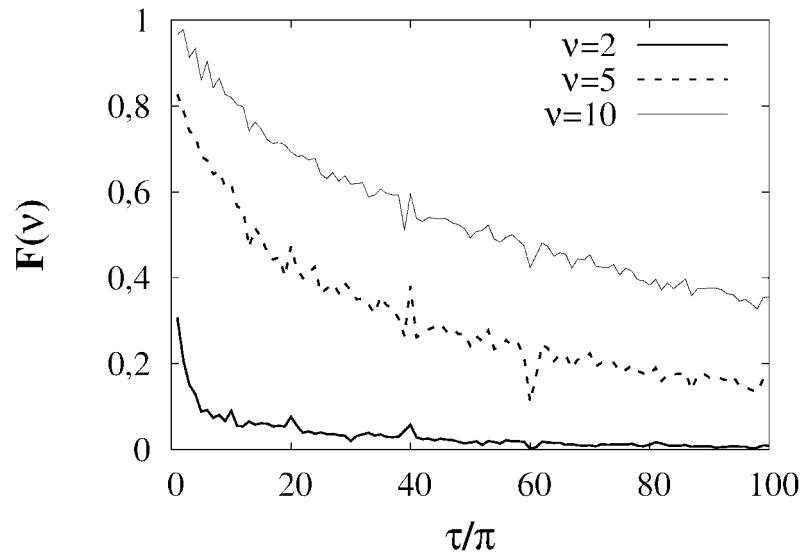


Рисунок 4.18: Доли собственных функций ОЭКВ, удовлетворяющих различным условиям локализации, как функции времени

Информация о зонах классической устойчивости в фазовом пространстве отражается в появлении отдельных собственных функций ОЭКВ, характеризующихся малым числом главных компонент. Тогда для количественной оценки их вклада следует, как и в п. 4.2.4, рассмотреть кумулятивную функцию распределения

$$F(\nu) = \int_1^{\nu} \rho(\nu') d\nu', \quad (4.88)$$

где $\rho(\nu')$ – плотность распределения ν . Как и в п. 4.2.4, будем называть случай $\nu \leq 2$ режимом сильной локализации. Кроме того, рассмотрим два режима умеренной локализации: $\nu \leq 5$ и $\nu \leq 10$. Этим критериям можно условно придать некий смысл, если учесть, что финитному движению соответствуют 25 первых

собственных состояний невозмущенного потенциала. Тогда можно сказать, что критерии $\nu \leq 5$ и $\nu \leq 10$ выделяют собственные функции ОЭКВ, занимающие, соответственно, не более 20 и 40 процентов фазового пространства, заключенного под невозмущенной сепаратрисой. Доля собственных функций с сильной локализацией достаточно быстро спадает практически до нуля. Такая картина достаточно резко контрастирует с результатами, представленными в п. 4.2.4, где при больших значениях τ падение почти прекратилось. Однако напомним, что в том случае замедление падения было связано с присутствием долгоживущих островов устойчивости в окрестности классических вырожденных торов. В рассматриваемом здесь случае вырожденные торы отсутствуют, соответственно нет и связанного с ними механизма долговременной устойчивости. Доли умеренно локализованных собственных функций спадают гораздо медленнее. Даже при $\tau = 100\pi$ их вклад остается достаточно существенным, что можно рассматривать как проявление динамической локализации.

4.4.4 Транспортные свойства

Обратимся к транспортным свойствам представленной конфигурации рэчета. Для заданной реализации $f(t)$ можно рассчитать поток атомов с помощью формулы

$$J(t) = \frac{1}{t} \int_0^t p_q(t') dt', \quad (4.89)$$

где p_q – квантовомеханическое среднее значение импульса

$$p_q(t) = \int dx \Psi^* \hat{p} \Psi, \quad \hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}. \quad (4.90)$$

Усредняя по реализациям $f(t)$, получаем средний поток

$$\langle J \rangle = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N J^{(n)}. \quad (4.91)$$

где n нумерует реализации. Представленные ниже результаты получены для $N = 100$. Поскольку мы ограничиваем себя случаем глубокой оптической решетки, перенормированная постоянная Планка должна быть малой по сравнению с единицей. При расчетах мы положили $\hbar = 0.1$. Следует отметить, что

транспортные свойства мелкой оптической решетки могут существенно отличаться от описанной выше полуклассической картины [244]. Для каждой реализации возмущения в качестве начального условия была использована случайная суперпозиция когерентных состояний

$$\Psi(t=0) = A \sum_{n=1}^{N_{cs}} \varphi(x_0, p_n), \quad (4.92)$$

$$\varphi(x_0, p_n) = (2\pi)^{-1/4} \Delta_x^{-1/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\Delta_x^2} + \frac{ipn(x-x_0)}{\hbar}},$$

где $x_0 = 0$, $\Delta_x = 0.25$, $N_{cs} = 10^4$, p_n – случайная величина, характеризующаяся гауссовым распределением с нулевым средним и дисперсией 0.25. Такое начальное условие соответствует ансамблю атомов, локализованному в фазовом пространстве в окрестности $x = 0$, $p = 0$.

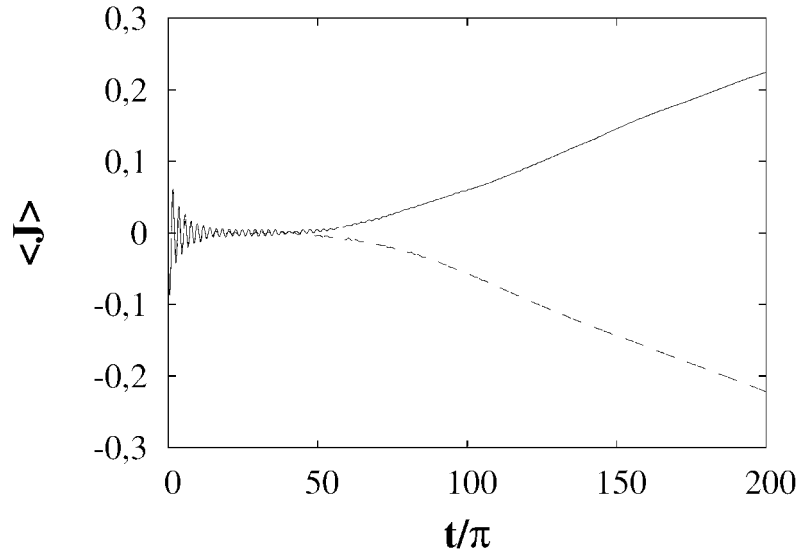


Рисунок 4.19: Зависимость усредненного по ансамблю реализаций потока от времени для $s = -1$ (сплошная линия) и $s = 1$ (штриховая линия). В обоих случаях $\Gamma = 0.4$ [239]

Рисунок 4.19 представляет зависимость среднего потока от времени для $\Gamma = 0.4$. Мы видим, что баллистический поток активируется только по прошествии некоторого переходного времени которое требуется атомам чтобы, во-первых, обрести требуемую для выхода из потенциальных ям энергию, во-вторых, для установления “нужной” асимметрии хаотического слоя по импуль-

су, при котором направление баллистического потока будет определяться параметром s . На малых временах зависимость $\langle J \rangle(t)$ имеет колебательный характер, что обусловлено движением атомов внутри потенциальных ям. Отметим, что кривые, соответствующие $s = -1$ и $s = 1$ симметричны относительно полуоси $\langle J \rangle = 0$, что является свидетельством того, что направление потока задается знаком параметра s .

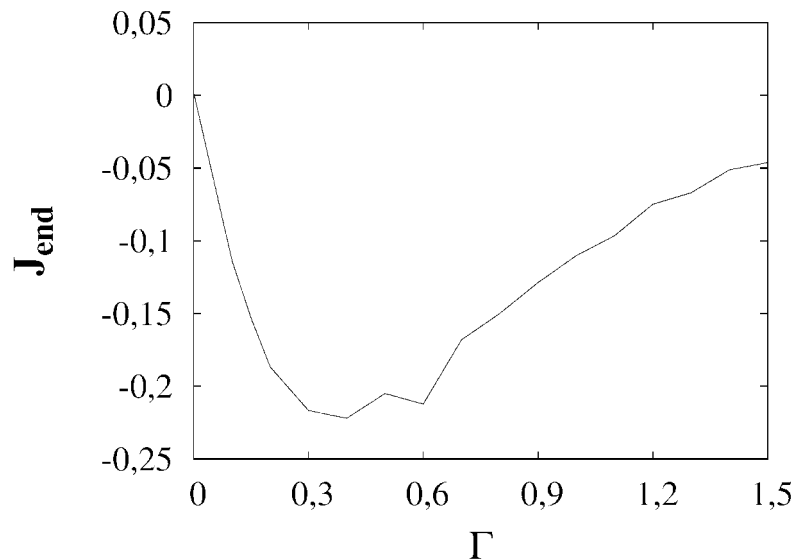


Рисунок 4.20: Зависимость усредненного по ансамблю реализаций потока $J_{\text{end}} = J(t = 200\pi)$ от параметра гармонического шума Γ [239]

Посмотрим как поток изменяется с усилением стохастичности возмущения, которая определяется параметром Γ . Слабый шум предполагает, что просачивание атомов сквозь динамические барьеры в фазовом пространстве будет медленным. С другой стороны, слишком сильный шум приводит к сильным фазовым флуктуациям возмущения, подавляя когерентность между модулирующими сигналами $f(t)$ и $f(t + \Delta)$. Поскольку именно эта когерентность играет ключевую роль в разрушении пространственно-временных симметрий, можно ожидать ослабления направленного транспорта. Из этих соображений следует, что должен быть некоторый промежуточный интервал значений Γ , соответствующий наиболее эффективной генерации направленного транспорта. Чтобы найти этот интервал, численно найдем зависимость усредненного потока при $t = 200\pi$ от Γ . Результат представлен на Рис. 4.20. Как и предполагалось, зависимость $J_{\text{end}}(\Gamma)$ является немонотонной. Наиболее эффективная генерация

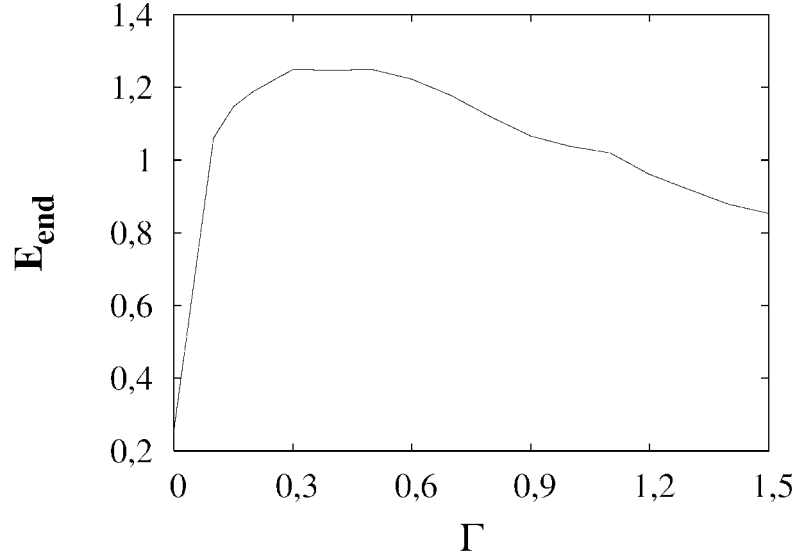


Рисунок 4.21: Усредненная по ансамблю энергия при $t = 200\pi$ как функция параметра Γ [239]

баллистического транспорта происходит при $0.3 < \Gamma < 0.6$. Особо отметим, что в чисто детерминированном случае $\Gamma = 0$ направленный транспорт практически отсутствует. Это указывает на важность роли шума в процессе активации баллистического потока атомов.

Чтобы подчеркнуть связь между возникновением направленного транспорта и разогревом атомов, рассмотрим среднюю энергию, определенную как

$$\langle E \rangle (t) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \int dx \Psi^*(t) \hat{H}^{(n)} \Psi(t), \quad (4.93)$$

где

$$\hat{H}^{(n)} = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + 1 - \cos x + \varepsilon V^{(n)}(x, t)$$

является гамильтонианом, соответствующим n -ой реализации возмущения $V(x, t)$. Зависимость $E_{\text{end}} \equiv \langle E \rangle (t = 200\pi)$ от Γ , продемонстрированная на Рис. 4.21, указывает на то, что диапазон значений Γ , соответствующий наиболее эффективной генерации потока атомов, $0.3 \leq \Gamma \leq 0.6$, одновременно соответствует и наиболее эффективному нагреву. Немонотонная зависимость от уровня шума указывает на важность факторов нагрева, не связанных с шумом. В нашем случае таким фактором является классический резонанс 1:1, влияние которого ослабевает с ростом Γ . Таким образом, мы видим, что наи-

более оптимальная активация транспорта возникает тогда, когда резонансный и диффузионный механизмы нагрева атомов конструктивно дополняют друг друга. Отметим, что E_{end} при $\Gamma > 0.6$ убывает значительно медленнее, чем $|J_{\text{end}}|$ (сравните с Рис. 4.20). Это следует понимать как следствие частичного шумоиндуцированного восстановления пространственно-временных симметрий из-за ослабления корреляций между значениями гармонического шума $f(t)$ и $f(t + \Delta)$.

4.5 Заключение к главе 4

В данной главе представлен новый подход, позволяющий исследовать проявления классической устойчивости на конечном времени, существующих в системах со случайным нестационарным возмущением, в квантовой или волновой динамике. Этот подход основан на построении оператора эволюции на конечном времени (или конечном расстоянии, если говорить о распространении волн), с последующим статистическим анализом его спектра. Представлены методы статистического анализа спектра, указаны их недостатки и преимущества. В частности, показано, что анализ собственных значений с привлечением распределения Берри-Робника может привести к неточным результатам в оценке размеров областей устойчивости. Более того, при наличии бифуркаций периодических орбит, анализ собственных значений не только не обеспечивает достаточно точных количественных оценок, но и не дает верного качественного описания вследствие неуниверсальности спектральной статистики. В этом смысле куда более надежным является статистический анализ собственных функций оператора эволюции на конечном времени. Важным достоинством представленного подхода является возможность сопоставления спектральных свойств оператора эволюции на конечном времени с его классическим аналогом – одношаговым отображением Пуанкаре. Это позволяет дать “детерминированную” трактовку наступления хаоса при воздействии случайного возмущения. В качестве примеров рассмотрено две задачи: распространение звука в случайно-неоднородном подводном звуковом канале и динамика атомов в оптической решетке. В частности, показано, что слаборасходящиеся акустические пучки в Японском море порождают долгоживущие зоны устойчивости в фазовом пространстве, кото-

рые, в свою очередь, проявляются в волновой динамике. Это позволяет объяснить высокую стабильность акустических сигналов, распространяющихся под малыми углами к оси канала, что было обнаружено в экспериментах [121, 122].

Самостоятельную ценность имеет результат раздела 4.4, где была представлен метод генерации направленного потока атомов при воздействии слабого возмущения, образованного суперпозицией двух дополнительных оптических решеток с широкополосной амплитудной модуляцией. Показано, что данный метод обеспечивает создание направленного атомного транспорта даже при минимальных начальных энергиях атомов.

Результаты, представленные в этой главе, опубликованы в работах [36, 55, 209–211, 239] в соавторстве с М.Ю. Улейским, М.В. Будянским, С.В. Пранцем, Л.Е. Коньковым, П.С. Петровым, А.Л. Вировлянским и Г.М. Заславским.

Глава 5

Двухкомпонентный конденсат Бозе-Эйнштейна с линейной межкомпонентной связью, погруженный в оптическую решетку

5.1 Краткий обзор проблемы

До сих пор наше внимание было приковано к квантовым или волновым системам, динамика которых описывается линейным уравнением Шредингера. Такие системы могут демонстрировать хаотическое поведение в классическом пределе, в то время как их полноволновое описание предполагает интегрируемое и устойчивое по Ляпунову движение. При появлении нелинейных членов в уравнении Шредингера, оно сохраняет интегрируемость только в отдельных частных случаях потенциалов. Таким образом, возникает возможность для хаотической волновой динамики [245]. В оптике появление нелинейного члена может быть связано, например, с эффектом Керра. Если же мы говорим о квантовых системах, аналогом нелинейного уравнения Шредингера является уравнение Гросса-Питаевского, в котором нелинейный член описывает взаимо-

действие между частицами в приближении среднего поля. Само по себе приближение среднего поля можно построить только для бозе-частиц. Решение уравнения Гросса-Питаевского является одним из главных подходов для описания конденсата Бозе-Эйнштейна (БЭК), состоящего из большого числа атомов. Если конденсат Бозе-Эйнштейна представляет собой смесь атомов двух видов, то динамика такой смеси описывается двумя связанными уравнениями Гросса-Питаевского, каждое из которых описывает динамику отдельной компоненты смеси.

Двухкомпонентные конденсаты Бозе-Эйнштейна с линейной связью (связью Раби) между компонентами недавно стали объектом значительного интереса, связанного с их нетривиальными свойствами. К числу наиболее интересных наблюдаемых в них явлений можно отнести самозахват осцилляций Раби, π -колебания [246], бифуркации осцилляций Раби [247], переходы между смешивающимся и несмешивающимся режимами, обусловленные связью Раби [248, 249]. Динамика таких смесей имеет много общего с джозефсоновскими переходами, поэтому их часто называют переходами Бозе-Джозефсона [246, 250]. Переходы Бозе-Джозефсона рассматриваются как перспективное средство для создания кубитов [251] и высокоточных атомных часов [252].

Обычно для создания перехода Бозе-Джозефсона использовался один из двух путей. Первый – загрузка конденсата в ловушки, образованные оптическим потенциалом с двумя ямами. Тогда фракции конденсата, локализованные в каждой из двух ловушек, можно рассматривать как отдельные компоненты. В этом случае в роли линейной связи между компонентами выступает туннелирование между потенциальными ямами. Второй путь заключается в использовании конденсата, состоящего из атомов одного вида, но принадлежащих двум разным подуровням сверхтонкой структуры. В таком случае линейная связь между компонентами обеспечивается внешним микроволновым электромагнитным полем, частота которого настраивается в резонанс с переходом между состояниями сверхтонкой структуры. В обоих этих случаях ансамбли атомов хорошо локализованы в оптических ловушках, поэтому разбегание атомов в пространстве является незначительным. Устранение связанной с этим степени свободы позволяет описать динамику межуровневых переходов посредством классических уравнений движения, соответствующих гамильтониану маятни-

кового вида [246, 247]. Между тем, имеет смысл исследовать случай, когда смесь из двух связанных компонент, соответствующих разным состояниям сверхтонкой структуры, помещена в оптическую решетку. При этом высота решеточного потенциала должна быть сравнительно небольшой, не более 10 энергий отдачи фотона. Это сделает возможным распространение конденсата вдоль решетки. Такую систему можно рассматривать как некую разновидность цепочки переходов Бозе-Джозефсона [253]. Она представляется многообещающей с точки зрения создания крупномасштабных перепутанных квантовых состояний [254, 255]. В то же время известно, что взаимодействие между внешними и внутренними атомными степенями свободы может существенно усложнить динамику даже в отсутствие взаимодействия между атомами. В полуклассическом режиме данная система проявляет целый ряд нетривиальных эффектов, таких как хаотические осцилляции Раби [256], хаотический атомный транспорт и фракталы [257–260], аномальная диффузия и полеты Леви [261–263], синхронизация между внутренними и внешними степенями свободы [264]. Детальная теория хаотического атомного транспорта в поле стоячей лазерной волны представлена в работах [260, 265, 266]. Очевидно, что присутствие межатомного взаимодействия способно еще более усложнить физические свойства системы, сделав их еще более разнообразными.

5.2 Общая теория

5.2.1 Основные уравнения

Как было отмечено выше, в приближении среднего поля динамика двухкомпонентного конденсата Бозе-Эйнштейна, компоненты которого соответствуют разным состояниям сверхтонкой структуры для атомов одного вида, описывается парой связанных уравнений Гросса-Питаевского

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x^2} + U(x) \Psi_1 + g_1 |\Psi_1|^2 \Psi_1 + g_{12} |\Psi_2|^2 \Psi_1 - \frac{\hbar \Omega}{2} \Psi_2, \\ i\hbar \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial x^2} + U(x) \Psi_2 + g_2 |\Psi_2|^2 \Psi_2 + g_{12} |\Psi_1|^2 \Psi_2 - \frac{\hbar \Omega}{2} \Psi_1 + \delta \Psi_2, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – макроскопические волновые функции первой и второй компонент, соответственно, $U(x)$ – решеточный оптический потенциал, g_1 и g_2 – коэффициенты нелинейности, обусловленные взаимодействием между атомами, принадлежащими одной компоненте смеси, g_{12} – коэффициент нелинейности, характеризующий взаимодействие между атомами, принадлежащими разным компонентам, Ω – частота Раби, характеризующая переходы между состояниями сверхтонкой структуры под влиянием внешнего электромагнитного поля и δ – расстройка резонанса между внешним полем и межуровневым переходом. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай точного резонанса $\delta = 0$. Система (5.1) ранее рассматривалась в работах [267, 268] в контексте спонтанного нарушения симметрии при формировании солитонов.

В отсутствие внешнего поля $\Omega = 0$, характер пространственной динамики конденсата зависит от высоты оптического потенциала и параметров нелинейности. Высота потенциала определяет интенсивность туннелирования между узлами оптической решетки. В режиме сильной нелинейности возможно подавление расплывания вследствие самозахвата [269, 270]. Кроме того, динамика двухкомпонентной смеси с расталкивающим межатомным взаимодействием (положительные параметры нелинейности) качественно зависит от того, смешиваются ли компоненты смеси, или нет. Условие несмешивания можно сформулировать в виде неравенства

$$g_{12}^2 > g_1 g_2, \quad (5.2)$$

т. е. межкомпонентное расталкивание должно преобладать над внутрикомпонентным. Включение внешнего электромагнитного поля, вызывающее осцилляции Раби, способно перевести смесь из смешивающегося режима в несмешивающийся и наоборот [248, 249]. В экспериментах, каждый из параметров нелинейности, g_1 , g_2 и g_{12} может быть изменен с помощью резонанса Фешбаха. Поскольку мы имеем дело с атомами одного вида, можно положить $g_1 = g_2 \equiv g$.

Если высота решеточного оптического потенциала составляет не менее нескольких энергий отдачи фотона, можно существенно упростить задачу с помощью приближения сильной связи [271–273]. В этом приближении предполагается, что все атомы находятся в наинизшей, т. е. первой, энергетической зоне. Тогда мы можем разложить волновые функции Ψ_1 и Ψ_2 по состояниям

Ванье первой зоны, вычисляющимся при $\Omega = 0$. При использовании такого приближения могут возникнуть трудности, если выполняется критерий (5.2). В несмешивающемся режиме, может происходить фрагментация конденсата внутри отдельных узлов решетки вследствие размежевания компонент [274, 275]. В результате, расположения волновых пакетов внутри узлов может стать несимметричным. В этом случае их нельзя разложить только по состояниям Ванье первой зоны. Принимая это во внимание, а также учитывая то обстоятельство, что любой из параметров нелинейности может быть должным образом подстроен за счет резонанса Фешбаха, мы положили $g_{12} = 0$, что предполагает отсутствие расталкивания между компонентами в отсутствие связи Раби. Таким образом, уравнения (5.1) сводятся к системе ОДУ

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_n}{dt} &= -\frac{J}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}) + g|a_n|^2 a_n - \frac{\hbar\Omega}{2}b_n, \\ i\hbar \frac{db_n}{dt} &= -\frac{J}{2}(b_{n-1} + b_{n+1}) + g|b_n|^2 b_n - \frac{\hbar\Omega}{2}a_n, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где a_n и b_n – комплексные амплитуды волновой функции конденсата на узле n , J – коэффициент туннелирования между соседними узлами. Далее в данной работе будет рассматриваться нормировка переменных, соответствующая $\hbar = 1$.

Первое известное нам исследование подобных систем – это работа [276], где были найдены некоторые частные аналитические решения. Помимо этого, система (5.3) для случая отрицательных значений g использовалась для описания распространения света в связанных оптических волноводах [277]. Похожие модели также рассматривались в работах [278, 279].

5.2.2 Случай $J = 0$

Прежде, чем перейти к подробному анализу системы (5.3), рассмотрим случай очень глубокой оптической решетки, когда туннелирование практически отсутствует, т. е. $J = 0$. Тогда атомы не имеют возможности переходить с узла на узел и населенность отдельного узла

$$\rho_n = |a_n|^2 + |b_n|^2 \quad (5.4)$$

не зависит от времени. Делая подстановку

$$a = |a_n|e^{i\alpha_n}, \quad b = |b_n|e^{i\beta_n} \quad (5.5)$$

в (5.3) и проведя серию достаточно простых преобразований, мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \dot{z}_n &= \sqrt{1 - z_n^2} \sin \varphi_n, \\ \dot{\varphi}_n &= \Lambda_n z_n + \frac{z_n}{\sqrt{1 - z_n^2}} \cos \varphi_n, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где точка означает дифференцирование по перенормированному времени $t' = \Omega t$,

$$z_n = \frac{|a_n|^2 - |b_n|^2}{\rho_n} \quad (5.7)$$

есть нормированная разность населенностей подуровней сверхтонкой структуры, соответствующая n -му узлу решетки,

$$\varphi_n = \arg a_n b_n^* \equiv \alpha_n - \beta_n, \quad (5.8)$$

$\Lambda_n = g\rho_n/(\hbar\Omega)$. Уравнения (5.6) выводятся из классического гамильтониана

$$H(z_n, \varphi_n) = \frac{\Lambda_n z_n^2}{2} - \sqrt{1 - z_n^2} \cos \varphi_n. \quad (5.9)$$

Это выражение очень похоже на гамильтониан нелинейного маятника. Главное отличие — это присутствие множителя $(1 - z_n^2)^{1/2}$. Его зависимость от z_n порождает зависимость структуры фазового портрета системы (5.6) от параметра Λ . Если $\Lambda_n < 1$, т. е. в случае слабой нелинейности, фазовый портрет содержит семейство особых точек типа центр $z_n = 0$, $\varphi_n = \pi m$, $m = 1, 2$. Каждая траектория (5.6) представляет собой вращение в фазовом пространстве вокруг одной из особых точек [247]. Это соответствует колебаниям разности населенностей z_n с нулевым средним по времени. Данный режим можно назвать режимом Раби [280].

Если $\Lambda_n > 1$, то особая точка $z_n = 0$, $\varphi_n = \pi$ подвергается бифуркации вилки, превращаясь в три особые точки, две из которых — центры, а третья — седло. Седловая точка располагается при $z_n = 0$, $\varphi_n = \pi$, т. е. на том же самом месте, что и центр до бифуркации. Новые особые точки типа центр располагаются при $z_n = \pm \sqrt{1 - \Lambda_n^{-2}}$, $\varphi_n = \pi$. Каждая из них окружена областью,

в которой колебания разности населенностей имеют ненулевое среднее по времени, т. е. одна компонента доминирует над другой. Таким образом, возникает режим, который можно назвать *внутренним самозахватом*. Внутренний самозахват ранее наблюдался как для взаимодействующих [247], так и для не взаимодействующих [281] атомов. Дальнейший рост коэффициента нелинейности g смещает новые особые точки типа центр к предельным значениям разности населенностей, т. е. $z_n = \pm 1$, что сопровождается расширением области фазового пространства, соответствующей внутреннему самозахвату.

5.3 Пространственная динамика двухкомпонентной смеси БЭК в оптической решетке

Для умеренных значений высоты оптического потенциала, $U_0 \sim 10$ энергий отдачи фотона или меньше, туннелирование между узлами решетки становится достаточно значительным и его учет становится необходимым. Туннелирование приводит к расплыванию атомного волнового пакета вдоль решетки, что способствует уменьшению локальной плотности БЭК. Однако, если энергия взаимодействия

$$E_{\text{int}} = g \sum_n (|a_n|^4 + |b_n|^4) \quad (5.10)$$

превышает некоторое пороговое значение, может возникнуть пространственный самозахват, когда расплывание конденсата практически прекращается вследствие образования устойчивого солитоноподобного состояния [270]. Пространственное расплывание также зависит от формы волнового пакета, в частности, его ширины и пространственной модуляции [269, 282].

Ниже мы будем рассматривать масштабирование переменных, соответствующее $J = 2$. Для того, чтобы исследовать влияние пространственной модуляции, рассмотрим начальное условие следующего вида:

$$a_n(t = 0) = A \exp \left[-\frac{n^2}{4\sigma^2} \right] \cos \pi p n, \quad b_n = 0, \quad (5.11)$$

где $p \in [0 : 2]$, $-N \leq n \leq N$, $\sigma = 10$, а множитель A определяется условием нормировки

$$\sum_{n=-N}^N |a_n|^2 = 1. \quad (5.12)$$

Вычисления, результаты которых представлены ниже, проводились с $N = 5000$. Для того, чтобы сравнить поведение конденсата при различных режимах нелинейности, удобно зафиксировать начальное значение энергии взаимодействия E_{int} , а затем вычислить соответствующее значение g по формуле

$$g = \frac{E_{\text{int}}}{\sum_{n=-N}^N |a_n(t=0)|^4}. \quad (5.13)$$

В отсутствие связи Раби ($\Omega = 0$), динамика волнового пакета качественно зависит от параметра p , описывающего фазовую конфигурацию начального состояния [269, 282]. Случай $p = 0$ соответствует конфигурации с одинаковыми фазами на всех узлах решетки, в то время как $p = 1$ предполагает последовательность фаз 0 и π в шахматном порядке. Случай $p = 0.5$ также означает последовательность фаз в шахматном порядке, однако узлы с фазами 0 и π разделяются незаполненными узлами. Если ширина волнового пакета составляет, по меньшей мере, 10 узлов решетки, наиболее сильное расплывание возникает в отсутствие пространственной модуляции начального состояния, т. е. при $p = 0$ или $p = 2$, тогда как наиболее сильный самозахват возникает при $p = 0.5$ или $p = 1.5$. Промежуточный случай $p = 1$ предполагает наиболее выгодные условия для образования бризеров [269].

Для количественной оценки расплывания БЭК можно использовать дисперсию по координате

$$\sigma = \sqrt{\sum_n n^2 \rho_n - \left(\sum_n n \rho_n\right)^2} \quad (5.14)$$

и число главных компонент

$$\Gamma = \frac{1}{\sum_n \rho_n^2}, \quad (5.15)$$

где ρ_n определяется по формуле (5.4). Число главных компонент приближенно равно числу эффективно заселенных узлов решетки. Левая панель рисунка

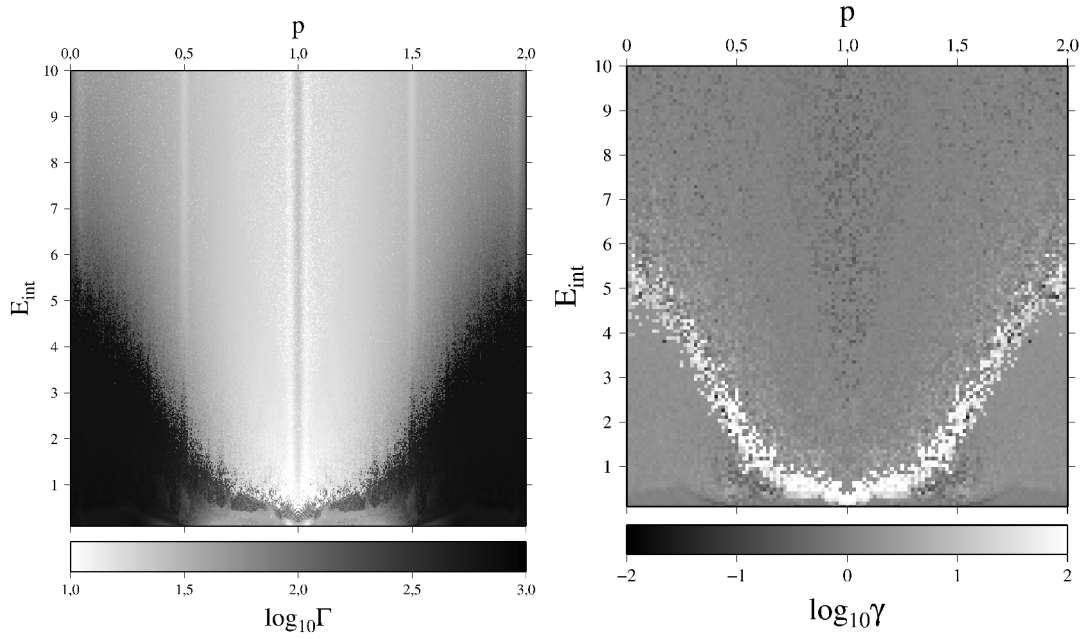


Рисунок 5.1: Слева: карта числа главных компонент при $t = 1000\pi$. Справа: карта соотношений между числом главных компонент, вычисленным при $\Omega = 1$, и аналогичным числом, вычисленным при $\Omega = 0$. Снизу приведены цветовые шкалы для обоих рисунков [283]

5.1 представляет карту числа главных компонент при $t = 1000\pi$, изображенного с помощью цветовой модуляции. В качестве координат карты выступают параметр p и энергия взаимодействия E_{int} . На карте наблюдается резкий контраст между темными областями, соответствующими быстрому расплыванию конденсата, и светлой областью, где расплывание является слабым и сохраняется достаточно высокая концентрация конденсата. С увеличением E_{int} светлая область становится шире, отражая нарастающую тенденцию к самозахвату. Она включает в себя хорошо заметные вертикальные линии, соответствующие $p = 0.5, 1.0$ и 1.5 . Вертикальные линии при $p = 0.5$ и 1.5 выглядят несколько светлее, чем их окружение, и соответствуют пониженному расплыванию, в то время как вертикальная линия $p = 0$ выглядит несколько темнее своего окружения и соответствует повышенному расплыванию. Данная картина качественно согласуется с теоретическими предсказаниями работы [269]. Для того, что сравнить насколько изменится картина при включении связи Раби, мы представим на правой панели Рис. 5.1, карту величины

$$\gamma = \frac{\Gamma(\Omega = 1, t = 1000\pi)}{\Gamma(\Omega = 0, t = 1000\pi)}, \quad (5.16)$$

т. е. соотношений между числами главных компонент, вычисленными при $\Omega = 1$ и $\Omega = 0$. Если связь Раби приводит к усилению (ослаблению) расплывания конденсата, тогда величина γ больше (меньше) единицы. Как следует из рисунка, наиболее яркая разница наблюдается в окрестности границы, разделяющей темную и светлую области на левой панели. Это связано с тем, что связь Раби несколько уширяет область параметров, соответствующих быстрому расплыванию. Данное явление может рассматриваться как ослабление взаимодействия между атомами, принадлежащими одному состоянию. Действительно, присутствие связи Раби приводит к осцилляциям энергии взаимодействия, в результате чего ее усредненное по времени значение уменьшается. С другой стороны, мы видим облако темных точек в области, соответствующей $p \simeq 0$ и большим значениям E_{int} . Это означает, что в режиме сильной нелинейности связь Раби может усиливать локализацию волнового пакета.

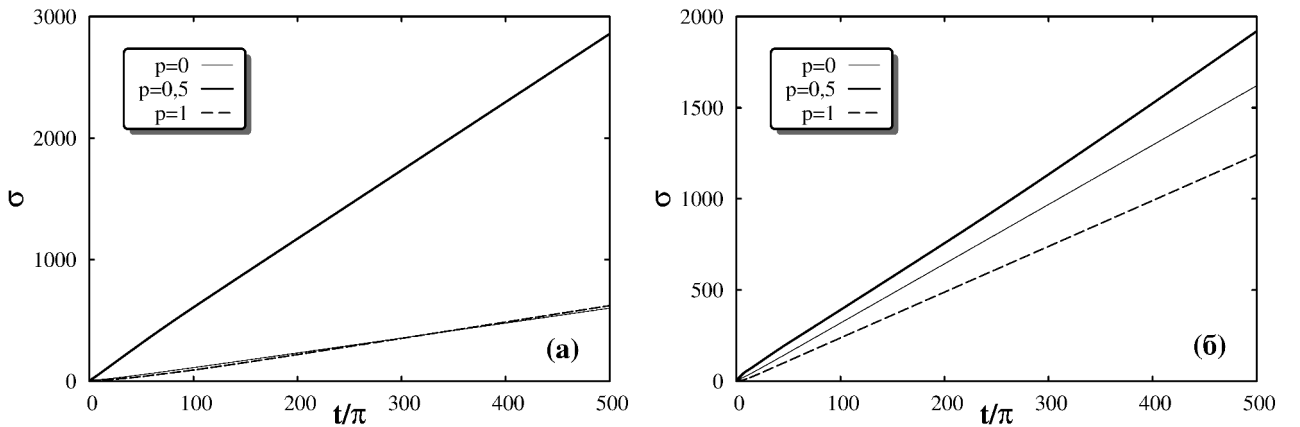


Рисунок 5.2: Дисперсия координаты σ как функция времени для различных значений энергии взаимодействия: (а) $E_{\text{int}} = 0.1$, (б) $E_{\text{int}} = 1$. Во всех случаях $\Omega = 1$ [283]

Рисунки 5.2 и 5.3 иллюстрируют процесс расплывания волнового пакета при различных значениях энергии взаимодействия. В частности, мы рассмотрим случаи $E_{\text{int}} = 0.1$ и $E_{\text{int}} = 1$, к которым ниже будем обращаться как режимам слабой и умеренной нелинейности, соответственно. Рассмотрим начальные условия с $p = 0, 0.5$ и 1 . Начнем с Рис. 5.2, представляющего временную зависимость дисперсии по координате. В режиме слабой нелинейности, $E_{\text{int}} = 0.1$, дисперсия растет приблизительно линейно для всех p (см. Рис. 5.2(а)), что соответствует баллистическому расплыванию. Отметим, что скорость расплывания

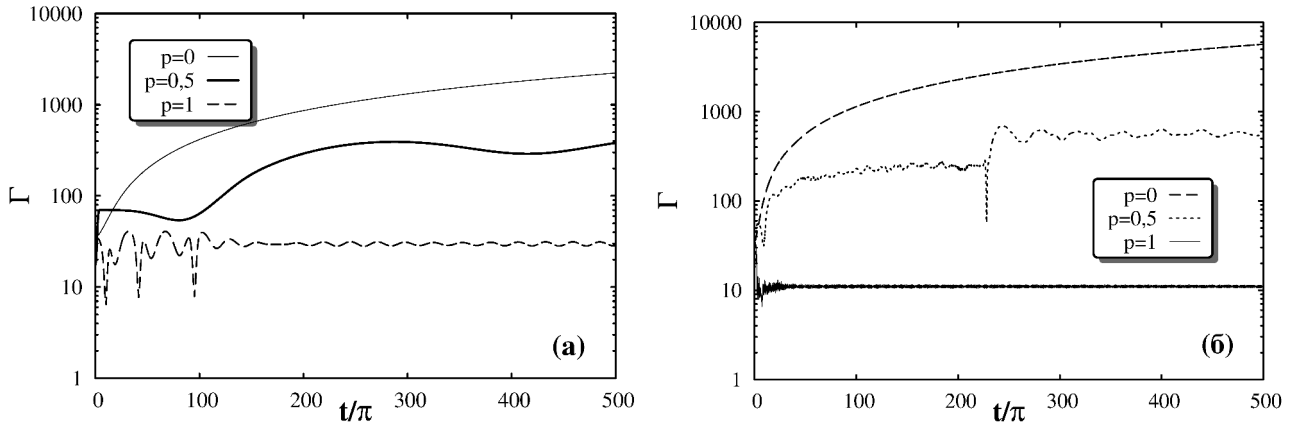


Рисунок 5.3: Число главных компонент как функция времени для различных значений энергии взаимодействия: (а) $E_{\text{int}} = 0.1$, (б) $E_{\text{int}} = 1$. Во всех случаях

$$\Omega = 1 \text{ [283]}$$

в случае $p = 0.5$ существенно выше, чем в случае $p = 0$ и $p = 1$. Баллистическое расплывание наблюдается и в режиме умеренной нелинейности, $E_{\text{int}} = 1$, однако разница между различными значениями p становится не столь явной (см. Рис. 5.2(б)).

Эволюция числа главных компонент представлена на Рис. 5.3. Мы видим, что число эффективно заселенных узлов для начального состояния $p = 1$ слабо меняется со временем при обоих режимах нелинейности. Это является признаком пространственного самозахвата и образования бризеров. Обратная ситуация возникает в случае $p = 0$, когда наблюдается наиболее быстрый рост числа главных компонент, что отражает наиболее сильную тенденцию к диффузионной динамике. В случае $p = 0.5$ быстрый рост σ в режимах слабой и умеренной нелинейности сопровождается достаточно слабым ростом числа главных компонент. Это указывает на образование локализованных бризеров, которые двигаются баллистически вдоль оптической решетки.

5.4 Внутренняя динамика

5.4.1 Режим слабой нелинейности

Рассмотрим как пространственная динамика смеси влияет на осцилляции Раби. Для этого исследуем поведение полной разности населенностей

$$Z = \sum_n \rho_n z_n = \sum_n |a_n|^2 - \sum_n |b_n|^2. \quad (5.17)$$

Начнем с режима слабой нелинейности. Рисунок 5.4 иллюстрирует зависимость Z от времени для $p = 0$ и $p = 1$. В обоих случаях Z демонстрирует осцилляции, характерные для режима Раби. В случае $p = 0$ эти осцилляции являются практически полностью когерентными, а их амплитуда близка к максимуму. Это означает, что связь Раби обеспечивает полное и синхронное превращение компонент смеси друг в друга. Такое же поведение наблюдается в случае $p = 0.5$ (не представлено на рисунке). В случае $p = 1$ наблюдается качественно иная ситуация – амплитуда осцилляций Z периодически меняется со временем, как показано на Рис. 5.4(б). Природа такого различия вытекает из различий в пространственной динамике. В случае $p = 0$ быстрое расплывание волнового пакета сопровождается быстрым ростом числа заселенных узлов решетки. Отсюда следует, что быстро уменьшается локальная плотность конденсата и, в результате, межатомное взаимодействие становится несущественным. Тогда мы можем пренебречь нелинейными членами в уравнениях (5.3), что позволяет разделить внутреннюю и внешнюю степени свободы. Возможность такого разделения предполагает, что все узлы решетки демонстрируют синхронные осцилляции Раби. В случае $p = 1$ рост числа заселенных узлов является достаточно слабым (см. Рис. 5.3(а)) и локальная плотность конденсата остается в процессе эволюции высокой. Данное обстоятельство связано с формированием двух отдельных пар бризеров. Каждая пара состоит из одинаковых бризеров, расположенных симметрично относительно центра начального состояния $n = 0$. Пары отличаются между собой плотностью конденсата. Как следует из результатов п. 5.2.2, это предполагает различную степень ангармоничности осцилляций Раби и, соответственно, разные частоты этих осцилляций. В результате,

Z меняется со временем как сумма двух гармонических функций с разными частотами.

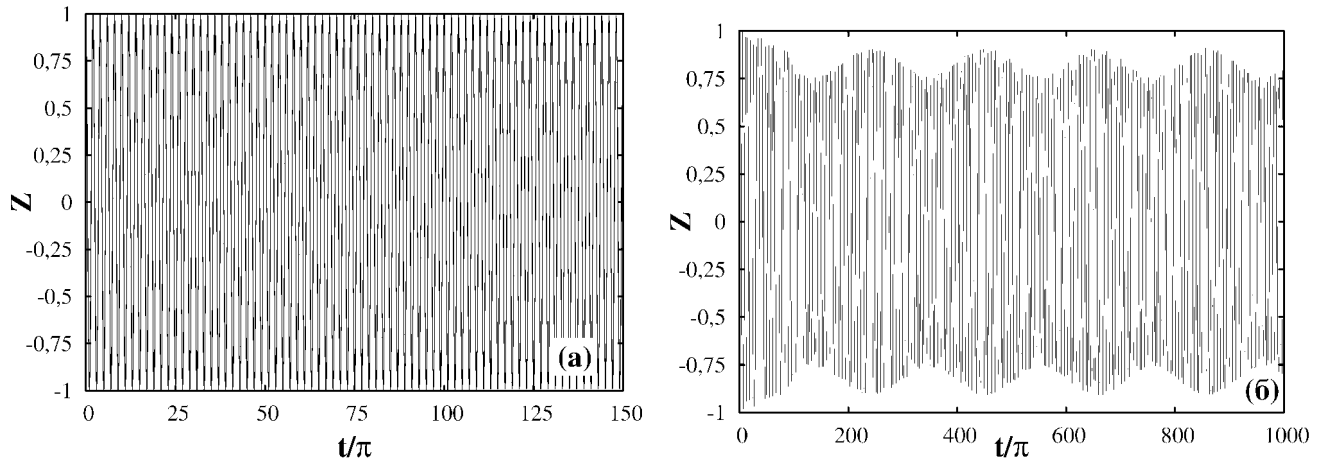


Рисунок 5.4: Полная разность населенностей как функция времени в режиме слабой нелинейности $E_{\text{int}} = 0.1$. (а) $p = 0$, (б) $p = 1$ [283]

5.4.2 Режим умеренной нелинейности

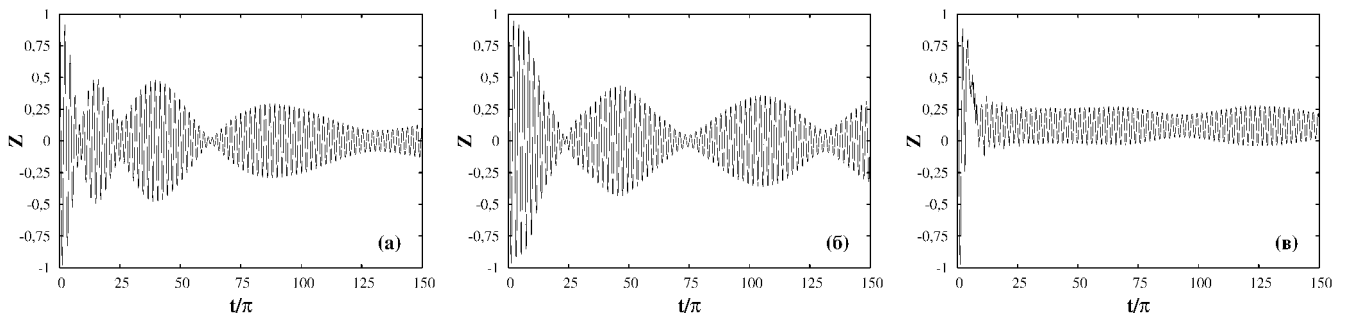


Рисунок 5.5: Разность населенностей как функция времени в режиме умеренной нелинейности $E_{\text{int}} = 1$. (а) $p = 0$, (б) $p = 0.5$, (в) $p = 1$ [283]

Увеличение параметра нелинейности в (5.3) приводит к усилению ангармоничности осцилляций Раби. Поскольку степень ангармоничности зависит от локальной плотности конденсата, частоты осцилляций на разных узлах решетки, как правило, не совпадают. Эти несовпадения разрушают синхронизацию осцилляций Раби. Из этого можно ожидать, что временная зависимость полной разности населенностей Z должна представлять собой суперпозицию множества независимых колебаний, соответствующих разным узлам решетки, а максимальная амплитуда осцилляций Z должна быть существенно меньше, чем в режиме слабой нелинейности.

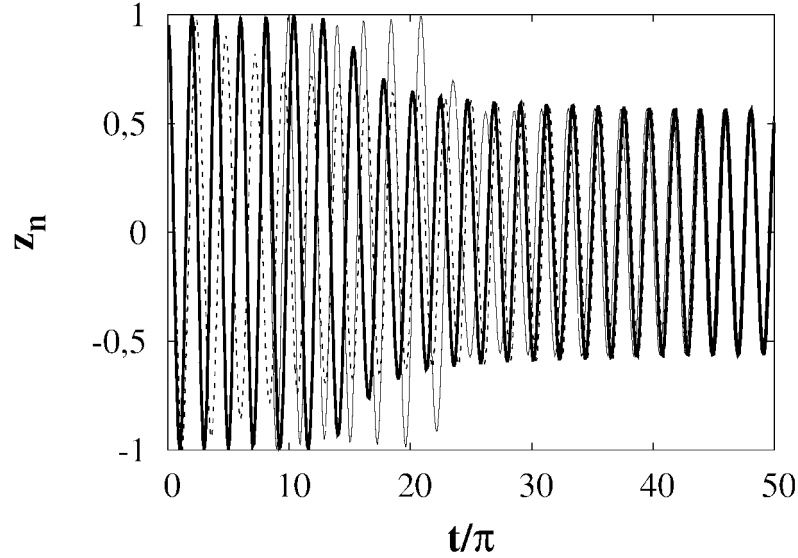


Рисунок 5.6: Синхронизация осцилляций Раби, соответствующих узлам решетки $n = 0$ (штриховая линия), $n = 30$ (толстая сплошная линия) и $n = 50$ (тонкая сплошная линия) [283]

Однако, если нелинейность является недостаточно сильной, значительная часть конденсата, находящаяся вблизи центра начального состояния, может сохранить способность к синхронизации. В результате этого возникает обширная область с когерентными осцилляциями Раби. Этот режим реализуется в случае начального состояния с $p = 0$ (см. Рис. 5.5(a)). Поведение разности населенностей на отдельных узлах показано на Рис. 5.6. На нем мы видим, что по прошествии некоторого времени внутренняя динамика на узлах полностью синхронизируется. Фазовые портреты в плоскости $z_n - \varphi_n$, построенные для отдельных узлов решетки, находящихся внутри области синхронизации, являются очень похожими друг на друга и выглядят так, как это показано на Рис. 5.7. Главная особенность этих портретов – это наличие предельного цикла, расположение которого в фазовом пространстве практически совпадает для большинства синхронизированных узлов. Само по себе появление предельного цикла в данной системе может вызвать некоторое удивление. Действительно, предельный цикл может существовать только в диссипативных системах, в то время как система уравнений (5.3) является гамильтоновой. Соответствующий гамильтониан выглядит следующим образом:

$$H = E_{\text{kin}} + E_{\text{int}} + E_{\text{Rabi}}, \quad (5.18)$$

где E_{kin} и E_{Rabi} – кинетическая энергия и энергия Раби, соответственно,

$$E_{\text{kin}} = -\frac{J}{2} \sum_n (a_n^* a_{n+1} + b_n^* b_{n+1} + \text{к. с.}), \quad (5.19)$$

$$E_{\text{Rabi}} = -\Omega \sum_n (a_n^* b_n + \text{к. с.}). \quad (5.20)$$

В действительности, никакого парадокса здесь конечно же нет. Фазовый портрет, изображенный на Рис. 5.7, описывает фазовую динамику только по внутренней степени свободы отдельного узла решетки. Различные степени свободы могут обмениваться энергией, отсюда однонаправленная передача энергии от внутренних степеней свободы во внешние может играть ту же роль, что и диссипация. Таким образом, в рассматриваемой системе может возникать синхронизация по типу негамильтоновых систем.

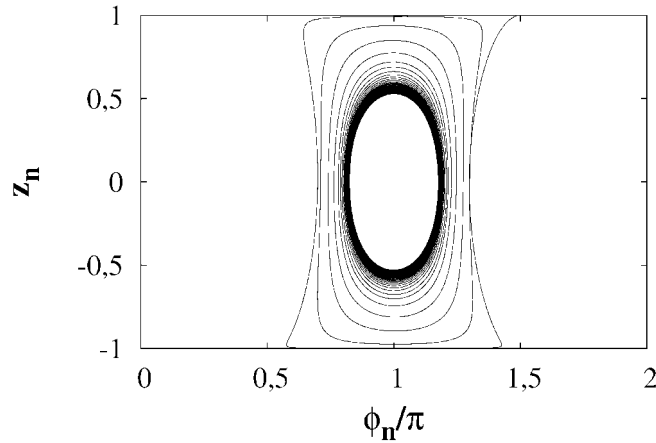


Рисунок 5.7: Типичный фазовый портрет, описывающий осцилляции Раби внутри отдельного узла решетки для $p = 0$. Переменная φ_n определяется по формуле (5.8) [283]

Принимая во внимание, что область синхронизации располагается в центре оптической решетки, мы можем определить критерий синхронизации следующим образом:

$$|z_n(t) - z_0(t)| \leq C, \quad -n' \leq n \leq n'. \quad (5.21)$$

Здесь C – некоторая малая константа. Данный критерий позволяет дать оценку числа синхронизированных узлов

$$N_s = 2n' + 1. \quad (5.22)$$

В численных расчетах мы использовали значение $C = 0.1$. Зависимость N_s от времени представлена на Рис. 5.8. Мы видим, что область синхронизации испытывает сильные пульсации, амплитуда которых нарастает со временем. Само по себе наличие пульсаций означает, что некоторые узлы решетки могут выходить из синхронизированного режима, а потом попасть в него снова. Такое поведение является следствием волнообразных возбуждений внутри области синхронизации. Сравнение Рис. 5.8 и 5.3(б) свидетельствует о том, что рост амплитуды пульсаций связан с ростом числа заселенных узлов решетки. Таким образом, по мере расплывания волнового пакета все больше и больше узлов решетки демонстрируют синхронные осцилляции Раби.

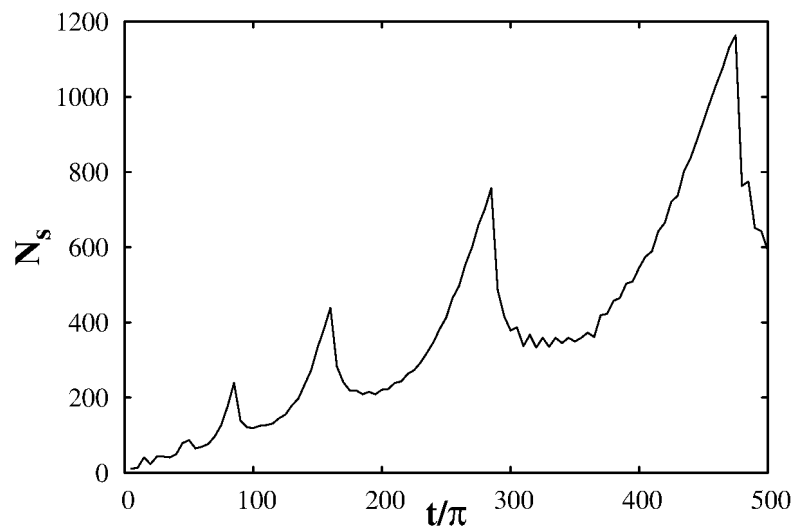


Рисунок 5.8: Число синхронизированных узлов как функция времени [283]

В случае $p = 0.5$, как показано на Рис. 5.5(б), Z демонстрирует затухающие колебания, как и в случае $p = 0$. Однако, в данном случае синхронизация не возникает. Затухание амплитуды осцилляций связано с постепенной расфазировкой осцилляций Раби на разных узлах решетки.

Начальное состояние с $p = 1$ демонстрирует качественно иное поведение по сравнению с $p = 0$ и $p = 0.5$. Как показано на Рис. 5.5(в), полная разность населенностей Z испытывает колебания с ненулевым средним по времени. Другими словами, первая компонента смеси доминирует над второй. Это указывает на возникновение внутреннего самозахвата, который описывался в п. 5.2.2. В отсутствие туннелирования между узлами внутренний самозахват обусловлен бифуркацией особых точек. Однако, можно предположить, что туннелирование будет разрушать когерентность фаз, которая требуется для возникновения

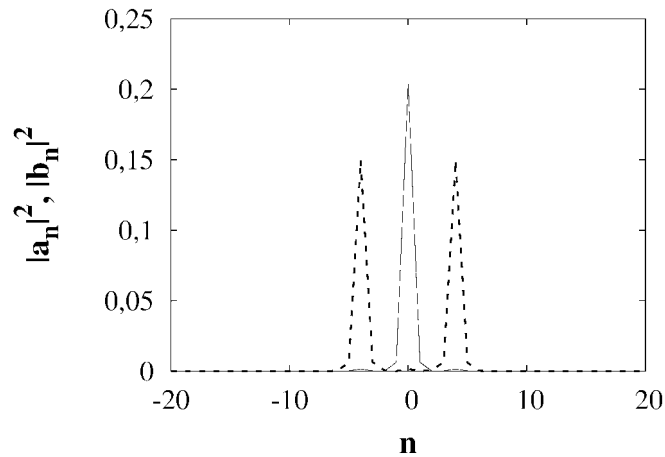


Рисунок 5.9: Квадрат модуля волновой функции, соответствующей первой (штриховая линия) и второй (сплошная линия) компонентам смеси при $t = 500\pi$. Режим умеренной нелинейности, случай $p = 1$ [283]

устойчивых колебаний в окрестности смещенных особых точек типа центр. Из этого следует, что стабильный внутренний самозахват может возникать тогда, когда туннелирование и связанное с ним расплывание волнового пакета являются слабыми. В этом отношении следует напомнить, что начальное состояние с $p = 1$ характеризуется наиболее высокой склонностью к пространственному самозахвату. Другими словами, в этом случае расплывание является подавленным вследствие образования локализованных состояний, таких как солитоны. Примеры таких состояний представлены на Рис. 5.9. Отметим, что изображенные на рисунке состояния отделены друг от друга в пространстве и, таким образом, не оказывают влияния друг на друга. Из этого следует, что внутренняя динамика таких состояний может быть успешно описана в рамках одноузлового приближения, соответствующего уравнениям (5.6).

На рисунке 5.10 изображена зависимость от времени для разностей населенностей на узлах, которые соответствуют центральному (левая панель) и правому (правая панель) локализованным состояниям на Рис. 5.9. В обоих случаях, после некоторого хаотического переходного периода, разность населенностей становится постоянной, указывая на полное доминирование одной из компонент. Это означает, что данные локализованные состояния представляют из себя несмешивающиеся солитоны, состоящие только из одной компоненты. Таким образом, мы видим, что устойчивый внутренний самозахват разности населенностей происходит в присутствии пространственного самозахвата.

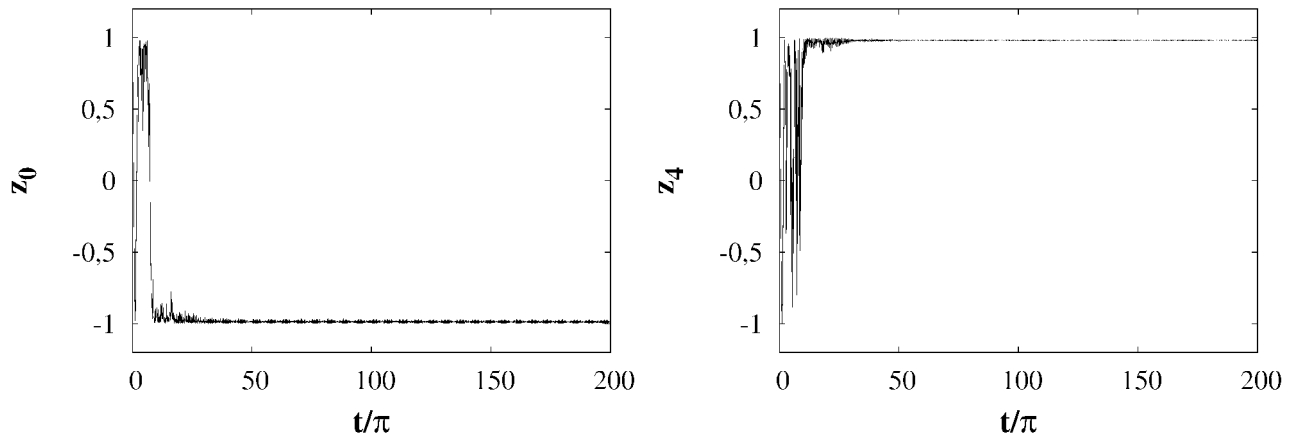


Рисунок 5.10: Зависимость от времени разностей населенностей, соответствующих узлам $n = 0$ (левая панель) и $n = 4$ (правая панель). Режим умеренной нелинейности, случай $p = 1$ [283]

5.5 Заключение к главе 5

В данной главе была рассмотрена динамика двухкомпонентной смеси БЭК, погруженной в оптическую решетку, с линейной связью Раби между компонентами. Главная цель была описать взаимодействие между пространственными и внутренними степенями свободы. Обнаружено, что пространственная динамика смеси контролируется силой межатомного взаимодействия, которое определяет коэффициенты нелинейности в уравнении Гросса-Питаевского, и фазовой конфигурацией начального состояния. Если конденсат испытывает фрагментацию с возникновением локализованных структур типа солитонов или бризеров, тогда полная разность населенностей ведет себя как суперпозиция некогерентных осцилляций Раби с разными амплитудами и частотами. Если нелинейность превышает некоторое пороговое значение, тогда осцилляции Раби, соответствующие отдельным локализованным структурам, исчезают, а сами эти структуры превращаются в несмешивающиеся солитоны, состоящие только из одной компоненты смеси. В этом случае наблюдается одновременно пространственный и внутренний самозахват. Следует отметить, что образование несмешивающихся солитонов происходит после кратковременного хаотического режима и может рассматриваться как некоторый вид самоорганизации.

В случае начального состояния без пространственной модуляции, осцилляции Раби, соответствующие разным узлам оптической решетки, могут быть

синхронизированы. В режиме слабой нелинейности синхронизация является полной, и конденсат при осцилляциях Раби ведет себя как единое целое. В режиме умеренной нелинейности осцилляции Раби на разных узлах имеют отличающиеся частоты, поэтому полная синхронизация разрушается. Однако, в этом случае может возникнуть спонтанная синхронизация осцилляций Раби внутри некоторой обширной части оптической решетки. Показано, что синхронизированные осцилляции Раби соответствуют попаданию на один и тот же предельный цикл на фазовых портретах, описывающих внутреннюю динамику на отдельных узлах решетки. Число синхронизированных узлов сильно осциллирует со временем под влиянием волнообразных возмущений внутри области синхронизации. В среднем число синхронизированных узлов нарастает вследствие расплывания конденсата вдоль оптической решетки.

Основные результаты, представленные в данной главе, получены в соавторстве с М.Ю. Улейским и опубликованы в работе [283]. Отдельные аспекты рассмотренной задачи, в частности, касающиеся области применимости приближения сильной связи, опубликованы в работе [273] в соавторстве с Д.Н. Максимовым, И.Ю. Чесноковым и А.Р. Коловским.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Выявлены особенности воздействия волнообразного возмущения с быстрыми осцилляциями по координате на классическую динамику нелинейной гамильтоновой системы:
 - Показано, что в этом случае может происходить селективное резонансное разрушение устойчивости в определенном интервале энергии частицы. Это явление, вкупе с нарушением симметрий, может быть использовано для разрушения динамических барьеров в фазовом пространстве и генерации направленного баллистического транспорта, при этом требуемая амплитуда возмущения является достаточно малой.
 - Показано, что зарождение хаоса связано с локальным усилением обычного нелинейного резонанса, причем такое усиление может сопровождаться бифуркациями особых точек. В последнем случае возникает сценарий хаоса, качественно отличающийся от сценария Чирикова, связанного с перекрытием резонансов.
 - Если пространственная компонента фазы возмущения подвергается адиабатической модуляции, возможно формирование каналов резонансного ускорения, в которых скорость частицы может увеличиваться на несколько порядков.
 - Теория резонанса с быстрыми пространственными осцилляциями возмущения позволяет описать особенности рассеяния звуковых лучей на мелкомасштабных неоднородностях подводного звукового канала.

2. Исследовано соответствие между лучевой и волновой картинами в присутствии вертикального лучевого резонанса на примере периодически неоднородного подводного звукового канала:

- В присутствии быстрых осцилляций возмущения по глубине происходит селективное увеличение определенных матричных элементов возмущения, что способствует усилению перекачки акустической энергии между соответствующими парами мод. При этом другие межмодовые переходы, напротив, резко ослабляются.
- Обнаружено, что моды Флоке, принадлежащие хаотическому слою, обусловленному вертикальным лучевым резонансом, могут иметь достаточно регулярную структуру несмотря на то, что в лучевом пределе динамика внутри хаотического слоя близка к эргодической диффузии. Данный эффект объясняется конструктивной интерференцией кластеров периодических орбит, являющихся продуктом каскада бифуркаций, которыми сопровождается лучевой вертикальный резонанс.

3. Представлен новый подход, позволяющий исследовать проявления классической устойчивости на конечном времени, существующих в системах со случайным нестационарным возмущением, в квантовой или волновой динамике. Этот подход основан на построении оператора эволюции на конечном времени (или конечном расстоянии, если говорить о распространении волн), с последующим статистическим анализом его спектра и сопоставлении с классическим анализом, основанным на одношаговом отображении Пуанкаре.

- Показано, что анализ собственных значений оператора эволюции на конечном времени с привлечением распределения Берри-Робника может привести к неточным результатам в оценке размеров областей устойчивости. Более того, при наличии бифуркаций периодических орбит, анализ собственных значений не обеспечивает даже правильного качественного описания вследствие неуниверсальности спектральной статистики. В этом смысле значительно более надежным является ста-

тистический анализ собственных функций оператора эволюции на конечном времени.

- Показано, что слаборасходящиеся акустические пучки в Японском море порождают долгоживущие зоны устойчивости в фазовом пространстве, которые, в свою очередь, проявляются в волновой динамике. Это позволяет объяснить высокую стабильность акустических сигналов, распространяющихся под малыми углами к оси канала, что было обнаружено в экспериментах.
- Представлен метод генерации направленного потока атомов при воздействии слабого возмущения, образованного суперпозицией двух дополнительных оптических решеток с широкополосной амплитудной модуляцией. Показано, что данный метод обеспечивает создание направленного атомного транспорта даже при минимальных начальных энергиях атомов.

4. Рассмотрена динамика двухкомпонентной смеси БЭК, погруженной в оптическую решетку, с линейной связью Раби между компонентами.

- Если коэффициент нелинейности, отвечающий за межатомное взаимодействие, превышает некоторое пороговое значение, происходит образование несмешивающихся солитонов, состоящих только из одной компоненты смеси. Образованию несмешивающихся солитонов предшествует кратковременный хаотический режим.
- В случае начального состояния без пространственной модуляции может возникнуть спонтанная синхронизация осцилляций Раби внутри некоторой обширной части оптической решетки. В среднем число синхронизированных узлов нарастает вследствие расплывания конденсата вдоль оптической решетки.

Благодарности

Я выражаю бескрайнюю благодарность своим коллегам и соавторам, с которыми имел счастье работать над получением результатов представленных в данной работе: М.Ю. Улейскому, С.В. Пранцу, Е.Л. Конькову, Е.В. Соседко, А.Л. Вировлянскому, М.В. Будянскому, Р. Чакону, П.С. Петрову, Д.Н. Максимова, И.Ю. Чеснокову и А.Р. Коловскому. Не могу не почтить светлую память одного из самых выдающихся исследователей хаоса Георгия Моисеевича Заславского, в соавторстве с которым была написана книга [36]. Неоценимым подспорьем также для меня была возможность обсудить различные аспекты рассмотренных задач с В.И. Кляцкиным, А.И. Нейштадтом, А.А. Васильевым, К.В. Кошелем, А.О. Максимовым, Д.Л. Шепелянским, С. Флахом, С. Томсо-вицем, М. Оберталером, А.Ф. Садреевым, О.А. Годиным, В.В. Новотрясовым, П. Ашьери. Я безмерно благодарен М.Ю. Улейскому за помощь в создании иллюстраций и форматировании данной диссертации. Очень хочу отметить поддержку всего коллектива лаборатории нелинейных динамических систем ТОИ ДВО РАН во главе с С.В. Пранцем, а также помощь руководства ТОИ ДВО РАН, в частности, директора В.А. Акуличева. Также я хочу поблагодарить свою супругу Татьяну и сына Андрюшу за проявленное терпение и понимание.

Список рисунков

- 1.1 (а) Фазовый портрет, соответствующий универсальному гамильтониану нелинейного резонанса в случае резонанса $5 : 1$. (б) То же самое, но уже в полярных координатах, соответствующих переменным действие–угол [36] 19
- 1.2 Схема эксперимента по дальнему распространению звука в океане [87]. Черные кружки показывают места расположения приемных систем [36] 42
- 1.3 Измеренная и рассчитанные $t - z$ -диаграммы эксперимента АЕТ. Вверху: типичный результат измерения интенсивности звука с динамическим диапазоном 30 дБ. В середине: рассчитанная $t - z$ -диаграмма с учетом внутренних волн. Внизу: то же без внутренних волн. На рисунке вертикальная ось направлена вверх, поэтому глубина океана принимает отрицательные значения [101] . . . 43
- 2.1 Фазовый портрет системы уравнений (2.14) при $F < 0$. Буквы **C** и **S** обозначают эллиптическую и гиперболическую особые точки, соответственно [166] 51
- 2.2 Сечения Пуанкаре, соответствующие случаю без адиабатической фазовой модуляции. Значения частоты: (а) $\nu = 2$, (б) $\nu = 6$, (в) $\nu = 10$ и (г) $\nu = 14$ [166] 55
- 2.3 Сечения Пуанкаре для возмущения (2.36) со следующими значениями параметров: (а) $\varepsilon = 0.02$, $k = 10$, $\nu = 2$, $\alpha = 0.5$, (б) $\varepsilon = 0.02$, $k = 6$, $\nu = 6$, $\alpha = 0$ [174] 59
- 2.4 Сечения Пуанкаре для возмущения (2.40) с параметрами (а) $\alpha_2 = 0$, (б) $\alpha_2 = 1$ [174] 61

2.5	Зависимость среднего отклонения частиц $\langle \Delta x \rangle$ от времени. Соответствующие значения α_2 представлены на вставке в верхнем левом углу (индекс 2 опущен) [174]	63
2.6	Функция $g(x, \tau)$ при $x = -1000$, $x = -20000$, $x = -50000$, and $x = -100000$ [180]	66
2.7	Средняя координата (а), средний импульс (б) и дисперсия импульса как функции времени (в) [180]	68
2.8	Распределение частиц в фазовом пространстве при (а) $t = 1300$, (б) $t = 1400$. Резонансный канал обозначен линией [180]	69
2.9	То же, что и на Рис. 2.8, для моментов времени: (а) $t = 3200$, (б) $t = 5200$, (в) $t = 9200$ [180]	70
2.10	Зависимость среднего импульса (слева) и средней энергии (справа) времени, рассчитанные для модуляции волнового числа по закону (2.55) [181]	71
2.11	Схематическое изображение траектории луча в режиме длительного захвата в резонанс [36]	78
2.12	Расширение резонанса 8 : 1 и зарождение хаотического слоя при содействии вертикального лучевого резонанса с $\lambda_z = 0.6$ км и $\lambda_r = 5$ км; (а) $\varepsilon = 0.0005$, (б) $\varepsilon = 0.001$, (в) $\varepsilon = 0.002$ [36]	82
2.13	Рождение хаотического слоя в окрестности вертикального резонанса при $\lambda_z = 0.2$ км и $\lambda_r = 5$ км; (а) $\varepsilon = 0.0001$, (б) $\varepsilon = 0.0002$, (в) $\varepsilon = 0.00035$, (г) $\varepsilon = 0.0005$ [36]	84
3.1	Профили скорости звука: а) опорный профиль скорости звука, б) профиль при $r = 2.5$ км в присутствии возмущения с $\lambda_r = 5$ км и $\lambda_z = 0.2$ км [184]	87
3.2	Сечения Пуанкаре, рассчитанные для $\lambda_z = 2000$ м (а), $\lambda_z = 1000$ м (б), $\lambda_z = 500$ м (в), и $\lambda_z = 200$ м (г) [195]	89
3.3	Длина цикла траектории луча как функция лучевого параметра E для подводного звукового канала с биэкспоненциальным профилем скорости звука [196]	89

3.4	Эволюция лагранжева многообразия, соответствующего изначально узкоугольному пучку хаотических лучей. Каждый рисунок представляет распределение лучей в фазовом пространстве. На каждом рисунке указано расстояние от источника [36]	91
3.5	Траектории нескольких лучей, принадлежащих хаотическому слою на Рис. 3.2(г) [186]	92
3.6	Зависимость максимального тангенса угла скольжения модового луча от частоты. Жирная линия — частотная зависимость величины k_z/k_0 [186]	97
3.7	Акустическое поле в волноводе при $\lambda_z = 200$ м. Частота сигнала: 200 Гц (левая панель), 50 Гц (центральная панель), 20 Гц (правая панель) [186]	98
3.8	Амплитуды 1-й, 5-й и 9-й мод как функции горизонтальной координаты. Частота сигнала: (а) 200 Гц, (б) 50 Гц [186]	100
3.9	Структура С . Случай $\lambda_z = 2000$ м. Частота сигнала: (а) 20 Гц, (б) 50 Гц, (в) 100 Гц и (г) 200 Гц [195]	103
3.10	Примеры мод Флоке в случае $\lambda_z = 2000$ м, изображенных с помощью функции Хусими. Значения частоты: (а) и (б) $f = 50$ Гц, (в) и (г) $f = 100$ Гц, (д) и (е) $f = 200$ Гц [195]	104
3.11	То же самое, что и на Рис. 3.9, но для $\lambda_z = 1000$ м [195]	106
3.12	Примеры Хусими-образов мод Флоке для случая $\lambda_z = 1000$ м. Значения частоты: (а) $f = 20$ Гц, (б) $f = 50$ Гц, (в) $f = 100$ Гц, (г) $f = 200$ Гц [195]	107
3.13	То же самое, что и на Рис. 3.9 и 3.11, но для $\lambda_z = 500$ м [195]	108
3.14	Примеры Хусими-образов мод Флоке для $\lambda_z = 500$ м и частоты 200 Гц [195]	109
3.15	То же самое, что и на Рис. 3.9, 3.11 и 3.13, но для $\lambda_z = 200$ м [195]	111
3.16	Примеры Хусими-образов мод Флоке для $\lambda_z = 200$ м. Значения частоты: (а) $f = 100$ Гц, $m = 11$, (б), (д) и (е) $f = 200$ Гц, (в) и (г) $f = 50$ Гц [195]	112
3.17	Слева: мода Флоке, принадлежащая хаотическому слою, справа: расположение нулей соответствующей ей функции Хусими. Случай $\lambda_z = 200$ м [184]	112

- 3.18 Расположение периодических орбит с периодом $8\lambda_r = 40$ км в фазовом пространстве: (а) все орбиты данного периода, (б) самые устойчивые из них [195] 113
- 3.19 Зависимость от горизонтальной координаты для среднего действия (а) и дисперсии действия (б), рассчитанных для волнового пакета с помощью функции Хусими. Значения частоты сигнала: 50 Гц (кривая 1), 100 Гц (кривая 2), 500 Гц (кривая 3), 1000 Гц (кривая 4). Кривая 5 представляет результат лучевых вычислений [185]. 115
- 4.1 (а) Невозмущенный профиль скорости звука для модели подводного звукового канала в Японском море, (б) первая эмпирическая ортогональная функция возмущения скорости звука без сглаживания (сплошная линия) и со сглаживанием (пунктирная линия) [211] 131
- 4.2 Длина цикла луча как функция тангенса угла испускания для источника, расположенного на оси подводного звукового канала [211]. 132
- 4.3 Лучевые фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре (4.49) для модели подводного звукового канала в Японском море. Каждый столбец соответствует отдельной реализации возмущения поля скорости звука. Значение шага отображения τ изображено в левом нижнем углу каждого портрета [211] 136
- 4.4 Доля фазового пространства, соответствующего устойчивому движению, как функция τ для различных акустических частот – оценка с помощью распределения Берри-Робника [211] 139
- 4.5 Параметр Релано α как функция τ [211] 140
- 4.6 Распределение собственных функций в плоскости μ - ν , где параметр μ определяется по формуле (4.57) и ν – число главных компонент (4.56). Значения расстояния: (а) $\tau = 10$ км, (б) $\tau = 35$ км, (в) $\tau = 100$ км, (г) $\tau = 350$ км. Частота акустического сигнала 500 Гц [211] 143

- 4.7 То же самое, что и на Рис. 4.6, но для частоты сигнала 100 Гц.
 (а) $\tau = 10$ км, (б) $\tau = 35$ км, (в) $\tau = 100$ км, (г) $\tau = 350$ км [211] 144
- 4.8 Доля собственных функций ОЭКР с сильной локализацией как функция расстояния. В качестве критерия сильной локализации выступает неравенство $\nu \leq 2$ [211] 147
- 4.9 Доля умеренно локализованных собственных функций ОЭКР как функция расстояния. Критерием умеренной локализации является неравенство $\nu \leq 0.1M$, где M – число волноводных мод, распространяющихся в водной толще без существенного контакта с дном [211] 148
- 4.10 Примеры фазовых портретов, построенных с помощью отображения (4.4) для подводного звукового канала с биэкспоненциальным профилем скорости звука и возмущением (4.68). Значения параметров: (а) $v = 5$, $\tau = 100$ км, (б) $v = 5$, $\tau = 500$ км, (в) $v = 20$, $\tau = 10$ км, (г) $v = 20$, $\tau = 30$ км [55] 149
- 4.11 Параметр Броди β как функция τ . Пустые кружки соответствуют $f = 200$ Гц и $v = 5$, черные кружки – $f = 200$ Гц и $v = 20$, пустые квадраты – $f = 600$ Гц и $v = 20$ [55] 151
- 4.12 Возмущение $V(x, t)$ в плоскости $x - t$. Левая верхняя панель соответствует детерминированному случаю $\Gamma = 0$. Остальные панели соответствуют характерным реализациям $V(x, t)$ для ненулевых значений Γ : $\Gamma = 0.5$ (правая верхняя панель), $\Gamma = 1.0$ (левая нижняя панель) и $\Gamma = 1.5$ (правая нижняя панель). Во всех случаях $s = 1$ [239] 156
- 4.13 Сечения Пуанкаре в детерминированном случае $\Gamma = 0$ для $s = -1$ (слева) и $s = 1$ (справа). Горизонтальные линии соответствуют $p = 0$ [239] 157
- 4.14 Фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре с шагом $\tau = 4\pi$. Рисунки (а)-(г) соответствуют разным реализациям гармонического шума. Во всех случаях $\Gamma = 0.1$ и $s = 1$ 159

- 4.15 Фазовые портреты, построенные с помощью одношагового отображения Пуанкаре с шагом $\tau = 20\pi$. Рисунки (а)-(г) соответствуют разным реализациям гармонического шума. Во всех случаях $\Gamma = 0.1$ и $s = 1$ 160
- 4.16 Среднее число главных компонент, приходящееся на одну собственную функцию ОЭКВ, как функция времени 162
- 4.17 Распределение собственных функций ОЭКВ в плоскости μ - ν . (а) $\tau = 4\pi$, (б) $\tau = 10\pi$, (в) $\tau = 20\pi$, (г) $\tau = 100\pi$ 163
- 4.18 Доли собственных функций ОЭКВ, удовлетворяющих различным условиям локализации, как функции времени 164
- 4.19 Зависимость усредненного по ансамблю реализаций потока от времени для $s = -1$ (сплошная линия) и $s = 1$ (штриховая линия). В обоих случаях $\Gamma = 0.4$ [239] 166
- 4.20 Зависимость усредненного по ансамблю реализаций потока $J_{\text{end}} = J(t = 200\pi)$ от параметра гармонического шума Γ [239] 167
- 4.21 Усредненная по ансамблю энергия при $t = 200\pi$ как функция параметра Γ [239] 168
- 5.1 Слева: карта числа главных компонент при $t = 1000\pi$. Справа: карта соотношений между числом главных компонент, вычисленным при $\Omega = 1$, и аналогичным числом, вычисленным при $\Omega = 0$. Снизу приведены цветовые шкалы для обоих рисунков [283] . . . 179
- 5.2 Дисперсия координаты σ как функция времени для различных значений энергии взаимодействия: (а) $E_{\text{int}} = 0.1$, (б) $E_{\text{int}} = 1$. Во всех случаях $\Omega = 1$ [283] 180
- 5.3 Число главных компонент как функция времени для различных значений энергии взаимодействия: (а) $E_{\text{int}} = 0.1$, (б) $E_{\text{int}} = 1$. Во всех случаях $\Omega = 1$ [283] 181
- 5.4 Полная разность населенностей как функция времени в режиме слабой нелинейности $E_{\text{int}} = 0.1$. (а) $p = 0$, (б) $p = 1$ [283] 183
- 5.5 Разность населенностей как функция времени в режиме умеренной нелинейности $E_{\text{int}} = 1$. (а) $p = 0$, (б) $p = 0.5$, (в) $p = 1$ [283] . 183

5.6	Синхронизация осцилляций Раби, соответствующих узлам решетки $n = 0$ (штриховая линия), $n = 30$ (толстая сплошная линия) и $n = 50$ (тонкая сплошная линия) [283]	184
5.7	Типичный фазовый портрет, описывающий осцилляции Раби внутри отдельного узла решетки для $p = 0$. Переменная φ_n определяется по формуле (5.8) [283]	185
5.8	Число синхронизированных узлов как функция времени [283] . .	186
5.9	Квадрат модуля волновой функции, соответствующей первой (штриховая линия) и второй (сплошная линия) компонентам смеси при $t = 500\pi$. Режим умеренной нелинейности, случай $p = 1$ [283]	187
5.10	Зависимость от времени разностей населенностей, соответствующих узлам $n = 0$ (левая панель) и $n = 4$ (правая панель). Режим умеренной нелинейности, случай $p = 1$ [283]	188

Литература

1. Ruelle D., Shepelyansky D. Chaos at fifty // *Physics Today*. 2013. Т. 66, № 5. С. 27–35.
2. Lorenz E. N. Deterministic nonperiodic flow // *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963. Т. 20, № 2. С. 130–141.
3. Shepelyansky D. L. Chaos at Fifty Four in 2013 // arXiv preprint arXiv:1306.6570. 2013.
4. Ruelle D., Shepelyansky D. Early chaos theory // *Physics Today*. 2014. Т. 67, № 3. С. 9–10.
5. Чириков Б. В. // *Атомная энергия*. 1959. Т. 6. С. 630.
6. Antoni M., Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics // *Phys. Rev. E*. 1995. Sep. Т. 52. С. 2361–2374.
7. Morita H., Kaneko K. Collective Oscillation in a Hamiltonian System // *Phys. Rev. Lett.* 2006. Feb. Т. 96. С. 050602.
8. Abundance of Regular Orbits and Nonequilibrium Phase Transitions in the Thermodynamic Limit for Long-Range Systems / R. Bachelard, C. Chandre, D. Fanelli [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Dec. Т. 101. С. 260603.
9. Analytical results on the magnetization of the Hamiltonian Mean-Field model / R. Bachelard, C. Chandre, A. Ciani [и др.] // *Physics Letters A*. 2009. Т. 373, № 46. С. 4239–4245.
10. Abdullaev S. S. Chaotic transport in Hamiltonian systems perturbed by a weak turbulent wave field // *Phys. Rev. E*. 2011. Aug. Т. 84. С. 026204.

11. Abdullaev S. S. On collisional diffusion in a stochastic magnetic field // *Physics of Plasmas*. 2013. T. 20, № 8. C. 082507.
12. Lam K.-D. N. T., Kurchan J. Stochastic perturbation of integrable systems: a window to weakly chaotic systems // arXiv preprint arXiv:1305.4503. 2013.
13. Computation of stable and unstable manifolds of hyperbolic trajectories in two-dimensional, aperiodically time-dependent vector fields / A. M. Mancho, D. Small, S. Wiggins [и др.] // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. T. 182, № 3. C. 188–222.
14. Koshel' K. V, Prants S. V. Chaotic advection in the ocean // *Physics-Uspekhi*. 2006. T. 49, № 11. C. 1151.
15. Detection of Coherent Oceanic Structures via Transfer Operators / G. Froyland, K. Padberg, M. H. England [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2007. May. T. 98. C. 224503.
16. Froyland G., Padberg K. Almost-invariant sets and invariant manifolds ? Connecting probabilistic and geometric descriptions of coherent structures in flows // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2009. T. 238, № 16. C. 1507 – 1523.
17. Lagrangian study of transport and mixing in a mesoscale eddy street / S.V. Prants, M.V. Budyansky, V.I. Ponomarev [и др.] // *Ocean Modelling*. 2011. T. 38, № 1?2. C. 114 – 125.
18. Haller G., Sapsis T. Lagrangian coherent structures and the smallest finite-time Lyapunov exponent // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2011. T. 21, № 2. C. 023115.
19. Budyansky M., Uleysky M., Prants S. Hamiltonian fractals and chaotic scattering of passive particles by a topographical vortex and an alternating current // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2004. T. 195, № 3. C. 369–378.
20. Altmann E. G., Endler A. Noise-Enhanced Trapping in Chaotic Scattering // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Dec. T. 105. C. 244102.

21. Signatures of Homoclinic Motion in Quantum Chaos / D. A. Wisniacki, E. Vergini, R. M. Benito [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2005. Feb. T. 94. C. 054101.
22. Zaslavsky G. M. Dynamical traps // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2002. T. 168. C. 292–304.
23. Denisov S., Flach S. Dynamical mechanisms of dc current generation in driven Hamiltonian systems // *Phys. Rev. E.* 2001. Oct. T. 64. C. 056236.
24. Denisov S., Klafter J., Urbakh M. Some new aspects of Lévy walks and flights: directed transport, manipulation through flights and population exchange // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 2004. T. 187, № 1. C. 89–99.
25. Tarasov V. E., Zaslavsky G. M. Fractional dynamics of coupled oscillators with long-range interaction // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2006. T. 16, № 2. C. 023110.
26. Uleysky M. Yu., Budyansky M. V., Prants S. V. Effect of dynamical traps on chaotic transport in a meandering jet flow // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2007. T. 17, № 4. C. 043105.
27. Stickiness in a bouncer model: A slowing mechanism for Fermi acceleration / A. L. P. Livorati, T. Kroetz, C. P. Dettmann [и др.] // *Phys. Rev. E.* 2012. Sep. T. 86. C. 036203.
28. Dettmann C. P., Leonel E. D. Periodic compression of an adiabatic gas: Intermittency-enhanced Fermi acceleration // *Europhysics Letters.* 2013. T. 103, № 4. C. 40003.
29. Livorati A. L. P., Loskutov A., Leonel E. D. A peculiar Maxwell's Demon observed in a time-dependent stadium-like billiard // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications.* 2012. T. 391, № 20. C. 4756–4762.
30. Gelfreich V., Rom-Kedar V., Turaev D. Fermi acceleration and adiabatic invariants for non-autonomous billiards // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 2012. T. 22, № 3. C. 033116.

31. del Castillo-Negrete D., Morrison P. J. Chaotic transport by Rossby waves in shear flow // *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* (1989-1993). 1993. Т. 5, № 4. С. 948–965.
32. Meanders and reconnection–collision sequences in the standard nontwist map / A. Wurm, A. Apte, K. Fuchss [и др.] // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2005. Т. 15, № 2. С. 023108.
33. Martinell J. J., del Castillo-Negrete D. Gyroaverage effects on chaotic transport by drift waves in zonal flows // *Physics of Plasmas* (1994-present). 2013. Т. 20, № 2. С. 022303.
34. Штокман Х.-Ю. Квантовый хаос: введение. Москва: Физматлит, 2004. С. 376.
35. Заславский Г. М. Физика хаоса в гамильтоновых системах. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2007. С. 288.
36. Ray and wave chaos in ocean acoustics: chaos in waveguides / D. Makarov, S. Prants, A. Virovlyansky [и др.]. *Series on complexity, nonlinearity and chaos*. Singapore: World Scientific, 2010.
37. Chandre C., Jauslin H. R. Renormalization-group analysis for the transition to chaos in Hamiltonian systems // *Physics Reports*. 2002. Т. 365, № 1. С. 1 – 64.
38. Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // *Physics Reports*. 1979. Т. 52, № 5. С. 263 – 379.
39. Чириков Б. В. Нелинейный резонанс. Учебное пособие. Новосибирск: НГУ, 1977. С. 82.
40. Robust Transport Barriers Resulting from Strong Kolmogorov-Arnold-Moser Stability / I. I. Rypina, M. G. Brown, F. J. Beron-Vera [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Mar. Т. 98. С. 104102.

41. Budyansky M. V., Uleysky M. Yu., Prants S. V. Detection of barriers to cross-jet Lagrangian transport and its destruction in a meandering flow // *Phys. Rev. E*. 2009. May. T. 79. C. 056215.
42. Uleysky M. Yu., Budyansky M. V., Prants S. V. Mechanism of destruction of transport barriers in geophysical jets with Rossby waves // *Phys. Rev. E*. 2010. Jan. T. 81. C. 017202.
43. Улейский М. Ю., Будянский М. В., Пранц С. В. Хаотический поперечный транспорт в двумерных струйных потоках // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. 2010. Т. 138, № 6. С. 1175–1188.
44. Berman G. P., Zaslavsky G. M. Condition of stochasticity in quantum nonlinear systems // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1978. T. 91, № 3. C. 450–460.
45. Tomsovic S., Heller E. J. Semiclassical dynamics of chaotic motion: Unexpected long-time accuracy // *Phys. Rev. Lett.* 1991. Aug. T. 67. C. 664–667.
46. Sepúlveda M. A., Tomsovic S., Heller E. J. Semiclassical propagation: How long can it last? // *Phys. Rev. Lett.* 1992. Jul. T. 69. C. 402–405.
47. Tomsovic S., Heller E. J. Long-time semiclassical dynamics of chaos: The stadium billiard // *Phys. Rev. E*. 1993. Jan. T. 47. C. 282–299.
48. Kaplan L. Semiclassical accuracy in phase space for regular and chaotic dynamics // *Phys. Rev. E*. 2004. Aug. T. 70. C. 026223.
49. Ishikawa A., Tanaka A., Shudo A. Dynamical Tunneling in Many-Dimensional Chaotic Systems // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Jun. T. 104. C. 224102.
50. Shudo A., Ikeda K. S. Complex Classical Trajectories and Chaotic Tunneling // *Phys. Rev. Lett.* 1995. Jan. T. 74. C. 682–685.
51. Creagh S. C., Whelan N. D. Complex Periodic Orbits and Tunneling in Chaotic Potentials // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Dec. T. 77. C. 4975–4979.
52. Levkov D. G., Panin A. G., Sibiryakov S. M. Complex trajectories in chaotic dynamical tunneling // *Phys. Rev. E*. 2007. Oct. T. 76. C. 046209.

53. Анализ распространения звука в подводном звуковом канале с использованием комплексного метода ВКБ / Д. В. Макаров, М. Ю. Улейский, Е. В. Соседко [и др.] // Доклады XII научной школы-семинара имени академика Л.М. Бреховских "Акустика океана совмещенной с XXI сессией Российского акустического общества. М.: ГЕОС, 2009. С. 115–118.
54. Берман Г. П., Коловский А. Р. Квантовый хаос при взаимодействии многоуровневых квантовых систем с полем когерентного излучения // УФН. 1992. Т. 162, № 4. С. 95–141.
55. Вировлянский А. Л., Макаров Д. В., Пранц С. В. Лучевой и волновой хаос в подводных акустических волноводах // УФН. 2012. Т. 182. С. 19–48.
56. Wigner E. On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium // Phys. Rev. 1932. Jun. Т. 40. С. 749–759.
57. Татарский В. И. Вигнеровское представление квантовой механики // Успехи физических наук. 1983. Т. 139, № 4. С. 587–619.
58. Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation / G. Casati, B. V. Chirikov, F. M. Izrailev [и др.] // Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems. Springer, 1979. С. 334–352.
59. Fishman S., Grepel D. R., Prange R. E. Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization // Phys. Rev. Lett. 1982. Aug. Т. 49. С. 509–512.
60. Grepel D. R., Prange R. E., Fishman S. Quantum dynamics of a nonintegrable system // Phys. Rev. A. 1984. Apr. Т. 29. С. 1639–1647.
61. Chirikov B. V., Izrailev F. M., Shepelyansky D. L. Quantum chaos: localization vs. ergodicity // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1988. Т. 33, № 1. С. 77–88.
62. Cerruti N. R., Tomsovic S. Sensitivity of Wave Field Evolution and Manifold Stability in Chaotic Systems // Phys. Rev. Lett. 2002. Jan. Т. 88. С. 054103.
63. Complexity of quantum states and reversibility of quantum motion / V. V. Sokolov, O. V. Zhirov, G. Benenti [и др.] // Phys. Rev. E. 2008. Oct. Т. 78. С. 046212.

64. Kolovsky A. R. Condition of Correspondence between Quantum and Classical Dynamics for a Chaotic System // *Phys. Rev. Lett.* 1996. Jan. T. 76. C. 340–343.
65. Kolovsky A. R. Quantum coherence, evolution of the Wigner function, and transition from quantum to classical dynamics for a chaotic system // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science.* 1996. T. 6, № 4. C. 534–542.
66. Peres A. Stability of quantum motion in chaotic and regular systems // *Phys. Rev. A.* 1984. Oct. T. 30. C. 1610–1615.
67. Jalabert R. A., Pastawski H. M. Environment-Independent Decoherence Rate in Classically Chaotic Systems // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Mar. T. 86. C. 2490–2493.
68. Gutzwiller M. C. *Chaos in classical and quantum mechanics.* Springer, 1990. C. 432.
69. Bohigas O., Giannoni M. J., Schmit C. Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Jan. T. 52. C. 1–4.
70. Izrailev F. M. Simple models of quantum chaos: spectrum and eigenfunctions // *Physics Reports.* 1990. T. 196, № 5. C. 299–392.
71. Batistić B., Manos T., Robnik M. The intermediate level statistics in dynamically localized chaotic eigenstates // *EPL (Europhysics Letters).* 2013. T. 102, № 5. C. 50008.
72. Berry M. V., Robnik M. Semiclassical level spacings when regular and chaotic orbits coexist // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1984. T. 17, № 12. C. 2413.
73. Tomsovic S., Ullmo D. Chaos-assisted tunneling // *Phys. Rev. E.* 1994. Jul. T. 50. C. 145–162.
74. Mouchet A., Eltschka C., Schlagheck P. Influence of classical resonances on chaotic tunneling // *Phys. Rev. E.* 2006. Aug. T. 74. C. 026211.

75. Batistić B., Robnik M. Semiempirical theory of level spacing distribution beyond the Berry–Robnik regime: modeling the localization and the tunneling effects // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2010. T. 43, № 21. C. 215101.
76. New Class of Eigenstates in Generic Hamiltonian Systems / R. Ketzmerick, L. Hufnagel, F. Steinbach [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2000. Aug. T. 85. C. 1214–1217.
77. Sugita A., Aiba H. Second moment of the Husimi distribution as a measure of complexity of quantum states // *Phys. Rev. E*. 2002. Feb. T. 65. C. 036205.
78. Leboeuf P., Voros A. Chaos-revealing multiplicative representation of quantum eigenstates // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1990. T. 23, № 10. C. 1765.
79. Arranz F. J., Borondo F., Benito R. M. Distribution of zeros of the Husimi function in a realistic Hamiltonian molecular system // *Phys. Rev. E*. 1996. Sep. T. 54. C. 2458–2464.
80. Korsch H. J., Müller C., Wiescher H. On the zeros of the Husimi distribution // *Journal of Physics A: Mathematical and General*. 1997. T. 30, № 20. C. L677–L684.
81. Onset of quantum chaos in molecular systems and the zeros of the Husimi function / F. J. Arranz, L. Seidel, C. G. Giralda [и др.] // *Phys. Rev. E*. 2013. Jun. T. 87. C. 062901.
82. Berry M. V., Dennis M. R. Phase singularities in isotropic random waves // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2000. T. 456. C. 2059–2079.
83. Wave function statistics for ballistic quantum transport through chaotic open billiards: Statistical crossover and coexistence of regular and chaotic waves / H. Ishio, A. I. Saichev, A. F. Sadreev [и др.] // *Phys. Rev. E*. 2001. Oct. T. 64. C. 056208.

84. Maksimov D. N., Sadreev A. F. Statistics of nodal points of in-plane random waves in elastic media // *Phys. Rev. E*. 2008. May. T. 77. С. 056204.
85. Sound transmission through a fluctuating ocean / R. Dashen, S. M. Flatté, W. H. Munk [и др.]. Cambridge University Press, 2010.
86. Бреховских Л. М., Лысанов Ю. П. Теоретические основы акустики океана. Москва: Наука, 2007. С. 370.
87. The Heard Island Feasibility Test / W. H. Munk, R. C. Spindel, A. Baggeroer [и др.] // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 1994. Т. 96, № 4. С. 2330–2342.
88. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Нелинейная динамика лучей в неоднородных средах // *ЖЭТФ*. 1981. Т. 80. С. 524–536.
89. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Нелинейная и стохастическая динамика лучей в регулярных поперечно-неоднородных волноводах // *ЖЭТФ*. 1983. Т. 85. С. 1573–1584.
90. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Стохастическая неустойчивость лучей и спекл-структура в неоднородных средах // *ЖЭТФ*. 1984. Т. 87. С. 763–775.
91. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Динамика и поперечные дрейфы лучей в движущихся неоднородных средах // *Известия АН СССР*. 1987. Т. 23. С. 724–732.
92. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Фрактали и динамика лучей в продольно-неоднородной среде // *Акустический журнал*. 1988. Т. 34. С. 578–582.
93. Абдуллаев С. С., Заславский Г. М. Классические нелинейная динамика и хаос лучей в задачах распространения волн в неоднородных средах // *Успехи физических наук*. 1991. Т. 161, № 8. С. 1–43.
94. Classical chaos in nonseparable wave propagation problems / D. R. Palmer, M. G. Brown, F. D. Tappert [и др.] // *Geophysical research letters*. 1988. Т. 15, № 6. С. 569–572.

95. Palmer D. R., Georges T. M., Jones R. M. Classical chaos and the sensitivity of the acoustic field to small-scale ocean structure // Computer Physics Communications. 1991. T. 65, № 1. C. 219–223.
96. Smith K. B., Brown M. G., Tappert F. D. Ray chaos in underwater acoustics // The Journal of the Acoustical Society of America. 1992. T. 91, № 4. C. 1939–1949.
97. Tappert F. D., Tang X. Ray chaos and eigenrays // The Journal of the Acoustical Society of America. 1996. T. 99. C. 185.
98. Simmen J., Flatte S. M., Wang G.-Y. Wavefront folding, chaos, and diffraction for sound propagation through ocean internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 1997. T. 102, № 1. C. 239–255.
99. Wolfson M. A., Tappert F. D. Study of horizontal multipaths and ray chaos due to ocean mesoscale structure // The Journal of the Acoustical Society of America. 2000. T. 107, № 1. C. 154–162.
100. Wolfson M. A., Tomsovic S. On the stability of long-range sound propagation through a structured ocean // J. Acoust. Soc. Am. 2001. T. 109, № 6. C. 2693–2703.
101. Ray dynamics in a long-range acoustic propagation experiment / F. J. Beron-Vera, M. G. Brown, J. A. Colosi [и др.] // J. Acoust. Soc. Am. 2003. T. 114, № 3. C. 1226–1242.
102. Worcester P. F., Spindel R. C. North Pacific Acoustic Laboratory // The Journal of the Acoustical Society of America. 2005. T. 117, № 3. C. 1499–1510.
103. Tanner G., Sondergaard N. Wave chaos in acoustics and elasticity // J. Physics A: Math. Theor. 2007. T. 40, № 50. C. R443.
104. Garrett C., Munk W. Space-time scales of internal waves // Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics. 1972. T. 3, № 1. C. 225–264.

105. Colosi J. A., Brown M. G. Efficient numerical simulation of stochastic internal-wave-induced sound-speed perturbation fields // *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. T. 103, № 4. С. 2232–2235.
106. The vertical structure of shadow-zone arrivals at long range in the ocean / L. J. Van Uffelen, P. F. Worcester, M. A. Dzieciuch [и др.] // *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2009. T. 125, № 6. С. 3569–3588.
107. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: A scheme for large scale monitoring // *Deep Sea Research Part A. Oceanographic Research Papers.* 1979. T. 26, № 2. С. 123–161.
108. Munk W., Worcester P., Wunsch C. *Ocean acoustic tomography.* Cambridge University Press, 2009.
109. Tomographic maps of the ocean mesoscale. I: Pure acoustics / B. Cornuelle, C. Wunsch, D. Behringer [и др.] // *Journal of Physical Oceanography.* 1985. T. 15, № 2. С. 133–152.
110. Munk W., Wunsch C. Ocean acoustic tomography: Rays and modes // *Reviews of Geophysics.* 1983. T. 21, № 4. С. 777–793.
111. Shang E. C. Ocean acoustic tomography based on adiabatic mode theory // *The Journal of the Acoustical Society of America.* 1989. T. 85, № 4. С. 1531–1537.
112. Jones R. M., Shang E. C., Georges T. M. Nonperturbative modal tomography inversion. Part I. Theory // *The Journal of the Acoustical Society of America.* 1993. T. 94, № 4. С. 2296–2302.
113. Udovydchenkov I. A., Brown M. G. Modal group time spreads in weakly range-dependent deep ocean environments // *The Journal of the Acoustical Society of America.* 2008. T. 123, № 1. С. 41–50.
114. Mode coherence at megameter ranges in the North Pacific Ocean / K. E. Wage, M. A. Dzieciuch, P. F. Worcester [и др.] // *J. Acoust. Soc. Am.* 2005. T. 117, № 3. С. 1565–1581.

115. A test of basin-scale acoustic thermometry using a large-aperture vertical array at 3250-km range in the eastern North Pacific Ocean / P. F. Worcester, B. D. Cornuelle, M. A. Dzieciuch [и др.] // J. Acoust. Soc. Am. 1999. Т. 105, № 6. С. 3185–3201.
116. Comparisons of measured and predicted acoustic fluctuations for a 3250-km propagation experiment in the eastern North Pacific Ocean / J. A. Colosi, E. K. Scheer, S. M. Flatté [и др.] // The Journal of the Acoustical Society of America. 1999. Т. 105, № 6. С. 3202–3218.
117. Colosi J. A., Tappert F., Dzieciuch M. Further analysis of intensity fluctuations from a 3252-km acoustic propagation experiment in the eastern North Pacific Ocean // The Journal of the Acoustical Society of America. 2001. Т. 110, № 1. С. 163–169.
118. A comparison of measured and predicted broadband acoustic arrival patterns in travel time-depth coordinates at 1000-km range / P. F. Worcester, B. D. Cornuelle, J. A. Hildebrand [и др.] // The Journal of the Acoustical Society of America. 1994. Т. 95, № 6. С. 3118–3128.
119. Colosi J. A., Flatté S. M., Bracher C. Internal-wave effects on 1000-km acoustic pulse propagation: Simulation and comparison with experiment // The Journal of the Acoustical Society of America. 1994. Т. 96, № 1. С. 452–468.
120. Применение сложных акустических сигналов в дальней навигации подводных объектов / В. А. Акуличев, А. Е. Бородин, А. В. Буренин [и др.] // Доклады Академии наук. 2007. Т. 417, № 5. С. 693–696.
121. Experimental studies of pulsed signal propagation from the shelf to deep sea / V. Bezotvetnykh, A. Burenin, Yu. Morgunov [и др.] // Acoust. Phys. 2009. Т. 55. С. 376–382.
122. Acoustic tomography for monitoring the Sea of Japan: a pilot experiment / R. C. Spindel, J. Na, P. H. Dahl [и др.] // IEEE J. Ocean. Engin. 2003. april. Т. 28, № 2. С. 297–302.

123. Ocean climate change: Comparison of acoustic tomography, satellite altimetry, and modeling / A. B. Baggeroer, T. G. Birdsall, C. Clark [и др.] // Science. 1998. T. 281, № 5381. С. 1327–1332.
124. Feynman R. P., Leighton R. B., Sands M. The Feynman Lectures on Physics, Desktop Edition Volume I. Basic Books, 2013. Т. 1.
125. Denisov S., Flach S., Hanggi P. Tunable transport with broken space-time symmetries // arXiv preprint arXiv:1311.1086. 2013.
126. Flach S., Yevtushenko O., Zolotaryuk Y. Directed Current due to Broken Time-Space Symmetry // Phys. Rev. Lett. 2000. Mar. Т. 84. С. 2358–2361.
127. Reimann P. Brownian motors: noisy transport far from equilibrium // Physics Reports. 2002. Т. 361, № 2–4. С. 57 – 265.
128. Belinicher V. I., Sturman B. I. Fotogal'vanicheskiy effekt v sredakh bez tsentra simmetrii // Uspekhi Fizicheskikh Nauk. 1980. Т. 130, № 3. С. 415–458.
129. Spontaneous dc Current Generation in a Resistively Shunted Semiconductor Superlattice Driven by a Terahertz Field / K. N. Alekseev, E. H. Cannon, J. C. McKinney [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1998. Mar. Т. 80. С. 2669–2672.
130. Entin M. V., Magarill L. I. Photocurrent in nanostructures with asymmetric antidots: Exactly solvable model // Phys. Rev. B. 2006. May. Т. 73. С. 205206.
131. Quantum ratchet effects induced by terahertz radiation in GaN-based two-dimensional structures / W. Weber, L. E. Golub, S. N. Danilov [и др.] // Phys. Rev. B. 2008. Jun. Т. 77. С. 245304.
132. Pyataev M. A., Ulyanov S. N. Photogalvanic effect and photoconductance in a quantum channel with a single short-range scatterer // Phys. Rev. B. 2009. Jun. Т. 79. С. 235428.
133. Tarasenko S. A. Direct current driven by ac electric field in quantum wells // Phys. Rev. B. 2011. Jan. Т. 83. С. 035313.

134. Kiselev Yu. Yu., Golub L. E. Optical and photogalvanic properties of graphene superlattices formed by periodic strain // *Phys. Rev. B*. 2011. Dec. T. 84. C. 235440.
135. Ermann L., Shepelyansky D. L. Relativistic graphene ratchet on semidisk Galton board // *The European Physical Journal B*. 2011. T. 79, № 3. C. 357–362.
136. Nalitov A. V., Golub L. E., Ivchenko E. L. Ratchet effects in two-dimensional systems with a lateral periodic potential // *Phys. Rev. B*. 2012. Sep. T. 86. C. 115301.
137. Broken Symmetries and Directed Collective Energy Transport in Spatially Extended Systems / S. Flach, Y. Zolotaryuk, A. E. Miroschnichenko [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2002. Apr. T. 88. C. 184101.
138. Ratchetlike Dynamics of Fluxons in Annular Josephson Junctions Driven by Biharmonic Microwave Fields / A. V. Ustinov, C. Coqui, A. Kemp [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2004. Aug. T. 93. C. 087001.
139. Romero-Isart O., García-Ripoll J. J. Quantum ratchets for quantum communication with optical superlattices // *Phys. Rev. A*. 2007. Nov. T. 76. C. 052304.
140. Optimal control of atom transport for quantum gates in optical lattices / G. De Chiara, T. Calarco, M. Anderlini [и др.] // *Phys. Rev. A*. 2008. May. T. 77. C. 052333.
141. Schanz H., Dittrich T., Ketzmerick R. Directed chaotic transport in Hamiltonian ratchets // *Phys. Rev. E*. 2005. Feb. T. 71. C. 026228.
142. Hennig D., Schimansky-Geier L., Hänggi P. Slowly rocking symmetric, spatially periodic Hamiltonians: The role of escape and the emergence of giant transient directed transport // *The European Physical Journal B*. 2008. T. 62, № 4. C. 493–503.

143. Leoncini X., Neishtadt A., Vasiliev A. Directed transport in a spatially periodic harmonic potential under periodic nonbiased forcing // Phys. Rev. E. 2009. Feb. T. 79. C. 026213.
144. Directed transport and localization in phase-modulated driven lattices / C. Petri, F. Lenz, F. K. Diakonov [и др.] // Phys. Rev. E. 2010. Apr. T. 81. C. 046219.
145. Wulf T., Liebchen B., Schmelcher P. Disorder Induced Regular Dynamics in Oscillating Lattices // Phys. Rev. Lett. 2014. Jan. T. 112. C. 034101.
146. Ratchet for Cold Rubidium Atoms: The Asymmetric Optical Lattice / C. Mennerat-Robilliard, D. Lucas, S. Guibal [и др.] // Phys. Rev. Lett. 1999. Jan. T. 82. C. 851–854.
147. Proposal for a Chaotic Ratchet Using Cold Atoms in Optical Lattices / T. S. Monteiro, P. A. Dando, N. A. C. Hutchings [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2002. Oct. T. 89. C. 194102.
148. Phase Control of Directed Diffusion in a Symmetric Optical Lattice / M. Schiavoni, L. Sanchez-Palencia, F. Renzoni [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2003. Mar. T. 90. C. 094101.
149. Gommers R., Denisov S., Renzoni F. Quasiperiodically Driven Ratchets for Cold Atoms // Phys. Rev. Lett. 2006. Jun. T. 96. C. 240604.
150. Gommers R., Bergamini S., Renzoni F. Dissipation-Induced Symmetry Breaking in a Driven Optical Lattice // Phys. Rev. Lett. 2005. Aug. T. 95. C. 073003.
151. Gating Ratchet for Cold Atoms / R. Gommers, V. Lebedev, M. Brown [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2008. Jan. T. 100. C. 040603.
152. Chaotic ratchet dynamics with cold atoms in a pair of pulsed optical lattices / G. G. Carlo, G. Benenti, G. Casati [и др.] // Phys. Rev. A. 2006. Sep. T. 74. C. 033617.

153. Periodically driven quantum ratchets: Symmetries and resonances / S. Denisov, L. Morales-Molina, S. Flach [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. Jun. Т. 75. С. 063424.
154. Longhi S., Della Valle G. Quantum transport in bipartite lattices via Landau-Zener tunneling // Phys. Rev. A. 2012. Oct. Т. 86. С. 043633.
155. Quantum ratchet transport with minimal dispersion rate / F. Zhan, S. Denisov, A. V. Ponomarev [и др.] // Phys. Rev. A. 2011. Oct. Т. 84. С. 043617.
156. Morales-Molina L., Flach S. Resonant ratcheting of a Bose-Einstein condensate // New Journal of Physics. 2008. Т. 10, № 1. С. 013008.
157. Directed Transport of Atoms in a Hamiltonian Quantum Ratchet / T. Salger, S. Kling, T. Hecking [и др.] // Science. 2009. Т. 326, № 5957. С. 1241–1243.
158. Interaction-induced quantum ratchet in a Bose-Einstein condensate / D. Poletti, G. Benenti, G. Casati [и др.] // Phys. Rev. A. 2007. Aug. Т. 76. С. 023421.
159. Steering Bose-Einstein Condensates despite Time Symmetry / D. Poletti, G. Benenti, G. Casati [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2009. Apr. Т. 102. С. 130604.
160. Friedland L., Khain P., Shagalov A. G. Autoresonant phase-space holes in plasmas // Physical Review Letters. 2006. Т. 96, № 22. С. 225001.
161. Friedland L. Spatial autoresonance cyclotron accelerator // Physics of Plasmas. 1994. Т. 1, № 2. С. 421–428.
162. Using acoustic waves to induce high-frequency current oscillations in superlattices / M. T. Greenaway, A. G. Balanov, D. Fowler [и др.] // Phys. Rev. B. 2010. Jun. Т. 81. С. 235313.
163. Kamenev D. I., Berman G. P. 1946. Quantum chaos : a harmonic oscillator in monochromatic wave. Princeton, N.J. : Rinton Press, 2001.
164. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. Москва: Мир, 1984. С. 528.

165. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1958. С. 408.
166. Makarov D. V., Sosedko E. V., Uleysky M. Yu. Frequency-modulated ratchet with autoresonance // *The European Physical Journal B*. 2010. Т. 73. С. 571–579.
167. Itin A. P., Neishtadt A. I., Vasiliev A. A. Captures into resonance and scattering on resonance in dynamics of a charged relativistic particle in magnetic field and electrostatic wave // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2000. Т. 141, № 3. С. 281–296.
168. Vainchtein D. L., Neishtadt A. I., Mezic I. On passage through resonances in volume-preserving systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2006. Т. 16, № 4. С. –.
169. Neishtadt A., Vasiliev A. On the absence of stable periodic orbits in domains of separatrix crossings in nonsymmetric slow-fast Hamiltonian systems // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2007. Т. 17, № 4. С. 043104–043104.
170. Chacón R., Uleysky M. Yu., Makarov D. V. Universal chaotic layer width in space-periodic Hamiltonian systems under adiabatic ac time-periodic forces // *Europhysics Letters*. 2010. Т. 90, № 4. С. 40003.
171. Goggin M. E., Milonni P. W. Driven Morse oscillator: Classical chaos, quantum theory, and photodissociation // *Phys. Rev. A*. 1988. Feb. Т. 37. С. 796–806.
172. Timberlake T., Foreman J. V. [и др.]. Correlation of the photodetachment rate of a scarred resonance state with the classical Lyapunov exponent // *Physical review letters*. 2003. Т. 90, № 10. С. 103001–103001.
173. Singh K. P., Rost J. M. Optimal Stochastic Enhancement of Photoionization // *Phys. Rev. Lett.* 2007. Apr. Т. 98. С. 160201.
174. Макаров Д.В., Улейский М.Ю. Генерация баллистического транспорта частиц при воздействии слабого переменного возмущения на периодическую

- гамильтонову систему // Письма в Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 2006. Т. 83. С. 614–617.
175. Jones P. H., Goonasekera M., Renzoni F. Rectifying Fluctuations in an Optical Lattice // Phys. Rev. Lett. 2004. Aug. Т. 93. С. 073904.
176. Renzoni F. Cold atom realizations of Brownian motors // Contemporary Physics. 2005. Т. 46, № 3. С. 161–171.
177. Brown M., Renzoni F. Ratchet effect in an optical lattice with biharmonic driving: A numerical analysis // Phys. Rev. A. 2008. Mar. Т. 77. С. 033405.
178. Вечеславов В. В. Хаотический слой нелинейного резонанса при низкочастотном возмущении // ЖТФ. 2002. Т. 72, № 2. С. 20–27.
179. Rakhlin D. A. Enhanced diffusion in smoothly modulated superlattices // Phys. Rev. E. 2000. Dec. Т. 63. С. 011112.
180. Makarov D. V., Uleysky M. Yu. Giant acceleration in slow-fast space-periodic Hamiltonian systems // Phys. Rev. E. 2007. Jun. Т. 75. С. 065201.
181. Макаров Д. В. Активация баллистического потока частиц при воздействии слабого переменного возмущения с медленно меняющейся ориентацией // Письма в Журнал технической физики. 2008. Т. 34. С. 65–70.
182. Hegewisch K. C., Cerruti N. R., Tomsovic S. Ocean acoustic wave propagation and ray method correspondence: Internal wave fine structure // J. Acoust. Soc. Am. 2005. Т. 117, № 3. С. 1582–1594.
183. Макаров Д. В., Улейский М. Ю. Высвечивание лучей из горизонтально-неоднородного подводного звукового канала // Акустический журнал. 2007. Т. 53, № 4. С. 565–573.
184. Recovery of ordered periodic orbits with increasing wavelength for sound propagation in a range-dependent waveguide / L. E. Kon'kov, D. V. Makarov, E. V. Sosedko [и др.] // Phys. Rev. E. 2007. Т. 76. С. 056212.

185. Макаров Д. В., Коньков Л. Е. Хаотическая диффузия при распространении звука в неоднородном подводном звуковом канале // *Нелинейная динамика*. 2007. Т. 3, № 2. С. 157–174.
186. Макаров Д. В., Коньков Л. Е., Улейский М. Ю. Соответствие между лучевой и волновой картиной и подавление хаоса при дальнем распространении звука в океане // *Акустический журнал*. 2008. Т. 54. С. 439–450.
187. A comparison of measured and predicted broadband acoustic arrival patterns in travel time–depth coordinates at 1000-km range / P. F. Worcester, B. D. Cornuelle, J. A. Hildebrand [и др.] // *J. Acoust. Soc. Am.* 1994. Т. 95, № 6. С. 3118–3128.
188. Нейштадт А. И. Захват в резонанс и рассеяние на резонансах в двухчастотных системах // *Труды математического института им. В. А. Стеклова*. 2005. Т. 250, № 0. С. 198–218.
189. Макаров Д. В., Пранц С. В., Улейский М. Ю. Структура пространственного нелинейного резонанса лучей в неоднородном подводном звуковом канале // *Докл. АН*. 2002. Т. 382, № 3. С. 394–396.
190. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва-Ижевск: Изд-во РХД, 2005. С. 420.
191. Uleysky M. Yu., Budyansky M. V., Prants S. V. Genesis and bifurcations of unstable periodic orbits in a jet flow // *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2008. Т. 41, № 21. С. 215102.
192. Makarov D. V., Uleysky M. Yu. Local chaos induced by spatial oscillations of a perturbation // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2008. Т. 13, № 2. С. 400–406.
193. Улейский М. Ю., Соседко Е. В., Макаров Д. В. Авторезонансное охлаждение частиц в пространственно-периодических потенциалах // *Письма в Журнал технической физики*. 2010. Т. 36, № 23. С. 31–38.

194. Munk W. H. Sound channel in an exponentially stratified ocean, with application to SOFAR // The Journal of the Acoustical Society of America. 1974. T. 55. C. 220–226.
195. Makarov D. V., Kon'kov L. E., Uleysky M. Yu. Wave chaos in underwater acoustics // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2010. T. 3, № 3. C. 336–348.
196. Makarov D. V., Uleysky M. Yu., Prants S. V. Ray chaos and ray clustering in an ocean waveguide // Chaos. 2004. T. 14. C. 79–95.
197. Soskin S. M., Yevtushenko O. M., Mannella R. Drastic Facilitation of the Onset of Global Chaos // Phys. Rev. Lett. 2003. Apr. T. 90. C. 174101.
198. Soskin S. M., Mannella R., Yevtushenko O. M. Matching of separatrix map and resonant dynamics, with application to global chaos onset between separatrices // Phys. Rev. E. 2008. Mar. T. 77. C. 036221.
199. Virovlyansky A. L., Zaslavsky G. M. Wave chaos in terms of normal modes // Phys. Rev. E. 1999. Feb. T. 59. C. 1656–1668.
200. Virovlyansky A. L., Zaslavsky G. M. Evaluation of the smoothed interference pattern under conditions of ray chaos // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. 2000. T. 10, № 1. C. 211–223.
201. Smirnov I. P., Virovlyansky A. L., Zaslavsky G. M. Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics // Phys. Rev. E. 2001. Aug. T. 64. C. 036221.
202. Smirnov I. P., Virovlyansky A. L., Zaslavsky G. M. Wave chaos and mode–medium resonances at long-range sound propagation in the ocean // Chaos. 2004. T. 14, № 2. C. 317–332.
203. Chaos-induced intensification of wave scattering / I. P. Smirnov, A. L. Virovlyansky, M. Edelman [и др.] // Phys. Rev. E. 2005. Aug. T. 72. C. 026206.
204. Вировлянский А. Л. Лучевая теория дальнего распространения звука в океане. Нижний Новгород: ИПФ РАН, 2006. С. 164.

205. Heller E. J. Bound-State Eigenfunctions of Classically Chaotic Hamiltonian Systems: Scars of Periodic Orbits // *Phys. Rev. Lett.* 1984. Oct. T. 53. С. 1515–1518.
206. Bogomolny E. B. Smoothed wave functions of chaotic quantum systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1988. Т. 31, № 2. С. 169–189.
207. Kaidel J., Brack M. Semiclassical trace formulas for pitchfork bifurcation sequences // *Phys. Rev. E.* 2004. Jul. Т. 70. С. 016206.
208. Кляцкин В. И., Гурарий Д. Когерентные явления в стохастических динамических системах // *УФН.* 1999. Т. 169. С. 171–207.
209. Makarov D., Uleysky M. Specific Poincaré map for a randomly-perturbed nonlinear oscillator // *J. Phys. A: Math. Gen.* 2006. Т. 39, № 3. С. 489.
210. Clustering in randomly driven Hamiltonian systems / D. V. Makarov, M. Yu. Uleysky, M. V. Budyansky [и др.] // *Phys. Rev. E.* 2006. Jun. Т. 73. С. 066210.
211. Wave chaos in a randomly inhomogeneous waveguide: spectral analysis of the finite-range evolution operator / D. V. Makarov, L. E. Kon'kov, M. Yu. Uleysky [и др.] // *Phys. Rev. E.* 2013. Jan. Т. 87. С. 012911.
212. Gan C., Wang Q., Perc M. Torus breakdown and noise-induced dynamics in the randomly driven Morse oscillator // *J. Physics A: Math. Theor.* 2010. Т. 43, № 12. С. 125102.
213. Gan C., Lei H. Stochastic dynamical analysis of a kind of vibro-impact system under multiple harmonic and random excitations // *J. Sound Vibr.* 2011. Т. 330, № 10. С. 2174–2184.
214. Kolovsky A. R. Spectral statistics for the evolution operator of a quantum particle showing chaotic diffusion of the coordinate // *Phys. Rev. E.* 1997. Aug. Т. 56. С. 2261–2264.
215. Заславский Г. М. Статистика энергетического спектра // *Успехи физических наук.* 1979. Т. 129, № 10. С. 211–238.

216. Spiesberger J. L., Tappert F. D. Kaneohe acoustic thermometer further validated with rays over 3700 km and the demise of the idea of axially trapped energy // J. Acoust. Soc. Am. 1996. T. 99, № 1. С. 173–184.
217. The interference component of the acoustic field corresponding to the Long-Range Ocean Acoustic Propagation Experiment / N. S. Grigorieva, G. M. Fridman, J. A. Mercer [и др.] // J. Acoust. Soc. Am. 2009. Т. 125, № 4. С. 1919–1929.
218. Oceanography and marine environment of the Far Eastern Region of Russia (proj. leader Rostov I. D.). <http://www.pacificinfo.ru/en>.
219. Experiments on long-range sound propagation in the Canary Basin of the Atlantic Ocean / L. M. Brekhovskikh, V. V. Goncharov, S. A. Dremuchev [и др.] // Sov. Phys. Acoust. 1990. Т. 36, № 5. С. 461–465.
220. Smirnov I., Caruthers J., Khil'ko A. Conditions for the existence of weakly divergent bundles in plane-layered waveguides // Radiophys. Quantum Electron. 1999. Т. 42. С. 864–872.
221. Morozov A. K., Colosi J. A. Entropy and scintillation analysis of acoustical beam propagation through ocean internal waves // J. Acoust. Soc. Am. 2005. Т. 117, № 3. С. 1611–1623.
222. Petukhov Yu. Conditions for forming weakly diverging acoustic bundles in ocean waveguides // Acoust. Phys. 2009. Т. 55. С. 785–793.
223. LeBlanc L. R., Middleton F. H. An underwater acoustic sound velocity data model // J. Acoust. Soc. Am. 1980. Т. 67, № 6. С. 2055–2062.
224. Dozier L. B., Tappert F. D. Statistics of normal mode amplitudes in a random ocean. II. Computations // J. Acoust. Soc. Am. 1978. Т. 64, № 2. С. 533–547.
225. Mallick K., Marcq P. Anomalous diffusion in nonlinear oscillators with multiplicative noise // Phys. Rev. E. 2002. Oct. Т. 66. С. 041113.
226. Quantum Chaos and $1/f$ Noise / A. Relaño, J. M. G. Gómez, R. A. Molina [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2002. Nov. Т. 89. С. 244102.

227. Relaño A. Chaos-Assisted Tunneling and $1/f^\alpha$ Spectral Fluctuations in the Order-Chaos Transition // *Phys. Rev. Lett.* 2008. Jun. T. 100. C. 224101.
228. Maksimov D. N., Sadreev A. F. Statistics of nodal points of in-plane random waves in elastic media // *Phys. Rev. E.* 2008. May. T. 77. C. 056204.
229. Hegewisch K. C., Tomsovic S. Random matrix theory for underwater sound propagation // *Europhys. Lett.* 2012. T. 97, № 3. C. 34002.
230. Varga I., Pipek J. Rényi entropies characterizing the shape and the extension of the phase space representation of quantum wave functions in disordered systems // *Phys. Rev. E.* 2003. Aug. T. 68. C. 026202.
231. Berman G. P., Kolovskii A. R. Quantum chaos in interactions of multilevel quantum systems with a coherent radiation field // *Sov. Phys. Usp.* 1992. T. 35, № 4. C. 303.
232. Fishman S., Grempel D. R., Prange R. E. Chaos, quantum recurrences, and Anderson localization // *Phys. Rev. Lett.* 1982. Aug. T. 49. C. 509–512.
233. Berry M. V., Keating J. P., Prado S. D. Orbit bifurcations and spectral statistics // *Journal of Physics A: Mathematical and General.* 1998. T. 31, № 13. C. L245.
234. Berry M. V., Keating J. P., Schomerus H. Universal twinkling exponents for spectral fluctuations associated with mixed chaology // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.* 2000. T. 456, № 1999. C. 1659–1668.
235. Vibrational Mechanics in an Optical Lattice: Controlling Transport via Potential Renormalization / A. Wickenbrock, P. C. Holz, N. A. A. Wahab [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2012. Jan. T. 108. C. 020603.
236. Prants S. V., Makarov D. V., Uleysky M. Yu. Control of atomic transport using autoresonance // *Chaos, Complexity and Transport.* World Scientific, 2012. C. 24–32.

237. Neiman A., Schimansky-Geier L. Stochastic resonance in bistable systems driven by harmonic noise // *Phys. Rev. Lett.* 1994. May. T. 72. C. 2988–2991.
238. Stochastic resonance: noise-enhanced order / V. S. Anishchenko, A. B. Neiman, F. Moss [и др.] // *Physics-Uspekhi*. 1999. T. 42, № 1. C. 7–36.
239. Makarov D. V., Kon'kov L. E. Quantum ratchet driven by broadband perturbation // *Physics Letters A*. 2013. T. 377, № 43. C. 3093–3097.
240. Noise-assisted transport in the Wannier-Stark system / S. Burkhardt, M. Kraft, R. Mannella [и др.] // *New Journal of Physics*. 2013. T. 15, № 4. C. 045008.
241. Landau-Zener transitions in the presence of harmonic noise / S. Wimberger, R. Mannella, M. Kraft [и др.] // *Fluctuation and Noise Letters*. 2013. T. 12, № 02. C. 1340005.
242. Koshel' K. V., Izrail'skii Yu. G., Stepanov D. V. Determining the optimal frequency of perturbation in the problem of chaotic transport of particles // *Doklady Physics*. 2006. T. 51, № 4. C. 219–222.
243. Izrailsky Yu. G., Koshel K. V., Stepanov D. V. Determination of the optimal excitation frequency range in background flows // *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*. 2008. T. 18, № 1. C. 013107.
244. Greenaway M. T., Balanov A. G., Fromhold T. M. Resonant control of cold-atom transport through two optical lattices with a constant relative speed // *Phys. Rev. A*. 2013. Jan. T. 87. C. 013411.
245. Wave chaos in the nonequilibrium dynamics of the Gross-Pitaevskii equation / I. B řezinová, L. A. Collins, K. Ludwig [и др.] // *Phys. Rev. A*. 2011. Apr. T. 83. C. 043611.
246. Coherent oscillations between two weakly coupled Bose-Einstein condensates: Josephson effects, π oscillations, and macroscopic quantum self-trapping / S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni [и др.] // *Phys. Rev. A*. 1999. Jan. T. 59. C. 620–633.

247. Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics / T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2010. Nov. T. 105. C. 204101.
248. Merhasin I. M., Malomed B. A., Driben R. Transition to miscibility in a binary Bose–Einstein condensate induced by linear coupling // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* 2005. T. 38, № 7. C. 877.
249. Rabi Flopping Induces Spatial Demixing Dynamics / E. Nicklas, H. Strobel, T. Zibold [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Nov. T. 107. C. 193001.
250. Gati R., Oberthaler M. K. A bosonic Josephson junction // *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics.* 2007. T. 40, № 10. C. R61.
251. Byrnes T., Wen K., Yamamoto Y. Macroscopic quantum computation using Bose-Einstein condensates // *Phys. Rev. A.* 2012. Apr. T. 85. C. 040306.
252. Extended Coherence Time on the Clock Transition of Optically Trapped Rubidium / G. Kleine Büning, J. Will, W. Ertmer [и др.] // *Phys. Rev. Lett.* 2011. Jun. T. 106. C. 240801. URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.240801>.
253. Josephson Junction Arrays with Bose-Einstein Condensates / F. S. Cataliotti, S. Burger, C. Fort [и др.] // *Science.* 2001. T. 293, № 5531. C. 843–846.
254. Quantum computations with atoms in optical lattices: Marker qubits and molecular interactions / T. Calarco, U. Dorner, P. S. Julienne [и др.] // *Phys. Rev. A.* 2004. Jul. T. 70. C. 012306.
255. Bloch I. Quantum coherence and entanglement with ultracold atoms in optical lattices // *Nature.* 2008. T. 453, № 7198. C. 1016–1022.
256. Prants S. V., Sirotkin V. Yu. Effects of the Rabi oscillations on the atomic motion in a standing-wave cavity // *Phys. Rev. A.* 2001. Aug. T. 64. C. 033412.
257. Argonov V. Yu., Prants S. V. Fractals and chaotic scattering of atoms in the field of a standing light wave // *Journal of Experimental and Theoretical Physics.* 2003. T. 96, № 5. C. 832–845.

258. Prants S. V., Uleysky M. Yu. Atomic fractals in cavity quantum electrodynamics // *Physics Letters A*. 2003. T. 309, № 5. C. 357–362.
259. Prants S. V., Uleysky M. Yu. Atomic fractals in cavity quantum electrodynamics // *Physics Letters A*. 2003. T. 309, № 5. C. 357–362.
260. Argonov V. Yu., Prants S. V. Theory of chaotic atomic transport in an optical lattice // *Phys. Rev. A*. 2007. Jun. T. 75. C. 063428.
261. Prants S. V. Chaos, fractals, and atomic flights in cavities // *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*. 2002. T. 75, № 12. C. 651–658.
262. Prants S. V., Edelman M., Zaslavsky G. M. Chaos and flights in the atom-photon interaction in cavity QED // *Phys. Rev. E*. 2002. Oct. T. 66. C. 046222.
263. Argonov V. Yu., Prants S. V. Nonlinear coherent dynamics of an atom in an optical lattice // *J. Russ. Las. Res.* 2006. T. 27, № 4. C. 360–378.
264. Argonov V. Yu., Prants S. V. Synchronization of internal and external degrees of freedom of atoms in a standing laser wave // *Phys. Rev. A*. 2005. May. T. 71. C. 053408.
265. Argonov V. Yu., Prants S. V. Theory of dissipative chaotic atomic transport in an optical lattice // *Phys. Rev. A*. 2008. Oct. T. 78. C. 043413.
266. Argonov V. Yu., Prants S. V. Nonlinear control of chaotic walking of atoms in an optical lattice // *Europhysics Letters*. 2008. T. 81, № 2. C. 24003.
267. Gubeskys A., Malomed B. A. Symmetric and asymmetric solitons in linearly coupled Bose-Einstein condensates trapped in optical lattices // *Phys. Rev. A*. 2007. Jun. T. 75. C. 063602.
268. Adhikari S. K., Malomed B. A. Two-component gap solitons with linear interconversion // *Phys. Rev. A*. 2009. Jan. T. 79. C. 015602.
269. Trombettoni A., Smerzi A. Discrete Solitons and Breathers with Dilute Bose-Einstein Condensates // *Phys. Rev. Lett.* 2001. Mar. T. 86. C. 2353–2356.

270. Nonlinear Self-Trapping of Matter Waves in Periodic Potentials / Th. Anker, M. Albiez, R. Gati [и др.] // Phys. Rev. Lett. 2005. Jan. T. 94. C. 020403.
271. Ruostekoski J., Dutton Z. Dynamical and energetic instabilities in multicomponent Bose-Einstein condensates in optical lattices // Phys. Rev. A. 2007. Dec. T. 76. C. 063607.
272. Kolovsky A. R., Korsch H.-J. Dynamics of interacting atoms in driven tilted optical lattices // J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys. 2010. T. 3, № 3. C. 311–324.
273. Landau–Zener tunnelling in 2D periodic structures in the presence of a gauge field: II. Electric breakdown / D. N. Maksimov, I. Yu. Chesnokov, D. V. Makarov [и др.] // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2013. T. 46, № 14. C. 145302.
274. Dynamical pattern formation during growth of a dual-species Bose-Einstein condensate / S. Ronen, J. L. Bohn, L. E. Halmó [и др.] // Phys. Rev. A. 2008. Nov. T. 78. C. 053613.
275. Shrestha U., Ruostekoski J. Fragmentation, domain formation and atom number fluctuations of a two-species Bose–Einstein condensate in an optical lattice // New Journal of Physics. 2012. T. 14, № 4. C. 043037.
276. Eilbeck J. C., Lomdahl P. S., Scott A. C. The discrete self-trapping equation // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1985. T. 16, № 3. C. 318 – 338.
277. All optical switching in ultrashort photonic crystal couplers / A. Locatelli, D. Modotto, D. Paloschi [и др.] // Opt. Commun. 2004. T. 237, № 1. C. 97–102.
278. Maksimov D. N., Sadreev A. F. Symmetry breaking in binary chains with nonlinear sites // Phys. Rev. E. 2013. Sep. T. 88. C. 032901.
279. Rabi–Josephson oscillations and self-trapped dynamics in atomic junctions with two bosonic species / G. Mazarella, B. Malomed, L. Salasnich [и др.] // Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics. 2011. T. 44, № 3. C. 035301.

280. Leggett A. J. Bose-Einstein condensation in the alkali gases: Some fundamental concepts // *Rev. Mod. Phys.* 2001. Apr. T. 73. C. 307–356.
281. Prants S. V. Proliferation of atomic wave packets at the nodes of a standing light wave // *Journal of Experimental and Theoretical Physics*. 2009. T. 109, № 5. C. 751–761.
282. Discrete breathers in Bose–Einstein condensates / R. Franzosi, R. Livi, G.-L. Oppo [и др.] // *Nonlinearity*. 2011. T. 24, № 12. C. R89.
283. Uleysky M.Yu., Makarov D.V. Dynamics of BEC mixtures loaded into the optical lattice in the presence of linear inter-component coupling // *J. Russ. Las. Res.* 2014. T. 35, № 2. C. 138–150.