

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО

ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

“НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО”

На правах рукописи

Малышев Александр Игоревич

**Слабый квантовый хаос в наноструктурах:
диффузия Арнольда**

01.04.07 – физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –
д.ф.-м.н. профессор
В.Я. Демиховский

Нижний Новгород

2006 г

Содержание

Введение	3
1 Классическая диффузия Арнольда	14
1.1 Классическая диффузия Арнольда	14
1.2 Модель двух связанных осцилляторов	18
2 Динамика электрона в квантовых точках в переменном электрическом поле	28
2.1 Квантовый резонанс связи в модели взаимодействующих осцилляторов	28
2.2 Эволюция состояний во внешнем переменном поле . . .	34
2.2.1 Оператор эволюции	34
2.2.2 Резонансное приближение	36
2.2.3 Структура квазиэнергетических функций	39
2.2.4 Эволюция квантовых состояний	42
2.2.5 Динамическая локализация	47
2.3 Краткие итоги Главы 2	51
3 Квантовая диффузия Арнольда в двумерном канале с гофрированной границей	54

3.1	Классическая диффузия Арнольда в двумерном канале с гофрированной границей	55
3.2	Квантовые стационарные состояния на резонансе связи .	60
3.3	Эволюция квантовых состояний	72
3.4	Краткие итоги Главы 3	77
	Заключение	80
	А Приложение	84
A.1	Квантовый нелинейный резонанс	84
A.2	Временная эволюция на квантовом резонансе связи . . .	89
A.3	Вывод отображений для канала с гофрированной границей, помещенного во внешнее поле	92
A.3.1	Движение от гофрированной границы к ровной .	93
A.3.2	Движение от ровной границы к гофрированной .	95
A.3.3	Изменение энергии системы	97
	Библиография	98

Введение

Актуальность работы

Изучение явлений квантового хаоса — одна из актуальных проблем теории конденсированного состояния и, в частности, физики микро- и наноструктур. В этой области активно ведутся как теоретические так и экспериментальные исследования. Так, например, необходимо отметить эксперименты с резонаторами различной формы, квантовыми бильярдами и кораллами, опыты с ультрахолодными атомами в магнито-оптических ловушках, атомами водорода в сильном магнитном поле и многими другими системами, так или иначе демонстрирующими хаотическое поведение (см., например, книгу Штокмана [1]).

Активно развивается и теория квантового хаоса: теория случайных матриц или, например, теория периодических орбит Гутцвиллера стали уже широко известны. Одним из значительных достижений, несомненно, можно считать предсказание явления динамической локализации в системах, возбуждаемых внешним переменным полем. Это явление было впервые исследовано в модели квантового ротатора с δ -толчками [2, 3], а совсем недавно был сделан расчет динамической локализации в отклике хаотической системы (квантовой точки) на внешнее излучение [4]. Заметим, что в регулярном случае для расчета линейно-

го отклика используется известная формула Кубо.

В классических гамильтоновских системах динамический хаос связан с разрушением сепаратрис нелинейных резонансов [5]. В случае слабого хаоса нерегулярная динамика имеет место лишь в узких стохастических слоях, образовавшихся на месте сепаратрис. Слабый хаос в квантовых системах первоначально исследовался в рамках модели гармонического осциллятора с толчками [6, 7]. В частности, в работе [7] был исследован эффект подавления квантовой диффузии внутри стохастической паутины, пронизывающей все фазовое пространство. Квантовый хаос внутри такой паутины также интенсивно изучался в рамках обобщенной модели Харпера с толчками [8, 9]. Слабый квантовый хаос также изучался в работах [10, 11], в вырожденной гамильтоновской системе — заряженная частица, движущаяся в постоянном однородном магнитном поле и поле продольной звуковой монохроматической волны. В этой системе, в частности, изучалась квантовая диффузия и локализация состояний на стохастической паутине.

Одним из ярких проявлений слабого хаоса в классических системах является *диффузия Арнольда*, теоретически предсказанная в 1964 г. в работе [12]. Впервые это явление наблюдалось в численных экспериментах Чирикова с сотрудниками [13], а позже подробно, в том числе аналитически, изучалось в работах [5, 14, 15]. Позднее была замечена связь диффузии Арнольда с задачей динамики трех гравитационно взаимодействующих тел [16, 17], динамики галактик [18] и движения элементарных частиц в ускорителе [19], а также с задачей о сильно возбужденном атоме водорода, находящемся в скрещенных электрическом

и магнитном полях [20]. Диффузия Арнольда для классической частицы, движущейся в трехмерном канале, одна из границ которого промодулирована в двух взаимно перпендикулярных направлениях, рассматривалась в монографии Лихтенберга и Либермана [21].

В работе [22] было проведено квазиклассическое квантование модели диффузии Арнольда, называемой моделью стохастической накачки. При рассмотрении системы, состоящей из двух пар слабосвязанных осцилляторов, которые слабо взаимодействуют друг с другом, авторы показали, что такая квазиклассическая модель полностью эквивалентна задаче о распространении волнового пакета в одномерном случайном потенциале.

Все известные нам исследования диффузии Арнольда имеют в своей основе ее классическую модель. Однако необходимо понять, каково влияние диффузии Арнольда на поведение квантовой системы. Ответ на этот вопрос далеко не тривиален, поскольку ранее предполагалось, что квантовые эффекты могут полностью подавить экспоненциально слабую диффузию даже в квазиклассическом режиме.

С развитием нанотехнологий и общей миниатюризацией современных устройств актуальной задачей является изучение самых разных эффектов квантового хаоса, которые так или иначе могут проявляться в этих системах. Одним из таких интересных эффектов как раз и является квантовая диффузия Арнольда.

Цели и задачи работы

Цель работы состоит в изучении особенностей проявления диффузии Арнольда в квантовых системах на примере двух моделей с 2.5 степенями свободы. В связи с этим в работе решаются следующие задачи:

1. проводится расчет диффузии Арнольда в соответствующих классических системах для того, чтобы сделать возможным сравнение получаемых результатов в классической и квантовой областях;
2. определяется область параметров задачи, в которой может иметь место квантовая диффузия Арнольда, — такие значения параметров, при которых с одной стороны обеспечивается стохастичность на резонансах, а с другой стороны соседние резонансы далеки от момента их перекрытия;
3. проводится решение стационарного уравнения Шрёдингера для состояний, отвечающих резонансу связи двух степеней свободы, после чего проводится их классификация и изучение структуры волновых функций и энергетического спектра;
4. проводится решение нестационарного уравнения Шрёдингера для различных начальных условий с целью построения оператора эволюции системы за один период внешнего поля;
5. находятся собственные функции и собственные значения оператора эволюции — квазиэнергетические функции и спектр квазиэнергий, изучаются их свойства с точки зрения проявления в системе слабого квантового хаоса;

6. проводится сравнение диффузии Арнольда в классическом и квантовом случаях, выявляются их сходства и различия;
7. обсуждается механизм динамической локализации, известной ранее для систем с меньшей размерностью, определяются ее параметры.

Научная новизна диссертации

Данная работа является первым исследованием квантовой диффузии Арнольда — особого типа динамики квантовых систем с числом степеней свободы $N > 2$. Такое исследование проводится впервые с использованием чисто квантового языка. В диссертации проведено рассмотрение двух систем с двумя степенями свободы, помещенных во внешнее поле — двумерной квантовой точки и двумерного канала с гофрированной границей. Согласно общепринятой терминологии в таком случае говорят о 2.5 степени свободы. Для указанных систем впервые рассчитан коэффициент квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи. Установлено, что в некоторой области параметров характер его зависимости от интенсивности взаимодействия двух степеней свободы близок к соответствующей классической величине. Выяснено также, что на достаточно больших временах наблюдения квантовая диффузия Арнольда останавливается, что связано с проявлением динамической локализации в системе с $N = 2.5$, в отличие от известной ранее для модели ротатора с δ -толчками [2], где $N = 1.5$. Отмечено, что в условиях, когда в классический стохастический слой резонанса связи попадает лишь несколько квантовых состояний, квантовая диффузия Арнольда

подавляется, что связано с переходом через “границу Шуряка” [23].

Практическая значимость

Результаты, изложенные в данной работе, являются новыми, оригинальными и важны с точки зрения развития общей теории квантового хаоса. Их анализ может быть полезен для дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований, связанных с поведением мезоскопических систем во внешних полях.

Основные научные положения, выносимые на защиту

1. Впервые аналитически и численно исследовано универсальное явление — квантовая диффузия Арнольда — в двумерных системах, подверженных воздействию внешнего периодического во времени поля. Результаты развитого подхода могут быть использованы для описания мезоскопических систем, находящихся в электромагнитных полях большой амплитуды, т.е. в сильно нелинейных системах.
2. Проведены расчеты для двух мезоскопических систем — двумерной квантовой точки и двумерного канала с гофрированной границей, облучаемых переменным электромагнитным полем. При этом найдены стационарные электронные состояния, построены операторы эволюции систем за период внешнего поля, исследованы квазиэнергетические состояния, а также динамика конкретных начальных условий.
3. В исследованных квазиклассических системах стационарные со-

стояния на резонансах связи имеют следующую структуру. Энергетический спектр представляет собой последовательность групп уровней с внутренней структурой, подобной спектру Матье. Присепаратрисные состояния имеют наибольшую дисперсию распределения в базисах невозмущенных систем.

4. Проведенный анализ распределений электронной плотности для канала с гофрированной границей показал, что состояниям, попавшим в резонанс, можно поставить в соответствие группы классических резонансных траекторий.
5. При анализе временной динамики систем под действием внешнего переменного поля уже на этапе построения оператора эволюции можно отметить более высокую интенсивность переходов между присепаратрисными состояниями различных групп уровней, чем между состояниями, отвечающими центрам резонансов, или слабовозмущенными состояниями, не попавшими в резонанс.
6. В двух указанных выше моделях рассчитаны коэффициенты квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи для широкого набора параметров систем. Показано, что во всех случаях значения квантового коэффициента диффузии оказываются на один-два порядка ниже классических результатов.
7. Квантовая диффузия Арнольда проявляется в квазиклассической области и в отличие от классической диффузии, имеет порог по амплитуде возмущения. Этот результат напрямую связан с количеством квантовых состояний, попадающих в область классичес-

кого стохастического слоя. Квантовая диффузия может проявляться, лишь когда это число много больше единицы. В противном случае квантовые эффекты полностью подавляют диффузионную динамику волновых пакетов.

8. Обнаружен и исследован эффект остановки квантовой диффузии Арнольда через определенный промежуток времени вследствие динамической локализации. Это явление связано с тем, что получаемый в результате расчетов квазиэнергетический спектр системы является дискретным, число эффективно занятых в эволюции квазиэнергетических состояний конечно, а также и с тем, что они имеют конечную величину дисперсии распределения по группам стационарных состояний (вдоль резонанса связи). В данном случае динамическая локализация имеет место в системах с числом степеней свободы $N = 2.5$, в то время как в исследовавшейся ранее модели ротатора с периодическими толчками $N = 1.5$ [2].

Апробация результатов

По результатам исследований, отраженных в диссертации, опубликовано 13 научных работ, из них 5 журнальных статей [24]-[28], 1 статья в сборнике [29], а также 7 работ в сборниках трудов и тезисов конференций [30]-[36]. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Progress in Nonlinear Science” (Н. Новгород, 2–6 июля 2001 г.).

2. Всероссийская Школа “Нелинейные волны – 2002” (Н. Новгород, 2–9 марта 2002 г.).
3. Международная конференция “Dynamical Chaos in Classical and Quantum Physics” (ИЯФ им. Г.И. Будкера, Новосибирск, 4–9 августа 2003 г.)
4. Вторая Летняя научная школа ФНП “Династия” (пос. Московский, Моск. обл-ть, 17–21 июля 2005 г.)
5. VI–X Нижегородские сессии молодых ученых (Н. Новгород, 2001–2005 гг.).

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из Введения, трёх Глав, Заключение, Приложения и списка литературы из 56 наименований. Объём диссертации составляет 105 страниц. В диссертации приведено 25 рисунков.

Во Введении рассматривается актуальность работы, формулируются её цели и положения, выносимые на защиту. Обсуждаются методы и подходы к решению поставленных задач, описывается новизна, практическая значимость и апробация работы.

В первой Главе приводится обзор работ, послуживших отправной точкой к исследованиям, изложенным в диссертации. Так здесь кратко излагается теория классической диффузии Арнольда, перечисляются основные модели, на примере которых она изучалась. Подробно рассмотрена система из двух взаимодействующих осцилляторов, на один из которых действует внешнее переменное электрическое поле.

В заключении первой Главы (п. 1.3) кратко обсуждается физика наноструктур, помещенных во внешнее поле, с точки зрения расчета электромагнитного отклика в условиях слабого хаоса.

Во второй Главе рассматривается динамика электрона в двумерной квантовой точке — квантовом аналоге системы двух взаимодействующих осцилляторов, обсужденной ранее. Здесь строятся состояния, отвечающие квантовому резонансу связи двух осцилляторов. П. 2.2 посвящен изучению эволюции таких состояний во внешнем переменном поле: в рамках резонансного приближения находится оператор эволюции системы за один период поля, изучается структура квазиэнергетических функций, далее строится оператор эволюции за произвольное число периодов поля, что и дает возможность следить за эволюцией различных начальных условий на больших временах. П. 2.2.5 посвящен обсуждению явления динамической локализации, подобной Андерсоновской локализации в случайном потенциале и имеющей место в данной системе, обсуждаются их общие черты и различия. Результаты второй Главы кратко изложены в п. 2.3.

Третья Глава посвящена изучению динамики электрона в двумерном канале, одна из стенок которого ровная, а другая имеет синусоидальную форму, помещенном в переменное электрическое поле. Подобные системы уже рассматривались в ряде работ как классически, так и квантово. Однако квантовые исследования проводились в основном либо в регулярном режиме, либо в режиме сильного хаоса, а изучаемая нами диффузия Арнольда требует наличия слабого хаоса. В п. 3.1 обсуждается классическая модель, структура фазового про-

странства, а также механизм диффузии Арнольда. П. 3.2 посвящен построению состояний, отвечающих квантовому резонансу связи. Для решения стационарного уравнения Шрёдингера здесь вводятся новые переменные, добавляющие в уравнение новые слагаемые, однако выпрямляющие стенки канала. Бóльшая часть данного пункта посвящена обсуждению особенностей квантовых состояний в центре и на краях зоны Бриллюэна по сравнению с состояниями с произвольным волновым вектором. Интересно, что на резонансе удастся выделить состояния, отвечающие группам классических околорезонансных траекторий. В п. 3.3 проводится построение оператора эволюции системы во внешнем поле, обсуждается его структура, а также проводится расчет коэффициентов диффузии Арнольда вдоль резонансов связи в классическом и квантовом случаях. Поскольку данная система интересна с точки зрения возможности экспериментальной реализации, в п. 3.4 наряду с краткими выводами Главы приведены параметры возможного эксперимента по наблюдению квантовой диффузии Арнольда в канале с гофрированной границей.

В Заключение сформулированы выводы, сделанные по результатам работы.

Работа выполнена на кафедре теоретической физики физического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

Глава 1

Классическая диффузия Арнольда

Первая часть данной Главы посвящена классической диффузии Арнольда и обзору ряда моделей, иллюстрирующих это явление. Материал базируется в основном на известной работе Чирикова [5], а также книге Либермана и Лихтенберга [21]. Вторая часть Главы является экскурсом в физику наноструктур, помещенных в переменное поле, рассказывает об особенностях режима слабого квантового хаоса и его влиянии на электромагнитный отклик системы.

1.1 Классическая диффузия Арнольда

Одно из ярких проявлений слабого хаоса в классических системах — *диффузия Арнольда* — была теоретически предсказана в 1964 г. в работе российского математика В.И. Арнольда [12]. Суть этого универсального динамического явления заключается в следующем. В $2N$ -мерном фазовом пространстве резонансы, определяемые соотношением $(\vec{m} \cdot \vec{\omega}) = 0$, где $\vec{\omega}$ — это набор частот, а вектор $\vec{m}$ имеет целочисленные компоненты, образуют $(2N - 1)$ -мерные поверхности. В то же время КАМ-

поверхности являются N -мерными [21]. Условие, при котором возможно пересечение стохастических слоев, окружающих различные резонансы, можно получить из простых геометрических соображений. Для того, чтобы резонансные поверхности не были изолированы друг от друга инвариантными поверхностями, необходимо чтобы их размерности отличались более чем на единицу, т.е. должно выполняться условие:

$$N < (2N - 1) - 1. \quad (1.1)$$

Отсюда получаем $N > 2$. Таким образом, пересечение стохастических слоев различных резонансов является общим свойством систем с числом степеней свободы, бóльшим двух. Пересекаясь друг с другом, резонансы образуют в фазовом пространстве единую всюду плотную “паутину”. Медленно диффундируя вдоль стохастических слоев этой сети, за достаточно долгое время система может уйти от своего начального состояния очень далеко.

Для наглядной геометрической интерпретации полученного условия рассмотрим систему, невозмущенный гамильтониан которой имеет вид:

$$H = \sum_{i=1}^N I_i^2. \quad (1.2)$$

На рис. 1.1(а) изображен фрагмент пространства переменных действия для гамильтониана (1.2) при $N = 2$. Изоэнергетическая поверхность является в данном случае окружностью, а резонансные поверхности — прямыми, проходящими через начало координат (две из них также показаны на рисунке). Задавая начальные условия на изоэнергетической поверхности в области пересечения ее резонансной прямой, будем попадать в область нелинейного резонанса, которая имеет свою конечную

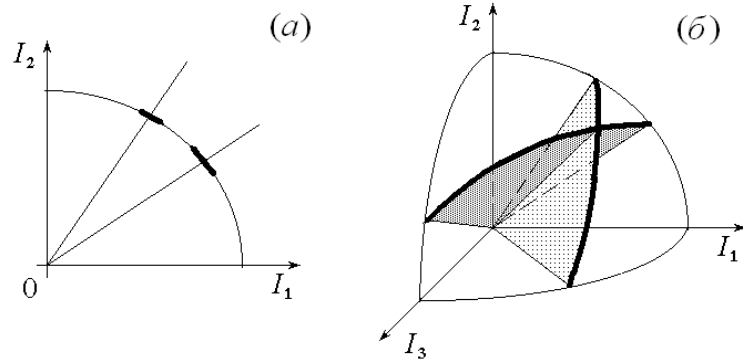


Рис. 1.1: Изоэнергетические и резонансные поверхности для модели (1.2) при различном числе степеней свободы: (а) $N = 2$ и (б) $N = 3$.

ширину, пропорциональную квадратному корню из амплитуды возмущения. Стохастические слои разных резонансов изолированы друг от друга КАМ-поверхностями (в данном случае — точками на изоэнергетической поверхности), поэтому переход из стохастического слоя одного резонанса в стохастический слой другого невозможен до тех пор, пока области резонансов не перекроются друг с другом. Таким образом, в случае двух степеней свободы переход с одной резонансной поверхности на другую может произойти лишь в случае, когда амплитуда возмущения превышает некоторое пороговое значение, причем только в случае полного хаоса. Движение же вдоль стохастического слоя какого-либо из резонансов ограничивается сохранением энергии.

На рис. 1.1(б) показан фрагмент пространства переменных действия для того же гамильтониана, но с $N = 3$. В данном случае изоэнергетическая поверхность является сферой, а резонансные поверхности — плоскостями, проходящими через начало координат и пересекающимися между собой по прямым линиям. Что самое важное, они также пересекаются между собой и на поверхности постоянной энергии. Тогда

становится очевидным, что, независимо от ширины самих резонансов, в местах такого пересечения возможны переходы с одного резонанса на другой. Таким образом, системы с тремя и более степенями свободы отличаются двумя существенными особенностями [21]:

1. КАМ-поверхности более не разделяют одну стохастическую область от другой, поэтому стохастические слои разных резонансов пересекаются друг с другом, образуя в фазовом пространстве единую всюду плотную “паутину”.
2. Сохранение энергии не препятствует движению вдоль стохастических слоев в пределах изоэнергетической поверхности, поэтому за достаточно большое время траектория, переходя от слоя к слою, охватывает всю изоэнергетическую поверхность, подходя сколь угодно близко к любой ее точке.

Диффузия Арнольда является основным механизмом внутренней диффузии вдоль стохастических слоев. Как было отмечено в [12], и что особенно важно, такая неустойчивость является универсальной в том смысле, что не существует критической величины возмущения, необходимой для ее возникновения, хотя скорость диффузии и стремится к нулю при уменьшении амплитуды возмущения.

Классическая диффузия Арнольда впервые наблюдалась в численных экспериментах [13], а позже подробно, в том числе аналитически, изучалась в работах [5, 14, 15]. Также была обнаружена связь данного явления с задачей динамики трех гравитационно взаимодействующих тел [16, 17], динамики галактик [18] и движения элементарных частиц в ускорителе [19], а также с задачей о сильно возбужденном атоме водо-

рода, находящемся в скрещенных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях [20]. В монографии Лихтенберга и Либермана [21] была рассмотрена диффузия Арнольда для частицы, движущейся в трехмерном канале, одна из границ которого промодулирована в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

1.2 Модель двух связанных осцилляторов

Следуя работе [5], рассмотрим простую динамическую модель, хорошо иллюстрирующую диффузию Арнольда. Гамильтониан этой модели имеет вид

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{x^4 + y^4}{4} - \mu xy - f(t)x, \quad (1.3)$$

где μ — малый параметр, $f(t)$ — слабая переменная во времени сила. Таким образом, данная система состоит из двух нелинейных осцилляторов со слабой линейной связью (параметр μ), причем на один из осцилляторов действует периодическая внешняя сила $f(t)$. В дальнейшем нас будет интересовать окрестность резонанса связи, когда $\omega_x \approx \omega_y$.

Перейдем прежде всего к переменным действие-угол невозмущенной системы ($\mu = f(t) = 0$). Невозмущенный гамильтониан

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2} + \frac{x^4 + y^4}{4} \quad (1.4)$$

описывает два независимых осциллятора с сохраняющимися энергиями E_x и E_y . Выражение для переменной действия получается обычным образом

$$I_x = \frac{1}{2\pi} \oint p_x dx = \frac{2}{\pi} \sqrt{2E_x} \int_0^{x_{max}} \sqrt{1 - \frac{x^4}{4E_x}} dx, \quad (1.5)$$

где $x_{max} = (4E_x)^{1/4}$ — амплитуда x -колебаний. Вводя новую переменную $\chi = x/x_{max}$, получаем

$$I_x = \frac{4}{\pi} E_x^{3/4} \int_0^1 \sqrt{1 - \chi^4} d\chi = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} E_x^{3/4} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad (1.6)$$

где $K(1/\sqrt{2}) \approx 1.8541$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Соотношение (1.6) устанавливает связь между переменной действия I и энергией E для каждого из осцилляторов. Тогда невозмущенный гамильтониан (1.4) принимает вид

$$\overline{H}_0 = A(I_x^{4/3} + I_y^{4/3}), \quad (1.7)$$

где

$$A = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}K(1/\sqrt{2})} \right)^{4/3} \approx 0.8671. \quad (1.8)$$

Частоты колебаний равны

$$\omega_{x,y} = \frac{\partial \overline{H}_0}{\partial I_{x,y}} = \frac{4}{3} A I_{x,y}^{1/3}. \quad (1.9)$$

Решение выражается через эллиптические функции и имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{max} \operatorname{cn}(\omega t) = x_{max} \cdot \frac{\pi\sqrt{2}}{K(1/\sqrt{2})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[(2n-1)\omega t]}{\operatorname{ch}[\pi(n-1/2)]} \approx \\ &\approx x_{max} \cdot \left(0.9550 \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega t}{23} + \frac{\cos 5\omega t}{23^2} + \dots \right). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Как видно из анализа коэффициентов последней суммы, независимо от амплитуды колебаний вклад гармоник очень мал, и мы вполне можем сохранить только первый член этого разложения. Введя новую угловую переменную $\Theta = \omega t$, запишем полный гамильтониан (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \overline{H} &= A(I_x^{4/3} + I_y^{4/3}) - \\ &- \mu x_{max}(I_x) y_{max}(I_y) \cos \Theta_x \cos \Theta_y - f_0 x_{max}(I_x) \cos \Theta_x f(t), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $x_{max} = (4A)^{1/4}I_x^{1/3}$, $y_{max} = (4A)^{1/4}I_y^{1/3}$ — амплитуды колебаний, полученные из сопоставления (1.4) и (1.7).

Вблизи резонанса связи разность $\Theta_x - \Theta_y$ является медленной функцией времени. Перейдем поэтому с помощью производящей функции

$$F_2 = (\Theta_x - \Theta_y)I_1 + (\Theta_x + \Theta_y)I_2, \quad (1.12)$$

к новым переменным

$$\theta_1 = \Theta_x - \Theta_y, \quad \theta_2 = \Theta_x + \Theta_y. \quad (1.13)$$

Тогда

$$I_x = \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_x} = I_1 + I_2, \quad I_y = \frac{\partial F_2}{\partial \Theta_y} = -I_1 + I_2. \quad (1.14)$$

В окрестности резонанса связи $I_x \approx I_y$, так что $I_1 \ll I_2$. Выражая гамильтониан (1.11) через новые переменные (1.13), (1.14) и разлагая невозмущенную часть по I_1 , получаем выражение для нового гамильтониана

$$K = 2AI_2^{4/3} + \frac{G}{2}I_1^2 - F \cos \theta_1 - F \cos \theta_2 - x_{max}(I_2) \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)f(t), \quad (1.15)$$

где

$$G(I_2) = \frac{8}{9}AI_2^{-2/3}, \quad F(I_2) = \frac{\mu}{2}x_{max}(I_2)y_{max}(I_2). \quad (1.16)$$

Усреднение (1.15) по быстрой фазе θ_2 дает

$$\tilde{K} = 2AI_2^{4/3} + \frac{G}{2}I_1^2 - F \cos \theta_1. \quad (1.17)$$

Отсюда видно, что $I_2 \approx const$, $\omega_2 = 2\omega_x$, а переменные I_1 и θ_1 совершают медленные колебания на резонансе связи с частотой (для малых колебаний)

$$\omega_1 = \sqrt{FG} = \beta\sqrt{\mu}, \quad (1.18)$$

где $2\beta = \pi/K(1/\sqrt{2})$. Полуширина резонанса связи по частоте также может быть определена как [5]

$$(\Delta\omega)_\mu = \beta\sqrt{2\mu}. \quad (1.19)$$

Пусть теперь внешняя сила имеет вид

$$f(t) = f_0(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t), \quad (1.20)$$

тогда она будет порождать первичные резонансы на частотах Ω_1 и Ω_2 , полуширина которых по частоте оценивается как

$$(\Delta\omega)_{f_0} = \beta\sqrt{\frac{2f_0}{x_{max}}}, \quad (1.21)$$

а также множество вторичных резонансов. Таким образом, рассматриваемая система обладает тремя основными резонансами, каждый из которых имеет определенную ширину, и при определенных значениях амплитуд μ и f_0 они могут перекрыться. Условие этого перекрытия было впервые определено Чириковым [5]:

$$(\Delta\omega)_{f_0} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\Delta\omega)_\mu + (\Delta\omega)_{f_0} \geq \delta\Omega, \quad (1.22)$$

где $\delta\Omega = |\Omega_2 - \Omega_1|$. Тогда с учетом (1.19) и (1.21) получим условие для амплитуд возмущения, при котором происходит перекрытие трех резонансов

$$\sqrt{\frac{2f_0}{x_{max}}} + \sqrt{\mu} \geq \frac{\delta\Omega}{2\beta}. \quad (1.23)$$

Рассмотрим случай, когда начальное условие по x находится между внешними резонансами, т.е.

$$\omega_x = \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}. \quad (1.24)$$

Действуя как малое возмущение, внешнее поле порождает хаотический характер движения на сепаратрисе резонанса связи (в переменных I_1, θ_1), вызывая тем самым перемещение траектории как поперек стохастического слоя, так и диффузию Арнольда вдоль него (вдоль направления I_2). Схематично данный процесс показан на рис. 1.2. Коэффициент диффузии вдоль резонанса связи можно оценить по формуле [5, 21]

$$D = \frac{2x_{max}^2 \omega_x^2}{\omega_1 \ln(32e/w_1)} \cdot e^{-\frac{\pi \delta \Omega}{2\omega_1}}, \quad (1.25)$$

где w_1 — полуширина стохастического слоя резонанса связи.

Коэффициент классической диффузии Арнольда был измерен для данной модели путем численного моделирования при следующих значениях параметров: $\Omega_1 = 0.2094$, $\Omega_2 = 0.2513$, поэтому $\omega_x = 0.23035$, что соответствует амплитуде колебаний $x_{max} = 0.2719$. Период внешнего поля в таком случае есть $T = 5 \cdot 2\pi/\Omega_1 = 6 \cdot 2\pi/\Omega_2 \approx 150$. Начальные условия выбирались так, чтобы поместить систему внутрь стохастического слоя резонанса связи, что соответствует $\theta_1 = \Theta_x - \Theta_y = \pi$, т.е. колебаниям в противофазе. Оба параметра возмущения были выбраны таким образом, чтобы выполнялось соотношение $f_0/\mu = 0.01$. Такая малая величина отношения определялась желанием сместить момент перекрытия резонансов (см. (1.23)) в область наибольших значений μ .

Отметим, что взятые нами параметры отличаются от приведенных в исходной работе [5] ($\Omega_1 = 0.2167$, $\Omega_2 = 0.2513$). Это связано с желанием иметь возможность сравнить результат, полученный здесь, с аналогичным результатом для соответствующей квантовой системы (см. Главу 2).

Для получения количественной информации о происходящих в сис-

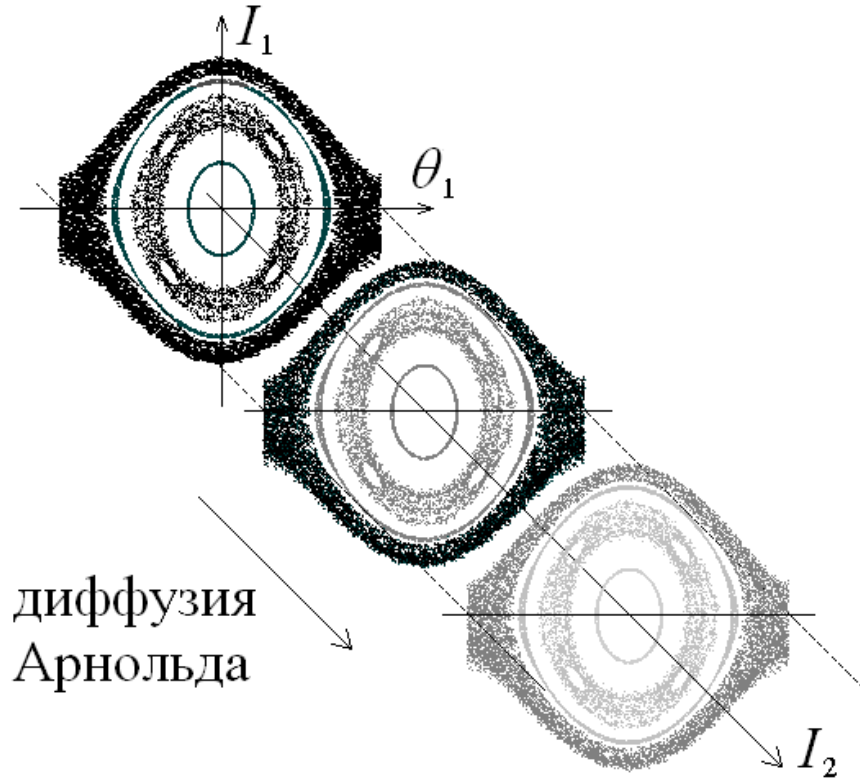


Рис. 1.2: Сечение фазового пространства классической системы (1.3) в резонансных переменных (см. (1.13), (1.14)). Показан не только стохастический слой, образованный на сепаратрисе резонанса связи, но и стохастический слой вторичного резонанса, окруженный с обеих сторон относительно регулярными траекториями.

теме процессах “коэффициент диффузии” рассчитывался следующим образом [5, 17]

$$D_n = \frac{\overline{(\Delta \bar{H})^2}}{10^n \cdot T}. \quad (1.26)$$

Здесь $\bar{H}$ — это величина полного гамильтониана системы (1.3), полученная усреднением на промежутке $10^n \cdot T$. Второе усреднение в (1.26) означает следующее. Полное время счета (обычно это $10^5 \cdot T$) делилось на равные промежутки по $10^n \cdot T$, на каждом из которых определялось значение $\bar{H}$. Далее определялись разности между $\bar{H}$, соответствующи-

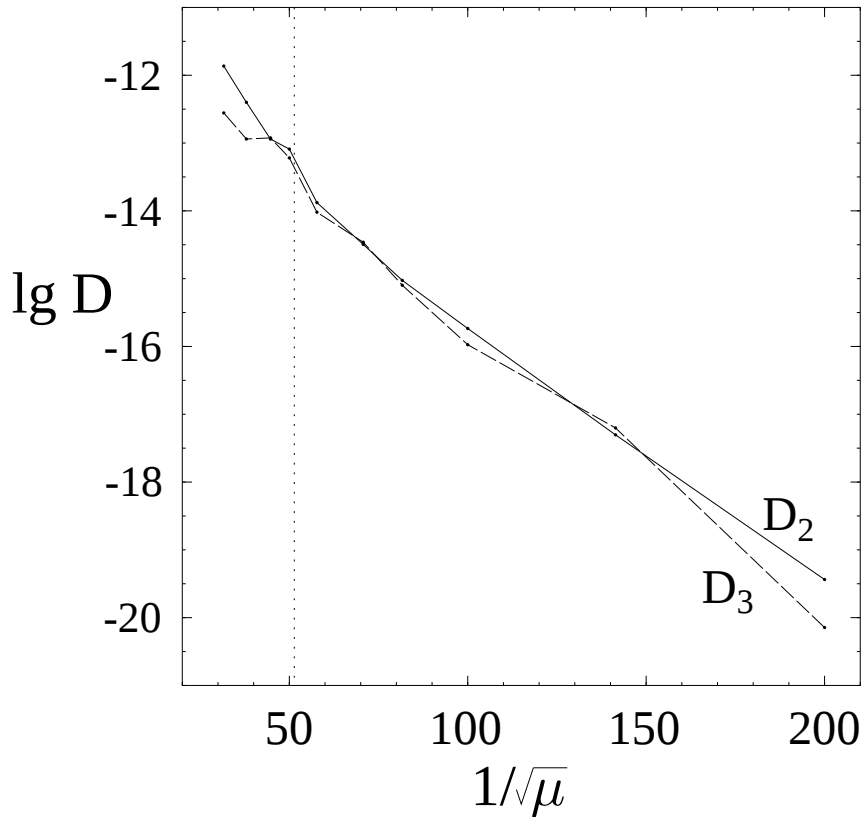


Рис. 1.3: Зависимость коэффициента классической диффузии Арнольда в системе (1.3) от параметра взаимодействия осцилляторов μ . Вертикальная черта соответствует теоретической оценке границы перекрытия трех резонансов.

ми соседним интервалам времени, и усреднялись между собой. Столь громоздкая процедура определения коэффициента диффузии Арнольда была выбрана для того, чтобы снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы и подчеркнуть общую тенденцию роста разброса ее значений.

Экспериментальные данные по коэффициенту классической диффузии приведены на рис. 1.3. Отчетливо видно, что в довольно широком интервале значений параметра μ коэффициенты D_2 и D_3 практически равны друг другу и убывают линейно с ростом величины $1/\sqrt{\mu}$, под-

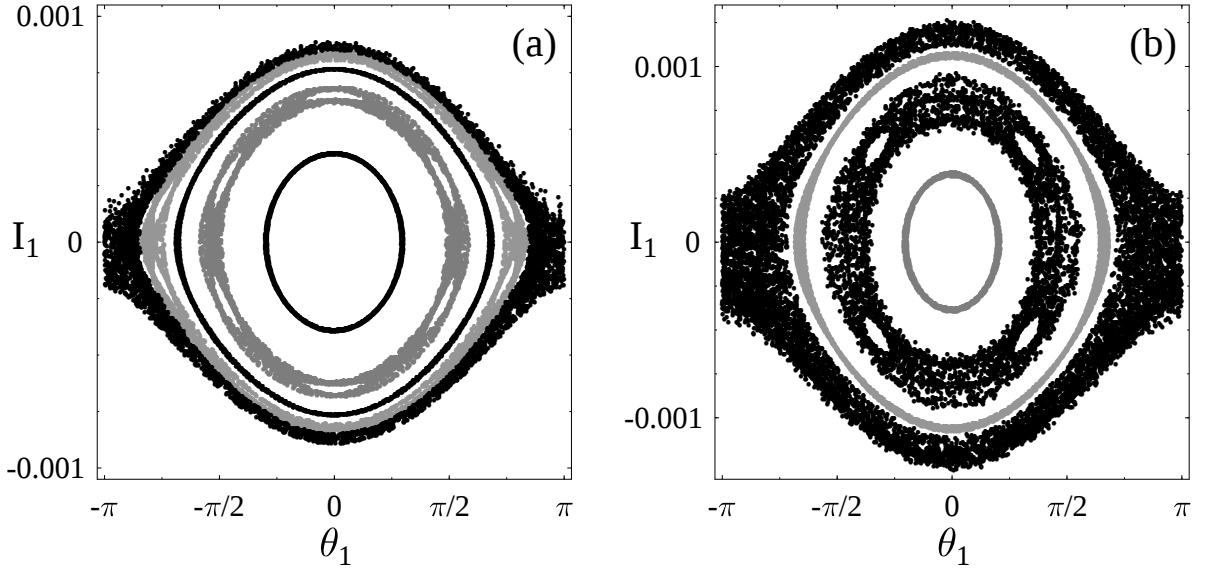


Рис. 1.4: Структура резонанса связи; показаны — стохастический слой, образованный в сепаратрисной области и стохастические слои вторичных резонансов, окруженные с обеих сторон регулярными траекториями. (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$.

тверждая тем самым общий характер зависимости $D \propto \exp(-1/\sqrt{\mu})$, полученный путем аналитических оценок (см. (1.25)). Появление заметных различий между D_2 и D_3 означает, что на место диффузионного характера временной эволюции приходят другие ее механизмы.

Как было показано Вечеславовым [42, 43], в случае, когда возмущение имеет несколько гармонических составляющих, главенствующую роль в формировании хаоса на сепаратрисе играют вторичные резонансы колебаний в потенциальной яме основного резонанса (в нашем случае — резонанса связи) с периодическим внешним полем на комбинационных частотах и, в частности, на частоте $\delta\Omega$. Общее условие вторичных резонансов для рассматриваемого нами случая может быть записано так:

$$n \cdot \tilde{\omega}(I_2) = m \cdot \delta\Omega, \quad (1.27)$$

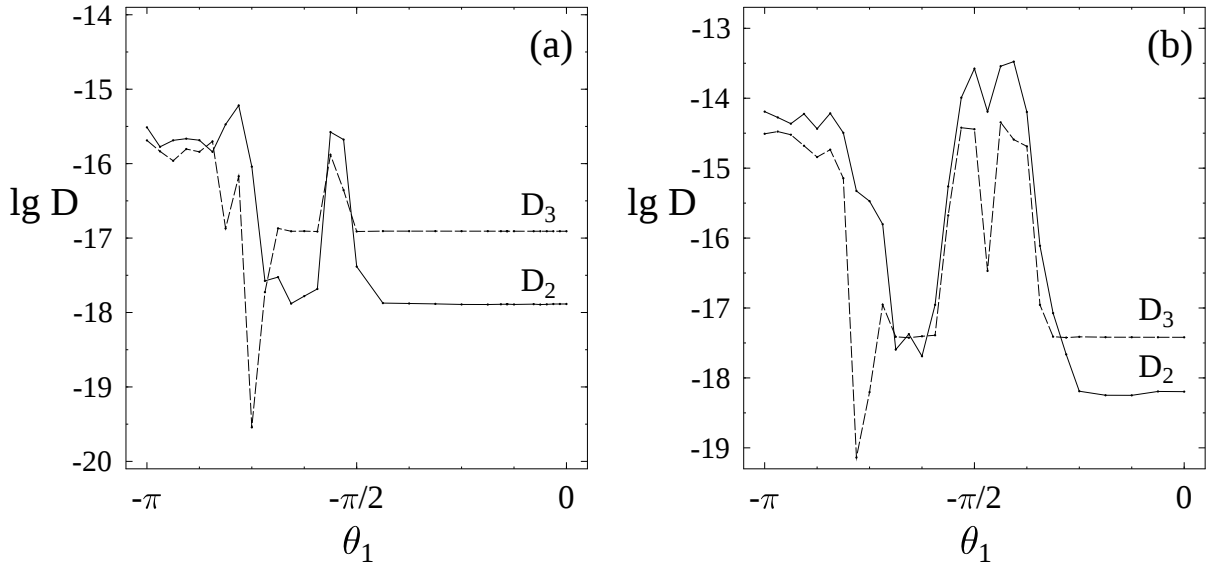


Рис. 1.5: Зависимость коэффициента классической диффузии от начальных условий внутри резонанса связи. Для всех точек начальное значение действия $I_1 = 0$. (a) $\mu = 10^{-4}$, (b) $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$.

где зависимость $\tilde{\omega}(I_1)$ указывает на то, что частота колебаний в потенциальной яме резонанса связи зависит от значения действия I_1 в ней — эта частота уменьшается с приближением к сепаратрисе; n и m — целые числа. На рис. 1.4 показана структура резонанса связи: кроме основного стохастического слоя, образованного в сепаратрисной области, ясно видны стохастические слои вторичных резонансов, которые отделены от сепаратрисного слоя относительно регулярными траекториями. Также было отмечено, что именно вторичные резонансы такого типа определяют главным образом ширину стохастического слоя сепаратрисы, поэтому стандартные оценки этой величины по формулам для одночастотного возмущения становятся неприменимы. Этот факт оказывается особенно существенным при изучении квантовой модели.

Как показали результаты численных экспериментов, за счет на-

личия широких стохастических слоев, сравнимых по своей ширине со стохастическим слоем сепаратрисы, диффузия Арнольда также имеет место и по вторичным резонансам, причем коэффициент этой диффузии оказывается по порядку величины равным коэффициенту диффузии по сепаратрисе. Данный факт хорошо иллюстрирует рис. 1.5, на котором показана зависимость коэффициента диффузии от начального значения фазы θ_1 при постоянной величине I_1 , равной нулю; в этом случае система всегда оказывается внутри резонанса связи.

Глава 2

Динамика электрона в квантовых точках в переменном электрическом поле

Данная Глава посвящена изучению динамики электрона в двумерной квантовой точке, помещенной в переменное электрическое поле. Обзор результатов по соответствующей классической модели изложен в Главе 1.

2.1 Квантовый резонанс связи в модели взаимодействующих осцилляторов

В предыдущей главе в качестве иллюстрации была рассмотрена простая динамическая модель — два взаимодействующих нелинейных осциллятора, на один из которых действует периодическая внешняя сила с двумя гармоническими составляющими. Рассмотрим теперь аналогичную квантовую систему. Соответствующий одноэлектронный га-

мильтониан имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_x^0 + \hat{H}_y^0 - \mu xy - f_0 x (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t), \quad (2.1)$$

где

$$\hat{H}_x^0 = \frac{\hat{p}_x^2}{2} + \frac{x^4}{4}, \quad \hat{H}_y^0 = \frac{\hat{p}_y^2}{2} + \frac{y^4}{4}, \quad (2.2)$$

μ и f_0 — малые параметры (там, где отдельно это не оговорено, выполняется соотношение $f_0/\mu = 0.01$). Операторы проекций импульса и координаты удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$[\hat{p}_x, x] = -i\hbar_0, \quad [\hat{p}_y, y] = -i\hbar_0, \quad (2.3)$$

где $\hbar_0$ — безразмерная эффективная постоянная Планка. Во всех проведенных экспериментах $\hbar_0 = 1.77321 \cdot 10^{-5}$.

Для того, чтобы рассматривать в дальнейшем временную эволюцию какого-либо начального условия в системе (2.1), необходимо в первую очередь найти стационарные состояния системы двух взаимодействующих нелинейных осцилляторов (когда $f_0 = 0$) с целью изучения структуры квантового резонанса связи. Для нахождения стационарных состояний соответствующего гамильтониана

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2} + \frac{x^4 + y^4}{4} - \mu xy, \quad (2.4)$$

волновую функцию представим в виде

$$\psi(x, y) = \sum_{n,m} c_{nm} \psi_n^0(x) \psi_m^0(y), \quad (2.5)$$

где $\psi_n^0(x)$, $\psi_m^0(y)$ — собственные функции для $\hat{H}_x^0$, $\hat{H}_y^0$ соответственно. Тогда коэффициенты $c_{n,m}$ будут удовлетворять следующей системе

уравнений:

$$E c_{nm} = (E_n^0 + E_m^0) c_{nm} - \mu \sum_{n', m'} x_{nn'} y_{mm'} c_{n'm'}, \quad (2.6)$$

где E_n^0 и E_m^0 — собственные значения операторов $\hat{H}_x^0$ и $\hat{H}_y^0$ соответственно.

Изучаемый в данном случае режим — режим резонанса связи — соответствует случаю, когда выполняется условие $\omega_{n_0} = \omega_{m_0}$, где $\hbar_0 \omega_{n_0} = E_{n_0}^{0'}$, $\hbar_0 \omega_{m_0} = E_{m_0}^{0'}$, а $n_0 = m_0$ — центр резонанса связи. В этой области удобно разложить функции $E_n^0(n)$ и $E_m^0(m)$ в ряд Тейлора [44] по малым отклонениям $(n - n_0)$ и $(m - m_0)$ соответственно, ограничиваясь лишь членами второго порядка, следующим образом

$$E_n^0(n) \approx E_{n_0} + \hbar_0 \omega_{n_0} (n - n_0) + \frac{E_{n_0}''}{2} (n - n_0)^2. \quad (2.7)$$

Вводя далее обозначения $(n - n_0) \equiv k$, $(m - m_0) \equiv l$ и $\omega \equiv \omega_{n_0}$, перепишем систему (2.6) с учетом (2.7) в новых индексах k и l , получим

$$E c_{kl} = \left(2E_{n_0} + \hbar_0 \omega (k + l) + \frac{E_{n_0}''}{2} (k^2 + l^2) \right) c_{kl} - \mu \sum_{k', l'} x_{kk'} y_{ll'} c_{k'l'}. \quad (2.8)$$

Далее вместо k и l удобно характеризовать квантовые состояния новыми индексами $p = k + l$ и k , а полную энергию отсчитывать от уровня $2E_{n_0}$. Тогда система (2.8) примет следующий вид

$$E c_{kp} = \left[\hbar_0 \omega p + E_{n_0}'' \left(k^2 - pk + \frac{p^2}{2} \right) \right] c_{kp} - \mu \left(\dots + \sum_{k'} x_{kk'} y_{p-k, -1-k'} c_{k', -1} + \sum_{k'} x_{kk'} y_{p-k, -k'} c_{k', 0} + \sum_{k'} x_{kk'} y_{p-k, 1-k'} c_{k', 1} + \dots \right). \quad (2.9)$$

Поскольку матричные элементы x_{mn} (или y_{mn}) в представлении нелинейных осцилляторов равны нулю, если индексы m и n обладают одинаковой четностью, то легко видеть, что полное решение системы

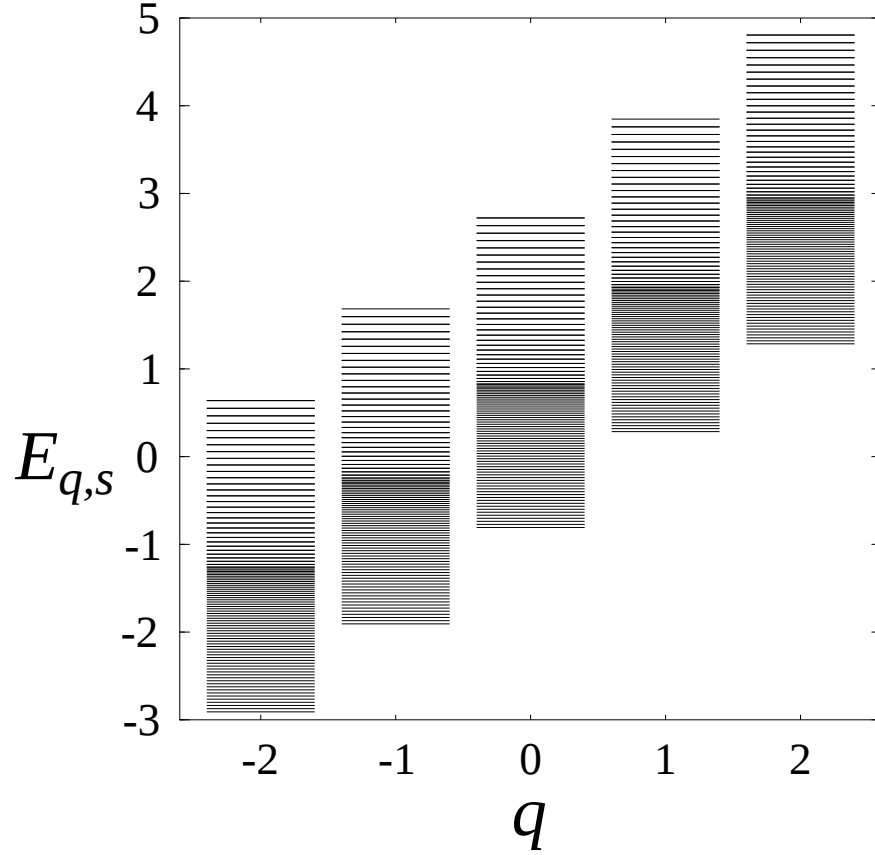


Рис. 2.1: Фрагмент энергетического спектра системы (2.4) в единицах $\hbar_0\omega$ для $\mu = 10^{-4}$ и $n_0 = 446$. Показаны пять групп по 121 уровню в каждой группе.

(2.9) разделяется на две независимые части: одна из этих частей характеризуется четными значениями индекса p , другая — нечетными. В соответствии с этим положением, численное решение системы (2.9) проводилось в два этапа — для четных значений p и нечетных значений p — с последующим объединением результатов.

Фрагмент энергетического спектра системы двух взаимодействующих осцилляторов показан на рис. 2.1. Стационарный спектр представляет собой последовательность отдельных групп со схожей структурой уровней внутри каждой группы. Расстояние между соседними

группами составляет $\hbar_0\omega$. Структура спектра внутри каждой группы напоминает спектр Матье [45], что довольно типично для квантового нелинейного резонанса [41]. Нижние уровни расположены практически эквидистантно, и характерное расстояние между ними имеет порядок $\hbar_0\tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}$ — классическая частота малых фазовых колебаний на резонансе связи. В квантовом случае эта величина легко оценивается по формуле (подробнее см. Приложение А.1 и А.2)

$$\tilde{\omega} = \frac{2x_{n_0, n_0 \pm 1}}{\hbar_0} \sqrt{\mu E''_{n_0}}. \quad (2.10)$$

Точка сгущения уровней соответствует классической сепаратрисе нелинейного резонанса. Уровни, расположенные над сепаратрисной областью, являются практически вырожденными двукратно и соответствуют классическим “пролетным” состояниям, т.е. вращениям в двух противоположных направлениях. В соответствии с такой структурой спектра стационарные состояния на резонансе связи удобно характеризовать с помощью двух индексов — номера группы q и номера уровня внутри каждой группы s . В этом случае энергетический спектр системы может быть записан в следующем виде:

$$E_{q,s} = \hbar_0\omega q + E_{q,s}^M, \quad (2.11)$$

где $E_{q,s}^M$ есть Матье-подобный спектр группы с номером q .

Интерес представляет также и структура собственных функций, соответствующих резонансным состояниям. Так на рис. 2.2 показаны коэффициенты $|c_{k,p}|$ как функции k и p для некоторых состояний из центральной группы с $q = 0$. Рис. 2.2(а) соответствует состоянию с минимальным значением энергии, т.е. состоянию вблизи дна потенциальной

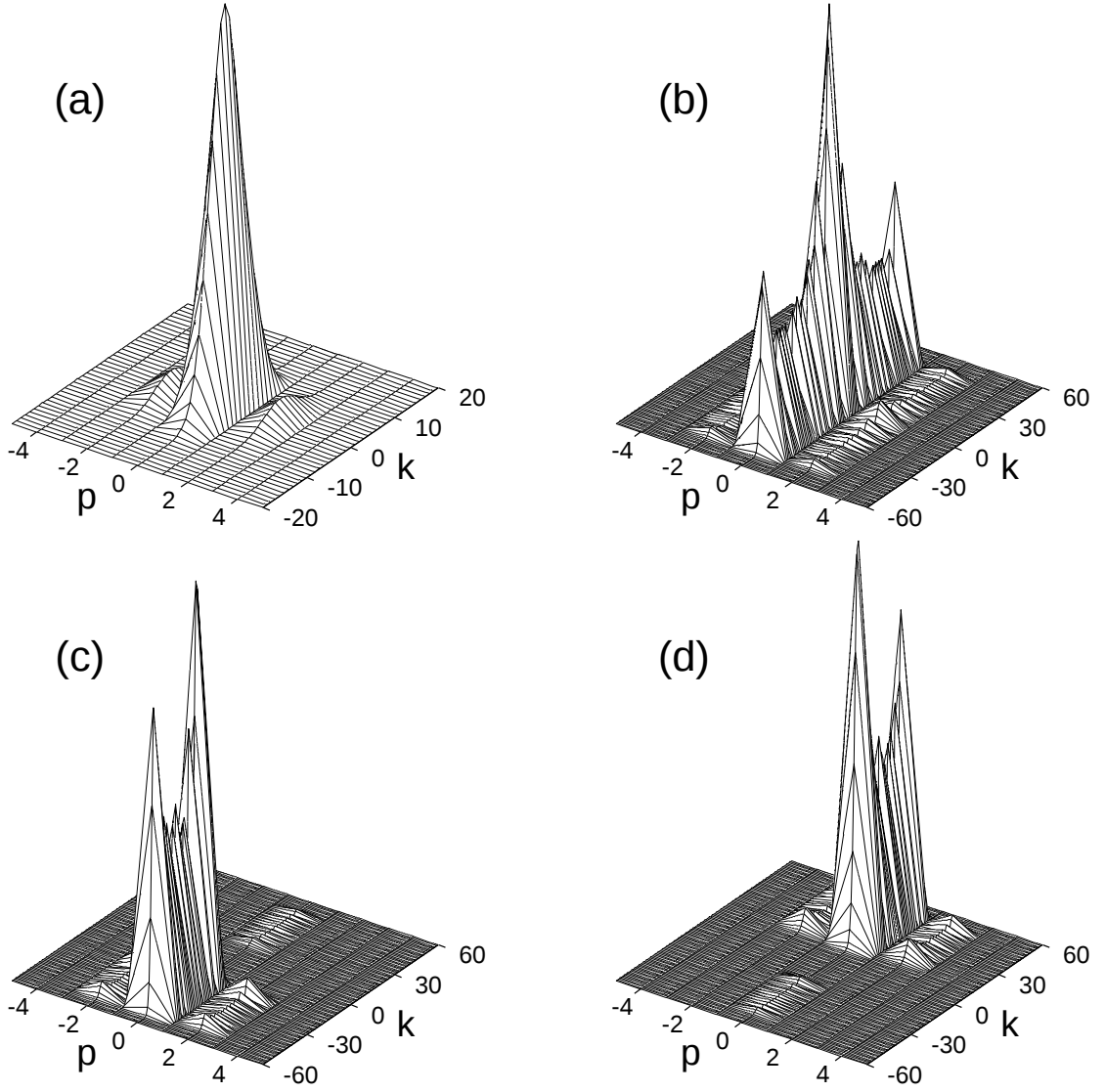


Рис. 2.2: Коэффициенты $|c_{k,p}|$ как функции k, p для некоторых состояний из центральной группы с $q = 0$ при тех же параметрах.

ямы резонанса связи. Рис. 2.2(b) отвечает состоянию из присепаратрисной области спектра: в нем “замешано” наибольшее число стационарных состояний исходных независимых осцилляторов. Рис. 2.2(c) и (d) относятся к одному из ранее двукратно вырожденных надсепаратрисных состояний; вырождение непосредственно сказывается на структуре коэффициентов $c_{k,p}$: оба распределения симметричны по отношению друг к другу относительно прямой $k = 0$.

2.2 Эволюция состояний во внешнем переменном поле

2.2.1 Оператор эволюции

Рассмотрим далее поведение системы двух взаимодействующих осцилляторов при условии, что на один из них действует периодическая во времени сила. Так как целью работы являлось изучение квантовой диффузии вдоль резонанса связи с возможностью сравнения результатов, полученных в аналогичной классической системе, начальные условия выбирались на резонансе связи и между резонансами x -го осциллятора на частотах Ω_1, Ω_2 , таким образом, выполнялось равенство $\omega = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Частоты внешней силы выбраны соизмеримыми (в безразмерных единицах $\Omega_1 = 0.2094, \Omega_2 = 0.2513$, так что $\Omega_1/\Omega_2 = 5/6$), поэтому внешнее поле имеет период $T = 5 \cdot 2\pi/\Omega_1 = 6 \cdot 2\pi/\Omega_2 \approx 150$.

Как известно, в случае, когда гамильтониан зависит от времени периодически, т.е. $\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t)$, решение нестационарного уравнения Шрёдингера, согласно теореме Флоке [17], может быть представлено в следующем виде: $\psi(x, y, t) = \exp\left(-\frac{i\varepsilon_Q t}{\hbar_0}\right) u_Q(x, y, t)$, где $u_Q(x, y, t+T) = u_Q(x, y, t)$ — есть так называемая квазиэнергетическая функция, а соответствующая ей величина ε_Q носит название квазиэнергии. Квазиэнергетические функции $u_Q(x, y, t)$ есть собственные функции оператора эволюции $\hat{U}$ за период внешнего поля T , каждой из которых соответствует собственное значение $\exp\left(-\frac{i\varepsilon_Q T}{\hbar_0}\right)$:

$$\hat{U}(T)u_Q(x, y, t) = \exp\left(-\frac{i\varepsilon_Q T}{\hbar_0}\right) u_Q(x, y, t). \quad (2.12)$$

Для построения оператора эволюции удобно выбрать базис стационар-

ной системы (2.4), поэтому представим квазиэнергетические функции в виде следующего ряда

$$u_Q(x, y) = \sum_{q,s} A_{q,s}^Q \psi_{q,s}(x, y), \quad (2.13)$$

где $\psi_{q,s}(x, y)$ — функции, описывающие стационарные состояния в системе (2.4). (В последней формуле у квазиэнергетической функции опущен аргумент t : это оправдано тем, что наблюдение системы осуществляется в жестко определенные моменты времени, кратные периоду внешнего поля T .) Таким образом, коэффициенты $A_{q,s}^Q$ есть собственные векторы оператора $\hat{U}(T)$ в представлении двух взаимодействующих нелинейных осцилляторов, которые могут быть найдены путем диагонализации соответствующей матрицы $U_{q,s;q',s'}(T)$.

Для заполнения матрицы $U_{q,s;q',s'}(T)$ существует следующая несложная процедура (см., например, [10]). Подействуем оператором эволюции на начальное состояние вида $C_{q,s}^{(q_0,s_0)}(0) = \delta_{q,q_0} \delta_{s,s_0}$,

$$U_{q,s;q',s'}(T) C_{q',s'}^{(q_0,s_0)}(0) = U_{q,s;q_0,s_0}(T) = C_{q,s}^{(q_0,s_0)}(T). \quad (2.14)$$

Коэффициенты $C_{q,s}^{(q_0,s_0)}(T)$ могут быть найдены путем численного интегрирования нестационарного уравнения Шрёдингера на промежутке $t \in [0; T]$; они составят столбец матрицы $U_{q,s;q_0,s_0}(T)$. Повторяя эту процедуру для различных начальных условий вида $C_{q,s}^{(q',s')}(0) = \delta_{q,q'} \delta_{s,s'}$, где $q' \neq q_0$, $s' \neq s_0$, мы заполним, таким образом, всю матрицу $U_{q,s;q',s'}(T)$.

Диагонализуя полученную матрицу оператора эволюции, получаем ее собственные значения и собственные векторы — спектр квазиэнергий ε_Q и квазиэнергетические функции $A_{q,s}^Q$. Теперь, зная их, можем

представить оператор эволюции в следующем виде:

$$U_{q,s;q',s'}(T) = \sum_Q A_{q,s}^Q A_{q',s'}^{Q*} \exp\left(-\frac{i\varepsilon_Q T}{\hbar_0}\right). \quad (2.15)$$

Возводя обе части этого равенства в степень N и используя условие ортогональности квазиэнергетических функций, можем найти вид оператора эволюции нашей системы за N периодов внешнего поля:

$$U_{q,s;q',s'}(NT) = \sum_Q A_{q,s}^Q A_{q',s'}^{Q*} \exp\left(-\frac{i\varepsilon_Q NT}{\hbar_0}\right). \quad (2.16)$$

Таким образом, чтобы узнать теперь, во что “превратится” в ходе временной эволюции на большие времена начальное условие вида $C_{q,s}^{(q_0,s_0)}(0) = \delta_{q,q_0} \delta_{s,s_0}$, достаточно проследить за соответствующей строкой в матрице $U_{q,s;q_0,s_0}(NT)$, взяв $N \gg 1$, например, $N = 100$ или $N = 1000$.

2.2.2 Резонансное приближение

Нестационарное уравнение Шрёдингера для системы (2.1) в представлении двух взаимодействующих осцилляторов имеет вид

$$i\hbar_0 \dot{C}_{q,s} = (\hbar_0 \omega q + E_{q,s}^M) C_{q,s} - f_0 \sum_{q',s'} x_{q,s;q',s'} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) C_{q',s'}. \quad (2.17)$$

В данном уравнении произведем замену функций $C_{q,s}(t)$ на более медленные $b_{q,s}(t)$ следующим образом

$$C_{q,s}(t) = b_{q,s}(t) \exp\left[-i\left(\omega q + \frac{E_{q,s}^M}{\hbar_0}\right)t\right], \quad (2.18)$$

тогда получим уравнение

$$i\hbar_0 \dot{b}_{q,s} = -f_0 \sum_{q',s'} x_{q,s;q',s'} (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) b_{q',s'} e^{-i\left(\omega(q'-q) + \frac{E_{q',s'}^M - E_{q,s}^M}{\hbar_0}\right)t}. \quad (2.19)$$

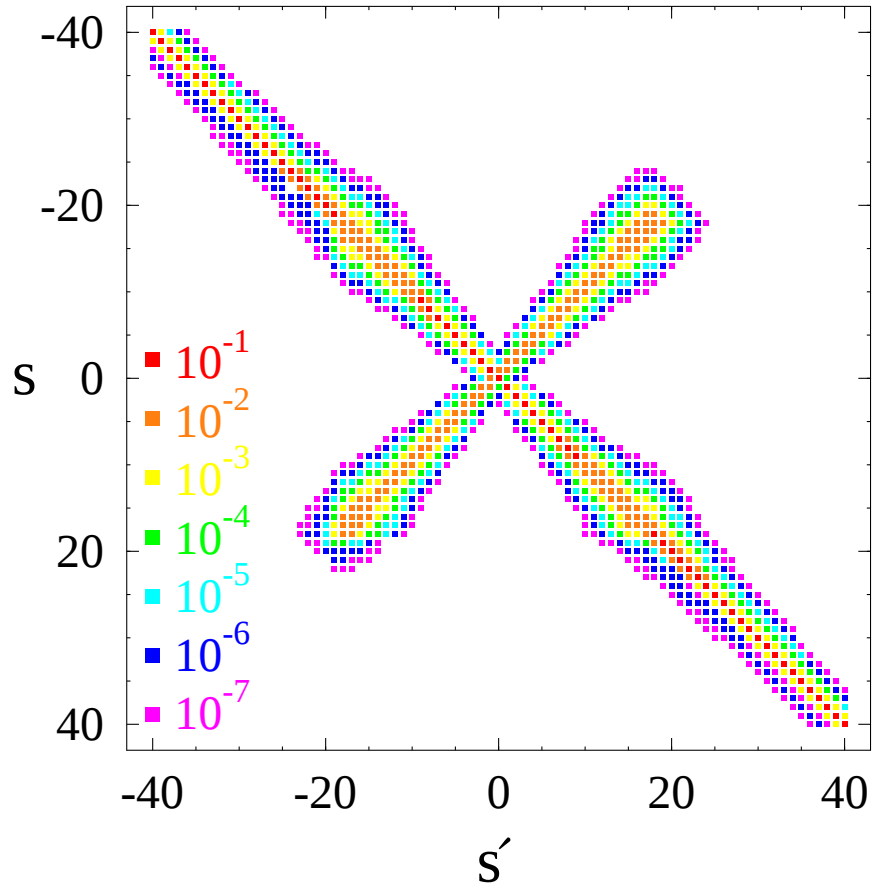


Рис. 2.3: Матричные элементы $|x_{q,s;q\pm 1,s'}|$, определяющие переходы между состояниями различных групп по q , т.е. вдоль резонанса связи (параметры те же, что и на рис. 2.1).

Используем далее то, что

$$\begin{aligned} \cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t &= 2 \cdot \cos \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t \cdot \cos \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t = \\ &= 2 \cdot \cos \omega t \cdot \cos \left(\frac{\delta \Omega t}{2} \right) = \cos \left(\frac{\delta \Omega t}{2} \right) (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подставив теперь (2.20) в (2.19), можем произвести резонансное приближение — оставить в сумме по q' лишь самые медленные слагаемые с $q' = q \pm 1$. В результате получим следующее уравнение

$$i\hbar_0 \frac{db_{q,s}}{dt} = -f_0 \cos \left(\frac{\delta \Omega}{2} t \right) \times$$

$$\times \sum_{s'} \left[x_{q,s;q+1,s'} b_{q+1,s'} e^{-i \frac{(E_{q+1,s'}^M - E_{q,s}^M)}{\hbar_0} t} + x_{q,s;q-1,s'} b_{q-1,s'} e^{-i \frac{(E_{q-1,s'}^M - E_{q,s}^M)}{\hbar_0} t} \right]. \quad (2.21)$$

Очевидный интерес представляет строение матриц $x_{q,s;q\pm 1,s'}$, определяющих переходы между состояниями s и s' соседних групп уровней. На рис. 2.3 схематично показана внутренняя структура матрицы $x_{0,s;1,s'}$ — различными цветами указан порядок величин $|x_{0,s;1,s'}|$. В данном случае состояния внутри групп упорядочены так, что низший уровень имеет индекс $s = 0$, а остальные уровни в порядке возрастания энергии имеют индексы $s = 1, -1, 2, -2, \dots$ и так далее.

Исходя из произведенного упорядочивания состояний внутри групп, можно сделать ряд важных замечаний. Довольно очевидно, что центр “креста” на рис. 2.3 соответствует переходам между самыми низкими состояниями в группах (имеющими индекс $s = 0$). Матричные элементы, лежащие на широкой главной диагонали ближе к краям матрицы, определяют переходы между состояниями, лежащими над областью сгущения уровней (сепаратрисой). Двукратному вырождению состояний здесь соответствует симметрия областей данной матрицы $s, s' > 30$ и $s, s' < -30$ относительно ее центра. В обоих перечисленных случаях матричные элементы быстро убывают с удалением от главной диагонали, т.е. с возрастанием разности $|s - s'|$, что видно по быстрому изменению цвета точек.

На концах “креста” наблюдаются заметные уширения — эти области соответствуют сепаратрисной области резонанса. Величины матричных элементов здесь достаточно велики, поэтому для δ -образного начального условия на сепаратрисе возможны практически равнове-

ятные переходы в широкую по числу уровней область спектра соседних групп. Таким образом, легко понять, что переходы между присепаратрисными состояниями разных групп имеют качественно иной характер по сравнению с эволюцией начальных условий на центре резонанса связи или вне его. Данный факт является хорошей предпосылкой для проявления в системе квантовой диффузии по сепаратрисе; подобное явление уже было отмечено в вырожденной гамильтоновой системе [10, 11].

2.2.3 Структура квазиэнергетических функций

Несмотря на то, что оператор эволюции находится путем интегрирования нестационарного уравнения Шрёдингера за один период внешнего поля, получаемые в результате его диагонализации собственные вектора и собственные значения — квазиэнергетические (QE) состояния — хранят в себе полную информацию об эволюции каких-либо начальных условий на любой промежуток времени, кратный целому числу периодов. В частности, поэтому изучение структуры квазиэнергетических функций представляет определенный интерес.

Характер внутреннего строения QE-функций проиллюстрирован на рис. 2.4, где показаны графики зависимости $\bar{q} = \sum_q q \sum_s |A_{q,s}^Q|^2$ от дисперсии $\sigma_q^2 = \sum_q (q - \bar{q})^2 \sum_s |A_{q,s}^Q|^2$, которая характеризует длину конкретной функции по группам q , т.е. ее протяженность вдоль резонанса связи. Как следует из рис. 2.4(а) для малых μ и f_0 все квазиэнергетические функции имеют очень малую дисперсию и фиксированное значение $\bar{q}$, которое “привязывает” их к группам стационарных уровней. На рис. 2.4(б) в увеличенном масштабе показан фрагмент центральной

группы QE-функций (с $\bar{q} \approx 0$), при этом (для малых f_0) каждой из них можно поставить в соответствие одно из стационарных состояний. Так точки с $\sqrt{\sigma} < 10^{-3}$, лежащие на горизонтальной прямой соответствуют стационарным состояниям около центра резонанса связи. Регулярная структура (две ветви), формируемая из точек с $\sqrt{\sigma} > 10^{-3}$ соответствует вырожденным двукратно надсепаратрисным состояниям. Рассматривая в каждой группе состояния с большими номерами ($s > 100$ или $s < -100$), можем увидеть, что эта регулярная структура QE-функций разрушается только лишь в связи с тем, что соответствующие слабозмущенные стационарные состояния попадают в области резонансов системы с внешним полем (данные области на рис. 2.4(b) не показаны).

Некоторая нерегулярность в области (2) связана с проявлением двух (для верхней и нижней ветвей) вторичных резонансов, связанных с внешним периодическим полем. Т.к. данная область относится к слабозмущенным надсепаратрисным состояниям, где взаимодействие двух осцилляторов несущественно, условие этих резонансов можно получить, рассматривая одномерную задачу: x -осциллятор под действием периодической силы. Тогда в самом общем случае условие резонанса можно записать так

$$\vec{\omega} \cdot \vec{m} = 0, \quad (2.22)$$

где $\vec{\omega} = (\omega_k, \Omega_1, \Omega_2)$, $\omega_k = E_k^{0'}/\hbar_0$, а $\vec{m}$ — вектор с целочисленными компонентами. Здесь $k = n - n_0$, поэтому, используя разложение (2.7)

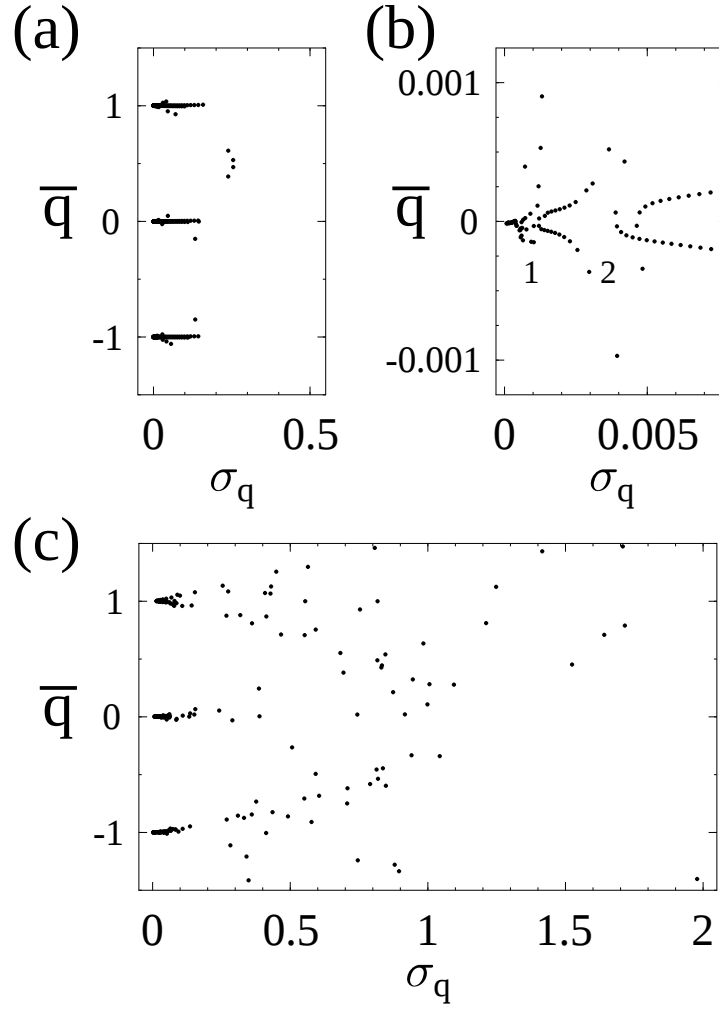


Рис. 2.4: Зависимость $\bar{q}$ от дисперсии σ_q для QE-функций $A_{q,s}^Q$ в области $q = 0, \pm 1$ для различных значений параметра взаимодействия: а,б) $\mu = 3 \cdot 10^{-5}$, с) $\mu = 10^{-4}$. Точки соответствуют различным Q . На рисунке (b) изображен увеличенный фрагмент центральной части рисунка (a).

и введенные позже обозначения, можем найти:

$$\omega_k = \omega + \frac{E''_{n_0}}{\hbar_0} k. \quad (2.23)$$

Первичные резонансы получаются из условия (2.22), если положить $\vec{m} = (1, -1, 0)$ или $\vec{m} = (1, 0, -1)$. Если положить $\vec{m} = (2, -1, -1)$, получим условие вторичного резонанса, лежащего в области между дву-

мя первичными, на известной частоте $\omega_k = (\Omega_1 + \Omega_2)/2$. Положив теперь $\vec{m}_1 = (3, -2, -1)$ или $\vec{m}_2 = (3, -1, -2)$, и получим условия отмеченных выше двух вторичных резонансов на частотах $\omega_{k_1} = (2\Omega_1 + \Omega_2)/3$ и $\omega_{k_2} = (\Omega_1 + 2\Omega_2)/3$, лежащих симметрично относительно резонанса на частоте ω . Используя теперь (2.23), получим условия данных резонансов в виде:

$$3E''_{n_0}k = \pm \hbar_0 \frac{\delta\Omega}{2}, \quad (2.24)$$

которые определяют положение резонансных уровней относительно принятого за начало отсчета уровня n_0 .

Наиболее важной для квантовой диффузии является область, соответствующая околосепаратрисным состояниям (область (1) на рис. 2.4(b)). Точки этой области расположены главным образом случайно, что, очевидно, иллюстрирует проявления квантового хаоса.

2.2.4 Эволюция квантовых состояний

После того, как для изучаемой системы был построен оператор эволюции, изучалась временная динамика различных начальных условий во времени, причем в режиме, когда все три резонанса не перекрываются (подробнее об условиях перекрытия см. Приложение А.3).

Чтобы характеризовать эволюцию состояний во времени, нами было рассчитано значение дисперсии энергии $\overline{(\Delta H)^2} = \hbar_0^2 \omega^2 \Delta_q^2$, характеризующей протяженность состояния вдоль резонанса связи (по q), как функции времени t , измеряемого в числе периодов внешнего поля N . Здесь $\Delta_q^2 = \Sigma_q (q - \bar{q})^2 \Sigma_s |C_{q,s}|^2$, $\bar{q} = \Sigma_q q \Sigma_s |C_{q,s}|^2$. На рис. 2.5 изображена зависимость $\Delta_q^2(N)$ для трех различных начальных условий: кривая

(1) соответствует начальному условию в центре резонанса связи, (2) — начальному условию на одном из надсепаратрисных состояний, а кривая (3) — начальному условию, выбранному на одном из сепаратрисных уровней. Данный график показывает явное различие между эволюциями во времени данных начальных условий: для под- и надсепаратрисных состояний величина Δ_q^2 квазипериодически осциллирует около некоторого значения, а для состояний на сепаратрисе резонанса связи величина Δ_q^2 после некоторого времени, соответствующего классическому времени стохастизации, начинает немонотонно, но тем не менее устойчиво, расти.

На рис. 2.6 показаны зависимости дисперсии энергии для начальных условий на сепаратрисе и различных значений параметра взаимодействия μ . Легко видеть, что после некоторого времени, соответствующего времени стохастизации на классической сепаратрисе, величина $\overline{(\Delta H)^2}$ начинает расти со временем практически линейно. Данное поведение, очевидно, соответствует классической диффузии вдоль резонанса связи, т.е. диффузии Арнольда. Если произвести теперь линейную аппроксимацию функции $\overline{(\Delta H)^2}(t)$, то угловой коэффициент наклона прямой укажет скорость диффузии, т.е. ее коэффициент. Таким образом, коэффициент квантовой диффузии Арнольда можно найти как $D = \overline{(\Delta H)^2}(t)/t$.

Интересно, что рассчитанные классический и квантовый коэффициенты диффузии оказываются практически одного порядка для одних и тех же значений μ , что и иллюстрирует рис. 2.7. В области $1/\sqrt{\mu} \geq 90$ различие между этими величинами становится существенным, что,

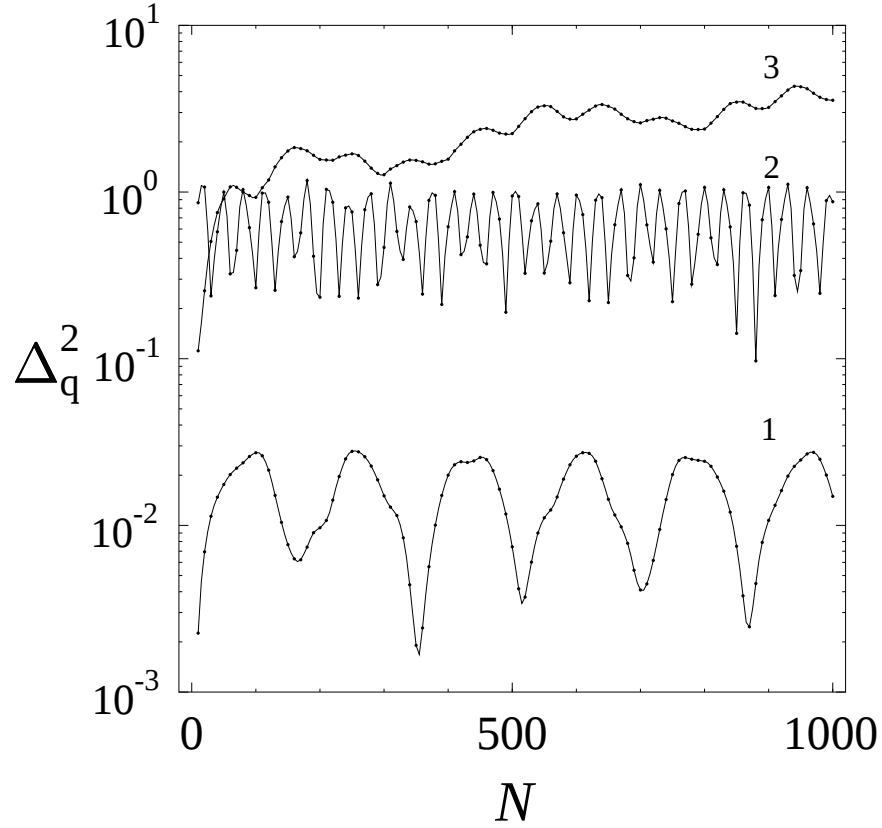


Рис. 2.5: Зависимость дисперсии энергии Δ_q^2 от времени для $\mu = 1.25 \cdot 10^{-4}$ для различных начальных условий: кривая 1 — начальное условие в центре резонанса связи, 2 — на одном из надсепаратрисных состояний, 3 — вблизи квантовой сепаратрисы резонанса связи.

впрочем, вполне объяснимо. По понятным причинам квантовая диффузия может иметь место лишь при условии, что число энергетических стационарных состояний, попадающих в область классического стохастического слоя, достаточно велико; впервые это было отмечено в работе Шуряка [23]. Так было обнаружено, что при $\mu > 1.25 \cdot 10^{-4}$ число уровней в сепаратрисной области порядка или больше 10, поэтому можно говорить о квантовой стохастизации. Далее при $\mu < 10^{-4}$ заметно значительное уменьшение коэффициента квантовой диффузии, что на-

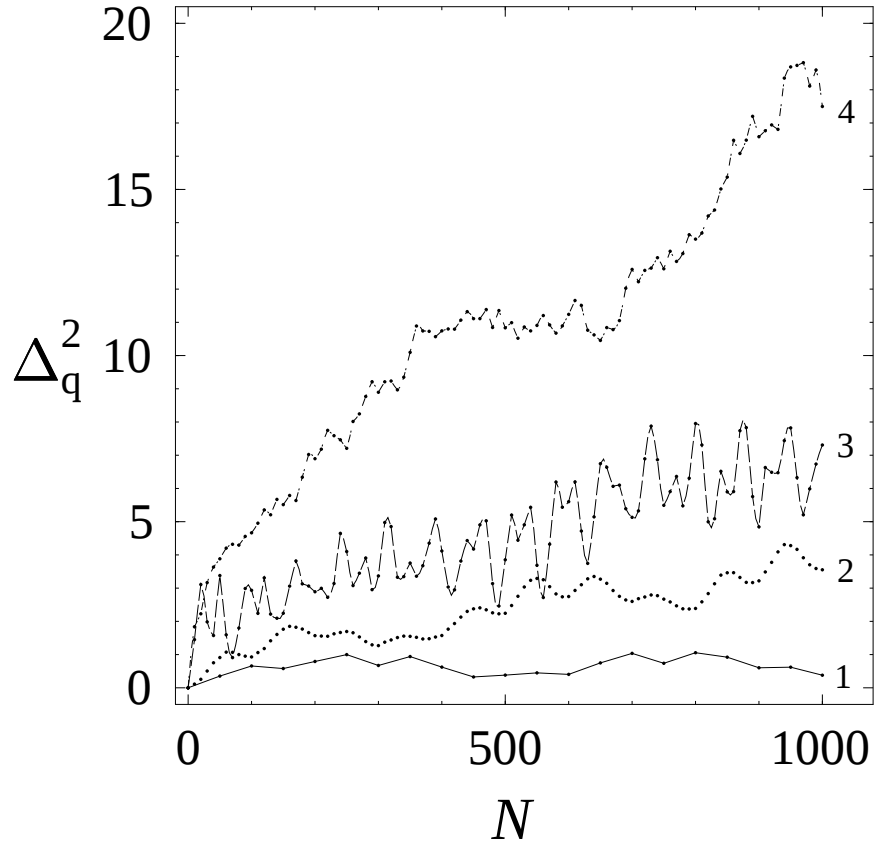


Рис. 2.6: Временная эволюция Δ_q^2 для начальных условий в присепаратрисной области резонанса связи и различных значений параметра взаимодействия μ : 1) $\mu = 10^{-4}$, 2) $\mu = 1.25 \cdot 10^{-4}$, 3) $\mu = 1.75 \cdot 10^{-4}$, 4) $\mu = 2.25 \cdot 10^{-4}$.

прямую связано с тем, что число уровней в области классического стохастического слоя оказывается порядка единицы. При $\mu = 3 \cdot 10^{-5}$ уже можно говорить о достижении “границы Шуряка” — области значений параметров, при нахождении внутри которой классическое хаотическое движение вдоль резонанса связи полностью подавляется квантовыми эффектами.

Определение числа состояний, попадающих в область классического стохастического слоя, производилось следующим образом. Как уже отмечалось ранее при обсуждении классической задачи, в случае, когда

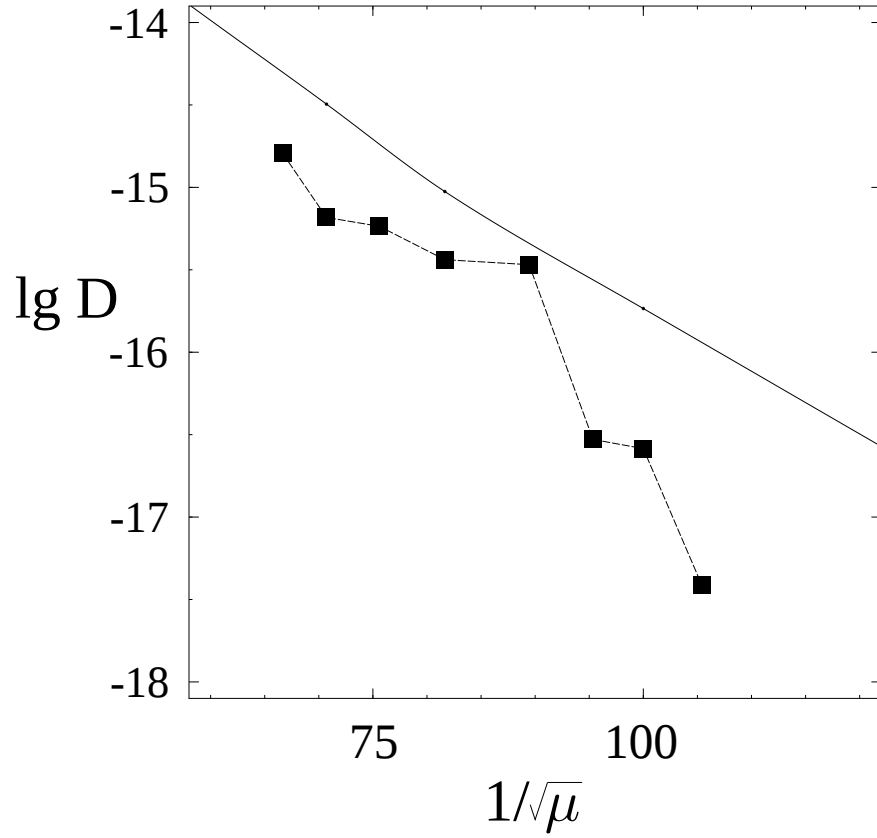


Рис. 2.7: Значения квантового (прерывистая линия) и классического (сплошная линия) коэффициентов диффузии Арнольда в зависимости от параметра взаимодействия μ .

возмущение имеет несколько гармонических составляющих, основную роль в формировании хаоса на сепаратрисе играют вторичные резонансы. Общее условие вторичных резонансов для рассматриваемого нами случая может быть записано так:

$$n \cdot \tilde{\omega}(s) = m \cdot \delta\Omega, \quad (2.25)$$

что полностью аналогично условию (1.27). При изучении классической модели неоднократно отмечались резонансы с $m = 1$ и $n > 2$ (см. рис. 1.4). И поскольку в случае двухчастотного возмущения стан-

дартный подход к оценке ширины стохастического слоя неприменим, оценка числа состояний в сепаратрисной области производилась путем численного определения ширины классического стохастического слоя и дальнейшего подсчета числа квантовых уровней стационарного Матье-подобного спектра, попадающих в соответствующий энергетический интервал.

2.2.5 Динамическая локализация

Как уже было отмечено выше, в квантовом случае для диффузии Арнольда появляется порог по параметрам возмущения, что резко отличает данное явление от его классического аналога. Еще одно обнаруженное качественное их отличие состоит в том, что квантовая диффузия Арнольда через некоторое время останавливается, образуя локализованное состояние.

На самом деле, поскольку движение вдоль резонанса связи эффективно одномерное, поведение, подобное андерсоновской локализации, вполне и следовало ожидать. Заметим, что дисперсия QE-функций в q -пространстве конечна (см. рис. 2.4), т.е. иными словами квазиэнергетические функции являются локализованными. На практике это означает, что даже диффузионная динамика волнового пакета вдоль резонанса связи по прошествии некоторого времени должна иметь тенденцию к насыщению.

Этот эффект, известный как *динамическая локализация*, был впервые обнаружен в модели ротатора с δ -образными толчками [2, 3] и позже изучен на примере множества различных физических моделей

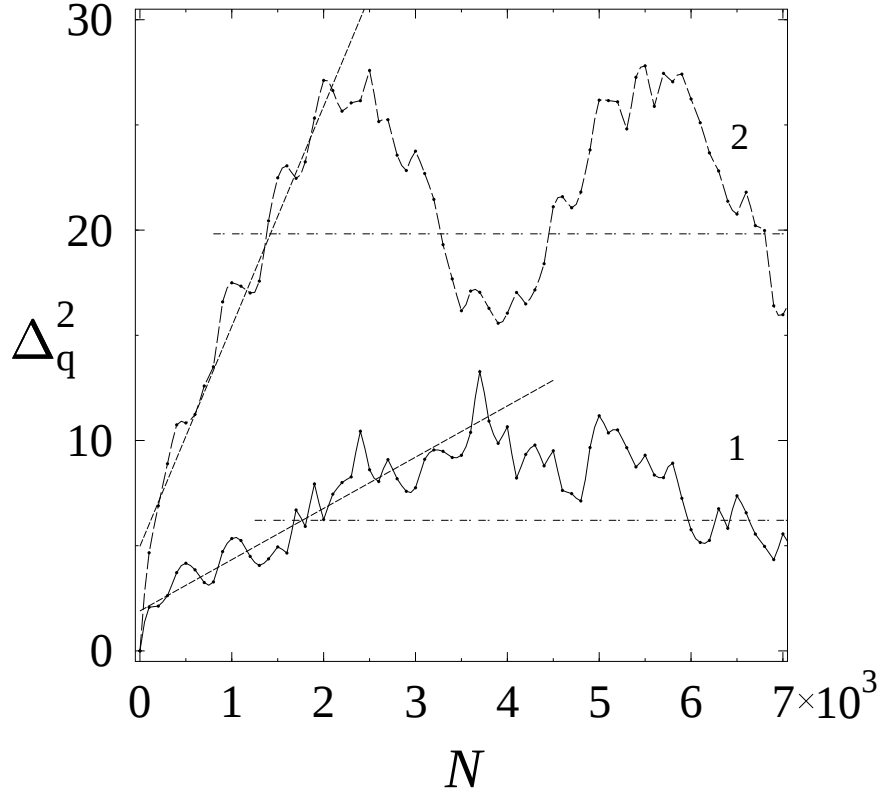


Рис. 2.8: Динамическая локализация волновых пакетов вдоль резонанса связи для различных значений параметра взаимодействия: (1) $\mu = 1.5 \times 10^{-4}$, (2) $\mu = 2.25 \times 10^{-4}$. Начальные условия выбраны в области сепаратрисы. Горизонтальные линии указывают величину средней по осцилляциям дисперсии $\overline{\Delta_q^2}$.

(см., например, [21]). Как важную особенность следует подчеркнуть, что динамическая локализация в принципе отличается от локализации Андерсона: последняя имеет место в случайном потенциале в то время как динамическая локализация происходит в динамических детерминированных системах вследствие конкурентного взаимодействия между слабой классической диффузией и сильными квантовыми эффектами.

Чтобы обнаружить динамическую локализацию (вдоль резонанса

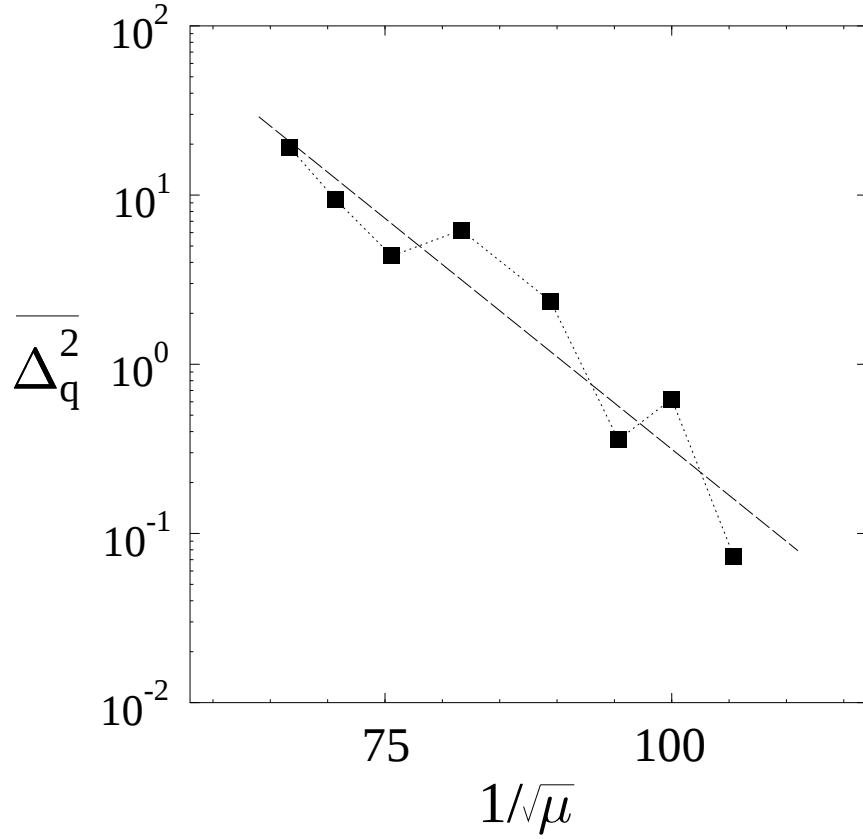


Рис. 2.9: Зависимость средней дисперсии $\overline{\Delta_q^2}$ от параметра взаимодействия осцилляторов $1/\sqrt{\mu}$.

связи и внутри его стохастического слоя) в нашей модели, необходимо изучить динамику волновых пакетов на больших промежутках времени. Наши численные расчеты показывают, что на временах порядка $t_0 \approx 10^3 T$ диффузионное поведение эволюции прекращается во всей области параметров взаимодействия μ . Вместо этого величина Δ_q^2 начинает осциллировать вокруг некоторого среднего значения $\overline{\Delta_q^2}$. Период этих осцилляций от параметра μ зависит немонотонно, изменяясь от $10^3 T$ до $10^4 T$. Характерные примеры эволюции такого типа приведены на рис. 2.8.

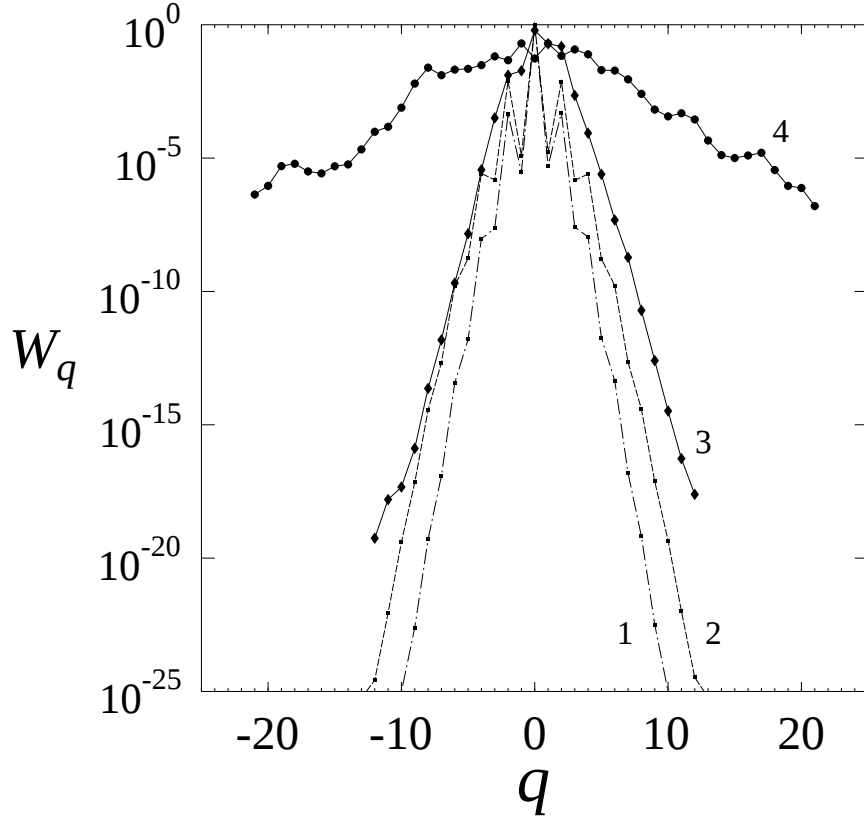


Рис. 2.10: Распределение вероятности W_q , усредненное за промежуток времени $t = 10^4 \cdot T$, как функция q : (1) $\mu = 0$, $f_0 = 10^{-6}$; (2) $\mu = 0$, $f_0 = 2 \cdot 10^{-6}$; (3) $\mu = 10^{-4}$, $f_0 = 10^{-6}$; (4) $\mu = 2 \cdot 10^{-4}$, $f_0 = 2 \cdot 10^{-6}$.

Очевидно, что длина локализации l_s имеет порядок ширины волнового пакета после насыщения диффузии, поэтому эта величина может быть ассоциирована с квадратным корнем из $\overline{\Delta_q^2}$. Как видно из рис. 2.9, зависимость $\overline{\Delta_q^2}$ от $1/\sqrt{\mu}$ является экспоненциальной. И этот результат не удивителен, поскольку $\ln D$ пропорционален $1/\sqrt{\mu}$, а время t_0 от μ практически не зависит.

Интерес представляет также сравнение распределения пакета по q при отсутствии и наличии взаимодействия между двумя осцилляторами. Для этого на рис. 2.10 отложены “профили” волнового пакета

$W_q = \sum_s |C_{q,s}|^2$ после остановки диффузии как функция номера группы q . Приведенные кривые наглядно демонстрируют величину эффекта, производимого квантовой диффузией Арнольда вдоль резонанса связи. Также заметим, что во всех случаях “хвосты” функции $W_q(q)$ указывают на экспоненциальное затухание, что позволяет визуально оценить и длину локализации. Результаты наглядно указывают на резкое возрастание этой величины при включении взаимодействия между осцилляторами по сравнению со случаем полностью независимых осцилляторов, когда $\mu = 0$ (при этом $q = k + l$, а $l = 0$).

2.3 Краткие итоги Главы 2

Итак, во второй Главе настоящей работы была рассмотрена гамильтоновская система из двух нелинейных осцилляторов, один из которых находится под действием внешнего поля с двумя гармоническими составляющими. В классическом описании задачи известно, что в узком стохастическом слое, образовавшемся при разрушении сепаратрисы резонанса связи двух осцилляторов, имеет место диффузия Арнольда вдоль этого резонанса. Наши расчеты, выполненные для соответствующей квантовой модели, позволяют сделать следующие замечания.

Так при изучении свойств оператора эволюции системы были обнаружены нерегулярности в структуре квазиэнергетических состояний, соответствующих эволюции внутри стохастического слоя резонанса связи. Эти состояния, оставаясь экспоненциально локализованными, обладают гораздо большей длиной локализации, чем в случае не взаимодействующих осцилляторов. Изучение динамики волновых па-

кетов с разными начальными условиями указывает на возможность их диффузионного расширения в случае, если начальное условие отвечает стохастическому слою. Рассчитанный коэффициент квантовой диффузии вследствие квантовых эффектов оказывается меньше, чем в классическом случае, однако его зависимость от параметра взаимодействия осцилляторов имеет тот же характер.

Следует подчеркнуть, что квантовая диффузия Арнольда имеет место лишь в глубоко квазиклассическом случае, от чего напрямую зависит количество квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя. Когда это число порядка 10 и более, можно говорить о квантовой стохастизации системы. С уменьшением параметра взаимодействия количество таких состояний резко уменьшается, в связи с чем и диффузионное поведение не обнаруживается. Этот факт является лишней иллюстрацией тому, насколько сильно квантовые эффекты влияют на диффузию.

Другим проявлением влияния квантовых эффектов на динамику системы является динамическая локализация, которая имеет место даже в том случае, если число квантовых состояний в стохастическом слое достаточно велико. В частности, было замечено, что по прошествии некоторого (пусть даже большого) времени диффузия прекращается. Подобный эффект был впервые обнаружен в модели ротатора с δ -образными толчками [2, 3] и позже изучен на примере множества различных физических моделей (см., например, [21]). Однако в нашем случае динамическая локализация имеет место в узком стохастическом слое, т.е. в режиме слабого хаоса, в отличие от других моделей с

сильным (глобальным) хаосом в классическом описании.

Изложенные результаты могут найти подтверждение в экспериментах с двумерными полупроводниковыми структурами — квантовыми биллиардами, где динамика заряженной частицы описывается гамильтонианом типа (2.1)-(2.2). Например, в II и VI главах книги Штокмана [1] приведено множество ссылок на эксперименты с подобными структурами.

Глава 3

Квантовая диффузия Арнольда в двумерном канале с гофрированной границей

Данная Глава посвящена изучению динамики электрона в двумерном канале, одна из стенок которого ровная, а другая гофрирована — имеет синусоидальную форму, помещенном в переменное электрическое поле. Подобные системы уже рассматривались в ряде работ [48]–[53] как классически, так и квантово. Например, работа [48] посвящена классической динамике и транспорту в таком канале, а в [49] изучаются низкоэнергетические квантовые состояния, строятся распределения Хусими. Однако исследования в квантовой области проводились в основном либо в регулярном режиме, либо в режиме сильного хаоса, а изучаемая нами диффузия Арнольда требует наличия слабого хаоса. С другой стороны, данная система интересна с точки зрения возможности экспериментальной реализации (см., например, [54, 55]). Параметры возможного эксперимента по наблюдению квантовой диффузии Арнольда в рассматриваемой системе предложены в заключительной

части Главы.

3.1 Классическая диффузия Арнольда в двумерном канале с гофрированной границей

Рассмотрим явление диффузии Арнольда в двумерном канале, одна из стенок которого ровная и задается формулой $y = 0$, а другая имеет синусоидальную форму и в безразмерных переменных задается функцией $y = d + a \cos x$ (см. рис. 3.1). Здесь d — это средняя ширина канала, a — амплитуда гофрировки; период гофрировки равен 2π . Отношение a/d далее предполагаем малым, чтобы избежать глобального хаоса, который присутствует в системе при $a/d \sim 1$.

В отсутствие внешнего поля в периоды между абсолютно упругими соударениями частица движется по прямолинейным траекториям, и её динамику удобно изучать с помощью отображений, связывающих между собой последовательные значения углов отражения α_n , отмеряемых от вертикали, и координат точек отражения от гофрированной

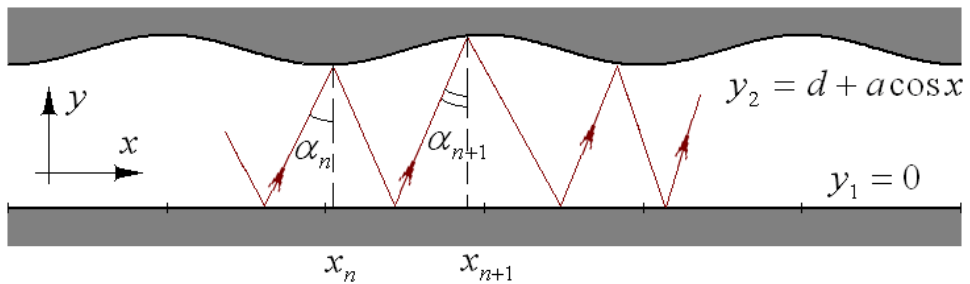


Рис. 3.1: Пример траектории частицы в двумерном канале с гофрированной границей.

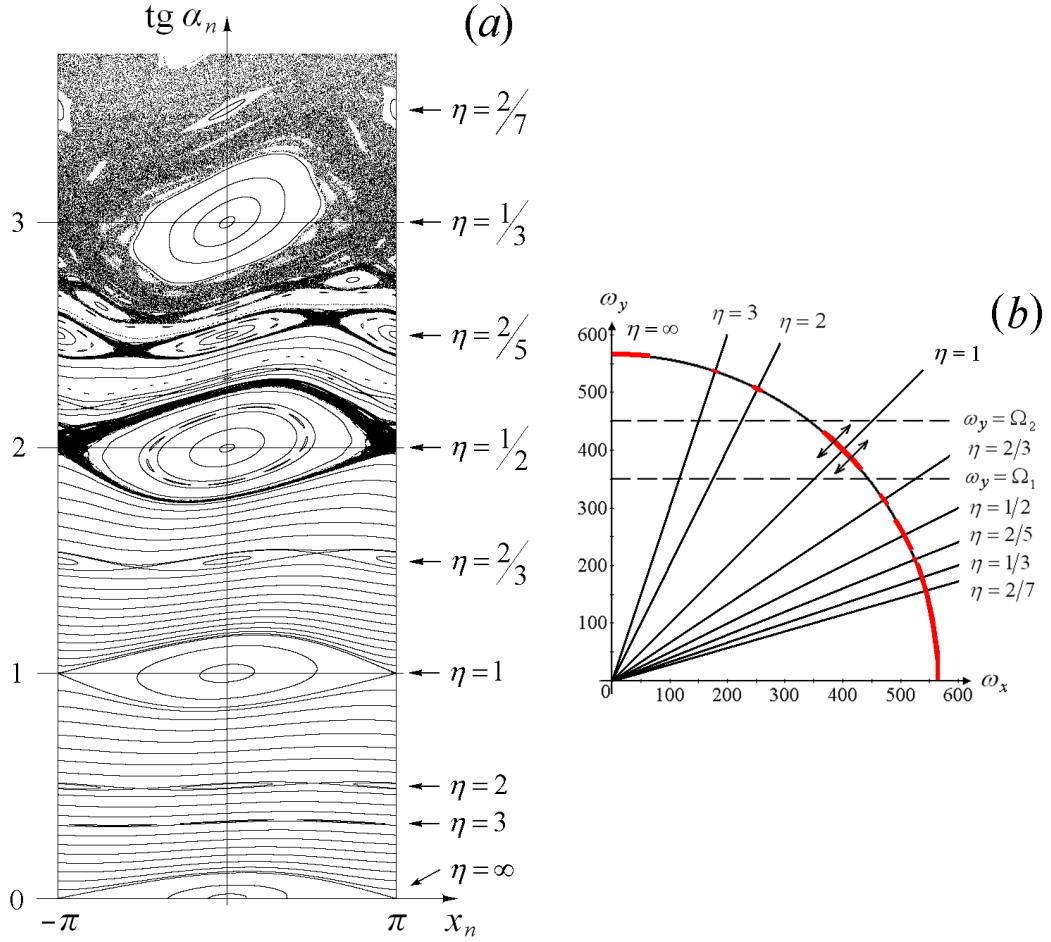


Рис. 3.2: Структура фазового пространства для канала с гофрированной границей. (a) Верхняя полуплоскость фазового пространства при $d = \pi$ и $a = 0.01$. (b) Положения некоторых, видимых на рис. (a), резонансов связи в плоскости частот системы. Пунктирными линиями показаны резонансы с внешним полем. Изоэнергетическая кривая (окружность) отвечает энергии $E = 1.6 \cdot 10^5$. Ширины резонансов показаны красным цветом.

границы x_n :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha_n - 2 \arctg(a \sin x_n), \\ x_{n+1} = x_n + \text{tg } \alpha_{n+1} (2d + a(\cos x_n + \cos x_{n+1})), \end{cases} \quad (3.1)$$

Рис. 3.2(a) дает наглядное представление о структуре фазового пространства системы. Здесь хорошо заметно множество резонан-

сов связи двух степеней свободы, которые возникают при рациональном соотношении времени движения поперек канала (туда и обратно) T_y и времени пролета одного периода гофрировки вдоль канала T_x . Для их характеристики удобно использовать рациональный параметр $\eta = T_x/T_y = \omega_y/\omega_x$. Заметим, что на рис. 3.2(a) показана лишь та часть фазовой плоскости, которая соответствует частицам, движущимся в положительном направлении оси x . Следует заметить также и то, что в окрестности резонансов с $\eta = 1/n$ (где $n = 0, 1, 2, \dots$) отображение (3.1) можно привести к хорошо известному стандартному отображению [5] с параметром $K_n = 4ad(1 + (\pi n/d)^2)$.

Механизм классической диффузии Арнольда хорошо проиллюстрирован на рис. 3.2(b). Здесь на плоскости частот (ω_x, ω_y) показаны резонансные прямые для различных значений η , видимых на рис. 3.2(a), а также изоэнергетическая поверхность (в данном случае окружность) $E = \text{const}$, задаваемая уравнением

$$\omega_x^2 + \left(\frac{\omega_y d}{\pi}\right)^2 = \frac{2E}{m}, \quad (3.2)$$

где m есть масса частицы, полагаемая далее равной единице.

Как видно из рис. 3.2 существует два типа резонансов. Так резонансы с $\eta \leq 1/3$ перекрываются друг с другом, отчего в этой области фазового пространства реализуется режим глобального хаоса. Остальные резонансы окружены узкими стохастическими областями и не перекрываются. Они изолированы друг от друга КАМ-поверхностями, отчего при слабом возмущении системы переходы из одного стохастического слоя в другой невозможны: они могли бы происходить только при перекрывании резонансов, т.е. опять-таки в режиме глобального хаоса.

са. Переходы траектории *вдоль* стохастических слоев резонансов связи (это направление показано на рис. 3.2(b) для резонанса $\eta = 1$ двумя стрелками) также запрещены вследствие сохранения энергии. Однако последнее ограничение легко снимается при помещении системы во внешнее периодическое во времени поле, и медленная диффузия вдоль стохастических слоев становится возможной.

Следует отметить, что в отсутствие внешнего переменного поля движение материальной точки в канале может осуществляться по одной траектории с разными скоростями. В процессе же диффузии Арнольда частица остается на резонансе связи, но ее энергия варьируется, следовательно, компоненты ее скорости v_x и v_y изменяются приблизительно пропорционально.

Внешнее поле $V(y, t) = -f_0 y (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)$ порождает свои резонансы в фазовом пространстве системы на частотах $\omega_y = \Omega_1$ и $\omega_y = \Omega_2$. Их положение также показано на рис. 3.2(b) штриховыми линиями. В простейшем случае можно учитывать взаимодействие лишь трех резонансов: резонанса связи и двух резонансов системы с внешним полем. Заметим, что это лишь часть паутины Арнольда, заполняющей все фазовое пространство. Выбирая начальные условия, например, в области стохастического слоя резонанса связи $\eta = 1$, можно наблюдать за тем, как изображающая точка диффундирует под действием поля вдоль него. Для того, чтобы обеспечить стохастичность на сепаратрисах отдельных резонансов и в то же время избежать их перекрытия, в дальнейшем мы будем полагать выполненным соотношение $a/f_0 = 10^{-3} \ll 1$.

Для получения количественной информации о динамике системы

необходимо найти коэффициент диффузии Арнольда. Для этого следует использовать отображения, в которых было бы учтено внешнее переменное электрическое поле, действующее на частицу в канале. Ввиду громоздкости соответствующих формул их явный вид, а также сам их вывод отдельно приведен в Приложении А.3. Обратимся теперь к результатам. Поскольку мы владем информацией о системе лишь в те моменты времени, когда материальная точка ударяется о стенку канала, а они, вообще говоря, не коррелируют с периодом внешнего поля, для расчета коэффициента диффузии имеет смысл использовать следующее соотношение:

$$D = \overline{\left(\frac{(\bar{E}_{i+1} - \bar{E}_i)^2}{(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i)/2} \right)} \quad (3.3)$$

Поясним смысл входящих сюда величин. Усреднение здесь проводится в два этапа. Все время наблюдения за системой (например, 10^5 отображений) разбивается на N отрезков времени длительностью Δt_i , соответствующей, например, 10^3 отображений. Величина $\bar{E}_i$ в (3.3) имеет смысл среднего значения энергии на i -м интервале, а $(\Delta t_{i+1} + \Delta t_i)/2$ — расстояния по времени между соседними интервалами. Верхняя черта в формуле (3.3) означает усреднение выражения, стоящего в круглых скобках, по всем разностям между соседними интервалами. Столь громоздкая процедура определения коэффициента диффузии Арнольда подобна изложенной в работе Чирикова [5] и позволяет снизить эффект случайных колебаний величины энергии системы. К результатам проведенных расчетов обратимся при обсуждении рис. 3.10.

3.2 Квантовые стационарные состояния на резонансе связи

Для определения стационарных состояний частицы, движущейся в двумерном канале с гофрированной границей, удобно перейти к новым криволинейным координатам $\tilde{x}^i$, в которых границы являются плоскими, а граничные условия достаточно простыми. Однако при этом гамильтониан приобретает дополнительные слагаемые, зависящие от координат и содержащие операторы дифференцирования [47]. В результате уравнение Шрёдингера приобретает вид

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^i}\sqrt{g}g^{ij}\frac{\partial\psi}{\partial\tilde{x}^j}=E\psi \quad (3.4)$$

где g^{ij} — метрический тензор, а $g \equiv \det(g_{ij})$. Далее для удобства используем такие единицы, что постоянная Планка, а также эффективная масса частицы равны единице. Пусть новые координаты заданы следующим образом

$$\tilde{x} = x, \quad \tilde{y} = \frac{y}{1 + \epsilon \cos x} \quad (3.5)$$

где $\epsilon = a/d$. Теперь граничные условия имеют простой вид: $\psi(\tilde{x}, 0) = \psi(\tilde{x}, d) = 0$, а метрический тензор есть

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\epsilon \tilde{x} \sin \tilde{x}}{1 + \epsilon \cos \tilde{x}} \\ \frac{\epsilon \tilde{x} \sin \tilde{x}}{1 + \epsilon \cos \tilde{x}} & \frac{1 + \epsilon^2 \tilde{x}^2 \sin^2 \tilde{x}}{(1 + \epsilon \cos \tilde{x})^2} \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

В условии ортонормированности волновых функций необходимо теперь учитывать якобиан:

$$\int \psi_i^* \psi_j \sqrt{g} d\tilde{x} d\tilde{y} = \delta_{ij}. \quad (3.7)$$

Также удобно далее сделать замену $\psi \rightarrow g^{-1/4}\psi$, что несколько меняет уравнение Шрёдингера и позволяет проводить интегрирование как в декартовых координатах.

Если амплитуда гофрировки a мала по сравнению с шириной канала d , в уравнении Шрёдингера можно оставить лишь слагаемые первого порядка по ϵ . Эта процедура без потери общности делает более “прозрачными” численные расчеты. Однако необходимо учитывать, что с увеличением числа гармоник в форме профиля гофрированной границы это приближение может не работать вследствие так называемого градиентного рассеяния [51, 52, 53]. В нашей же ситуации получаем следующее [47]:

$$\begin{aligned} \hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{U} = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \\ & + \frac{\epsilon}{2} \left(2 \cos x \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2y \sin x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - y \cos x \frac{\partial}{\partial y} - \frac{1}{2} \cos x - \sin x \frac{\partial}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь и далее мы опустим значок “тильда” над координатами $\tilde{x}$ и $\tilde{y}$.

Поскольку гамильтониан периодичен по продольной координате x , его собственные функции являются блоховскими и характеризуются непрерывным квазиволновым вектором k , изменяющимся в пределах первой зоны Бриллюэна, определяемой неравенством $-1/2 \leq k \leq 1/2$. В итоге, собственные функции гамильтониана $\hat{H}$ могут быть представлены в следующем виде

$$\psi^k(x, y) = \sum_{n,m} c_{nm}^k \psi_{nm}^0(k, x, y), \quad (3.9)$$

где

$$\psi_{nm}^0(k, x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi d}} e^{i(n+k)x} \sin\left(\frac{\pi m y}{d}\right) \quad (3.10)$$

есть собственные функции невозмущенного гамильтониана $\hat{H}_0$. Здесь волновые функции нормированы на длине периода гофрировки 2π . В отсутствие возмущения ($\epsilon = 0$) энергетический спектр системы имеет вид

$$E_{nm}^0(k) = \frac{1}{2} \left((n+k)^2 + \frac{\pi^2 m^2}{d^2} \right). \quad (3.11)$$

Перейдем теперь к решению системы алгебраических уравнений для коэффициентов c_{nm}^k :

$$E(k)c_{nm}^k = E_{nm}^0(k)c_{nm}^k + \epsilon \sum_{n',m'} U_{nm,n'm'}^k c_{n'm'}^k, \quad (3.12)$$

где $-\infty < n < \infty$ и $m = 1, \dots, \infty$. Матричные элементы в (3.12) определены следующим образом

$$\begin{aligned} U_{nm,n'm'}^k &= \int (\psi_{n'm'}^0(k, x, y))^* \hat{U}(x, y) \psi_{nm}^0(k, x, y) dx dy = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\pi^2 m^2}{d^2} (\delta_{n',n+1} + \delta_{n',n-1}) \delta_{mm'} + \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^{m+m'} m m'}{m^2 - m'^2} ((1 + 2(k+n)) \delta_{n',n+1} + (1 - 2(k+n)) \delta_{n',n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

В качестве примера на рис. 3.3 изображены фрагменты энергетического спектра системы, найденные в работе [48]. Здесь легко заметить, что в отсутствие возмущения (см. рис. (a)) он представляет собой последовательность парабол, минимумы которых приходятся на уровни поперечного квантования. При “включении” гофрировки (см. рис. (b)) хорошо заметно снятие вырождения в центре и на краях зоны Бриллюэна и антикроссинг в точках с произвольным k .

Однако нас интересуют прежде всего состояния, относящиеся к резонансу связи. Следуя той же процедуре, что была изложена во второй Главе, рассмотрим резонанс связи $\eta = 1$, определяемый условием $\omega_{n_0} = \omega_{m_0}$, где $\omega_{n_0} = E_{n_0+1}(k) - E_{n_0}(k) = k + n_0 + 1/2$ и

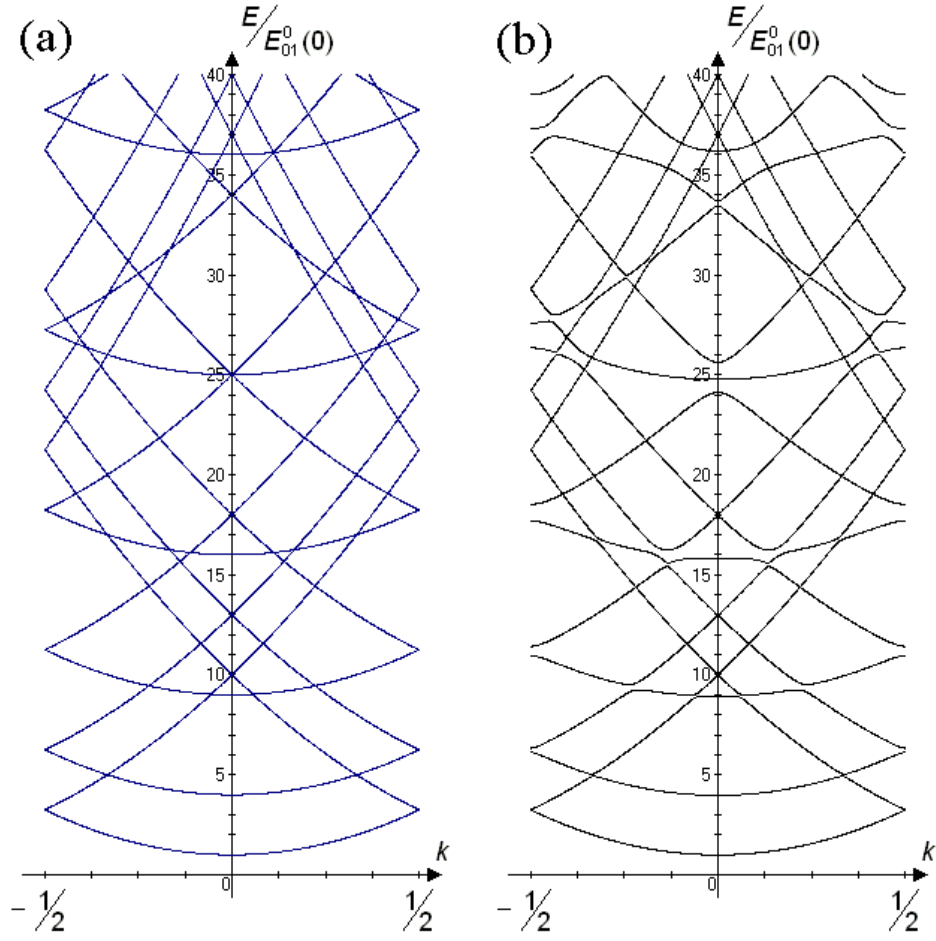


Рис. 3.3: Фрагмент энергетического спектра системы, нормированный на $\pi^2/2d^2$, для канала шириной $d = 3\pi$ (a) $a = 0$, (b) $a = 2\pi/25$. Рисунок взят из работы [48].

$\omega_{m_0} = E_{m_0+1} - E_{m_0} = \pi^2(2m_0 + 1)/2d^2$. В квазиклассической области, когда $n_0 \gg 1$ и $m_0 \gg 1$, можно принять $\omega_{n_0} \approx n_0$ и $\omega_{m_0} \approx \pi^2 m_0/d^2$. Заметим здесь, что аналогичное резонансное условие выполняется также и для отрицательных n_0 , когда $-n_0 \approx \pi^2 m_0/d^2$, что соответствует движению частицы в противоположном направлении. Но поскольку в дальнейшем мы полагаем, что $|n| \gg 1$, можно пренебречь туннелированием с резонанса с $n > 0$ на парный ему с $n < 0$, что позволяет рассматривать их отдельно друг от друга.

В области резонанса удобно ввести новые индексы $r = n - n_0$ и $p = r + (m - m_0)$, при этом вместо системы (3.12) будем иметь

$$E(k)c_{rp}^k = \left(p\omega_{m_0} + \frac{r^2}{2} + \frac{\pi^2}{2d^2}(p-r)^2 + kr \right) c_{rp}^k + \sum_{r',p'} U_{rp,r'p'}^k c_{r'p'}^k, \quad (3.14)$$

где энергия $E(k)$ отмеряется от уровня $E_{n_0 m_0}^0(k)$.

Уравнение (3.14) позволяет анализировать стационарные состояния на резонансе связи для различных значений волнового вектора k . Так, например, для положительного значения n_0 и $-1/2 < k < 1/2$ (но $k \neq 0$) было найдено, что спектр состоит из последовательности групп уровней с Маттье-подобной структурой. Эти группы отделены одна от другой на ω_{n_0} . В целом, свойства спектра такие же, что и в системе двух связанных осцилляторов (см. рис. 2.1 на стр. 31 и комментарий к нему), однако уровни, расположенные над точкой сгущения в каждой группе, невырождены даже при нулевой гофрировке.

Заметим, что кроме описанной части спектра в той же области энергий присутствует аналогичная серия таких же групп уровней, соответствующих подобному резонансу с отрицательным n_0 . Этим состояниям соответствуют волны, бегущие в противоположном направлении.

Теперь перейдем к обсуждению свойств состояний при $k = 0$ и $k = \pm 1/2$. Эти состояния не имеют классического аналога, поскольку здесь определяющую роль играет Брэгговское взаимодействие волн, бегущих в противоположных направлениях. В самом деле, в центре и на краях зоны Бриллюэна, где групповая скорость зануляется $\partial E / \partial k = 0$, ряд Фурье (3.9) блоховской функции $\psi^k(x, y)$ содержит слагаемые с положительными и отрицательными n в равной мере. В результате

блоховская функция $\psi^k(x, y)$ является либо четной (и действительной), либо нечетной (и чисто мнимой) стоячей волной. Это резко отличает данные точки зоны Бриллюэна от остальных, где функции не обладают определенной четностью и могут характеризоваться положительным или отрицательным значением проекции импульса.

Из вышесказанного становится ясно, что, например, для $k = 0$ в (3.9) и (3.10) удобнее использовать $\cos nx$ и $\sin nx$ вместо экспонент e^{inx} . Интересно, что тогда матричные элементы $U_{nm, n'm'}^k$ не отличаются от найденных ранее (3.13), отчего и основные свойства спектра в центре зоны Бриллюэна будут такими же, как уже обсуждавшиеся для произвольного значения k . Подобным образом при $k = \pm 1/2$ в разложении (3.9) вместо экспонент следует использовать функции $\cos(n \pm 1/2)x$ и $\sin(n \pm 1/2)x$.

Таким образом, состояния с $k = 0$ и $k = \pm 1/2$ являются либо четными, либо нечетными, отчего спектр системы состоит из двух серий групп уровней с Матье-подобной структурой, причем каждая серия уровней характеризуется определенной четностью. При $k = 0$ надсепаратрисные состояния практически вырождены (здесь мы опять имеем дело с ситуацией, описанной в первой Главе на стр. 32), что отличает эту точку зоны Бриллюэна от всех остальных. На рис. 3.4 показан спектр одной группы уровней для положительного значения n_0 . Если мысленно отразить эту картину относительно оси $k = 0$, мы получим аналогичный спектр, отвечающий отрицательному n_0 , т.е. волнам, бегущим в противоположную сторону. В центре зоны Бриллюэна эти два набора уровней пересекаются, формируя тем самым два состояния —

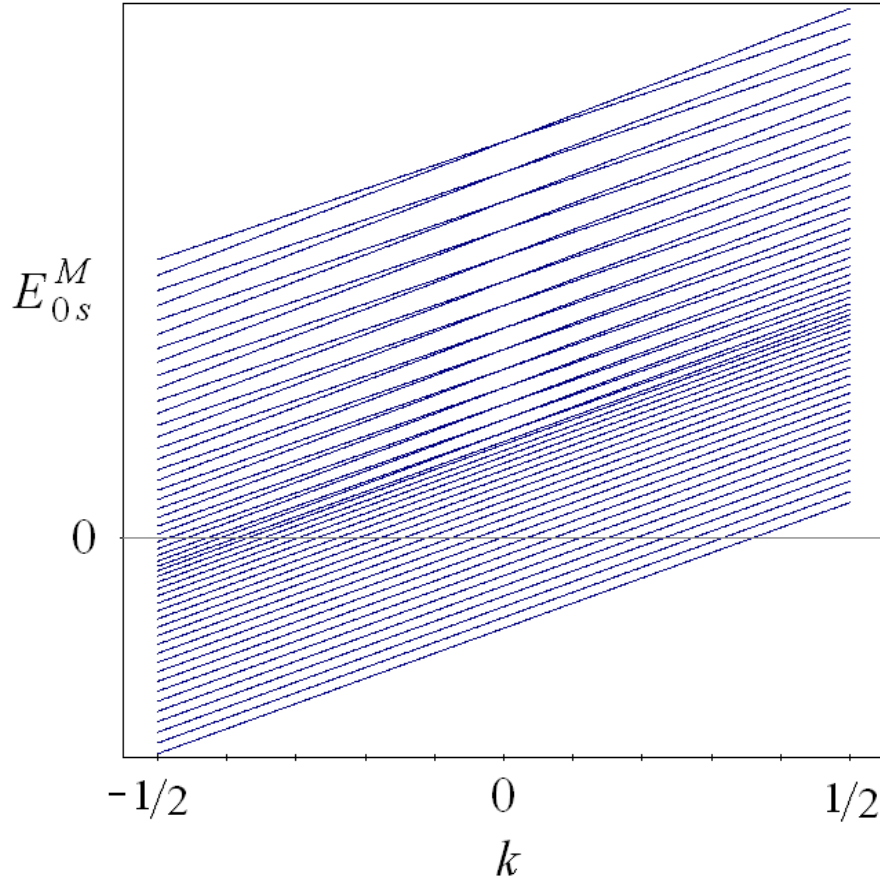


Рис. 3.4: Структура энергетического спектра системы в зависимости от волнового вектора k в пределах зоны Бриллюэна для $q = 0$, $n_0 = m_0 = 400$, $d = \pi$ и $a = 0.003$.

четное и нечетное. На границе зоны Бриллюэна, в точке $k = 1/2$ происходит то же самое, однако здесь необходимо учитывать пересечение уровней изображенной на рис. 3.4 группы с группой, отвечающей отрицательному n_0 , но лежащей на ω_{n_0} выше, чем получилось бы после простого отражения относительно оси $k = 0$.

В соответствии со такой структурой спектра каждое состояние удобно характеризовать двумя индексами — номером группы q и номером состояния внутри группы s , как это уже делалось в системе

двух взаимодействующих осцилляторов (см. стр. 32):

$$E_{q,s}(k) = \omega_{n_0}(k)q + E_{q,s}^M(k), \quad (3.15)$$

где $E_{q,s}^M(k)$ есть Матье-подобный спектр группы уровней. Индексы q и s соответствуют быстрым и медленным переменным, характеризующим движение на классическом резонансе связи. Рис. 3.4 иллюстрирует структуру спектра одной группы с $q = 0$ в зависимости от k . Вновь заметим, что эти уровни отвечают положительному n_0 , что видно, в частности, по положительности производной $\partial E / \partial k$. А для точек $k = 0$ и $k = \pm 1/2$ собственные состояния являются комбинацией состояний с $n_0 > 0$ и $n_0 < 0$.

Волновые функции, отвечающие резонансным состояниям, имеют очень интересную и сложную структуру. Для того, чтобы сделать ее более наглядной, на рис. 3.5 отложено распределение вероятностей $|c_{rp}^k|^2$ для собственных векторов системы (3.14) с различными s и $q = 0$ по невозмущенному базису (3.10) гамильтониана $\hat{H}_0$, а также распределение плотности вероятности $|\psi_{q,s}^k(x, y)|^2$ для тех же состояний в (x, y) -пространстве (см. рис. 3.6).

Сначала обсудим результаты, представленные на рис. 3.5. Заметим, что здесь мы придерживаемся нумерации того же типа, что была предложена в модели двух взаимодействующих осцилляторов (см. стр. 38): нижний уровень в каждой группе имеет индекс $s = 0$, а остальные пронумерованы по возрастанию энергии $1, -1, 2, -2, \dots$ и т.д.

Итак, на рис. 3.5(а) отложено распределение вероятностей $|c_{rp}^k|^2$, отвечающее нижнему уровню $s = 0$ в группе $q = 0$. Десятому и двадцатому уровням (по возрастанию энергии) отвечают графики (b) и (c).

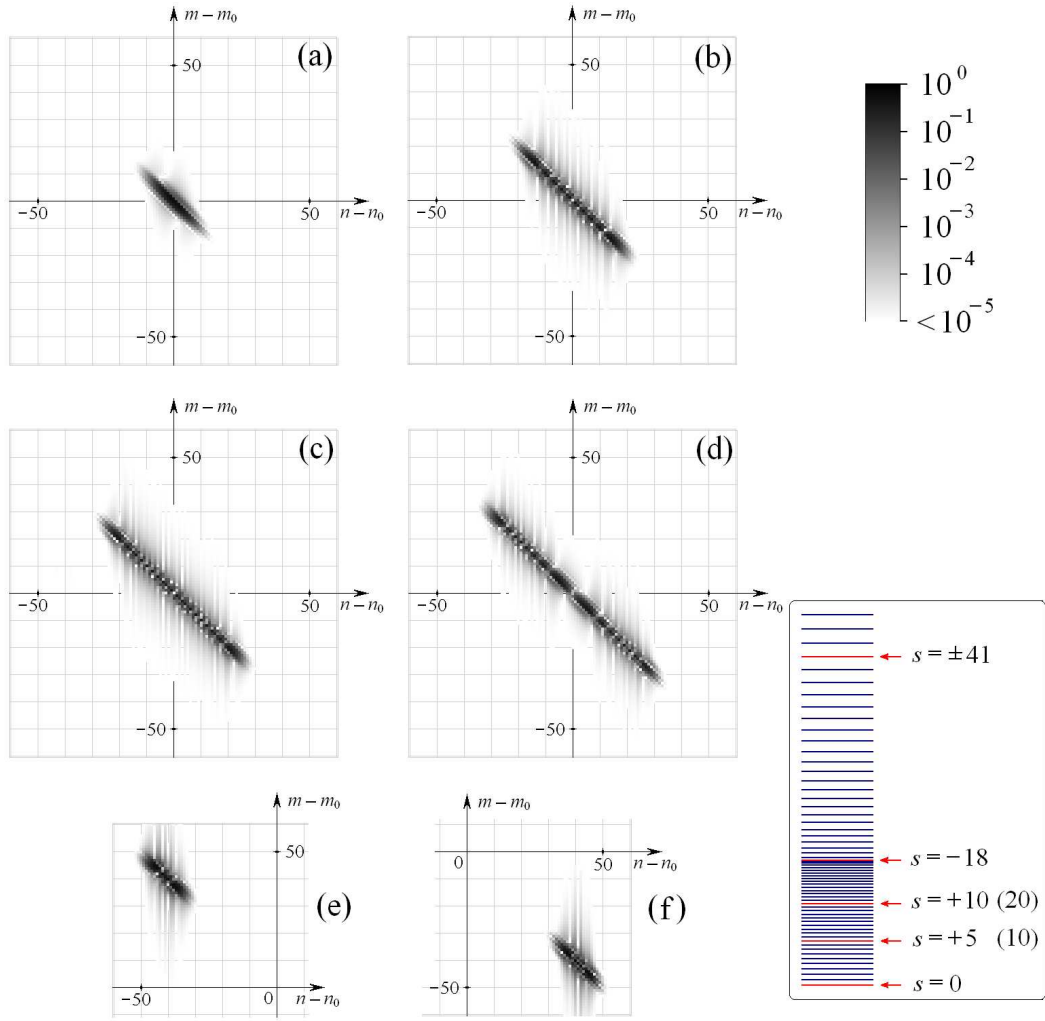


Рис. 3.5: Распределение вероятностей $|c_{rp}^k|^2$ для состояний на резонансе связи $\eta = 1$ по невозмущенному базису для группы состояний $q = 0$ (на вставке) при следующих параметрах: $d = \pi$, $a = 0.005$, $k = 0.01$ и $n_0 = m_0 = 400$. Рассмотрены (a) нижний уровень $s = 0$, (b) 10-й уровень ($s = +5$), (c) 20-й уровень ($s = +10$), (d) присепаратрисный уровень $s = -18$, (e) и (f) — почти вырожденные надсепаратрисные уровни $s = \pm 41$.

Расположение этих уровней относительно сепаратрисы и центра резонанса проиллюстрировано на вставке. Для сравнения на рис. 3.5(d) представлено распределение, соответствующее состоянию $s = -18$, взятому из присепаратрисной области. Все представленные структуры

симметричны по отношению к началу координат. Хорошо заметно, что степень делокализации состояний в диагональном направлении возрастает с приближением к сепаратрисе резонанса. В частности, присепаратрисное состояние наиболее широко распределено в невозмущенном базисе. Как будет показано далее, именно присепаратрисные состояния, как наиболее делокализованные в исходном базисе, могут обеспечивать наличие в системе слабого хаоса и, в частности, диффузию Арнольда. Для сравнения на рис. 3.5(e, f) представлены также распределения, соответствующие двум почти вырожденным надсепаратрисным состояниям с $s = \pm 41$ (см. вставку). Они являются слабозмущенными и, в отличие от всех предыдущих структур, приведенные на последних графиках несимметричны относительно начала координат и имеют относительно малую дисперсию.

Рис. 3.6 иллюстрирует распределение плотности вероятности для тех же резонансных состояний в (x, y) -пространстве. Несмотря на то, что здесь имеются в виду координаты $\tilde{x}_i$, при $a/d \ll 1$ (в данном случае $a/d \approx 0.0016$) распределения в реальных координатах имеют ту же структуру. Ясно видно, что структура этих состояний сильно отличается от структуры невозмущенных состояний. Регулярное распределение вероятности на рис. 3.6(a), отвечающее состоянию $s = 0$, напоминает классическую траекторию для центра резонанса $\eta = 1$. Напомним, что она начинается в точке $x = -\pi, y = 0$, а заканчивается в точке $x = \pi, y = 0$. При $x = 0, y = \pi$ происходит соударение с верхней границей (там, где канал имеет максимальную ширину). В соответствие с соотношением неопределенностей, распределение, представлен-

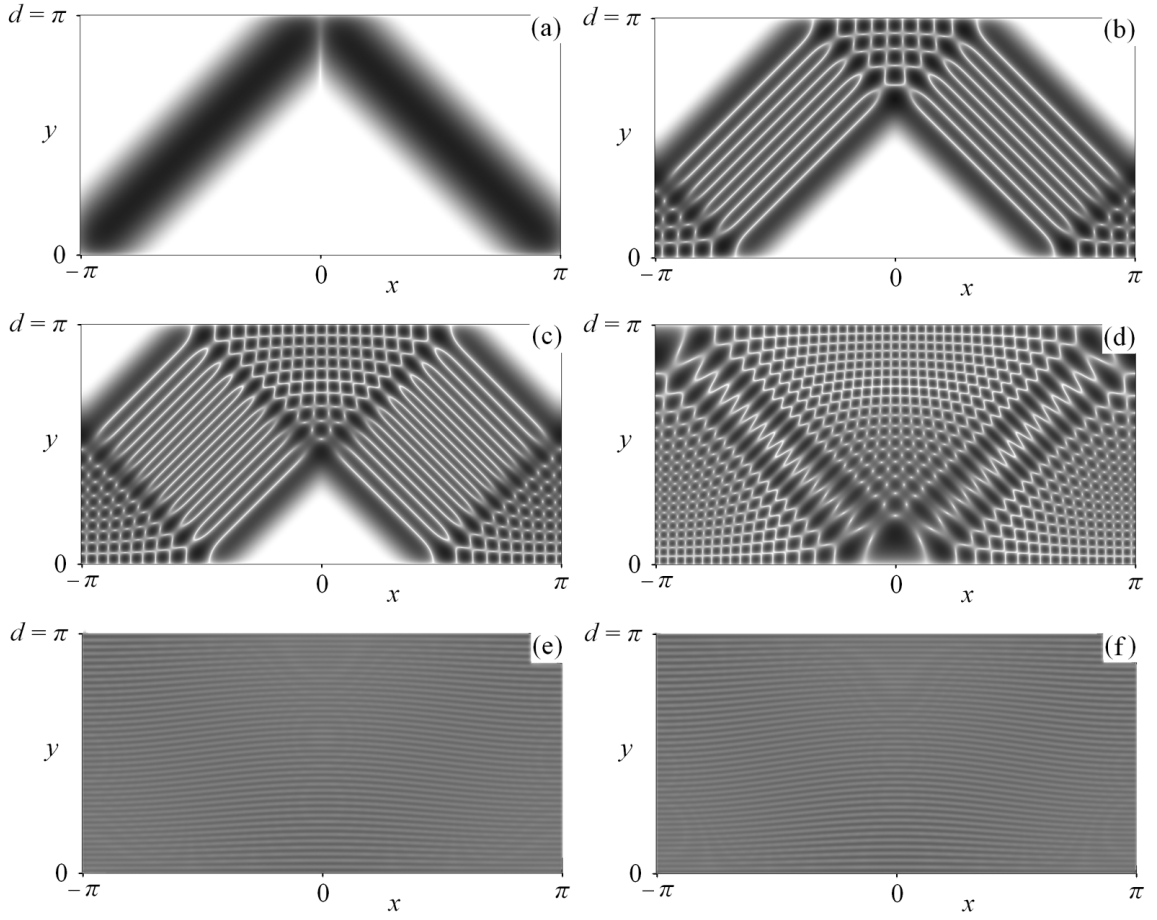


Рис. 3.6: Примеры распределения плотности вероятности $|\psi_{q,s}^k(x, y)|^2$ для тех же состояний и параметров модели, что приведены на рис. 3.5.

ное на графике, имеет конечную ширину. Распределения вероятности на рис. 3.6(b, c) отвечают десятому и двадцатому резонансным состояниям; они также напоминают околорезонансные классические траектории с примечательной внутренней структурой. Каждому такому состоянию отвечает группа классических траекторий, начальные условия для которых располагаются на замкнутых кривых, огибающих центр резонанса в фазовом пространстве $(\sin \alpha, x)$ (см. рис. 3.2(a)). Интересно, что число белых продольных полос на распределениях равно девяти и девятнадцати соответственно. На рис. 3.6(d) показано распределе-

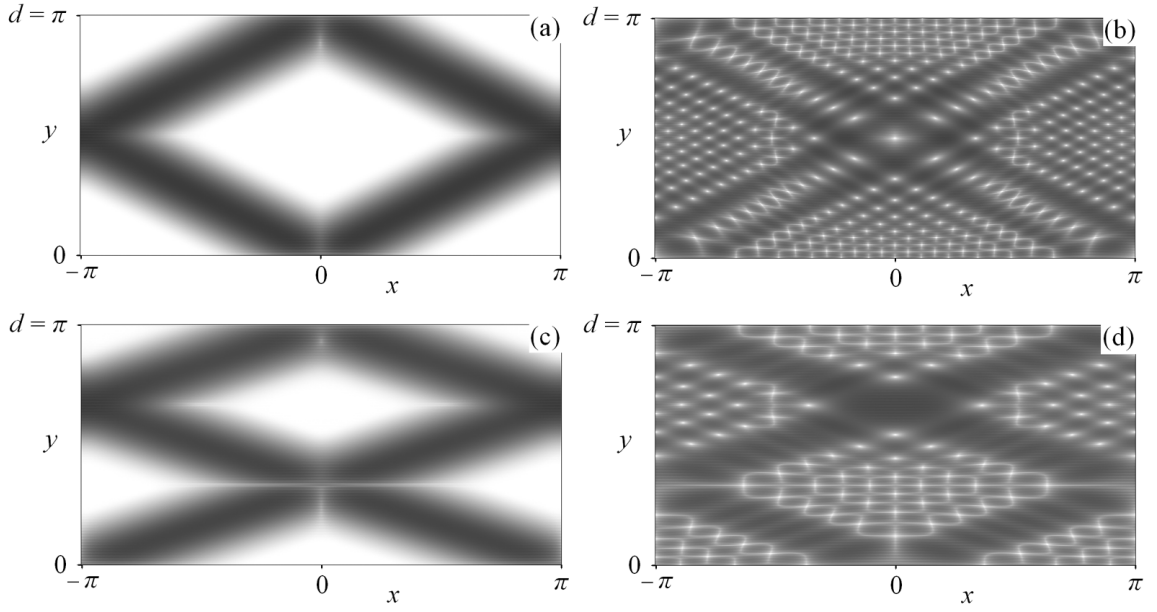


Рис. 3.7: Примеры распределения плотности вероятности $|\psi(x, y)|^2$ (для состояний, отвечающих центру и сепаратрисе резонанса) для резонансов $\eta = 1/2$ ((a) и (b)) и $\eta = 1/3$ ((c) и (d)) и тех же параметров модели.

ние плотности вероятности для состояния $s = -18$, взятого из присепаратрисной области. Его структура также напоминает классическую неустойчивую траекторию. Распределения плотности вероятности для пары слабовозмущенных состояний $s = \pm 41$ показано на рис. 3.6(e, f). Оба эти распределения практически однородны, что лишь подчеркивает тот факт, что данные состояния являются слабовозмущенными. В заключение заметим, что представленные на рис. 3.6(a)-(d) распределения электронной плотности имеют много общего с распределениями электромагнитного поля в волноводах в квазиоптическом режиме [56].

Пользуясь той же методикой нами были рассчитаны также состояния на резонансах связи $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$. Эти резонансы являются резонансами того же порядка, что $\eta = 1$, однако имеют несколько

меньшую ширину (см. рис. 3.2(b)), отчего в квантовом случае число подсепаратрисных состояний становится меньше. В качестве примера на рис. 3.7 показаны распределения плотности вероятности для состояний, отвечающих центрам резонансов и присепаратрисной области. Очевидно то, что структура этих распределений также отражает характер соответствующих классических траекторий на резонансах.

3.3 Эволюция квантовых состояний

Рассмотрим далее динамику заряженной частицы в канале в присутствии внешнего переменного электрического поля, задаваемого потенциалом $V(y, t) = -f_0 y (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t)$. Далее мы предполагаем, что частоты Ω_1 и Ω_2 выбраны так, чтобы удовлетворялось соотношение $\omega_{n_0} = (\Omega_1 + \Omega_2) / 2$, определяющее равную степень воздействия со стороны каждого резонанса с внешним полем на динамику частицы, находящейся на резонансе связи. В частности, далее $\omega_{n_0} = 400$, $\Omega_1 = 350$, $\Omega_2 = 450$, таким образом период внешнего поля есть $T = 7 \cdot 2\pi / \Omega_1 = 9 \cdot 2\pi / \Omega_2 \approx 0.126$.

Поскольку полный гамильтониан системы периодичен во времени изучение эволюции состояний удобно проводить с использованием оператора эволюции. Способ его построения был описан нами в первой Главе на примере задачи о двух взаимодействующих осцилляторах (см. стр. 35). Остановимся на анализе структуры матрицы $U_{qs, q's'}(T)$, для чего на рис. 3.8 представлено распределение модулей ее матричных элементов. Хорошо заметно, что эта матрица имеет блочную структуру с крестообразным образованием в центрах блоков. Когда оператор

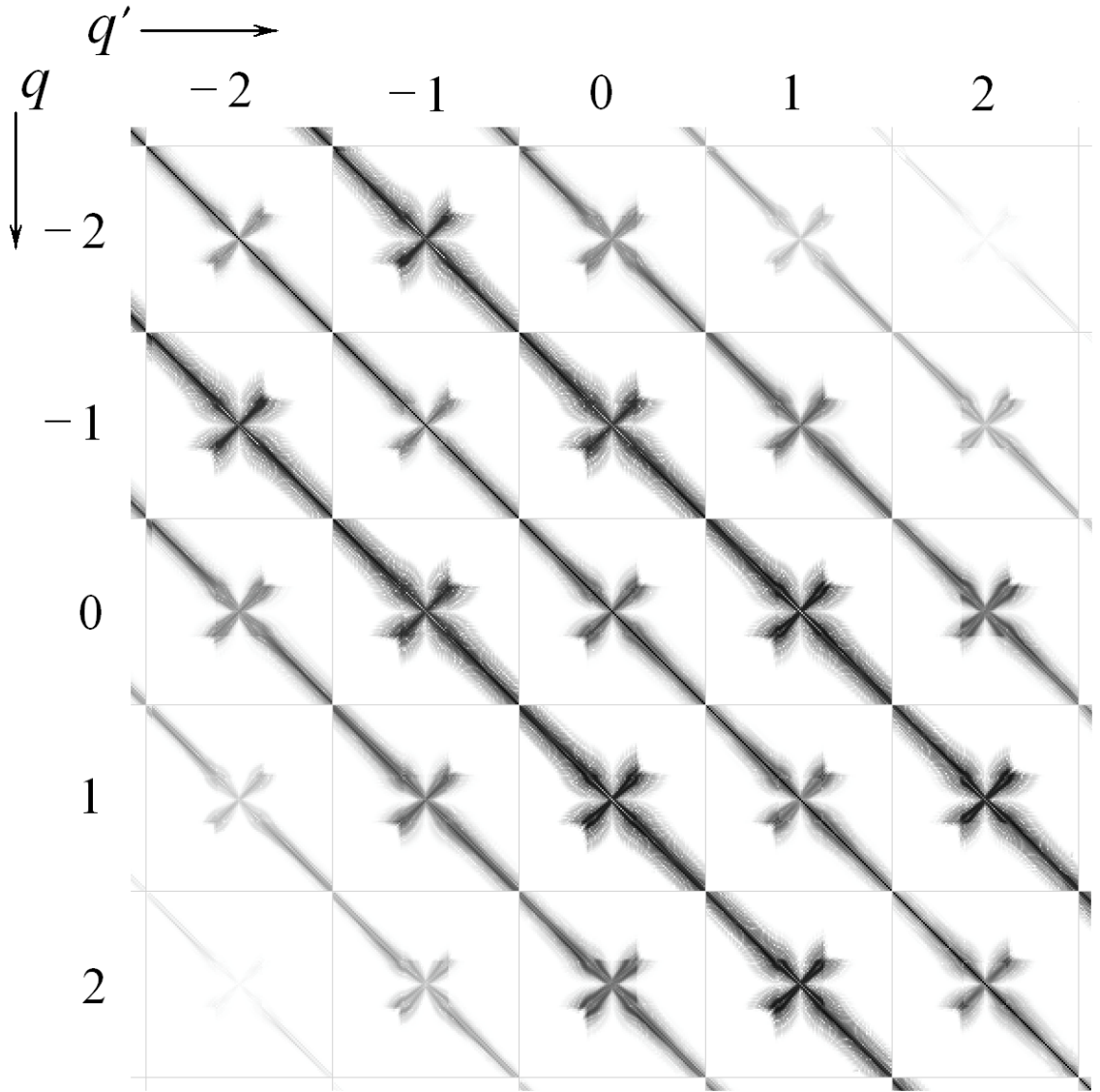


Рис. 3.8: Распределение модулей матричных элементов для фрагмента матрицы оператора эволюции $|U_{qs,q's'}(T)|$ для тех же параметров модели, что на рис. 3.5, и $f_0 = 5$. Размер каждого квадратного блока 101×101 .

эволюции действует на начальное условие вида $C_{q,s} = \delta_{q,q_0} \delta_{s,s_0}$, результирующее состояние совпадает со (q_0, s_0) -столбцом матрицы. Здесь мы встречаемся с ситуацией, описанной в первой Главе (см. рис. 2.3 и комментарий к нему): края “крестов”, где матричные элементы достаточно велики, отвечают за переходы между присепаратрисными состоя-

ниями соседних групп (вдоль резонанса связи). Как результат, таким переходы имеют бóльшую интенсивность, чем между другими состояниями. Как будет показано далее, именно присепаратрисные состояния и соответствующие переходы отвечают за проявление в системе квантовой диффузии Арнольда.

Наша цель состоит в том, чтобы проанализировать динамику частицы, помещенную изначально в стохастический слой резонанса связи, под действием двух резонансов с внешним полем, при условии, что все эти резонансы не перекрываются друг с другом. На рис. 3.9 представлены типичные зависимости дисперсии $\Delta_q^2 = \overline{(\Delta\tilde{H})^2}/\omega_{n_0}^2$ от времени, измеренном в периодах внешнего поля, для различных начальных условий. Величина Δ_q^2 определена как дисперсия волнового пакета в q -пространстве: $\Delta_q^2 = \sum_q (q - \bar{q})^2 \sum_s |C_{q,s}|^2$, где $\bar{q} = \sum_q q \sum_s |C_{q,s}|^2$.

Представленные данные ярко иллюстрируют различный характер эволюции системы в зависимости от выбранного начального условия. Для состояния вблизи центра резонанса, а также слабозмущенного надсепаратрисного состояния дисперсия практически сразу начинает осциллировать во времени. В то же время для нескольких присепаратрисных состояний (попадающих в стохастический слой) характерен линейный рост дисперсии с последующим насыщением. Последний факт, очевидно, связан с проявлением динамической локализации, о которой подробно рассказывалось в первой главе на примере системы двух взаимодействующих осцилляторов (см. стр. 47).

Для характеристики скорости диффузии в первую очередь нами были рассчитаны коэффициенты классической диффузии Арнольда D_1 ,

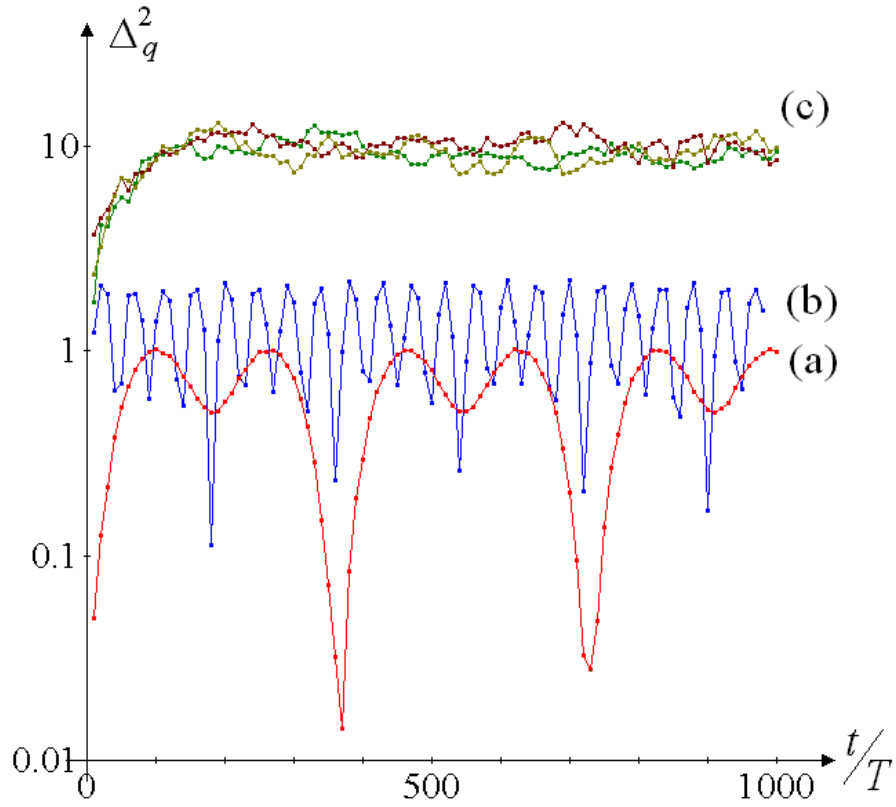


Рис. 3.9: Зависимость дисперсии Δ_q^2 от времени для разных начальных условий на резонансе связи в группе $q = 0$ — (a) на нижнем уровне $s = 0$, (b) на надсепаратрисном уровне $s = +45$, (c) на присепаратрисных уровнях $s = -21, +22, -23$. Здесь $a = 0.01$ и $f_0 = 10$.

$D_{1/2}$ и $D_{1/3}$ для резонансов $\eta = 1$, $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$ соответственно. Методика этих расчетов была описана в части 2.1 (см. стр. 59). В случаях с резонансами $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$ частоты внешнего поля были выбраны так, чтобы выполнялось соотношение $\Omega_1 : \omega_{m_0} : \Omega_2 = 7 : 8 : 9$, имеющее место для резонанса $\eta = 1$. Здесь ω_{m_0} — частота поперечных колебаний в канале при энергии $E = 1.6 \cdot 10^5$.

Далее был рассчитан коэффициент квантовой диффузии D_{1q} для резонанса $\eta = 1$ (см. рис. 3.10). К сожалению, рассчитать коэффициенты квантовой диффузии Арнольда для резонансов $\eta = 1/2$ и $\eta = 1/3$

оказалось невозможным, ввиду отсутствия самой диффузии. Как уже отмечалось, оба эти резонанса несколько уже, чем $\eta = 1$, что в квантовом случае приводит к тому, что в резонанс вовлечено всего несколько состояний, отчего число состояний, попадающих в стохастический слой, при наибольшей допустимой амплитуде гофрировки оказывается порядка одного-двух. При бóльшей амплитуде происходит перекрытие этих резонансов с резонансами на частотах Ω_1 и Ω_2 . Таким образом, мы сразу оказываемся на границе Шурыка [23], следовательно, при текущей геометрии канала режим слабого хаоса на данных резонансах практически недостижим: регулярный режим сменяется на полный хаос в крайне узком интервале параметров модели.

Обсуждая результаты, представленные на рис. 3.10, можно заметить следующее. Также, как и в модели двух взаимодействующих осцилляторов, величина коэффициента квантовой диффузии D_{1q} также оказывается на полтора-два порядка ниже классического результата. При этом сравнении, правда, нужно иметь в виду и то, что флуктуации классического коэффициента диффузии составляют как минимум плюс минус полпорядка. Необходимо отметить также, что зависимости D_{1q} и D_1 от величины гофрировки в области $10 < 1/\sqrt{a} < 20$ практически линейны и имеют одинаковый наклон. При $1/\sqrt{a} < 10$ расчет коэффициента квантовой диффузии, к сожалению, был крайне затруднен необходимостью учета громадного числа состояний (в виду большой ширины всех рассматриваемых резонансов и близости границы их перекрытия). При $1/\sqrt{a} > 20$ участок линейного роста дисперсии Δ_q^2 отсутствовал. Последнее обстоятельство, очевидно, опять-таки связано

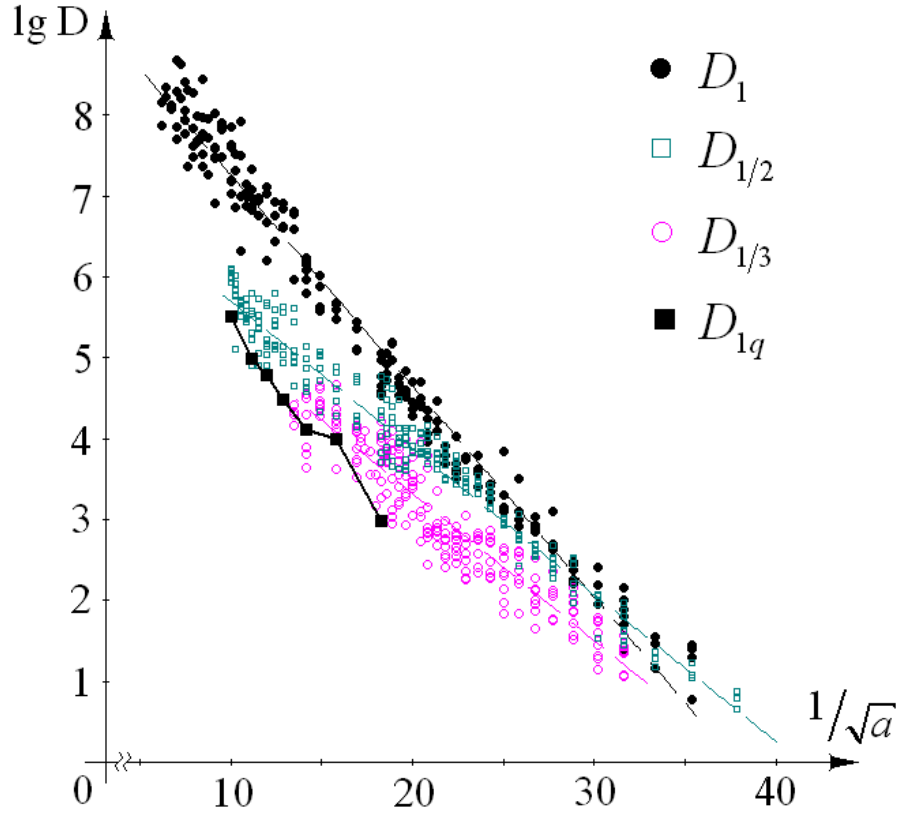


Рис. 3.10: Коэффициенты классической D_1 , $D_{1/2}$ и $D_{1/3}$, и квантовой D_{1q} диффузии Арнольда как функции параметра взаимодействия двух степеней свободы — амплитуды гофрировки канала a .

с достижением границы Шурыка [23] — в стохастическом слое резонанса оказывается слишком мало квантовых состояний.

3.4 Краткие итоги Главы 3

Итак, третья Глава настоящей работы была посвящена изучению динамики заряженной частицы в двумерном канале, одна из стенок которого ровная, а другая имеет синусоидальную форму, под действием внешнего переменного электрического поля. Особое внимание было уделено рассмотрению состояний, отвечающих резонансам связи в исходной

системе. В частности, мы обнаружили, что распределение плотности вероятности для таких состояний может быть поставлено в соответствие группам классических траекторий.

Включение внешнего поля порождает слабый хаос на присепаратрисных состояниях, как на наиболее широко распределенных в невозмущенном базисе. При этом в образовавшемся узком стохастическом слое становится возможной медленная диффузия, которую можно поставить в соответствие диффузии Арнольда, имеющей место в аналогичной классической системе. Вследствие сильного влияния квантовых эффектов, квантовая диффузия оказывается на полтора-два порядка медленнее классической. В области параметров, соответствующей достижению границы Шуряка, она подавляется. В том же случае, когда квантовая диффузия возможна, она по прошествии некоторого времени останавливается, тем самым демонстрируя известный эффект динамической локализации. Как видно из вышесказанного, основные черты квантовой диффузии Арнольда совпадают с описанными для системы из двух взаимодействующих осцилляторов.

По-видимому, обнаруженные эффекты могли бы быть исследованы экспериментально в полуметаллических структурах. В отличие от экспериментов с двумерным электронным газом в гетеропереходах GaAs/AlGaAs [38, 39], нам необходим квазиклассический канал, имеющий большое число уровней размерного квантования. Для наблюдения эффектов динамической локализации в электромагнитном отклике системы можно взять канал шириной $d = 1$ мкм с периодом гофрировки $l = 2$ мкм. Тогда безразмерная величина $a = 0.01$ будет отвечать

амплитуде гофрировки порядка 3.2 нм, т.е. в несколько моноатомных слоев. Соответственно для эффективной массы электрона $m \simeq 0.1m_e$ уровень $n_0 = 400$ имеет энергию $E_{n_0} \simeq 0.61$ эВ, а частота перехода между ближайшими уровнями есть $\omega_{n_0}/2\pi \simeq 740$ ГГц. В этих единицах период внешнего поля равняется 1.1×10^{-11} с, а безразмерная амплитуда возмущения $f_0 = 10$ соответствует напряженности электрического поля $E \simeq 0.24$ В/см. Заметим, что для таких параметров время остановки диффузии, равное приблизительно 200 периодам внешнего поля, имеет порядок 2.2 нс. Очевидно, для наблюдения эффекта время жизни электрона должно быть на порядок больше. Последнее условие можно удовлетворить в полуметаллических структурах типа Bi или Sb, где при температуре ~ 1 К длина свободного пробега составляет порядка 1 мм, а время жизни около 10 нс.

Заключение

Сформулируем окончательные итоги настоящей работы.

1. Впервые аналитически и численно исследовано универсальное динамическое явление — квантовая диффузия Арнольда — в двумерных системах, подверженных воздействию внешнего периодического во времени поля — квантовой точке и канале с гофрированной границей.
2. Для указанных систем найдены стационарные электронные состояния, построены операторы эволюции систем за период внешнего поля, исследованы квазиэнергетические состояния, а также динамика конкретных начальных условий. Результаты развитого подхода могут быть использованы для описания мезоскопических систем, находящихся в электромагнитных полях большой интенсивности, т.е. в сильно нелинейных системах.
3. Найденные стационарные состояния на резонансах связи в обеих системах имеют следующую структуру. Энергетический спектр представляет собой последовательность групп уровней с внутренней структурой, подобной спектру Матье. Присепаратрисные состояния имеют наибольшую дисперсию распределения в базисах невозмущенных систем.

4. Распределения плотности вероятности состояний, попавших в резонанс, для канала с гофрированной границей показал, имеют структуру, позволяющую поставить им в соответствие группы классических резонансных траекторий.
5. На этапе расчета временной динамики систем под действием внешнего переменного поля анализ матричных элементов оператора эволюции указывает на более высокую интенсивность переходов между присепаратрисными состояниями различных групп уровней, нежели между состояниями, отвечающими центрам резонансов, или слабозмущенными состояниями, не попавшими в резонанс.
6. Для обеих изучаемых моделей рассчитаны коэффициенты квантовой диффузии Арнольда вдоль резонансов связи. Показано, что в некотором диапазоне параметров двух систем зависимость коэффициентов квантовой и классической диффузии от параметра, отвечающего за интенсивность взаимодействия двух степеней свободы, носит сходный характер, при этом во всех случаях значения квантового коэффициента диффузии оказываются на один-два порядка ниже классических результатов.
7. Подтверждено, что в отличие от классической диффузии квантовая диффузия Арнольда имеет порог по амплитуде возмущения, т.к. проявляется лишь в квазиклассическом режиме. Этот факт связан с количеством квантовых состояний, попадающих в область классического стохастического слоя. Квантовая диффузия может

проявляться, лишь когда это число много больше единицы. В противном случае квантовые эффекты полностью подавляют диффузионную динамику.

8. Обнаружено также, что квантовая диффузия Арнольда вследствие динамической локализации через определенный промежуток времени останавливается. Явление остановки диффузионного роста дисперсии объясняется тем, что получаемый в результате расчетов квазиэнергетический спектр системы является дискретным, число эффективно занятых в эволюции квазиэнергетических состояний конечно, а также и с тем, что они имеют конечную величину дисперсии распределения по группам стационарных состояний (вдоль резонанса связи). Важно, что в данном случае динамическая локализация проявляется в системах с числом степеней свободы $N = 2.5$, в то время как в случае ротатора с периодическими толчками $N = 1.5$, а также и то, что это явление наблюдается в условиях слабого хаоса на сепаратрисах, а не глобального хаоса, как в других известных системах.
9. Обнаружен и исследован эффект остановки квантовой диффузии Арнольда через определенный промежуток времени вследствие динамической локализации. Это явление связано с несколькими причинами. Во-первых, квазиэнергетический спектр системы является дискретным, а, во-вторых, число эффективно занятых в эволюции квазиэнергетических состояний конечно. Немаловажно и то, что квазиэнергетические состояния имеют конечную величину дисперсии распределения по группам стационарных состояний

(вдоль резонанса связи). В данном случае динамическая локализация имеет место в системах с числом степеней свободы $N = 2.5$, в то время как в исследовавшейся ранее модели ротатора с периодическими толчками $N = 1.5$ [2].

Классическая диффузия Арнольда проявляется как на масштабах Солнечной системы так и в микромире, например, в ускорителях на встречных пучках. Квантовая диффузия Арнольда, по-видимому, также может проявляться во многих многомерных системах, таких как, например, многоатомные молекулы или квантовые билиарды. Современные технологии вполне позволяют изготавливать структуры, подобные описанной в заключении третьей Главы. Этот факт позволяет надеяться, что экспериментальное наблюдение квантовой диффузии Арнольда — лишь вопрос времени.

Автор выражает глубокую благодарность своему соавтору профессору Ф.М. Израйлеву за полезные обсуждения и ценные замечания при подготовке общих статей, а также своему научному руководителю профессору В.Я. Демиховскому за его неоценимую поддержку на всех этапах подготовки настоящей работы и критические замечания, способствовавшие появлению этой рукописи.

Приложение А

А.1 Квантовый нелинейный резонанс

В данной части Приложения для полноты настоящей работы изложено по кн. [44] решение задачи об изолированном квантовом нелинейном резонансе. Для получения нелинейного резонанса подействуем на невозмущенную систему переменным полем так, что гамильтониан системы будет иметь следующий вид:

$$\hat{H} = \hat{H}_x^0 - f_0 x \cos \omega t. \quad (\text{A.1})$$

Здесь гамильтониан $\hat{H}_x^0$ описывает какой-либо нелинейный осциллятор, и для определенности можно считать, что он соответствует (2.2). Как обычно, решение ищем в виде ряда по невозмущенным функциям, т.е. $\psi(x, t) = \sum_n c_n(t) \psi_n(x)$, тогда нестационарное уравнение Шрёдингера принимает вид

$$i\hbar_0 \frac{dc_n}{dt} = c_n E_n^0 - f_0 \cos \omega t \sum_m x_{n,m} c_m. \quad (\text{A.2})$$

Будем рассматривать теперь эволюцию системы вблизи резонансного уровня n_0 , т.е. считая выполненным равенство $\hbar_0 \omega = E_{n_0+1}^0 - E_{n_0}^0$. Величину n_0 будем считать достаточно большой ($n_0 \gg 1$), что соответствует квазиклассической ситуации. Дальнейшая конкретизация сис-

темы связана с характером переходов, близких к резонансному. Если ангармонизм невозмущенной системы очень велик, то переходы, близкие к резонансному, уже не являются резонансными вследствие сильной неэквидистантности энергетического спектра E_n^0 . В этом случае, как правило, ограничиваются лишь рассмотрением переходов между двумя уровнями n_0 и $n_0 + 1$.

В другом предельном случае ангармонизм системы мал и энергетический спектр E_n^0 не сильно отличается от эквидистантного. Тогда большое число переходов, находящихся по соседству с основным переходом ($n_0 \leftrightarrow n_0 + 1$), также близки к резонансному и должны быть рассмотрены одновременно. Именно такая ситуация и будет рассмотрена ниже.

Используя разложение (2.7), можем в (A.2) ввести новые, более медленные, переменные путем замены

$$c_n(t) = a_n(t) \exp \left[-i \left(\frac{E_{n_0}^0}{\hbar_0} + \omega(n - n_0) \right) t \right]. \quad (\text{A.3})$$

Тогда, оставляя в сумме лишь самые медленные слагаемые, получим следующее уравнение:

$$i\hbar_0 \frac{da_n}{dt} = \frac{E_{n_0}''}{2} (n - n_0)^2 a_n - \frac{f_0}{2} (x_{n,n+1} a_{n+1} + x_{n,n-1} a_{n-1}). \quad (\text{A.4})$$

Вследствие малости возмущения и того факта, что $n_0 \gg 1$, в системе (A.4) можно заменить всюду $x_{n,n\pm 1}$ на $x_{n_0,n_0\pm 1}$ и далее с высокой степенью точности положить $x_{n_0,n_0+1} \approx x_{n_0,n_0-1} \equiv V_{n_0}$, тогда уравнение принимает вид

$$i\hbar_0 \frac{da_n}{dt} = \frac{E_{n_0}''}{2} (n - n_0)^2 a_n - \frac{f_0 V_{n_0}}{2} (a_{n+1} + a_{n-1}). \quad (\text{A.5})$$

Система (A.5) имеет простое аналитическое решение. Действительно, введем новые амплитуды $b(\varphi, t)$ согласно формуле

$$a_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} b(\varphi, t) e^{i(n-n_0)\varphi} d\varphi, \quad (\text{A.6})$$

причем $b(\varphi + 2\pi, t) = b(\varphi, t)$. Подстановка (A.6) в (A.5) дает

$$i\hbar_0 \frac{\partial b}{\partial t} = \hat{\mathbf{H}}b, \quad \hat{\mathbf{H}} = -\frac{E''_{n_0}}{2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - f_0 V_{n_0} \cos \varphi. \quad (\text{A.7})$$

Резонансный гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}$ в (A.7) представляет собой гамильтониан плоского ротатора с моментом инерции $\hbar_0^2/E''_{n_0}$ и дипольным моментом V_{n_0} , помещенного в однородное электрическое поле напряженностью f_0 . Данный результат являет собой полное соответствие классическому: в классической механике резонансным гамильтонианом является, как правило, гамильтониан математического маятника.

Общее решение данной задачи имеет вид

$$b(\varphi, t) = \sum_Q B_Q \Theta_Q(\varphi) e^{-i\frac{E_Q}{\hbar_0}t}, \quad (\text{A.8})$$

где $\Theta_Q(\varphi)$ и E_Q — собственные функции и собственные значения соответственно для стационарной задачи

$$\hat{\mathbf{H}}\Theta_Q(\varphi) = E_Q \Theta_Q(\varphi), \quad (\text{A.9})$$

а B_Q — коэффициенты разложения, определяемые начальными условиями. Здесь уместно сделать следующее замечание: путем некоторых преобразований нестационарную задачу с периодическим по времени гамильтонианом (A.1) удалось свести к эволюционной со стационарным гамильтонианом из (A.7). Поэтому полный набор $\Theta_Q(\varphi)$ и E_Q — есть, фактически, квазиэнергетические состояния [17] для системы

(A.1). Из вида оператора $\hat{H}$ следует, что (A.9) является уравнением Маттье [45]. Тем самым система собственных значений E_Q и собственных функций $\Theta_Q(\varphi)$ известна.

Спектр E_Q имеет зонную структуру. Периодическим по φ функциям $b(\varphi, t)$ соответствуют периодические же функции $\Theta_Q(\varphi)$, т.е. так называемые функции Маттье первого рода, и те значения E_Q , которые расположены на границах зон. Именно эти функции $\Theta_Q(\varphi)$ и соответствующие им собственные значения E_Q входят в разложение (A.8).

Пусть теперь коэффициенты $a_n(0)$ определяют начальные условия амплитуд $a_n(t)$ в системе (A.5), тогда из (A.6) и (A.8) следует, что

$$a_n(t) = \sum_{m,Q} a_m(0) \Theta(n - n_0) \Theta(n_0 - m) e^{-i \frac{E_Q}{\hbar_0} t}, \quad (\text{A.10})$$

где $\Theta(n) = 1/2\pi \int_0^{2\pi} \Theta(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi$, что является полным решением задачи об изолированном квантовом нелинейном резонансе, выраженным через начальные условия.

В структуре спектра Маттье можно выделить следующие группы уровней — подсепаратрисную и надсепаратрисную. Про надсепаратрисные энергетические уровни можно сказать, что они практически двукратно вырождены и, говоря на классическом языке, соответствуют “пролетным” состояниям. По поводу снятия вырождения здесь уместно сделать следующее замечание. Задача о нелинейном резонансе свелась к задаче о плоском ротаторе, помещенном во внешнее электрическое поле (A.7), для которой известно, что величина расщепления уровней ротатора с индексами $\pm m$ пропорциональна амплитуде возмущения (в данном случае $f_0 V_{n_0}$) в степени $2m$ [46]. В связи с именно этим свойством системы можно с высокой степенью точности утверждать,

что состояния, расположенные выше точки сгущения уровней (сепаратрисы) являются двукратно вырожденными.

Подсепаратрисные состояния являются локализованными в потенциальной яме $f_0 V_{n_0} \cos \varphi$. Частоту малых колебаний на резонансе $\tilde{\omega}$ (с точностью до $\hbar_0$ это есть характерное расстояние между уровнями локализованных состояний) можно оценить, представив потенциал в виде $f_0 V_{n_0} \cos \varphi \approx f_0 V_{n_0} (1 - \varphi^2/2)$, тогда

$$\tilde{\omega} = \frac{\sqrt{f_0 V_{n_0} E''_{n_0}}}{\hbar_0}. \quad (\text{A.11})$$

Число локализованных состояний легко определить, разделив всю глубину потенциальной ямы, т.е. $2f_0 V_{n_0}$, на характерное расстояние между уровнями, определяемое (A.11), тогда получим

$$N_{f_0} = 2 \sqrt{\frac{f_0 V_{n_0}}{E''_{n_0}}}. \quad (\text{A.12})$$

Полное же число уровней, попавших в резонанс, т.е. ширина резонанса по n , равно удвоенному числу локализованных состояний N_{f_0} .

Рассматривая теперь два резонанса, можем записать условие их перекрытия в виде

$$2N_{f_0} \approx \Delta N, \quad (\text{A.13})$$

где ΔN это “расстояние” между резонансами, выраженное через номера уровней энергии: $\Delta N = |N_2 - N_1|$, где N_i определяется равенством $\hbar_0 \Omega_i = E_{N_i}^{0'}$, Ω_i — частоты внешнего поля. Тогда из (A.13) нетрудно получить оценку для критического значения амплитуды возмущения f_0^* , при котором происходит перекрытие двух резонансов:

$$f_0^* = \frac{(\Delta N)^2}{16 V_{n_0}} E''_{n_0}. \quad (\text{A.14})$$

Данное соотношение полностью аналогично классическому [5] и могло быть получено из него путем замены соответствующих параметров на их квантовые аналоги.

А.2 Временная эволюция на квантовом резонансе связи

Для получения ряда количественных оценок, касающихся квантового резонанса связи, сам резонанс удобно рассматривать как некоторый динамический процесс, происходящий во времени. В связи с этим рассмотрим далее задачу об эволюции состояния на резонансе связи, для чего в уравнении (2.8) заменим выражение в левой части на временную производную:

$$i\hbar_0 \frac{dc_{k,l}}{dt} = \left(2E_{n_0} + \hbar_0 \omega(k+l) + \frac{E''_{n_0}}{2}(k^2 + l^2) \right) c_{k,l} - \mu \sum_{k',l'} x_{k,k'} y_{l,l'} c_{k',l'}. \quad (\text{A.15})$$

Решение данного уравнения будем искать в виде

$$c_{k,l}(t) = b_{k,l}(t) \exp \left[-i(2E_{n_0}/\hbar_0 + \omega(k+l))t \right]. \quad (\text{A.16})$$

Подставляя это выражение в (A.15), получим

$$i\hbar_0 \frac{db_{k,l}}{dt} = \frac{E''_{n_0}}{2}(k^2 + l^2)b_{k,l} - \mu \sum_{k',l'} x_{k,k'} y_{l,l'} b_{k',l'} e^{-i\omega(k'+l'-k-l)t}. \quad (\text{A.17})$$

Произведем далее резонансное приближение — ограничимся рассмотрением в сумме лишь самых медленных слагаемых, т.е. тех, для которых $k' + l' = k + l$. Перебирая теперь различные значения суммы $k + l$

$(k + l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} i\hbar_0 \frac{db_{k,l}}{dt} = & \frac{E''_{n_0}}{2}(k^2 + l^2)b_{k,l} - \\ & - \mu(x_{k,k+1} y_{l,l-1} b_{k+1,l-1} + x_{k,k-1} y_{l,l+1} b_{k-1,l+1}) - \\ & - \mu(x_{k,k+3} y_{l,l-3} b_{k+3,l-3} + x_{k,k-3} y_{l,l+3} b_{k-3,l+3}) - \\ & - \mu(x_{k,k+5} y_{l,l-5} b_{k+5,l-5} + x_{k,k-5} y_{l,l+5} b_{k-5,l+5}) - \dots \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Т.к. при большом n_0 и малых k и l матричные элементы $x_{k,l}$ мало отличаются от $x_{n_0, n_0 \pm m}$ (где m — нечетное), то можем заменить всюду $x_{k,l}$ на $x_{n_0, n_0 \pm m}$. Для удобства введем далее обозначение $x_{n_0, n_0 \pm m} \equiv V_m$.

Учтя также в нашей задаче идентичность двух осцилляторов, получим

$$\begin{aligned} i\hbar_0 \frac{db_{k,l}}{dt} = & \frac{E''_{n_0}}{2}(k^2 + l^2)b_{k,l} - \mu \left[V_1^2(b_{k+1,l-1} + b_{k-1,l+1}) + \right. \\ & \left. + V_3^2(b_{k+3,l-3} + b_{k-3,l+3}) + V_5^2(b_{k+5,l-5} + b_{k-5,l+5}) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Решение полученного уравнения будем искать в виде

$$b_{k,l}(t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi_1, \varphi_2, t) e^{ik\varphi_1} e^{il\varphi_2} d\varphi_1 d\varphi_2, \quad (\text{A.20})$$

где $u(\varphi_1 + 2\pi k_1, \varphi_2 + 2\pi k_2, t) = u(\varphi_1, \varphi_2, t)$ при целых k_1 и k_2 . При такой замене переменной уравнение (A.19) примет вид простой вид $i\hbar_0 \dot{u} = \hat{\mathbf{H}}u$, где гамильтониан

$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{E''_{n_0}}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varphi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi_2^2} \right) - 2\mu \sum_m V_{2m+1}^2 \cos[(2m+1)(\varphi_1 - \varphi_2)]. \quad (\text{A.21})$$

При следующей замене — $\Theta_1 = \varphi_1 + \varphi_2$ и $\Theta_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ — переменные разделяются:

$$\begin{aligned} i\hbar_0 \frac{\partial u}{\partial t} = & (\hat{\mathbf{H}}_1 + \hat{\mathbf{H}}_2)u, \\ \left\{ \begin{aligned} \hat{\mathbf{H}}_1 = & -E''_{n_0} \frac{\partial^2}{\partial \Theta_1^2}, \\ \hat{\mathbf{H}}_2 = & -E''_{n_0} \frac{\partial^2}{\partial \Theta_2^2} - 2\mu \sum_{m=0}^{\infty} V_{2m+1}^2 \cos[(2m+1)\Theta_2]. \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Таким образом, получили, что временная эволюция системы (A.15) в резонансном приближении совпадает с эволюцией системы (A.22), таким образом, два гамильтониана из (A.22) можно называть резонансными для системы (A.15), а значит, и (2.4). При этом гамильтониан

$\hat{\mathbf{H}}_1$ отвечает за “невозмущенный спектр” вдоль резонанса связи (группы уровней отстоят друг от друга на расстояние порядка $\hbar_0\omega$, как в спектре одномерного нелинейного осциллятора) (см. рис. 2.1), а $\hat{\mathbf{H}}_2$ — за структуру энергетического спектра внутри групп состояний с различными q . Исходя из этого соответствия, можем сделать ряд важных замечаний.

Во-первых, спектр каждой группы, строго говоря, не является спектром Матье, т.к. в гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}_2$ входит сумма, содержащая, кроме основной гармоники $2\mu V_1^2 \cos \Theta_2$, множество других. Однако, т.к. амплитуда каждой последующей гармоники относится к амплитуде предыдущей приблизительно как $1 : 23^2$ (в чем можно убедиться при численном анализе), то вкладом членов суммы с $m > 0$ без большой потери точности можно пренебречь, что и оправдывает указание на “Матье-подобность” спектра внутри групп в обозначении $E_{q,s}^M$.

Во-вторых, зная резонансный гамильтониан $\hat{\mathbf{H}}_2$, можем оценить величины некоторых важных параметров. Пользуясь теми же соображениями, что при выводе формул (A.11) и (A.12), можем найти частоту колебаний на резонансе связи:

$$\tilde{\omega} = \frac{2V_1}{\hbar_0} \sqrt{\mu E_{n_0}''}, \quad (\text{A.23})$$

откуда, в частности, легко получается (2.10), а также число локализованных состояний

$$N_\mu = 2V_1 \sqrt{\frac{\mu}{E_{n_0}''}}. \quad (\text{A.24})$$

Полное же число уровней, попавших в резонанс, т.е. ширина резонанса по n , по-прежнему, равно удвоенному числу локализованных состояний N_μ .

Рассматривая теперь систему из двух взаимодействующих осцилляторов, один из которых находится под действием внешнего периодического поля, т.е. систему (2.1), после выделения в ней трех первичных резонансов, можем записать условие их перекрытия в виде

$$2N_{f_0} + 2N_{\mu} \approx \Delta N, \quad (\text{A.25})$$

где N_{f_0} и N_{μ} определяются (A.12) и (A.24) соответственно, а ΔN есть, по-прежнему, расстояние между резонансами, выраженное через число уровней. По сути нами получен известный критерий Б.В. Чирикova [5], отраженный в соотношении (1.22), в квантовом случае. Аналогично, данное соотношение может дать лишь оценку для критических значений амплитуд f_0^* и μ^* , при которых происходит перекрытие трех резонансов, т.к. в реальности они не являются изолированными, и их взаимодействие в определенных условиях является существенным.

А.3 Вывод отображений для канала с гофрированной границей, помещенного во внешнее поле

Итак, рассматриваемый канал имеет две границы: одну — ровную, а другую — гофрированную. Воспользуемся здесь немного иной системой координат: пусть гофрированная граница задается уравнением $y_1 = -a \cos x$, а ровная — $y_2 = d$. Произведенное изменение чисто формально и позволяет слегка упростить вывод формул, однако результат будет справедлив и в ранее принятой системе координат.

Как уже говорилось, в отсутствие внешнего поля движение материальной точки осуществляется по прямым линиям, поэтому систему

удобно изучать, пользуясь отображениями (3.1), связывающими между собой последовательные значения угла и места соударения с границей y_1 . В ряде работ для этого используют плоскую границу y_2 , что, конечно, не играет особой роли, а лишь несколько меняет вид формул отображения.

При наличии внешнего переменного поля движение материальной точки внутри канала описывается лагранжианом

$$L = \frac{m}{2}(v_x^2 + v_y^2) + f_0 y (\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t) \quad (\text{A.26})$$

и подчиняется уравнениям

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0, \\ \ddot{y} = \frac{f_0}{m}(\cos \Omega_1 t + \cos \Omega_2 t). \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} x = At + B, \\ y = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \Omega_1 t}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \Omega_2 t}{\Omega_2^2} \right) + Ct + D. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Теперь необходимо применить начальные условия, которые непосредственно зависят от того, какая часть траектории рассматривается.

А.3.1 Движение от гофрированной границы к ровной

Пусть соударение с гофрированной границей происходит в момент времени $t = t_n$, тогда сразу после отскока имеем

$$x(t_n) = x_n, \quad \dot{x}(t_n) = v_x, \quad y(t_n) = -a \cos x_n, \quad \dot{y}(t_n) = v_y. \quad (\text{A.29})$$

При этом $(v_x^2 + v_y^2)/2m + f_0 a \cos x_n (\cos \Omega_1 t_n + \cos \Omega_2 t_n) = E_n$ — полная энергия материальной точки в этот момент. Будем считать, что

эта величина известна, а в дальнейшем проследим за ее изменением. Пусть отскок происходит под углом α_{n+1} , тогда $v_x = v_0 \sin \alpha_{n+1}$, $v_y = v_0 \cos \alpha_{n+1}$, а $v_0^2 = v_x^2 + v_y^2$. Применяя начальные условия, получаем

$$\begin{aligned} A &= v_0 \sin \alpha_{n+1}, \quad B = x_n - v_0 \sin \alpha_{n+1} \cdot t_n, \\ C &= v_0 \cos \alpha_{n+1} - \frac{f_0}{m} \left(\frac{\sin \Omega_1 t_n}{\Omega_1} + \frac{\sin \Omega_2 t_n}{\Omega_2} \right), \\ D &= -a \cos x_n - C t_n + \frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \Omega_1 t_n}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \Omega_2 t_n}{\Omega_2^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Поскольку в дальнейшем необходимо иметь уравнение траектории, исключим из решения (A.28) время t :

$$y_1(x) = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \frac{\Omega_1}{A}(x - B)}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \frac{\Omega_2}{A}(x - B)}{\Omega_2^2} \right) + \frac{C}{A}(x - B) + D. \quad (\text{A.31})$$

Здесь нижний индекс у $y_1(x)$ указывает на то, что рассматривается первая часть пути — от гофрированной границы к ровной. Имея теперь уравнение траектории на этом участке, можно определить положение точки соударения о ровную границу канала. Для этого необходимо решить уравнение:

$$0 = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \frac{\Omega_1}{A}(x^* - B)}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \frac{\Omega_2}{A}(x^* - B)}{\Omega_2^2} \right) + \frac{C}{A}(x^* - B) + D. \quad (\text{A.32})$$

или

$$x^* = \frac{A}{C}(d - D) + B + \frac{A f_0}{C m} \left(\frac{\cos \frac{\Omega_1}{A}(x^* - B)}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \frac{\Omega_2}{A}(x^* - B)}{\Omega_2^2} \right). \quad (\text{A.33})$$

Здесь необходимо сделать замечание, касающееся математических свойств данного уравнения. Дело в том, что при численном решении данного уравнения логично использовать метод простых итераций, который довольно хорошо сходится. Однако, можно заметить, что в случае пологих траекторий величина $A/C \sim \operatorname{tg} \alpha_{n+1}$ может принимать большие значения, отчего уравнение может иметь более одного

решения. Можно показать, что необходимым условием для этого служит выполнение неравенства $\frac{f_0}{mC}(\frac{1}{\Omega_1} + \frac{1}{\Omega_2}) > 1$. Однако понятно, что при движении материальной точки вправо физическим смыслом наделен самый левый корень уравнения, а при движении влево — самый правый.

Найдя величину x^* , можем определить момент времени, когда происходит соударение с ровной границей t^* :

$$t^* = \frac{x^* - x_n}{v_0 \sin \alpha_{n+1}} + t_n. \quad (\text{A.34})$$

Также определим производную функции $y_1(x)$ в точке соударения x^* :

$$y_1'(x^*) = \frac{f_0}{mA} \left(\frac{\sin \frac{\Omega_1}{A}(x^* - B)}{\Omega_1} + \frac{\sin \frac{\Omega_2}{A}(x^* - B)}{\Omega_2} \right) + \frac{C}{A}. \quad (\text{A.35})$$

А.3.2 Движение от ровной границы к гофрированной

Применяем теперь новые начальные условия к решению уравнений Лагранжа (A.28)

$$\begin{cases} x = A_1 t + B_1, \\ y = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \Omega_1 t}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \Omega_2 t}{\Omega_2^2} \right) + C_1 t + D_1. \end{cases} \quad (\text{A.36})$$

Соударение происходит в момент времени $t = t^*$, при этом

$$x(t^*) = x^*, \quad \dot{x}(t^*) = v_x, \quad y(t^*) = d, \quad \dot{y}(t^*) = v_y. \quad (\text{A.37})$$

Поскольку соударение происходит от ровной границы, горизонтальная составляющая скорости не изменяется, т.е. $v_x = v_0 \sin \alpha_{n+1}$. Вертикальная же составляющая скорости меняет знак. Значит, необходимо найти y -компоненту скорости материальной точки непосредственно перед соударением. Поскольку

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt} = y'(x) \cdot v_x, \quad (\text{A.38})$$

то величина y -компоненты скорости непосредственно перед соударением есть $y'_1(x^*) \cdot v_0 \sin \alpha_{n+1}$ или, короче, $A \cdot y'_1(x^*)$. Таким образом, сразу после соударения будет

$$\dot{y}(t^*) = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\sin \Omega_1 t^*}{\Omega_1} + \frac{\sin \Omega_2 t^*}{\Omega_2} \right) - C. \quad (\text{A.39})$$

Итак, применяя начальные условия, имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \quad B_1 = x^* - At^*, \\ C_1 &= -2\frac{f_0}{m} \left(\frac{\sin \Omega_1 t^*}{\Omega_1} + \frac{\sin \Omega_2 t^*}{\Omega_2} \right) - C, \\ D_1 &= d - C_1 t^* + \frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \Omega_1 t^*}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \Omega_2 t^*}{\Omega_2^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Уравнение второго участка траектории имеет вид

$$y_2(x) = -\frac{f_0}{m} \left(\frac{\cos \frac{\Omega_1}{A_1}(x - B_1)}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \frac{\Omega_2}{A_1}(x - B_1)}{\Omega_2^2} \right) + \frac{C_1}{A_1}(x - B_1) + D_1. \quad (\text{A.41})$$

Точка x_{n+1} , в которой произойдет соударение с гофрированной границей, найдется из уравнения

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= B_1 - \frac{A_1}{C_1}(a \cos x_{n+1} + D_1) + \\ &+ \frac{f_0 A_1}{m C_1} \left(\frac{\cos \frac{\Omega_1}{A_1}(x_{n+1} - B_1)}{\Omega_1^2} + \frac{\cos \frac{\Omega_2}{A_1}(x_{n+1} - B_1)}{\Omega_2^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Найдя величину x_{n+1} , можем определить момент времени, когда происходит это соударение, t_{n+1} :

$$t_{n+1} = \frac{x_{n+1} - x^*}{v_0 \sin \alpha_{n+1}} + t^* = \frac{x_{n+1} - x_n}{v_0 \sin \alpha_{n+1}} + t_n. \quad (\text{A.43})$$

Остается еще вопрос — под каким углом материальная точка ударится о гофрированную поверхность? Найдем производную от $y_2(x)$ в точке соударения:

$$y'_2(x_{n+1}) = \frac{f_0}{mA_1} \left(\frac{\sin \frac{\Omega_1}{A_1}(x_{n+1} - B_1)}{\Omega_1} + \frac{\sin \frac{\Omega_2}{A_1}(x_{n+1} - B_1)}{\Omega_2} \right) + \frac{C_1}{A_1}. \quad (\text{A.44})$$

В момент соударения $\operatorname{ctg} \alpha_{n+1}^* = -y_2'(x_{n+1})$, поэтому

$$\alpha_{n+1}^* = -\operatorname{arctg} \frac{1}{y_2'(x_{n+1})}. \quad (\text{A.45})$$

Именно эту величину, а не α_{n+1} , необходимо учитывать при расчете угла α_{n+2} , для чего нужно использовать первую формулу из исходной системы (3.1).

А.3.3 Изменение энергии системы

Проследим теперь за тем, как изменяется энергия материальной точки за время между двумя последовательными соударениями. Начальное значение энергии является заданным; от него, в частности, зависят величины проекций скорости на оси координат. Перед $(n+1)$ -м соударением энергия будет, очевидно,

$$E_{n+1} = \frac{m}{2} \left(v_x^2(t_{n+1}) + v_y^2(t_{n+1}) \right) + f_0 a \cos x_{n+1} (\cos \Omega_1 t_{n+1} + \cos \Omega_2 t_{n+1}). \quad (\text{A.46})$$

Следя за величиной энергии системы, становится возможным рассчитать изменение разброса ее значений во времени, а, следовательно, и коэффициент диффузии Арнольда.

Библиография

- [1] Штокман Х.-Ю., *Квантовый хаос: Введение*, М., Физматлит, 2004.
- [2] Casati G., Chirikov B.V., Izrailev F.M., and Ford J., *Stochastic behavior of a quantum pendulum under a periodic perturbation*, Lect. Notes Phys., **93** // Ed. by G. Casati, J. Ford — Berlin: Springer-Verlag, 1979, p. 334.
- [3] Chirikov B.V., Izrailev F.M., and Shepelyansky D.L., *Dynamical stochasticity in classical and quantum mechanics*, Sov. Sci. Rev., **2C**, 209 (1981).
- [4] Basko D.M., Skvortsov M.A. and Kravtsov V.E., *Dynamic Localization in Quantum Dots: Analytical Theory*, Phys. Rev. Lett., **90**, 096801 (2003).
- [5] Chirikov B.V., *A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems*, Phys. Rep., **52**, 263 (1979).
- [6] Berman V.Yu., Rubaev A.A., Zaslavsky G.M., *The problem of quantum chaos in a kicked harmonic oscillator*, Nonlinearity, **4**, 543-566 (1991).
- [7] Dana I., *Quantum suppression of diffusion on stochastic web*, Phys. Rev. Lett., **73**, 1609-1612 (1994).

- [8] Lima R., Shepelyansky D., *Fast delocalization in a model of kicked rotator*, Phys. Rev. Lett., **67**, 1377-1380 (1991).
- [9] Geisel T., Ketzmerick R., Petschel G., *Metamorphosis of a cantor spectrum due to classical chaos*, Phys. Rev. Lett., **67**, 3635-3638 (1991).
- [10] Demikhovskii V.Ya., Kamenev D.I. and Luna-Acosta G.A., *Quantum weak chaos in a degenerate system*, Phys. Rev. E, **59**, 294 (1999).
- [11] Demikhovskii V.Ya., Kamenev D.I., *Localization of quantum states at the cyclotron resonance*, Phys. Lett. A, **228**, 391 (1997).
- [12] Арнольд В.И., *О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы*, ДАН СССР, **156**, 9 (1964).
- [13] Gadiyak G.V., Izrailev F.M., Chirikov B.V., *Proc. 7th Int. conf. on nonlinear oscillations*, Berlin, **II-1**, 315 (1975).
- [14] Chirikov B.V., Ford J. and Vivaldi F., *Nonlinear Dynamics and the Beam-Beam Interaction* // Ed. by M. Month and J.C. Herrera, *A.I.P. Conf. Proc.*, **57**, 323 (1979).
- [15] Tennyson J.L., Lieberman M.A., Lichtenberg A.J., *A.I.P. Conf. Proc.*, **57**, 272 (1975).
- [16] Ferraz-Mello S., Sessin W., *Resonances in the Motion of Planets, Satellites and Asteroids*, Sao Paulo: Brazil, 1985.
- [17] Reichl L.E., *The Transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestation*, Springer-Verlag, New-York, 1992.

- [18] Binney J., Tremaine S., *Galactic Dynamics*. — Princeton: Princeton University Press, 1987.
- [19] *Nonlinear Dynamics Aspects of Particle Accelerators*, Lecture Notes in Physics. — Berlin: Springer-Verlag, 1986, vol. 247.
- [20] Milczewski J. von, Diercksen G.H.F., Uzer T., *Computation of the Arnol'd Web for the Hydrogen Atom in Crossed Electric and Magnetic Fields*, Phys. Rev. Lett., **76**, 2890 (1996).
- [21] Лихтенберг А., Либерман М., *Регулярная и стохастическая динамика*, М., Мир, 1984.
- [22] Leitner D.M., Wolynes P.G., *Quantization of the Stochastic Pump Model of Arnold Diffusion*, Phys. Rev. Lett., **79**, 55 (1997).
- [23] Шуряк Э.В., *Нелинейный резонанс в квантовых системах*, ЖЭТФ, **71**, 2039 (1976).
- [24] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Manifestation of Arnol'd Diffusion in Quantum Systems*, Phys. Rev. Lett., **88**, 154101 (2002); arXiv: [quant-ph/0109147](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0109147).
- [25] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion in a simple nonlinear system*, Phys. Rev. E, **66**, 036211 (2002); arXiv: [quant-ph/0205062](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0205062).
- [26] Демиховский В.Я., Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей в присутствии переменного электрического поля*, Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, **12 (5)**, 3 (2004).

- [27] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion in a rippled waveguide*, Phys. Lett. A, **352**, 491 (2006); arXiv: [quant-ph/0507254](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0507254).
- [28] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Nonlinear electron dynamics in a rippled channel with time-dependent electric field: Quantum Arnol'd diffusion*, (направлено в Physica E); arXiv: [cond-mat/0610390](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0610390).
- [29] Шандор А.С., Малышев А.И., *Распространение луча света в двумерном гофрированном волноводе*, Структура и свойства твердых тел, с. 75: Изд-во ННГУ, Н.Новгород, 2003.
- [30] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion*, Proc. of the Int. Conf. "Progress in Nonlinear Science", vol. II, p. 591, 2002.
- [31] Демиховский В.Я., Малышев А.И., *Диффузия Арнольда в классическом и квантовом пределах*, VI Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2001, стр. 23.
- [32] Demikhovskii V.Ya., Izrailev F.M. and Malyshev A.I., *Quantum Arnol'd diffusion*, Int. Conf. "Progress in Nonlinear Science": Abstracts, 2001, p. 128.
- [33] Малышев А.И., *Особенности диффузии Арнольда в квантовых системах*, VII Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2002, стр. 38.

- [34] Малышев А.И., *Диффузия Арнольда в простой динамической системе*, VIII Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2003, с. 83.
- [35] Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале с гофрированной границей*, IX Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2004, стр. 28.
- [36] Малышев А.И., *Квантовая диффузия Арнольда в канале переменной толщины*, X Нижегородская Сессия молодых ученых, тезисы докладов: Н.Новгород, 2005, стр. 31.
- [37] Wilkinson M. and Austin E.J., *Dynamics of a generic quantum system under a periodic perturbation*, Phys. Rev. A, **46**, 64, 1992.
- [38] DiCarlo L., Marcus C.M. and Harris Jr. J.S., *Photocurrent, Rectification, and Magnetic Field Symmetry of Induced Current through Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett., **91**, 246804 (2003).
- [39] Huibers A.G. et al., *Low-Temperature Saturation of the Dephasing Time and Effects of Microwave Radiation on Open Quantum Dots*, Phys. Rev. Lett., **83**, 5090 (1999).
- [40] Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А., *Слабый хаос и квазирегулярные структуры*, М., Наука, 1991.
- [41] Берман Г.П., Коловский А.Р., *Квантовый хаос при взаимодействии многоуровневых квантовых систем с полем когерентного излучения*, УФН, **162**, 95 (1992).

- [42] Вечеславов В.В., *Движение в окрестности сепаратрисы нелинейного резонанса при высокочастотных возмущениях*, ЖЭТФ, **109**, 2208 (1996).
- [43] Вечеславов В.В., *Формирование стохастического слоя нелинейного резонанса двухчастотным возмущением*, ИЯФ СО РАН: препринт 96-24, Новосибирск, 1996.
- [44] Заславский Г.М., *Стохастичность динамических систем*, М., Наука, 1984.
- [45] Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., *Специальные функции*, М., Наука, 1968.
- [46] Галицкий В.М., Карнаков Б.М., Коган В.И., *Задачи по квантовой механике*, М., Наука, 1981.
- [47] Демиховский В.Я., Потапенко С.Ю., Сатанин А.М., *Электронный спектр в системах с периодически модулированной поверхностью*, ФТП, **17**, 213 (1983).
- [48] Luna-Acosta G.A., Na K., Reichl L.E. and Krokhin A.A., *Band structure and quantum Poincare sections of a classically chaotic quantum rippled channel*, Phys. Rev. E, **53**, 3271 (1996).
- [49] Luna-Acosta G.A., Krokhin A.A., Rodriguez M.A., Hernandez-Tejeda P.H., *Classical chaos and ballistic transport in a mesoscopic channel*, Phys. Rev. B, **54**, 11410 (1996).
- [50] Luna-Acosta G.A., Mendez-Bermudez J.A., Izrailev F.M., *Periodic chaotic billiards: Quantum-classical correspondence in energy space*, Phys. Rev. E, **64**, 036206 (2001).

- [51] Izrailev F.M., Mendez-Bermudez J.A. and Luna-Acosta G.A., *Ballistic localization in quasi-one-dimensional waveguides with rough surfaces*, Phys. Rev. E, **68**, 066201 (2003).
- [52] Izrailev F.M., Makarov N.M. and Rendon M., *Rough surface scattering in many-mode conducting channels: gradient versus amplitude scattering*, Phys. Stat. Sol. (b), **242**, 1224 (2005).
- [53] Izrailev F.M., Makarov N.M. and Rendon M., *Gradient and amplitude scattering in surface-corrugated waveguides*, Phys. Rev. B, **72**, 041403 (2005).
- [54] Kouwenhoven L.P. *et al.*, *Transport through a finite one-dimensional crystal*, Phys. Rev. Lett., **65**, 361 (1990).
- [55] Lent C.S., Leng M., *Magnetic edge states in a corrugated quantum channel*, J. Appl. Phys., **70**, 3157 (1991).
- [56] Goldsmith P.F., *Quasioptical Systems: Gaussian Beam Quasioptical Propagation and Applications*, Wiley-IEEE Press, 1998.