

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

*На правах рукописи*

Петров Дмитрий Алексеевич

Немарковская теория релаксации спиновых моментов  
электронов, взаимодействующих со случайными полями  
в вакууме и конденсированных средах

01.04.03 – Радиофизика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Ефремов Г.Ф.

Нижний Новгород 2013

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>Глава I. Метод нелинейных стохастических уравнений для открытых квантовых систем</b> .....	27
§1.1 Введение.....	27
§1.2 Поведение квантовой системы при наличии нестационарного возмущения. Теория S-матрицы.....	28
§1.3 Линейные и нелинейные характеристики квантовых систем при динамических возмущениях.....	31
§1.4 Обобщенные восприимчивости и их свойства.....	35
§1.5 Вывод стохастических уравнений для открытых квантовых систем.....	38
1.5.1 Постановка задачи и основные приближения.....	38
1.5.2 Гауссовы операторы и их свойства.....	40
1.5.3 Вывод нелинейного стохастического уравнения в приближении гауссовой статистики переменных термостата.....	42
§1.6 Выводы.....	46
<b>Глава II. Динамика спинового момента электрона, взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума</b> ..	47
§2.1 Введение и постановка задачи.....	47
§2.2 Стохастическое уравнение для спинового момента электрона.....	50
§2.3 Динамическая восприимчивость спиновой подсистемы.....	58
2.3.1 Динамическая восприимчивость.....	58
2.3.2 Вычисление частотной зависимости коэффициентов радиационного трения.....	64
2.3.3 Анализ и обсуждение полученных результатов.....	67
§2.4 Уравнения релаксации спинового момента в марковском случае.....	72
§2.5 Эффект изменения частоты прецессии спинового момента.....	76
§2.6 Выводы.....	79
<b>Глава III. Динамика спинового момента электрона проводимости, взаимодействующего с полем фононов и его флуктуациями в немагнитных кристаллах</b> .....	81
§3.1 Введение и постановка задачи.....	81
§3.2 Стохастическое уравнение для спинового момента электрона проводимости.....	85
3.2.1 Стохастическое уравнение.....	85

3.2.2 Вычисление частотной зависимости коэффициентов фононного трения.....	91
3.2.3 Уравнения релаксации спинового момента в марковском случае.....	95
§3.3 Динамическая восприимчивость спиновой подсистемы .....	101
3.3.1 Динамическая восприимчивость .....	101
3.3.2 Анализ и обсуждение полученных результатов.....	106
§3.4 Эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости .....	118
§3.5 Выводы.....	120
<b>Заключение .....</b>	<b>123</b>
<b>Приложение. О движении электрона Дирака в постоянном магнитном поле ..</b>	<b>125</b>
§1. Введение и постановка задачи .....	125
§2. Уравнения движения для операторов координаты и скорости электрона Дирака в магнитном поле и их решение .....	129
§3. Исследование полученного решения .....	134
§4. Дисперсия приращения координаты электрона Дирака.....	138
§5. Выводы.....	141
<b>Список работ, опубликованных по теме диссертации.....</b>	<b>143</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>144</b>

## Введение

Как показывает история, фундаментальные открытия в науке на фоне колоссального объема полученных результатов немногочисленны, но, будучи установлены, они приводят к существенному развитию всего человеческого знания, ведут к созданию новых направлений в науке и технике. Одним из примеров такого переворота, давшего мощный импульс новым теоретическим и экспериментальным исследованиям, действие которого ощущается и в настоящее время, является открытие в 1921 году в опытах Штерна и Герлаха [1] эффекта пространственного квантования магнитного момента атомов, повлекшего за собой подтверждение гипотезы [2] о существовании у электронов внутренней степени свободы, получившей название спина (от англ. to spin – вертеться). Последующее за этим открытием изучение свойств и проявлений спиновой степени свободы в различных физических системах привело к обнаружению множества важных эффектов, созданию новых направлений в физике и технике, продемонстрировав тем самым огромное его значение.

Основы теоретического исследования спина электронов были сформулированы в работах В. Паули [3]-[4] и П. Дирака [5]-[6], предложивших математическое определение этой степени свободы. В дальнейшем усилия теоретиков в основном были сосредоточены на проблеме получения уравнений, описывающих поведение спиновых систем, и их решении для конкретных случаев. Для этого был создан ряд методов, как феноменологических, так и микроскопических, позволяющих исследовать широкий круг встречающихся проблем.

В настоящее время наблюдается повышенный интерес к изучению спиновой динамики в различных физических системах, что связано в первую очередь с развитием спиновой электроники (спинтроники) [7]-[19], являющейся новой ветвью твердотельной электроники, изучающей спин-зависимые оптические и транспортные явления с целью создания спин-электронных приборов и устройств для хранения и обработки информации. Данное направление получило интенсивное развитие в середине 1990 годов, причиной чему послужило изучение спиновых явлений в низкоразмерных структурах для проектирования принципиально новых модулей памяти и логических устройств [7]. Этому способствовало открытие эффекта оптической ориентации спинов [10, 20-21], впервые установленного в 1924 году [22] для атомных магнитных моментов, а позднее [23] для спинового момента электронов проводимости в полупроводниках. Все это привело к осознанию фундаментальной и практической значимости как теоретического, так и экспериментального изучения явлений генерации и детектирования спина, а также разработки для этого различных методов исследования [24]. В связи с этим актуальность изучения динамики различных спиновых систем диктуется с одной стороны,

необходимостью исследовать свойства и физические процессы, протекающие в этих системах [8, 15], а с другой определяется проблемами управления спиновыми состояниями электронов, дырок и других квазичастиц [14, 17], а также влиянием на них различных факторов, как внешних – электромагнитные поля, так и внутренних, среди которых особую роль играют шумы, определяющие нижние пределы величин сигналов, которые могут быть обработаны средствами электроники и, в частности, спинтроники (спиновые шумы [15, 25-37]).

Область спин-зависимых явлений по своей структуре многогранна и часто в фокусе ее исследований оказываются спиновые системы, имеющие различную физическую природу. Это говорит о том, что проявление особенностей спиновой степени свободы важно учитывать не только в физике конденсированного состояния, но и в других областях физики, например, в астрофизике [38]-[40] или при проектировании накопительных колец, где, как показано еще в работах [41]-[44], спиновые эффекты могут играть существенную роль. Широкий спектр проблем, возникающих в области спин-зависимых явлений, делает не только чрезвычайно актуальной и важной разработку и применение новых методов для изучения спиновой динамики и, в частности, спиновой релаксации в различных физических системах, но в то же время стимулирует изучение спин-зависимых явлений, привлекая внимание все большего числа исследователей [10, 14, 15, 17].

Теоретическое изучение свойств спиновых систем, а также создание приборов на спиновых эффектах делает необходимым исследование вопроса о влиянии внешних электромагнитных полей на спиновые системы с целью управления состояниями последних. Данная проблема имеет достаточно длинную историю, и ей посвящено очень большое число как теоретических, так и экспериментальных работ [45]-[60]. С теоретической точки зрения изучение данной проблемы предполагает вывод и решение уравнений, описывающих динамику спиновой системы, взаимодействующей с макроскопическим окружением, под действием внешних полей. Наличие макроскопического окружения приводит к случайному характеру взаимодействия, усложняющего поведение изучаемой системы. Кроме этого, в некоторых случаях при описании спиновой динамики оказывается недостаточным марковское приближение в исходных уравнениях и становится необходимым рассматривать эффекты, связанные с наличием памяти в системе [61]-[73]. Необходимость учета эффектов памяти была осознана достаточно давно, что послужило стимулом для создания соответствующего математического аппарата [74]-[76]. В настоящее время данная тематика привлекает большое внимание как теоретиков, так и экспериментаторов в различных областях физики и особенно в физике конденсированного состояния, что связано в первую очередь с проблемами воздействия коротковолновыми и мощными электромагнитными полями на вещество [77]-[80] и, в частности, с проблемами возбуждения лазерными импульсами электронов в полупроводниках

[81]-[82]. Таким образом, представляет большой интерес, а часто и необходимость, при описании процессов спиновой релаксации учесть стохастическую природу взаимодействия между спиновой системой, окружением и внешними полями, а также выйти за рамки марковского приближения.

Сложность указанной проблемы делает необходимым при ее исследовании использовать разнообразные физические модели, акцентирующие свое внимание на наиболее важных свойствах спиновых систем, разработка и изучение которых также является нетривиальной задачей, требующей для решения специфических методов и подходов. В частности, в спинтронике и ее приложениях большую роль играют системы, состоящие из спиновых моментов электронов, взаимодействующих с различными диссипативными окружениями, среди которых часто наиболее существенную роль играют электромагнитные поля (поле излучения) и поле фононов кристаллической решетки. Поэтому является актуальной разработка и исследование моделей, позволяющих описывать динамику этих систем с учетом указанных выше особенностей. Решению некоторых вопросов этой общей проблемы и посвящена диссертационная работа, **цель** которой заключается в построение двух дополняющих друг друга микроскопических моделей кинетики спинового момента электронов, взаимодействующих в одном случае с фотонным, а в другом с фононным диссипативным окружением, позволяющих единым образом описывать релаксационные и флуктуационные процессы в этих системах, а также учесть вклад эффекта памяти в их динамику.

Взаимодействие спиновых систем со сторонними полями приводит к возникновению неравновесных состояний, что в свою очередь вызывает стремление этих систем вернуться в состояние равновесия, т.е., другими словами, активизирует процессы релаксации. Теоретическое изучение данных процессов предполагает в первую очередь вычисление равновесных значений и времени релаксации, характеризующего скорость стремления рассматриваемой системы к состоянию равновесия. Данные параметры могут определяться различными факторами, например, видом взаимодействия, его силой, физической природой окружения и многими другими. Это говорит о том, что процессы релаксации в различных спиновых системах требуют также различных, сугубо специфических, методов исследования. Несмотря на это в области физики магнитной релаксации имеется ряд методов, которые на основе общих принципов позволяют исследовать процессы релаксации в разнообразных спиновых системах. К настоящему времени данным методам посвящено большое число монографий, обзорных и оригинальных статей, освещающих различные их аспекты. Поэтому в данном обзоре нет необходимости проводить всесторонний анализ этих методов, но является важным для рассматриваемых в диссертации вопросов с одной стороны, выделить в этих методах некоторые идеи и особенности, которые давали бы им общую характеристику и

устанавливали область их применения, а с другой, привести результаты приложения этих методов к задачам магнитной релаксации. Это необходимо для того чтобы показать некоторые характерные черты и возможности используемого в диссертации подхода, а также указать работы, в которых затрагивались вопросы, исследуемые в диссертации. Как известно, в основе любого метода находятся определенные принципы и приближения, ограничивающие его возможности. Поэтому в настоящем обзоре остановимся более подробно на характеристике искомых принципов и приближений, а также на результатах применения этих методов к процессам магнитной релаксации.

По-видимому, первым, кто теоретически рассмотрел процесс магнитной релаксации в твердых телах, был Феликс Блох, предложивший в работе [83] уравнения, описывающие данное явление в наиболее простом марковском случае. Теория, т.е. уравнения Блоха, изначально являлись феноменологическими, и призваны были теоретически обосновать имеющийся экспериментальный материал и, в частности, форму сигнала магнитных систем. Они описывали процесс релаксации в квазиравновесных магнитных (спиновых) системах, взаимодействующих со слабыми внешними магнитными полями. Данное приближение означает, что релаксация к состоянию равновесия выражается через экспоненциальную зависимость, и происходит с некоторой скоростью, которая в этой теории является параметром, и определяется из дополнительных соображений или из эксперимента. При этом сам процесс релаксации вызывается взаимодействием спиновой системы с окружением, например, кристаллической решеткой, находящейся в состоянии термодинамического равновесия. В рассматриваемой теории предполагается, что время корреляции флуктуаций окружения много меньше, чем время релаксации спиновой системы. Данное утверждение составляет содержание приближения бесконечно малого времени корреляции или марковского приближения. Кроме этого, принципиальное значение в теории Блоха имеет тот факт, что при действии на спиновую систему внешнего магнитного поля результирующий ее магнитный момент совершает по законам классической механики прецессию вокруг направления этого поля. Учет этих условий как раз и приводит к феноменологическим уравнениям Блоха, которые составили первый шаг в теоретическом изучении процессов магнитной релаксации. Впоследствии выводы, следующие из этих уравнений, получили экспериментальное подтверждение, что сделало необходимым на основе микроскопических теорий произвести их последовательный вывод.

Дальнейшее теоретическое исследование процессов магнитной релаксации развивалось в направлении обоснования и уточнения первоначальной феноменологической теории Блоха с привлечением для этого различных микроскопических подходов, таких, например, как метод Кубо и Томиты [45, 84-86], опирающийся на принципы и уравнения статистической физики и квантовой механики. Данный подход наиболее эффективен для исследования магнитных

систем, имеющих макроскопическое число степеней свободы, для которых практически невозможно решить систему уравнений Блоха ввиду чрезвычайной их многочисленности. Метод Кубо и Томиты справедлив для квазиравновесных макроскопических спиновых систем, на которые действуют слабые магнитные поля. Основная цель данного метода заключается в вычислении параметров системы, непосредственно определяемых в эксперименте, таких как линейный отклик системы, функция релаксации и др., на основе которых может быть определена, например, форма сигнала спиновой системы, непосредственно наблюдаемая в радиоспектроскопических экспериментах.

Метод Кубо и Томиты имеет ряд преимуществ по сравнению с феноменологическим подходом Блоха. В частности, он позволяет учесть некоторые свойства окружения спиновой системы, влияющие на форму сигнала и другие параметры. Благодаря этому удалось, например, описать эффект сужения формы линии поглощения в парамагнитных телах, связанный с колебаниями кристаллической решетки и некоторые другие эффекты [45]. Несмотря на эту особенность, в теоретическом плане метод Кубо и Томиты, как и метод Блоха, по сути являются разновидностями марковской теории возмущений для равновесных систем, неприменимой в некоторых случаях. Данные особенности, связанные с общими проблемами теории возмущений, вызвали определенные затруднения при исследовании многих физических систем, как в области магнитной релаксации, так и в других разделах физики. Поэтому дальнейшие усилия теоретиков были в основном сосредоточены в двух направлениях, а именно в направлении расширения и углубления возможностей теории возмущений, а также в направлении, заключающимся в попытке ее преодоления. Работы теоретиков второй группы не были бесплодными, что привело к созданию методов, имеющих в современной литературе название метода континуального интеграла Фейнмана [87]-[91] и метода производящего функционала [92]-[93].

Метод континуального интеграла бесспорно занимает особое место среди других методов теоретической физики не только потому, что он позволил дать более глубокое понимание соотношения между квантовой и классической механикой, но и потому, что в силу своей универсальности он охватывает очень большое число физических задач, и используется в различных областях теоретической физики [89, 91]. Данный метод удобно использовать как при исследовании многочастичных систем, так и систем с небольшим числом степеней свободы. Наиболее эффективное применение метод континуального интеграла нашел в теории поля и статистической физике [87, 90]. Благодаря ему были вскрыты глубокие математические взаимосвязи между квантовой теорией поля и статистической физикой фазовых переходов [89]. В настоящее время существует несколько формулировок этого подхода, предназначенных для изучения конкретных статистических систем. В своих основах метод континуального интеграла



опирается на принципы классической механики и статистической физики, и легко обобщается для простых систем на квантовый случай. Данный метод позволяет вычислять статистическую сумму, корреляционные функции различного порядка, а также оценить основное состояние системы и некоторые другие характеристики. На его основе удалось аналитически решить ряд задач статистической физики при любом значении константы взаимодействия [94]-[95]. Кроме этого, метод континуального интеграла применялся и при решении некоторых проблем в области магнитной релаксации [45, 89, 91] (применение метода производящего функционала к различным спиновым системам см. [93]). В частности, в приближении линейного отклика и независимости переменных окружения от действия спиновой системы он позволяет без обращения к методу возмущений вычислить форму сигнала макроскопической спиновой системы, взаимодействующей с кристаллической решеткой с учетом статистического характера окружения – колебаний этой решетки, а также дает возможность выйти за рамки бесконечно малого времени корреляций ее флуктуаций, и с более общих позиций проинтерпретировать результаты метода Кубо и Томиты [45]. Но, как и любой другой способ описания, метод континуального интеграла имеет ряд особенностей, ограничивающих его применение, среди которых стоит выделить проблему неоднозначности квантования физических систем, когда их гамильтониан состоит из сложных комбинаций обобщенных координат и импульсов [87], а также определенную сложность в учете влияния спиновой системы на ее окружение и, как следствие, проблематичность исследования в рамках этого метода немарковских эффектов (см. по этому поводу [96]). В то же время изучение эффектов памяти и окончательное преодоление приближения бесконечно малого времени корреляции оказалось возможным в рамках подхода теории возмущений, методом, получившим название метода матрицы плотности или статистического оператора [95, 97-98].

Метод матрицы плотности является самым распространенным и часто применяемым методом при исследовании кинетики различных квантовых и классических систем. Это видно хотя бы уже потому, что рассмотренные выше подходы, так или иначе, используют для своего обоснования формализм матрицы плотности. Данный метод дает возможность исследовать как равновесные, квазиравновесные, так и неравновесные статистические системы [99]. Кинетическое уравнение для матрицы плотности позволяет изучать общие свойства статистических систем, такие как необратимость, производство энтропии, релаксацию к состоянию равновесия. При этом данный метод особенно удобен при исследовании систем, испытывающих слабое внешнее воздействие, для которых справедлива теория возмущений. Его преимуществом является возможность выхода за рамки приближения коротких времен корреляции и изучение квантовой кинетики в наиболее общей форме с учетом эффектов памяти [100]-[101].

Метод статистического оператора для изучения спиновой релаксации был впервые использован в работах Блоха и Вангснесса [102], Блоха [103]-[104], Рэдфильда [105] и Хаббарда [106], в которых рассматривалась динамика спиновой системы, взаимодействующей с кристаллической решеткой, находящейся в состоянии равновесия. Основная цель этих работ заключалась в выводе и анализе кинетического уравнения для матрицы плотности спиновой системы. Это уравнение было получено в приближении коротких времен корреляции переменных кристаллической решетки, и содержало в себе информацию как о равновесном значении, так и о временах релаксации спиновой подсистемы. Указанная теория в современной литературе носит название теории Блоха-Рэдфильда [45]. В данной теории спин-решеточное взаимодействие рассматривалось как малое возмущение. Полученные в этих приближениях результаты относятся в основном к магниторазбавленным структурам [45], поскольку в противоположном случае интегрирование системы уравнений для наблюдаемых переменных является достаточно сложной задачей ввиду макроскопичности этой системы. Стоит отметить, что основанная на методе возмущений теория Блоха-Рэдфильда позволила из исходного кинетического уравнения получить вывод уравнений Блоха [45], тем самым было впервые произведено микроскопическое обоснование первоначального феноменологического подхода Ф. Блоха.

Дальнейшее теоретическое исследование процессов спиновой релаксации методом статистического оператора было сосредоточено в направлении преодоления основных приближений теории Блоха-Рэдфильда. Поэтому следующий шаг был сделан в сторону методов, описывающих различные неравновесные макроскопические системы. Обзор теорий неравновесных процессов дан в работах [107]-[109]. В частности, для исследования релаксации в магнитоконцентрированных нестационарных спиновых системах был использован метод неравновесного статистического оператора [108]-[109], широко применяющийся при изучении различных неравновесных систем и эквивалентный, как показано в работе [109], таким известным методам неравновесной статистической механики, как метод Мак-Леннана [110], Робертсона [111], а также Пелетминского-Яценко [112]. Данный метод основан на идее сокращенного описания состояний системы в процессе ее эволюции, а также на гипотезе о существовании иерархии временных масштабов системы, позволяющей выделить несколько стадий ее развития (например, для газов – это начальная, кинетическая и гидродинамическая стадии). При этом считается, что каждая последующая стадия эволюции системы отличается от предыдущей уменьшением числа параметров, описывающих ее состояние, а также сокращением количества исходных корреляций между этими параметрами и начальным микроскопическим состоянием системы, т.е. уменьшением числа функций распределения, описывающих систему. С учетом этого неравновесный статистический оператор определяется

как функционал, зависящий только от выбранного набора переменных (сокращенного набора). Тем самым автоматически строятся такие решения уравнения Лиувилля, которые зависят от времени лишь через средние значения принятого набора величин, описывающих неравновесное состояние системы [109].

Преимущество этого подхода заключается, в частности, в возможности последовательного построения и исследования обобщенного кинетического уравнения Лиувилля и начального условия для этого уравнения, что приближает по общности этот метод к подходу Гиббса. В практическом плане он делает возможным вычисление в общем виде линейного отклика неравновесной системы с учетом эффектов памяти. Данный метод применялся для исследования неравновесных процессов в кристаллической решетке [109], и, в частности, для изучения процессов спиновой релаксации с учетом действия окружения и переменного магнитного поля [113]-[118]. Он позволил получить немарковские обобщенные уравнения Лиувилля для спиновой намагниченности электронов проводимости, учитывающие эффекты временной и пространственной дисперсии тензоров диффузии и скоростей спиновой релаксации, а также частотную зависимость функции памяти системы, вычисление которой в общем случае является достаточно сложной задачей, что делает необходимым при ее решении использовать различные аппроксимации и модельные представления [109].

В то же время метод неравновесного статистического оператора имеет определенные ограничения, связанные с приближениями, лежащими в его основе. В частности, предполагается, что при больших временах происходит совпадение обобщенного статистического оператора и матрицы плотности, зависящей от сокращенного набора переменных. Также определенную сложность составляет выделение из общего числа переменных такого набора величин, который будет задавать сокращенное описание системы ввиду отсутствия строгих критериев этого отбора. Кроме этого, не всегда является удобным для определения нужного начального распределения, соответствующего выбранному сокращенному описанию, использовать термодинамические условия и, в частности, определять это распределение из условия максимума информационной энтропии системы, как это делается в этом подходе. Поэтому в ряде случаев удобнее пользоваться другими методами неравновесной статистической механики.

В современной физике при изучении динамики различных квантовых объектов получила широкое применение концепция открытых квантовых систем [119]-[124], позволяющая с единых позиций исследовать как марковские [121, 125], так и немарковские квантовые процессы [119, 126-136]. В общем случае открытую квантовую систему можно определить как систему, взаимодействующую с внешними полями и другой квантовой системой, носящей название окружения. Таким образом, она представляет подсистему общей системы, последняя

из которых считается замкнутой, подчиняющейся гамильтоновой динамике. Основная задача данного метода заключается в изучении динамики подсистемы с учетом различных моделей ее окружения, для решения которой были разработаны определенные методы. В теории открытых квантовых систем можно выделить два подхода, дополняющих друг друга и различающихся выбором переменных для описания квантовой динамики. Один из них основан на методе статистического оператора – приведенной матрицы плотности, удовлетворяющей управляющему уравнению (master equation), которое в марковском случае называется уравнением Линдблада [119, 137-138]. Вывод данного уравнения опирается, как и в методе неравновесного статистического оператора, на идеи сокращенного описания состояний рассматриваемой системы. Но в отличие от указанного подхода, в данном случае сокращенное описание достигается через введение понятий квантовой динамической полугруппы и ее генератора, который представляет собой супероператор, действующий на матрицу плотности подсистемы. При этом существует несколько способов получения управляющих уравнений для матрицы плотности, отличающихся выбором условий для динамической полугруппы и ее генератора, которые описывают различные микроскопические модели, такие, например, как модель слабого взаимодействия излучения с веществом [119, 125, 139-140], модель Кальдейры-Леггетта [119, 140-141] и др. Фактически, все эти модели опираются на приближение Борна-Маркова, означающего, что взаимодействие между подсистемой и окружением является слабым, а также, что характерное время изменения корреляций переменных окружения много меньше времени релаксации подсистемы. Особое значение в стандартных приложениях динамики открытых систем имеют два предельных случая. Это основное квантовое оптическое уравнение и основное квантовое уравнение броуновского движения [119], являющиеся модификациями уравнения Линдблада, посредством которых, в частности, исследуются процессы релаксации в спиновых системах, взаимодействующих с различными окружениями в марковском случае. Например, релаксация двухуровневой спиновой системы находящейся в контакте с квантованным полем излучения [119] или в сжатом вакуумном состоянии [119, 125].

Преодоление марковского приближения в теории открытых квантовых систем оказалось возможным с создания метода проекционных операторов (супероператоров) Цванцига [99]-[100] и Мори [101, 142]. Основная идея, лежащая в основе этого метода, заключается в принятии условия, что взятие следа по окружению от матрицы плотности всей системы есть операция проецирования в пространстве состояний полной системы [119]. При этом выделяют два вида проекционных операторов, которые превращают матрицу плотности полной системы соответственно в релевантную, т.е. относящуюся к изучаемой подсистеме, и нерелевантную части статистического оператора, причем действие суммы этих проекционных операторов дает тождественное отображение. Целью такого разделения является вывод замкнутого уравнения

для релевантной части матрицы плотности. Следует отметить, что в общем случае это уравнение обычно так же сложно для решения, как уравнение Лиувилля, описывающее динамику всей системы. Это означает, что в данном подходе приходится использовать различные приближения и аппроксимации, например, разложение по степеням константы взаимодействия или по степеням времени памяти [119]. Несмотря на это, метод проекционных операторов позволил выйти за рамки приближения коротких времен корреляции и, как следствие, дал возможность, используя формализм приведенной (редуцированной) матрицы плотности, исследовать немарковскую динамику различных квантовых систем [143]-[147] и, в частности, немарковские процессы спиновой релаксации [148]-[159]. Среди многочисленных работ, посвященных этому вопросу, большой интерес представляет исследование динамики спин-бозонной системы [160]-[174], т.е. двухуровневой спиновой системы, взаимодействующей с термостатом гармонических осцилляторов. Актуальность этой задачи определяется с одной стороны, тем фактом, что многие физически интересные системы могут быть аппроксимированы двухуровневой системой, а с другой, потому что она представляет собой удобную модель для демонстрации определенных методов и приближений. Исследование немарковской динамики спин-бозонной системы на основе метода проекционных операторов позволило установить новые свойства и процессы, возникающие в этой системе, связанные с эффектом памяти [175]-[183].

Другой подход основан на выводе и исследовании уравнений для наблюдаемых переменных открытой системы, и носит название метода стохастических уравнений или уравнений Ланжевена [184]-[185], в котором действие окружения, а также внешних случайных полей, описывается дополнительным слагаемым, называемым флуктуационным источником, получение которого является отдельной задачей этого подхода. Метод стохастических уравнений описывает броуновское движение открытых классических и квантовых систем, и применяется в различных разделах как современной физики, например, в акустике, гидродинамике, радиофизике [186], в различных стохастических моделях климата и геофизических системах [143], так и в других областях науки, например, в биологии [187] и химии [188]. Основная задача этого метода заключается в определении статистических характеристик изучаемых систем, таких как среднее значение, дисперсия, функции корреляции разного порядка и многих других, которая в общем случае решается через вычисление функции распределения изучаемой подсистемы на основе уравнения Лиувилля-фон Неймана или в частном случае уравнения Фоккера-Планка [189]-[190]. В методе стохастических уравнений можно выделить условно два дополняющих друг друга направления, отличающихся расстановкой акцентов в вопросах стохастической динамики открытых систем. В работах одного из направлений основное внимание сосредоточено на исследовании и решении

уравнений для функции распределения подсистемы. В то же время для многих открытых систем получение исходного стохастического уравнения и флуктуационных источников составляет особую и часто нетривиальную задачу, решение которой даже для средних значений наблюдаемых переменных представляет большой интерес. В этом заключается содержание второго направления в методе стохастических уравнений, используемого в настоящей диссертации. Данный метод имеет некоторые преимущества, среди которых особо стоит выделить его относительную математическую простоту, возможность с единых позиций изучать флуктуационные и диссипационные процессы в неравновесных системах, а также исследовать немарковскую динамику открытых классических и квантовых систем.

Начало метода стохастических уравнений было положено в классических работах Ланжевена, Эйнштейна и Смолуховского [191]-[192] по теории броуновского движения взвешенных в жидкости или газе частиц. В дальнейшем в виду аналогии между динамикой броуновских частиц и некоторых физических систем, на которые действуют случайные поля, второе направление в методе уравнений Ланжевена получило развитие и обобщение в работах Ю. Швингера [193]-[194] и Р. Сеницкого [195]-[197] на линейные системы, и впоследствии использовалось при исследовании стохастической динамики различных квантовых систем [198]-[203]. Принципиальная особенность этих работ заключалась в учете в стохастических уравнениях соотношений, связывающих между собой флуктуационные и диссипационные свойства рассматриваемых систем, позволяющих из знания статистических свойств флуктуаций окружения определять их диссипативные характеристики. Эти соотношения установлены в так называемых флуктуационно-диссипационных теоремах [204]-[208], позволяющих наиболее общим способом учесть вклад флуктуационной составляющей внешнего макроскопического окружения в динамику открытой системы, и в то же время дать последовательное определение флуктуационных источников в уравнении Ланжевена. Таким образом, получение флуктуационных источников, а с ними и микроскопических стохастических уравнений, тесно связано с флуктуационно-диссипационными теоремами, играющими существенную роль в данном подходе. Дальнейшее развитие это направления получило в работах [209]-[213], в которых были доказаны нелинейные флуктуационно-диссипационные теоремы, а также предложен способ выделения на основе флуктуационно-диссипационных соотношений флуктуационных источников в случае часто встречающегося гауссового мультипликативного шума [214]-[217].

Следует отметить, что метод стохастических уравнений Ланжевена имеет свои особенности, среди которых стоит выделить нетривиальную проблему исследования взаимодействия двух неравновесных макроскопических систем, одна из которых является открытой системой, а другая ее окружением. В данном случае можно также использовать метод

стохастических уравнений, но не для наблюдаемых переменных подсистемы, поскольку неизвестна ее функция распределения, необходимая для вычисления ее статистических характеристик, а для матрицы плотности. Другая особенность этого метода связана с тем, что не всегда возможно строгое определение статистических характеристик окружения подсистемы, а в некоторых случаях такое определение было бы излишним, и слишком усложняло изучаемую систему. Поэтому часто для их определения приходится пользоваться различными приближениями. Во многих случаях, как, например, в области теплового электромагнитного излучения или в физике конденсированного состояния (поле фононов), с большой точностью можно считать, что окружение находится в равновесии, и обладает гауссовой статистикой, т.е. все его статистические свойства определяются первыми двумя моментными функциями. В случае неравновесного окружения его функция распределения должна быть задана либо из дополнительных соображений, либо определена из стохастического кинетического уравнения для матрицы плотности [119]. Таким образом, метод стохастических уравнений является продуктивным микроскопическим методом исследования классических и квантовых открытых систем, и в ряде случаев оказывается более удобным и простым способом их описания, чем математически более сложный метод приведенной матрицы плотности.

Применение нового подхода в теории квантовых стохастических уравнений, развитого в [214]-[217], при исследовании процессов спиновой релаксации было впервые осуществлено в работах [218]-[223], в которых получены и исследованы немарковские стохастические уравнения, описывающие спиновую релаксацию электронов, взаимодействующих с электромагнитными и фононными полями, с учетом их флуктуаций. В работах [218]-[221] исследовался процесс немарковской релаксации спинового момента электронов, взаимодействующих с равновесным тепловым электромагнитным полем в вакууме. Определены выражения для спектральной мощности поглощения спиновой системы, а также ее времена релаксации и равновесные значения. В работах [222]-[224] рассматривалась немарковская динамика спинового момента электронов в низкоразмерных полупроводниковых структурах (квантовых ямах) со спин-орбитальным взаимодействием. Предпринята попытка учесть влияние конфигурационных степеней свободы электрона и их флуктуаций на процесс релаксации спинового момента в одночастичном приближении. Произведен вывод марковских уравнений Блоха для проекций спинового момента, вычислены продольное и поперечное времена релаксации, равновесные значения, а также установлены некоторые особенности спиновой динамики, связанные с немарковским характером взаимодействия.

Рассмотренные в этом кратком обзоре основные методы и подходы к задачам спиновой релаксации в первую очередь показывают тенденцию к детализации и углублению способов

описания различных механизмов и процессов в спиновых системах, к учету дополнительных особенностей, что выражается в переходе от феноменологических методов к микроскопическим, а также в усовершенствовании последних. С одной стороны это связано с внутренней логикой развития теории, с переходом от менее общих принципов к принципам все более общего характера, с преодолением приближений, лежащих в первоначальных теориях, с получением строгих и точных соотношений. С другой стороны это связано с возможностями и достижениями экспериментальной техники, позволяющей устанавливать и открывать новые явления и закономерности, требующие теоретического объяснения. В области спин-зависимых явлений таким стимулирующим фактором сначала была загадка магнетизма и его проявлений [55], а в последнее время – проблема генерации и детектирования спина, а также проблема управления спиновыми состояниями электронов, дырок и других квазичастиц, являющаяся одной из центральных и наиболее важных задач спиновой электроники [7]. Поэтому вычисление основных параметров спиновых систем, таких как времена релаксации, резонансные частоты, равновесные значения, отклик спиновой системы и многих других, а также определение возможного изменения этих параметров при вариациях внешнего воздействия является одной из самых актуальных теоретических задач в этой области, требующей совместного учета различных факторов и особенностей. Как показывает приведенный обзор, наиболее существенную роль в данном случае играют такие характеристики открытых спиновых систем, как их неравновесность, эффекты памяти, стохастичность внешних полей и окружения. Поэтому в свете основных проблем спинтроники и спиновой физики вообще представляет большой теоретический интерес определение свойств спиновых систем и вычисления их основных параметров в случае, когда задействованы многие из указанных выше особенностей. Решению некоторых вопросов этой большой проблемы и посвящена настоящая диссертация, основные цели которой заключаются в следующем.

**Основные цели** диссертационной работы:

1. Построение двух дополняющих друг друга микроскопических моделей кинетики спинового момента электронов, взаимодействующих в одном случае с фотонным, а в другом с фононным диссипативным окружением, позволяющих единым образом описывать релаксационные и флуктуационные процессы в этих системах, а также учесть вклад эффекта памяти в их динамику;
2. Теоретическое определение и исследование основных характеристик этих систем, таких как времена релаксации, равновесные значения, отклик на действие переменного магнитного поля, т.е. их спиновую восприимчивость, а также зависимость этих характеристик от параметров систем, например, частоты и напряженности магнитного поля, температуры кристалла и некоторых других;



3. Исследование влияния эффекта памяти и флуктуаций переменных окружения на искомые характеристики рассматриваемых систем.

**Научная новизна** работы определяется как методом, использованным при исследовании процессов релаксации в рассматриваемых спиновых системах, так и результатами, полученными при решении поставленных задач. В частности, в диссертации:

1. Разработаны две микроскопические модели кинетики спинового момента электронов в фотонном и фононном окружениях, позволяющие учитывать эффекты памяти, а также единым образом описывать флуктуационные и диссипационные процессы в изучаемых системах;
2. Получены немарковские стохастические уравнения для спинового момента электронов со строго определенными флуктуационными источниками и силой трения, учитывающей принцип причинности, а также реакцию переменных окружения и их статистические свойства;
3. Впервые в задаче о радиационном трении спинового момента электрона рассмотрен вклад эффекта осцилляций Шредингера и корреляции электронных плотностей, последовательное вычисление которой позволило в данной задаче обойти процедуру перенормировки;
4. Получены аналитические выражения для спиновой восприимчивости и времени релаксации в наиболее общем немарковском случае, а также выявлены частотные и температурные особенности этих характеристик, связанные с эффектом памяти;
5. Проанализировано влияние флуктуаций переменных окружения на частоту прецессии спинового момента электрона.

**Теоретическая и практическая значимость** диссертации заключается в следующем. В первую очередь ее результаты могут быть использованы при исследовании свойств и параметров неравновесных спиновых систем, обладающих эффектом памяти, а также для вычисления и изучения их статистических характеристик, таких как функции корреляции различного порядка, спектр флуктуаций и др. Во-вторых, произведенный в диссертации анализ некоторых аспектов стохастической динамики спинового момента электронов может оказаться полезным при определении влияния немарковских эффектов и флуктуаций переменных диссипативного окружения на состояния спиновых систем, а также при прогнозировании возможного изменения этих состояний. Кроме этого, полученные аналитические выражения, учитывающие эффекты памяти, и характеризующие процесс релаксации спинового момента электронов, важны при исследовании спин-электронного транспорта в полупроводниковых структурах, и могут быть использованы при создании приборов на спиновых эффектах. Этим, в

частности, определяется прикладное значение диссертации для современной радиофизики и спиновой электроники.

**Положения, выносимые на защиту:**

1. Построенные микроскопические модели кинетики спинового момента электронов в фотонном и фононном окружениях позволяют:
  - a) получить стохастическое уравнение, а также выражения для флуктуационных источников, силы радиационного и фононного трения, описывающие броуновское движение и процесс релаксации спинового момента в наиболее общем немарковском случае;
  - b) определить времена релаксации и спиновую восприимчивость с учетом эффекта памяти;
  - c) из интегро-дифференциальных стохастических уравнений получить уравнения Блоха с микроскопически определенными временами релаксации, равновесными значениями и немарковскими поправками.
2. В рамках данных моделей показано, что рассматриваемые системы обладают оптической активностью, проявляющейся в зависимости поперечного времени релаксации спинового момента от частоты внешнего магнитного поля, и связанной с наличием обратных связей в этих системах.
3. Частотная зависимость поперечного времени релаксации имеет разные свойства для правой и левой круговых поляризации магнитного поля. В случае правой круговой поляризации с увеличением частоты время релаксации сначала возрастает, достигая при определенных частотах максимального значения, а потом убывает, асимптотически стремясь к нулю обратно кубу частоты при взаимодействии электрона с фотонами, а также обратно пятой и четвертой степени частоты при низких и высоких температурах кристалла в случае электрон-фононного взаимодействия. Для левой круговой поляризации время релаксации при увеличении частоты уменьшается, стремясь к нулю так же, как в случае правой круговой поляризации.
4. Спиновая восприимчивость рассматриваемых систем при частотах порядка частоты спиновой прецессии практически совпадает с марковским вариантом, следующим из решения уравнений Блоха. В случае, когда частота магнитного поля много больше частоты прецессии, существенную роль начинает играть эффект памяти, вызывающий искажения и деформацию формы спиновой восприимчивости, и приводящий к возникновению новых ее свойств. В частности, в линии поглощения

системы появляются два дополнительных резонанса, а также частоты, при которых системы становятся квазипрозрачными, имеющими минимум поглощения.

5. Влияние флуктуаций переменных фотонного и фононного окружений приводит к увеличению частоты прецессии спинового момента электрона на небольшую аддитивную поправку, величина которой зависит от параметров системы. В случае радиационного трения сдвиг частоты пропорционален постоянной тонкой структуры, тогда как для фононного трения этот эффект определяется константой электрон-фононного взаимодействия и температурой кристалла. Причем с ростом температуры частота прецессии увеличивается, и асимптотически растет пропорционально первой степени температуры.

### **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, приложения, списка работ, опубликованных по теме диссертации и списка цитированной литературы. Объем работы составляет 167 страниц печатного текста, включая 11 рисунков, библиографию из 394 наименований и списка работ автора из 9 наименований.

### **Краткое содержание работы**

Во **Введении** рассматривается актуальность темы, кратко излагается содержание работы, формулируются ее цели и основные результаты. Обсуждаются методы решения поставленных задач, описывается новизна и практическая значимость полученных результатов.

**Глава 1** имеет методический характер, и посвящена краткому изложению исходных положений концепции открытых систем и метода нелинейных квантовых стохастических уравнений, с помощью которых описываются флуктуационно-диссипационные процессы в рассматриваемых спиновых системах. Введены основные понятия и определения метода, такие как S-матрица, линейные и нелинейные функции реакции и обобщенные восприимчивости. В представлении Гейзенберга произведен вывод нелинейного стохастического уравнения и флукуационных источников для операторов физических величин открытой квантовой системы, взаимодействующей с внешними переменными полями и гауссовым окружением, находящимся в состоянии термодинамического равновесия. Получено выражение для нелинейной силы трения, действующей со стороны окружения и его флуктуаций на систему. В заключении формулируются основные результаты этой главы.

В **Главе 2** рассматривается задача о динамике спинового момента электрона, взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума в наиболее общем немарковском случае.

В **параграфе 2.1** определяются цели исследования, приводится краткий обзор основных работ по изучаемой проблеме. Дается постановка задачи. Производится разделение исходной

системы на открытую подсистему и диссипативное окружение. Формулируются основные приближения как относительно силы взаимодействия между подсистемами, так и физических свойств окружения. Записывается полный гамильтониан исходной системы.

**Параграф 2.2** посвящен выводу немарковских стохастических уравнений, описывающих динамику проекций оператора спинового момента нерелятивистского электрона, находящегося во внешнем магнитном поле, и взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума. Определены компоненты силы радиационного трения и флуктуационные источники. Установлено, что в общем случае сила трения состоит из двух аддитивных частей, одна из которых обусловлена конфигурационным движением электрона, а вторая, наличием у него спинового момента. Показано, что в каждой из них присутствуют два механизма трения, связанные между собой флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена-Вельтона, и определяющиеся функцией Грина фотонов и корреляцией переменных поля электромагнитного вакуума.

Большое внимание уделено вопросу нелинейной зависимости силы трения от переменных электрона и, в частности, проблеме «распутывания» произведения операторов электронных плотностей. Данная задача решена в наиболее общем релятивистском случае, учитывающим внутреннюю структуру электрона и ее особенности, связанные со спиновым моментом, матрицами Дирака и эффектом осцилляций Шредингера. Ее результаты используются в этой главе в нерелятивистском пределе. Показано, что в приближениях изотропного пространства и свободной прецессии сила радиационного трения существенно упрощается, и становится линейной по спиновым переменным.

Из полученных стохастических уравнений следует, что динамика спинового момента определяется коэффициентами радиационного трения  $\gamma_{ij}(\tau)$ , учитывающими принцип причинности, и содержащими в данной модели наиболее полную информацию о действии поля излучения и электромагнитного вакуума. В заключение этого параграфа обсуждается вопрос об условиях, при которых в рамках сделанных приближений полученные уравнения применимы для описания рассматриваемой системы.

**Параграф 2.3** посвящен решению стохастических уравнений, в частности, определению и исследованию спиновой восприимчивости системы с учетом эффекта памяти. В **разделе 2.3.1** рассматривается динамика спинового момента при действии на электрон внешнего переменного магнитного поля  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp(t) + \mathbf{z}_0 B_0$ , поперечная составляющая  $\mathbf{B}_\perp(t)$  которого имеет круговую поляризацию.

Из решения системы стохастических уравнений определен линейный отклик спинового момента  $\mathbf{s}_\perp(t) = \hat{\chi}(\omega)\mathbf{B}_\perp(t)$  на действие переменного магнитного поля  $\mathbf{B}_\perp(t)$ , где  $\hat{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$  есть искомая спиновая восприимчивость.

Из произведенных вычислений следует, что времена релаксации и  $\hat{\chi}(\omega)$  определяются коэффициентами радиационного трения  $\gamma_{ij}$ . В разделе 2.3.2 вычисляется частотная зависимость  $\gamma_{ij}$ . Показано, что они имеют действительную и мнимую составляющие, нелинейным образом зависящие от частоты.

В разделе 2.3.3 производится анализ и обсуждение полученных результатов. В первую очередь определены выражения для поперечного  $T_\perp$  и продольного  $T_\parallel$  времени релаксации. Согласно полученным формулам, учет эффекта памяти приводит, во-первых, к зависимости поперечного времени релаксации от частоты магнитного поля, имеющей ряд особенностей. В частности  $T_\perp(\omega)$  обладает разными свойствами для правой ( $\omega < 0$ ) и левой ( $\omega > 0$ ) круговых поляризаций  $\mathbf{B}_\perp(t)$ , что свидетельствует о своего рода оптической активности рассматриваемой системы. В частности, для правой поляризации при определенной частоте время релаксации имеет максимальное значение. В асимптотике при больших частотах, когда  $\omega \gg \omega_0$ ,  $T_\perp(\omega)$  стремится к нулю пропорционально  $|\omega|^{-3}$ . При этом в противоположном случае, когда  $\omega \ll \omega_0$ , поперечное время релаксации не зависит от частоты и пропорционально  $B_0^{-3}$ , что совпадает с временем релаксации двухуровневой спиновой системы, взаимодействующей с тепловым электромагнитным излучением (излучением черного тела) в марковском случае.

Проведено исследование частотной зависимости спиновой восприимчивости. Показано, что при переходе к переменной  $y = \omega / \omega_0$ ,  $\hat{\chi}(\omega)$  является функцией двух безразмерных параметров:  $d = B_1 / B_0 \sqrt{2}$  и  $\varepsilon = \alpha \omega_0^2 / 3\Omega^2 \ll 1$ , где  $\Omega = mc^2 / \hbar$ ,  $\omega_0 = eB_0 / mc$  – частота спиновой прецессии,  $B_1$  – амплитуда поперечной составляющей магнитного поля. При  $d \ll 1$  на частотах  $y \sim 1$  форма  $\hat{\chi}(\omega)$  практически совпадает с марковским вариантом, следующими из решения уравнений Блоха. В области  $y \gg 1$  проявляются немарковские эффекты, приводящие к возникновению новых свойств  $\hat{\chi}(\omega)$ . При увеличении параметра  $d$ , когда  $d \sim 1$  или  $d > 1$ , в  $\hat{\chi}(\omega)$  возникают заметные искажения и деформации, связанные с проявлением эффекта памяти и зависимостью поперечного времени релаксации от частоты.

Определена асимптотика действительной и мнимой частей восприимчивости при больших частотах, когда  $|y| \gg 1$ . В этом случае  $\chi' \sim \omega^{-5}$  и  $\chi'' \sim |\omega|^{-3}$ , что является одним из

проявлений немарковского характера взаимодействия между спиновым моментом и полем излучения, поскольку в марковском случае  $\chi' \sim \omega^{-1}$  и  $\chi'' \sim \omega^{-2}$ .

В **параграфе 2.4** решается задача о переходе от интегро-дифференциальных стохастических уравнений к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е., другими словами, рассматривается вопрос о марковском предельном случае в данной модели. Установлено, что в математическом плане он соответствует пренебрежению частотной зависимостью коэффициентов радиационного трения, когда  $\gamma_{ij}(\omega) \approx \gamma_{ij}(0)$ . При этом немарковские поправки определяются как коэффициенты разложения  $\gamma_{ij}(\omega)$  в ряд по малому параметру, роль которого в данной модели играют отношения  $\omega/\Omega$  и  $\omega_0/\Omega$ . С учетом этого показано, что стохастические уравнения переходят в уравнения Блоха с микроскопически определенными немарковскими поправками, временами релаксации и равновесными значениями.

В **параграфе 2.5** изучается эффект изменения частоты прецессии спинового момента, обусловленный флуктуациями электромагнитного вакуума. Показано, что в результате радиационного трения происходит увеличение частоты прецессии на небольшую аддитивную поправку, пропорциональную постоянной тонкой структуры  $\alpha = e/\hbar c$ . Как показали вычисления, учет внутренней структуры электрона приводит к тому, что данный радиационный эффект не содержит традиционной в таких случаях логарифмической бесконечности.

Основные результаты второй главы сформулированы в **параграфе 2.6**.

Вопросы, рассматриваемые в **Главе 3**, связаны с проблемой релаксации спиновых систем, находящихся в контакте с диссипативным окружением в конденсированных средах. В настоящей главе методом квантовых нелинейных стохастических уравнений исследуется задача о динамике спинового момента электрона проводимости, взаимодействующего с полем фононов и его флуктуациями в ковалентных немагнитных кристаллах с центром симметрии, находящихся во внешнем магнитном поле с учетом спин-орбитальной связи.

В **параграфе 3.1** дается введение и постановка задачи. Формулируется актуальность проблемы, приводится краткий обзор работ по данной теме. Согласно принципам концепции открытых систем, производится разделение изучаемой системы на динамическую подсистему – спиновый момент электрона и на оставшуюся макроскопическую часть – термостат, представляющий собой поле фононов, находящееся в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ . Рассматриваются механизмы релаксации спинового момента в конденсированных немагнитных средах. Формулируются основные приближения изучаемой модели. Определяются статистические свойства термостата, а также записывается полный гамильтониан изучаемой системы.

**Параграф 3.2** посвящен выводу стохастического уравнения для спинового момента электрона проводимости и его исследованию в некоторых частных случаях. В рассматриваемой системе считается, что электрон проводимости взаимодействует с акустическими фононами, описываемыми в ковалентных кристаллах моделью деформационного потенциала. При этом действие фононов на спин электрона осуществляется через энергию спин-орбитальной связи.

В разделе 3.2.1 на основе приближения замороженного конфигурационного движения электрона из гамильтониана системы получены стохастические уравнения для проекций оператора спинового момента. Определены компоненты силы фононного трения и флуктуационные источники. Установлено, что сила трения аддитивно включает в себя два механизма релаксации спинового момента, связанные между собой флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена-Вельтона, и определяющиеся с одной стороны, откликом фононной системы на действие электрона, а с другой, функцией корреляции переменных окружения. Используя приближение свободной прецессии из силы трения выделены коэффициенты фононного трения  $\gamma_{ij}(\tau)$ , учитывающие принцип причинности и эффект памяти в системе. В конце этого раздела обсуждается вопрос об условиях, при которых в рамках используемых приближений полученные стохастические уравнения позволяют описывать изучаемую систему.

В разделе 3.2.2 производится вычисление и анализ частотной зависимости  $\gamma_{ij}(\omega)$ . Показано, что они имеют действительную и мнимую составляющие, нелинейным образом зависящие как от частоты магнитного поля, так и температуры кристалла.

В разделе 3.2.3 рассматривается вопрос о переходе в данной модели к марковскому случаю, который оказывается возможен, когда безразмерный параметр  $p = \omega / \Omega \ll 1$ , где  $\omega$  – частота магнитного поля,  $\Omega = c_a q_d$  – характерная частота фононного окружения,  $c_a$  – скорость акустических фононов,  $q_d$  – период обратной решетки кристалла. С учетом этого условия, используя разложение коэффициентов  $\gamma_{ij}(\omega)$  в ряд по параметру  $p$ , определены немарковские поправки в стохастических уравнениях в случае низких и высоких температур кристалла. Показано, что стохастические уравнения переходят в систему обыкновенных дифференциальных уравнений, т.е. в уравнения Блоха, с микроскопически определенными немарковскими поправками, временами релаксации и равновесными значениями. Установлено, что времена релаксации имеют разную форму и значение в зависимости от величины температуры кристалла. Так, в случае низких температур, когда  $k_B T / \hbar \Omega \ll 1$ , скорость релаксации – обратная величина времени релаксации пропорциональна  $\alpha' B_0^5$  и не зависит от температуры, в противоположном случае, когда  $k_B T / \hbar \Omega \gg 1$ , скорость релаксации

пропорциональна  $\alpha''TB_0^4$ , где  $\alpha'$  и  $\alpha''$  – размерные константы,  $B_0$  – модуль продольной составляющей магнитного поля, а  $T$  – температура кристалла. Полученные зависимости совпадают с выражением для времени релаксации спинового момента, обусловленного модуляцией кристаллического поля, вызванного решеточными колебаниями (прямой процесс).

В параграфе 3.3 изучаются свойства системы с учетом эффекта памяти. В наиболее общем немарковском случае решается задача о динамике спинового момента электрона проводимости, на который действует внешнее периодическое во времени магнитное поле  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_\perp(t) + \mathbf{z}_0 B_0$ , где  $\mathbf{B}_\perp(t)$  имеет круговую поляризацию. В разделе 3.3.1 получена система интегро-дифференциальных уравнений для проекций спинового момента с учетом переменного магнитного поля. Вычислены линейный отклик и спиновая восприимчивость  $\hat{\chi}(\omega)$ , а также продольное и поперечное времена релаксации. Показано, что они выражаются через коэффициенты фононного трения.

В разделе 3.3.2 проводится анализ и обсуждение полученных результатов. Определены частотная и температурная зависимости поперечного  $T_\perp$  и продольного  $T_\parallel$  времени релаксации. Из полученных формул следует, что поперечное время релаксации в отличие от  $T_\parallel$  является функцией частоты магнитного поля, что, как и в случае радиационного трения, демонстрирует проявление немарковских эффектов.

Согласно проведенному анализу, частотная зависимость  $T_\perp$  имеет различные свойства для правой и левой круговых поляризаций магнитного поля, т.е. асимметрию между правым и левым. Это можно рассматривать как своего рода оптическую активность системы, которая в данной модели связана с эффектом памяти. Кроме этого, при уменьшении параметра  $\delta = \hbar\omega_0 / 2k_B T$ , где  $\omega_0$  – частота спиновой прецессии,  $T$  – температура кристалла,  $T_\perp$  стремится к нулю, что связано с возрастанием фононного трения, т.е. числа фононов, с которыми взаимодействует электрон при увеличении температуры.

Установлено, что асимптотическое поведение поперечного времени релаксации зависит от величины  $\delta$ . В случае, когда  $\delta \ll 1$ ,  $T_\perp$  при больших частотах ( $\omega \gg \omega_0$ ) пропорционально  $\omega^{-4}$ . При  $\delta \gg 1$  поперечное время релаксации  $T_\perp \sim |\omega|^{-5}$ .

Далее проанализированы частотные и температурные зависимости действительной  $\chi'(\omega)$  и мнимой  $\chi''(\omega)$  частей спиновой восприимчивости. При переходе к переменной  $y = \omega / \omega_0$  показано, что  $\hat{\chi}(\omega)$  зависит от параметров:  $d = \tanh^{1/2}(1/\delta) \cdot B_1 / B_0$  и  $\varepsilon = 1/T_0\omega_0 \ll 1$ , где  $T_0 = \beta|\omega_0 / \Omega|^5$  – продольное время релаксации при нулевой температуре,  $\beta$  – размерная константа. Величина этих параметров влияет на вид формы линии поглощения.



Определена асимптотическая зависимость действительной и мнимой частей динамической восприимчивости при больших частотах ( $\omega \gg \omega_0$ ) в случае низких и высоких температур кристалла. Показано, что при низких  $T$ , когда  $\delta \gg 1$ ,  $\chi' \sim \omega^{-9}$  и  $\chi'' \sim |\omega|^{-5}$ . В противоположном случае, когда  $\delta \ll 1$ , имеем  $\chi' \sim \omega^{-7}$  и  $\chi'' \sim \omega^{-4}$ .

Еще одна особенность формы линии поглощения  $\chi''(\omega)$  связана с ее температурной зависимостью. Оказывается при фиксированных частотах и некоторых значениях температуры кристалла  $\chi''(\omega)$  имеет максимальное значение. Это свойство можно рассматривать как эффект температурного резонанса, существующего, как показывают вычисления, не при всех значениях частот. Проанализирована зависимость  $\delta_R$  от параметров системы и частоты магнитного поля. Подобными свойствами обладает также и  $\chi'(\omega)$ .

В **параграфе 3.4** рассматривается эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости, обусловленный флуктуациями фононного поля, и заключающийся в увеличении частоты прецессии на небольшую аддитивную поправку  $\Delta$ , учитывающую вклад вакуумных и температурных флуктуаций фононного термостата. Определена зависимость сдвига частоты от параметров системы и температуры кристалла. Показано, что в асимптотике при высоких температурах  $\Delta$  увеличивается пропорционально температуре кристалла.

В заключение этого параграфа обсуждается аналогия между сдвигом частоты прецессии, обусловленным флуктуациями фононного поля, и поляронным эффектом.

Основные результаты третьей главы сформулированы в **параграфе 3.5**.

В **Заключении** перечислены основные результаты диссертационной работы.

В **Приложении** рассматривается важная для исследуемых во второй главе вопросов задача о характере движения электрона Дирака в постоянном магнитном поле.

В **параграфе 1** дается введение в проблему, а также формулируется постановка задачи. Рассматривается случай свободного движения электрона Дирака. Показано, что движение даже свободного электрона в релятивистской квантовой механике имеет сложный осциллирующий характер.

В **параграфе 2** в представлении Гейзенберга произведен вывод и решение уравнений для переменных электрона Дирака в слабом постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0 = z_0 B_0$ . Получено уравнение для оператора скорости электрона Дирака. Показано, что в нерелятивистском случае оно переходит в известное в нерелятивистской физике уравнение прецессии скорости электрона в магнитном поле.

Установлено, что решение для средних значений операторов скорости и координаты в состоянии  $|n\rangle$  содержит быстрые и медленные колебания, имеющие частоты  $\omega_1 = 2E_n / \hbar$  и  $\omega_2 = \omega_0 mc^2 / E_n$ , причем  $\omega_2 \ll \omega_1$ , где  $E_n$  – собственное значение энергии электрона Дирака (уровни Ландау).

В параграфе 3 проведено исследование полученных решений. В частности, показано, что в отличие от классического релятивистского случая, в котором модуль поперечной к  $\mathbf{B}_0$  скорости электрона  $|\mathbf{v}_\perp|$  и радиус его ларморовской орбиты  $r_L$  являются постоянными, в релятивистской квантовой механике они перестают быть константами, и становятся осциллирующими функциями времени с периодом колебаний  $1/(\omega_1 - \omega_2) \approx 1/\omega_1$ . В результате высокочастотных осцилляций среднее значение радиуса ларморовской орбиты увеличивается на небольшую поправку, пропорциональную квадрату магнитного поля.

В параграфе 4 исследована дисперсия приращения координаты электрона Дирака в слабом магнитном поле, характерная особенность которой заключается в том, что она имеет не только традиционную квадратичную зависимость от времени, но и дополнительное быстро осциллирующее слагаемое с частотой  $\Omega = E / \hbar$ , представляющее собой одно из проявлений внутренней структуры электрона Дирака.

Диссертация выполнена в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского в период с 2009 по 2012 гг.

По теме диссертации опубликовано 9 работ, из них 6 статей [A1]-[A6] в рецензируемых журналах и 3 работы [A7]-[A9] в сборниках трудов конференций.

Основные результаты диссертации обсуждались на семинарах кафедры квантовой радиофизики ННГУ, а также докладывались на следующих конференциях: Ежегодная конференция по радиофизике, Нижний Новгород, 2007-2012 гг.; Нижегородская сессия молодых ученых, Нижний Новгород, 2008-2011 гг.

# Глава I

## Метод нелинейных стохастических уравнений для открытых квантовых систем

### §1.1 Введение

В настоящее время многие методы современной теоретической физики не являются однородными по своей структуре, и включают в себя множество подходов и направлений, акцентирующих свое внимание на разных аспектах изучаемой проблемы. Причина этой дифференциации заключается в развитии методов, в стремлении разрешить как внутренние, так и внешние методологические вопросы, возникающие в результате их применения при исследовании различных физических систем. Примером, демонстрирующим указанную особенность, является метод матрицы плотности [119], в котором можно выделить ряд направлений, характеризующихся своими управляющими уравнениями (master equation), описывающими динамику квантовых систем при определенных условиях и приближениях, которые с учетом физических особенностей изучаемых систем и определяют эти направления.

Не является исключением в данном случае и метод стохастических уравнений, являющийся широко распространенным методом исследования кинетических и флуктуационных явлений, основы которого были сформулированы в классических работах Эйнштейна, Ланжевена и Смолуховского [191]-[192] по теории броуновского движения. Дальнейшее развитие метода происходило в нескольких направлениях, связанных с общими вопросами кинетической теории и теории случайных процессов. Среди этих вопросов следует особо выделить проблемы самосогласованного описания открытых систем, замыкания кинетических и стохастических уравнений, описание сильнонеравновесных состояний, а также проблему взаимосвязи флуктуационных и диссипационных явлений, существенно повлиявших на теорию стохастических уравнений, различные направления в которой можно классифицировать по тому, как они решают эти проблемы. Кроме этого, следует отметить еще несколько проблем, непосредственно связанных с формализмом метода. Как известно, одной из центральных его категорий является понятие флуктуационного источника, представляющего собой некоторый случайный процесс, порождающий флуктуации в системе. С открытием флуктуационно-диссипационной теоремы [204]-[206] стало известно, что флуктуации (флуктуационные источники) и диссипационные процессы, протекающие в системе, связаны между собой, что сделало микроскопический вывод квантовых стохастических уравнений, т.е.

выделение флуктуационного источника, нетривиальной задачей. При этом если для линейных систем было предложено несколько решений этой задачи [194]-[200], [224]-[226], то в случае нелинейности она до сих пор остается практически неисследованной.

Решения указанных выше проблем составили содержание одного из направлений в методе стохастических уравнений, изложенного в работах [214]-[217], [227]. В частности, в [214]-[216] был предложен способ получения замкнутых немарковских нелинейных стохастических уравнений для неравновесных открытых квантовых систем, с микроскопически определенными аддитивными флуктуационными источниками, учитывающими зависимость флуктуационных и диссипационных процессов. Данный подход используется в настоящей диссертации. В то же время он не является широко распространенным методом в теории стохастических уравнений. В связи с этим возникает необходимость изложить основные принципы и приближения указанного подхода, а также произвести вывод нелинейного стохастического уравнения и флуктуационных источников, чему и посвящена настоящая глава.

Вывод квантовых стохастических уравнений, а также исследование процессов релаксации в рассматриваемых спиновых системах, требует использования основных понятий квантовой кинетической теории, таких как S-матрица, отклик системы, функция реакции, обобщенные восприимчивости и др. Поэтому в первых параграфах этой главы, которая по своему содержанию носит методический характер, излагаются основы этой теории.

## §1.2 Поведение квантовой системы при наличии нестационарного возмущения. Теория S-матрицы

Рассмотрим, следуя [227], задачу об эволюции квантовой системы, на которую действует зависящее от времени возмущение. Для простоты предположим, что состояние системы описывается волновой функцией. Тогда изменение состояния с течением времени будет определяться уравнением Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = H\psi(t) = (H_0 + V(t))\psi(t), \quad (1.1)$$

где  $H_0$  – гамильтониан системы,  $V(t)$  – оператора возмущения.

В частном случае, когда  $V(t) = 0$ , решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t/\hbar} \psi(0). \quad (1.2)$$

Пусть теперь  $V(t) \neq 0$ . Сделаем замену переменных:

$$\psi(t) = e^{-iH_0 t/\hbar} \psi^{\text{int}}(t).$$

Тогда

$$i\hbar \frac{\partial \psi^{\text{int}}(t)}{\partial t} = V^{\text{int}}(t) \psi^{\text{int}}(t), \quad (1.3)$$

где

$$V^{\text{int}}(t) = e^{iH_0 t/\hbar} V(t) e^{-iH_0 t/\hbar}.$$

Таким образом, мы переходим от  $V(t)$  к новому представлению  $V^{\text{int}}(t)$ , имеющему название представления взаимодействия. Интегрируя (1.3), найдем

$$\psi^{\text{int}}(t) = \psi^{\text{int}}(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V^{\text{int}}(t') \psi^{\text{int}}(t'), \quad (1.4)$$

где

$$\psi^{\text{int}}(0) = \psi(0).$$

Будем решать уравнение (1.4) методом последовательных приближений и, чтобы понять структуру получаемых в этом случае членов, запишем их до второго порядка включительно. В нулевом порядке:  $\psi^{(0)\text{int}}(t) = \psi(0)$ . В первом и втором порядках:

$$\psi^{(1)\text{int}}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V^{\text{int}}(t') \psi(0), \quad \psi^{(2)\text{int}}(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V^{\text{int}}(t_1) V^{\text{int}}(t_2) \psi(0). \quad (1.5)$$

Существенная особенность членов ряда (1.5) состоит в том, что  $V^{\text{int}}(t_1)$  и  $V^{\text{int}}(t_2)$  не коммутируют друг с другом, причем операторы в более ранние моменты времени  $t_m$  стоят справа от  $V^{\text{int}}(t_n)$  для  $t_m < t_n$ . Это обстоятельство позволяет нам записать решение уравнения (1.4) в компактной форме.

Перепишем сначала член второго порядка в (1.5) в симметричном по переменным  $t_1$  и  $t_2$  виде:

$$\psi^{(2)\text{int}}(t) = \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \left\{ \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 V^{\text{int}}(t_1) V^{\text{int}}(t_2) + \int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} dt_1 V^{\text{int}}(t_2) V^{\text{int}}(t_1) \right\} \psi(0).$$

Далее используя определение единичных функций Хевисайда, распространим пределы интегрирования до момента  $t$  по каждой переменной  $t_1$  и  $t_2$ :

$$\psi^{(2)\text{int}}(t) = \frac{1}{2!} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \left[ V^{\text{int}}(t_1) V^{\text{int}}(t_2) \eta(t_1 - t_2) + V^{\text{int}}(t_2) V^{\text{int}}(t_1) \eta(t_2 - t_1) \right] \psi(0).$$

Еще раз отметим, что в членах ряда возмущений операторы  $V^{\text{int}}(t)$  должны быть упорядочены во времени. Физически это обусловлено принципом причинности. Обозначим операцию такого упорядочения символом  $T$ , который действует по правилу:

$$T[V^{\text{int}}(t_1)V^{\text{int}}(t_2)] = V^{\text{int}}(t_1)V^{\text{int}}(t_2)\eta(t_1 - t_2) + V^{\text{int}}(t_2)V^{\text{int}}(t_1)\eta(t_2 - t_1) = \begin{cases} V^{\text{int}}(t_1)V^{\text{int}}(t_2), & t_1 > t_2, \\ V^{\text{int}}(t_2)V^{\text{int}}(t_1), & t_1 < t_2. \end{cases}$$

Тогда  $\psi^{(2)\text{int}}(t)$  запишется в виде

$$\psi^{(2)\text{int}}(t) = \frac{1}{2!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 T[V^{\text{int}}(t_1)V^{\text{int}}(t_2)] \psi(0).$$

Распространяя этот прием для всего ряда по возмущению, найдем

$$\psi^{\text{int}}(t) = T \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \dots [V^{\text{int}}(t_1) \dots V^{\text{int}}(t_n)] \right\} \psi(0). \quad (1.6)$$

Поскольку действие оператора  $T$  на произведения  $V^{\text{int}}(t_1) \dots V^{\text{int}}(t_n)$  располагает их в нужном порядке, то под знаком  $T$  они могут иметь произвольное расположение, т.е., другими словами, в этом случае они теряют свойство некоммутативности. Тогда сумму (1.6) можно представить в виде

$$\exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V^{\text{int}}(t') \right\}$$

и переписать решение (1.6) в компактной форме:

$$\psi^{\text{int}}(t) = S(t, 0) \psi(0),$$

где оператор

$$S(t, 0) = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt V^{\text{int}}(t') \right\} \quad (1.7)$$

носит название матрицы рассеяния или кратко S-матрицы. S-матрица является унитарной, и при  $t > t'$  удовлетворяет соотношению

$$S(t, t_1) S(t_1, -\infty) = S(t, -\infty). \quad (1.8)$$

При этом (1.7) нужно понимать так, что сначала экспонента разлагается в ряд, а затем к каждому из слагаемых применяется оператор упорядочения во времени.

Таким образом, эволюция состояния в представлении взаимодействия, обусловленная возмущением  $V(t)$ , определяется S-матрицей. В (1.7) для простоты начальный момент времени  $t_0 = 0$ . При  $t_0 \rightarrow -\infty$ , имеем

$$\psi^{\text{int}}(t) = S(t, -\infty) \psi(-\infty),$$

где

$$S(t, -\infty) = S(t) = T \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt V^{\text{int}}(t') \eta(t - t') \right\}, \quad (1.9)$$

$\eta(t - t')$  – функция Хевисайда.

С помощью унитарного преобразования мы можем перейти к гейзенберговскому представлению, в котором вся эволюция во времени перенесена на операторы. При этом в представлении взаимодействия операторы изменяются с течением времени так же, как гейзенберговские операторы в отсутствие возмущения  $V(t)$ :

$$x(t) = e^{iH_0 t/\hbar} x e^{-iH_0 t/\hbar}. \quad (1.10)$$

Для вычисления средних значений физических величин несущественно, каким представлением пользоваться. Однако, при исследовании кинетических и флуктуационных процессов удобно перенести всю эволюцию во времени на операторы, т.е. перейти к гейзенберговскому представлению:

$$\psi^H = S^{-1}(t) \psi^{\text{int}}(t) = \psi(-\infty).$$

Соответственно операторы должны преобразоваться по закону

$$x^H(t) = S^{-1}(t) x(t) S(t). \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) является точным. В нем содержится информация о «динамическом» поведении системы с течением времени. Очевидно также, что выражения для гейзенберговских операторов не зависят от того, описывается ли начальное состояние волновой функцией или матрицей плотности.

### **§1.3 Линейные и нелинейные характеристики квантовых систем при динамических возмущениях**

Используем результаты §1.2 для исследования явлений, которые возникают при наложении внешних сил. Для простоты будем считать, что система описывается одной переменной  $x$ , до включения взаимодействия находится в состоянии термодинамического равновесия при температуре  $T$ , и имеет функцию распределения

$$\rho_0 = e^{-\frac{H_0 - F}{k_B T}},$$

где  $F$  есть свободная энергия.

Пусть переменная  $x$  такова, что воздействие внешней силы  $f(t)$  может быть описано возмущением

$$V(t) = -x f(t). \quad (1.12)$$

Для определенности будем считать, что момент включения силы  $t = -\infty$ .

С учетом  $f(t)$  в гейзенберговском представлении оператор  $x$  имеет вид (1.11). Поскольку эволюция во времени  $x^H(t)$  теперь известна и задано начальное распределение

системы, то это дает возможность определить все статистические характеристики переменной  $x$ .

Для описания многих физических явлений, возникающих при наложении внешних сил, достаточно знания среднего значения физической величины. Для его определения проведем усреднение (1.11) по распределению  $\rho_0$ :

$$\langle x^H(t) \rangle = Sp\{\rho_0 x^H(t)\}, \quad (1.13)$$

где  $Sp$  обозначает след оператора.

Рассмотрим случай слабого возмущения. Тогда, оставляя в  $S$ -матрице линейные слагаемые по  $f(t)$ , найдем

$$\langle x^H(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi(t, t_1) f(t_1), \quad (1.14)$$

где

$$\varphi(t, t_1) = \frac{i}{\hbar} \langle [x(t), x(t_1)]_- \rangle \eta(t - t_1) \quad (1.15)$$

носит название линейной функции реакции, а  $\langle x^H(t) \rangle$  представляет собой линейный отклик системы на силу  $f(t)$ . В формуле (1.15) операторы  $x(t)$  и  $x(t_1)$  описывают невозмущенную систему с гамильтонианом  $H_0$ .

Определение функции реакции (1.15), несколько отличное от традиционного, позволяет автоматически учесть принцип причинности, который требует, чтобы значение величины  $x$  в момент времени  $t$  определялось лишь значением силы в предыдущие моменты времени  $t > t_1$ . В определении (1.15) это учтено тем, что  $\varphi(t, t_1)$  обращается в нуль, если  $t < t_1$ .

Выражение (1.15) является строгим в том смысле, что оно справедливо для произвольных физических систем, и не опирается на какое-либо приближение относительно их физической природы. С другой стороны, описание кинетических явлений через  $\varphi(t, t_1)$  является приближенным, так как  $f(t)$  предполагалась слабой.

В общем случае реальные физические системы являются нелинейными. Это означает, что с увеличением  $f(t)$  все большую роль будут играть нелинейные члены в разложении  $\langle x^H(t) \rangle$  по  $f(t)$ . В общем случае  $\langle x^H(t) \rangle$  при наличии возмущения (1.12) является функционалом от внешней силы, который удобно записать в виде разложения по степеням  $f(t)$ :

$$\langle x^H(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi(t, t_1) f(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \varphi(t; t_1, t_2) f(t_1) f(t_2) + \dots, \quad (1.16)$$



где  $\varphi(t, t_1, \dots, t_n)$ , так же как и линейная функция реакции  $\varphi(t, t_1)$ , определяются свойствами системы в состоянии термодинамического равновесия.

Разложение (1.16) имеет практический смысл, если для описания кинетических явлений можно ограничиться конечным числом слагаемых. Это имеет место в случае достаточно малой нелинейности, когда действующая сила не столь велика, чтобы «включить в игру» высокие степени  $f(t)$ . Конечное число членов в (1.16) может быть обусловлено также выбором конкретной модели физической системы и в рамках этой модели описание остается по-прежнему строгим.

В ряде задач, однако, необходимо учитывать все слагаемые в (1.16). В этом случае важным понятием является понятие дифференциальной функции реакции. Дадим определение этой характеристики.

Пусть  $\langle x^H(t) \rangle$  есть среднее значение  $x$  при заданной внешней силе  $f(t)$ . Пусть  $f(t)$  получила малое приращение:

$$f'(t) = f(t) + \delta f(t). \quad (1.17)$$

Соответственно  $\langle x^H(t) \rangle$  также получит приращение:

$$\delta \langle x^H(t) \rangle = \langle x^{H'}(t) \rangle - \langle x^H(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi^H(t, t_1) \delta f(t_1),$$

где  $\langle x^{H'}(t) \rangle$  есть среднее значение при действии силы (1.17), а

$$\varphi^H(t, t_1) = \frac{\delta \langle x^H(t) \rangle}{\delta f(t_1)} \quad (1.18)$$

есть дифференциальная функция реакции.

Функциональная производная в (1.18) может пониматься как обобщенная частная производная.

Поскольку вся зависимость от  $f(t)$  содержится в  $S$ -матрице (1.9), то для нахождения дифференциальной функции реакции достаточно вычислить производную  $\delta S(t) / \delta f(t_1)$ , воспользовавшись тем фактом, что дифференцирование можно ввести под знак упорядочения во времени  $T$ .

Тогда, используя определение (1.9), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\delta S(t)}{\delta f(t_1)} &= \frac{i}{\hbar} T \left\{ x(t_1) \eta(t-t_1) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' x(t') f(t') \eta(t-t') \right] \right\} = \\ &= \frac{i}{\hbar} S(t, t_1) x(t_1) S(t_1) \eta(t-t_1) = \frac{i}{\hbar} S(t) x^H(t_1) \eta(t-t). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Здесь мы воспользовались свойством (1.8) и формулой (1.10).

Вычислять производную от обратной S-матрицы нет необходимости в силу условия унитарности. Применяя к (1.19) операцию сопряжения, получим

$$\frac{\delta S^{-1}(t)}{\delta f(t_1)} = -\frac{i}{\hbar} x^H(t_1) S^{-1}(t) \eta(t-t_1). \quad (1.20)$$

Используя (1.19) и (1.20) при вычислении (1.18), имеем

$$\frac{\delta \langle x^H(t) \rangle}{\delta f(t_1)} = \frac{i}{\hbar} \langle [x^H(t), x^H(t_1)]_- \rangle \eta(t-t_1).$$

Таким образом, дифференциальная функция реакции (1.18) оказывается равной

$$\varphi^H(t, t_1) = \frac{i}{\hbar} \langle [x^H(t), x^H(t_1)]_- \rangle \eta(t-t_1). \quad (1.21)$$

Полезно сравнить (1.21) с линейной функцией реакции (1.15). Легко видеть, что (1.21) получается из (1.15), если заменить  $x(t)$ ,  $x(t_1)$  гейзенберговскими операторами  $x^H(t)$ ,  $x^H(t_1)$ . Поэтому некоторые свойства, которые получены для  $\varphi(t, t_1)$ , могут быть сразу же перенесены на  $\varphi^H(t, t_1)$ .

Дифференциальная функция реакции содержит полную информацию об изменении среднего значения (1.13). В частности,  $\varphi^H(t, t_1)$  определяет как линейную, так и нелинейные функции реакции, входящие в разложение (1.16). Действительно, используя определение функциональной производной несложно показать, что

$$\varphi^H(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \frac{\delta^2 \langle x^H(t) \rangle}{\delta f(t_1) \delta f(t_2)}, \quad \varphi^H(t; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \frac{\delta^n \langle x^H(t) \rangle}{\delta f(t_1) \dots \delta f(t_n)}. \quad (1.22)$$

Если теперь воспользоваться определением (1.18), то соотношения (1.22) можно переписать в виде

$$\varphi^H(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \frac{\delta \varphi^H(t, t_1)}{\delta f(t_2)}, \quad \varphi^H(t; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \frac{\delta \varphi^H(t, t_1)}{\delta f(t_2) \dots \delta f(t_n)}.$$

Устремляя в этих формулах внешнюю силу к нулю, найдем

$$\varphi(t, t_1) = \varphi^H(t, t_1) \Big|_{f=0}, \quad \varphi(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \frac{\delta \varphi^H(t, t_1)}{\delta f(t_2)} \Big|_{f=0}, \quad \varphi(t; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \frac{\delta \varphi^H(t, t_1)}{\delta f(t_2) \dots \delta f(t_n)} \Big|_{f=0}. \quad (1.23)$$

Воспользуемся последними формулами, чтобы найти явное выражение для нелинейных функций реакции. Например, для  $\varphi(t; t_1, t_2)$  из (1.21) и (1.23), получаем

$$\varphi(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 \{ \langle [[x(t), x(t_2)]_-, x(t_1)]_- \rangle \eta(t-t_1) \eta(t-t_2) + \quad (1.24)$$

$$+ \langle [x(t), [x(t_1), x(t_2)]_-]_- \rangle \eta(t-t_1) \eta(t_1-t_2) \}. \quad (1.23)$$

Приведем (1.24) к симметричной форме, воспользовавшись для этого тождеством Якоби:

$$[x(t), [x(t_1), x(t_2)]_-]_- + [x(t_1), [x(t_2), x(t)]_-]_- + [x(t_2), [x(t), x(t_1)]_-]_- \equiv 0$$

и свойством единичных функций Хевисайда:

$$\eta(t-t_1) \eta(t-t_2) = \eta(t-t_1) \eta(t_1-t_2) + \eta(t-t_2) \eta(t_2-t_1).$$

Тогда из (1.24), найдем

$$\varphi(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 P_{12} \langle [[x(t), x(t_1)]_-, x(t_2)]_- \rangle \eta(t-t_1) \eta(t_1-t_2), \quad (1.25)$$

где  $P_{12}$  – оператор суммы перестановок по индексам 1,2.

Аналогичную структуру имеют нелинейные функции реакции произвольного порядка:

$$\varphi(t; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n P_{12\dots n} \langle [[\dots [x(t), x(t_1)]_-, \dots, x(t_{n-1})]_-, x(t_n)]_- \rangle \eta(t-t_1) \dots \eta(t_{n-1}-t_n). \quad (1.26)$$

Полученные точные выражения для  $\varphi(t; t_1, \dots, t_n)$  позволяют записать среднее значение в виде разложения (1.16).

Заметим, что в определенных выше формулах можно убрать усреднение по  $\rho_0$ . Тогда

$$x^H(t) = x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \tilde{\varphi}(t, t_1) f(t_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \tilde{\varphi}(t; t_1, t_2) f(t_1) f(t_2) + \dots, \quad (1.27)$$

где  $x(t)$  - описывает невозмущенную систему, а

$$\tilde{\varphi}(t, t_1) = \frac{i}{\hbar} [x(t), x(t_1)]_- \eta(t-t_1), \quad (1.28)$$

$$\tilde{\varphi}(t; t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 P_{12} [[x(t), x(t_1)]_-, x(t_2)]_- \eta(t-t_1) \eta(t_1-t_2)$$

есть флуктуирующие отклики.

При усреднении (1.27) по  $\rho_0$  естественно получаем разложение (1.16).

## §1.4 Обобщенные восприимчивости и их свойства

В §1.3. получены строгие выражения для функций реакции при действии слабого возмущения, зависящего от времени.

Очень важным видом возмущений являются периодические силы, когда

$$f(t) = \sum_j f(\omega_j) e^{-i\omega_j t}. \quad (1.29)$$

Вычислим отклик системы на возмущение (1.29).

Будем считать сначала силу достаточно слабой, когда можно ограничиться лишь линейным членом. Тогда, подставляя (1.29) в (1.14), получим

$$\langle x^H(t) \rangle = \sum_j \chi(\omega_j) f(\omega_j) e^{-i\omega_j t}.$$

Величина

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \varphi(\tau) e^{i\omega\tau}, \quad (1.30)$$

определяющая отклик системы на гармоническое возмущение, носит название обобщенной восприимчивости. Найдем ее явное выражение.

Подставляя (1.15) в (1.30) и используя преобразование Фурье для оператора  $x(t)$ , имеем

$$\chi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} e^{i(\omega-\omega')\tau} \frac{i}{\hbar} \langle [x, x(\omega')]_- \rangle \eta(\tau). \quad (1.31)$$

Преобразование Фурье от единичной функции  $\eta(t)$  есть обобщенная функция (интегральный оператор) [228]-[229]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i(\omega-\omega')\tau} \eta(\tau) = \frac{i}{\omega-\omega'+i\varepsilon} = \pi\delta(\omega-\omega') + i\frac{P}{\omega-\omega'}, \quad \varepsilon \rightarrow +0, \quad (1.32)$$

где  $P$  обозначает главное значение.

Подставляя теперь интегральное представление (1.32) в (1.31), найдем

$$\chi(\omega) = -\frac{1}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{\langle [x, x(\omega')]_- \rangle}{\omega-\omega'+i\varepsilon}. \quad (1.33)$$

Из выражения (1.33) оказывается возможным получить некоторые общие соотношения.

Прежде всего заметим, что  $\chi(\omega)$  является в общем случае комплексной функцией переменной  $\omega$ :

$$\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega),$$

причем действительная часть является четной, а мнимая – нечетной функцией частоты:

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega), \quad \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega).$$

Последние свойства следуют из действительности функции реакции и определения (1.30).

Из спектрального представления (1.33) для восприимчивости так же следует, что  $\chi(\omega)$ , определенная на действительной оси  $\omega$ , может быть аналитически продолжена в верхнюю полуплоскость  $\omega$ . Это связано с тем, что имеется полюс лишь в нижней полуплоскости (в силу положительности  $\varepsilon > 0$ ). Используя аналитичность  $\chi(\omega)$  в верхней полуплоскости, нетрудно получить дисперсионные соотношения Крамерса-Кронига [204]:

$$\chi''(\omega) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega-\omega'} \chi'(\omega'), \quad \chi'(\omega) = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega'}{\omega-\omega'} \chi''(\omega'). \quad (1.34)$$

Выясним физическое содержание действительной и мнимой частей динамической восприимчивости.

Легко показать, что  $\chi''(\omega)$  определяет усредненную по периоду колебаний поглощаемую в единицу времени энергию.

Пододействуем на систему внешней силой

$$f(t) = \frac{1}{2}[f_0 e^{-i\omega t} + f_0^* e^{i\omega t}], \quad (1.35)$$

где через  $f_0^*$  обозначена величина, комплексно сопряженная  $f_0$ .

Как известно [204], изменение среднего значения энергии системы определяется через среднее значение частной производной по времени от гамильтониана этой системы, т.е.

$$\frac{dE}{dt} = -\overline{\frac{\partial H}{\partial t}}.$$

Учитывая теперь, что явную зависимость от времени имеет только энергия взаимодействия, т.е. возмущение  $H_{\text{int}} = -xf(t)$ , найдем

$$\frac{dE}{dt} = -\langle x^H(t) \rangle \frac{df(t)}{dt}. \quad (1.36)$$

Используя выражение для  $\langle x^H(t) \rangle$  и (1.35), имеем

$$\langle x^H(t) \rangle = \chi(\omega) f(t) = \frac{1}{2}[\chi(-\omega) f_0 e^{-i\omega t} + \chi(\omega) f_0^* e^{-i\omega t}]. \quad (1.37)$$

Подставляя теперь (1.37) в (1.36) и усредняя получившееся выражение по периоду колебаний внешней силы, получим

$$Q = \frac{dE}{dt} = \frac{i\omega}{2} |f_0|^2 (\chi(-\omega) - \chi(\omega)) = \frac{\omega}{2} |f_0|^2 \chi''(\omega).$$

Из этой формулы видно, что мнимая часть динамической восприимчивости определяет форму линии поглощения.

В то же время,  $\chi'(\omega)$  характеризует дисперсию этой системы. Действительно, используя понятие восприимчивости можно, например, найти магнитную проницаемость среды [230]:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi(\omega) = 1 + 4\pi\chi'(\omega) + 4\pi i\chi''(\omega),$$

действительная часть которой пропорциональна  $\chi'(\omega)$ , и определяет фазовую и групповую скорости электромагнитных волн в среде, непосредственно связанные с ее дисперсионными свойствами.

Вернемся к (1.34)-(1.35). Эти соотношения показывают, что дисперсия и поглощение взаимно однозначно определяют друг друга. Данное свойство физических систем является следствием принципа причинности.

Линейное соотношение между средним значением и внешней силой имеет место, если последняя достаточно мала или же сама система линейна. Рассмотрим случай, когда внешняя сила не является малой и необходимо учитывать нелинейные члены в разложении среднего значения  $\langle x^H(t) \rangle$ .

Подставляя (1.29) в (1.16), получим

$$\begin{aligned} \langle x^H(t) \rangle = & \sum_j \chi(\omega_j) f(\omega_j) e^{-i\omega_j t} + \sum_{j,k} \chi(\omega_j, \omega_k) f(\omega_j, \omega_k) e^{-i(\omega_j + \omega_k) t} + \\ & + \sum_{j,k,l} \chi(\omega_j, \omega_k, \omega_l) f(\omega_j, \omega_k, \omega_l) e^{-i(\omega_j + \omega_k + \omega_l) t} + \dots \end{aligned}$$

где  $\chi(\omega_j, \omega_k, \dots, \omega_l, \dots)$  есть нелинейные восприимчивости. Например, для  $\chi(\omega_j, \omega_k)$  несложно показать [227], что

$$\begin{aligned} \chi(\omega_j, \omega_k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau_k e^{i\omega_j \tau_j + i\omega_k \tau_k} \varphi(\tau_j, \tau_k), \\ \chi(\omega_j, \omega_k) &= \frac{1}{2!} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^2 P_{jk} \int \frac{d\omega'_j}{2\pi} \int \frac{d\omega'_k}{2\pi} \frac{\langle [[x, x(\omega'_j)]_-, x(\omega'_k)]_- \rangle}{(\omega_k - \omega'_k + i\varepsilon)(\omega_j + \omega_k - \omega'_j - \omega'_k + i\varepsilon)}, \end{aligned}$$

где  $\tau_j = t - t_j$ ,  $\tau_k = t - t_k$ .

Определив в предыдущих параграфах основные понятия квантовой кинетической теории, перейдем теперь к выводу нелинейного стохастического уравнения для открытой квантовой системы.

## §1.5 Вывод стохастических уравнений для открытых квантовых систем

### 1.5.1 Постановка задачи и основные приближения

Следует отметить, что понятие замкнутой динамической системы является ограниченным, и во многих случаях не отражает существенных и наиболее важных свойств реальных систем, которые чаще всего являются открытыми, контактирующими с другими системами. В настоящее время концепция открытых квантовых систем является широко распространенной, и применяется в различных областях физики, химии, биологии.

Как было отмечено во Введении, основными категориями этой концепции являются понятия динамической подсистемы и окружения, которое обычно представляет собой некоторую макроскопическую систему. Прием разделения системы на две подсистемы имеет

глубокие статистические основания, и позволяет прежде всего рассматривать неравновесные состояния подсистемы.

Основная задача, возникающая в результате этого разделения, состоит в исследовании свойств динамической подсистемы с учетом действия окружения, для решения которой были разработаны определенные методы и подходы, позволяющие рассматривать с единой точки зрения объекты, имеющие различную физическую природу. Вообще, в силу макроскопического характера окружения взаимодействие приобретает стохастический характер, что во многих случаях делает необходимым исследовать именно статистические свойства динамической подсистемы.

Одним из методов, позволяющим решать подобные задачи, является метод стохастических уравнений, рассматривающий взаимодействие окружения и подсистемы как броуновское движение последней, возникающее под действие некоторой случайной силы.

Данный параграф посвящен изложению основных положений одного из направлений в теории квантовых стохастических уравнений, а также выводу нелинейных немарковских стохастических уравнений, применяющихся в диссертации для исследования статистических свойств открытых спиновых систем.

Итак, следуя работам [216]-[217], рассмотрим динамическую подсистему, взаимодействующую с окружением и внешней силой  $f(t)$ . Гамильтониан всей системы имеет вид

$$H = H_0 + H_{\text{inv}} - H_{\text{int}} - xf(t), \quad (1.38)$$

где  $x$  и  $H_0$  – переменные и гамильтониан подсистемы,  $H_{\text{inv}}$  – гамильтониан окружения. Рассмотрим случай, когда гамильтониан взаимодействия  $H_{\text{int}} = \lambda xQ$ , где  $Q$  – переменные окружения,  $\lambda$  – константа связи.

Сформулируем основные приближения, благодаря которым будут получены замкнутые стохастические уравнения.

Во-первых, будем считать, что окружение находится в состоянии термодинамического равновесия, и имеет макроскопическое число степеней свободы. Это означает, что окружение можно рассматривать как термостат, слабо меняющий свое состояние при взаимодействии с подсистемой. При этом предположим, что характерное время изменения переменных термостата  $\tau_T$  во много раз меньше, чем время изменения динамической подсистемы  $\tau_S$ , т.е.  $\tau_T \ll \tau_S$ .

Для спиновых систем, рассматриваемых в диссертации, выполняется условие слабого взаимодействия. Поэтому будем считать, что  $H_{\text{int}}$  в (1.38) является возмущением. Следует,

однако, отметить, что в работах [216]-[217] квантовые стохастические уравнения получены для произвольной константы связи  $\lambda$ .

Кроме этого, необходимо еще определить статистические свойства окружения. Во многих физических приложениях, как, например, в случае фононного или фотонного термостатов, с большой точностью можно считать, что их переменные обладают гауссовой статистикой.

### 1.5.2 Гауссовы операторы и их свойства

Случайный классический процесс  $Q(t)$  является гауссовым, если все статистические свойства  $Q(t)$  определяются первыми двумя моментными функциями  $\langle Q(t) \rangle$  и  $\langle Q(t)Q(t_1) \rangle$ . Если использовать определение кумулянтных функций [189], [231]-[232], то для гауссова процесса все кумулянты третьего и высших порядков равны нулю. Основное свойство гауссовых переменных  $Q(t)$  состоит в том, что любое среднее  $\langle Q(t)Q(t_1)Q(t_2)\dots \rangle$  по статистическому распределению (начальному состоянию термостата) при  $\langle Q(t) \rangle = 0$  разбивается на сумму произведений всевозможных парных средних.

В квантовой теории случайной функции  $Q(t)$  ставится в соответствие оператор [217], причем операторы, взятые в различные моменты времени, в общем случае не коммутируют друг с другом. Некоммутативность требует некоторого уточнения как самого понятия гауссового оператора, так и обобщения доказательств основных их свойств.

Рассмотрим произвольный набор некоммутирующих операторов, которые мы пронумеруем в некотором заданном порядке

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_\alpha, A_{\alpha+1}, \dots \quad (1.39)$$

Будем интересоваться моментными функциями от  $A_j$  в установленном порядке (1.39). Введем символ упорядочения  $T_A$ , действие которого на любое произведение операторов располагает их в выбранном порядке (1.39). После этого определим характеристическую функцию для произведения (1.39):

$$\Theta_A(U) = \langle T_A \exp(iU_j A_j) \rangle. \quad (1.40)$$

Тогда любые моменты операторов  $A$  могут быть получены путем дифференцирования (1.40) по соответствующим величинам  $U$ . Например,

$$\langle A_2 A_3 A_5 \rangle = \frac{1}{i^3} \frac{\partial^3 \Theta_{T_A}}{\partial U_2 \partial U_3 \partial U_5} \Big|_{U=0}.$$



По аналогии с кумулянтами классической теории определим кумулянты упорядоченных операторов  $K_\alpha$ ,  $K_{\alpha\beta}$ ,  $K_{\alpha\beta\gamma}$  следующим образом [217]:

$$\Theta_{T_A}(U) = \exp \left\{ \sum_{s=1}^i \frac{i^s}{s!} K_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_s} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} \dots U_{\alpha_s} \right\}. \quad (1.41)$$

Из определений (1.40), (1.41) следуют соотношения между моментами и кумулянтами, которые отличаются от классических лишь упорядоченностью операторов под знаком средних. Например,

$$K_\alpha = \langle A_\alpha \rangle, \quad K_{\alpha\beta} = \langle T_A A_\alpha A_\beta \rangle - \langle A_\alpha \rangle \langle A_\beta \rangle.$$

По аналогии с классическим случаем, операторы  $A_\alpha$  будем называть гауссовыми, если все кумулянты выше второго равны нулю. Характеристическая функция (1.41) (при  $K_\alpha = 0$ ) в этом случае запишется в виде

$$\langle T_A \exp(iA_\alpha U_\alpha) \rangle = \exp \left\{ \frac{i^2}{2} K_{\alpha_1 \alpha_2} U_{\alpha_1} U_{\alpha_2} \right\}. \quad (1.42)$$

Путем дифференцирования левой и правой частей (1.42) по переменным  $U$  приходим к основному свойству гауссовых операторов, согласно которому любое среднее типа  $\langle A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha \dots \rangle$  разбивается на сумму произведений всевозможных парных средних, причем порядок следования операторов в средних сохраняется.

Следует отметить, что всевозможные спаривания от произведения  $\langle A_1 A_2 A_3 \dots A_\alpha \dots \rangle$  могут быть выполнены поэтапно. Сначала производятся спаривания некоторого выбранного оператора  $A_1$ :

$$\langle A_1 A_2 \dots A_{\alpha-1} A_\alpha A_{\alpha+1} \dots \rangle = \sum_{\alpha \neq 1} \langle A_1 A_\alpha \rangle \langle A_2 \dots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \dots \rangle. \quad (1.43)$$

Затем эта операция повторяется в произведении  $\langle A_2 A_3 \dots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \dots \rangle$  и т.д. Введем сокращенные обозначения:

$$F[A] = A_2 A_3 \dots A_{\alpha-1} A_\alpha A_{\alpha+1} \dots,$$

$$A_2 A_3 \dots A_{\alpha-1} A_{\alpha+1} \dots = \frac{\partial F[A]}{\partial A_\alpha}.$$

В результате (1.43) может быть записана в компактной форме:

$$\langle A_1 F[A] \rangle = \sum_{\alpha} \langle A_1 A_\alpha \rangle \left\langle \frac{\partial F[A]}{\partial A_\alpha} \right\rangle. \quad (1.44)$$

Эта формула оказывается справедливой для любой функции  $F$  от гауссовых операторов. Не составляет труда произвести обобщение (1.44) на тот случай, когда индекс  $\alpha$  пробегает

непрерывный ряд значений. Тогда, суммирование по  $\alpha$  необходимо заменить интегрированием, а частную производную  $\partial F[A]/\partial A_\alpha$  – функциональной производной  $\delta F[A]/\delta A_\alpha$ . В итоге (1.44) принимает вид

$$\langle A_1 F[A] \rangle = \int d\alpha \langle A_1 A_\alpha \rangle \left\langle \frac{\delta F[A]}{\delta A_\alpha} \right\rangle. \quad (1.45)$$

Полученное соотношение обобщает хорошо известную формулу Фуруцу-Новикова [233] на квантовый случай.

Перейдем теперь к выводу искомого стохастического уравнения.

### 1.5.3 Вывод нелинейного стохастического уравнения в приближении гауссовой статистики переменных термостата

Итак, вернемся к гамильтониану (1.38). Запишем уравнение Гейзенберга для переменной  $x_j(t)$  динамической подсистемы:

$$\dot{x}_j(t) = \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), H_0] - \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), x(t)]_-(\lambda Q^H(t) + f(t)), \quad (1.46)$$

где для сокращения обозначений считаем  $x_j(t) = x_j^H(t)$ .

Задача заключается в выделении непротиворечивым образом из правой части (1.46) флуктуационных источников, а также получение замкнутых стохастических уравнений. Оказывается это можно сделать, решая самосогласованную задачу и используя приближения, сформулированные в разделе 5.1.

Для этого учтем изменение переменной термостата  $Q$ , обусловленное действием подсистемы. Поскольку оператор  $\lambda x(t)$ , входящий в  $H_{\text{int}}$ , можно рассматривать как силу, действующую со стороны подсистемы, и принимая во внимание, что, согласно сделанным приближениям, взаимодействие считается слабым, представим  $Q^H(t)$  в виде функционального ряда по  $\lambda x(t)$ . Используя результаты §1.2 и §1.3, найдем

$$Q^H(t) = Q(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \tilde{\varphi}(t, t_1) x(t_1) + \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \tilde{\varphi}(t, t_1, t_2) x(t_1) x(t_2) + \dots \quad (1.47)$$

где  $Q(t)$  определяется невозмущенным состоянием термостата, а

$$\tilde{\varphi}(t, t_1) = \frac{i}{\hbar} [Q(t), Q(t_1)]_- \eta(t - t_1),$$

$$\tilde{\varphi}(t, t_1, t_2) = \frac{1}{2!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^2 P_2[[Q(t), Q(t_1)]_-, Q(t_2)]_- \eta(t - t_1) \eta(t_1 - t_2),$$

$$\tilde{\varphi}(t, t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \left( \frac{i}{\hbar} \right)^n P_{12\dots n} [[\dots[Q(t), Q(t_1)]_-, \dots, Q(t_{n-1})]_-, Q(t_n)]_- \eta(t-t_1) \cdots \eta(t_{n-1}-t_n),$$

есть случайные функции реакции окружения на внешнюю силу  $\lambda x(t)$ ,  $\eta(\tau)$  – функция Хевисайда.

В общем случае разложение (1.47) содержит бесконечное число слагаемых. Приближение слабого взаимодействия также не может служить критерием замыкания (1.47), так как более высокие члены разложения могут иметь большое значение для статистических свойств подсистемы, поскольку несут более полную информацию о свойствах самого термостата (окружения). Данную проблему удастся решить, используя предположение о гауссовой статистике переменных термостата.

Вернемся вновь к уравнению (1.46). Запишем его в виде

$$\dot{x}_j(t) = \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), H_0]_- - \frac{\lambda}{2} [Q(t), y_j(t)]_+ - \frac{\lambda}{2} [\tilde{Q}^H(t), y_j(t)]_+ - y_j(t) f(t), \quad (1.48)$$

где  $\tilde{Q}^H(t) = Q^H(t) - Q(t)$ ,

$$y_j(t) = \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), x(t)]_-.$$

Здесь ввиду некоммутативности  $Q(t)$  и  $\tilde{Q}^H(t)$  с операторами динамической подсистемы  $y_j(t)$  с помощью скобок  $[\dots]_+$  произведена симметризация.

Учтем теперь, что  $\tilde{Q}^H(t)$  зависит только от линейного и нелинейных откликов, и не содержит  $Q(t)$ . Это означает, что при усреднении (1.48) по равновесному состоянию термостата, с использованием приближения гауссовой статистики его переменных и соотношения  $\tau_T \ll \tau_S$ , в слагаемое  $[\tilde{Q}^H(t), y_j(t)]_+$  войдет только среднее значение линейного отклика. Поэтому это уравнение можно переписать в виде

$$\dot{x}_j(t) = \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), H_0]_- - \frac{\lambda}{2} [Q(t), y_j(t)]_+ - \frac{\lambda^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi(t, t_1) [x(t), y_j(t)]_+ - y_j(t) f(t), \quad (1.49)$$

где  $\varphi(t, t_1) = \langle \tilde{\varphi}(t, t_1) \rangle$ .

Другими словами, в случае гауссовой статистики переменных термостата все статистические характеристики подсистемы определяют флуктуации  $Q(t)$ . Поэтому, фактически, можем считать, что

$$Q^H(t) = Q(t) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi(t, t_1) x(t_1).$$

Выделим теперь в уравнении (1.49) флуктуационные источники. Для этого поступим следующим образом. Используя формулу Фуруцу-Новикова (1.45), несложно получить соотношение:

$$\left\langle \frac{1}{2} [Q(t), y_j(t)]_+ \right\rangle = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M(t, t_1) \left\langle \frac{\delta y_j(t)}{\delta f(t)} \right\rangle, \quad (1.50)$$

где

$$\left\langle \frac{\delta y_j(t)}{\delta f(t_1)} \right\rangle = \left\langle \frac{i}{\hbar} [y_j(t), x(t_1)]_- \right\rangle \eta(t - t_1) \quad (1.51)$$

есть среднее значение функциональной производной  $y_j(t)$  по внешней силе  $f(t)$ ,  $M(t, t_1)$  – корреляционная функция невозмущенных переменных термостата:

$$M(t, t_1) = \frac{1}{2} \langle [Q(t), Q(t_1)]_+ \rangle.$$

Используя теперь (1.50) и (1.51), перепишем уравнение (1.49) в виде

$$\dot{x}_j(t) = \frac{1}{i\hbar} [x_j(t), H_0(t)]_- - y_j(t) f(t) - F(t; y_j(t), x(t)), \quad (1.52)$$

где

$$F(t; y_j(t), x(t)) = F_j(t; y_j(t), x(t)) + \xi_j(t; y_j(t), x(t)) \quad (1.53)$$

можно рассматривать как некоторую силу, состоящую из двух слагаемых:

$$F_j(t; y_j(t), x(t)) = \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left( \varphi(t, t_1) \frac{1}{2} [y_j(t), x(t_1)]_+ + M(t, t_1) \frac{i}{\hbar} [y_j(t), x(t_1)]_- \eta(t - t_1) \right), \quad (1.54)$$

$$\xi_j(t; y_j(t), x(t)) = \frac{\lambda}{2} [Q(t), y_j(t)]_+ - \lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M(t, t_1) \frac{i}{\hbar} [y_j(t), x(t_1)]_- \eta(t - t_1), \quad (1.55)$$

где  $F_j(t; y_j(t), x(t))$  представляет собой силу трения, действующую со стороны термостата на динамическую подсистему, а  $\xi_j(t; y_j(t), x(t))$  есть аддитивные флуктуационные источники, с равными нулю средними значениями по равновесному состоянию окружения, определяющие случайную составляющую силы (1.53), с помощью которой могут быть вычислены статистические свойства динамической подсистемы.

Уравнение (1.52) с силой трения (1.54) и флуктуационными источниками (1.55) напоминает по форме известные из классической теории уравнения Ланжевена. При этом из (1.54) следует, что полученное стохастическое уравнение является немарковским, автоматически учитывающим эффекты памяти в системе.

Стохастическое уравнение (1.52) было использовано при изучении различных физических систем, как в релятивистской квантовой теории [234]-[243], так и физике конденсированного состояния [244]-[255].

Рассмотрим более подробно силу трения (1.54). Она имеет две составляющие, характеризующие собой два механизма (канала) возникновения диссипации в подсистеме. Первое слагаемой в (1.54), связанное со средним значением функции реакции  $\varphi(t, t_1)$ , определяет самосогласованный вклад отклика термостата в динамику подсистемы, и поэтому его можно считать динамическим механизмом возникновения релаксации. Второе слагаемое, характеризующееся функцией корреляции  $M(t, t_1)$ , связано со стохастическими свойствами термостата. Оно определяет вклад в диссипацию подсистемы флуктуаций окружения, и поэтому его можно считать статистически механизмом релаксации.

Существенная особенность полученного стохастического уравнения заключается в том, что указанные механизмы релаксации не являются независимыми, а определяют друг друга через флуктуационно-диссипационную теорему Каллена-Вельтона, устанавливающую связь между флуктуационными и диссипационными процессами, протекающими в системе. Тем самым решается задача о выделении в квантовом нелинейном уравнении с гауссовыми мультипликативными случайными параметрами флуктуационных источников.

Согласно этой теореме, мнимая часть функции реакции связана со спектральной плотностью флуктуаций термостата соотношением:

$$S(\omega) = \hbar \operatorname{Im}\{\varphi(\omega)\} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right), \quad (1.56)$$

где  $T$  – температура,  $S(\omega)$  – спектральная плотность флуктуаций:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} M(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle [Q, Q(\tau)]_+ \rangle, \quad (1.57)$$

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \varphi(\tau). \quad (1.58)$$

Другая особенность полученного стохастического уравнения состоит в том, что при его выводе не использовались, как в подавляющем большинстве работ, уравнения для переменных окружения, которые обычно пишут для замыкания стохастического уравнения в линейных системах. Это говорит о том, что для получения уравнения (1.52) не принципиально каким является окружение (термостат), т.е. не принципиально является он линейным или нелинейным. Другими словами, для всех окружений, переменные которых удовлетворяют сформулированным выше условиям, и обладают гауссовой статистикой, стохастическое уравнение (1.52) является наиболее общим.

В заключение отметим, что стохастическое уравнение (1.52) совместно с явным выражением для силы трения (1.54) и флуктуационными источниками (1.55), полученными для гауссовой модели термостата, позволяют исследовать все статистические свойства

динамической подсистемы. Оно является основным уравнением изложенного подхода, и применяется в настоящей диссертации для изучения открытых спиновых систем.

## §1.6 Выводы

1. Рассмотрено поведение квантовой системы под действием слабой внешней силы, зависящей от времени. Показано, что в этом случае среднее значение оператора физической величины, характеризующей систему, может быть представлено в виде функционального ряда по этой силе. На основе понятия дифференциальной функции реакции произведено обобщение этого разложения. Рассмотрен важный случай периодического возмущения. Введено понятие обобщенной восприимчивости. Определены ее основные свойства.

2. На основе концепции открытых квантовых систем рассматривается задача о поведении динамической подсистемы, взаимодействующей с окружением, находящимся в состоянии термодинамического равновесия, переменные которого имеют гауссову статистику. Получено нелинейное стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение динамической подсистемы, слабо взаимодействующей с термостатом. Определены сила трения и флуктуационные источники. Показано, что сила трения состоит из двух слагаемых, характеризующих собой два механизма (канала) релаксации, определяющихся функцией реакции и функцией корреляции переменных термостата, связанных между собой флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена-Вельтона.

## **Глава II**

# **Динамика спинового момента электрона, взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума**

### **§2.1 Введение и постановка задачи**

Рассмотрев в предыдущей главе основные понятия квантовой кинетической теории, перейдем к изучению статистических свойств спиновых систем, взаимодействующих со случайными полями в вакууме и конденсированных средах, используя для этого метод квантовых стохастических уравнений.

Как указывалось во Введении, в спиновой физике и ее приложениях большую роль играет система, состоящая из спиновых моментов электронов, находящихся в контакте с различными диссипативными окружениями. Одним из наиболее распространенных и часто встречающихся окружений является электромагнитное поле, взаимодействие с которым приводит к радиационному трению спинового момента. Изучение различных свойств данной системы является важной и актуальной задачей в ряде разделов современной физики. В частности, радиационное трение магнитного (спинового) момента принципиально при проектировании накопительных колец, и является причиной таких эффектов, как поляризация электронных и позитронных пучков [41]-[44], [256], а также их деполяризации [256], возникающей из-за существования неоднородности магнитных полей и наличия аномального магнитного момента у электронов и позитронов. Кроме этого, данная задача встречается в астрофизике при исследовании динамики магнитного момента пульсаров и нейтронных звезд [40], [257]-[258], а также в физике конденсированного состояния при изучении процессов спиновой оптической активности [24], в которых радиационные каналы релаксации играют существенную роль. Имеет большое значение и чисто теоретическое содержание этой задачи, связанное с общей проблемой радиационного трения [34, 40], [259] и вычислением силы реакции спиновой системы на действие излучения [40], [260]-[262]. В связи с этим возникает необходимость более детально, с использованием таких особенностей, как неравновесность подсистемы, ее нелинейность, эффекты памяти, статистические свойства поля излучения, исследовать процесс релаксации спинового момента электрона, обусловленный радиационным трением.

Данная задача не является принципиально новой, и рассматривалась во многих работах и монографиях. Ее актуальность определяется несколькими причинами. В частности, взаимодействие спиновых моментов и электромагнитного окружения оказывается важным для таких эффектов, как парамагнитный, ядерный и комбинированные резонансы, являющиеся, фактически, основными методами радиоспектроскопического исследования строения вещества. Кроме этого, модель спинового момента электрона обладает определенной универсальностью, и широко применяется в квантовой оптике [49], [263] при описании двухуровневых систем, взаимодействующих с излучением, что дает возможность использовать результаты этой задачи в различных разделах современной физики.

С теоретической точки зрения изучение радиационного трения спиновых моментов электронов предполагает вывод и решение определенных уравнений, описывающих их динамику под действием электромагнитных полей. Во многих случаях это взаимодействие удовлетворяет приближению Борна-Маркова и радиационное трение спиновых моментов описываются так называемыми уравнениями Блоха (см. Введение) или в общем случае уравнениями Ландау-Лифшица-Гильберта (ЛЛГ) [56] с феноменологическими параметрами, определяющими времена релаксации, равновесные значения и другие характеристики. Например, для системы с суммарным спиновым моментом  $\mathbf{s}$ , находящейся в контакте с диссипативным окружением и постоянным магнитным полем  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}_0$ , уравнения Блоха имеют вид [45]-[46]

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{s}_\perp(t)}{T_\text{tr}} + \frac{\mathbf{s}_\parallel^{(0)} - \mathbf{s}_\parallel(t)}{T_l}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{s}_\perp = s_x \mathbf{x}_0 + s_y \mathbf{y}_0$ ,  $\mathbf{s}_\parallel = s_z \mathbf{z}_0$ ,  $\mathbf{s}_\parallel^{(0)} = s_0 \mathbf{z}_0$  – равновесное значение,  $T_l$  и  $T_\text{tr}$  – продольное и поперечное времена релаксации, являющиеся главными параметрами в теории Блоха, значения которых могут быть определены либо из эксперимента, либо на основе дополнительных теоретических расчетов. В частности, для двухуровневой спиновой системы в равновесном тепловом электромагнитном окружении время релаксации может быть определено через коэффициенты Эйнштейна  $A$  и  $B$  и спектральную плотность электромагнитного излучения  $\rho_{em}$  (формула Планка) [47]:

$$\frac{1}{\tau_0} = A + B\rho_{em} = B \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_0}\right), \quad (2.2)$$

где  $B$  – коэффициент вынужденного излучения (поглощения),  $A$  – коэффициент спонтанного излучения,  $T_0$  – температура излучения. В общем случае выражения для  $T_l$  и  $T_\text{tr}$  зависят от многих факторов, и поэтому их вычисление является отдельной задачей теории спиновой (магнитной) релаксации. Несмотря на то, что следствия из (2.1) имеют экспериментальное



подтверждение, применение этих уравнений наталкивается на определенные ограничения, что делает необходимым в ряде случаев произвести микроскопический вывод аналогичных уравнений, учитывающих некоторые дополнительные особенности, как подсистемы, так и ее окружения.

В общем случае все теоретические работы, посвященные радиационному трению спиновых систем, можно разделить на две группы, различающиеся между собой расстановкой определенных акцентов. В первую группу входят работы (например, [264]-[271]), опирающиеся на уравнения Блоха и ЛЛГ, цель которых заключается в исследовании свойств спиновых систем через интегрирование этих уравнений. При этом первоначальная цель работ второй группы (например, [218, 220-221, 262], [272]-[278]) состоит в микроскопическом выводе управляющих уравнений для параметров спиновых систем, используя для этого различные методы и подходы (см. Введение), в частности, метод квантовых стохастических уравнений [218, 220-221, 262].

Рассмотрев кратко некоторые общие черты проблемы радиационного трения спиновых систем, перейдем теперь к постановке задачи и основным вопросам этой главы.

В данной главе на основе метода квантовых стохастических уравнений рассматривается задача о динамике спинового момента электрона, взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума. Фактически, эта система эквивалентна идеальному газу двухуровневых атомов, взаимодействующему со случайным электромагнитным полем.

Согласно концепции открытых квантовых систем, выделим в рассматриваемой макроскопической системе две подсистемы: динамическую, которой в данном случае будет спиновый момент электрона, и оставшуюся макроскопическую часть – электромагнитное поле, представляющее собой совокупность бесконечного числа гармонических осцилляторов, основное (равновесное) состояние которого соответствует электромагнитному вакууму. Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m} - \gamma_0(\mathbf{s} \cdot \tilde{\mathbf{B}}) + F, \quad (2.3)$$

где  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$  – кинематический импульс электрона,  $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \text{rot}\mathbf{A}$  – суперпозиция внешнего магнитного поля и поля излучения с векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ ,  $F$  – гамильтониан электромагнитного поля (окружения):

$$F = \frac{E^2 + B^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi}((4\pi\mathbf{P})^2 + (\text{rot}\mathbf{A})^2), \quad (2.4)$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{P} = \dot{\mathbf{A}}/4\pi c$  – канонические координаты и импульсы окружения. В представлении чисел заполнения  $F$  принимает простой вид

$$F = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^+ a_{\mathbf{k}},$$

где  $a_{\mathbf{k}}^+$  и  $a_{\mathbf{k}}$  операторы рождения и уничтожения фотона с волновым вектором  $\mathbf{k}$ ,  $\omega_{\mathbf{k}} = ck$ .

Основная задача заключается в выводе немарковского стохастического уравнения для спинового момента электрона и изучение на его основе процесса радиационного трения и некоторых свойств рассматриваемой системы. В частности, большой интерес представляет вычисление динамической восприимчивости, исследование влияния эффекта памяти на форму линии поглощения, а также изучение воздействия флуктуаций электромагнитного поля на характеристики спинового момента электрона.

Еще одним важным вопросом является проблема вычисления силы радиационного трения, возникающая из-за существования в квантовой теории бесконечностей [279]-[280], проявляющихся в возникновении расходящихся интегралов при описании процессов рассеяния элементарных частиц, например, электронов и фотонов, что делает вывод силы радиационного трения нетривиальной задачей. Существует несколько подходов при ее решении. Одни из них опираются на традиционный способ устранения бесконечностей [280], заключающийся в ведении процедуры перенормировки фундаментальных констант элементарных частиц. Другие подходы, один из которых предложен в этой главе, используют для этого некоторые дополнительные свойства элементарных частиц и процесса взаимодействия.

Перечисленные выше вопросы являются основными в данной главе. Их решению и посвящены следующие параграфы.

## §2.2 Стохастическое уравнение для спинового момента электрона

Для вывода искомого стохастического уравнения воспользуемся алгоритмом, предложенным в §1.5.

Используя гамильтониан (2.3), запишем уравнение Гейзенберга для оператора спинового момента электрона:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [s(t), H] = \gamma_0 [s(t) \times \tilde{\mathbf{B}}]. \quad (2.5)$$

Будем считать, что электромагнитное окружение описывается векторным потенциалом  $\mathbf{A}$ , который для дальнейших вычислений удобно представить в виде разложения Фурье:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} \mathbf{A}(\mathbf{k}, t). \quad (2.6)$$

Согласно используемому подходу, необходимо определить переменные электрона, являющиеся сопряженными векторному потенциалу  $\mathbf{A}(\mathbf{r}(t), t)$  или  $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$ , которые можно

было бы рассматривать как «силу», действующую со стороны подсистемы на электромагнитное окружение. Как хорошо известно, такой переменной является оператор плотности тока электрона, выражение для которого легко получить [281] используя гамильтониан (2.3):

$$\frac{1}{c} \mathbf{j}(\mathbf{k}, t) = -\frac{\delta H_{\text{int}}}{\delta \mathbf{A}(\mathbf{k}, t)} = \left( \frac{e}{c} \dot{\mathbf{r}}(t) + i\gamma_0 [\mathbf{s}(t) \times \mathbf{k}] \right) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \quad (2.7)$$

где первое слагаемое, определяемое скоростью  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , связано с конфигурационным движением электрона, а второе обусловлено эволюцией его спинового момента.

Учитывая теперь, что взаимодействие между подсистемами является слабым и, используя предположение о гауссовой статистике переменных окружения, представим  $\mathbf{A}(\mathbf{k}, t)$  в виде функционального ряда по плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{k}, t)$ :

$$A_j(\mathbf{k}, t) = A_j^0(\mathbf{k}, t) + \frac{1}{c} \int dt_1 D_{j\alpha}(\mathbf{k}, t - t_1) j_\alpha(-\mathbf{k}, t_1), \quad (2.8)$$

где переменные  $A_j^0(\mathbf{k}, t)$  описывают невозмущенное состояние электромагнитного окружения или, другими словами, поле электромагнитного вакуума, имеющие в представлении чисел заполнения (вторичного квантования) вид

$$A_j^0(\mathbf{k}, t) = e_j^{(\lambda)} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{k}} (a_k(t) + a_{-k}^+(t)),$$

где  $e_j^{(\lambda)}$  – проекция единичного вектора поляризации,  $a_k^+(t)$  и  $a_k(t)$  – операторы рождения и уничтожения фотонов с волновым вектором  $k$ ,

$$a_k(t) = a_k(t_1) e^{-ick\tau},$$

$$a_k^+(t) = a_k^+(t_1) e^{ick\tau},$$

$$\tau = t - t_1.$$

Несложно показать, что переменные  $A_j^0(\mathbf{k}, t)$  обладают функцией корреляции:

$$M_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{2} \langle [A_j^0(\mathbf{k}, t), A_\alpha^0(-\mathbf{k}, t_1)]_+ \rangle = \frac{\hbar}{2} \frac{4\pi c}{k} \cos(kc\tau) \left( \delta_{j\alpha} - \frac{k_j k_\alpha}{k^2} \right) = M(\mathbf{k}, \tau) \left( \delta_{j\alpha} - \frac{k_j k_\alpha}{k^2} \right). \quad (2.9)$$

Второе слагаемое в (2.8), определяемое функцией Грина фотона  $D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau)$ , есть отклик электромагнитного окружения на ток электрона, представляющий собой не что иное, как поле излучения. В принятой калибровке ( $\text{div} \mathbf{A} = 0$ )  $D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau)$  имеет вид

$$D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{4\pi c}{k} \sin(kc\tau) \eta(\tau) \left( \delta_{j\alpha} - \frac{k_j k_\alpha}{k^2} \right) = D(\mathbf{k}, \tau) \left( \delta_{j\alpha} - \frac{k_j k_\alpha}{k^2} \right). \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) отличается от общепринятого для  $D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau)$  (см. например, [282]) наличием функция Хевисайда  $\eta(\tau)$ , учитывающей принцип причинности в (2.8).

Следует отметить, что функция Грина фотона (2.10) и  $M_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau)$  связаны между собой флуктуационно-диссипационной теоремой Калена-Вельтона при нулевой температуре:

$$S_{j\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \hbar \operatorname{Im}\{D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \omega)\} \operatorname{Lim}_{T \rightarrow 0} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) = \hbar \operatorname{Im}\{D_{j\alpha}(\mathbf{k}, \omega)\},$$

где  $S_{j\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$  – спектр флуктуаций электромагнитного вакуума:

$$S_{j\alpha}(\mathbf{k}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau M_{j\alpha}(\mathbf{k}, \tau) e^{i\omega\tau}.$$

Вернемся теперь к уравнению (2.5). Подставляя (2.6) и (2.8) в (2.5) и производя симметризацию произведений компонент  $s_j(t)$  и  $A_n^0(\mathbf{k}, t)$ , найдем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{s}}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}] = & \gamma_0 e_{\beta jp} e_{pmn} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} ik_m \frac{1}{2} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, A_n^0(\mathbf{k}, t)]_+ + \\ & + e_{\beta jp} e_{pmn} \frac{\gamma_0}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} ik_m D_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{1}{2} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, j_\alpha(-\mathbf{k}, t_1)]_+, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где  $e_{\beta jp}$  – единичный антисимметричный тензор.

Выделим из правой части уравнения (2.11) силу радиационного трения и флуктуационные источники, воспользовавшись для этого способом, предложенным в §1.5. Используя обобщение формулы Фуруцу-Новикова на квантовый случай (1.50), найдем

$$\frac{1}{2} \left\langle [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, A_n^0(\mathbf{k}, t)]_+ \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \left\langle \frac{\delta s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}}{\delta A_\alpha^0(-\mathbf{k}, t_1)} \right\rangle, \quad (2.12)$$

где усреднение проводится по вакуумному состоянию электромагнитного поля, а  $M_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau)$  определяется (2.8).

Вычислим теперь производную в (2.12). Используя гамильтониан (2.3) и формулу (2.10), а также правила вычисления функциональной производной от гейзенберговских операторов (см. §1.3), найдем

$$\left\langle \frac{\delta s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}}{\delta A_\alpha^0(-\mathbf{k}, t_1)} \right\rangle = \frac{i}{\hbar} \left\langle [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, j_\alpha(-\mathbf{k}, t_1)]_- \right\rangle \eta(\tau). \quad (2.13)$$

Сравнивая теперь формулы (2.12) и (1.50), а также (2.13) и (1.51) получим искомое стохастическое уравнение для спинового момента электрона

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}] = \tilde{\mathbf{F}}(t; \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t)), \quad (2.14)$$

где

$$\tilde{\mathbf{F}}_\beta(t; \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t)) = F_\beta(t; \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t)) + \xi_\beta(t), \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned}
F_\beta(t; \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t)) &= e_{\beta jp} e_{p mn} \frac{e^2}{mc^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} i k_m \cdot \\
&\cdot \left( D_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{1}{2} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \dot{r}_\alpha(t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ + M_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{i}{\hbar} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, \dot{r}_\alpha(t_1) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \eta(\tau) \right) + \\
&+ e_{\beta jp} e_{p mn} \gamma_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} k_m (D_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{1}{2} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, [\mathbf{s}(t_1) \times \mathbf{k}]_\alpha e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_+ + \\
&+ M_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{i}{\hbar} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, [\mathbf{s}(t_1) \times \mathbf{k}]_\alpha e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}]_- \eta(\tau)),
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\xi_\beta(t) &= \gamma_0 e_{\beta jp} e_{p mn} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} i k_m \frac{1}{2} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, A_n^0(\mathbf{k}, t)]_+ - \\
&- e_{\beta jp} e_{p mn} \frac{\gamma_0}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} i k_m M_{n\alpha}(\mathbf{k}, \tau) \frac{i}{\hbar} [s_j(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}, j_\alpha(-\mathbf{k}, t_1)]_- \eta(\tau),
\end{aligned} \tag{2.17}$$

$F_\beta(t; \mathbf{s}(t), \mathbf{r}(t))$  представляют собой компоненты силы радиационного трения, действующие на спиновый момент электрона со стороны поля излучения и флуктуаций электромагнитного вакуума, а  $\xi_\beta(t)$  есть флуктуационные источники, с равными нулю средними значениями по вакуумному состоянию электромагнитного окружения, характеризующие собой случайную составляющую силы (2.15).

Рассмотрим более подробно выражение (2.16). Как несложно видеть, сила радиационного трения состоит из двух частей, связанных с двумя составляющими плотности тока электрона (2.7). При этом одна из них определяется конфигурационным движением электрона с оператором скорости  $\dot{\mathbf{r}}(t)$ , а вторая связана со спиновой плотностью тока электрона –  $\gamma_0[\mathbf{s}(t_1) \times i\mathbf{k}]$ . Эти части имеют самостоятельный характер, и каждое в отдельности вызывает радиационное трение спинового момента. Кроме этого, в каждой из этих частей имеется две составляющие, которые, как указывалось в §1.5, характеризуют два связанных между собой механизма релаксации, определяющиеся функцией Грина фотонов и функцией корреляции вакуумных переменных электромагнитного поля, связанных с полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума. Это говорит о том, что сила трения (2.16) и флуктуационные источники (2.17) в рамках используемого подхода позволяют максимально полно описать основные свойства рассматриваемой спиновой подсистемы.

Другая особенность силы радиационного трения (2.16) заключается в том, что она нелинейным и нелокальным образом зависит от оператора координаты электрона  $\mathbf{r}(t)$ , что, как нетрудно видеть, определяется произведением операторов электронных плотностей:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}, \quad e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)}. \tag{2.18}$$

Учитывая, что  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t_1)$  не коммутируют между собой, мы не можем сложить показатели у перемножающихся экспонент в (2.18). Это делает необходимым произвести «распутывание» произведений операторов в (2.18). Как будет показано в дальнейшем (см. §2.5), с решением этой задачи связано в рассматриваемой модели преодоление традиционной для радиационного трения проблемы логарифмической бесконечности.

Вообще, несмотря на то, что электрон является элементарной частицей, он имеет сложную внутреннюю структуру или, как отмечают некоторые авторы [283]-[284], внутреннюю геометрию. Наиболее отчетливо эта особенность проявляется в релятивистском случае (см. Приложение), в котором, как впервые показал Шредингер [285]-[286], спиновая и конфигурационные степени свободы электрона являются сильно коррелированными, и существенно влияют друг на друга даже при свободном движении. Поэтому для решения указанной задачи целесообразно рассмотреть общий случай, т.е. произвести «распутывание» произведений (2.18) с учетом релятивистских свойств электрона, т.е. с учетом его внутренней геометрии. При этом, поскольку внешнее магнитное поле является слабым, достаточно рассмотреть только его свободное движение.

Задача о «распутывании» произведения операторов электронных плотностей с учетом свободного движения релятивистского электрона рассматривалась в [287]. Воспользуемся некоторыми результатами этой работы.

В первую очередь из [287] следует, что произведения (2.18) могут быть представлены в виде:

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} e^{iB(\tau,\mathbf{k})}, \quad e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} = e^{-iB(\tau,\mathbf{k})} e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}, \quad (2.19)$$

где  $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1)$ . Наличие унитарного оператора  $e^{iB(\tau,\mathbf{k})}$  в (2.19) обусловлено некоммутативностью  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}(t_1)$  в различные моменты времени. Выражение для  $e^{iB(\tau,\mathbf{k})}$  и различные его асимптотические свойства исследованы в работе [287]. Что же касается оператора  $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}$ , то его выражение определено в §4 Приложения. В частности, показано, что дисперсия приращения оператора координаты свободного релятивистского электрона (электрона Дирака) имеет не только традиционную квадратичную зависимость от времени, но и дополнительное быстро осциллирующее слагаемое, представляющее собой одно из проявлений внутренней структуры электрона. Кроме этого, в основном состоянии после усреднения по высокочастотным релятивистским колебаниям (нерелятивистский предел) дисперсия координаты не равна нулю как в классической физике, что также свидетельствует о проявлении внутренней геометрии электрона или, другими словами, сильной корреляции между спиновой и конфигурационными степенями свободы. Эта особенность позволяет, не прибегая к процедуре обрезания, устранить в данной модели проблему логарифмической бесконечностей.

В нерелятивистском пределе оператор  $e^{ik\Delta r}$  является с-числом:

$$e^{ik\Delta r} \approx \cos(\rho x), \quad (2.20)$$

где (см. §4 Приложения)  $x = \lambda_c k$ ,  $\lambda_c = \hbar / mc$  – комптоновская длина волны электрона,

$$\rho = 1/\sqrt{2} \quad (2.21)$$

является следствием указанной выше особенности.

При этом оператор  $e^{iB(\tau, \mathbf{k})}$ , согласно [287], имеет вид

$$e^{iB(\tau, \mathbf{k})} = \exp\left\{-i\frac{x^2}{2}\Omega\tau\right\}, \quad (2.22)$$

где  $\Omega = mc^2 / \hbar$ .

В итоге подставляя (2.20) и (2.22) в (2.19), найдем

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} = \cos(\rho x) \exp\left\{-i\frac{x^2}{2}\Omega\tau\right\}, \quad e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} = \cos(\rho x) \exp\left\{i\frac{x^2}{2}\Omega\tau\right\}. \quad (2.23)$$

Вернемся теперь к силе радиационного трения (2.16). Введем следующие обозначения:

$$u_{mn\alpha}^{(1)} = k_m \left( \delta_{n\alpha} - \frac{k_n k_\alpha}{k^2} \right), \quad (2.24)$$

$$u_{mjn\alpha}^{(2)} = k_m k_j \left( \delta_{n\alpha} - \frac{k_n k_\alpha}{k^2} \right). \quad (2.25)$$

Учитывая, что магнитное поле является слабым, проинтегрируем (2.16) по углам в сферической системе координат. Поскольку все угловые переменные (2.16) содержатся в (2.24) и (2.25), то достаточно интегрировать по углам только компоненты этих тензоров. Пропуская простые математические вычисления, запишем окончательный ответ. Для (2.24), имеем

$$U_{mn\alpha}^{(1)} = \int do u_{mn\alpha}^{(1)} \equiv 0, \quad (2.26)$$

при любых  $m, n, \alpha$ , где  $do = \sin(\theta) d\phi d\theta$  – элемент телесного угла. Что же касается (2.25), то у этого тензора отличными от нуля будут компоненты:

$$\begin{aligned} U_{xxxx} &= \frac{8\pi k^4}{15}, \quad U_{yyyy} = \frac{8\pi k^4}{15}, \quad U_{zzzz} = \frac{16\pi k^4}{15}, \\ U_{xxyy} &= U_{yyxx} = \frac{16\pi k^4}{15}, \quad U_{xxzz} = U_{zzxx} = \frac{16\pi k^4}{15}, \quad U_{yyzz} = U_{zzyy} = \frac{16\pi k^4}{15}, \\ U_{xyyx} &= U_{yxxy} = U_{xyxy} = U_{yxyx} = -\frac{4\pi k^4}{15}, \quad U_{xzxx} = U_{zxzx} = U_{xzxz} = U_{zxzx} = -\frac{4\pi k^4}{15}, \\ U_{yzzy} &= U_{zyyz} = U_{yzyz} = U_{zyzy} = -\frac{4\pi k^4}{15}, \end{aligned} \quad (2.27)$$

где

$$U_{mjn\alpha}^{(2)} = U_{mjn\alpha} = \int d\omega_{mjn\alpha}^{(2)}.$$

Из формулы (2.26) следует, что в случае слабых магнитных полей, т.е. изотропного пространства, часть радиационной силы трения, связанная с конфигурационным движением электрона, не влияет на динамику спинового момента.

Используя теперь (2.23) и (2.27) и вводя безразмерную переменную  $x = \lambda_c k$ , где по-прежнему  $\lambda_c = \hbar / mc$  – комптоновская длина волны электрона, преобразуем (2.16) к виду

$$\mathbf{F}(t; \mathbf{s}(t)) = i \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \eta(\tau) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \left( e^{-if(x)\Omega\tau} \frac{1}{\hbar} [\mathbf{s}(t) \times \mathbf{s}(t_1)] - e^{if(x)\Omega\tau} \frac{1}{\hbar} [\mathbf{s}(t_1) \times \mathbf{s}(t)] \right), \quad (2.28)$$

где  $\alpha = e^2 / c\hbar$  – постоянная тонкой структуры,

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2}.$$

Для решения уравнения (2.14) с силой радиационного трения (2.28) необходимо вычислить произведение проекций синового момента, взятых в разные моменты времени, т.е.  $s_i(t)s_j(t_1)$  и  $s_j(t_1)s_i(t)$  для любых  $i$  и  $j$ . Фактически, точное вычисление этих произведений эквивалентно решению уравнения (2.14). Поскольку это решение неизвестно, воспользуемся следующим приближением.

Заметим, что сила радиационного трения (2.28) пропорциональна постоянной тонкой структуры. Это указывает на то, что в уравнении (2.14) ее можно считать возмущением. Данное обстоятельство делает возможным при вычислении произведений  $s_i(t)s_j(t_1)$  в (2.28) использовать приближение свободной прецессии. Согласно этому приближению:

$$s_i(t) = R_{ij}(\tau) s_j(t_1), \quad (2.29)$$

где

$$R_{ij}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0\tau) & \sin(\omega_0\tau) & 0 \\ -\sin(\omega_0\tau) & \cos(\omega_0\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\omega_0 = eB_0 / mc$  – частота спиновой прецессии.

Подставляя теперь (2.29) в (2.28), после элементарных преобразований, найдем

$$F_i(t; \mathbf{s}(t)) = s_0 \gamma_z \delta_{iz} - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{ij}(\tau) s_j(t_1), \quad (2.30)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $s_0 = \hbar / 2$ , а  $\gamma_{ij}(\tau)$  и  $\gamma_z$  представляют собой коэффициенты радиационного трения, учитывающие эффекты памяти в системе:



$$\gamma_{ij}(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(\tau) & \gamma_{xy}(\tau) & 0 \\ \gamma_{yx}(\tau) & \gamma_{yy}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{zz}(\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma_{xx}(\tau) = \gamma_{yy}(\tau) = \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) (1 + \cos(\omega_0 \tau)) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \cos(f(x) \Omega \tau), \quad (2.31)$$

$$\gamma_{xy}(\tau) = -\gamma_{yx}(\tau) = \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) \sin(\omega_0 \tau) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \cos(f(x) \Omega \tau), \quad (2.32)$$

$$\gamma_{zz}(\tau) = \frac{4\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \cos(f(x) \Omega \tau), \quad (2.33)$$

$$\gamma_z = \frac{4\alpha}{3\pi} \Omega^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \sin(\omega_0 \tau) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \sin(f(x) \Omega \tau). \quad (2.34)$$

В итоге стохастическое уравнение (2.14), описывающее броуновское движение и процесс радиационного трения спинового момента, приобретает вид

$$\frac{ds_i(t)}{dt} - \gamma_0 [\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = s_0 \gamma_z \delta_{iz} - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{ij}(\tau) s_j(t_1) + \xi_i(t), \quad (2.35)$$

где  $\xi_i(t)$  – флуктуационные источники (2.17).

Следует отметить, что уравнения, подобные (2.35), были впервые получены на основе метода нелинейных стохастических уравнений в работах [218, 220-221], для спинового момента электронов, взаимодействующих с электромагнитным окружением. Вообще же феноменологические уравнения релаксации спинового момента, учитывающие эффекты памяти, были предложены в работе [288], и в последствии получили микроскопическое обоснование [289]-[292] на основе формализма функции памяти.

На основе уравнения (2.35) и выражений для  $\xi_i(t)$  могут быть определены различные статистические характеристики рассматриваемой системы, в частности, спектр флуктуаций спиновых шумов. Не в меньшей степени представляет интерес определение среднего значения спинового момента электрона или, другими словами, вычисление отклика спиновой подсистемы на действие переменного магнитного поля. Решению этой задачи посвящен следующий параграф.

Определим в заключении к этому параграфу условия, при которых уравнения (2.35) применимо для описания рассматриваемой системы. Как упоминалось выше, коэффициенты радиационного трения  $\gamma_{ij}(\tau)$  и  $\gamma_z$  были получены в приближении изотропного пространства. Действие на систему внешнего магнитного поля делает его в общем случае анизотропным.

Поэтому возникает необходимость в условиях для значений магнитных полей, при которых будет справедливо данное приближение.

Эти условия могут быть определены из различных соотношений, связывающих напряженность магнитного поля и параметры системы. В частности, для этого могут быть использованы ее пространственные и временные масштабы. Действительно, если обозначить их как  $l$  и  $\tau$ , то значения магнитных полей, при которых пространство можно считать изотропным в данной модели, можно оценить из условий:

$$l \ll r_L, \quad \omega_0 \tau \ll 1, \quad (2.36)$$

где  $r_L$  и  $\omega_0$  – соответственно радиус ларморовской орбиты и частота спиновой прецессии электрона.

Заметим, что данная модель не имеет пространственных масштабов, за исключением комптоновской длины электрона  $\lambda_c = \hbar / mc$ . Что же касается ее временных параметров, то в качестве временного масштаба выберем частоту  $\Omega = mc^2 / \hbar$ , которую, как несложно видеть, содержат коэффициенты радиационного трения (2.31)-(2.34). Таким образом, из условий (2.36), найдем

$$\lambda_c \ll r_L, \quad \omega_0 \ll \Omega.$$

Данные соотношения являются приближенными в том смысле, что все же допускают сильные магнитные поля, порядка  $10^7 - 10^8$  Гс, при которых настоящая модель уже не работает. Это связано с тем, что в таких полях нарушается, во-первых, нерелятивистское приближение, лежащее в основе развиваемого подхода, а во-вторых, происходит дестабилизация вакуума, что в свою очередь приводит к нарушению одночастичного приближения, возникающего из-за спонтанного рождения в таких сильных полях электрон-позитронных пар. Другими словами, в данной модели допустимы такие значения магнитных полей, которые характерны для нерелятивистской физики.

## §2.3 Динамическая восприимчивость спиновой подсистемы

### 2.3.1 Динамическая восприимчивость

Следуя работе [262], определим на основе стохастического уравнения (2.39) динамическую восприимчивость спиновой подсистемы при воздействии на нее внешнего переменного магнитного поля:

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{x}_0 B_1 \cos(\omega t) + \mathbf{y}_0 B_1 \sin(\omega t) + \mathbf{z}_0 B_0 = \mathbf{B}_\perp(t) + \mathbf{z}_0 B_0, \quad (2.37)$$

где поперечная составляющая  $\mathbf{B}_\perp(t)$  может иметь как правую ( $\omega < 0$ ), так и левую ( $\omega > 0$ ) круговые поляризации. Что касается значений частоты магнитного поля (2.37), то будем считать, что  $\omega/\Omega < 1$ , где  $\Omega = mc^2/\hbar \sim 10^{20}$  рад·с<sup>-1</sup>.

Следует отметить, что данная задача интересна прежде всего тем, что позволяет на основе выражения для динамической восприимчивости исследовать немарковские особенности формы линии поглощения спиновой подсистемы, некоторые свойства которой рассматривались с позиций разных методов, например, в работах [153-154, 289], [293]-[306].

Согласно определению, сформулированному в §1.4, динамическая восприимчивость определяет отклик системы на внешнее гармоническое возмущение, и связывает между собой значение переменной системы с внешней периодической силой. В случае спинового момента электрона и магнитного поля (2.37) динамическая восприимчивость представляет собой квадратную матрицу, связывающую между собой проекции  $s_x(t)$ ,  $s_y(t)$  и компоненты перпендикулярной составляющей магнитного поля  $\mathbf{B}_\perp(t)$ :

$$\begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = \hat{\chi}(\omega) B_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{11}(\omega) & \chi_{12}(\omega) \\ \chi_{21}(\omega) & \chi_{22}(\omega) \end{pmatrix} B_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

где  $\hat{\chi}(\omega)$  есть искомая динамическая восприимчивость, которую удобно представить в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой частей:

$$\hat{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega), \quad (2.39)$$

где

$$\chi'(\omega) = \chi_{ij}^{(e)}(\omega) = \frac{1}{2}(\chi_{ij}(\omega) + \chi_{ji}(\omega)), \quad (2.40)$$

$$\chi''(\omega) = \chi_{ij}^{(ae)}(\omega) = \frac{1}{2}(\chi_{ij}(\omega) - \chi_{ji}(\omega)). \quad (2.41)$$

Рассмотрев кратко определение спиновой электронной восприимчивости  $\hat{\chi}(\omega)$ , перейдем теперь к вычислению этой характеристики.

Усредняя уравнение (2.35) по равновесному состоянию электромагнитного окружения, т.е. по состоянию электромагнитного вакуума, получим систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{ds_z}{dt} = \omega_1(s_x(t) \cos(\omega t) - s_y(t) \sin(\omega t)) + F_z(t), \\ \frac{ds_x}{dt} - \omega_0 s_y(t) = -\omega_1 s_z(t) \sin(\omega t) + F_x(t), \\ \frac{ds_y}{dt} + \omega_0 s_x(t) = \omega_1 s_z(t) \cos(\omega t) + F_y(t), \end{cases} \quad (2.42)$$

где  $\omega_0 = \gamma_0 B_0$ ,  $\omega_1 = \gamma_0 B_1$ , а  $F_i(t)$  – представляют собой компоненты силы радиационного трения (2.30). Для сокращения обозначений предполагаем, что  $s_i(t) \equiv \langle s_i(t) \rangle$  ( $i = x, y, z$ ).

Перейдем от  $s_{x,y}(t)$  к операторам:

$$s_{\pm}(t) = s_x(t) \pm i s_y(t). \quad (2.43)$$

Тогда система (2.42) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \frac{ds_{\pm}}{dt} = i \frac{\omega_1}{2} (s_+(t) e^{-i\omega t} - s_-(t) e^{i\omega t}) + F_{\pm}(t), \\ \frac{ds_+}{dt} + i\omega_0 s_+(t) = i\omega_1 s_z(t) e^{i\omega t} + F_+(t), \\ \frac{ds_-}{dt} - i\omega_0 s_-(t) = -i\omega_1 s_z(t) e^{-i\omega t} + F_-(t), \end{cases} \quad (2.44)$$

где

$$F_{\pm}(t) = F_x(t) \pm i F_y(t).$$

Произведем в (2.44) замену переменных:

$$s_+(t) = u(t) e^{+i\omega t}, \quad s_-(t) = v(t) e^{-i\omega t}. \quad (2.45)$$

С физической точки зрения формулы (2.45) определяют переход к новой системе координат, в которой, как будет показано дальше, сохраняется проекция  $s_z$ , т.е.  $ds_z / dt = 0$ .

Подставляя (2.45) в (2.44), найдем

$$\begin{cases} \frac{ds_z}{dt} = i \frac{\omega_1}{2} (u(t) - v(t)) + F_z(t), \\ \frac{du}{dt} + i\Delta\omega u(t) = i\omega_1 s_z(t) + \tilde{F}_+(t), \\ \frac{dv}{dt} - i\Delta\omega v(t) = -i\omega_1 s_z(t) + \tilde{F}_-(t), \end{cases} \quad (2.46)$$

где  $\Delta\omega = \omega + \omega_0$ ,

$$F_z(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{zz}(\tau) s_z(t_1) + s_0 \gamma_z, \quad \tilde{F}_{\pm}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) \begin{pmatrix} u(t_1) \\ v(t_1) \end{pmatrix},$$

$\gamma_{zz}(\tau)$  и  $\gamma_z$  определяются формулами (2.33) и (2.34),

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) = \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) e^{\mp i\omega\tau} (1 + e^{\mp i\omega_0\tau}) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \cos(f(x)\Omega\tau). \quad (2.47)$$

Для решения системы интегро-дифференциальных уравнений (2.46) перейдем в частотную область, вычисляя от правых и левых частей ее уравнений преобразование Фурье. Принимая во внимание, что  $\gamma_4$  является константой, получим алгебраическую систему уравнений относительно  $s_z(\tilde{\omega})$ ,  $u(\tilde{\omega})$  и  $v(\tilde{\omega})$ :

$$\begin{cases} -i\omega_1 u(\tilde{\omega}) + i\omega_1 v(\tilde{\omega}) + 2(-i\tilde{\omega} + \gamma_{zz}(\tilde{\omega}))s_z(\tilde{\omega}) = 4\pi s_0 \gamma_z \delta(\tilde{\omega}), \\ (-i\tilde{\omega} + i\Delta\omega + \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}))u(\tilde{\omega}) - i\omega_1 s_z(\tilde{\omega}) = 0, \\ (-i\tilde{\omega} - i\Delta\omega + \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega}))v(\tilde{\omega}) + i\omega_1 s_z(\tilde{\omega}) = 0, \end{cases}$$

имеющую решение:

$$u(\tilde{\omega}) = \frac{\Delta_u(\tilde{\omega})}{\Delta(\tilde{\omega})}, \quad v(\tilde{\omega}) = \frac{\Delta_v(\tilde{\omega})}{\Delta(\tilde{\omega})}, \quad s_z(\tilde{\omega}) = \frac{\Delta_{s_z}(\tilde{\omega})}{\Delta(\tilde{\omega})},$$

где

$$\begin{aligned} \Delta(\tilde{\omega}) = & (-i\tilde{\omega} + \gamma_{zz}(\tilde{\omega}))[(\Delta\omega^2 - \tilde{\omega}^2) - i\tilde{\omega}(\tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}) + \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})) + i\Delta\omega(\tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega}) - \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega})) + \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega})\tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})] + \\ & + \frac{\omega_1^2}{2}[-2i\tilde{\omega} + \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}) + \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})], \end{aligned}$$

$$\Delta_u(\tilde{\omega}) = 2\pi\omega_1 s_0 \gamma_z \delta(\tilde{\omega})(\tilde{\omega} + \Delta\omega + i\tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})),$$

$$\Delta_v(\tilde{\omega}) = -2\pi\omega_1 s_0 \gamma_z \delta(\tilde{\omega})(\tilde{\omega} - \Delta\omega + i\tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega})),$$

$$\Delta_{s_z}(\tilde{\omega}) = 2\pi s_0 \gamma_z \delta(\tilde{\omega})[(\Delta\omega^2 - \tilde{\omega}^2) + i\tilde{\omega}(\tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}) + \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})) + i\Delta\omega(\tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega}) - \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega})) + \tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega})\tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})],$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{\pm}(\tilde{\omega}) \\ \gamma_{zz}(\tilde{\omega}) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) \\ \gamma_{zz}(\tau) \end{pmatrix} e^{i\tilde{\omega}\tau}.$$

Заметим, что  $s_z(\tilde{\omega})$ ,  $u(\tilde{\omega})$  и  $v(\tilde{\omega})$  пропорциональны  $\delta$ -функции. Поэтому используя ее выкалывающее свойство, представим  $s_z(\tilde{\omega})$ ,  $u(\tilde{\omega})$  и  $v(\tilde{\omega})$  в виде

$$u(\tilde{\omega}) = 2\pi\delta(\tilde{\omega}) \frac{\tilde{\Delta}_u(0)}{\Delta(0)}, \quad v(\tilde{\omega}) = 2\pi\delta(\tilde{\omega}) \frac{\tilde{\Delta}_v(0)}{\Delta(0)}, \quad s_z(\tilde{\omega}) = 2\pi\delta(\tilde{\omega}) \frac{\tilde{\Delta}_{s_z}(0)}{\Delta(0)}, \quad (2.48)$$

где

$$\Delta(0) = \gamma_{zz}(0)[\Delta\omega^2 + i\Delta\omega(\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)) + \tilde{\gamma}_+(0)\tilde{\gamma}_-(0)] + \frac{\omega_1^2}{2}(\tilde{\gamma}_+(0) + \tilde{\gamma}_-(0)),$$

$$\tilde{\Delta}_u(0) = \omega_1 s_0 \gamma_z (\Delta\omega + i\tilde{\gamma}_-(0)), \quad (2.49)$$

$$\tilde{\Delta}_v(0) = \omega_1 s_0 \gamma_z (\Delta\omega - i\tilde{\gamma}_+(0)), \quad (2.50)$$

$$\tilde{\Delta}_{s_z}(0) = s_0 \gamma_z [\Delta \omega^2 + i \Delta \omega (\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)) + \tilde{\gamma}_+(0) \tilde{\gamma}_-(0)]. \quad (2.51)$$

Вычисляя от (2.48) обратное преобразование Фурье и используя (2.45), найдем

$$s_+(t) = \frac{\tilde{\Delta}_u(0)}{\Delta(0)} e^{+i\omega t}, \quad s_-(t) = \frac{\tilde{\Delta}_v(0)}{\Delta(0)} e^{-i\omega t}, \quad (2.52)$$

$$s_z(t) = \frac{\tilde{\Delta}_{s_z}(0)}{\Delta(0)} = \text{const}. \quad (2.53)$$

Вспоминая теперь определение  $s_+(t)$  и  $s_-(t)$  из (2.43), получим

$$s_x(t) = \frac{s_+(t) + s_-(t)}{2} = \frac{1}{2\Delta(0)} (\tilde{\Delta}_u(0) e^{+i\omega t} + \tilde{\Delta}_v(0) e^{-i\omega t}), \quad (2.54)$$

$$s_y(t) = \frac{s_+(t) - s_-(t)}{2i} = \frac{1}{2i\Delta(0)} (\tilde{\Delta}_u(0) e^{+i\omega t} - \tilde{\Delta}_v(0) e^{-i\omega t}). \quad (2.55)$$

Подставляя (2.49)-(2.50) в (2.54)-(2.55) и выполняя элементарные преобразования, найдем

$$s_x(t) = \frac{\omega_1 s_0 \gamma_z}{2\Delta(0)} \left( 2 \left( \Delta \omega + \frac{i}{2} (\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)) \right) \cos(\omega t) - (\tilde{\gamma}_-(0) + \tilde{\gamma}_+(0)) \sin(\omega t) \right), \quad (2.56)$$

$$s_y(t) = \frac{\omega_1 s_0 \gamma_z}{2\Delta(0)} \left( (\tilde{\gamma}_-(0) + \tilde{\gamma}_+(0)) \cos(\omega t) + 2 \left( \Delta \omega + \frac{i}{2} (\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)) \right) \sin(\omega t) \right). \quad (2.57)$$

Введем обозначения:

$$\Delta \omega_2 = \Delta \omega + \frac{i}{2} (\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)), \quad (2.58)$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2} (\tilde{\gamma}_+(0) + \tilde{\gamma}_-(0)), \quad \frac{1}{T_2} = \gamma_{zz}(0). \quad (2.59)$$

Используя (2.58)-(2.59) несложно показать, что

$$\Delta(0) = \frac{1}{T_1^2 T_2} [1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2], \quad (2.60)$$

$$\tilde{\Delta}_{s_z}(0) = s_0 \gamma_z T_1^2 [1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2]. \quad (2.61)$$

Подставляя теперь (2.58)-(2.61) в (2.53) и (2.56)-(2.57), окончательно найдем

$$\begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{pmatrix} = s_0 \begin{pmatrix} A & -B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

где

$$A = \beta \omega_1 T_1 \frac{\Delta \omega_2 T_1}{1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad B = \beta \omega_1 T_1 \frac{1}{1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad (2.63)$$

$$C = \beta \frac{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2},$$

$$\beta = \gamma_z T_2 = \frac{\gamma_z}{\gamma_{zz}(0)}.$$

Определим теперь, используя (2.62)-(2.63), динамическую восприимчивость спиновой подсистемы.

Сравнивая (2.62) и (2.38) и учитывая, что  $A$  и  $B$ , согласно (2.63), пропорциональны амплитуде переменной компоненты магнитного поля, найдем

$$\begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = B_1(\chi'(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\chi''(\omega) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

где

$$\chi'(\omega) = \chi_0 \omega_0 T_1 \frac{\Delta\omega_2 T_1}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad \chi''(\omega) = \chi_0 \omega_0 T_1 \frac{1}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad (2.65)$$

$$\chi_0 = \beta s_0 / B_0.$$

Сопоставляя теперь  $\chi'(\omega)$  и  $\chi''(\omega)$  из (2.65) с выражениями для действительной и мнимой части восприимчивости, следующими из решений феноменологических уравнений Блоха (2.1) (см. например, [46], [48]), найдем, что  $T_2$  и  $T_1$  представляют собой не что иное, как продольное и поперечное времена релаксации спинового момента. Введем для них обозначения:

$$T_1 = T_{\text{н}}, \quad T_2 = T_l.$$

Согласно (2.59), они определяются коэффициентами радиационного трения и имеют вид

$$\frac{1}{T_{\text{т}}} = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_+(0) + \tilde{\gamma}_-(0)), \quad (2.66)$$

$$\frac{1}{T_l} = \gamma_{zz}(0). \quad (2.67)$$

Отметим здесь, что если спиновая подсистема представляет собой идеальный газ двухуровневых атомов, спиновые моменты которых совершают синфазные колебания в периодическом магнитном поле, то при включении взаимодействия с электромагнитным окружением время  $T_l$  определяет скорость передачи энергии между подсистемами, а  $T_{\text{т}}$  характеризует время расфазировки указанных колебаний [45].

Как показали вычисления, динамическая восприимчивость, а также времена релаксации зависят от коэффициентов радиационного трения. Поэтому прежде чем перейти к исследованию полученных соотношений произведем вычисление частотной зависимости указанных коэффициентов.

### 2.3.2 Вычисление частотной зависимости коэффициентов радиационного трения

Рассмотрим сначала  $\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau)$ . Для вычисления  $\tilde{\gamma}_{\pm}(\tilde{\omega})$  воспользуемся формулой, определяющей преобразование Фурье от функции Хевисайда (1.32). Для этого представим (2.47) в виде

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) = \frac{\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) (1 + e^{\mp i\omega_0 \tau}) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) (e^{i(\mp\omega + f(x)\Omega)\tau} + e^{i(\mp\omega - f(x)\Omega)\tau}). \quad (2.68)$$

После преобразования Фурье от (2.68), найдем

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} = \tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(\tilde{\omega}) + i\tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(\tilde{\omega}),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha}{3} \Omega \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) [\delta(x^2 + 2x + p_1) + \delta(x^2 + 2x - p_1) + \\ + \delta(x^2 + 2x + p_2) + \delta(x^2 + 2x - p_2)], \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \left( \frac{1}{x^2 + 2x + p_1} - \frac{1}{x^2 + 2x - p_1} + \frac{1}{x^2 + 2x + p_2} - \frac{1}{x^2 + 2x - p_2} \right), \quad (2.70) \\ p_1 = 2 \frac{\tilde{\omega} \mp \omega}{\Omega}, \quad p_2 = 2 \frac{\tilde{\omega} \mp \Delta\omega}{\Omega}. \end{aligned}$$

Интеграл в (2.70) понимается в смысле главного значения.

Определим в первую очередь (2.69). Для этого воспользуемся одним из свойств  $\delta$ -функции. Если  $\varphi(x)$  есть некоторая функция аргумента  $x$ , обладающая точками  $x_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ), являющимися решениями уравнения  $\varphi(x_i) = 0$ , то имеет место соотношение

$$\delta(\varphi(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|\varphi'(x)|_{x=x_i}}. \quad (2.71)$$

Принимая также во внимание выкалывающее свойство  $\delta$ -функции:

$$\int_a^b dx f(x) \delta(x - x_i) = \begin{cases} f(x_i), & x_i \in [a, b], \\ 0, & x_i \notin [a, b], \end{cases}$$

и то, что  $\omega$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, из (2.69), найдем

$$\tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \frac{x_1^3}{1 + x_1} \cos(\rho x_1) + \frac{x_2^3}{1 + x_2} \cos(\rho x_2) \right), \quad (2.72)$$



где

$$x_{1,2} = -1 + \sqrt{1 + |p_{1,2}|}. \quad (2.73)$$

Характерная особенность соотношения (2.73) заключается в том, что оно не зависит от знака параметров  $p_{1,2}$ , поскольку  $\tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(\tilde{\omega})$  (см. (2.69)) является четной функцией от  $p_{1,2}$ . Поэтому в формуле (2.73) эти параметры входят по абсолютной величине.

Подставляя (2.73) в (2.72) и учитывая, что по условию задачи  $p_{1,2} < 1$ , представим (2.72) в виде ряда по  $p_{1,2}$ , ограничиваясь их минимальной степенью. Тогда

$$\tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\tilde{\omega} \mp \omega}{\Omega} \right|^3 \cos \left( \rho \frac{\tilde{\omega} \mp \omega}{\Omega} \right) + \left| \frac{\tilde{\omega} \mp \Delta \omega}{\Omega} \right|^3 \cos \left( \rho \frac{\tilde{\omega} \mp \Delta \omega}{\Omega} \right) \right).$$

Вычислим теперь (2.70). После несложных преобразований, имеем

$$\tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{4\alpha}{3\pi} \Omega \left[ p_1 \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3 \cos(\rho x)}{(x^2 + 2x)^2 - p_1^2} + p_2 \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3 \cos(\rho x)}{(x^2 + 2x)^2 - p_2^2} \right]. \quad (2.74)$$

Поскольку  $p_{1,2} < 1$ , представим (2.74) в виде ряда по  $p_{1,2}$ , ограничившись линейными слагаемыми. Тогда

$$\tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho) [2(\tilde{\omega} \mp \omega) \mp \omega_0],$$

где

$$J(\rho) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \cos(\rho x)}{(2+x)^2}. \quad (2.75)$$

Рассмотрим теперь  $\gamma_{zz}(\tau)$ . Представим (2.33) в виде

$$\gamma_{zz}(\tau) = \frac{\alpha}{3\pi} \Omega^2 \eta(\tau) \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) (e^{i(a_0 + f(x)\Omega)\tau} + e^{i(a_0 - f(x)\Omega)\tau} + e^{i(-a_0 + f(x)\Omega)\tau} + e^{i(-a_0 - f(x)\Omega)\tau}). \quad (2.76)$$

Вычисляя аналогично (2.68) преобразование Фурье от (2.76), имеем

$$\gamma_{zz}(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} = \gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) + i\gamma_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}),$$

где

$$\gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha}{3} \Omega \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) [\delta(x^2 + 2x + p_+) + \delta(x^2 + 2x - p_+) + \delta(x^2 + 2x + p_-) + \delta(x^2 + 2x - p_-)], \quad (2.77)$$

$$\gamma_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha}{3\pi} \Omega \int_0^{+\infty} dx x^3 \cos(\rho x) \left( \frac{1}{x^2 + 2x + p_+} - \frac{1}{x^2 + 2x - p_+} + \frac{1}{x^2 + 2x + p_-} - \frac{1}{x^2 + 2x - p_-} \right), \quad (2.78)$$

$$p_+ = 2 \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega}, \quad p_- = 2 \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega}.$$

Интегрируя (2.77), найдем

$$\gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \frac{x_3^3}{1+x_3} \cos(\rho x_3) + \frac{x_4^3}{1+x_4} \cos(\rho x_4) \right), \quad (2.79)$$

где

$$x_{3,4} = -1 + \sqrt{1 + |p_{\pm}|}.$$

Поскольку  $p_{\pm} < 1$ , представим (2.79) в виде ряда по  $p_{\pm}$ , ограничившись их минимальной степенью. Тогда

$$\gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega}\right) + \left| \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega}\right) \right).$$

Рассмотрим теперь (2.78). Перепишем эту формулу в виде

$$\tilde{\gamma}_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{4\alpha}{3\pi} \Omega \left[ p_+ \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3 \cos(\rho x)}{(x^2 + 2x)^2 - p_+^2} + p_- \int_0^{+\infty} dx \frac{x^3 \cos(\rho x)}{(x^2 + 2x)^2 - p_-^2} \right]. \quad (2.80)$$

Раскладывая подынтегральные функции в (2.80) в ряд по  $p_{\pm}$  и оставляя линейные слагаемые, получим

$$\tilde{\gamma}_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{16\alpha}{3\pi} J(\rho) \tilde{\omega},$$

где по-прежнему  $J(\rho)$  определяется (2.75).

Вычисляя аналогичным образом константу  $\gamma_z$ , найдем

$$\gamma_z = \gamma_z^{(1)} = \frac{2\alpha}{3} \Omega \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^3 \cos\left(\rho \frac{\omega_0}{\Omega}\right).$$

Выпишем теперь основные формулы, определенные в этом разделе, предварительно устремив в них  $\tilde{\omega}$  к нулю:

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(0) = \tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(0) + i \tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(0), \quad (2.81)$$

$$\gamma_{zz}(0) = \gamma_{zz}^{(1)}(0) + i \gamma_{zz}^{(2)}(0), \quad (2.82)$$

где

$$\tilde{\gamma}_{+}^{(1)}(0) = \tilde{\gamma}_{-}^{(1)}(0) = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\omega}{\Omega}\right) + \left| \frac{\omega + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\omega + \omega_0}{\Omega}\right) \right), \quad (2.83)$$

$$\tilde{\gamma}_{+}^{(2)}(0) = -\tilde{\gamma}_{-}^{(2)}(0) = \frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho) (2\omega + \omega_0), \quad (2.84)$$

$$\gamma_{zz}^{(1)}(0) = \frac{2\alpha}{3} \Omega \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^3 \cos \left( \rho \frac{\omega_0}{\Omega} \right), \quad \tilde{\gamma}_{zz}^{(2)}(0) = 0, \quad (2.85)$$

$$\gamma_z = \gamma_z^{(1)} = \gamma_{zz}^{(1)}(0), \quad J(\rho) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \cos(\rho x)}{(2+x)^2}. \quad (2.86)$$

### 2.3.3 Анализ и обсуждение полученных результатов

Исследуем теперь более детально полученные выше соотношения.

Рассмотрим сначала продольное и поперечное времена релаксации, определяющиеся формулами (2.66)-(2.67). Подставляя (2.81)-(2.82) в (2.66)-(2.67), найдем

$$\frac{1}{T_{tr}(\omega)} = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|^3 \cos \left( \rho \frac{\omega}{\Omega} \right) + \left| \frac{\omega + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos \left( \rho \frac{\omega + \omega_0}{\Omega} \right) \right), \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{T_l} = \frac{2\alpha}{3} \Omega \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^3 \cos \left( \rho \frac{\omega_0}{\Omega} \right). \quad (2.88)$$

Учитывая, что в данной модели отношения  $\omega/\Omega < 1$  и  $\omega_0/\Omega \ll 1$ , соотношения (2.87) и (2.88) можно переписать в виде

$$\frac{1}{T_{tr}(\omega)} = \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|^3 + \left| \frac{\omega + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \right), \quad (2.89)$$

$$\frac{1}{T_l} = \frac{2\alpha}{3} \Omega \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^3. \quad (2.90)$$

В первую очередь заметим, что поперечное время релаксации, в отличие от  $T_l$ , имеет определенную зависимость от частоты внешнего магнитного поля. Данная особенность является одним из проявлений немарковского характера взаимодействия, и ее можно рассматривать как эффект дисперсии времени релаксации.

Построим график зависимости  $T_{tr}$  от частоты  $\omega$ . Для этого перейдем в (2.89) к безразмерной переменной  $y = \omega/\omega_0$ . Тогда

$$\frac{T_{tr}(y)}{T_l} = \frac{2}{|y|^3 + |1+y|^3}, \quad (2.91)$$

где  $T_l$  – продольное время релаксации (2.89).

График зависимости функции (2.91) от  $y$  представлен на Рис. 2.1.

Согласно Рис. 2.1, частотная зависимость  $T_{tr}$  имеет ряд особенностей. В первую очередь стоит отметить, что при определенных частотах ( $y = -0.5$ ) время релаксации имеет

максимальное значение, что свидетельствует резонансной зависимости  $T_{tr}$  от частоты. Кроме этого, Рис. 2.1 показывает различное поведение  $T_{tr}$  для правой и левой круговых поляризации магнитного поля, т.е. асимметрию между правым и левым.

Для левой поляризации ( $y > 0$ ) с ростом частоты время релаксации уменьшается. В случае же правой круговой поляризации ( $y < 0$ ) сначала происходит увеличение  $T_{tr}$ , достигающего максимального значения на частоте  $y = -0.5$ , и лишь потом, с дальнейшим ростом частоты, возникает его уменьшение. Таким образом, имеется существенное различие в свойствах спиновой подсистемы при действии на нее внешнего магнитного поля с правой и левой круговой поляризацией, что можно рассматривать как своего рода оптическую активность этой системы.

Эффект спиновой оптической активности играет большую роль в физике конденсированного состояния [15, 24], и часто используется при исследовании спин-зависимого электронного транспорта [10-11, 13-14, 307]. В частности, в эксперименте для этого применяется метод «накачка-зондирование» [15, 24], индуцирующий этот эффект через создание неравновесной спиновой поляризации в образце, посредством воздействия на него внешнего электромагнитного поля (радиационный канал спиновой релаксации [24]). Это приводит к различию параметров резонанса для право- и левосторонне поляризованного излучения, благодаря чему формируются, например, спиновые сигналы фарадеевского и керровского вращения [24].

Наличие указанных особенностей поперечного времени релаксации определенным образом влияет на частотную зависимость динамической восприимчивости.

Для того чтобы определить, к каким следствиям приводят эти особенности, рассмотрим действительную и мнимую части динамической восприимчивости.

Переходя к безразмерным переменным:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = y, \quad \frac{\omega_1}{\omega_0} = \frac{B_1}{B_0} = d\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2T_1\omega_0} = \frac{\alpha}{3} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2 = \varepsilon,$$

и предполагая в данном разделе, что  $\Delta\omega_2 \approx \Delta\omega = \omega + \omega_0$ , преобразуем (2.65) к виду

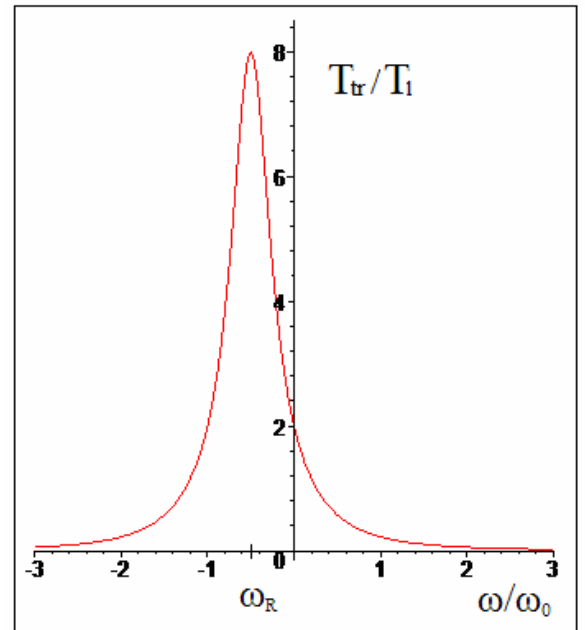


Рис. 2.1: Зависимость нормированного поперечного времени релаксации от отношения частот  $\omega/\omega_0$ .

$$\frac{\chi'(y)}{\chi_0} = \frac{1+y}{(1+y)^2 + d^2 f(y) + \varepsilon f^2(y)}, \quad (2.92)$$

$$\frac{\chi''(y)}{\chi_0''} = \frac{f(y)}{(1+y)^2 + d^2 f(y) + \varepsilon f^2(y)}, \quad (2.93)$$

где

$$f(y) = |y|^3 + |1+y|^3,$$

$$\chi_0'' = \chi_0 \varepsilon.$$

Отметим, во-первых, что  $\varepsilon$  всегда много меньше единицы. Например, для частоты прецессии  $\omega_0 \sim 10^{11}$  рад·с<sup>-1</sup>, что соответствует магнитному полю  $B_0 \sim 10^4$  Гс, этот параметр имеет порядок  $\varepsilon \sim 10^{-23}$ . В то же время  $d$  может быть как больше, так и меньше единицы.

Графики зависимости функций  $\chi'/\chi_0$  и  $\chi''/\chi_0''$  от отношения частот  $\omega/\omega_0 = y$  при различных значениях параметра  $d$  представлены на Рис. 2.2-2.4.

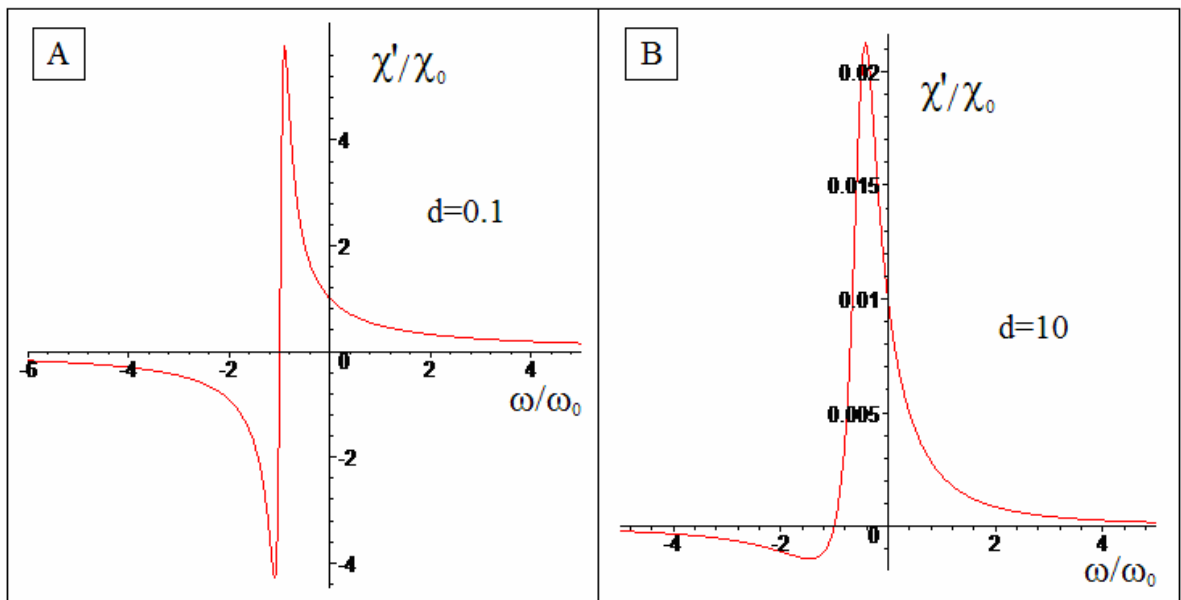


Рис. 2.2: Зависимость действительной части динамической восприимчивости  $\chi'$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при различных значениях параметра  $d$ .

Рассмотрим сначала действительную часть динамической восприимчивости, определяющую дисперсию в рассматриваемой системе. При  $d \ll 1$  форма  $\chi'(y)$  (Рис. 2.2(A)) практически совпадает с видом дисперсионной характеристики, следующей из решения уравнений Блоха. Но уже при  $d \sim 1$  и  $d > 1$  (Рис. 2.2(B)) возникает асимметрия  $\chi'(y)$ . Этот эффект является одним из следствий частотной зависимости поперечного времени релаксации. Как известно, дисперсия в системе может быть связана с наличием в ней некоторых временных масштабов. В данной модели такими масштабами являются продольное и поперечное времена

релаксации. Поскольку при  $y < 0$  происходит резкое возрастание значений  $T_{tr}$ , т.е. одного из временных масштабов, то это в свою очередь вызывает определенные изменения дисперсионной характеристики подсистемы, что как раз и демонстрирует Рис. 2.2(B).

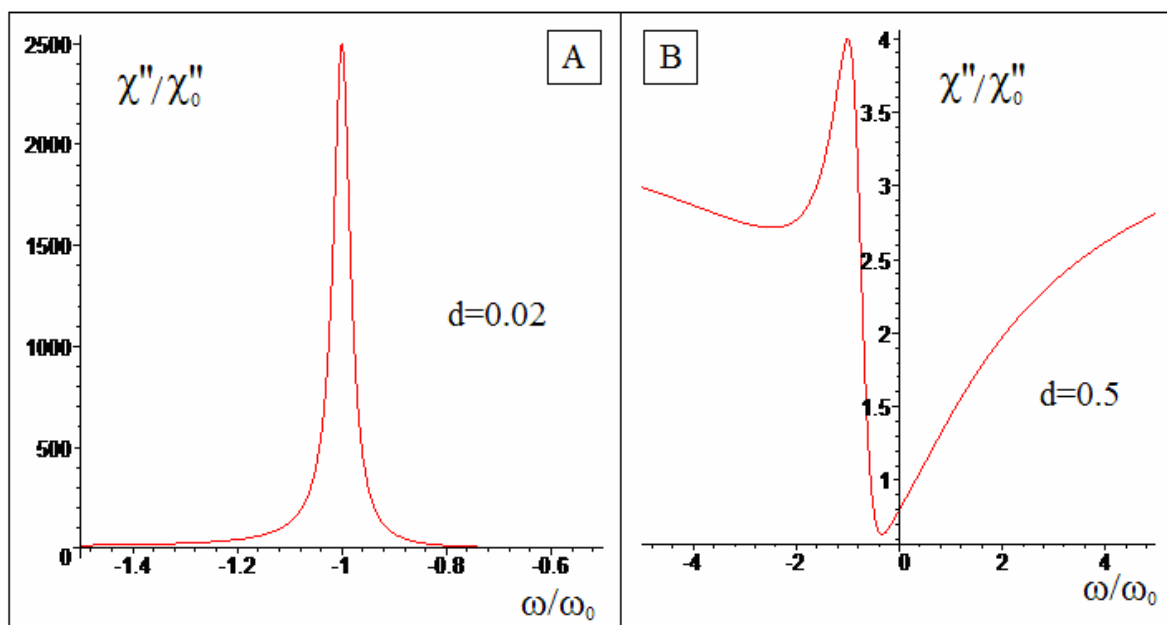


Рис. 2.3: Зависимость мнимой части динамической восприимчивости  $\chi''$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при  $\varepsilon = 10^{-5}$  и различных значениях параметра  $d$ .

Рассмотрим теперь мнимую часть динамической восприимчивости, определяющую форму линии поглощения. Графики  $\chi''(y)$  при различных значениях параметра  $d$  представлены на Рис. 2.3-2.4. При  $d \ll 1$  (Рис. 2.3(A)) в области  $y \sim -1$  форма линии поглощения практически является лоренцевой, следующей из решений уравнений Блоха. При  $d \sim 1$  и  $d > 1$  (Рис. 2.3(B)-2.4(A)) система приобретает новые свойства. Как и в теории Блоха, в  $\chi''(y)$  существует максимум на частоте  $y = -1$ . Но наряду с этим резонансом присутствует более сильный эффект, проявляющийся в резком уменьшении поглощения энергии, который достигает максимального значения при частоте, близкой к  $y = -0.5$ , и связан с резким увеличением  $T_{tr}$  при  $y < 0$ . Другими словами, эффект дисперсии времени релаксации при определенных частотах делает спиновую подсистему квазипрозрачной.

Кроме указанных свойств существует еще одна особенность  $\chi''(y)$ , непосредственно связанная с параметром  $\varepsilon$ , и заключающаяся в возникновении двух дополнительных симметричных максимумов в  $\chi''(y)$  при высоких частотах (Рис. 2.4(B)). Это видно из формулы (2.93). Действительно, пусть  $d > 1$ . Тогда уже при  $|y| > 1$  второе слагаемое в знаменателе (2.93),

т.е.  $d^2 f(y)$ , начинает превосходить  $(1+y)^2$  и  $\varepsilon f^2(y)$ , которые в некоторый момент, когда  $(1+y_*)^2 \ll d^2 f(y_*)$  и  $\varepsilon f^2(y_*) \ll d^2 f(y_*)$  становятся несущественными.

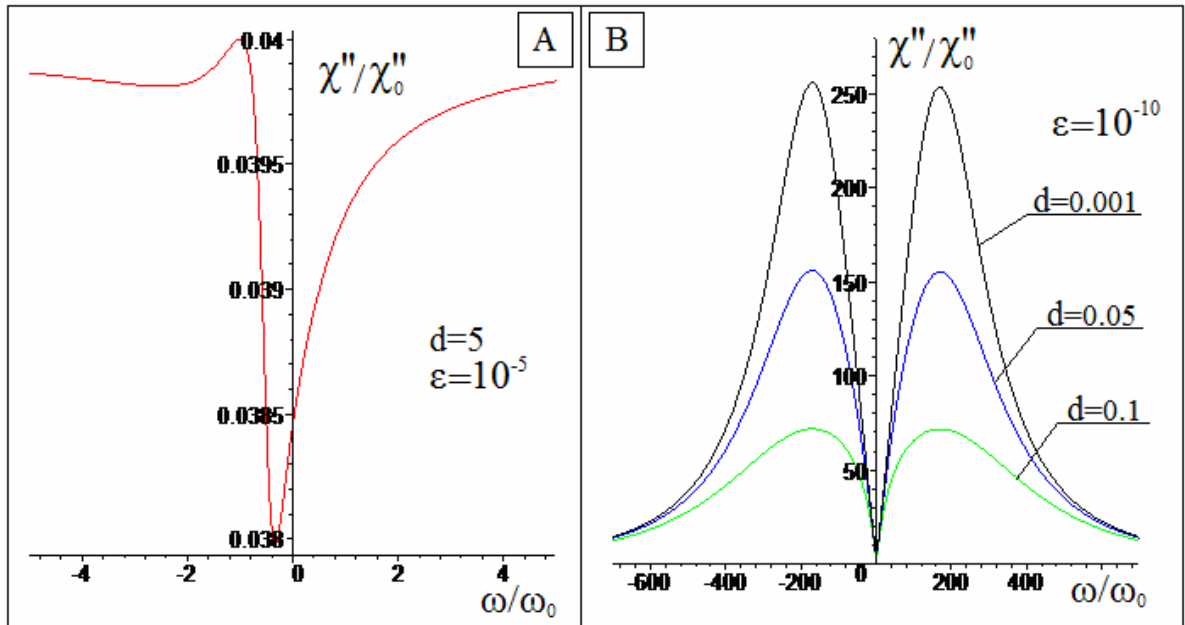


Рис. 2.4: Зависимость нормированной мнимой части динамической восприимчивости от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при различных значениях параметра  $d$ .

В этот момент и появляются два дополнительных максимальных значения в  $\chi''(y)$ , возникающее вследствие того, что числитель и знаменатель (2.93) становятся одного порядка. Далее при  $|y| > y_*$  все большую роль начинает играть последнее слагаемое, т.е.  $\varepsilon f^2(y)$ , которое при  $|y| \gg y_*$  приводит к уменьшению значений  $\chi''(y)$ . Из выражения (2.93) легко оценить значения частот, при которых задействуется слагаемое, пропорциональное  $\varepsilon$ . Это происходит, когда второе и третье слагаемые становятся одинакового порядка. Из этого условия несложно найти, что это происходит, когда  $y \sim \sqrt[3]{d^2/\varepsilon}$ . При  $y > \sqrt[3]{d^2/\varepsilon}$  слагаемое  $\varepsilon f^2(y)$  начинает превосходить  $d^2 f(y)$ , поэтому на этом участке частот наблюдается заметное уменьшение  $\chi''(y)$ .

Определим зависимость двух дополнительных резонансных частот от параметров  $d$  и  $\varepsilon$ . Для этого заметим, что поскольку эти экстремумы находятся в области  $|y| \gg 1$ , то можно считать, что

$$f(y) \approx 2y^3. \quad (2.94)$$

Тогда, подставляя (2.94) в (2.93) и приравнявая производную от  $\chi''(y)$  к нулю, найдем

$$y_R = \pm \frac{1}{(12\varepsilon)^{1/4}}. \quad (2.95)$$

Таким образом, дополнительные резонансные частоты не зависят от параметра  $d$ .

Оценим их значения. Например, для частоты  $\omega_0 \sim 10^{11}$  рад·с<sup>-1</sup>, т.е. когда  $\varepsilon \sim 10^{-23}$ , получим  $y_R \approx \pm 3 \cdot 10^5$  или  $\omega_R \approx \pm 9.5 \cdot 10^{16}$  рад·с<sup>-1</sup>.

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение  $\chi'(y)$  и  $\chi''(y)$  при  $y \gg y_R$ . Используя (2.92)-(2.93), несложно показать, что

$$\frac{\chi'(y)}{\chi_0} \sim \frac{1}{\varepsilon y^5}, \quad \frac{\chi''(y)}{\chi_0''} \sim \frac{1}{\varepsilon |y|^3}.$$

Характерная особенность полученной асимптотики заключается в ее кардинальном отличии от марковского случая, в котором, как известно [46],  $\chi'(y) \sim 1/y$  и  $\chi''(y) \sim 1/y^2$ . В этом также заключается одно из проявлений немарковского характера взаимодействия.

## §2.4 Уравнения релаксации спинового момента в марковском случае

Рассмотренные свойства спиновой подсистемы, связанные с эффектом памяти, полностью описываются интегро-дифференциальным уравнением (2.35). В общем случае его решение возможно только численными методами. Поэтому представляет интерес рассмотреть марковский предельный случай, заключающийся в переходе от (2.35) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Как известно, в марковском случае процесс релаксации спинового момента описывается уравнениями Блоха (2.1). Таким образом, задача заключается в получении из (2.35) уравнений, аналогичных (2.1) и определении к этим уравнениям немарковских поправок, связанных с эффектом памяти. Это можно сделать следующим образом.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(y)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \varphi(t-t_1) y(t_1), \quad (2.96)$$

где  $\varphi(t-t_1)$  – некоторая функция, имеющая спектральное представление.

Возьмем от (2.96) преобразование Фурье

$$(i\omega + \varphi(\omega)) y(\omega) = 0, \quad (2.97)$$

где

$$\varphi(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \varphi(\tau).$$

Представим далее  $\varphi(\omega)$  в виде ряда по параметру  $\omega$ , предполагая, что  $\varphi(\omega)$ , а также все ее производные по  $\omega$ , являются конечными в точке  $\omega = 0$ . Тогда из (2.97), получим



$$\left( i\omega + \varphi(0) + \varphi'(0)\omega + \frac{\varphi''(0)}{2!}\omega^2 + \dots \right) y(\omega) = 0. \quad (2.98)$$

Вычисляя теперь от (2.98) обратное преобразование Фурье, найдем

$$\frac{dy(t)}{dt} - \varphi(0)y(t) = \sum_{n=1} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad (2.99)$$

где коэффициенты  $a_n$  определяются через производные от  $\varphi(\omega)$  при  $\omega = 0$ .

Из уравнения (2.99) следует, что для перехода к марковскому предельному случаю достаточно представить спектральную зависимость ядра интегрального преобразования в (2.96), т.е.  $\varphi(\omega)$ , в виде ряда по  $\omega$ , предполагая, что это разложение существует в точке  $\omega = 0$ . При этом коэффициенты  $\varphi^{(n)}(0)$  и  $a_n$  в (2.98) и (2.99) являются связанными между собой, и определяют немарковские поправки в (2.113).

Вернемся теперь к уравнению (2.35). Вычисляя от правой и левой его части преобразование Фурье, найдем

$$-i\tilde{\omega}s_i(\tilde{\omega}) - \gamma_0[\mathbf{s}(\tilde{\omega}) \times \mathbf{B}]_i = 2\pi s_0 \gamma_z \delta_{iz} \delta(\tilde{\omega}) - \gamma_{ij}(\tilde{\omega})s_j(\tilde{\omega}) + \xi_i(\tilde{\omega}). \quad (2.100)$$

Ограничимся в данном параграфе случаем, когда на подсистему действует только постоянное магнитное поле, т.е.  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}_0$ . Это означает, что в выражениях для  $\gamma_{ij}(\tilde{\omega})$  необходимо частоту переменного магнитного поля  $\omega$  устремить к нулю ( $\omega \rightarrow 0$ ). Тогда

$$\gamma_{xx}(\tilde{\omega}) = \gamma_{yy}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}) + \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})) = \gamma_{xx}^{(1)}(\tilde{\omega}) + i\gamma_{xx}^{(2)}(\tilde{\omega}), \quad (2.101)$$

$$\gamma_{yx}(\tilde{\omega}) = -\gamma_{xy}(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2i}(\tilde{\gamma}_+(\tilde{\omega}) - \tilde{\gamma}_-(\tilde{\omega})) = \gamma_{yx}^{(1)}(\tilde{\omega}) + i\gamma_{yx}^{(2)}(\tilde{\omega}), \quad (2.102)$$

где

$$\gamma_{xx}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha\Omega}{3} \left( \left| \frac{\tilde{\omega}}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega}}{\Omega}\right) + \frac{1}{2} \left| \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega}\right) + \frac{1}{2} \left| \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega}\right) \right), \quad (2.103)$$

$$\gamma_{xx}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho)\tilde{\omega},$$

$$\gamma_{yx}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho)\omega_0,$$

$$\gamma_{yx}^{(2)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha\Omega}{6} \left( \left| \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\sigma \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega}\right) - \left| \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\sigma \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega}\right) \right). \quad (2.104)$$

а также

$$\gamma_{zz}(\tilde{\omega}) = \gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) + i\gamma_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}), \quad (2.105)$$

где

$$\gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{\alpha\Omega}{3} \left( \left| \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} + \omega_0}{\Omega}\right) + \left| \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\tilde{\omega} - \omega_0}{\Omega}\right) \right), \quad (2.106)$$

$$\tilde{\gamma}_{zz}^{(2)}(\tilde{\omega}) = -\frac{16\alpha}{3\pi} J(\rho)\tilde{\omega}, \quad J(\rho) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \cos(\rho x)}{(2+x)^2}.$$

Согласно вышеизложенным рассуждениям, марковский предел в уравнении (2.35) соответствует случаю, когда мы пренебрегаем частотной зависимостью коэффициентов радиационного трения  $\gamma_{ij}$ , считая  $\gamma_{ij}(\tilde{\omega}) \approx \gamma_{ij}(0)$ . Во временной области это эквивалентно тому, что  $\gamma_{ij}(\tau) \approx \gamma_{ij}(0)\delta(\tau)$ . Что же касается немарковских поправок в (2.35), то они определяются разложением  $\gamma_{ij}(\tilde{\omega})$  в ряд по малому параметру, содержащему частоту  $\tilde{\omega}$ . В данной модели такими параметрами являются отношения  $\tilde{\omega}/\Omega \ll 1$  и  $(\tilde{\omega} \pm \omega_0)/\Omega \ll 1$ . Учитывая этот факт и раскладывая (2.103), (2.104), (2.106) в ряд по этим параметрам, ограничиваясь при этом несколькими первыми слагаемыми, найдем

$$\gamma_{zz}^{(1)}(\tilde{\omega}) = \frac{2\alpha\omega_0}{3\Omega^2} (\omega_0^2 + 3\tilde{\omega}^2),$$

$$\gamma_{xx}^{(1)}(\tilde{\omega}) \approx \frac{\alpha\omega_0}{3\Omega^2} (\omega_0^2 + 3\tilde{\omega}^2),$$

$$\gamma_{yx}^{(2)}(\tilde{\omega}) \approx \alpha\tilde{\omega} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2.$$

В итоге подставляя (2.101)-(2.102) и (2.105) в (2.100) и вычисляя обратное преобразование Фурье, получим уравнения релаксации спинового момента в марковском случае:

$$\frac{ds_i(t)}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = s_0 \gamma_z \delta_{iz} - \sum_{l=0} \tilde{a}_{ij}^{(l)} \frac{d^l s_j(t)}{dt^l} + \xi_i(t),$$

которое удобно представить в следующем виде

$$\frac{ds_i(t)}{dt} = \frac{s_i^{(0)} - s_i(t)}{\tau_i} + \sum_{l=1} a_{ij}^{(l)} \frac{d^l s_j(t)}{dt^l} + \xi_i(t), \quad (2.107)$$

где  $\tau_i$  и  $s_i^{(0)}$  – времена релаксации и равновесные значения проекций спинового момента в марковском случае, а  $a_{ij}^{(l)}$  – тензор, компоненты которого определяют немарковские поправки в уравнении (2.107), связанные с наличием памяти в системе:

$$s_x^{(0)} = s_y^{(0)} = 0, \quad s_z^{(0)} = s_0 \frac{\gamma_z}{\tilde{a}_{zz}^{(0)}} = s_0 \cos\left(\rho \frac{\omega_0}{\Omega}\right) \approx s_0,$$

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{\tau_y} = \frac{\alpha\omega_0}{3} \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2, \quad \tau_z = 2\tau_{x,y}, \quad (2.108)$$

$$a_{xx}^{(l)} = a_{yy}^{(l)} = \left( 0, \quad -\frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho), \quad \frac{\alpha\omega_0}{\Omega^2} \right),$$

$$a_{xy}^{(l)} = -a_{yx}^{(l)} = \left( \omega_0 \left( 1 - \frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho) \right) \quad -\alpha \left( \frac{\omega_0}{\Omega} \right)^2, \quad 0 \right),$$

$$a_{zz}^{(l)} = 2a_{xx}^{(l)}.$$

Рассмотрим более подробно полученные результаты. В первую очередь отметим, что марковские стохастические уравнения (2.107) имеют определенные сходства с феноменологическими уравнениями Блоха (2.1), отличаясь от них наличием флуктуационных источников  $\xi_i(t)$  и немарковских поправок, определяющихся компонентами  $a_{ij}^{(l)}$ . В общем случае тензор  $a_{ij}^{(l)}$  содержит бесконечное число элементов, возникающих при разложении коэффициентов радиационного трения в ряд по частоте. Но учитывая, что в это разложение частота входит как отношение  $\tilde{\omega}/\Omega$ , то, фактически, слагаемые, определяющие немарковские поправки в уравнении (2.107), имеют порядок  $\alpha/\Omega^l$  ( $l=1,2,3,\dots$ ), т.е., как и следовало ожидать, они очень малы. Кроме этого, согласно (2.108), времена релаксации в марковском случае пропорциональны кубу частоты, что совпадает с выражением (2.2) при нулевой температуре для времени релаксации двухуровневой спиновой системы в тепловом электромагнитном окружении.

С другой стороны, времена релаксации (2.108) имеют очень большие значения. Так, например, для частоты  $\omega_0 \sim 10^{10}$  рад·с<sup>-1</sup>, что соответствует магнитному полю  $B_0 \sim 10^3$  Гс, время релаксации  $\tau \sim 10^{10}$  с, что по порядку совпадает с результатом, следующим из формулы (2.2). В частности, как показано в монографии [47] при частоте  $\omega_0 \sim 10^{10}$  рад·с<sup>-1</sup> для одиночных электронных спинов при температуре  $T_0 \sim 1$  К из (2.2) следует, что время релаксации имеет также порядок  $\tau_0 \sim 10^{10}$  с.

Отметим здесь еще одну особенность, связанную с временами релаксации (2.108). Оказывается, выражения (2.108) можно непосредственно получить из формул (2.89), определяющих времена релаксации с учетом эффекта памяти. Для этого необходимо устремить в (2.89) частоту внешнего поля  $\omega$  к нулю. При этом получающиеся соотношения полностью совпадают с (2.108).

## §2.5 Эффект изменения частоты прецессии спинового момента

Эффекты, связанные с изменением резонансных частот в спиновых системах, изучались многими авторами как экспериментально, так и теоретически [45, 308-316]. В частности были открыты такие важные для спектроскопии явления, как химический сдвиг [48, 317], сдвиг Найта [48], сдвиг Блоха-Зигерта [49], динамический сдвиг частоты [318]-[320]. Кроме этого, в некоторых работах [321]-[333] исследовался сдвиг частоты (двухуровневой системы), обусловленный радиационным трением. Изменение резонансных частот может произойти, например, вследствие возникновения в спиновой системе эффективных флуктуирующих магнитных полей, изменения g-фактора электронов [48, 334] или может быть связано с некоторыми нелинейными эффектами. Основная причина, вызывающая этот эффект, заключается во взаимодействии двух подсистем, которые, например, в случае химического сдвига и сдвига Найта, представляют собой спиновые системы ядер и электронов. Характерными примерами, демонстрирующими ключевую роль взаимодействия между системами, являются радиационные эффекты, такие как эффект аномального магнитного момента и лэмбовский сдвиг атомных уровней [280], приводящие к перенормировке резонансных частот. Важность изучения подобных эффектов в спиновых системах определяется с одной стороны, необходимостью изучения свойств и процессов, протекающих в этих системах, а с другой, связана с практической проблемой управления спиновыми состояниями, для решения которой важно знать основные параметры этих систем и их возможные вариации. При этом такими характеристиками могут быть перенормированные резонансные частоты, которые по своему физическому содержанию несут информацию как о типе взаимодействия подсистем, так и о некоторых их свойствах.

В данном параграфе будет рассмотрен эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона, обусловленный его взаимодействием с флуктуациями электромагнитного окружения (электромагнитного вакуума), и заключающийся в сдвиге частоты прецессии на небольшую аддитивную поправку, зависящую от параметров системы.

В параграфе 2.3 при исследовании частотной зависимости динамической восприимчивости (раздел 2.3.3) в силу пропорциональности  $\gamma_{ij}(\omega)$  постоянной тонкой структуры предполагалось, что  $\Delta\omega_2 \approx \Delta\omega = \omega + \omega_0$ . Учтем теперь в выражении для  $\Delta\omega_2$  (см. (2.58)) коэффициенты радиационного трения. Тогда

$$\Delta\omega_2 = \Delta\omega + \frac{i}{2}(\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)), \quad (2.109)$$

где согласно произведенным выше вычислениям:

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(0) = \tilde{\gamma}_{\pm}^{(1)}(0) + i\tilde{\gamma}_{\pm}^{(2)}(0), \quad (2.110)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}_+^{(1)}(0) = \tilde{\gamma}_-^{(1)}(0) &= \frac{\alpha}{3} \Omega \left( \left| \frac{\omega}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\omega}{\Omega}\right) + \left| \frac{\omega + \omega_0}{\Omega} \right|^3 \cos\left(\rho \frac{\omega + \omega_0}{\Omega}\right) \right), \\ \tilde{\gamma}_+^{(2)}(0) = -\tilde{\gamma}_-^{(2)}(0) &= \frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho)(2\omega + \omega_0), \quad J(\rho) = \int_0^{+\infty} dx \frac{x \cos(\rho x)}{(2+x)^2}.\end{aligned}\quad (2.111)$$

Подставляя (2.110) в (2.109), после элементарных математических преобразований, найдем

$$\Delta\omega_2 \approx \omega + \tilde{\omega}_0,$$

где

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0(1 + \Delta), \quad (2.112)$$

а параметр  $\Delta$  как раз и определяет искомый сдвиг частоты прецессии:

$$\Delta = -\frac{8\alpha}{3\pi} J(\rho). \quad (2.113)$$

Рассмотрим более подробно выражение (2.113). В первую очередь определим численное значение  $\Delta$ . Как показано в §2.2, в данной модели параметр  $\rho$ , связанный с учетом внутренней геометрии (структуры) электрона, равен  $\rho = 1/\sqrt{2}$ . Подставляя это значение в (2.113), найдем

$$\Delta \approx 0.0003504. \quad (2.114)$$

Это говорит о том, что в результате взаимодействия электрона с флуктуациями электромагнитного вакуума происходит увеличение частоты прецессии спинового момента, но данный эффект является чрезвычайно слабым и составляет всего 0.035% от частоты прецессии «голового» спинового момента.

С точки зрения используемого подхода этот эффект имеет следующее объяснение. Рассмотрим прецессию спинового момента в постоянном магнитном поле. При включении взаимодействия электрона с полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума произойдет случайная раскачка прецессии, которая в свою очередь приведет к флуктуациям ее частоты. Усредняя эти случайные отклонения мы получим определенную поправку к частоте, которая и будет определять эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона.

Кроме этого, соотношение (2.113) имеет еще одну особенность, связанную с проблемой бесконечностей в радиационных эффектах, например, таких как лэмбовский сдвиг или аномальный магнитный момент. Как показано в многочисленных работах, для правильного вычисления численных значений этих эффектов необходимо произвести либо перенормировку фундаментальных констант, либо процедуру обрезания, устранив тем самым из получающихся выражений логарифмически расходящиеся члены.

В данной модели указанная проблема находит естественное разрешение через учет некоторых свойств внутренней структуры электрона (см. §2.2), проявляющихся в существовании параметра  $\rho$  в выражении (2.113), наличие которого делает значение  $\Delta$  конечным. При этом если пренебречь указанными свойствами, т.е. считать, что  $\rho = 0$ , то в (2.113) возникает традиционная для радиационных эффектов логарифмическая расходимость. Действительно, используя (2.111) при  $\rho = 0$ , получим

$$J(0) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a dx \frac{x}{(2+x)^2} = -1 - \ln(2) + \lim_{a \rightarrow \infty} \ln(2+a) \rightarrow \infty, \quad (2.115)$$

т.е., как и следовало ожидать, имеет бесконечное значение.

Изучение эффекта изменения частоты прецессии спинового момента электронов, обусловленного радиационным трением, имеет достаточно длинную историю [262, 321, 326-328], связанную прежде всего с проблемой аномального магнитного момента в низкоэнергетическом пределе [321, 327-328, 335-336] и бесконечностями, возникающими при вычислении этого эффекта.

Как впервые показал Швингер [337], магнитный момент электрона отличается от величины, предсказанной теорией Дирака [5]-[6], на небольшую положительную поправку, в первом приближении пропорциональную постоянной тонкой структуры, и возникающую из-за флуктуаций вакуума. Сравнение численного расчета и экспериментальных данных показало, что они совпадают с очень большой точностью [229]. В то же время в нерелятивистском пределе вычисление этого эффекта даже в самой простой полуклассической модели, исследованной впервые Вельтоном [321], наталкивается на нетривиальные затруднения. В частности, как показано в [321], аномальный магнитный момент имеет тот же порядок, что и в расчетах Швингера, но противоположен по знаку. В дальнейшем были предприняты попытки [326-329, 335-336] объяснить получившийся результат и исправить его. Следует отметить, что уже в [321] при интерпретации возникшего затруднения была выдвинута гипотеза, что причина отрицательного знака заключается в полном пренебрежении релятивистской природой электронного спина. Эта идея была развита в работе Коба [335], в которой анализировалась модель Вельтона и, в частности, было показано, что она не учитывает вклад некоторых слагаемых, связанных с релятивистскими свойствами спина. Как показано в [335], учет этих слагаемых совместно с эффектом осцилляций Шредингера (Zitterbewegung) приводит к возникновению дополнительной поправки к магнитному моменту, которая в сумме с вкладом Вельтона дает положительный результат.

Другой подход развивался в работах [326]-[329] на основе более сложных моделей, ключевая идея которых заключалась в определении аномального момента как эффекта изменения частоты прецессии спинового (магнитного) момента электрона. Однако, полученные

результаты проблематично сравнивать друг с другом в виду определенной сложности указанных моделей, а также из-за различных приближений, которыми пользуются их авторы. В частности, в [96] формулируется точка зрения, что решающую роль играет поправка, обусловленная источниками электромагнитного поля, тогда как в [328] положительный результат достигается только за счет электромагнитных флуктуаций.

Резюмируя этот краткий обзор, следует отметить, что численный результат всех цитированных выше работ сильно зависит от константы обрезания, точное значение которой часто невозможно последовательно аргументировать. Это делает необходимым построение новых моделей, которые были бы свободны от необходимости вводить параметр обрезания.

Одна из таких моделей предложена в настоящей главе. Как показали вычисления (см. формулы (2.113) и (2.115)), учет внутренней структуры электрона, связанной с релятивистской природой спинового момента, устраняет необходимость введения параметра обрезания, и делает сдвиг частоты прецессии конечным, автоматически имеющим положительный знак.

Сравним полученное численное значение  $\Delta$  со сдвигом частоты, обусловленным аномальным магнитным моментом [229]:

$$\Delta_1 = \frac{\mu}{\mu_B} - 1 = 0.00115965236. \quad (2.116)$$

Используя (2.114) и (2.116), найдем

$$\Delta_1 \approx 3.3 \cdot \Delta. \quad (2.117)$$

Другими словами, полученный результат оказывается меньше чем аномальный магнитный момент, причина чего может заключаться как в приближениях, использованных при выводе силы радиационного трения, так и с вычислением параметра  $\rho$ , т.е. с пренебрежением некоторыми свойствами электрона, связанными его внутренней структурой.

Сформулируем теперь основные результаты и выводы, следующие из этой главы.

## §2.6 Выводы

1. В приближении гауссовой статистики переменных электромагнитного окружения, а также слабых внешних магнитных полей, получено немарковское стохастическое уравнение, описывающее броуновское движение и релаксацию спинового момента электрона, взаимодействующего с собственным полем излучения и флуктуациями электромагнитного вакуума. Определены компоненты силы радиационного трения и флуктуационного источника. Установлено, что в общем случае сила трения состоит из двух самостоятельных частей, одна из которых обусловлена конфигурационным движением электрона, а вторая его спиновым

моментом. Показано, что в каждой из данных частей присутствуют два механизма трения, связанные между собой флуктуационно-диссипационной теоремой, и определяющиеся функцией Грина фотонов и функцией корреляции переменных электромагнитного окружения. Установлено, что в приближении слабых магнитных полей (изотропного пространства) часть радиационной силы трения, связанная с конфигурационным движением электрона, оказывается равной нулю, и не дает вклада в спиновую релаксацию. В приближении свободной прецессии определены компоненты коэффициента радиационного трения, содержащие в рамках предложенной модели наиболее полную информацию о свойствах рассматриваемой спиновой подсистемы.

2. На основе полученного стохастического уравнения исследована частотная зависимость динамической восприимчивости спиновой подсистемы с учетом эффекта памяти. Показано, что в результате немарковского характера взаимодействия возникает зависимость поперечного времени релаксации  $T_{tr}$  от частоты внешнего магнитного поля, что можно рассматривать как эффект дисперсии времени релаксации, приводящий к таким следствиям, как асимметрия поведения  $T_{tr}$  и динамической восприимчивости относительно действия правой и левой круговых поляризацій магнитного поля, возникновение дополнительных резонансных частот в линии поглощения подсистемы и некоторым другим следствиям. В частности, установлено, что при значениях параметра  $d = \omega_1 / \omega_0 \sqrt{2} = B_1 / B_0 \sqrt{2} \ll 1$  частотная зависимость действительной и мнимой части динамической восприимчивости практически совпадает с марковским случаем, следующим из решения уравнений Блоха. При увеличении  $d$ , когда  $d \sim 1$  и  $d > 1$ , в  $\chi'(\omega)$  и  $\chi''(\omega)$  возникают определенные искажения, приводящие к новым свойствам динамической восприимчивости, и связанные непосредственно с дисперсией поперечного времени релаксации.

3. Исследовано влияние вакуума на характеристики спиновой подсистемы. Показано, что флуктуации электромагнитного окружения приводят к увеличению частоты прецессии спинового момента электрона на небольшую аддитивную поправку, пропорциональную постоянной тонкой структуры  $\alpha = e^2 / c\hbar$ . Проведено сравнение указанного эффекта с аномальным магнитным моментом.



## **Глава III**

# **Динамика спинового момента электрона проводимости, взаимодействующего с полем фононов и его флуктуациями в немагнитных кристаллах**

### **§3.1 Введение и постановка задачи**

В предыдущей главе исследовались немарковские статистические свойства спиновых моментов электронов, находящихся в контакте со случайным электромагнитным полем. Другим из наиболее распространенных и часто встречающихся окружений спиновых систем является поле фононов кристаллической решетки, играющее фундаментальную роль для понимания многих кинетических процессов в конденсированных средах.

Изучение взаимодействия спиновых моментов электронов и фононного окружения является важной и актуальной задачей в ряде разделов физики конденсированного состояния. В частности, как упоминалось во Введении, данная задача имеет большое значение для спиновой электроники (спинтроники) [8, 15, 18-19] при исследовании спин-зависимого электронного транспорта [10, 13, 15] в различных полупроводниковых структурах. Ее актуальность определяется с одной стороны, необходимостью исследовать основные свойства и процессы, протекающие в спиновых системах, некоторые их фундаментальные закономерности, а с другой обусловлена практической целью управления спиновыми состояниями электронов, дырок и других квазичастиц для создания специальных приборов и устройств [7], способных хранить и обрабатывать информацию. Поэтому вычисление основных параметров спиновых систем, таких как времена релаксации, резонансные частоты, равновесные значения, спектр флуктуаций и многих других, а также определение возможного их изменения при вариациях внешнего воздействия является одной из наиболее важных теоретических задач в этой области, требующей совместного учета различных факторов и особенностей. При этом часто наиболее существенную роль играют такие характеристики спиновых систем, как их неравновесность, эффекты памяти, стохастичность внешних полей и окружения. Поэтому в свете основных проблем спинтроники и спиновой физики вообще представляет большой теоретический интерес определение свойств спиновых систем и их основных параметров в случае, когда задействованы большинство из указанных особенностей.

Взаимодействие электронов проводимости с фотонами, фононами или другим диссипативным окружением приводит к процессам релаксации их переменных, таких как координата, импульс и др. Не является исключением в данном случае и спиновый момент электронов.

Процессы релаксации спинового момента электронов в кристалле зависят от многих факторов, среди которых стоит особо выделить симметрию кристалла, физическую природу окружения, а также тип взаимодействия спинового момента и окружения. В немагнитных кристаллах особую роль играет взаимодействие электронов с колебаниями кристаллической решетки – фононами. С теоретической точки зрения спин-решеточные взаимодействия можно разделить на прямые и косвенные, имеющие своей причиной возникновение эффективных магнитных полей, связанных с колебаниями атомов кристаллической решетки. При этом прямые механизмы обусловлены непосредственным воздействием случайных полей на спин электрона, в то время как в косвенных механизмах флуктуирующие магнитные поля действуют на спиновый момент через конфигурационные степени свободы.

По-видимому, первый, кто рассмотрел спин-решеточную релаксацию, обусловленную фононами, был Валлер [338], предложивший механизм, который в настоящее время носит его имя. Он определяется спин-спиновым взаимодействием и флуктуациями локального магнитного поля, которое создается в месте расположения некоторого иона магнитным моментом соседнего иона. Другой механизм был предложен Гайтлером и Теллером [339], Кронигом [340] и Ван Флеком [341]. Он связан с действием на спиновый момент модулированного электрического поля кристалла (поля лигандов) через спин-орбитальное взаимодействие. В этом механизме принято различать несколько процессов, приводящих к разным выражениям и значениям скоростей спиновой релаксации. Обычно выделяют [47] прямой процесс, заключающийся в резонансном поглощении или излучении одного фонона, а также двухфононный процесс Орбаха [342] и двухфононный рамановский процесс [47]. В немагнитных кристаллах большую роль также играют механизмы Дьяконова-Переля [343] и Эллиота-Яфета [344]-[345], обусловленные спин-орбитальным взаимодействием.

Вообще, следует отметить, что спин-орбитальное взаимодействие играет особую роль в полупроводниках. С ним связаны такие известные и важные для спинтроники эффекты, как эффект оптической ориентации спинов, спиновый эффект Холла, комбинированный резонанс, явление спинзависимого электронного транспорта и др. Кроме этого, учет спин-орбитального взаимодействия является необходимым при определении зонной структуры кристаллов, поскольку в некоторых случаях может приводить к заметным расщеплениям энергетического спектра [346]. Поэтому с практической точки зрения спин-орбитальное взаимодействие дает прекрасную возможность для генерации спиновой поляризации и управления спиновыми

состояниями, что в теоретическом плане означает необходимость во многих случаях при исследовании процессов спиновой релаксации в кристаллах учитывать спин-орбитальное взаимодействие, делая такие задачи чрезвычайно актуальными.

Рассмотрев кратко некоторые особенности и механизмы релаксации спиновых моментов электронов в конденсированных средах, перейдем теперь к постановке задачи и основным вопросам этой главы.

В данной главе на основе метода квантовых стохастических уравнений исследуется вопрос о влиянии электрон-фононного взаимодействия и флуктуаций фононного поля на релаксацию спинового момента электронов проводимости в немагнитных кристаллах в наиболее общем немарковском случае с учетом спин-орбитальной связи.

Согласно концепции открытых квантовых систем, выделим в рассматриваемой системе две подсистемы: динамическую, которой, как и в случае радиационного трения, является спиновый момент и оставшуюся макроскопическую часть – окружение электрона проводимости, представляющее собой поле фононов. В данной модели будем считать, что окружение является термостатом, который описывается распределением Бозе-Эйнштейна, и имеет температуру  $T$ . Кроме этого предполагаем, что переменные фононного термостата обладают гауссовой статистикой.

В данной главе рассматриваются ковалентные изотропные кристаллы с пространственной структурой алмаза, обладающие центром инверсии. Для таких кристаллов существует хорошо известный факт [347]-[348], что энергетические зоны во всем  $k$ -пространстве являются двукратно вырожденными, а также, что различное смещение в магнитном поле двух сопряженных долин аннулируется.

Взаимодействие электрона с фононами приводит к снятию вырождения энергетических зон [19] и возникновению в гамильтониане системы недиагональных матричных элементов, зависящих от квазиимпульса электрона. Для ковалентных кристаллов электрон-фононное взаимодействие определяется так называемой моделью деформационного потенциала [349]-[350], представляющего собой энергию взаимодействия электронов с акустическими фононами. В континуальном приближении (длинноволновые акустические фононы) в представлении чисел заполнения и в приближении линейной модели полярона [351] для изотропных ковалентных кристаллов оператор деформационного потенциала имеет вид

$$V(\mathbf{r}) = -e(\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}), \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{E}$  – электрическое поле, вызванное локальной деформацией:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{e} \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{q} \sqrt{|q|} (b_{\mathbf{q}} - b_{-\mathbf{q}}^+), \quad (3.2)$$

$b_q^+$  и  $b_q$  – операторы рождения и уничтожения акустических фононов с волновым вектором  $\mathbf{q}$ ,  $\lambda = \sqrt{\hbar \sigma^2 / 2MNc_a}$  – размерная константа [350],  $c_a$  – скорость продольных акустических фононов,  $M$  – суммарная масса атомов, входящих в состав одной элементарной ячейки,  $N$  – число элементарных ячеек в кристалле.

С учетом электрон-фононного взаимодействия гамильтониан системы в  $\mathbf{k}$ -пространстве в общем случае имеет вид

$$H = \varepsilon(\mathbf{k}) - \frac{\mu_B}{2} g(\mathbf{k})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}) + H_1(\mathbf{k}) + H_{\text{ph}}, \quad (3.3)$$

где  $\varepsilon(\mathbf{k})$  – закон дисперсии электрона проводимости,  $g(\mathbf{k})$  для изотропных кристаллов представляет собой скаляр, определяющий  $g$ -фактор зонного электрона,  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  – матрицы Паули,  $\mu_B$  – магнетон Бора,  $\mathbf{k} = -i\nabla - e\mathbf{A}/\hbar c$ ,  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  – векторный потенциал и индукция магнитного поля,  $H_1(\mathbf{k})$  – оператор возмущения, связанный с электрон-фононным взаимодействием,  $H_{\text{ph}}$  – гамильтониан поля фононов, учитывающий как оптические, так и акустические ветви колебаний кристаллической решетки.

Для того чтобы использовать гамильтониан (3.3) при исследовании процессов спиновой релаксации, вызванных электрон-фононным взаимодействием, необходимо в первую очередь определить вид операторов  $\varepsilon(\mathbf{k})$  и  $H_1(\mathbf{k})$ , который существенно зависит от многих факторов, например, номера зоны, от точки в  $\mathbf{k}$ -пространстве и ее симметрии, где определяются выражения для  $\varepsilon(\mathbf{k})$  и  $H_1(\mathbf{k})$ . В теории зонной структуры кристаллов существуют методы, позволяющие определить выражение  $H(\mathbf{k})$  для любой точки в  $\mathbf{k}$ -пространстве, например,  $\mathbf{k}$ -метод, метод инвариантов и др. [346]. В дальнейшем нас будет интересовать форма  $H(\mathbf{k})$  в окрестности минимума зоны проводимости для кристаллов со структурой алмаза. В этом случае гамильтониан системы (3.3) с учетом электрон-фононного взаимодействия принимает вид:

$$H = \frac{\pi^2}{2m^*} - \frac{\mu_B}{2} g(\boldsymbol{\pi})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}) + V(\mathbf{r}) + \frac{e\hbar}{4m^2c^2} (\boldsymbol{\sigma} \cdot [\nabla V(\mathbf{r}) \times \boldsymbol{\pi}]) + H_{\text{ph}}, \quad (3.4)$$

где  $\boldsymbol{\pi} = \hbar\mathbf{k} + \hbar\mathbf{k}_0$  – кинематический импульс электрона,  $\mathbf{k}_0$  – постоянный вектор, определяющий положение минимума зоны проводимости,  $m^*$  – эффективная масса,  $V(\mathbf{r})$  – деформационный потенциал (3.1). Предпоследнее слагаемое в (3.4) является релятивистской поправкой, учитывающей влияние спин-орбитального взаимодействия, приводящего к появлению недиагональных матричных элементов, зависящих от  $\mathbf{k}$ .

Основная цель настоящего исследования заключается в изучении процесса релаксации спинового момента электрона проводимости, вызванного действием деформационного

потенциала и спин-орбитальным взаимодействием в наиболее общем немарковском случае. Как было выяснено в предыдущей главе, эффекты памяти могут привести к существенному изменению свойств рассматриваемой системы. В частности, они являются причиной таких особенностей, как дисперсия поперечного времени релаксации, возникновение дополнительных резонансных частот в линии поглощения и областей прозрачности, изменение частоты прецессии, оптическая активность системы и др. Указанные особенности являются важными для многих задач спиновой электроники, и могут быть использованы для исследования возможностей управления параметрами спиновых систем. Поэтому один из основных вопросов этой главы заключается в определении влияния флуктуаций фононного поля и эффектов памяти на основные характеристики рассматриваемой системы, такие как времена релаксации, резонансные частоты, спиновую восприимчивость и др. Решению этого и некоторых других вопросов и посвящены следующие параграфы.

## **§3.2 Стохастическое уравнение для спинового момента электрона проводимости**

### **3.2.1 Стохастическое уравнение**

Учет спин-орбитального взаимодействия и зависимость  $g$ -фактора от квазиимпульса приводит к тому, что степени свободы электрона, характеризующие его конфигурационное и спиновое движения, становятся связанными, и определенным образом воздействуют друг на друга. Следствием этого, например, является механизм Эллиота-Яфета, обусловленный влиянием релаксации квазиимпульса электрона на спиновый момент через спин-орбитальное взаимодействие. Другими словами, для того чтобы изучить динамику спина необходимо решить совместно систему, состоящую из уравнений для проекций спинового момента электрона и для степеней свободы, связанных с его конфигурационным движением. В общем случае решение данной системы, даже без учета действия поля фононов, является чрезвычайно трудной задачей.

Следует отметить, что корреляцию между спиновой и конфигурационными степенями свободы можно рассматривать как взаимодействие двух подсистем, находящихся в фононном окружении. При этом одной из характерных особенностей спиновой подсистемы, использующейся, в частности, при создании более эффективных запоминающих устройств и других приборов спиновой электроники, является большие времена релаксации ее переменных по сравнению с переменными конфигурационной «подсистемы». Например, в случае рассеяния на фононах время релаксации квазиимпульса и спинового момента электрона (механизм

Эллиота-Яфета) имеют порядок:  $\tau_p \sim 10^{-13} - 10^{-11}$  с [352]-[353],  $\tau_s \sim 10^{-7} - 10^{-5}$  с [354]-[355], т.е.  $\tau_p \ll \tau_s$ . Данное соотношение временных масштабов позволяет решить указанное затруднение, исключив из уравнений спиновой подсистемы динамику быстрых переменных конфигурационных степеней свободы, усредняя гамильтониан (3.4) по равновесному состоянию последней «подсистемы». В теории магнитной релаксации, обусловленной спин-решеточными взаимодействиями, данной процедуре соответствует приближение замороженных решеточных движений [45], заключающееся в усреднении исходного гамильтониана системы по быстрым движениям решеточных переменных. При этом возникающие в гамильтониане (3.4) средние значения конфигурационных степеней свободы становятся параметрами данной модели, которые могут быть определены либо из эксперимента, либо из дополнительных расчетов.

Использование приближения замороженного конфигурационного движения оправдано в данном случае и тем, что спин-орбитальное взаимодействие является релятивистской поправкой, и слабо влияет на степени свободы электрона, ответственные за это движение (случай слабой корреляции). С физической точки зрения это приближение означает, что в данной модели основным механизмом спиновой релаксации является прямое действие локального электрического поля, вызванного деформацией решетки, на спиновый момент электрона. В то же время существует и обратное действие спина электрона на состояние поля фононов, приводящее к его изменению. В итоге возникает сложная картина взаимодействия, следствием которой является возникновение эффекта памяти в данной системе или, другими словами, немарковского характера взаимодействия. Для учета этого эффекта необходимо решать самосогласованную задачу, что и будет сделано в данной главе.

Итак, используя приближение замороженного конфигурационного движения, получим следующий гамильтониан

$$\bar{H} = \frac{\bar{\pi}^2}{2m^*} - \gamma_0(\mathbf{s} \cdot \mathbf{B}) - \frac{\gamma_0}{2mc}(\mathbf{s} \cdot [\mathbf{E} \times \bar{\pi}]) + H_{ph} + \bar{V}(r), \quad (3.5)$$

где  $\mathbf{s} = \hbar \boldsymbol{\sigma} / 2$  – спиновый момент электрона,  $\bar{\pi}$  – среднее значение кинематического импульса,  $\bar{V}(\mathbf{r})$  – среднее значение деформационного потенциала (3.1),  $\bar{\gamma}_0 = e \overline{g(\boldsymbol{\pi})} / 2mc$ ,  $\overline{g(\boldsymbol{\pi})}$  – среднее значение g-фактора электрона.

Следуя работе [356], выделим в операторе спин-орбитального взаимодействия переменные динамической подсистемы и термостата. Подставляя (3.2) в (3.5), перепишем гамильтониан системы в виде

$$\bar{H} = \frac{\bar{\pi}^2}{2m^*} - \bar{\gamma}_0(\mathbf{s}(t) \cdot \mathbf{B}) - \sum_{\mathbf{q}} X^l(t) Q_{\mathbf{q}}^l(t) + H_{ph} + \bar{V}(\mathbf{r}), \quad (3.6)$$

где  $Q_q^l(t)$  и  $X^l(t)$  – переменные термостата и динамической подсистемы:

$$Q_q^l(t) = \frac{\lambda[\mathbf{q} \times \bar{\boldsymbol{\pi}}]_l \sqrt{|q|}}{2m^2 c^2} (b_q(t) - b_{-q}^+(t)), \quad (3.7)$$

$$X^l(t) = s_l(t). \quad (3.8)$$

В формуле (3.6) по индексу  $l$  подразумевается суммирование ( $l = x, y, z$ ).

Используя гамильтониан (3.6) и коммутационные соотношения матриц Паули, запишем уравнение Гейзенберга для оператора спинового момента электрона:

$$\frac{ds_i}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = -\sum_{\mathbf{q}} \tilde{X}^{il}(t) Q_q^l(t), \quad (3.9)$$

где  $\tilde{X}^{il}(t) = e_{ilm} s_m(t)$ .

Взаимозависимый характер взаимодействия между динамической подсистемой и термостатом приводит к тому, что его переменные становятся в общем случае некоторыми функционалами от переменных динамической подсистемы. В силу того, что спин-орбитальное взаимодействие в (3.6) является возмущением, представим  $Q_q^l(t)$  в виде функционального ряда по  $X^l(t)$ . Учитывая, что невозмущенные переменные фононного термостата  $Q_q^{(0)l}(t)$  имеют гауссову статистику, имеем

$$Q_q^l(t) = Q_q^{(0)l}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 D_l(\mathbf{q}, \tau) X^l(t_1), \quad (3.10)$$

где  $\tau = t - t_1$ ,  $D_l(\mathbf{q}, \tau)$  – функция Грина фононов, определяющая линейный отклик фононной подсистемы на действие электрона проводимости:

$$D_l(\mathbf{q}, \tau) = \frac{i}{\hbar} \langle [Q_q^{(0)l}(t), Q_{-q}^{(0)l}(t_1)]_- \rangle_0 \eta(\tau), \quad (3.11)$$

$\eta(\tau)$  – функция Хевисайда, учитывающая в (3.10) принцип причинности.

Согласно определению (3.7), имеем

$$Q_q^{(0)l}(t) = \frac{\lambda[\mathbf{q} \times \bar{\boldsymbol{\pi}}]_l \sqrt{|q|}}{2m^2 c^2} (b_q^{(0)}(t) - b_{-q}^{(0)+}(t)), \quad (3.12)$$

где

$$b_q^{(0)}(t) = b_q^{(0)}(t_1) e^{-i\omega_q \tau}, \quad b_{-q}^{(0)+}(t) = b_{-q}^{(0)+}(t_1) e^{i\omega_q \tau}, \quad (3.14)$$

$\omega_q = c_a q$  – закон дисперсии акустических фононов. Переменные (3.12) обладают функцией корреляции:

$$M_l(\mathbf{q}, \tau) = \frac{1}{2} \langle [Q_q^{(0)l}(t), Q_{-q}^{(0)l}(t_1)]_+ \rangle_0 = \frac{\hbar \beta}{2} u_l^2 q^3 \cos(\omega_q \tau) \coth\left(\frac{\hbar \omega_q}{2k_B T}\right), \quad (3.13)$$

где  $T$  определяет температуру кристалла,

$$u_l = [\mathbf{n} \times \bar{\boldsymbol{\pi}}]_l,$$

$\mathbf{n}$  – единичный вектор, определяющий направление  $q$ ,

$$\beta = \frac{\lambda^2}{2\hbar m^4 c^4}. \quad (3.14)$$

Подставляя (3.12)-(3.13) в (3.11) и используя коммутационные соотношения между операторами рождения и уничтожения фононов, найдем

$$D_l(\mathbf{q}, \tau) = \beta u_l^2 q^3 \sin(\omega_q \tau) \eta(\tau). \quad (3.15)$$

Несложно показать, что функция Грина  $D_l(\mathbf{q}, \tau)$  и  $M_l(\mathbf{q}, \tau)$  связаны между собой флуктуационно-диссипационной теоремой Каллена-Вельтона:

$$S_l(\mathbf{q}, \omega) = \hbar \operatorname{Im}\{D_l(\mathbf{q}, \omega)\} \coth\left(\frac{\hbar \omega_q}{2k_B T}\right),$$

где  $S_l(\mathbf{q}, \omega)$  – спектр флуктуаций фононного термостата:

$$S_l(\mathbf{q}, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau M_l(\mathbf{q}, \tau) e^{i\omega\tau}.$$

Подставляя теперь (3.10) в (3.9) и производя симметризацию произведения  $Q^l(t)$  и  $\tilde{X}^{li}(t)$ , найдем

$$\frac{ds_i}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = -\sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} [\tilde{X}^{li}(t), Q_{\mathbf{q}}^{(0)l}(t)]_+ - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \sum_{\mathbf{q}} D_l(\mathbf{q}, \tau) \frac{1}{2} [\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_+. \quad (3.16)$$

Так же, как в предыдущей главе, выделим из правой части уравнения (3.16) флуктуационные источники и диссипативную силу, которую в дальнейшем будем называть силой фононного трения. Используя обобщенную формулу Фуруцу-Новикова (1.50), получим

$$\frac{1}{2} \left\langle [\tilde{X}^{li}(t), Q_{\mathbf{q}}^{(0)l}(t)]_+ \right\rangle_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M_l(\mathbf{q}, \tau) \left\langle \frac{\delta \tilde{X}^{li}(t)}{\delta Q_{-\mathbf{q}}^{(0)l}(t_1)} \right\rangle_0, \quad (3.17)$$

где усреднение  $\langle \dots \rangle_0$  осуществляется по равновесному состоянию фононного термостата.

Используя правила вычисления функциональных производных от гейзенберговских операторов (см. §1.3), имеем

$$\left\langle \frac{\delta \tilde{X}^{li}(t)}{\delta Q_{-\mathbf{q}}^{(0)l}(t_1)} \right\rangle_0 = \frac{i}{\hbar} \left\langle [\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_- \right\rangle_0 \eta(\tau). \quad (3.18)$$

Сравнивая теперь (3.17) с (1.50) и (3.18) с (1.51), получим из (3.16) следующее стохастическое уравнение для проекций оператора спинового момента электрона проводимости



$$\frac{ds_i}{dt} - \gamma_0[\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = -F_i(t; \mathbf{s}(t)) + \xi_i(t), \quad (3.19)$$

где

$$F_i(t; \mathbf{s}(t)) = \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \left( D_i(\mathbf{q}, \tau) \frac{1}{2} [\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_+ + M_i(\mathbf{q}, \tau) \frac{i}{\hbar} [\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_- \eta(\tau) \right), \quad (3.20)$$

$$\xi_i(t) = -\sum_{\mathbf{q}} \frac{1}{2} [\tilde{X}^{li}(t), Q^{(0)l}(t)]_+ + \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 M_i(\mathbf{q}, \tau) \frac{i}{\hbar} \langle [\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_- \rangle \eta(\tau), \quad (3.21)$$

причем  $F_i(t; \mathbf{s}(t))$  определяют проекции силы трения, действующие со стороны поля фононов и его флуктуаций на спиновый момент электрона, в то время как  $\xi_i(t)$  характеризуют флуктуационные источники, с помощью которых могут быть определены основные статистические свойства динамической подсистемы.

Рассмотрим более подробно выражение (3.20). В первую очередь следует отметить, что сила  $F_i(t; \mathbf{s}(t))$  состоит из двух слагаемых, определяющихся функцией Грина  $D_i(\mathbf{q}, \tau)$  и функцией корреляции  $M_i(\mathbf{q}, \tau)$ . Эти слагаемые характеризуют собой два механизма фононного трения, один из которых связан с реакцией термостата на действие электрона проводимости, а другой с флуктуациями фононного окружения. При этом, как указывалось выше, функция Грина  $D_i(\mathbf{q}, \tau)$  и функция корреляции  $M_i(\mathbf{q}, \tau)$  не являются независимыми, а определяют друг друга через флуктуационно-диссипационную теорему Каллена-Вельтона. Это говорит о том, что данные механизмы релаксации оказываются взаимосвязанными между собой. Кроме этого, сила фононного трения имеет еще одну особенность, заключающуюся в том, что она делает уравнение (3.19) интегро-дифференциальным, т.е. определенным образом учитывает эффекты памяти в системе. Все это говорит о том, что сила трения (3.20) в рамках сделанных приближений описывает процесс релаксации спинового момента в наиболее общей форме.

Преобразуем теперь  $F_i(t; \mathbf{s}(t))$  к более удобному для дальнейшего исследования виду, выделив в (3.20) коэффициенты фононного трения.

Для этого, так же, как в случае радиационного трения, необходимо вычислить произведения проекций спинового момента электрона, взятых в разные моменты времени. Как указывалось в предыдущей главе, их вычисление равносильно решению уравнения (3.19). Поскольку оно неизвестно, воспользуемся при вычислении  $s_i(t)s_j(t_1)$  и  $s_j(t_1)s_i(t)$  приближением свободной прецессии. В данном случае оно оправданно тем, что сила фононного трения (3.20) связана со спин-орбитальным взаимодействием, являющимся релятивистской поправкой в гамильтониане (3.4). Указанное обстоятельство делает  $F_i(t; \mathbf{s}(t))$  возмущением в уравнении (3.19), что дает возможность применить это приближение.

Итак, используя (2.29), вычислим коммутатор и симметризованное произведение операторов электронной подсистемы  $[\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_{\pm}$ :

$$[\tilde{X}^{li}(t), X^l(t_1)]_{\pm} = e_{ilm}[s_m(t), s_l(t_1)]_{\pm} = 2s_0 e_{ilm} R_{mn}(\tau) \left\{ s_0 \delta_{nl} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i e_{nlj} s_j(t_1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.22)$$

где  $s_0 = \hbar / 2$ ,

$$R_{dm}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 \tau) & \sin(\omega_0 \tau) & 0 \\ -\sin(\omega_0 \tau) & \cos(\omega_0 \tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

$\omega_0 = \overline{eg(\boldsymbol{\pi})B_0} / 2mc$  – частота прецессии спинового момента,  $e_{ilm}$  – единичный антисимметричный тензор.

В итоге подставляя (3.22) в (3.19), получим преобразованное стохастическое уравнение:

$$\frac{ds_i}{dt} - \gamma_0 [\mathbf{s}(t) \times \mathbf{B}]_i = s_0 \gamma_i - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{ij}(\tau) s_j(t_1) + \xi_i(t), \quad (3.24)$$

где  $\gamma_i$  и  $\gamma_{ij}(\tau)$  – коэффициенты фононного трения, определяющие равновесные значения и времена релаксации спинового момента в наиболее общем немарковском случае:

$$\gamma_i = -s_0 e_{ilm} \sum_{\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau R_{ml}(\tau) D_l(\mathbf{q}, \tau), \quad (3.25)$$

$$\gamma_{ij}(\tau) = -s_0 e_{ilm} e_{nlj} \sum_{\mathbf{q}} R_{mn}(\tau) M_l(\mathbf{q}, \tau) \eta(\tau). \quad (3.26)$$

В формулах (3.25) и (3.26) по индексу  $l$  подразумевается суммирование ( $l = x, y, z$ ).

Уравнение (3.24) с коэффициентами (3.25)-(3.26) является основным в данной модели. Оно будет использовано в следующих параграфах для исследования статистических свойств спиновой подсистемы и некоторых ее особенностей, обусловленных немарковским характером взаимодействия.

Определим теперь условия, при которых уравнение (3.24) с коэффициентами (3.25)-(3.26) применимо для описания рассматриваемой подсистемы. Для этого вспомним, что (3.24) было получено для изотропных кристаллов в приближении эффективной массы. Действие на кристалл внешнего магнитного поля в общем случае делает его анизотропным. Поэтому возникает необходимость оценить значения магнитных полей, при которых будет справедливо приближение изотропного кристалла и понятие эффективной массы.

Для этого воспользуемся часто применяемым [346] в подобных случаях условием, согласно которому кристалл можно считать изотропным, если так называемая магнитная длина  $L = \sqrt{c\hbar / eB_0}$  много больше периода кристаллической решетки. Это же условие определяет применимость понятия эффективной массы для электронов в магнитном поле [346]. Используя

данное условие, найдем следующую оценку величины магнитного поля:  $B_0 \ll c\hbar / ea^2 \sim 6.58 \cdot 10^{-8} / a^2$  Гс, где  $a$  - период кристаллической решетки.

Кроме магнитного поля в уравнение (3.24) в качестве параметра входит через коэффициенты фононного трения (3.26) температура кристалла. Поскольку в данной модели принципиальна его кристаллическая структура, то очевидно, что допустимые значения  $T$  должны быть меньше, чем температура его плавления, т.е.  $T < T_m$ .

Полученное в этом параграфе стохастическое уравнение (3.24) описывает броуновское движение и процесс релаксации спинового момента электрона проводимости в наиболее общем немарковском случае. Данное уравнение позволяет, во-первых, определить времена релаксации и равновесные значения, а во-вторых, делает возможным вычисление спектра флуктуаций спинового момента электрона, являющегося одной из важнейших характеристик спиновых систем. Кроме этого, стохастическое уравнение (3.24) позволяет изучить влияние эффекта памяти на такие важные характеристики, как спиновая восприимчивость, времена релаксации и резонансные частоты.

Исследование эффектов, связанных с немарковским характером взаимодействия, будет проведено в следующих двух параграфах. Здесь же представляет интерес рассмотреть важный для приложений вопрос о марковском предельном случае в стохастическом уравнении (3.24).

Для решения указанных задач необходимо определить частотную зависимость коэффициентов фононного трения (3.25)-(3.26). Этому вопросу посвящен следующий раздел.

### 3.2.2 Вычисление частотной зависимости коэффициентов фононного трения

Прежде чем вычислить частотную зависимость  $\gamma_i$  и  $\gamma_{ij}(\tau)$  перейдем в (3.25)-(3.26) от суммирования к интегрированию по переменной  $\mathbf{q}$ . Учитывая, что в данной модели рассматриваются изотропные кристаллы, воспользуемся следующим правилом:

$$\sum_{\mathbf{q}} \rightarrow \frac{N}{q_d^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) \int_0^{q_d} dq q^2, \quad (3.27)$$

где  $N$  – число элементарных ячеек,  $q_d$  – период обратной решетки кристалла.

Тогда, используя (3.27), вводя безразмерную переменную  $x = q / q_d$  и учитывая, что

$$U_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) u_x^2 = \frac{4\pi}{3} (\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}_z^2),$$

$$U_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) u_y^2 = \frac{4\pi}{3} (\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}_z^2),$$

$$U_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin(\theta) u_z^2 = \frac{4\pi}{3} (\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}_y^2),$$

найдем

$$\gamma_i = -\beta_1 e_{ilm} \tilde{U}_l T_{ml}^{(1)}, \quad (3.28)$$

$$\gamma_{ij}(\tau) = \beta_1 e_{ilm} e_{nlj} \tilde{U}_l T_{mn}^{(2)}(\tau), \quad (3.29)$$

где  $\tilde{U}_l = 3U_l / 4\pi$ ,

$$T_{ml}^{(1)} = \int_0^1 dx x^5 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau R_{ml}(\tau) \sin(x\Omega\tau) \eta(\tau), \quad (3.30)$$

$$T_{mn}^{(2)}(\tau) = -\eta(\tau) R_{mn}(\tau) \int_0^1 dx x^5 \cos(x\Omega\tau) \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right), \quad (3.31)$$

$$\beta_1 = \frac{8\pi s_0 N q_d^3 \beta}{3} = \frac{2\pi \hbar \sigma^2 q_d^3}{3 M m^4 c^4 c_a}, \quad (3.32)$$

$T_{eff} = 2k_B T / \hbar \Omega$  – эффективная температура,  $\Omega = c_a q_d$  – некоторая характерная частота фононной подсистемы. Например, для кремния  $\Omega \sim 10^{13}$  рад·с<sup>-1</sup>.

Вычисляя преобразование Фурье от (3.25) и (3.26), получим

$$\gamma_i^\omega = 2\pi \delta(\omega) \gamma_i = -2\pi \delta(\omega) \beta_1 e_{ilm} U_l T_{ml}^{(1)}, \quad (3.33)$$

$$\gamma_{ij}(\omega) = \beta_1 e_{ilm} e_{nlj} U_l T_{mn}^{(2)}(\omega). \quad (3.34)$$

Определим теперь компоненты  $T_{dm}^{(1)}$  и  $T_{dm}^{(2)}(\omega)$ . В первую очередь заметим, что, согласно виду матрицы (3.23), мы можем сразу написать:

$$T_{xz}^{(1,2)} = T_{yz}^{(1,2)} = T_{zx}^{(1,2)} = T_{zy}^{(1,2)} \equiv 0.$$

Далее из симметрии компонент (3.23) следует:

$$T_{xx}^{(1,2)} = T_{yy}^{(1,2)}, \quad T_{xy}^{(1,2)} = -T_{yx}^{(1,2)}. \quad (3.35)$$

Таким образом, необходимо вычислить шесть компонент: три для  $T_{dm}^{(1)}$  и  $T_{dm}^{(2)}$ .

Рассмотрим сначала  $T_{dm}^{(1)}$ . Для  $T_{xx}^{(1)}$  из (3.30), имеем

$$T_{xx}^{(1)} = \int_0^1 dx x^5 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cos(\omega_0 \tau) \sin(x\Omega\tau) \eta(\tau)$$

или

$$T_{xx}^{(1)} = \frac{1}{4i} \int_0^1 dx x^5 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \left( e^{i(\omega_0 + \Omega x)\tau} - e^{i(\omega_0 - \Omega x)\tau} + e^{i(-\omega_0 + \Omega x)\tau} - e^{-i(\omega_0 + \Omega x)\tau} \right). \quad (3.36)$$

Интегрируя (3.36) по времени и учитывая четность  $\delta$  - функции, найдем

$$T_{xx}^{(1)} = \frac{1}{2\Omega} \int_0^1 dx x^5 \left[ \frac{1}{x+p_0} + \frac{1}{x-p_0} \right], \quad (3.37)$$

где

$$p_0 = \frac{\omega_0}{\Omega}.$$

Интегрируя теперь (3.37) по  $x$ , получим

$$T_{xx}^{(1)} = \frac{1}{2\Omega} \left[ \frac{2}{5} + \frac{2p_0^2}{3} + 2p_0^4 - p_0^5 \ln \left| \frac{1-p_0}{1+p_0} \right| \right]. \quad (3.38)$$

Учитывая, что внешнее магнитное поле является слабым, будем далее считать, что  $p_0 \ll 1$ . Тогда, раскладывая (3.38) в ряд по  $p_0$ , ограничившись минимальной степенью  $p_0$ , найдем

$$T_{xx}^{(1)} = \frac{1}{5\Omega} \left( 1 + \frac{5p_0^2}{3} \right). \quad (3.39)$$

Вычислим теперь  $T_{xy}^{(1)}$ . Из (3.30), имеем

$$T_{xy}^{(1)} = \int_0^1 dx x^5 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \sin(\omega_0 \tau) \sin(x\Omega \tau) \eta(\tau) \quad (3.40)$$

или

$$T_{xy}^{(1)} = -\frac{1}{4} \int_0^1 dx x^5 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \left( e^{i(\omega_0 + \Omega x)\tau} - e^{i(\omega_0 - \Omega x)\tau} - e^{i(-\omega_0 + \Omega x)\tau} + e^{-i(\omega_0 + \Omega x)\tau} \right). \quad (3.41)$$

Интегрируя (3.41) по времени, найдем

$$T_{xy}^{(1)} = -\frac{\pi}{2\Omega} \int_0^1 dx x^5 (\delta(x+p_0) - \delta(x-p_0))$$

и используя выкалывающее свойство  $\delta$  - функции, получим

$$T_{xy}^{(1)} = \frac{\pi p_0^5}{2\Omega}. \quad (3.42)$$

Пропуская аналогичные вычисления для компоненты  $T_{zz}^{(1)}$ , запишем окончательный ответ:

$$T_{zz}^{(1)} = \frac{1}{5\Omega}.$$

Рассмотрим теперь  $T_{dm}^{(2)}(\omega)$ . Вычислим сначала  $T_{xx}^{(2)}(\omega)$ . Из (3.31), имеем

$$T_{xx}^{(2)}(\omega) = -\int_0^1 dx x^5 \coth \left( \frac{x}{T_{eff}} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \cos(x\Omega \tau) e^{i\omega \tau}.$$

Интегрируя по времени, найдем

$$T_{xx}^{(2)}(\omega) = T_{xx}^{(2.1)}(\omega) + iT_{xx}^{(2.2)}(\omega),$$

где

$$T_{xx}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi}{4\Omega} \int_0^1 dx x^5 \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right) (\delta(x+p_+) + \delta(x-p_+) + \delta(x+p_-) + \delta(x-p_-)), \quad (3.43)$$

$$T_{xx}^{(2.2)}(\omega) = \frac{1}{2\Omega} (p_+ F(p_+, T_{eff}) + p_- F(p_-, T_{eff})). \quad (3.44)$$

В формулах (3.43)-(3.44) введены обозначения:

$$F(p, T_{eff}) = \int_0^1 dx \frac{x^5}{x^2 - p^2} \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right),$$

$$p_{\pm} = \frac{\omega \pm \omega_0}{\Omega},$$

причем в  $F(p, T_{eff})$  интеграл понимается в смысле главного значения.

Интегрируя (3.43), имеем

$$T_{xx}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi}{4\Omega} \left( |p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) + |p_-|^5 \coth\left(\frac{|p_-|}{T_{eff}}\right) \right). \quad (3.45)$$

Рассмотрим теперь  $T_{xy}^{(2)}(\omega)$ . Используя (3.31), найдем

$$T_{xy}^{(2)}(\omega) = -\int_0^1 dx x^5 \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \sin(\omega_0 \tau) \cos(x\Omega \tau) e^{i\omega \tau}.$$

Пропуская вычисления, запишем ответ:

$$T_{xy}^{(2)}(\omega) = T_{xy}^{(2.1)}(\omega) + iT_{xy}^{(2.2)}(\omega),$$

где

$$T_{xy}^{(2.1)}(\omega) = \frac{1}{2\Omega} (p_+ F(p_+, T_{eff}) - p_- F(p_-, T_{eff})),$$

$$T_{xy}^{(2.2)}(\omega) = \frac{\pi}{4\Omega} \left( |p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) - |p_-|^5 \coth\left(\frac{|p_-|}{T_{eff}}\right) \right).$$

Вычислим теперь последнюю компоненту  $T_{dm}^{(2)}(\omega)$ , а именно  $T_{zz}^{(2)}(\omega)$ . Согласно (3.31),

имеем

$$T_{zz}^{(2)}(\omega) = -\int_0^1 dx x^5 \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \cos(x\Omega \tau) e^{i\omega \tau}. \quad (3.46)$$

Заметим, что (3.46) можно переписать в виде

$$T_{zz}^{(2)}(\omega) = -\lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \int_0^1 dx x^5 \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \eta(\tau) \cos(\omega_0 \tau) \cos(x\Omega \tau) e^{i\omega \tau} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} T_{xx}^{(2)}(\omega).$$

Другими словами, устремляя в (3.44)-(3.45)  $\omega_0$  к нулю, найдем

$$T_{zz}^{(2)}(\omega) = T_{zz}^{(2.1)}(\omega) + iT_{zz}^{(2.2)}(\omega),$$

где

$$T_{zz}^{(2.1)}(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} T_{zz}^{(2.1)}(\omega), \quad T_{zz}^{(2.2)}(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} T_{zz}^{(2.2)}(\omega).$$

Выпишем теперь основные формулы, полученные в этом разделе:

$$T_{xx}^{(1)} = \frac{1}{5\Omega} \left(1 + \frac{5p_0^2}{3}\right), \quad T_{xy}^{(1)} = \frac{\pi p_0^5}{2\Omega}, \quad T_{zz}^{(1)} = \frac{1}{5\Omega}, \quad (3.47)$$

$$T_{xx}^{(2)}(\omega) = T_{xx}^{(2.1)}(\omega) + iT_{xx}^{(2.2)}(\omega), \quad T_{xy}^{(2)}(\omega) = T_{xy}^{(2.1)}(\omega) + iT_{xy}^{(2.2)}(\omega), \quad (3.48)$$

$$T_{zz}^{(2)}(\omega) = T_{zz}^{(2.1)}(\omega) + iT_{zz}^{(2.2)}(\omega),$$

где

$$T_{xx}^{(2.1)}(\omega) = T_{yy}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi}{4\Omega} \left( |p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) + |p_-|^5 \coth\left(\frac{|p_-|}{T_{eff}}\right) \right), \quad (3.49)$$

$$T_{xx}^{(2.2)}(\omega) = T_{yy}^{(2.2)}(\omega) = \frac{1}{2\Omega} (p_+ F(p_+, T_{eff}) + p_- F(p_-, T_{eff})), \quad (3.50)$$

$$T_{xy}^{(2.1)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.1)}(\omega) = \frac{1}{2\Omega} (p_+ F(p_+, T_{eff}) - p_- F(p_-, T_{eff})), \quad (3.51)$$

$$T_{xy}^{(2.2)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.2)}(\omega) = \frac{\pi}{4\Omega} \left( |p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) - |p_-|^5 \coth\left(\frac{|p_-|}{T_{eff}}\right) \right), \quad (3.52)$$

$$T_{zz}^{(2.1)}(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} T_{zz}^{(2.1)}(\omega), \quad T_{zz}^{(2.2)}(\omega) = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} T_{zz}^{(2.2)}(\omega), \quad (3.53)$$

$$F(p, T_{eff}) = \int_0^1 dx \frac{x^5}{x^2 - p^2} \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right),$$

$$p_0 = \frac{\omega_0}{\Omega}, \quad p = \frac{\omega}{\Omega}, \quad p_{\pm} = \frac{\omega \pm \omega_0}{\Omega}.$$

Перейдем теперь к выводу уравнений релаксации спинового момента в марковском случае, используя для этого полученных выше формул.

### 3.2.3 Уравнения релаксации спинового момента в марковском случае

В марковском случае процесс релаксации спиновых систем, взаимодействующих с диссипативным окружением, описывается уравнениями Блоха (см. §2.1) с феноменологическими параметрами, определяющими времена релаксации и равновесные

значения. Таким образом, задача заключается в переходе от (3.24) к уравнениям, аналогичным уравнениям Блоха, а также в определении поправок, связанных с эффектом памяти.

Как было показано в §2.4, марковский случай характеризуется тем, что в нем отсутствует зависимость коэффициентов фононного трения от частоты. В формулах, определяющих (3.26), это соответствует случаю, когда безразмерный параметр  $p = \omega / \Omega \ll 1$ . Принимая во внимание, что по условию задачи внешнее магнитное поле является слабым ( $p_0 = \omega_0 / \Omega \ll 1$ ), представим (3.49)-(3.53), в ряд по  $p$  и  $p_0$ , ограничившись несколькими первыми слагаемыми, для двух предельных случаев, соответствующих низким и высоким эффективным температурам кристалла.

Итак, в случае, когда  $T_{eff} \ll 1$ , из (3.49)-(3.53), получим

$$T_{xx}^{(2.1)}(\omega) = T_{yy}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi}{2\Omega}(p_0^5 + 10p_0^3p^2 + 5p_0p^4), \quad (3.54)$$

$$T_{xx}^{(2.2)}(\omega) = T_{yy}^{(2.2)}(\omega) = \frac{P}{4\Omega}(1 + 2p^2), \quad (3.55)$$

$$T_{xy}^{(2.1)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{P_0}{4\Omega}(1 + 6p^2), \quad (3.56)$$

$$T_{xy}^{(2.2)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.2)}(\omega) = \frac{\pi}{2\Omega}(p^5 + 10p^3p_0^2 + 5pp_0^4), \quad (3.57)$$

$$T_{zz}^{(2.1)}(\omega) = 0, \quad T_{zz}^{(2.2)}(\omega) = \frac{P}{4\Omega}(1 + 2p^2). \quad (3.58)$$

В противоположном случае высоких температур, когда  $T_{eff} \gg 1$ , из (3.49)-(3.53), найдем

$$T_{xx}^{(2.1)}(\omega) = T_{yy}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi T_{eff}}{2\Omega}(p^4 + 6p_0^2p^2 + p_0^4), \quad (3.59)$$

$$T_{xx}^{(2.2)}(\omega) = T_{yy}^{(2.2)}(\omega) = \frac{T_{eff}P}{3\Omega}(1 + 3p^2), \quad (3.60)$$

$$T_{xy}^{(2.1)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{T_{eff}P_0}{3\Omega}(1 + 9p^2), \quad (3.61)$$

$$T_{xy}^{(2.2)}(\omega) = -T_{yx}^{(2.2)}(\omega) = \frac{2\pi T_{eff}PP_0}{\Omega}(p_0^2 + p^2), \quad (3.62)$$

$$T_{zz}^{(2.1)}(\omega) = -\frac{\pi T_{eff}P^4}{2\Omega}, \quad T_{zz}^{(2.2)}(\omega) = \frac{T_{eff}P}{3\Omega}(1 + 3p^2). \quad (3.63)$$

Используя (3.33)-(3.34), а также правила работы с единичным антисимметричным тензором, выпишем конкретный вид коэффициентов фононного трения. Пропуская все промежуточные вычисления, запишем окончательный ответ:

$$\gamma_x = \gamma_y = 0, \quad (3.64)$$



$$\gamma_z = \beta_1 (\tilde{U}_x + \tilde{U}_y) T_{xy}^{(1)}, \quad (3.65)$$

а также для тензора  $\gamma_{ij}(\omega)$ :

$$\gamma_{xx}(\omega) = -\beta_1 (\tilde{U}_z T_{yy}^{(2)}(\omega) + \tilde{U}_y T_{zz}^{(2)}(\omega)), \quad (3.66)$$

$$\gamma_{yx}(\omega) = -\gamma_{xy}(\omega) = \beta_1 \tilde{U}_z T_{xy}^{(2)}(\omega), \quad (3.67)$$

$$\gamma_{yy}(\omega) = -\beta_1 (\tilde{U}_z T_{xx}^{(2)}(\omega) + \tilde{U}_x T_{zz}^{(2)}(\omega)), \quad (3.68)$$

$$\gamma_{zz}(\omega) = -\beta_1 (\tilde{U}_y T_{xx}^{(2)}(\omega) + \tilde{U}_x T_{yy}^{(2)}(\omega)), \quad (3.69)$$

$$\gamma_{xz}(\omega) = \gamma_{zx}(\omega) = 0, \quad \gamma_{yz}(\omega) = \gamma_{zy}(\omega) = 0, \quad (3.70)$$

где  $\beta_1$  определяется (3.32).

Вернемся к стохастическому уравнению (3.24). Вычисляя от (3.24) преобразование Фурье, найдем

$$-i\omega s_i(\omega) - \gamma_0 [\mathbf{s}(\omega) \times \mathbf{B}]_i = s_0 \gamma_i^\omega - \gamma_{ij}(\omega) s_j(\omega) + \xi_i(\omega). \quad (3.71)$$

Подставляя теперь (3.47)-(3.48) и (3.64)-(3.70) с учетом (3.54)-(3.63) в (3.71) и вычисляя обратное преобразование Фурье, получим марковские уравнения релаксации проекций спинового момента электрона проводимости в двух предельных случаях, соответствующих низким и высоким эффективным температурам кристалла.

В случае, когда  $T_{eff} \ll 1$ , из (3.71), имеем

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i^{(0)} - s_i(t)}{\tau_i} + \sum_{l=0}^5 a_{ij}^{(l)} \frac{d^l s_j(t)}{dt^l} + \xi_i(t), \quad (3.72)$$

где  $s_i^{(0)}$  и  $\tau_i$  – равновесные значения и времена релаксации  $i$ -ой проекции вектора спинового момента,  $a_{ij}^{(l)}$  – тензор, компоненты которого определяют немарковские поправки в уравнение (3.72):

$$\begin{aligned} s_x^{(0)} = s_y^{(0)} = 0, \quad s_z^{(0)} = s_0, \\ \frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{\tau_y} = \frac{\pi\beta_1\bar{\pi}_\perp^2}{2\Omega} p_0^5, \quad \frac{1}{\tau_z} = \frac{\pi\beta_1}{2\Omega} (\bar{\pi}_z^2 + \bar{\pi}^2) p_0^5, \\ a_{xx}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1}{2\Omega} \left( 0, \quad -\frac{\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}^2}{2\pi\Omega}, \quad \frac{10}{\Omega^2} p_0^3 \bar{\pi}_\perp^2, \quad \frac{\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}^2}{\pi\Omega^3}, \quad -\frac{5p_0}{\Omega^4} \bar{\pi}_\perp^2, \quad 0 \right), \\ a_{xy}^{(l)} = -a_{yx}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1\bar{\pi}_\perp^2}{2\Omega} \left( \frac{2\Omega\omega_0}{\pi\beta_1\bar{\pi}_\perp^2} \left( 1 + \frac{\beta_1\bar{\pi}_\perp^2}{4\Omega^2} \right), \quad -\frac{5}{\Omega}, \quad -\frac{3p_0}{\pi\Omega^2}, \quad \frac{10p_0^2}{\Omega^3}, \quad 0, \quad -\frac{1}{\Omega^5} \right), \\ a_{yy}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1}{2\Omega} \left( 0, \quad -\frac{\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2}{2\pi\Omega}, \quad \frac{10}{\Omega^2} p_0^3 \bar{\pi}_\perp^2, \quad \frac{\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2}{\pi\Omega^3}, \quad -\frac{5p_0}{\Omega^4} \bar{\pi}_\perp^2, \quad 0 \right), \end{aligned} \quad (3.73)$$

$$a_{zz}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1(\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2)}{2\Omega} \left( 0, -\frac{1}{2\pi\Omega}, \frac{10p_0^3}{\Omega^2}, \frac{1}{\Omega^3}, -\frac{5p_0}{\pi\Omega^4}, 0 \right),$$

$$a_{xz}^{(l)} = a_{zx}^{(l)} = 0, \quad a_{yz}^{(l)} = a_{zy}^{(l)} = 0,$$

В противоположном случае высоких температур, когда  $T_{eff} \gg 1$ , из (3.71), найдем

$$\frac{ds_i}{dt} = \frac{s_i^{(0)} - s_i(t)}{\tau_i} + \sum_{l=0}^4 a_{ij}^{(l)} \frac{d^l s_j(t)}{dt^l} + \xi_i(t), \quad (3.74)$$

где

$$s_x^{(0)} = s_y^{(0)} = 0, \quad s_z^{(0)} = s_0 \frac{p_0}{T_{eff}},$$

$$\frac{1}{\tau_x} = \frac{1}{\tau_y} = \frac{\pi\beta_1\bar{\pi}_\perp^2}{2\Omega} p_0^4 T_{eff}, \quad \frac{1}{\tau_z} = \frac{\pi\beta_1}{2\Omega} (\bar{\pi}_z^2 + \bar{\pi}^2) p_0^4 T_{eff}, \quad (3.75)$$

$$a_{xx}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1 T_{eff}}{2\Omega} \left( 0, -\frac{2(\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}^2)}{3\pi\Omega}, \frac{6p_0^2\bar{\pi}_\perp^2}{\Omega^2}, 2\frac{\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}^2}{\pi\Omega^3}, -\frac{\bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}^2}{\Omega^4} \right),$$

$$a_{xy}^{(l)} = -a_{yx}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1 T_{eff} \bar{\pi}_\perp^2}{\Omega} \left( \frac{\Omega\omega_0}{\pi\beta_1 T_{eff} \bar{\pi}_\perp^2} \left( 1 + \frac{\beta_1 T_{eff} \bar{\pi}_\perp^2}{3\Omega^2} \right), -\frac{2p_0^3}{\Omega}, -\frac{3p_0^2}{\pi\Omega^2}, \frac{2p_0}{\Omega^2}, 0 \right),$$

$$a_{yy}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1 T_{eff}}{2\Omega} \left( 0, -\frac{2(\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2)}{3\pi\Omega}, \frac{6p_0^2\bar{\pi}_\perp^2}{\Omega^2}, 2\frac{\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2}{\pi\Omega^3}, -\frac{\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2}{\Omega^4} \right),$$

$$a_{zz}^{(l)} = \frac{\pi\beta_1 T_{eff} (\bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}^2)}{2\Omega} \left( 0, -\frac{2}{3\pi\Omega}, \frac{6p_0^2}{\Omega^2}, \frac{2}{\pi\Omega^3}, \frac{1}{\Omega^4} \right),$$

$$a_{xz}^{(l)} = a_{zx}^{(l)} = 0, \quad a_{yz}^{(l)} = a_{zy}^{(l)} = 0.$$

где  $\bar{\pi}_\perp^2 = \bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}_y^2$ ,  $\bar{\pi}^2 = \bar{\pi}_x^2 + \bar{\pi}_y^2 + \bar{\pi}_z^2$ .

Следует отметить, что стохастические уравнения, подобные (3.72) и (3.74), но без учета немарковских поправок, были впервые получены на основе метода квантовых нелинейных стохастических уравнений в работах [222]-[223] для спиновых моментов электронов в низкоразмерных структурах (в полупроводниковых квантовых ямах).

Рассмотрим более подробно полученные выше формулы. В первую очередь следует отметить, что компоненты тензора  $a_{ij}^{(l)}$  имеют порядок  $a_{ij}^{(l)} \sim \beta_1 \bar{\pi}^2 / \Omega^{l+1} \ll 1$ . Другими словами, как и следовало ожидать, в марковском приближении поправки, обусловленные эффектом памяти, очень малы. Во-вторых, как показывают формулы (3.73) и (3.75), времена релаксации в общем случае зависят от состояния электрона, и определяются компонентами среднего значения его кинематического импульса.

Кроме этого, необходимо отметить здесь еще одну особенность. Как известно [348, 350], в трехмерном кристалле с  $n$  атомами в одной элементарной ячейке фононный спектр состоит из  $3n$  ветвей с разными частотами  $\omega_i(\mathbf{q})$  ( $i=1,2,\dots,3n$ ). При этом частоты трех из них стремятся к нулю, когда  $q \rightarrow 0$ , и соответствуют акустическим ветвям колебаний кристаллической решетки, тогда как остальные  $3(n-1)$  ветви называются оптическими. Полученные выше формулы определяют времена релаксации, обусловленные акустической ветвью колебаний решетки. Поэтому возникает вопрос о том, как сильно влияют оптические ветви на процесс спиновой релаксации в настоящей модели. В общем случае точный ответ можно получить только после конкретных расчетов, поскольку оптические и акустические фононы имеют разный закон дисперсии. Но, не смотря на это, все же можно привести определенные рассуждения по этому поводу, используя для этого формулы (3.73) и (3.75), а также некоторые свойства спектра оптических фононов. Действительно, согласно (3.73) и (3.75), времена релаксации определяются параметром  $p_0 = \omega_0 / \Omega$ , где  $\Omega = c_a q_d$  – некоторая характерная частота фононного окружения. Если теперь рассматривать небольшую окрестность центра зоны Бриллюэна, то с большой точностью для оптических фононов можно считать, что  $\omega_o(\mathbf{q}) \approx \Omega_o$ , т.е. является константой и не зависит от волнового вектора. При этом, поскольку частота оптических колебаний много больше акустических ( $\Omega_o \gg \Omega$ ), то отношение  $p_0^o / p_0^a = \Omega / \Omega_o \ll 1$ . Это означает, что скорость спиновой релаксации за счет оптических фононов в данной модели будет заметно меньше, чем при взаимодействии с акустической ветвью колебаний кристаллической решетки. Но строгое доказательство этого утверждения возможно только на основе математических расчетов.

Сравним теперь полученные выражения для времени релаксации с известными в литературе результатами.

Для этого отметим, что рассмотренный в данной работе механизм релаксации спинового момента по своему физическому содержанию близок к механизму, связанному с модуляцией кристаллического поля. Это видно из структуры гамильтониана (3.4), в котором локальное электрическое поле, вызванное деформацией решетки, непосредственно действует на спин электрона. Отличие же заключается в том, что в данной модели рассматривается зонный электрон, в то время как в работах [47, 339-341] электрон взаимодействует с периодическим потенциалом решетки и его возмущениями, связанными с колебаниями атомов. Другими словами, рассмотренный в данной работе механизм спиновой релаксации относится к классу механизмов, обусловленных модуляцией электрического поля, которым в данном случае является поле деформации. Это говорит о том, что зависимость времени релаксации от

магнитного поля и температуры кристалла должна совпадать с выражением для  $\tau$ , который для прямого процесса имеет вид [47]:

$$\frac{1}{\tau} \sim \alpha B_0^5 \coth\left(\frac{\hbar \omega_0}{2k_B T}\right) = \begin{cases} \alpha B_0^5, & 2k_B T / \hbar \omega_0 \ll 1, \\ \alpha' B_0^4 T, & 2k_B T / \hbar \omega_0 \gg 1, \end{cases} \quad (3.76)$$

где  $\alpha$  и  $\alpha'$  – некоторые размерные константы, определяющиеся матричным элементом возмущения кристаллического поля, вызванного колебаниями решетки. Сравнивая (3.73) и (3.75) с (3.76) несложно видеть, что они отличаются постоянными множителями, зависящими от параметров системы, что подтверждает приведенные рассуждения.

В заключение к этому параграфу, оценим величину времени релаксации спинового момента в данной модели считая, что  $\overline{g(\boldsymbol{\pi})} \approx 2$  и  $\overline{\pi_x} = \overline{\pi_y} = \overline{\pi_z} = \overline{\pi}$ . Для этого перепишем (3.73) и (3.75) в виде

$$\frac{1}{\tau} \sim \begin{cases} \Omega \beta_2 p_0^5, & T_{eff} \ll 1, \\ \Omega \beta_2 p_0^4 T_{eff}, & T_{eff} \gg 1, \end{cases}$$

где  $\beta_2 = E_{el} / E$ ,  $E_{el} = \overline{\pi^2} / 2m$  – кинетическая энергия электрона,  $E$  – параметр, имеющий размерность энергии:

$$E = \frac{\Omega^2}{\pi \beta_1 m} = \frac{3Mm^3 c^4 c_a^3}{4\pi^2 \hbar \sigma^2 q_d}. \quad (3.77)$$

Для типичных значений  $q_d \sim 10^8$  рад·см<sup>-1</sup>,  $c_a \sim 10^5$  см·с<sup>-1</sup>,  $M \sim 10^{-22}$  г ( $M_{Si} \approx 6.52 \cdot 10^{-22}$  г),  $\sigma \sim 10^{-11}$  эрг [350]:

$$E \sim 10^6 \text{ эВ.}$$

Тогда, например, для кристалла в магнитном поле  $B_0 = 10^4$  Гс и энергией электрона  $E_{el} \sim 1$  эВ время релаксации имеет порядок:

$$\tau \sim \begin{cases} 10, & T \ll 10^2 \text{ К}, \\ 10^2 T^{-1}, & 10^2 < T < T_m \text{ К}, \end{cases} \quad (3.78)$$

где  $T_m$  – температура плавления,  $\tau$  измеряется в секундах. При этом, например, для механизма Эллиота-Яфета в кремнии  $\tau \sim 10^{-5} - 10^{-7}$  с [354]-[355] в зависимости от температуры и степени легирования.

Большие времена релаксации в данной модели могут быть связаны тем, что, во-первых, рассматривается случай слабого электрон-фононного взаимодействия, а во-вторых, спин-орбитальное взаимодействие, приводящее к релаксации спинового момента, является релятивистской поправкой, причем поправкой второго порядка по отношению скорости

электрона к скорости света. При этом определенное значение в данном вопросе также могут играть сделанные приближения, в частности, приближение замороженного конфигурационного движения. Учет динамики конфигурационной «подсистемы» приведет к изменению времени спиновой релаксации, но насколько увеличится или уменьшится его значение, могут показать только конкретные вычисления.

Также следует отметить, что спиновые процессы релаксации в конденсированных средах в общем случае являются многоканальными, причем время релаксации определяется через сумму скоростей релаксации по разным каналам. В данном параграфе рассмотрен один из возможных каналов, скорость релаксации  $\tau^{-1}$  в котором, согласно (3.78), является очень низкой, и составляет незначительную поправку к значению  $\tau_{\Sigma}^{-1} = \sum \tau_j^{-1}$  по всем каналам.

Определив основные характеристики процесса релаксации спинового момента в марковском случае, перейдем к исследованию свойств спиновой подсистемы учетом эффекта памяти, вычислив на основе стохастического уравнения (3.24) спиновую динамическую восприимчивость. Этому вопросу посвящен следующий параграф.

### **§3.3 Динамическая восприимчивость спиновой подсистемы**

#### **3.3.1 Динамическая восприимчивость**

В предыдущей главе при исследовании радиационного трения спинового момента были выявлены некоторые особенности спиновой восприимчивости, связанные с эффектом памяти. В частности, было показано, что спиновая подсистема приобретает новые свойства, проявляющиеся в возникновении дисперсии поперечного времени релаксации, дополнительных резонансных частот и области «прозрачности» в линии поглощения, ее асимметрии для правой и левой круговых поляризации магнитного поля, свидетельствующих об оптической активности спиновой подсистемы, обусловленной эффектом памяти, а также к изменению (сдвигу) частоты прецессии спинового момента электрона. Как упоминалось в §2.3, в спинтронике оптическая активность играет большую роль, и является одним из основных эффектов для экспериментального исследования свойств спиновых систем. Поэтому важно определить, возникают ли в рассматриваемой системе указанные выше особенности, т.е. другими словами, ответить на вопросы: приводит ли немарковский характер взаимодействия спиновых моментов электронов и фононного окружения, к оптической активности этой системы; каковы проявления в данном случае эффекта памяти. В не меньшей степени интересен вопрос о том, происходит ли изменение частоты прецессии спинового момента электрона проводимости. Поскольку данная частота является важным параметром подсистемы, влияющим на ее

состояния и их изменение, т.е. на управление этими изменениями. Решению указанных вопросов и посвящены оставшиеся параграфы этой главы.

Для определения динамической восприимчивости, следуя работе [357], подействуем на систему внешним переменным магнитным полем, которое удобно записать в виде (см. (2.35))

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{x}_0 B_1 \cos(\omega t) + \mathbf{y}_0 B_1 \sin(\omega t) + \mathbf{z}_0 B_0 = \mathbf{B}_\perp(t) + \mathbf{z}_0 B_0, \quad (3.79)$$

позволяющем рассматривать как левую ( $\omega > 0$ ), так и правую ( $\omega < 0$ ) круговые поляризации. Амплитуды  $B_1$  и  $B_0$  предполагаются достаточно слабыми, для того чтобы кристалл можно было считать изотропным.

В общем случае решение уравнений (3.24) с магнитным полем (3.79) возможно только численными методами. В данном параграфе будет рассмотрен частный случай, допускающий точное аналитическое решение (3.24), и в то же время демонстрирующий некоторые характерные особенности изучаемой системы, связанные с эффектом памяти.

При выводе уравнений (3.24) было использовано приближение замороженного конфигурационного движения электрона, заключающееся в замене операторов физических величин, ответственных за это движение, средними значениями, предполагая, что они либо известны (из эксперимента), либо могут быть определены из дополнительных расчетов. В частности, как показали вычисления (формула (3.26)), коэффициенты фононного трения  $\gamma_{ij}(\tau)$  зависят от среднего значения проекций кинематического импульса  $\bar{\pi}_i$  ( $i = x, y, z$ ). Будем далее считать, что электрон совершает квазизамкнутые траектории в плоскости  $xu$ , т.е., другими словами, рассмотрим случай, когда среднее значение проекции  $\bar{\pi}_z$  много меньше, чем  $\bar{\pi}_x$  и  $\bar{\pi}_y$ . Кроме этого, для максимального упрощения считаем  $\bar{\pi}_x = \bar{\pi}_y = \bar{\pi}$ . Тогда, как показывают формулы (3.66) и (3.68),  $\gamma_{xx}(\tau) = \gamma_{yy}(\tau)$ , что делает возможным аналитическое вычисление динамической восприимчивости на основе уравнений (3.24).

Перед тем как непосредственно перейти к вычислениям, рассмотрим здесь один физический аспект приближения замороженного конфигурационного движения. Как хорошо известно [347], если пренебречь спин-орбитальным взаимодействием, то конфигурационные и спиновые «подсистемы» электрона становятся независимыми. При воздействии на зонный электрон высокочастотного магнитного поля возникнут переходы между уровнями Ландау, а также между двумя спиновыми уровнями, которые определяют соответственно циклотронный и парамагнитные резонансы. Учет спин-орбитальной связи приводит к взаимодействию указанных «подсистем», что вызывает кардинальное изменение динамики квазичастиц. «Зацепление» конфигурационных и спиновых движений, как указывалось в работе [347], делает невозможным разделение переходов на чисто конфигурационные и чисто спиновые. При этом

можно лишь говорить о преимущественно конфигурационных и преимущественно спиновых переходах. Другими словами, использование приближения замороженного конфигурационного движения означает, что в данной модели из возможных вариантов рассматриваются только преимущественно спиновые переходы, приводящие к парамагнитному резонансу. В этом, фактически, заключается физическое содержание указанного приближения.

Это в то же время означает, что основной целью данного параграфа является исследование парамагнитного резонанса спинового момента электронов проводимости с учетом эффекта памяти.

Итак, используя условия, сформулированные выше, имеем

$$\gamma_{ij}(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_{xx}(\tau) & \gamma_{xy}(\tau) & 0 \\ \gamma_{yx}(\tau) & \gamma_{yy}(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{zz}(\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$\gamma_{xx}(\tau) = \gamma_{yy}(\tau), \quad \gamma_{xy}(\tau) = -\gamma_{yx}(\tau).$$

Перейдем к решению (3.24). Усредняя стохастические уравнения (3.24) по равновесному состоянию фонованного термостата и учитывая, что  $\langle \xi_i(t) \rangle_0 = 0$ , получим следующую систему

$$\begin{cases} \frac{ds_z}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{zz}(\tau) s_z(t_1) = s_0 \gamma_z + \omega_1 (s_x(t) \cos(\omega t) - s_y(t) \sin(\omega t)), \\ \frac{ds_x}{dt} - \omega_0 s_y(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{xx}(\tau) s_x(t_1) = -\omega_1 s_z(t) \sin(\omega t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{yx}(\tau) s_y(t_1), \\ \frac{ds_y}{dt} + \omega_0 s_x(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{yy}(\tau) s_y(t_1) = \omega_1 s_z(t) \cos(\omega t) - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{yx}(\tau) s_x(t_1), \end{cases} \quad (3.80)$$

где для сокращения обозначений предполагаем, что  $s_i(t) \equiv \langle s_i(t) \rangle$  ( $i = x, y, z$ ).

Делая замену переменных:

$$s_{\pm}(t) = s_x(t) \pm i s_y(t)$$

и переходя к новой системе координат:

$$s_{\pm}(t) = \begin{pmatrix} u(t) e^{+i\omega t} \\ v(t) e^{-i\omega t} \end{pmatrix},$$

преобразуем уравнения (3.80) к виду

$$\begin{cases} \frac{ds_z}{dt} = \frac{i\omega_1}{2}(u(t) - v(t)) + F_z(t), \\ \frac{du}{dt} + i\Delta\omega u(t) = i\omega_1 s_z(t) + F_+(t), \\ \frac{dv}{dt} - i\Delta\omega v(t) = -i\omega_1 s_z(t) + F_+(t), \end{cases} \quad (3.81)$$

где  $\Delta\omega = \omega + \omega_0$ ,

$$F_z(t) = s_0 \gamma_z - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \gamma_{zz}(\tau) s_z(t_1), \quad F_{\pm}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) \begin{pmatrix} u(t_1) \\ v(t_1) \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) = (\gamma_{xx}(\tau) \pm i\gamma_{yx}(\tau)) e^{\mp i\omega\tau}. \quad (3.83)$$

Заметим, что система уравнений (3.81) с выражениями (3.82)-(3.83) по форме полностью идентична системе (2.46), рассмотренной в предыдущей главе. Поэтому можно пропустить решение (3.81), воспользовавшись результатами §2.3.

Согласно §2.3, решение системы (3.81) имеет вид

$$\begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \\ s_z(t) \end{pmatrix} = s_0 \begin{pmatrix} A & -B & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 1 \end{pmatrix},$$

где

$$A = \alpha \omega_1 T_1 \frac{\Delta\omega_2 T_1}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad B = \alpha \omega_1 T_1 \frac{1}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2},$$

$$C = \alpha \frac{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2}{1 + (\Delta\omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2},$$

$$\alpha = \gamma_z T_2 = \frac{\gamma_z}{\gamma_{zz}(0)},$$

причем

$$\Delta\omega_2 = \omega + \omega_0 + \frac{i}{2}(\tilde{\gamma}_-(0) - \tilde{\gamma}_+(0)), \quad (3.84)$$

$$\frac{1}{T_1} = \frac{1}{2}(\tilde{\gamma}_+(0) + \tilde{\gamma}_-(0)), \quad \frac{1}{T_2} = \gamma_{zz}(0), \quad (3.85)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  определяют поперечное и продольное времена релаксации.

При этом, согласно (2.38) и (2.64):

$$\begin{pmatrix} s_x(t) \\ s_y(t) \end{pmatrix} = B_1(\mathcal{X}'(\omega) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\mathcal{X}''(\omega) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \end{pmatrix},$$

где



$$\chi'(\omega) = \chi_0 \alpha \omega_0 T_1 \frac{\Delta \omega_2 T_1}{1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad \chi''(\omega) = \chi_0 \alpha \omega_0 T_1 \frac{1}{1 + (\Delta \omega_2 T_1)^2 + \omega_1^2 T_1 T_2}, \quad (3.86)$$

$$\alpha = \gamma_z / \gamma_{zz}(0), \quad \chi_0 = s_0 / B_0.$$

Для определения  $T_1$  и  $T_2$ , а также исследования действительной и мнимой частей динамической восприимчивости (3.86), вычислим частотную зависимость  $\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau)$  и  $\gamma_{zz}(\tau)$ . Используя результаты предыдущего параграфа, представим  $\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau)$  и  $\gamma_{zz}(\tau)$  в виде

$$\tilde{\gamma}_{\pm}(\tau) = \tilde{\gamma}_1(\tau) \pm i \tilde{\gamma}_2(\tau), \quad (3.87)$$

$$\gamma_{zz}(\tau) = \gamma_{zz}^{(1)}(\tau) + i \gamma_{zz}^{(2)}(\tau), \quad (3.88)$$

где согласно (3.83):

$$\tilde{\gamma}_1(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) + \gamma_{yx}(\tau) \sin(\omega\tau), \quad (3.89)$$

$$\tilde{\gamma}_2(\tau) = \gamma_{xx}(\tau) \sin(\omega\tau) + \gamma_{yx}(\tau) \cos(\omega\tau). \quad (3.90)$$

Частотная зависимость  $\gamma_{zz}^{(1)}(\omega)$  и  $\gamma_{zz}^{(2)}(\omega)$  определяется формулами (3.69) и (3.59)-(3.60), в которых необходимо заменить частоту  $\omega$  на  $\tilde{\omega}$ , где  $\tilde{\omega}$  – бегущая частота преобразования Фурье. Устремляя теперь в (3.59)-(3.60)  $\tilde{\omega}$  к нулю и подставляя получившиеся выражения в (3.69), найдем

$$\gamma_{zz}^{(1)}(0) = \text{Re}\{\gamma_{zz}(0)\} = \beta_2 \Omega |p_0|^5 \coth\left(\frac{|p_0|}{T_{eff}}\right), \quad (3.91)$$

$$\gamma_{zz}^{(2)}(0) = \text{Im}\{\gamma_{zz}(0)\} \equiv 0,$$

где по-прежнему  $\beta_2 = E_{el} / E$ , а  $E$  определяется формулой (3.77).

Для определения  $\tilde{\gamma}_{\pm}(\tilde{\omega})$  заметим, что

$$\tilde{\gamma}_1(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \gamma_{xx}(\tau) \cos(\omega\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \gamma_{yx}(\tau) \sin(\omega\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau}, \quad (3.92)$$

$$\tilde{\gamma}_2(\tilde{\omega}) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \gamma_{xx}(\tau) \sin(\omega\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau} - \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \gamma_{yx}(\tau) \cos(\omega\tau) e^{i\tilde{\omega}\tau}. \quad (3.93)$$

Устремляя в (3.92)-(3.93)  $\tilde{\omega}$  к нулю, получим

$$\tilde{\gamma}_1(0) = \text{Re}\{\gamma_{xx}(\omega)\} + \text{Im}\{\gamma_{yx}(\omega)\}, \quad (3.94)$$

$$\tilde{\gamma}_2(0) = \text{Im}\{\gamma_{xx}(\omega)\} - \text{Re}\{\gamma_{yx}(\omega)\}. \quad (3.95)$$

Подставляя теперь (3.66)-(3.67) в (3.94)-(3.95), окончательно найдем

$$\tilde{\gamma}_1(0) = \beta_2 \Omega \left( 2|p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) + |p|^5 \coth\left(\frac{|p|}{T_{eff}}\right) \right), \quad (3.96)$$

$$\tilde{\gamma}_2(0) = -\frac{\beta_2 \Omega}{\pi} \left( p F(p, T_{eff}) + 2p_+ F(p_+, T_{eff}) \right). \quad (3.97)$$

Рассмотрим теперь более подробно полученные соотношения.

### 3.3.2 Анализ и обсуждение полученных результатов

Определим, к каким особенностям приводит наличие эффекта памяти, вычислив в первую очередь продольное и поперечное времена релаксации спинового момента. Используя (3.85) и (3.87)-(3.88), а также (3.96)-(3.97), несложно показать, что

$$\frac{1}{T_{tr}(\omega)} = \tilde{\gamma}_1(0) = \beta_2 \Omega \left( 2|p_+|^5 \coth\left(\frac{|p_+|}{T_{eff}}\right) + |p|^5 \coth\left(\frac{|p|}{T_{eff}}\right) \right), \quad (3.98)$$

$$\frac{1}{T_l} = \gamma_{zz}(0) = \beta_2 \Omega |p_0|^5 \coth\left(\frac{|p_0|}{T_{eff}}\right), \quad (3.99)$$

где

$$p_0 = \frac{\omega_0}{\Omega}, \quad p_+ = \frac{\omega + \omega_0}{\Omega}.$$

Заметим, что как продольное, так и поперечное времена релаксации зависят от температуры кристалла. При этом поперечное время релаксации, в отличие от  $T_l$ , является в то же время функцией частоты внешнего магнитного поля. Эту особенность, как и в случае радиационного трения (см. раздел 2.3.3), можно рассматривать как эффект дисперсии времени релаксации. В марковском пределе, когда мы пренебрегаем этим эффектом, из (3.98) и (3.99) следует:  $T_l = 2T_{tr}(0)$ , что полностью согласуется с результатами предыдущих вычислений (см. формулы (3.73) и (3.75) при  $\bar{\pi}_z \ll \bar{\pi}_x = \bar{\pi}_y = \bar{\pi}$ ).

Рассмотрим асимптотическое поведение (3.98) и (3.99) при низких и высоких эффективных температур кристалла. В случае, когда  $T_{eff} \ll 1$ , имеем

$$\frac{1}{T_{tr}(\omega)} = \beta_2 \Omega \left( 2|p_+|^5 + |p|^5 \right), \quad \frac{1}{T_l} = \beta_2 \Omega |p_0|^5, \quad (3.100)$$

при этом в противоположном случае, при  $T_{eff} \gg 1$ , найдем

$$\frac{1}{T_{tr}(\omega)} = \beta_2 \Omega T_{eff} \left( 2p_+^4 + p^4 \right), \quad \frac{1}{T_l} = \beta_2 \Omega T_{eff} p_0^4. \quad (3.101)$$

Отметим, что зависимость  $T_{tr}$  от  $\omega$  в (3.100) и (3.101) подобна зависимости, рассмотренной во второй главе (формула (2.91)), но имеет более высокую степень частоты.

Построим графики зависимости поперечного времени релаксации от частоты внешнего поля и температуры кристалла. Для этого введем следующие обозначения:

$$y = \frac{\omega}{\omega_0}, \quad \frac{1}{T_0} = \beta_2 \Omega p_0^5, \quad \delta = \frac{p_0}{T_{eff}} = \frac{\hbar \omega_0}{2k_B T}, \quad (3.102)$$

и перепишем (3.98) и (3.99) в виде

$$\frac{T_{tr}(y)}{T_0} = \frac{1}{|y|^5 \coth(\delta|y|) + 2|1+y|^5 \coth(\delta|1+y|)}, \quad (3.103)$$

$$\frac{T_l}{T_0} = \coth\left(\frac{|p_0|}{T_{eff}}\right). \quad (3.104)$$

В этих формулах параметр  $T_0$  совпадает с продольным временем релаксации в случае низких эффективных температур (формула (3.100)). В частности, для кристалла в магнитном поле  $B_0 = 10^4$  Гс и  $E_{el} = 1$  эВ этот параметр имеет порядок  $T_0 \sim 10$  с.

График зависимости функции (3.103) от переменной  $y$  при различных значениях параметра  $\delta$ , представлен на Рис. 3.1(А).

Согласно этому рисунку, частотная зависимость  $T_{tr}$ , как и в случае радиационного трения, имеет резонансный характер, причем частота  $\omega_R$ , при которой время релаксации максимально, определенным образом зависит от параметра  $\delta$ , т.е. от температуры кристалла. Кроме этого, Рис. 3.1(А) показывает различное поведение  $T_{tr}$  для правой и левой круговых поляризации магнитного поля, т.е. асимметрию между правым и левым. Для левой поляризации ( $\omega > 0$ ) с ростом частоты время релаксации уменьшается. В случае же правой круговой поляризации ( $\omega < 0$ ) сначала происходит увеличение  $T_{tr}$ , достигающего максимального значения при  $\omega = \omega_R$ , и лишь потом, с дальнейшим ростом частоты, возникает его уменьшение. Таким образом, в случае взаимодействия с фоновым окружением также имеется существенное различие в свойствах спиновой подсистемы при действии на нее внешнего магнитного поля с правой и левой круговыми поляризациями, что можно рассматривать как оптическую активность этой системы, связанную в данной модели с эффектом памяти.

Здесь следует отметить один принципиальный момент. Как не сложно видеть из полученных выше формул и Рис. 3.1(А), частотная зависимость поперечного времени релаксации подобна зависимости в случае радиационного трения (см. Рис. 2.1). В связи с этим возникает вопрос, с чем связано это совпадение и какие условия могут его нарушать. Ответ заключается в том, что это совпадение является лишь частным специфическим случаем, связанным с определенным состоянием конфигурационной «подсистемы» электрона, когда средние значения проекций его кинематического импульса подчиняются условию:

$\bar{\pi}_z \ll \bar{\pi}_z = \bar{\pi}_z = \bar{\pi}$ . Поэтому в общем случае выражения для  $T_{tr}$ ,  $T_l$ , а также для динамической восприимчивости зависят от состояния электрона и при его вариациях будут происходить изменения в  $T_{tr}$ ,  $T_l$  и  $\hat{\chi}(\omega)$ . В частности, продольное время релаксации  $T_l$  в другом состоянии конфигурационной «подсистемы» может, так же как и  $T_{tr}$ , зависеть от частоты магнитного поля.

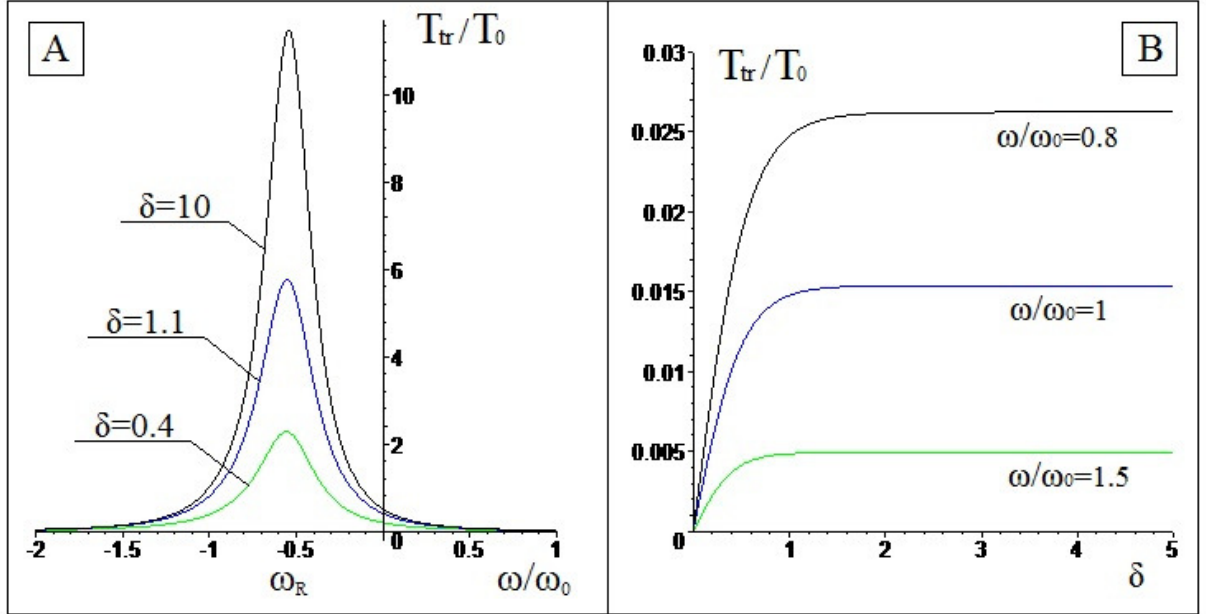


Рис. 3.1: Зависимость поперечного времени релаксации от отношения частот  $\omega/\omega_0$  и параметра  $\delta$ .

Определим асимптотическое поведение поперечного времени релаксации при  $|y| \gg 1$ . В этом случае  $T_{tr}(y) \sim \tanh(\delta|y|)/|y|^5$ , т.е.

$$T_{tr}(\omega) \sim \begin{cases} |\omega|^{-5}, & \text{при } \delta \gg 1, \\ \omega^{-4}, & \text{при } \delta \ll 1. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь график зависимости  $T_{tr}$  от параметра  $\delta$  при различных значениях отношения частот  $y = \omega/\omega_0$ . Он представлен на Рис. 3.1(B).

Характерной его особенностью является то, что при увеличении температуры кристалла  $T$ , т.е. уменьшении значений параметра  $\delta$ , время релаксации стремится к нулю. Это связано с тем, что при увеличении  $T$  возрастает число фононов, с которыми взаимодействует электрон, что в свою очередь создает усиление фононного трения, вызывающего процесс релаксации. Это видно уже из того, что гиперболический котангенс в (3.103) непосредственно связан со средним числом фононов (см. формула (3.13) для функции корреляции  $M_l(\mathbf{q}, \tau)$ ). В результате это приводит к уменьшению времени релаксации. Заметим, что данный факт нашел отражение и на

Рис. 3.1(А). В то же время уменьшение  $T$  создает противоположный эффект в виду сокращения числа фононов, с которыми взаимодействует электрон. Кроме этого, при определенных значениях  $\delta$ , как показывает Рис. 3.1(В), время релаксации становится постоянным, и не зависит от температуры. Произведем ее оценку.

Пусть при  $\delta \geq \delta^*$  функция  $T_{tr}(\delta)$  является константой. Тогда по определению  $\delta$ , найдем

$$T^* = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B\delta^*} = 6.7 \cdot 10^{-5} \frac{B_0}{\delta^*} \text{ К.} \quad (3.105)$$

Следует заметить, что, согласно Рис. 3.1(В),  $\delta^*$  зависит от  $\omega/\omega_0$ . Таким образом, (3.105) устанавливает связь между частотой магнитного поля и температурой кристалла, при которых  $T_{tr}(\delta) = \text{const}$ . Как несложно видеть из (3.105) и Рис. 3.1(В), эта температура является очень низкой, и лишь в сильных магнитных полях может иметь заметную величину.

Перейдем теперь к изучению динамической восприимчивости. В первую очередь определим выражение для  $\Delta\omega_2$ . Подставляя в (3.84) Фурье-образ от (3.87) при  $\tilde{\omega} = 0$ , получим

$$\Delta\omega_2 = \omega + \omega_0 + \gamma_2(0). \quad (3.106)$$

Как было выяснено в предыдущей главе (см. формула (2.58)), выражение (3.106) определяет эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости. Подробное его исследование будет произведено в следующем параграфе. Здесь же ввиду того, что, согласно (3.97),  $\gamma_2(0) \sim \beta_2 \ll 1$ , будем считать:

$$\Delta\omega_2 \approx \omega + \omega_0. \quad (3.107)$$

Тогда, подставляя формулы (3.103)-(3.104) и (3.107) в (3.86), окончательно найдем

$$\chi'(y) = \chi'_0 \frac{1+y}{(1+y)^2 + d^2 f(y, \delta) + \varepsilon^2 f^2(y, \delta)}, \quad (3.108)$$

$$\chi''(y) = \chi''_0 \frac{f(y, \delta)}{(1+y)^2 + d^2 f(y, \delta) + \varepsilon^2 f^2(y, \delta)}, \quad (3.109)$$

где введены обозначения:

$$f(y, \delta) = |y|^5 \coth(\delta|y|) + 2|1+y|^5 \coth(\delta|1+y|), \quad (3.110)$$

$$d = \frac{B_1}{B_0} \tanh^{1/2}(\delta), \quad \varepsilon = \frac{1}{T_0\omega_0} = \beta_2 p_0^4, \quad (3.111)$$

$$\chi'_0 = \chi_0 |p_0|^5 \tanh(\delta), \quad \chi''_0 = \chi_0 \beta |p_0|^9 \tanh(\delta).$$

Оценим в первую очередь порядок параметра  $\varepsilon$ . Для кристалла в магнитном поле  $B_0 \sim 10^4$  Гс и значением кинетической энергии электрона  $E_{el} \sim 1$  эВ из (3.111), найдем  $\varepsilon \sim 10^{-13}$ , т.е.  $\varepsilon$  является малым параметром данной модели.

Рассмотрим сначала действительную часть динамической восприимчивости (3.108), определяющую дисперсию в системе. Графики зависимости  $\chi'$  от частоты и температуры кристалла представлены на Рис. 3.2-3.3.

Согласно Рис. 3.2(A), при значениях параметра  $d < 1$   $\chi'(y)$  по форме совпадает с марковским случаем, следующим из решения уравнений Блоха. При этом с ростом температуры ( $\delta = 0.002$ ) в  $\chi'(y)$  возникает небольшая асимметрия, связанная с наличием дисперсии времени релаксации. При увеличении  $d$ , когда  $d > 1$ , происходит заметная деформация  $\chi'(y)$ , что демонстрирует рисунок 3.2(B).

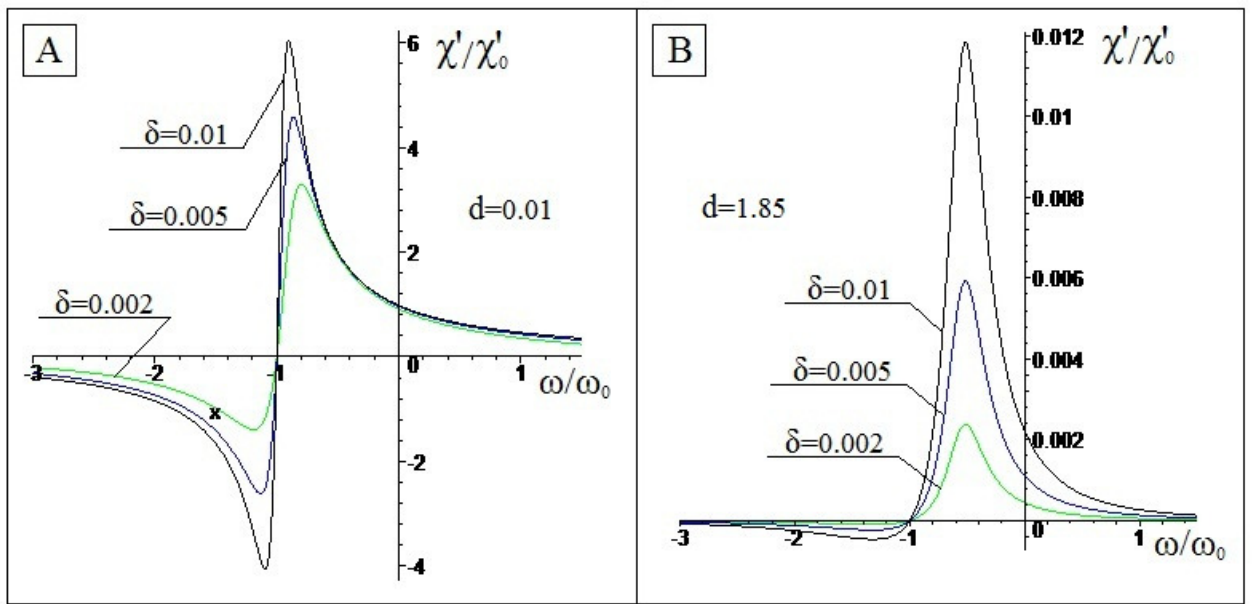


Рис. 3.2: Зависимость действительной части динамической восприимчивости  $\chi'$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при различных значениях параметров  $\delta$  и  $d$ .

Зависимость  $\chi'$  от температуры, как показывает Рис. 3.3, имеет ряд особенностей. В частности из Рис. 3.3(A) видно, что при определенном значении параметра  $\delta = \delta'_R$ , когда  $y \sim 1$ , дисперсия имеет максимальное значение. В то же время при  $y \gg 1$  (Рис. 3.3(B)) эта особенность отсутствует и при некотором  $\delta > \delta^*$ , являющимся функцией  $y$ ,  $d$  и  $\varepsilon$ ,  $\chi'(\delta)$  становится константой. Данные особенности связаны с зависимостью поперечного времени релаксации от температуры кристалла.

Определим в первую очередь значение параметра  $\delta = \delta'_R$ , при котором  $\chi'$  имеет максимальное значений. Для этого заметим, что, согласно Рис. 3.3(A),  $\delta'_R \ll 1$ . Учитывая, что  $y \sim 1$ , представим гиперболический котангенс в (3.110) в виде ряда по малому параметру. Тогда

$$f(y, \delta) \approx \frac{1}{\delta} (g(y) + \delta^2 g_1(y)), \quad (3.112)$$

где

$$g(y) = y^4 + 2(1+y)^4, \quad g_1(y) = y^6 + 2(1+y)^6.$$

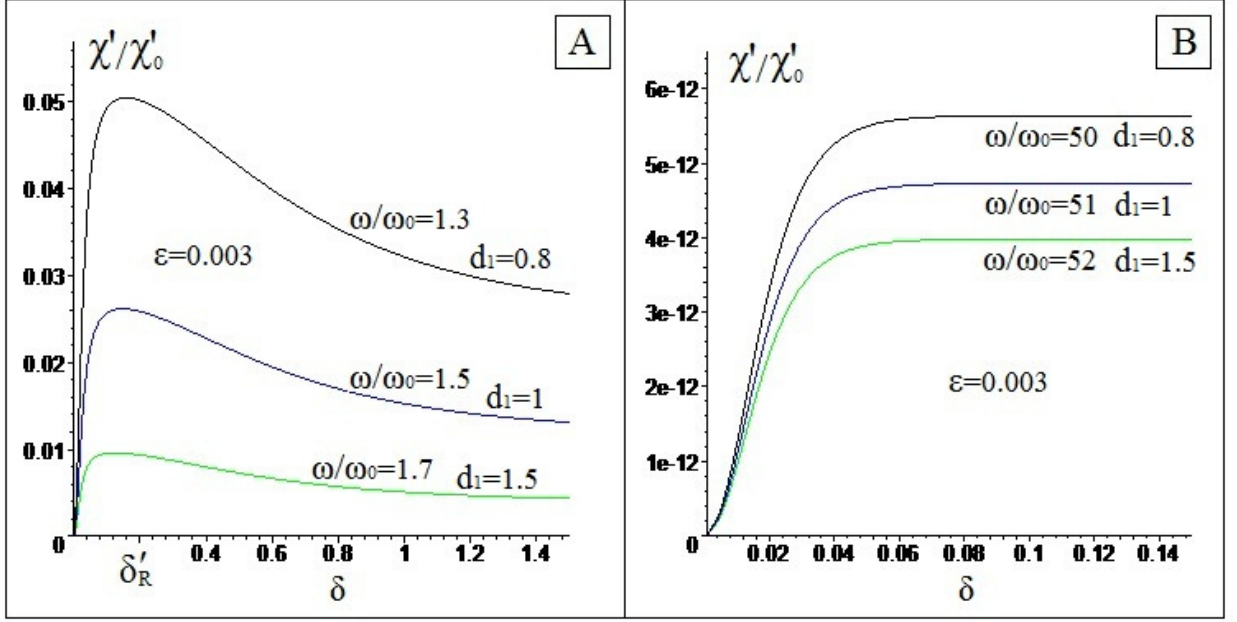


Рис. 3.3: Зависимость действительной части динамической восприимчивости  $\chi'$  от  $\delta$  при различных значениях параметров  $\omega/\omega_0$  и  $d_1$ .

При этом параметр  $d$  (формула (3.111)) будет иметь вид

$$d \approx \frac{B_1}{B_0} \sqrt{\delta} = d_1 \sqrt{\delta}. \quad (3.113)$$

Подставляя (3.112) и (3.113) в (3.108), найдем

$$\frac{\chi'(\delta)}{\chi'_0} = \frac{(1+y)\delta^2}{G_2(y, d_1, \varepsilon)\delta^4 + G_1(y, d_1, \varepsilon)\delta^2 + G_0(y, \varepsilon)}, \quad (3.114)$$

где

$$\begin{aligned} G_2(y, d_1, \varepsilon) &= g_1(y)(d_1^2 + \varepsilon^2 g_1(y)), \\ G_1(y, d_1, \varepsilon) &= (1+y)^2 + d_1^2 g(y) + 2\varepsilon^2 g(y)g_1(y), \\ G_0(y, \varepsilon) &= \varepsilon^2 g^2(y). \end{aligned}$$

Вычисляя теперь экстремум функции  $\chi'(\delta)$  из (3.114), получим

$$\delta'_R(y, d_1, \varepsilon) = \left( \frac{G_0(y, \varepsilon)}{G_2(y, d_1, \varepsilon)} \right)^{1/4} = \left( \frac{\varepsilon^2 (y^4 + 2(1+y)^4)^2}{(y^6 + 2(1+y)^6)(d_1^2 + \varepsilon^2 (y^6 + 2(1+y)^6))} \right)^{1/4}. \quad (3.115)$$

Из (3.115), как несложно видеть, следует, что при увеличении параметров  $d_1$  и  $\varepsilon$  значение  $\delta'_R$  уменьшается. Зависимость  $\delta'_R$  от частоты является более сложной. Она представлена на Рис. 3.4(A), и обладает при определенных частотах как минимальными, так и максимальными значениями.

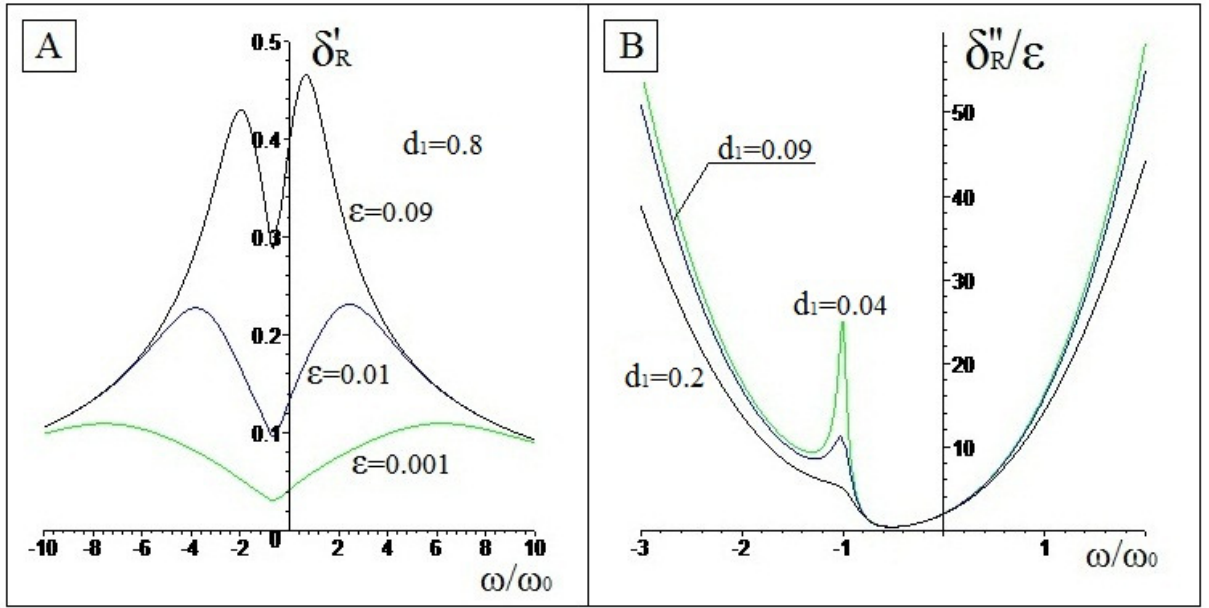


Рис. 3.4: Зависимость резонансных значений параметра  $\delta$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при различных значениях  $\epsilon$  и  $d_1$ .

Обратная величина  $\delta'_R$  определяет температуру кристалла, при которой  $\chi'(\delta)$  имеет максимум. Оценим ее порядок для магнитного поля  $B_0 \sim 10^4$  Гс и  $E_{el} \sim 1$  эВ при  $y = -1$ . Тогда из (3.115) следует, что

$$\delta'_R(-1, d_1, \epsilon) = \left( \frac{\epsilon^2}{d_1^2 + \epsilon^2} \right)^{1/4}, \quad (3.116)$$

где  $\epsilon \sim 10^{-13}$ .

Используя теперь (3.116), найдем

$$T'_R(-1, d_1, \epsilon) = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B\sqrt{\epsilon}} (d_1^2 + \epsilon^2)^{1/4} \sim 10^2 \sqrt{d_1} \text{ К}. \quad (3.117)$$

Учитывая, что данная модель справедлива при  $T < T_m$  - температура плавления ( $T_m^{\text{Si}} \approx 1688$  К), из (3.117) видно, что область допустимых температур будет содержать  $T'_R$ , как при  $d_1 > 1$ , так и в противоположном случае.

Выясним теперь, почему при больших частотах исчезает максимальное значение  $\chi'(\delta)$  (Рис. 3.3(B)). Дело заключается в том, что при  $y \gg 1$  последнее слагаемое в знаменателе (3.108) начинает превосходить остальные. Это означает, что в данном случае  $\chi'(y)$  будет иметь асимптотику

$$\frac{\chi'(y)}{\chi'_0} \approx \frac{y}{\epsilon^2 f^2(y, \delta)} \approx \frac{\tanh^2(\delta y)}{\epsilon^2 y^9}. \quad (3.118)$$



Но зависимость (3.118) от параметра  $\delta$  не имеет экстремумов, что и объясняет исчезновение  $\delta'_R$  при  $|y| \gg 1$ .

Рассмотрим теперь мнимую часть динамической восприимчивости (3.109), определяющую форму линии поглощения. Графики зависимости  $\chi''$  от частоты и температуры кристалла представлены на Рис. 3.5-3.7.

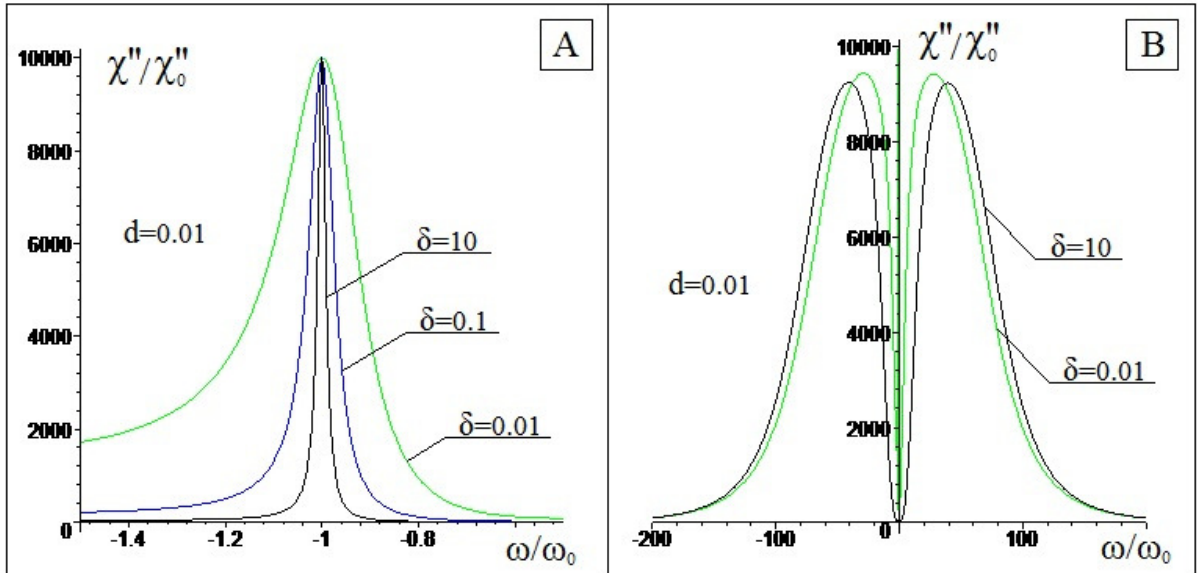


Рис. 3.5: Зависимость мнимой части динамической восприимчивости  $\chi''$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при  $\varepsilon = 10^{-7}$  и различных значениях параметра  $\delta$ .

Согласно Рис. 3.5(A), при значениях параметра  $d \ll 1$  и низких температурах ( $\delta = 10$ ) в области резонанса, когда  $y \sim -1$ , форма линии поглощения является квазилоренцевой, т.е. практически совпадает с  $\chi''(y)$ , следующей из решения уравнений Блоха. При увеличении температуры происходит постепенное уширение и искажение этой линии, связанное с наличием памяти в системе. В области больших частот, когда  $y \gg 1$ , возникают два дополнительных симметричных резонанса (Рис. 3.5(B)). Происхождение этой особенности непосредственно связано с эффектом дисперсии времени релаксации и параметром  $\varepsilon$  в знаменателе (3.109). Действительно, как было уже отмечено, параметр  $\varepsilon$  всегда много меньше единицы. Поэтому при частотах  $y \sim 1$  слагаемое  $\varepsilon^2 f^2(y, \delta)$  практически себя не проявляет. Но, учитывая, что  $f^2(y, \delta) \sim y^{10}$ , либо  $f^2(y, \delta) \sim y^8$  в зависимости от температуры кристалла, то при  $y \gg 1$  возможна ситуация, когда  $\varepsilon^2 f^2(y, \delta)$  начинает превосходить по величине остальные слагаемые в знаменателе (3.109). В этом случае  $\chi''(y) \approx \chi_0'' / \varepsilon^2 f^2(y, \delta)$ , т.е. с этого момента будет происходить уменьшение  $\chi''(y)$ , что свидетельствует о существовании дополнительных резонансов в  $\chi''(y)$ , поскольку до того как задействуется слагаемое  $\varepsilon^2 f^2(y, \delta)$ , существуют

частоты, при которых числитель и знаменатель  $\chi''(y)$  становятся одного порядка, что и символизирует дополнительные максимальные значения в  $\chi''(y)$ . При этом, как несложно видеть из Рис. 3.5(A), эти частоты зависят определенным образом от температуры кристалла, причем при уменьшении температуры их значения увеличиваются.

Определим зависимость дополнительных резонансных частот  $y_R$  от параметров  $d$ ,  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Для этого заметим, что, согласно Рис. 3.5(A),  $y_R$  находятся в области  $|y| \gg 1$ . Поэтому будем считать, что

$$f(y, \delta) = 3|y|^5 \coth(\delta|y|)$$

и

$$\chi''(y) = \chi_0'' \frac{f(y, \delta)}{y^2 + d^2 f(y, \delta) + \varepsilon^2 f^2(y, \delta)}. \quad (3.119)$$

Учитывая теперь, что  $y_R$  являются симметричными и, приравнявая производную от (3.119) по  $y$  к нулю в области  $y > 0$ , найдем

$$3 \coth(\delta y_R) + y_R \frac{d}{dy_R} \coth(\delta y_R) - 9\varepsilon^2 y_R^8 \coth^2(\delta y_R) \cdot \\ \cdot (5 \coth(\delta y_R) + y_R \frac{d}{dy_R} \coth(\delta y_R)) = 0. \quad (3.120)$$

В первую очередь отметим, что (3.120), а следовательно и  $y_R$ , не зависят от параметра  $d$ . В общем случае уравнение (3.120) не может быть решено относительно  $y_R$ . Поэтому представляет интерес рассмотреть два предельных случая, когда  $\delta|y| \ll 1$  и  $\delta|y| \gg 1$ . В первом случае ( $\delta|y| \ll 1$ )  $\coth(\delta y) \approx 1/\delta y$  и из (3.120), найдем

$$y_R = \pm \left( \frac{\delta^2}{18\varepsilon^2} \right)^{1/6}. \quad (3.121)$$

При этом в противоположном случае ( $\delta|y| \gg 1$ )  $\coth(\delta y) \approx 1$  и из (3.120), получим

$$y_R = \pm \frac{1}{(15\varepsilon^2)^{1/8}}. \quad (3.122)$$

В частности, при  $\delta = 10$  и  $\varepsilon = 10^{-7}$  (см. Рис. 3.5(A)) используя (3.122), найдем  $y_R \approx \pm 40$ .

Вернемся теперь к  $\chi''(y)$ . В случае, когда  $d > 1$ , форма линии поглощения претерпевает существенную деформацию (Рис. 3.6(A)), обусловленную дисперсией  $T_{tr}$ . Согласно этому рисунку, по-прежнему сохраняется максимум на частоте  $y = -1$ , а также дополнительные экстремумы при  $y \gg 1$  (Рис. 3.6(B)), но, кроме этого, возникает еще один резонанс, при

котором наблюдается резкий минимум  $\chi''(y)$ , причем с уменьшением температуры этот эффект становится более сильным.

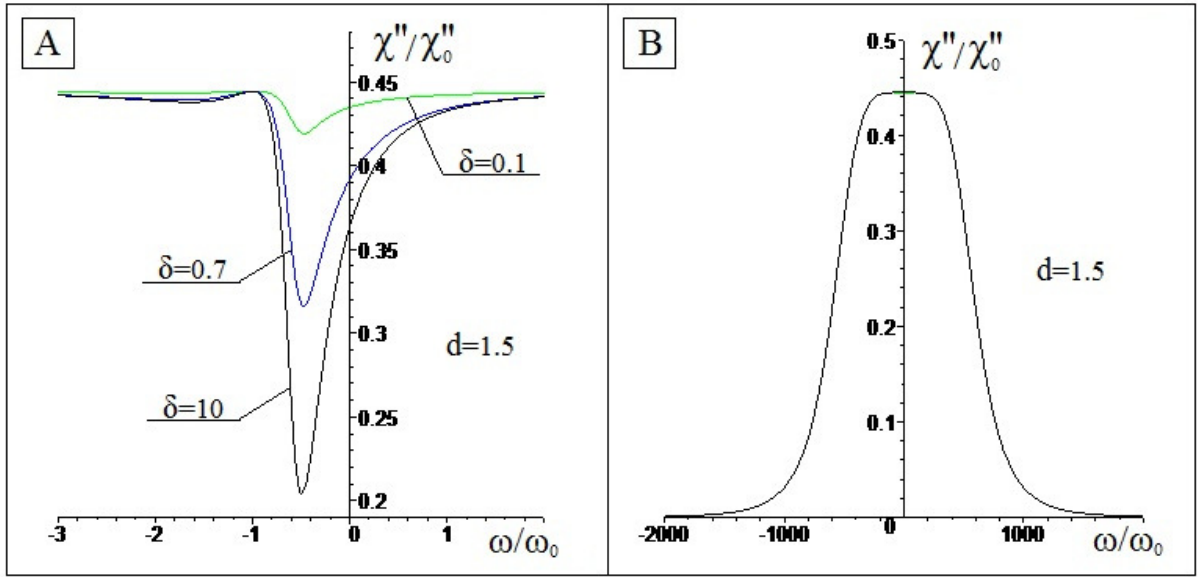


Рис. 3.6: Зависимость мнимой части динамической восприимчивости  $\chi''$  от отношения частот  $\omega/\omega_0$  при  $\varepsilon = 10^{-7}$  и различных значениях параметра  $\delta$ .

Он непосредственно связан с резонансом поперечного времени релаксации, и происходит при тех же частотах. Действительно, для того чтобы это установить воспользуемся определением (3.86):

$$\frac{\chi''(y)}{\chi_0''} = \frac{\tilde{T}_r(y, \delta)}{\varepsilon^2 + ((1+y)\tilde{T}_r(y, \delta))^2 + d^2\tilde{T}_r(y, \delta)}, \quad (3.123)$$

где  $\tilde{T}_r = T_r/T_0$  (формула (3.103)). Из (3.119) следует, что при  $y = y_R$ , когда  $\tilde{T}_r(y, \delta)$  максимально,  $\chi''(y)$  имеет резкий минимум, что демонстрирует Рис. 3.6(A).

Определим асимптотическое поведение  $\chi''(y)$  при  $y \gg 1$ . В этом случае  $\chi''(y) \approx \chi_0''/\varepsilon^2 f(y, \delta)$ . Тогда, учитывая (3.111), найдем

$$\chi''(\omega) \sim \begin{cases} |\omega|^{-5}, & \text{при } \delta \gg 1, \\ \omega^{-4}, & \text{при } \delta \ll 1, \end{cases}$$

что является одним из проявлений эффекта памяти, поскольку в марковском случае  $\chi''(\omega) \sim \omega^{-2}$  [46, 48].

Рассмотрим теперь зависимость формы линии поглощения от параметра  $\delta$ . Согласно Рис. 3.7, при определенных  $\delta$ , когда  $y \sim 1$  (Рис. 3.7(A)),  $\chi''(\delta)$  имеет максимальное значение, что свидетельствует о наличии в системе температурного резонанса, определенным образом зависящего от  $y$ ,  $d$  и  $\varepsilon$ . В случае высоких частот, когда  $y \gg 1$  (Рис. 3.7(B)), температурный

резонанс пропадает и при некоторых  $\delta > \delta^*$   $\chi''(\delta)$  становится константой. Остановимся более подробно на этих особенностях.

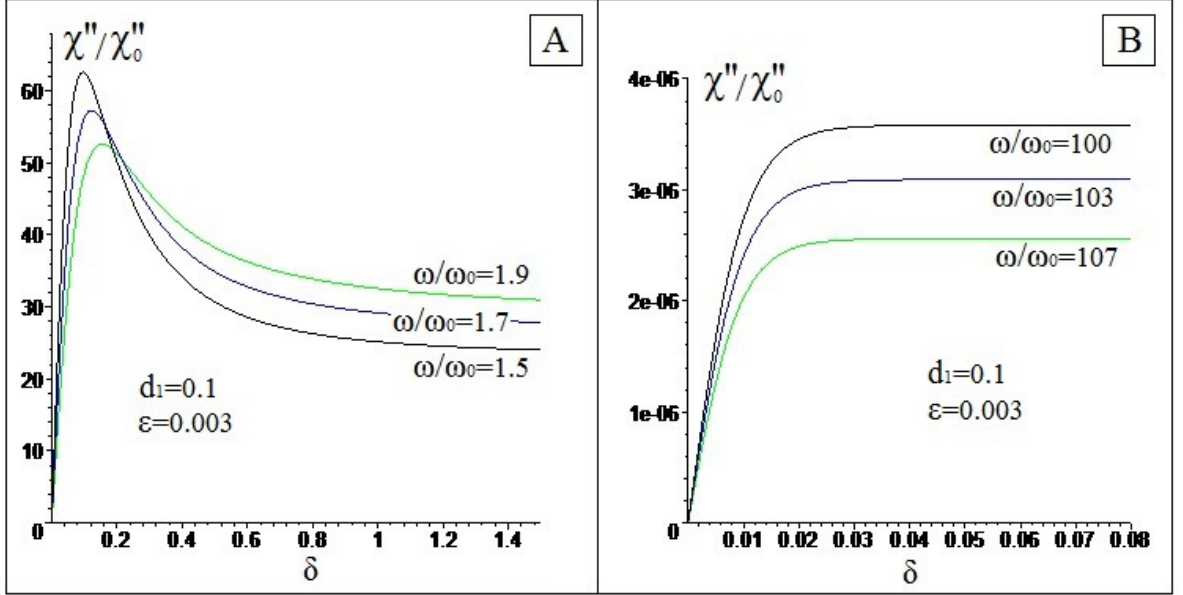


Рис. 3.7: Зависимость мнимой части динамической восприимчивости  $\chi''$  от  $\delta$  при различных значениях отношения частот  $\omega/\omega_0$ .

В первую очередь определим зависимость резонансной температуры от параметров  $y$ ,  $d_1$  и  $\varepsilon$ . Для этого заметим, что, согласно Рис. 3.7(A), этот эффект происходит в области  $\delta \ll 1$ . Тогда можно считать, что  $\coth(\delta y) \approx 1/\delta y$ , предполагая  $y \sim 1$ . При этом функция  $f(y, \delta)$  (формула (3.111)) будет иметь вид

$$f(y, \delta) \approx \frac{1}{\delta} (y^4 + 2(1+y)^4) = \frac{g(y)}{\delta}. \quad (3.124)$$

Подставляя теперь (3.124) в (3.109), найдем

$$\frac{\chi''(y)}{\chi_0''} = \delta \frac{g(y)}{g_2(y, \tilde{d})\delta^2 + \varepsilon^2 g^2(y)}, \quad (3.125)$$

где  $d^2 \approx (B_1/B_0)^2 \delta = d_1^2 \delta$ ,

$$g_2(y, d_1) = (1+y)^2 + d_1^2 g(y).$$

Вычисляя на основе (3.125) экстремум функции  $\chi''(\delta)$ , имеем

$$\delta_R''(y, d_1, \varepsilon) = \frac{\varepsilon g(y)}{\sqrt{g_2(y, d_1)}} = \frac{\varepsilon (y^4 + 2(1+y)^4)}{\sqrt{(1+y)^2 + d_1^2 (y^4 + 2(1+y)^4)}}. \quad (3.126)$$

Из (3.126) следует, что при увеличении  $d_1$  и уменьшении  $\varepsilon$  резонансное значение  $\delta_R''$  уменьшается. Зависимость  $\delta_R''$  от частоты является более сложной. Она представлена на рисунке 3.4(B), из которого видно, что при определенных  $y$  и  $d_1$  параметр  $\delta_R''$  имеет как

минимальное, так и максимальное значения, причем при  $|y| > 1$  резонансное значение  $\delta_R''$  неограниченно возрастает.

Определим теперь выражение для резонансной температуры. Поскольку  $\delta = \hbar\omega_0 / 2k_B T$ , то из (3.126), найдем

$$\frac{T_R''(y, \tilde{d}, \varepsilon)}{t_0} = \frac{\sqrt{(1+y)^2 + \tilde{d}^2(y^4 + 2(1+y)^4)}}{(y^4 + 2(1+y)^4)}, \quad (3.127)$$

где  $t_0$  - масштабный фактор, имеющий размерность температуры:

$$t_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2k_B\varepsilon}. \quad (3.128)$$

Формулы (3.127)-(3.128) позволяет оценить порядок  $T_R''$  в зависимости от значений  $y$ ,  $d_1$  и  $\varepsilon$ . С другой стороны, формула (3.127) имеет более глубокое содержание, заключающееся в том, что она устанавливает определенную зависимость  $f(T_R'', y, d_1, \varepsilon)$  между параметрами системы, характеризующую существование данного ее состояния, т.е. состояния, при котором  $\chi''$  поглощение в системе имеет максимальное значение.

Оценим теперь порядок масштабного фактора  $t_0$ . Например, для магнитного поля  $B_0 \sim 10^4$  Гс и  $E_{el} \sim 1$  эВ из (3.128), найдем  $t_0 \sim 10^8$  К. Полагая теперь в (3.127)  $y = -1$ , имеем

$$T_R''(y, d_1, \varepsilon) = t_0 d_1 \sim 10^4 B_1 \text{ К}. \quad (3.129)$$

Другими словами, при условии небольших значений поперечной составляющей магнитного поля, т.е.  $B_1$ ,  $T_R''$  может принимать значения, допустимые в этой модели ( $T_R'' < T_m$  - температура плавления). Например,  $T_R''$  из (3.129) будет порядка комнатной температуры ( $T_R'' = 3 \cdot 10^2$  К), когда  $B_1 \sim 10^{-2}$  Гс.

Заметим, что так же, как в случае  $\chi'$ , при  $|y| \gg 1$  зависимость  $\chi''$  от  $\delta$  не содержит экстремумов (Рис. 7(В)). Это связано с тем, что при  $|y| \gg 1$  мнимая часть динамической восприимчивости имеет асимптотику:

$$\frac{\chi''(y)}{\chi_0''} \approx \frac{1}{\varepsilon^2 f(y, \delta)} \approx \frac{\tanh(\delta|y|)}{\varepsilon^2 |y|^5},$$

являющуюся монотонной по параметру  $\delta$ .

В этом параграфе были определены и исследованы частотные и температурные свойства динамической восприимчивости спиновой подсистемы, при изучении которых не учитывался сдвиг частоты прецессии спинового момента электрона (формулы (3.106)-(3.107)). Рассмотрим теперь более подробно этот эффект.

### §3.4 Эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости

Эффекты, связанные с изменением резонансных частот в спиновых системах, играют важную роль в физике конденсированного состояния, подтверждением чему являются такие важные для спектроскопии явления, как химический сдвиг [48, 317], сдвиг Найта [48], сдвиг Блоха-Зигерта [49], динамический сдвиг частоты [318]-[320]. Как указывалось в предыдущей главе, основная причина, вызывающая этот эффект, заключается во взаимодействии спиновой подсистемы и ее окружения.

В данном параграфе будет рассмотрен эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости (зонного электрона), обусловленный его взаимодействием с полем акустических фононов, заключающийся в сдвиге частоты прецессии на небольшую поправку, зависящую от параметров системы.

Для вычисления искомого частотного сдвига воспользуемся формулами, полученными в §3.4. Рассмотрим более подробно выражение (3.106):

$$\Delta\omega_2 = \omega + \omega_0 + \gamma_2(0), \quad (3.130)$$

где  $\gamma_2(0)$  определяется (3.97):

$$\gamma_2(0) = -\frac{\beta_2\Omega}{\pi} (pF(p, T_{eff}) + 2p_+F(p_+, T_{eff})). \quad (3.131)$$

Принимая во внимание, что  $p$  и  $p_0 \ll 1$ , представим (3.131) в виде

$$\gamma_2(0) = -\beta_2\omega_0(2+3y)b(T_{eff}), \quad (3.132)$$

где по-прежнему  $y = \omega/\omega_0$ ,  $\beta = E_{el}/E$ , а  $b(T_{eff})$  – параметр, зависящий от эффективной температуры кристалла:

$$b(T_{eff}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx x^3 \coth\left(\frac{x}{T_{eff}}\right). \quad (3.133)$$

Подставляя (3.132) в (3.130), найдем

$$\Delta\omega_2 = \omega + \tilde{\omega}_0,$$

где

$$\tilde{\omega}_0 = \omega_0 \frac{1 - 2\Delta(\beta_2, T_{eff})}{1 - 3\Delta(\beta_2, T_{eff})} \approx \omega_0(1 + \Delta(\beta_2, T_{eff})), \quad (3.134)$$

$$\Delta(\beta_2, T_{eff}) = \beta_2 b(T_{eff}). \quad (3.135)$$

Формулы (3.134)-(3.135) и (3.133) определяют сдвиг частоты прецессии спинового момента зонного электрона. Данный эффект связан с флуктуациями фононного поля, и, как показывает формула (3.134), приводит к увеличению частоты прецессии. Флуктуационная природа этого эффекта проявляется в зависимости частотного сдвига от температуры кристалла.

С точки зрения используемого в диссертации подхода возникновение этого эффекта имеет следующее объяснение. Если мы рассмотрим свободный электрон в постоянном магнитном поле, то его спиновый момент будет прецессировать вокруг его направления. Включение спин-орбитального взаимодействия с полем локальной деформации кристалла (деформационным потенциалом) приводит к случайной раскачке прецессии, вызывающей флуктуации угла наклона –  $\theta$  спинового момента к внешнему полю, который пропорционален  $\omega_0$ . Усредняя эти случайные движения, мы получим некоторую добавку к  $\theta$ , которая и будет определять изменение частоты прецессии. Фактически, этим также объясняется увеличение  $\tilde{\omega}_0$  с повышением температуры (см. (3.134)-(3.135)). Действительно, с повышением  $T_{eff}$  возрастают флуктуации фононного поля, т.е. раскачка прецессии становится сильнее, а это, в среднем, приводит к росту частоты прецессии.

Произведем теперь численную оценку этого эффекта. При комнатной температуре, когда  $T = 300$  К, и энергии электрона  $E_{el} \sim 1$  эВ частотный сдвиг имеет значение:

$$\Delta \sim 10^{-6}, \quad (3.136)$$

что, например, на порядок меньше химического сдвига для протонов ( $\Delta \sim 10^{-5}$ ) [48].

Следует отметить, что формулы (3.133) и (3.135) позволяют определить вклад нулевых колебаний фононного окружения, т.е. фононного вакуума, в сдвиг частоты  $\Delta(\beta_2, T_{eff})$ . Для решения этого вопроса представим (3.133) в виде

$$b(T_{eff}) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 dx x^3 \left( 1 + \frac{2}{e^{2x/T_{eff}} - 1} \right) = b_0 + b_1(T_{eff}), \quad (3.137)$$

где  $b_0 = 1/4\pi \approx 7.95 \cdot 10^{-2}$ ,

$$b_1(T_{eff}) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 dx \frac{x^3}{e^{2x/T_{eff}} - 1}. \quad (3.138)$$

В используемом подходе вклад нулевых колебаний учитывается автоматически в параметре  $b(T_{eff})$  в (3.137). Действительно, при  $T_{eff} = 0$ , что соответствует вакуумному состоянию окружения, из (3.137), найдем  $b(0) = b_0$ , что как раз и определяет вклад в эффект изменения частоты прецессии флуктуаций фононного вакуума. В то же время  $b_1(T_{eff})$  из (3.137)

характеризует собой не что иное, как вклад в этот эффект температурных флуктуаций, величина которого равна нулю (формула (3.138)) в квантовомеханическом случае, когда  $T_{eff} = 0$ .

Подставляя теперь (3.137) в (3.135), найдем

$$\Delta(\beta_2, T_{eff}) = \Delta_0(\beta_2) + \Delta_1(\beta_2, T_{eff}), \quad (3.139)$$

где  $\Delta_0(\beta_2)$  – сдвиг частоты прецессии, обусловленный нулевыми колебаниями:

$$\Delta_0(\beta_2) = \frac{\beta_2}{4\pi}.$$

В частности, при  $E_{el} \sim 1$  эВ этот вклад имеет порядок  $\Delta_0 \sim 10^{-8}$ .

В заключение рассмотрим еще один аспект этого эффекта. В современной физике при интерпретации эффектов, связанных с перенормировкой параметров системы, часто используют концепцию квазичастиц [358]-[359], позволяющую исследовать простыми теоретическими методами различные сложные физические системы. Примером квазичастицы может служить полярон [359]-[360], представляющий собой электрон проводимости (зонный электрон), окруженный полем фононов. Взаимодействие этих систем приводит к изменению эффективной массы электрона на небольшую поправку, пропорциональную константе электрон-фононной связи [350, 360]. В большинстве работ, посвященных полярону эффекту, рассматриваются конфигурационные степени свободы электрона [254, 351, 360]. Но кроме этих степеней свободы электрон описывается также и другими характеристиками, например, спиновым моментом, динамика которого с учетом поля фононов и его флуктуаций рассматривалась в настоящей главе. Как показано выше, взаимодействие между этими подсистемами приводит к сдвигу частоты прецессии спинового момента, что в рамках указанной концепции можно интерпретировать как возникновение некоторой квазичастицы, образованной из спина электрона и поля фононов, обладающей своей собственной частотой прецессии (3.134), отличающейся от частоты прецессии «голового» спинового момента.

### §3.5 Выводы

Сформулируем теперь основные результаты, полученные в этой главе.

1. На основе концепции открытых квантовых систем в приближении замороженного конфигурационного движения получено немарковское стохастическое уравнение для спинового момента электрона проводимости, взаимодействующего с акустическими фононами (модель деформационного потенциала) в немагнитных ковалентных кристаллах, обладающих центром симметрии, с учетом спин-орбитального взаимодействия. Определены выражения для силы



фононного трения и флуктуационных источников. Установлено, что сила трения состоит из двух слагаемых, определяющих два механизма релаксации, связанных между собой через флуктуационно-диссипационную теорему Каллена-Вельтона, и характеризующихся функцией Грина фононов и функцией корреляции переменных фононного термостата. На основе приближения свободной прецессии получены коэффициенты фононного трения, определяющие времена релаксации и равновесные значения спинового момента. Кроме этого, показано, что в марковском случае уравнения релаксации переходят в уравнения Блоха с микроскопически определенными немарковскими поправками. Проанализирована зависимость времени релаксации спинового момента от индукции магнитного поля для двух предельных случаев, соответствующих низкой и высокой температур кристалла. Выяснено, что скорость релаксации пропорциональна  $\tau^{-1} \sim \alpha' B_0^5$  и  $\tau^{-1} = \alpha'' B_0^4 T^{-1}$  соответственно при  $T \ll 1$  и  $T \gg 1$ , где  $T$  – температура кристалла,  $B_0$  – индукция магнитного поля,  $\alpha'$  и  $\alpha''$  – размерные константы.

2. На основе интегро-дифференциальных (немарковских) уравнений для спинового момента исследованы некоторые статистические характеристики спиновой подсистемы с учетом эффекта памяти. В частности, при  $\bar{\pi}_z \ll \bar{\pi}_x = \bar{\pi}_y = \bar{\pi}$ , где  $\bar{\pi}_{x,y,z}$  – средние значения проекций кинематического импульса, определены и исследованы частотные и температурные зависимости действительной и мнимой частей спиновой динамической восприимчивости. Показано, что продольное  $T_l$  и поперечное  $T_{tr}$  времена релаксации зависят температуры кристалла, при этом  $T_{tr}$ , в отличие от  $T_l$ , является функцией частоты внешнего переменного магнитного поля, что можно рассматривать как эффект дисперсии времени релаксации. Данная зависимость носит резонансный характер, и вызывает асимметрию в свойствах спиновой подсистемы относительно действия на нее правой и левой круговых поляризации магнитного поля. Установлено, что в пределе высоких частот, когда  $y = \omega / \omega_0 \gg 1$  ( $\omega_0$  – частота прецессии спинового момента), поперечное время релаксации имеет асимптотику:  $T_{tr}(y) \sim \tanh(\delta y) / y^5$ , где  $\delta$  – безразмерный параметр, обратно пропорциональный температуре кристалла. Определено влияние эффекта дисперсии поперечного времени релаксации на действительную  $\chi'$  и мнимую  $\chi''$  части динамической восприимчивости. Как показали вычисления, при  $d = (B_1 / B_0) \tanh^{1/2}(\delta) \sim 1$  и  $d > 1$ , где  $B_1$  – амплитуда переменной составляющей магнитного поля, в  $\chi'$  и  $\chi''$  возникают новые свойства. В частности, в линии поглощения  $\chi''$  наряду с традиционным резонансом на частоте  $y = -1$  появляются дополнительные экстремумы при высоких частотах, а также область квазипрозрачности, приводящие к асимметрии  $\chi''$  для левой и правой круговых поляризации магнитного поля, что можно интерпретировать как оптическую активность спиновой подсистемы, связанную с эффектом памяти. При этом температурная

зависимость  $\chi'$  и  $\chi''$  также имеет свою особенность, заключающуюся в возникновении при  $|y| < 1$  и  $|y| \sim 1$  максимального значения в  $\chi'$  и  $\chi''$ , свидетельствующего о существовании температурного резонанса. Показано, что в случае высоких частот ( $|y| \gg 1$ ) данный эффект отсутствует. Другим следствием немарковской динамики является изменение частотной асимптотики  $\chi'$  и  $\chi''$ . При этом если в марковском случае в области  $|y| \gg 1$   $\chi' \sim \omega^{-1}$  и  $\chi'' \sim \omega^{-2}$ , то с учетом эффекта памяти  $\chi'(y) \sim \tanh^2(\delta y) / y^9$  и  $\chi''(y) \sim \tanh(\delta |y|) / |y|^5$ , т.е. имеют более высокую степень частоты.

**3.** Исследован эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона проводимости, обусловленный флуктуациями фононного окружения. Как показали вычисления, вследствие взаимодействия спиновой подсистемы и фононного термостата происходит увеличение частоты прецессии спинового момента на небольшую аддитивную поправку, зависящую от средней кинетической энергии электрона и температуры кристалла, причем с ростом температуры частота прецессии увеличивается. Проведено разделение вкладов в сдвиг частоты, обусловленных нулевыми колебаниями кристаллической решетки, т.е. фононного вакуума, и температурных флуктуаций фононной подсистемы. Произведена численная оценка данного эффекта. В частности, при энергии электрона  $E_{el} \sim 1$  эВ и комнатной температуре ( $T = 300$  К) сдвиг частоты имеет порядок  $\Delta \sim 10^{-6}$ .

## Заключение

С момента открытия спиновой степени свободы электронов произошли существенные изменения в теоретических и экспериментальных представлениях не только в области спин-зависимых (магнитных) явлений, но и в физике в целом. Развитие экспериментальных методов и повышение точности получаемых результатов дает возможность обнаруживать и исследовать такие явления, изучение которых раньше возможно было только теоретически. Данная тенденция, по-видимому, свойственна большинству областей современной физики. Не является здесь исключением и область спин-зависимых явлений, в которой, как показывают публикации за последнее время, были получены интересные результаты, давшие импульс развитию новой ветви твердотельной электроники – спинтроники, для которой вопросы спиновой динамики и релаксации, а также возможность управления параметрами спиновых систем, являются центральными. Данные обстоятельства делают необходимым применение к решению этих вопросов новых методов, позволяющих исследовать спиновые системы с учетом дополнительных особенностей, таких, например, как немарковский характер взаимодействия, стохастичность внешних полей и окружения и многих других. В частности, для спиновой электроники и ее приложений является актуальным изучение процессов релаксации в открытых спиновых системах, обладающих памятью, на которые действуют случайные внешние поля. Некоторым вопросам этой задачи и была посвящена настоящая работа.

Сформулируем в заключение основные результаты диссертации:

1. На основе концепции открытых систем и метода квантовых нелинейных стохастических уравнений построены две микроскопические модели, описывающие броуновское движение и процесс релаксации спиновых моментов электронов, взаимодействующих с фотонным и фононным окружениями в наиболее общем немарковском случае. Данные модели имеют ряд особенностей. В частности, они учитывают определенную взаимосвязь между флуктуациями переменных окружений и эффектами памяти в рассматриваемых системах, и имеют возможность дополнять друг друга при изучении процессов спиновой релаксации в более общих (многоканальных) системах.
2. Для оператора спинового момента электронов получены интегро-дифференциальные стохастические уравнения со строго определенными флуктуационными источниками и силой трения, учитывающей принцип причинности и эффекты памяти, и состоящей из двух взаимосвязанных частей, обусловленных с одной стороны реакцией фотонного и фононного окружений на действие электронов, а с другой их

статистической природой, т.е. флуктуациями. Исследован марковский предельный случай в рассматриваемых системах. Показано, что в этом приближении исходные интегро-дифференциальные стохастические уравнения переходят в уравнения Блоха с микроскопически определенными временами релаксации, равновесными значениями и немарковскими поправками.

3. На основе немарковских стохастических уравнений исследованы некоторые статистические свойства спиновых моментов электронов, в частности, динамическая восприимчивость рассматриваемых систем. Вычислены продольное и поперечное времена релаксации. Показано, что они выражаются через коэффициенты радиационного и фононного трения, причем поперечное время релаксации, в отличие от продольного, является функцией частоты магнитного поля, что можно рассматривать как эффект дисперсии времени релаксации, являющийся одним из проявлений немарковского характера взаимодействия. Важным следствием этой частотной зависимости является асимметрия поведения поперечного времени релаксации относительно правой и левой круговых поляризованных внешнего магнитного поля, существенно влияющая на динамическую восприимчивость и, в частности, на форму линии поглощения. При определенных условиях, как показало исследование, в линии поглощения возникают дополнительные резонансные частоты, область прозрачности, температурный резонанс, асимметрия для правой и левой круговых поляризованных магнитного поля, что свидетельствует о своего рода оптической активности рассматриваемых систем, связанной с эффектами памяти.
4. Исследован эффект изменения частоты прецессии спинового момента электрона, обусловленный флуктуациями переменных окружений. Показано, что в результате взаимодействия спиновой подсистемы и фотонного (фононного) окружения происходит увеличение частоты прецессии на небольшую аддитивную поправку, зависящую от параметров системы. В случае радиационного трения в результате учета некоторых свойств внутренней структуры электрона, связанных с его спиновым моментом, матрицами Дирака и эффектом осцилляций Шредингера, сдвиг частоты прецессии оказывается конечным, и не содержит традиционной для радиационных эффектов логарифмической бесконечности. В то же время пренебрежение указанными свойствами приводит в данной модели к логарифмически расходящимся слагаемым.

## Приложение

### О движении электрона Дирака в постоянном магнитном поле

#### §1. Введение и постановка задачи

Необходимость данного приложения определяется несколькими причинами. Одна из них связана с задачей вычисления произведения операторов электронных плотностей  $e^{ikr(t)}e^{-ikr(t_1)}$  (см. глава II), встречающейся, например, в квантовой электродинамике [240-241, 262] и физике конденсированного состояния [244, 246, 254], для решения которой необходимо знать зависимость оператора координаты электрона от времени. Во-вторых, это приложение имеет и самостоятельный интерес ввиду особенностей поведения электрона Дирака, обусловленных эффектом осцилляций Шредингера (*Zitterbewegung*). Все это делает необходимым изучение вопроса о движении релятивистского электрона в постоянном магнитном поле.

Задача о движении свободного электрона Дирака впервые была рассмотрена Э. Шредингером в 1930 году [285]-[286]. Согласно результатам этого исследования, движение даже свободного электрона в релятивистской квантовой механике носит достаточно сложный характер, проявляющийся, во-первых, в том, что скорость электрона приобретает самостоятельное значение наряду с его импульсом, а во-вторых, что движение свободного электрона уже не является «прямолинейным» как, например, в классической релятивистской механике, а имеет осциллирующий характер. Кроме этого, оказалось, что интегрирование уравнений Гейзенберга для операторов координаты и скорости электрона не является тривиальной задачей, и требует для решения определенных подходов, один из которых и был предложен Шредингером.

В связи с этим представляет большой интерес определение влияния эффекта осцилляций Шредингера на движение электрона Дирака в постоянном магнитном поле. Ответу на этот и некоторые другие вопросы и посвящено это Приложение.

Для решения поставленного вопроса в первую очередь рассмотрим, следуя работе [285], задачу о движении свободного электрона Дирака, определив тем самым, что же собой представляет эффект *Zitterbewegung*, а также проследив связь между особенностями движения электрона и вызывающими их причинами.

Итак, из теории Дирака [6] следует, что гамильтониан релятивистского электрона имеет вид

$$H = c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}) + \beta_3 mc^2, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}$  – импульс электрона,  $\boldsymbol{\alpha} = \beta_1 \boldsymbol{\sigma}$  и  $\beta_i$  ( $i=1,2,3$ ) – матрицы Дирака, обладающие свойствами:

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \delta_{ij} + ie_{ijk} \sigma_k, \quad \beta_i \cdot \beta_j = \delta_{ij} + ie_{ijk} \beta_k, \quad \sigma_i \beta_j - \beta_j \sigma_i = 0, \quad (2)$$

$e_{ijk}$  – единичный антисимметричный тензор,  $\boldsymbol{\sigma}$  – вектор, состоящий из матриц Паули. В определении  $\boldsymbol{\alpha}$  произведение между  $\beta_i$  и  $\sigma_j$  ( $i, j=1,2,3$ ) является прямым.

Используя гамильтониан (1) и свойства (2), запишем уравнение Гейзенберга для проекции оператора координаты и скорости электрона:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(t) = c\alpha_x(t), \quad (3)$$

$$\frac{d\alpha_x}{dt} = \frac{1}{i\hbar}(\alpha_x(t)H - H\alpha_x(t)) = \frac{2c}{\hbar}[\boldsymbol{\sigma}(t) \times \mathbf{p}]_x - \frac{2mc^2}{\hbar}\beta_2(t)\sigma_x(t). \quad (4)$$

Рассмотрим более подробно полученные уравнения. Из классической релятивистской механики известно, что скорость электрона связана с его импульсом соотношением:

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \frac{c^2 \mathbf{p}}{E}, \quad (5)$$

где  $m$  – масса движущегося электрона,  $E$  – его энергия. Согласно же формуле (3), в релятивистской квантовой механике связь между скоростью и импульсом (5) нарушается, причем скорость, как и импульс, приобретает самостоятельное значение, поскольку, согласно уравнению (4), уже не является сохраняющейся величиной, а это в свою очередь означает, что скорость электрона несет в себе определенную информацию о его движении. Подробный анализ физического содержания соотношения (3) произведен Шредингером в [285].

В общем случае для решения уравнения (7) необходимо знать зависимость от времени операторов  $\sigma_{x,y,z}(t)$  и  $\beta_2(t)$ , которые также подчиняются определенным уравнениям, содержащим, из-за коммутационных соотношений (2), неизвестную скорость  $c\alpha_x(t)$ . Это говорит о том, что для определения  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  необходимо проинтегрировать систему из девяти дифференциальных уравнений. Это уравнения для трех проекций  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  и  $\boldsymbol{\sigma}(t)$ , а также матриц  $\beta_{1,2,3}(t)$ . Если еще учесть, что они обладают коммутационными соотношениями (2), то решение этой системы даже в случае свободного движения электрона представляет большие трудности, и является нетривиальной по своему содержанию.

Подход Шредингера при решении указанной задачи заключался в использовании интегралов движения свободного электрона. При этом, как показано в [285], в место интегрирования системы из девяти уравнений достаточно решить одно дифференциальное уравнение второго порядка. Это можно сделать следующим образом.

Используя (1)-(2) легко показать, что имеет место соотношение

$$\alpha_x(t)H + H\alpha_x(t) = 2cp_x.$$

Тогда уравнение (4) может быть переписано в виде

$$i\hbar \frac{d\alpha_x}{dt} = 2\alpha_x(t)H - 2cp_x = 2cp_x - 2H\alpha_x(t). \quad (6)$$

Поскольку  $\alpha_x(t)$  и  $H$  не коммутируют друг с другом, то в уравнении (6) является принципиальным положение оператора  $H$ . Поэтому дальше и везде в этом приложении будем рассматривать случай, когда  $H$  находится справа от  $\alpha_x(t)$ .

Учитывая, что  $H$  и  $p_x$  являются интегралами движения, возьмем от правой и левой части уравнения (6) производную по времени. Тогда

$$i\hbar \frac{d^2\alpha_x(t)}{dt^2} = 2 \frac{d\alpha_x(t)}{dt} H. \quad (7)$$

Решая (7) с начальными условиями в момент  $t = t_1$ , имеем

$$\dot{\alpha}_x(t) = \dot{\alpha}_x(t_1) e^{-i\frac{2H\tau}{\hbar}}, \quad (8)$$

где  $\tau = t - t_1$ .

Подставляя (8) в (6), получим

$$\alpha_x(t) = \frac{cp_x}{H} + \dot{\alpha}_x(t_1) \frac{i\hbar}{2H} e^{-i\frac{2H\tau}{\hbar}}. \quad (9)$$

Умножая теперь (9) на скорость света и интегрируя по времени, окончательно найдем

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2 p_x}{H} \tau - \dot{\alpha}_x(t_1) \frac{c\hbar^2}{4H^2} e^{-i\frac{2H\tau}{\hbar}}. \quad (10)$$

Остановимся подробнее на формуле (10). Из этого решения видно, что движение свободного электрона перестает быть «прямолинейным», и приобретает осциллирующий характер. При этом следует заметить, что второе слагаемое в (10) линейно растет со временем, причем  $c^2 p_x / H$  является проекцией обычной скорости электрона, связанной с импульсом  $p_x$  соотношением (5). Последнее слагаемое в этом уравнении быстро осциллирует с амплитудой [285]  $\xi \sim \hbar / mc \sim 10^{-11}$  см, и определяет собой эффект осцилляций Шредингера (Zitterbewegung).

Несмотря на то, что этот эффект был открыт в 30-х годах прошлого века, он продолжает привлекать внимание многих исследователей, как в области релятивистской физики и гравитации [283-284, 361-376], так, например, и в физике конденсированного состояния [377]-[389].

Среди работ, посвященных интерпретации этого эффекта, можно выделить две почти противоположные тенденции. В одной из них Zitterbewegung рассматривается как чисто

квантовое явление, затрудняющее более простое «классическое» понимание квантовых эффектов. Движение заряда и спина представляется здесь в независимой форме, а возникающие при этом квантовые эффекты, как правило, не обсуждаются. Другая тенденция состоит в том, что *Zitterbewegung* определяется как составная часть весьма специфического квантового движения, которое само по себе генерирует спиновые свойства [390]. Подобной точке зрения придерживался и Э. Шредингер [285].

В работе [285] была дана первоначальная интерпретация этого эффекта, заключающаяся в выделении в общем движении электрона макроскопической и микроскопической составляющих. При этом макроскопическое движение характеризуется скоростью  $c^2\mathbf{p}/H$ , и определяет прямолинейное движение электрона, тогда как микроскопическая составляющая имеет осциллирующий характер, и представляет, согласно Шредингеру, «истинную модель внутренней структуры электрона» [286]. Как легко показать, момент импульса электрона Дирака не является интегралом движения. Но если к  $\mathbf{L}=[\mathbf{r}\times\mathbf{p}]$  прибавить оператор  $-i[\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\alpha}]\hbar/4 = \hbar\boldsymbol{\sigma}/2$ , имеющий размерность действия, то их сумма будет интегралом движения, причем  $\hbar\boldsymbol{\sigma}/2$  есть не что иное, как спиновый момент электрона. Таким образом, эффект *Zitterbewegung* действительно связан с внутренней структурой (геометрией [283]-[284]) электрона и его спиновым моментом.

Следует отметить, что данная интерпретация не является полной, и не дает ответа на некоторые важные вопросы. В частности, как известно, электрон Дирака является сложной системой, волновая функция которого описывает электронные и позитронные состояния. В связи с этим возникает вопрос о том, как связаны между собой эффект *Zitterbewegung* и электрон-позитронные состояния системы Дирака. Ответ на него дал возможность более точно описать физическое содержание этого явления [4]. Как показано в [4], эффект *Zitterbewegung* есть следствие интерференции электронных и позитронных состояний свободного электрона Дирака, причем отсутствие связи между скоростью и импульсом (формула (3)) теснейшим образом связано с существованием позитронных состояний.

Рассмотрев особенности движения свободного электрона Дирака и явление *Zitterbewegung*, перейдем теперь к основному содержанию этого приложения, а именно к определению движения электрона Дирака в постоянном магнитном поле. Эта задача не является новой, и исследовалась с разных точек зрения [366, 369, 376]. В работах [366] и [369] она рассматривалась в терминах динамики волнового пакета, т.е. волновой функции электрона, тогда как в [376] основная цель заключалась в выводе и интегрировании уравнений Гейзенберга для операторов координаты и скорости электрона в ковариантной форме. Полученные в [376] результаты имеют сложную математическую форму, затрудняющую их исследование и применение. Кроме этого, в некоторых случаях оказывается удобным в этой задаче перейти к



трехмерному пространству [240]-[241]. Поэтому представляет интерес получить уравнения движения для координаты и скорости электрона Дирака в нековариантной форме, чему и посвящен следующий параграф.

## §2. Уравнения движения для операторов координаты и скорости электрона Дирака в магнитном поле и их решение

Рассмотрим систему, состоящую из электрона Дирака и действующего на него однородного постоянного магнитного поля, имеющего для простоты направление

$$\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}_0. \quad (11)$$

Гамильтониан этой системы имеет вид

$$H = c(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\pi}) + \beta_3 mc^2, \quad (12)$$

где  $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{p} - e/c\mathbf{A}$  – кинематический импульс электрона,  $\mathbf{A} = \{0, B_0 x, 0\}$  – векторный потенциал.

Математически задача заключается в определении уравнений для  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  и  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)$  с учетом магнитного поля, и их решении.

В случае движения электрона в постоянном магнитном поле по-прежнему интегралом движения является его энергия. Это дает возможность при решении поставленной задачи применить подход, предложенный Э. Шредингером.

Итак, используя гамильтониана (12), запишем уравнение Гейзенберга для  $\mathbf{r}(t)$  и  $\boldsymbol{\alpha}(t)$ :

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = c\boldsymbol{\alpha}(t), \quad (13)$$

$$i\hbar \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = \boldsymbol{\alpha}(t)H - H\boldsymbol{\alpha}(t). \quad (14)$$

Вычисляя антикоммутатор  $[\boldsymbol{\alpha}, H]_+$ , имеем

$$\boldsymbol{\alpha}H + H\boldsymbol{\alpha} = 2c\boldsymbol{\pi}(t). \quad (15)$$

Выражая из (15)  $H\boldsymbol{\alpha}$  и подставляя в уравнение (14), найдем

$$i\hbar \frac{d\boldsymbol{\alpha}(t)}{dt} = 2\boldsymbol{\alpha}(t)H - 2c\boldsymbol{\pi}(t). \quad (16)$$

Как несложно показать, уравнение для  $\boldsymbol{\pi}(t)$  имеет вид

$$\frac{d\boldsymbol{\pi}(t)}{dt} = \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{B}]. \quad (17)$$

Дифференцируя теперь (16) по времени и подставляя в получившееся выражение (17), получим уравнение для оператора скорости электрона Дирака в магнитном поле:

$$i\hbar \frac{d^2 \mathbf{a}(t)}{dt^2} - 2 \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} H + 2ec[\mathbf{a}(t) \times \mathbf{B}] = 0. \quad (18)$$

Вообще, определение уравнений для координаты и скорости с учетом спиновых свойств частиц является отдельной задачей в релятивистской квантовой теории [390]. В частности, в работе [376] получено в ковариантной форме уравнение для оператора скорости электрона Дирака, совпадающее по форме с (18), в котором вместо  $\mathbf{a}(t)$  рассматривались матрицы  $\gamma^\mu(t)$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ), а в качестве  $\mathbf{B}$  использовался тензор электромагнитного поля.

Вернемся к уравнению (18). Следует отметить, что для приложений обычно представляет интерес не зависимость оператора скорости и координаты от времени, а среднее значение этих операторов по некоторому состоянию электрона. Как известно, состояние электрона в магнитном поле характеризуется определенным энергетическим спектром, уровни энергии которого принято называть уровнями Ландау. В релятивистском случае он имеет вид [282]

$$\frac{E_n^2}{mc^2} = mc^2 + \frac{p_z^2}{m} + \hbar\omega_L (2n + 1 \pm 1), \quad (19)$$

где  $\omega_L = eB_0 / mc$  – ларморовская (циклотронная) частота электрона. Поэтому дальше и везде в этом приложении будем интересоваться динамикой средних значений операторов координаты и скорости в состоянии  $|n\rangle$  ( $(H - E_n)|n\rangle = 0$ ).

Усредняя (18) по  $|n\rangle$ , найдем

$$\ddot{\mathbf{a}}(t) \frac{i\hbar}{2E_n} - \dot{\mathbf{a}}(t) + [\mathbf{a}(t) \times \boldsymbol{\omega}_L] \frac{mc^2}{E_n} = 0, \quad (20)$$

где для сокращения обозначений предполагаем, что  $\mathbf{a}(t) = \langle n | \mathbf{a}(t) | n \rangle$ .

Уравнение (20) имеет несколько особенностей. В первую очередь следует заметить, что в отсутствие магнитного поля оно переходит в (7). Во-вторых, в нерелятивистском квазиклассическом пределе, когда можно считать  $H \sim mc^2$  и  $\hbar \rightarrow 0$ , из (20) получается известное из нерелятивистской физики уравнение для скорости электрона в магнитном поле

$$\frac{dc\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = [\mathbf{v}(t) \times \boldsymbol{\omega}_L].$$

Перейдем теперь к решению уравнения (20). Поскольку по условию задачи  $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}_0$ , то выражения для  $\alpha_z(t)$  и  $z(t)$  совпадают с (9) и (10) для свободного электрона:

$$\alpha_z(t) = \frac{cp_z}{E_n} + \dot{\alpha}_z(t_1) \frac{i\hbar}{2E_n} e^{-i \frac{2E_n \tau}{\hbar}},$$

$$z(t) = z_0 + \frac{c^2 p_z}{E_n} \tau - \dot{\alpha}_z(t_1) \frac{c\hbar^2}{4E_n^2} e^{-i\frac{2E_n\tau}{\hbar}}. \quad (21)$$

Для компонент  $\alpha_x$  и  $\alpha_y$  из (20) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{\alpha}_x(t) \frac{i\hbar}{2E_n} - \dot{\alpha}_x(t) + \alpha_y(t) \frac{mc^2}{E_n} \omega_L = 0, \quad (22)$$

$$\ddot{\alpha}_y(t) \frac{i\hbar}{2E_n} - \dot{\alpha}_y(t) - \alpha_x(t) \frac{mc^2}{E_n} \omega_L = 0. \quad (23)$$

Умножая (23) на мнимую единицу и складывая с (22), найдем

$$\ddot{\alpha}_+(t) \frac{i\hbar}{2E_n} - \dot{\alpha}_+(t) - i\alpha_+(t) \frac{mc^2}{E_n} \omega_L = 0, \quad (24)$$

где  $\alpha_+(t) = \alpha_x(t) + i\alpha_y(t)$ .

Будем искать решение (24) в виде

$$\alpha_+(t) = C e^{-i\omega t}, \quad (25)$$

где  $C$  есть некоторое с-число.

Подставляя (25) в (24) и вычисляя корни характеристического уравнения, найдем

$$\omega_{1,2} = \frac{E_n}{\hbar} \left( 1 \pm \sqrt{1-p} \right), \quad p = \hbar \omega_L \frac{2mc^2}{E_n^2}. \quad (26)$$

Остановимся более подробно на соотношениях (26). Заметим, что раньше нигде не предполагалось, что магнитное поле является слабым. Поэтому, согласно (25)-(26), решение для  $\alpha_+(t)$  при некоторых значениях магнитного поля становится неустойчивым, возникают экспоненциально нарастающие решения.

Оценим нижнюю границу значений магнитного поля, при которых решение становится неустойчивым. Для этого достаточно считать, что  $E_n \sim mc^2$  (слабо возбужденные состояния). Тогда из (26) получим следующее условие

$$\omega_L^* > 2\Omega = \frac{2mc^2}{\hbar} \sim 10^{21} \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1},$$

что соответствует  $B_0^* \sim 10^{14}$  Гс. Согласно [391]-[392], даже такие космические объекты, как пульсары и нейтронные звезды, обладают магнитным полем, которое по значению много меньше, чем приведенное выше. Это говорит о том, что решение для  $\alpha_+(t)$  в достаточно широком диапазоне значений  $B_0$  является устойчивым.

Учитывая, что для  $B_0 \ll B_0^*$  параметр  $p \ll 1$ , представим  $\omega_{1,2}$  в виде ряда по  $p$ , ограничившись только линейными членами. Тогда

$$\omega_1 = \frac{2E_n}{\hbar}, \quad \omega_2 = \omega_L \frac{mc^2}{E_n}, \quad \omega_2 \ll \omega_1. \quad (27)$$

Соотношение  $\omega_2 \ll \omega_1$  показывает, что  $\alpha_+(t)$  содержит быстрые и медленные колебания.

Используя (25)-(26), запишем решение уравнения (24):

$$\alpha_+(t) = C_1 e^{-i\omega_1 t} + C_2 e^{-i\omega_2 t}, \quad (28)$$

где постоянные коэффициенты  $C_{1,2}$  определяются из начальных условий.

Вычисление коэффициентов  $C_{1,2}$  может быть произведено различными способами. В общем случае необходимо решить систему уравнений относительно  $C_{1,2}$ , образованную из (28) и уравнения для  $\dot{\alpha}_+(t)$  при  $t = t_1$ . Тогда, пропуская математические преобразования, запишем ответ:

$$C_1 = \left[ \frac{i}{\omega_1} \dot{\alpha}_+(t_1) - \frac{c\pi_+(t_1)}{E_n} \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \right] e^{i\omega_1 t_1}, \quad C_2 = \frac{c\pi_+(t_1)}{E_n} \frac{\omega_1}{\omega_1 - \omega_2} e^{i\omega_2 t_1}, \quad (29)$$

где  $\pi_+(t_1) = \pi_x(t_1) + i\pi_y(t_1)$ . Для сокращения обозначений будем считать, что  $\pi_{x,y,z}(t_1) = \pi_{x,y,z}$ ,  $\alpha_{x,y,z}(t_1) = \alpha_{x,y,z}$  и  $\dot{\alpha}_{x,y,z}(t_1) = \dot{\alpha}_{x,y,z}$ .

Заметим, что при  $B_0 = 0$  ( $\omega_2 = 0$ ) (28) с коэффициентами (29) переходит в решение для свободного электрона.

В работе [393] в выражениях для  $C_{1,2}$  использовалось условие  $\omega_2 \ll \omega_1$  и пренебрегалось отношением  $\omega_2 / \omega_1$ . В данном приложении представляет интерес рассмотреть общий случай, воспользовавшись для этого формулами (29).

Итак, подставляя (29) в (28) и выделяя действительную и мнимую части, получим

$$\alpha_x(t) = \frac{c\pi_x}{E_n} K_1(\tau) + \frac{c\pi_y}{E_n} K_2(\tau) + \frac{\dot{\alpha}_x}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) - \frac{\dot{\alpha}_y}{\omega_1} \cos(\omega_1 \tau), \quad (30)$$

$$\alpha_y(t) = -\frac{c\pi_x}{E_n} K_2(\tau) + \frac{c\pi_y}{E_n} K_1(\tau) + \frac{\dot{\alpha}_x}{\omega_1} \cos(\omega_1 \tau) + \frac{\dot{\alpha}_y}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau), \quad (31)$$

а также для  $\alpha_z(t)$ :

$$\alpha_z(t) = \frac{cp_z}{E_n} + \frac{\dot{\alpha}_z}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau),$$

где

$$K_1(\tau) = \frac{\omega_1 \cos(\omega_2 \tau) - \omega_2 \cos(\omega_1 \tau)}{\omega_1 - \omega_2}, \quad K_2(\tau) = \frac{\omega_1 \sin(\omega_2 \tau) - \omega_2 \sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1 - \omega_2}.$$

Умножая (30)-(31) на скорость света и интегрируя, найдем

$$x(t) = x_0 + \frac{c^2 \pi_x}{E_n} G_1(\tau) - \frac{c^2 \pi_y}{E_n} G_2(\tau) - \frac{c \dot{\alpha}_x}{\omega_1^2} \cos(\omega_1 \tau) - \frac{c \dot{\alpha}_y}{\omega_1^2} \sin(\omega_1 \tau), \quad (32)$$

$$y(t) = y_0 + \frac{c^2 \pi_x}{E_n} G_2(\tau) + \frac{c^2 \pi_y}{E_n} G_1(\tau) + \frac{c \dot{\alpha}_x}{\omega_1^2} \sin(\omega_1 \tau) - \frac{c \dot{\alpha}_y}{\omega_1^2} \cos(\omega_1 \tau), \quad (33)$$

$$z(t) = z_0 + \frac{c^2 p_z}{E_n} \tau - \frac{c \dot{\alpha}_z}{\omega_1^2} \cos(\omega_1 \tau),$$

где  $x_0$  и  $y_0$  определяются начальными условиями,

$$G_1(\tau) = \frac{\omega_1^2 \sin(\omega_2 \tau) - \omega_2^2 \sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)}, \quad G_2(\tau) = \frac{\omega_1^2 \cos(\omega_2 \tau) - \omega_2^2 \cos(\omega_1 \tau)}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)}.$$

В некоторых случаях оказывается удобным записать решения (32)-(33) в другом виде.

Для этого воспользуемся уравнением (16) при  $t = t_1$ :

$$\dot{\alpha}_+(t_1) \frac{i}{\omega_1} = \alpha_+(t_1) - \frac{c \pi_+(t_1)}{E_n}. \quad (34)$$

Используя (29), преобразуем (28) к виду

$$\alpha_+(t) = \dot{\alpha}_+ \frac{i}{\omega_1} \cos(\omega_1 \tau) + \dot{\alpha}_+ \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c \pi_+}{E_n} (K_1(\tau) - i K_2(\tau)).$$

Учитывая теперь (34), имеем

$$\alpha_+(t) = \alpha_+ \cos(\omega_1 \tau) + \frac{\dot{\alpha}_+}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c \pi_+}{E_n} (K_1(\tau) - \cos(\omega_1 \tau) - i K_2(\tau)). \quad (35)$$

Интегрирую (35) с начальными условиями при  $t = t_1$ , найдем

$$x(t) - x(t_1) = \frac{c \alpha_x}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c \dot{\alpha}_x}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \pi_x}{E_n} \tilde{G}_1(\tau) + \frac{c^2 \pi_y}{E_n} \tilde{G}_2(\tau), \quad (36)$$

$$y(t) - y(t_1) = \frac{c \alpha_y}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c \dot{\alpha}_y}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) - \frac{c^2 \pi_x}{E_n} \tilde{G}_2(\tau) + \frac{c^2 \pi_y}{E_n} \tilde{G}_1(\tau), \quad (37)$$

где

$$\tilde{G}_1(\tau) = G_1(\tau) - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1}, \quad \tilde{G}_2(\tau) = \frac{\omega_1^2 (1 - \cos(\omega_2 \tau)) - \omega_2^2 (1 - \cos(\omega_1 \tau))}{\omega_1 \omega_2 (\omega_1 - \omega_2)},$$

а также

$$z(t) - z(t_1) = \frac{c \alpha_z}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c \dot{\alpha}_z}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \pi_z}{E_n} \left( \tau - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right). \quad (38)$$

Проверим решения (36)-(37). Устремляя магнитное поле к нулю ( $\omega_2 \rightarrow 0$ ), имеем

$$\frac{\sin(\omega_2 \tau)}{\omega_2} \rightarrow \tau, \quad \frac{1 - \cos(\omega_2 \tau)}{\omega_2} \rightarrow 0,$$

что дает

$$x(t) - x(t_1) = \frac{c\alpha_x}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c\dot{\alpha}_x}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \pi_x}{E_n} \left( \tau - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right),$$

$$y(t) - y(t_1) = \frac{c\alpha_y}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c\dot{\alpha}_y}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \pi_y}{E_n} \left( \tau - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right).$$

Полученные соотношения совпадают с (38) для свободного электрона. Запишем их все вместе в векторной форме:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c\boldsymbol{\alpha}(t_1)}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \boldsymbol{\pi}(t_1)}{E_n} \left( \tau - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right). \quad (39)$$

Рассмотрим теперь более подробно, к каким следствиям приводят определенные выше формулы.

### §3. Исследование полученного решения

Прежде чем приступить к исследованию полученных решений, вспомним основные свойства движения классического релятивистского электрона в постоянном однородном магнитном поле, имеющем направлением (11). Это движение характеризуется тем, что, во-первых, компонента скорости, перпендикулярная магнитному полю, остается постоянной по модулю, т.е.

$$|\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} = \text{const}, \quad (40)$$

во-вторых, траектории движения представляют собой винтовую линию с осью вдоль магнитного поля, причем в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, они являются окружностями с постоянным радиусом [394]:

$$r_L = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \frac{|\mathbf{v}_\perp|}{\omega_L} = \text{const}. \quad (41)$$

Основные особенности, следующие из решения (30)-(33), заключаются в том, что для электрона Дирака в магнитном поле соотношения (40), (41) нарушаются, т.е., другими словами, как скорость  $|\mathbf{v}_\perp|$ , так и  $r_L$ , становятся функциями времени.

Перейдем к определению этих функциональных зависимостей. Сначала рассмотрим эффект, связанный со скоростью электрона. Умножая выражения (30)-(31) на скорость света, перепишем их в виде

$$\alpha_x(t) = V_x K_1(\tau) + V_y K_2(\tau) + v_x \sin(\omega_1 \tau) - v_y \cos(\omega_1 \tau), \quad (42)$$

$$\alpha_y(t) = -V_x K_2(\tau) + V_y K_1(\tau) + v_x \cos(\omega_1 \tau) + v_y \sin(\omega_1 \tau), \quad (43)$$

где  $V_{x,y} = c^2 \pi_{x,y} / E_n$  – компоненты начальной макроскопической скорости электрона, а  $v_{x,y} = c \dot{\alpha}_{x,y} / \omega_1$  – компоненты начальной скорости электрона, соответствующие его дрожательному движению (Zitterbevegung).

Прежде чем подставить (42)-(43) в (48), оценим порядок величин  $V_{x,y}$  и  $v_{x,y}$ . Поскольку мы рассматриваем релятивистский электрон, то скорость  $V_{x,y}$  является достаточно высокой. Что касается  $v_{x,y}$ , имеем

$$v_{x,y} = \frac{c}{\omega_1} \frac{d\alpha_{x,y}(t_1)}{dt_1} \sim \frac{c}{\omega_1} \frac{\alpha_{x,y}}{\tau^*},$$

где  $|\alpha_{x,y}| \sim 1$ , а  $\tau^*$  – некоторое характерное время в данной задаче. Как было выяснено в предыдущем параграфе, решение (42)-(43) содержит быстрые и медленные колебания. Поэтому  $\tau^*$  имеет два значения, соответствующие  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Для быстрых колебаний это время имеет порядок

$$\tau^* \sim \frac{\pi}{\omega_1} \sim 10^{-21} \text{ с.}$$

На таких временах движение электрона можно всегда считать свободным. Это обстоятельство определенным образом отражается на (42)-(43), а именно, при  $\tau \sim \tau^*$  они переходят в формулы, определяющие скорость свободного электрона. Действительно, в (42)-(43) можно с большой точностью считать, что

$$\cos(\omega_2 \tau) \approx 1, \quad \sin(\omega_2 \tau) \approx 0,$$

при  $\tau \sim \tau^*$ . Тогда несложно показать, что из (42)-(43) следует выражение

$$V_{x,y}(t) = V_{x,y} + i v_{x,y} e^{-i\omega_2 \tau},$$

полностью совпадающее с решением для свободного электрона.

Рассмотрим теперь второй случай, когда

$$\tau^* \sim \frac{\pi}{\omega_2} = \frac{\pi}{\omega_L} \frac{E_n}{mc^2},$$

причем, в зависимости от величины магнитного поля и энергии электрона, это время может быть как меньше, так и больше единицы (секунды). Тогда

$$v_{x,y} \sim \frac{c}{\omega_1} \frac{\alpha_{x,y}}{\tau^*} = c \alpha_{x,y} \frac{\omega_2}{\pi \omega_1} \leq \frac{\lambda_c \omega_L}{2\pi}, \quad (44)$$

где  $\lambda_c = \hbar / mc$  – комптоновская длина волны электрона. Формула (44) позволяет оценить значение магнитного поля, при котором  $V_{x,y} \sim v_{x,y}$ . В этом случае

$$\lambda_c \omega_L \sim V_0,$$

или

$$B_0^* \sim V_0 \frac{(mc)^2}{e\hbar} \sim 10^3 \cdot V_0 \text{ Гс.} \quad (45)$$

Например, для электрона со скоростью  $V_0 \sim 10^7 \text{ см} \cdot \text{с}^{-1}$  магнитное поле  $B_0^* \sim 10^{10} \text{ Гс}$ . Другими словами, как для слаборелятивистских, так и для ультрарелятивистских электронов значения  $B_0^*$ , при которых  $v_{x,y} \sim V_{x,y}$ , являются достаточно высокими. Такие поля встречаются у некоторых космических объектов, например, у нейтронных звезд [391]-[392].

Перейдем теперь к вычислению  $|\mathbf{v}_\perp|$ . Рассмотрим сначала случай слабых магнитных полей. Тогда из (44) следует, что  $v_{x,y} \ll 1 \ll V_{x,y}$ . Поэтому в (42)-(43) можно пренебречь слагаемыми, пропорциональными  $v_{x,y}$  и  $\omega_2 / \omega_1$ , т.е. считать:

$$V_x(t) = V_x \cos(\omega_2 t) + V_y \sin(\omega_2 t), \quad (46)$$

$$V_y(t) = -V_x \sin(\omega_2 t) + V_y \cos(\omega_2 t). \quad (47)$$

Подставляя (46)-(47) в (40), найдем

$$|\mathbf{v}_\perp| = \sqrt{V_x^2(t) + V_y^2(t)} = \text{const.}$$

В случае сильного магнитного поля необходимо учитывать все слагаемые в (42)-(43). Тогда, используя (40), имеем

$$|\mathbf{v}_\perp| = \tilde{V}_\perp \sqrt{1 + f(\tau)}, \quad (48)$$

где  $\tilde{V}_\perp = V_\perp / (1 - \omega_2 / \omega_1)$ ,

$$f(\tau) = \left( \frac{v_\perp}{\tilde{V}_\perp} \right)^2 + 2 \frac{V_x v_x + V_y v_y}{\tilde{V}_\perp^2 (1 - \omega_2 / \omega_1)} \sin((\omega_1 - \omega_2)\tau) + \left( 2 \frac{V_y v_x - V_x v_y}{\tilde{V}_\perp^2 (1 - \omega_2 / \omega_1)} - 2 \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \left( \cos((\omega_1 - \omega_2)\tau) - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) - \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2, \quad (49)$$

$v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ . Если теперь в (49) пренебречь отношением  $\omega_2 / \omega_1$ , то  $f(\tau)$  совпадает с выражением, полученным в [393].

Формула (48) имеет ряд особенностей. Во-первых, в сильных магнитных полях поперечная составляющая скорости электрона Дирака не является константой даже по модулю. Во-вторых, в сверхсильных полях происходит увеличение поперечной скорости электрона. Третья особенность связана с тем, что  $|\mathbf{v}_\perp|$  является быстро осциллирующей функцией, имеющей период  $2\pi / (\omega_1 - \omega_2) \approx 2\pi / \omega_1$ .



Перейдем теперь к вычислению  $r_L$ . Выпишем еще раз (32)-(33), предполагая для сокращения обозначений, что  $x(t) - x_0 = \tilde{x}(t)$  и  $y(t) - y_0 = \tilde{y}(t)$ :

$$\tilde{x}(t) = R_x \omega_2 G_1(\tau) - R_y \omega_2 G_2(\tau) - r_x \cos(\omega_1 \tau) - r_y \sin(\omega_1 \tau), \quad (50)$$

$$\tilde{y}(t) = R_x \omega_2 G_2(\tau) + R_y \omega_2 G_1(\tau) + r_x \sin(\omega_1 \tau) - r_y \cos(\omega_1 \tau), \quad (51)$$

где

$$R_{x,y} = \frac{c^2 \pi_{x,y}}{\omega_2 E_n} = \frac{V_{x,y}}{\omega_2}, \quad r_{x,y} = \frac{c \dot{\alpha}_{x,y}}{\omega_1^2} = \frac{v_{x,y}}{\omega_1}.$$

Прежде чем воспользоваться (41), произведем оценки коэффициентов в (50)-(51). Если в сверхсильных полях  $v_{x,y} \sim V_{x,y}$ , то в случае (50)-(51) ситуация совершенно другая. Действительно, для того чтобы  $r_{x,y}$  было порядка  $R_{x,y}$ , необходимо чтобы  $\omega_2 \sim \omega_1$ . Но, как было выяснено выше, в области значений магнитных полей, допустимых в этой модели, всегда  $\omega_2 \ll \omega_1$ . Поэтому между коэффициентами в (50)-(51) может существовать только соотношение  $r_{x,y} \ll R_{x,y}$ .

В сверхсильных полях, когда  $v_{x,y} \sim V_{x,y}$ , вклад слагаемых, связанных с эффектом Zitterbewegung, будет определяться отношением  $\omega_2 / \omega_1 \ll 1$ . Это говорит о том, что в нулевом приближении по  $r_{x,y}$  и  $\omega_2 / \omega_1$  из (50)-(51), найдем

$$\tilde{x}(t) = R_x \sin(\omega_2 \tau) - R_y \cos(\omega_2 \tau), \quad (52)$$

$$\tilde{y}(t) = R_x \cos(\omega_2 \tau) + R_y \sin(\omega_2 \tau). \quad (53)$$

Подставляя (51)-(53) в (41) легко показать, что радиус ларморовской орбиты остается постоянным во времени, т.е.

$$r_L = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = R_\perp = \frac{V_\perp}{\lambda_2} = \text{const},$$

где  $R_\perp = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ ,  $V_\perp = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ .

В общем случае с учетом эффекта Zitterbewegung из (50)-(51) и (41), получим

$$r_L = \tilde{R}_\perp \sqrt{1 + g(\tau)}, \quad (54)$$

где  $\tilde{R}_\perp = R_\perp / (1 - \omega_2 / \omega_1)$ ,

$$g(\tau) = \left( \frac{r_\perp}{\tilde{R}_\perp} \right)^2 + 2 \frac{R_x r_x + R_y r_y}{\tilde{R}_\perp^2 (1 - \omega_2 / \omega_1)} \sin((\omega_1 - \omega_2) \tau) + \left( 2 \frac{R_y r_x - R_x r_y}{\tilde{R}_\perp^2 (1 - \omega_2 / \omega_1)} - 2 \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right) \left( \cos((\omega_1 - \omega_2) \tau) - \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \right) - \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2. \quad (55)$$

В качестве примера рассмотрим случай, когда  $R_x = R_y$  и  $r_x = r_y$ . Тогда пренебрегая в (55) отношением  $\omega_2 / \omega_1$ , найдем

$$r_L = \sqrt{2}R_\perp \sqrt{1 + \left(\frac{r_x}{R_x}\right)^2 + \frac{2r_x}{R_x} \sin(\omega_1 \tau)}, \quad \frac{2r_x}{R_x} \ll 1. \quad (56)$$

Формулы (54)-(56) показывают, что радиус ларморовской орбиты, так же как и поперечная составляющая скорости электрона, совершает периодические дрожательные движения с очень высокой частотой около некоторого среднего значения. Поскольку  $r_x / R_x \ll 1$ , представим (56) в виде ряда по  $r_x / R_x$ . Тогда, усредняя получившееся выражение по периоду высокочастотных колебаний с точностью до второго порядка по  $r_x / R_x$ , найдем

$$\bar{r}_L \approx \sqrt{2}R_\perp \left( 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r_x}{R_x} \right)^2 \right).$$

Другими словами, эффект Zitterbewegung для электрона Дирака в магнитном поле приводит в среднем к увеличению радиуса его ларморовской орбиты.

Оценим величину этого эффекта. Как говорилось выше, в сильных магнитных полях ( $v_{x,y} \sim V_{x,y}$ ) отношение  $r_{x,y} / R_{x,y}$  имеет порядок

$$\frac{r_{x,y}}{R_{x,y}} \sim \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\hbar \omega_L}{2E_n^2} \leq \frac{\omega_L}{2\Omega} \sim B_0 \cdot 10^{-14}, \quad (57)$$

где  $\Omega = mc^2 / \hbar \sim 10^{21}$  рад·с<sup>-1</sup>. Например, для  $B_0 \sim 10^{10}$  Гс из (57), найдем  $r_{x,y} / R_{x,y} \sim 10^{-4}$ . Другими словами, даже в сверхсильных магнитных полях этот эффект является очень слабым.

## §4. Дисперсия приращения координаты электрона Дирака

Решение, полученное Шредингером для свободного электрона (10), а также (36)-(38), могут быть использованы в различных задачах релятивистской квантовой механики. В частности большой интерес представляет определение оператора

$$e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1))} = e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}}, \quad (58)$$

встречающегося в некоторых физических моделях, используемых в квантовой электродинамике [240-241, 262]. Эта задача является частью более общей проблемы о «распутывании» произведения операторов электронных плотностей  $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}(t)} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}(t_1)}$  [287].

Ограничимся в данном параграфе случаем слабых магнитных полей. Это означает, что для  $\mathbf{r}(t)$  в (59) можно с большой точностью использовать (39), предварительно поменяв в (39) средние значения на операторы. Тогда

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c\boldsymbol{\alpha}(t_1)}{\omega_1} \sin(\omega_1 \tau) + \frac{c\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)}{\omega_1^2} (1 - \cos(\omega_1 \tau)) + \frac{c^2 \mathbf{p}}{H} \left( t - \frac{\sin(\omega_1 \tau)}{\omega_1} \right), \quad (59)$$

где  $H$  – гамильтониан (1),  $\tau = t - t_1$ ,  $\omega_1 = 2H / \hbar$ .

Учитывая, что  $H^2 = E^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2$ , легко показать, что имеют место формулы:

$$\cos(\omega_1 \tau) = \cos(\tilde{\Omega} \tau), \quad \sin(\omega_1 \tau) = \frac{\omega_1}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega} \tau), \quad (60)$$

где

$$\tilde{\Omega} = \sqrt{\omega_1^2} = \frac{2E}{\hbar} = 2\Omega \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}}, \quad \Omega = \frac{mc^2}{\hbar}.$$

Используя (60), найдем

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_1) = \frac{c\boldsymbol{\alpha}(t_1)}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega} \tau) + \frac{c\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_1)}{\tilde{\Omega}^2} (1 - \cos(\tilde{\Omega} \tau)) + \frac{c^2 \mathbf{p} H}{E^2} \left( t - \frac{\sin(\tilde{\Omega} \tau)}{\tilde{\Omega}} \right). \quad (61)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся в (58) формулой Эйлера. Тогда

$$e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = \cos(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}) + i \sin(\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}). \quad (62)$$

Вычислим теперь  $(\mathbf{k} \cdot \Delta\mathbf{r})^2$ . Умножая (61) скалярно на  $\mathbf{k}$  и вводя обозначения:

$$A(\tau) = \frac{c^2 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})}{E^2} \left( \tau - \frac{\sin(2\tilde{\Omega} \tau)}{2\tilde{\Omega}} \right),$$

$$B(\tau) = c \frac{\sin(2\tilde{\Omega} \tau)}{2\tilde{\Omega}},$$

$$C(\tau) = \frac{c^2}{\tilde{\Omega}^2} (1 - \cos(2\tilde{\Omega} \tau)),$$

запишем оператор  $\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}$  в виде

$$\mathbf{k}\Delta\mathbf{r} = A(\tau)H + B(\tau)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + C(\tau)(\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}). \quad (63)$$

Возводя (63) в квадрат, найдем

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})^2 = & A^2(\tau)E^2 + A(\tau)B(\tau)(H(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})H) + A(\tau)C(\tau)(H(\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}})H) + \\ & + B^2(\tau)(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2 + B(\tau)C(\tau)((\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})(\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}})(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})) + C^2(\tau)(\mathbf{k} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}})^2. \end{aligned} \quad (64)$$

В первую очередь заметим, что вследствие коммутационных свойств матриц Дирака  $(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})^2 = k^2$ . Далее несложно показать, что

$$H(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha}) + (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\alpha})H = 2c(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}). \quad (65)$$

Теперь используя определение  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}$ , т.е.

$$i\hbar\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \boldsymbol{\alpha}H - H\boldsymbol{\alpha},$$

получим

$$H(\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}})H = \frac{1}{i\hbar} \{H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H - E^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})E^2 - H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H\} \equiv 0, \quad (66)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}}) + (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}})(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) = \frac{1}{i\hbar} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})^2 H - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) - H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})^2\} \equiv 0, \quad (67)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}})^2 &= (\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}})(\mathbf{k} \cdot \dot{\mathbf{a}}) = -\frac{1}{\hbar^2} ((\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H - H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}))((\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H - H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})) = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H - 2E^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) + H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})H(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})\} = -\frac{4}{\hbar^2} (c^2(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})^2 - k^2 E^2). \end{aligned} \quad (68)$$

В итоге подставляя (65)-(68) в (64) и выполняя простейшие преобразования, найдем

$$(\mathbf{k} \Delta \mathbf{r})^2 = \left( \frac{x\Omega}{\tilde{\Omega}} \right)^2 \left[ \sin^2(\tilde{\Omega}\tau) + \left( \frac{c(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})}{\hbar\tilde{\Omega}} \right)^2 (\tilde{\Omega}^2 \tau^2 - \sin^2(\tilde{\Omega}\tau)) \right], \quad (69)$$

где  $x = k\lambda_c$ ,  $\lambda_c = \hbar/mc$  – комптоновская длина волны электрона,  $\mathbf{n}$  – единичный вектор, определяющий направление  $\mathbf{k}$ .

Поскольку, как показывает (69),  $(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2$  не зависит от матриц Дирака, то при вычислении (62) можно использовать формулы (60). Другими словами, в случае, когда на электрон Дирака действует слабое магнитное поле, оператор (58) имеет вид

$$e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = \cos(k\Delta r) + i \frac{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})}{k\Delta r} \sin(k\Delta r), \quad (70)$$

где

$$k\Delta r = \sqrt{(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2},$$

что полностью решает поставленную задачу.

Рассмотрим более подробно формулу (69). В первую очередь заметим, что выражение для  $(\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2$  сильно упрощается в нерелятивистском пределе. Действительно, в этом случае  $\tilde{\Omega} \sim 2\Omega = 2mc^2/\hbar$  и  $p/mc \ll 1$ . Усредняя теперь (69) по периоду высокочастотных колебаний, которые представляют собой чисто релятивистский квантовый эффект, и пренебрегая отношением  $p/mc$ , найдем

$$\overline{(\mathbf{k} \Delta \mathbf{r})^2}^T \approx \frac{x^2}{2},$$

где  $T = 2\pi/\tilde{\Omega}$ .

Кроме этого, если усреднить (69) по некоторому состоянию электрона Дирака, то величину  $\langle (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2 \rangle$  можно рассматривать как дисперсию приращения его координаты. Особенность  $\langle (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2 \rangle$  заключается в том, дисперсия координаты свободного электрона Дирака не только имеет традиционную квадратичную зависимость от времени, но и

дополнительное быстро осциллирующее слагаемое, представляющее собой одно из проявлений внутренней структуры (геометрии [283]-[284]) электрона.

Действительно, если выбрать основное состояние ( $\langle p_{x,y,z} \rangle_0 = 0$ ), то в классической релятивистской физике дисперсия координаты в этом состоянии равна нулю. Но в квантовой релятивистской механике даже в основном состоянии  $\langle (\mathbf{k} \cdot \Delta \mathbf{r})^2 \rangle_0$  зависит от времени:

$$\langle (\mathbf{k} \Delta \mathbf{r})^2 \rangle_0 = x^2 \sin^2(2\Omega \tau),$$

т.е. осциллирует, принимая периодически нулевые значения с очень высокой частотой, что представляет собой чисто квантовый эффект, связанный с внутренней структурой электрона и его спиновым моментом.

## §5. Выводы

1. В приложении исследовался вопрос о характере движения электрона Дирака в постоянном магнитном поле. В первом параграфе рассмотрен случай свободного электрона. Показано, что его движение в релятивистской квантовой механике носит достаточно сложный характер. Он проявляется, во-первых, в том, что скорость электрона приобретает самостоятельное значение наряду с его импульсом. Во-вторых, это движение не является «прямолинейным», а имеет осциллирующий характер с амплитудой колебаний, имеющей порядок комптоновской длины волны электрона. Эта особенность в литературе получила название эффекта осцилляций Шредингера (*Zitterbewegung*). Она связана с наличием у электрона внутренней структуры, которая определяется матрицами Дирака и спиновым моментом.

2. Во втором параграфе рассмотрено движение электрона Дирака в постоянном магнитном поле. Получены уравнения для операторов координаты  $\mathbf{r}(t)$  и скорости  $\mathbf{v}(t) = c\boldsymbol{\alpha}(t)$ . Определена зависимость от времени средних значений  $\langle \mathbf{r}(t) \rangle$  и  $\langle \mathbf{v}(t) \rangle$  электрона в состоянии  $|n\rangle$ . Установлено, что они содержат быстрые и медленные колебания, определяющиеся частотами:  $\omega_1 = 2E_n / \hbar$  и  $\omega_2 = \omega_L mc^2 / E_n$ , причем  $\omega_2 \ll \omega_1$ , где  $E_n$  – собственное значение энергии электрона Дирака в состоянии  $|n\rangle$  (уровни Ландау),  $\omega_L$  – ларморовская (циклотронная) частота электрона.

3. В третьем параграфе произведено исследование полученных решений. Как показали вычисления, среднее значение координаты и скорости электрона состоят из двух частей, одна из которых характеризуется «макроскопической» скоростью  $V_{x,y} = c^2 \pi_{x,y} / E_n$ , осциллирующей с

частотой  $\omega_2$ , а вторая, связана со скоростью высокочастотных дрожательных движений электрона  $v_{x,y} = c\dot{\alpha}_{x,y} / \omega_1$ , имеющих частоту  $\omega_1 \sim 2E_n / \hbar$ . В сильных магнитных полях, когда  $B_0 \geq B_0^* \sim 10^3 \cdot V_{x,y}$  Гс,  $v_{x,y} \sim V_{x,y}$ . В то же время при  $B_0 \ll B_0^* \sim 10^3 \cdot V_{x,y}$  всегда  $v_{x,y} \ll V_{x,y}$ . В частности установлено, что в отличие классической релятивистской физики, в которой модуль поперечной скорости  $|\mathbf{v}_\perp|$  электрона и радиус его ларморовской орбиты  $r_L$  являются постоянными, в квантовой релятивистской механике они становятся периодическими функциями времени, имеющими период  $1/(\omega_1 - \omega_2) \approx 1/\omega_1$ . Кроме этого, показано, что эффект Zitterbewegung для электрона Дирака в постоянном магнитном поле приводит к увеличению радиуса его ларморовской орбиты, но этот эффект даже в сильных магнитных полях является очень слабым и имеет при  $B_0 \geq B_0^*$  порядок  $(\omega_2 / \omega_1)^2 \ll 1$ .

4. В четвертом параграфе рассматривается применение полученных общих соотношений на примере вычисления оператора  $e^{i\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}} = e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(t_1))}$  в случае слабых магнитных полей. Определена дисперсия  $\mathbf{k}\Delta\mathbf{r}$ , характерная особенность которой заключается в том, что она имеет не только традиционную квадратичную зависимость от времени, но и дополнительное быстро осциллирующее слагаемое, представляющее собой одно из проявлений внутренней структуры электрона Дирака. При этом для основного состояния  $-\langle (\mathbf{k}\Delta\mathbf{r})^2 \rangle_0 = x^2 \sin^2(\Omega\tau)$ , т.е. дисперсия координаты не равна нулю как в классической физике и нерелятивистской квантовой механике, а совершает высокочастотные колебания, принимая периодически нулевые значения, что является следствием существования внутренней геометрии релятивистского электрона, связанной с матрицами Дирака и спиновым моментом.

## Список работ, опубликованных по теме диссертации

- [A.1] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. Радиационное трение спинового магнитного момента в присутствии поля электромагнитного вакуума // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Радиофизика. – 2010. – №2(1). – С. 75-83.
- [A.2] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. О характере движения электрона Дирака в постоянном магнитном поле // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2011. – №2(1). – С. 170-180.
- [A.3] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. К вопросу о «распутывании» произведения операторов электронных плотностей в релятивистской квантовой теории // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2011. – №5(1). – С. 155-163.
- [A.4] Петров Д.А. К вопросу о влиянии электрон-фононного взаимодействия и флуктуаций фононного поля на релаксацию спинового момента электрона проводимости в немагнитных кристаллах. I // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Физика твердого тела. 2013 (в печати).
- [A.5] Петров Д.А. К вопросу о влиянии электрон-фононного взаимодействия и флуктуаций фононного поля на релаксацию спинового момента электрона проводимости в немагнитных кристаллах. II // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Физика твердого тела. 2013 (в печати).
- [A.6] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В., Петров Д.А. Квантово-статистическая теория радиационных эффектов без расходимостей // Актуальные проблемы статистической физики (Малаховский сборник). – 2007. – Т.6. – С. 3-35.
- [A.7] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. Радиационное затухание магнитного момента нерелятивистского электрона // Сб. XIII нижегородская сессия молодых ученых. Естественнонаучные дисциплины: Тезисы докладов. Нижний Новгород. – 2008. – С. 68-70.
- [A.8] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. Эффект осцилляций Шредингера в задаче о движении электрона Дирака в постоянном магнитном поле // Сб. XV нижегородская сессия молодых ученых. Естественнонаучные дисциплины: Тезисы докладов. Нижний Новгород. – 2010. – С. 34-35.
- [A.9] Петров Д.А. О влиянии электрон-фононного взаимодействия на релаксацию спинового момента электрона проводимости в немагнитных кристаллах // Сб. XVI нижегородская сессия молодых ученых. Нижний Новгород. – 2011. – С. 75-79.

## Список литературы

- [1] Gerlach W., Stern O. Das magnetische moment dessilberatoms //Z. Phys. – 1922. – Vol. 9. – Pp. 353-355.
- [2] Uhlenbeck G.E., Goudsmith S. Ersetzung der hypothese vom unmechanischen zwang durch eine forderung bezuglichdes inneren verhaltens jedes einzelnen elektron //Die Naturwissenschaften. – 1925. –Vol. 13. – №47. – Pp. 953-954.
- [3] Pauli W. //Zs. f. Phys. 1927. – Vol. 43. – P. 601.
- [4] Паули В. Общие принципы волновой механики. М.: ОГИЗ, 1947. – 332 с.
- [5] Dirac P.A.M. The quantum theory of the electron //Proc. Roy. Soc. A. – 1928. – Vol. 117. – Pp. 610-624.
- [6] Дирак П.А.М. Квантовая теория электрона. Собрание трудов. Том 2. Квантовая теория (научные статьи 1924-1947). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 848 с.
- [7] Аплеснин С.С. Основы спинтроники: Учебное пособие. 2-е изд., испр. – СПб.: Изд-во «Лань», 2010. – 288 с.
- [8] Zutic I., Fabian J., Das Sarma S. Spintronic: Fundamentals and application //Rev. Mod. Phys. – 2004. Vol. 76. – Pp. 323-410.
- [9] Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е., Панас А.И., Эпштейн Э.М. Спинтроника: обменное переключение ферромагнитных металлических переходов при малой плотности тока //УФН. – 2009. – Т. 179. – №4. – С. 359-368.
- [10] Кусраев Ю.Г. Спиновые явления в полупроводниках: физика и приложение //УФН. – 2010. – Т. 180. – №7. – С. 759-773.
- [11] Тарасенко С.А. Спиновые фототоки в полупроводниках //УФН. 2010. Т.180. №7. С. 773-777.
- [12] Волков Н.В. Спинтроника: магнитные тунельные структуры на основе манганитов //УФН. –2012. – Т. 182. – №3. – С. 263-285.
- [13] Голуб Л.Е. Спиновый транспорт в гетероструктурах //УФН. – 2012. – Т. 182. – №8. – С. 876-879.
- [14] Ивченко Е.Л. Спиновая физика в полупроводниковых наносистемах //УФН. – 2012. – Т. 182. –№8. – С. 870-876.
- [15] Dyakonov M.I. Spin physics in semiconductors. Springer, Series in solid state sciences. Berlin, 2008.
- [16] Wolf S.A., Awschalom D.D., Buhrman R.A., Daughton J.M., von Molnar S., Roukes M.L., Chtchelkanova A.Y., Treger D.M. Spintronics: A spin-based electronic vision for the future //Science. 2001. – Vol. – 294. – №5546. – Pp. 1488-1495.



- [17] Ферт А. Происхождение, развитие и перспективы спинтроники //УФН. – 2008. – Т. 178. – №12. – С.1337-1348.
- [18] Awschalom D.D., Loss D., Samarth N. Semiconductor spintronics and quantum computation. Berlin: Springer, 2002. – 311 p.
- [19] Maekawa S. Concept in spin electronics. New York: Oxford University Press, 2006. – 398 p.
- [20] Воробьев Л.Е., Ивченко Е.Л., Фирсов Д.А., Шалыгин В.А. Оптические свойства наноструктур. Учебное пособие. СПб.: Наука, 2001. – 188 с.
- [10] Кусраев Ю.Г. Спиновые явления в полупроводниках: физика и приложение //УФН. – 2010. – Т. 180. – №7. – С. 759-773.
- [21] Захарченя Б.П., Мейер Ф. Оптическая ориентация. Л.: Наука, 1981.
- [22] Hanle W.T. //Z. Phys. – 1924. – Vol. 30. – P. 93.
- [23] Lampel G. Nuclear dynamic polarization by optical electronic saturation and optical pumping in semiconductors //Phys. Rev. Lett. – 1968. – Vol. 20. – Pp.491-493.
- [24] Глазов М.М. Когерентная спиновая динамика электронов и экситонов в наноструктурах //ФТТ. – 2012. – Т.54. – С. 3-28.
- [25] Zapasskii V. S., Greilich A., at al. Optical Spectroscopy of Spin Noise //Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol. 110. – P. 176601.
- [26] Horn H., Balocchi A., at al. Spin noise spectroscopy of donor-bound electrons in ZnO //Phys. Rev. B. – 2013. – Vol. 87. – P. 045312.
- [27] Glazov M. M., Ivchenko E. L. Spin noise in quantum dot ensembles //Phys. Rev. B. – 2012. – Vol. 86. – P. 115308.
- [28] Glazov M.M., Sherman E.Ya. Theory of spin noise in nanowires //Phys. Rev. Lett. – 2011. – V. 107. – P. 156602.
- [29] Chalupczak W., Godun R.M. Near-resonance spin-noise spectroscopy // Phys. Rev. A. – 2011. – V. 83. – P. 032512.
- [30] Huang O., Steel D.S. Optical excitation effects on spin-noise spectroscopy in semiconductors //Phys. Rev. B. – 2011. – V. 83. – P. 155204.
- [31] Crooker S.A., Brandt J., at al. Spin Noise of Electrons and Holes in Self-Assembled Quantum Dots //Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 104. – P. 036601.
- [32] Kos S., Balatsky A.V., at al. Spin noise of itinerant fermions //Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81. – P. 064407.
- [33] Muller G.M., Oestreich M., at al. Semiconductor spin noise spectroscopy: fundamentals, accomplishments, and challenges //Physica E. – 2010. – Vol. 43. – Pp. 569-587.
- [34] Nausner M., Schlagnitweit J., at al. Non-linearity and frequency shifts of nuclear magnetic spin-noise //J. Mag. Res. – 2009. – Vol. 198. – Pp. 73-79.

- [35] Muller G.M., Romer M., et al. Spin Noise Spectroscopy in GaAs (110) Quantum Wells: Access to Intrinsic Spin Lifetimes and Equilibrium Electron Dynamics //Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 101. – P. 206601.
- [36] Oestreich M., Romer M., et al. Spin Noise Spectroscopy in GaAs //Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 95. – P. 216603.
- [37] Мория Т. Спиновые флуктуации в магнетиках с коллективизированными электронами. М.: Мир, 1988. – 288 с.
- [38] Варшалович Д.А. Спиновое состояние атомов и молекул в космической среде //УФН. – 1970. Т. 101. – С. 369-383.
- [39] Казанцев С.А. Астрофизические и лабораторные приложения явления самовыстраивания //УФН. – 1983. – Т. 139. – С. 621-666.
- [40] Гинзбург В.Л. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975. – 416 с.
- [41] Соколов А.А., Тернов А.А. О поляризационных и спиновых эффектах в теории синхротронного излучения //ДАН. – 1963. – Т. 153. – С. 1053.
- [42] Байер В.Н. Радиационная поляризация электронов в накопителях //УФН. – 1971. – Т. 105. – С. 441-478.
- [43] Дербнев Л.С., Кондратенко А.М. Кинетическая поляризация частиц в накопителях //ЖЭТФ. – 1973. – Т. 64. – С. 1918-1929.
- [44] Leaned J.G., Resvanis L.K., Spencer G.M. Polarization of Colliding e+e- beams at SPEARII //Phys. Rev. Lett. – 1975. – Vol. 35. – Pp.1688-1690.
- [45] Александров И.В. Теория магнитной релаксации. Релаксация в жидких и твердых немагнитных парамагнетиках. М.: Наука, 1975. – 400 с.
- [46] Абрагам А. Ядерный магнетизм. М.: Изд. Иностранной Литературы, 1963. – 551 с.
- [47] Абрагам А., Блини Б. Электронный парамагнитный резонанс переходных ионов. Том 1. М.: Мир, 1978. – 647 с.
- [48] Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса. М.: Мир, 1981. – 488 с.
- [49] Аллен Л., Эберли Дж. Оптический резонанс и двухуровневые атомы. М.: Мир, 1978. – 219 с.
- [50] Вонсовский С.В. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро-, и ферримагнетиков. М.: Наука, 1971. – 1032 с.
- [51] Изюмов Ю.А., Скрябин Ю.Н. Статистическая механика магнитоупорядоченных систем. М.: Наука, 1987. – 264 с.
- [52] Изюмов Ю.А., Кацнельсон М.И., Скрябин Ю.Н. Магнетизм коллективизированных электронов. М.: Наука, 1994. – 368 с.
- [53] Уайт Р. Квантовая теория магнетизма. М.: Мир, 1985. – 304 с.

- [54] Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. – 368 с.
- [55] Маттис Д. Теория магнетизма. Введение в изучение кооперативных явлений. М.: Мир, 1967. – 407 с.
- [56] Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: ФИЗМАТЛИТ, 1994. – 464 с.
- [57] Тябликов С.В. Методы квантовой теории магнетизма. М.: 1975. – 530 с.
- [58] de Lacheisserie E., Gignoux D., Schlenker M. Magnetism: Fundamentals. Vol. 1. Springer, 2005. – 507 p.
- [59] Hubert A., Schafer R. Magnetic domains: the analysis of magnetic microstructures. Springer, 1998. – 696 p.
- [60] Mohn P. Magnetism in the solid state: an introduction. Vol. 134. Birkhauser, 2006. – 229 p.
- [61] Kozikov A.A., Horsell D.W., McCann E., Fal'ko V.I. Evidence for spin memory in the electron phase coherence in graphene //Phys. Rev. B. – 2012. – Vol. 86. – P. 045436.
- [62] Laine E.-M., Breuer H.-P., et al. Nonlocal Memory Effects in the Dynamics of Open Quantum Systems //Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 210402.
- [63] Skarpalezos L., Tsakiris N., Argyrakis P., Vikhrenko V.S. Memory effects in strongly interacting lattice gases: Self-intermediate scattering function studies //Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 84. – P. 075476.
- [64] Cohen G., Rabani E. Memory effects in nonequilibrium quantum impurity models //Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 84. – P. 075150.
- [65] Ryndyk D.A., D'Amico P., Richter K. Single-spin polaron memory effect in quantum dots and single molecules //Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81. – P. 115333.
- [66] Pershin Yu.V., Ventra M.D. Frequency doubling and memory effects in the spin Hall effect //Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 79. – P. 153307.
- [67] Pershin Yu. V., Ventra M.D. Spin memristive systems: Spin memory effects in semiconductor spintronics //Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 78. – P. 113309.
- [68] Viddal C. A., Roshko R. M. Aging and memory effects in zero-field-cooled collections of two-level subsystems //Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – P. 172416.
- [69] Lyubinskiy I. S., Kachorovskii V. Yu. Classical memory effects on spin dynamics in two-dimensional systems //Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – P. 041301.
- [70] Shew C.-Y., Gumbs G. Memory function approach to electronic diffusion in two-dimensional electron systems //Phys. Rev. B. – 2002. – V. 66. – P. 245304.
- [71] Cucchetti A., Ying S. C. Memory effects in the frictional damping of diffusive and vibrational motion of adatoms //Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 54. – P. 3300.

- [72] Kenkre V.M., Raghavan S., Bishop A.R., Salkola M.I. Memory-function approach to interacting quasiparticle-boson systems //Phys. Rev. B. – 1996. – Vol. 53. – P. 5407.
- [73] Bertoncini R. Memory effects in quantum transport theory of confined electronic systems //Phys. Rev. B. – 1994. – Vol. 49. – P. 11467.
- [74] Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. – 304 с.
- [75] Быков Я.В. О некоторых задачах теории интегро-дифференциальных уравнений. Фрунзе, 1957. – 328 с.
- [76] Шкиль Н.И., Вороной А.Н., Лейфура В.Н. Асимптотические методы в теории дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Киев: Высшая школа, 1985. – 248 с.
- [77] Конуэл Э. Кинетические свойства полупроводников в сильных электрических полях. Перевод с англ. М.: Мир, 1970. – 384 с.
- [78] Либенсон М.Н. Лазерно-индуцированные оптические и термические процессы в конденсированных средах и их взаимное влияние. СПб.: Наука, 2007. – 423 с.
- [79] Анисимов С.И., Имас Я.А., Романов Г.С., Ходыко Ю.В. Действие излучения большой мощности на металлы. М.: Наука, 1970. – 272 с.
- [80] Крымский В.В., Балакирев В.Ф. Воздействие наносекундных электромагнитных импульсов на свойства вещества //ДАН. – 2002. – Т. 385. – №6. – С. 786-787.
- [81] Haug H., Jauho A.-P. Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors. – Berlin/Heidelberg: Springer, 1997.
- [82] Shah J. Ultrafast spectroscopy of semiconductor microstructures. – Berlin/ Heidelberg: Springer, 1996.
- [83] Bloch F. Nuclear induction //Phys. Rev. – 1946. – Vol. 70. – №7-8. – Pp. 460-474.
- [84] Kubo R., Tomita K. A general theory of magnetic resonance absorption //J. Phys. Soc. Jpn. – 1954. Vol. 9. – Pp. 888-919.
- [85] Kubo R. Statistical-Mechanical theory of irreversible processes. I. General theory and simple applications to magnetic and conduction problems //J. Phys. Soc. Jpn. – 1957. – Vol. 12. – Pp. 570-586.
- [86] Kubo R., Yokota M., Nakjima S. Statistical-Mechanical theory of irreversible processes. II. Response to thermal distribution //J. Phys. Soc. Jpn. – 1957. – Vol.12. – Pp. 1203-1211.
- [87] Зинн-Жюстен Ж. Континуальный интеграл в квантовой механике. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 360 с.
- [88] Фейнман Р., Хиббс А. Квантовая механика и интегралы по путям. М.: Мир, 1968.

- [89] Попов В.Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике. М.: Атомиздат, 1976. – 256 с.
- [90] Славнов А.А., Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. М.: Наука, 1988. – 272 с.
- [91] Васильев А.Н. Функциональные методы в квантовой теории поля и статистике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. – 295 с.
- [92] Каданов Л., Бейм Г. Квантовая статистическая механика. Методы функций Грина в теории равновесных и неравновесных процессов. М.: Мир, 1964. – 252 с.
- [93] Изюмов Ю.А., Чашин Н.И., Алексеев Д.С. Теория сильно коррелированных систем. Метод производящего функционала. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2006. – 384 с.
- [94] Бекстер Р. Точно решаемые модели в статистической механике. М.: Мир, 1985. – 488 с.
- [95] Фейнман Р. Статистическая механика. Курс лекций. М.: Мир, 1978. – 407 с.
- [96] Feynman R.P., Vernon F.L. The theory of general quantum system interacting with a linear dissipative system //Ann. Phys. – 1963. – Vol. 24. – Pp. 118-173.
- [97] Блум К. Теория матрицы плотности и ее приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. – 248 с.
- [98] Белоусов Ю.М., Манько В.И. Матрица плотности. Представления и применения в статистической механике. М.: МФТИ, 2004. – 163 с.
- [99] Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Репке Г. Статистическая механика неравновесных процессов. М.: ФИЗМАТЛИТ, Том 1,2 (2002).
- [100] Репке Г. Неравновесная статистическая механика. М.: Мир, 1990. – 320 с.
- [101] Форстер Д. Гидродинамические флуктуации, нарушенная симметрия и корреляционные функции. Пер. с англ. – М.: Атомиздат, 1980. – 288 с.
- [102] Wangsness R., Bloch F. The dynamical theory of nuclear induction //Phys. Rev. – 1953. – Vol. 89. – №4. – Pp. 728-739.
- [103] Bloch F. Dynamical theory of nuclear induction. II //Phys. Rev. – 1956. – Vol. 102. – №1. – Pp. 104-135.
- [104] Bloch F. Generalized theory of relaxation //Phys. Rev. – 1957. – Vol. 105. – №4. – Pp. 1206-1222.
- [105] Redfield A. On the theory of relaxation processes //IBM J. Research and Development. – 1957. – Vol. 1. – Pp. 19-31.
- [106] Hubbard P. Quantum-Mechanical and semiclassical forms of the density operator theory of relaxation //Rev. Mod. Phys. – 1961. – Vol. 33. – №2. – Pp. 249-264.
- [107] Честер Дж. Теория необратимых процессов. Пер. с англ. М.: Наука, 1966. – 111 с.
- [108] Зубарев Д.Н. Неравновесная статистическая термодинамика. М.: Наука, 1971. – 415 с.

- [109] Ляпилин И.И., Калашников В.П. Неравновесный статистический оператор и его приложения к кинетике парамагнитных явлений в проводящих кристаллах. Екатеринбург, УрО РАН, 2008. – 367 с.
- [110] Mc Lennan J. Nonlinear effects in transport theory //Phys. Fluid. – 1961. – Vol. 4. – №11. – Pp. 1319-1325.
- [111] Robertson B. Equation of motion in nonequilibrium statistical mechanics //Phys. Rev. – 1967. – Vol. 144. – Pp. 175-183.
- [112] Пелетминский С.В., Яценко А.А. Метод произвольного функционала и вириальные разложения в неравновесной статистической механике //ТМФ. – 1970. – Т. 3. – №2. – С. 287-298.
- [113] Калашников В.П., Ауслендер М.И. Макроскопические уравнения динамики магнетиков. Линейные неравновесные процессы //ФММ. – 1977. – Т. 44. – С.710-726.
- [114] Калашников В.П., Ляпилин И.И. Взаимодействие электронов проводимости с внешним электромагнитным полем в калибровочно инвариантной теории комбинированного резонанса //ТМФ. – 1974. – Т. 18. – С. 108-120.
- [115] Ляпилин И.И., Калашников В.П. Неравновесный статистический оператор и его приложения к кинетике парамагнитных явлений в проводящих кристаллах. Екатеринбург, УрО РАН, 2008. – 367 с.
- [116] Калашников В.П., Ляпилин И.И. Нелинейная теория комбинированного резонанса и поляризация ядер в полупроводниках с решеткой CdS //ТМФ. – 1974. – Т. 18. – С. 273-285.
- [117] Ляпилин И.И., Патраков А.Е. Фотопроводимость двумерной электронной системы со спин-орбитальным взаимодействием в переменном магнитном поле //ЖЭТФ. – 2007. – Т. 132. – С. 214-222.
- [118] Ляпилин И.И., Патраков А.Е. Осцилляции кинетических коэффициентов в двумерной электронной системы со спин-орбитальным взаимодействием в переменном магнитном поле //ФТТ. – 2007. – Т. 49. – С. 2214-2219.
- [119] Бройер Х.-П., Петруччионе Ф. Теория открытых квантовых систем. Перевод с англ. Москва, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 824 с.
- [120] Attal S., Joye A., Pillet C.-A. Open quantum systems I. The Hamiltonian approach. Vol. 1880. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 2006. – 346 p.
- [121] Attal S., Joye A., Pillet C.-A. Open quantum systems II. The Markovian approach. Vol. 1881. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 2006. – 253 p.
- [122] Attal S., Joye A., Pillet C.-A. Open quantum systems III. Recent Development. Vol. 1882. Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics, 2006. – 325 p.

- [123] Davies E.B. Quantum theory of open systems. Acad. Press, London, 1976. – 171 p.
- [124] Lindenberg K., West B. The nonequilibrium statistical mechanics of open and closed systems. VCH, New York, 1990. – 448 p.
- [125] Gardiner C.W., Zoller P. Quantum noise. A Handbook of Markovian and Non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics. Second enlarged edition. Springer-Verlag, Berlin 2000. – 438 p.
- [126] Bodor A., Diosi L., Kallus Z., Konrad T. Structural features of non-Markovian open quantum systems using quantum chains //Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 052113.
- [127] Possanner S., Stickler B. A. Non-Markovian quantum dynamics from environmental relaxation //Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 85. – P. 062115.
- [128] Zhang W.-M., Lo P.-Yu., at al. General Non-Markovian Dynamics of Open Quantum Systems //Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 109. – P. 170402.
- [129] Laine E.-M., Breuer H.-P., at al. Nonlocal Memory Effects in the Dynamics of Open Quantum Systems //Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 210402.
- [130] Tan H.-T., Zhang W.-M. Non-Markovian dynamics of an open quantum system with initial system-reservoir correlations: A nanocavity coupled to a coupled-resonator optical waveguide //Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 83. – P. 032102.
- [131] Kalandarov S. A., Kanokov Z., at al. Non-Markovian dynamics of an open quantum system with nonstationary coupling //Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 83. – P. 041104.
- [132] Budini A.A., Grigolini P. Non-Markovian nonstationary completely positive open-quantum-system dynamics //Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 80. – P. 022103.
- [133] Lacroix D. Stochastic simulation of dissipation and non-Markovian effects in open quantum systems //Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – P. 041126.
- [134] Breuer H.-P. Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems //Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 75. – P. 022103.
- [135] Kalandarov Sh. A., Kanokov Z., at al. Influence of external magnetic field on dynamics of open quantum systems //Phys. Rev. E. – 2007. – Vol. 75. – P. 031115.
- [136] Strunz W.T., Diosi L., Gisin N. Open System Dynamics with Non-Markovian Quantum Trajectories //Phys. Rev. Lett. – 1999. – Vol. 82. – P. 1801.
- [137] Lindblad G. On the generator of quantum dynamical semigroups //Commun. Math. Phys. – 1976. – Vol. 48. – Pp. 119-130.
- [138] Lindblad G., Reidel D. Non-Equilibrium entropy and irreversibility. Dordrecht, 1983. – 166 p.
- [139] Scully M.O., Zubairy M.S. Quantum optics. Cambridge University Press, 1997. – 652 p.
- [140] Walls D.F., Milburn G.J. Quantum optics. Springer-Verlag, Berlin, 1994. – 421 p.

- [141] Caldeira A.O., Leggett A.J. Path integral approach to quantum Brownian motion //Physica A. – 1983. – Vol. 121. – №3. – Pp. 587-616.
- [142] Mori H. Transport, Collective motion, and Brownian motion //Prog. Theor. Phys. – 1965. – Vol. 33. – №3. – Pp. 423-445.
- [143] Демченко П.Ф., Кислов А.В. Стохастическая динамика природных объектов. Броуновское движение и геофизические приложения. М.: Геос, 2010. – 190 с.
- [144] Ding B.-F., Wang X.-Y., et al. Non-Markovian dynamics of a qubit in a reservoir: different solutions of non-Markovian master equation //Chin. Phys. B. – 2011. – Vol. 20. – P. 060304.
- [145] Fischer J., Breuer H.-P. Correlated projection operator approach to non-Markovian dynamics in spin baths //Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 76. – P. 052119.
- [146] Breuer H.-P. Non-Markovian generalization of the Lindblad theory of open quantum systems // Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 75. – P. 022103.
- [147] Breuer H.-P., Gemmer J., Michel M. Non-Markovian quantum dynamics: Correlated projection superoperators and Hilbert space averaging //Phys. Rev. E. – 2006. – Vol. 73. – P. 016139.
- [148] Халваши Э.Х. Теория магнитного резонанса в формализме функции памяти //ЖЭТФ. – 1996. – Т. 110. – С. 703-713.
- [149] Халваши Э.Х. Немарковская теория электронного парамагнитного резонанса локализованных и квазилокализованных электронных спинов на примере манганитов с колоссальным магнитосопротивлением //ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127. – С. 445-457.
- [150] Lado F., Memory J.D., Parker J.W. General approach to the line-shape problem in nuclear magnetic resonance //Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 4. – Pp. 1406-1422.
- [151] Abragam A., Goldman M. Nuclear magnetism: Order and disorder. Clarendon Press, Oxford, 1982.
- [152] Mehring M. High resolution NMR spectroscopy in solids. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [153] Горохов А.В., Семин В.В. Немарковская квантовая релаксация и теория ширины спектральных линий //Изв. Саратовского Университета, Физика. – 2010. – Т. 10. – С. 40-45.
- [154] Семин В.В., Горохов А.В. Немарковская релаксация квантовых систем и вычисление формы спектральных линий //Письма в ЭЧАЯ, Компьютерные технологии в физике. – 2011. – Т.8. – №5. – С. 785-789.
- [155] Церковников Ю.А. Корреляционные функции гейзенберговского ферромагнетика в парамагнитной области //ТМФ. – 1982. – Т. 52. – №1. – С. 147-160.
- [156] Winterfeldt S., Ihle D. Spin dynamics and antiferromagnetic short-range order in the two-dimensional Heisenberg model //Phys. Rev. B. – 1999. – Vol. 59. – P. 6010-6012.



- [157] Sega I., Prelovsek P., Bonca J. Magnetic fluctuations and resonant peak in cuprates: towards a microscopic theory //Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 68. – P. 054524.
- [158] Vladimirov A.A., Ihle D., Plakida N.M. Dynamical spin susceptibility in the t-J model: The memory function method //Theor. and Math. Phys. – 2005. – Vol. 145. – №2. – Pp. 1576-1589.
- [159] Goldman M. Advances in magnetic resonance. Formal theory of spin-lattice relaxation //J. Mag. Res. – 2001. – Vol. 149. – Pp. 160-187.
- [160] Chen T., Wang X.-B., Ren J. Dynamic control of quantum geometric heat flux in a nonequilibrium spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2013. – Vol. 87. – P. 144303.
- [161] Orth P.P., Imambekov A., Hur K.L. Nonperturbative stochastic method for driven spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2013. – Vol. 87. – P. 014305.
- [162] Guo C., Weichselbaum A., von Delft J., Vojta M. Critical and Strong-Coupling Phases in One- and Two-Bath Spin-Boson Models //Phys. Rev. Lett. – 2012. – Vol. 108. – P. 160401.
- [163] Kirchner S., Ingersent K., Si Q. Quantum criticality of the sub-Ohmic spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2012. – Vol. 85. – P. 075113.
- [164] Albert V.V., Scholes G.D., Brumer P. Symmetric rotating-wave approximation for the generalized single-mode spin-boson system //Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 84. – P. 042110.
- [165] Ruokola T., Ojanen T. Thermal conductance in a spin-boson model: Cotunneling and low-temperature properties //Phys. Rev. B. – 2011. – Vol. 83. – P. 045417.
- [166] Zhao C., Zheng H. Interference between driving and dissipation in the spin-boson model: Effect of counter-rotating terms //Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 82. – P. 043844.
- [167] Ge R.-C., Gong M., et al. Quantum correlation and classical correlation dynamics in the spin-boson model //Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 81. – P. 064103.
- [168] Wong H., Chen Z.-D. Density matrix renormalization group approach to the spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 77. – P. 174305.
- [169] Stepanov V.V., Muller G., Stolze J. Quantum integrability and nonintegrability in the spin-boson model //Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – P. 066202.
- [170] Anders F.B., Bulla R., Vojta M. Equilibrium and Nonequilibrium Dynamics of the Sub-Ohmic Spin-Boson Model //Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 98. – P. 210402.
- [171] Jirari H., Potz W. Quantum optimal control theory and dynamic coupling in the spin-boson model //Phys. Rev. A. – 2006. – Vol. 74. – P. 022306.
- [172] Segal D., Nitzan A. Spin-Boson Thermal Rectifier //Phys. Rev. Lett. – 2005. – Vol. 94. – P. 034301.
- [173] Mitra A., Millis A.J. Spin dynamics and violation of the fluctuation dissipation theorem in a nonequilibrium ohmic spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 72. – P. 121102.

- [174] Allahverdyan A.E., Gracia R.S., Nieuwenhuizen Th. M. Work extraction in the spin-boson model //Phys. Rev. E. – 2005. – Vol. 71. – P. 046106.
- [175] Liu H.B., An J.-H., et al. Anomalous decoherence in a dissipative two-level system // Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 052139.
- [176] Orth P.P., Imambekov A., Hur K.L. Nonperturbative stochastic method for driven spin-boson model //Phys. Rev. B. – 2013. – Vol. 87. – P. 014305.
- [177] Clos G., Breuer H.-P. Quantification of memory effects in the spin-boson model //Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 86. – P. 012115.
- [178] Nicokin L., Segal D. Non-equilibrium spin-boson model: Counting statistics and the heat exchange fluctuation theorem //J. Chem. Phys. – 2011. – Vol. 135. – P. 164106.
- [179] Kawamoto T., Hatano N. Test of fluctuation theorems in non-Markovian open quantum systems //Phys. Rev. E. – 2011. – Vol. 84. – P. 031116.
- [180] Goan H.-S., Jian C.-C., Chen P.-W. Non-Markovian finite-temperature two-time correlation functions of system operators of a pure-dephasing model //Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 82. – P. 012111.
- [181] Lacroix D. Stochastic simulation of dissipation and non-Markovian effects in open quantum systems //Phys. Rev. E. – 2008. – Vol. 77. – P.041126.
- [182] Cao X., Zheng H. Non-Markovian coherence dynamics of a driven spin-boson model: Damped quantum-beat or large-amplitude coherence oscillation //Phys. Rev. A. – 2007. – Vol. 75. – P. 062121.
- [183] Shiokawa K., Hu B.L. Qubit decoherence and non-Markovian dynamics at low temperatures via an effective spin-boson model //Phys. Rev. A. – 2004. – Vol. 70. – P. 062106.
- [184] Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир, 2003. – 408 с.
- [185] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. – 336 с.
- [186] Кляцкин В.И. Стохастические уравнения: теория и ее приложения к акустике, гидродинамике и радиофизике. Том 1,2. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008.
- [187] Дубков А.А. Современные методы статистического анализа процессов переноса в биологических системах. Учебно-методический материал по программе повышения квалификации «Хранение и обработка информации в биологических системах». Нижний Новгород, 2007. – 92 с.
- [188] Van Kampen N.G. Stochastic processes in physics and chemistry. 3<sup>rd</sup> Edition. North Holland, 2007. – 464 p.
- [189] Стратонович Р.Л. Случайные процессы в динамических системах. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. – 592 с.

- [190] Кляцкин В.И. Динамика стохастических систем. Курс лекций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 240 с.
- [191] Эйнштейн А, Смолуховский М. Броуновское движение. Сборник статей. Ленинград, ОНТИ, 1936. – 608 с.
- [192] Langevin P. Sur la theorie du mouvement brownien //Comptes Rendues. – 1908. – Vol. 146. – Pp. 530-533.
- [193] Мартин П., Швингер Ю. Теория систем многих частиц. Сб. статей. Москва, Ил., 1962. С. 7-95.
- [194] Швингер Ю. Броуновское движение квантового осциллятора. Квантовая кинематика и динамика. М.: «Наука», 1992. С. 100-101.
- [195] Senitzky I.R. Dissipation in quantum machanics. The harmonic oscillator //Phys. Rev. – 1960. – Vol. 119. – №2. – Pp. 670-679.
- [196] Senitzky I.R. Dissipation in quantum machanics. The harmonic oscillator. II //Phys. Rev. – 1961. – Vol. 124. – №3. – Pp. 642-648.
- [197] Senitzky I.R. Dissipation in quantum machanics. The two-level systems //Phys. Rev. – 1963. – Vol. 131. – №6. – Pp. 2827-2838.
- [198] Ford G.W., Lewis J.T., O’Connell R.F. Quantum langevin equation //Phys. Rev. A. – 1988. – Vol. 37. – №11. – Pp. 4419-4428.
- [199] Ford G.W., Lewis J.T., O’Connell R.F. Quantum oscillator in a Blackbody radiation field //Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55. – №21. – Pp. 2273-2276.
- [200] Ford G.W., Кас М. On the quantum langevin equation //J. Stat. Phys. – 1987. – Vol. 46. – Pp. 803-810.
- [201] Ford G.W., O’Connel R.F. Quantum thermodynamic functions for an oscillator coupled to a heat bath //Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 75. – P. 134301.
- [202] Hu G.Y., O’Connel R.F. The theory of high electric field transport //Physica. – 1988. – Vol. 149A. – Pp. 1-25.
- [203] Ford G.W., Lewis J.T., O’Connel R.F. Anomalous diffusion in quantum Brownian motion with colored noise //Phys. Rev. A. – 2006. – Vol. 73. – P. 032103.
- [204] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Статистическая физика. Часть 1. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 616 с.
- [205] Левин М.Л., Рытов С.М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967. – 308 с.
- [206] Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. М.: Наука, 1985. – 480 с.
- [207] Callen H.B, Welton T.A. Irreversibility and generalized noise //Phys. Rev. – 1951. – Vol. 83. – №1. – Pp. 34-40.

- [208] Callen H.B, Green R.F. On a theorem of irreversibility thermodynamics //Phys. Rev. – 1952. – Vol. 86. – №5. – Pp. 702-710.
- [209] Бочков Г.Н., Ефремов Г.Ф. Нелинейные флуктуационно-диссипационные соотношения и стохастические модели. Учебное пособие. Горький, ГГУ, 1980. – 124 с.
- [210] Ефремов Г.Ф. Флуктуационно-диссипационная теорема для нелинейных сред //ЖЭТФ. – 1969. – Т. 55. – С. 2322-2333.
- [211] Ефремов Г.Ф. Теория тепловых флуктуаций в неравновесных системах //Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1972. – Т. 15. – №8. – С. 1207-1219.
- [212] Стратонович Р.Л. Contribution to the quantum nonlinear theory of thermal fluctuations //ЖЭТФ. – 1970. – Т. 58. – С. 1612-1622.
- [213] Стратонович Р.Л., Крупенников Н.А. Кубическая теория теплового шума в нелинейных сопротивлениях //Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1972. – Т. 15. – №12. – С. 1826-1836.
- [214] Ефремов Г.Ф., Казаков В.А. Уравнение с флуктуационными параметрами для открытой динамической системы //Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1979. – Т. 22. – №4. – С. 458-461.
- [215] Ефремов Г.Ф., Казаков В.А. К выводу нелинейного уравнения с флуктуирующими параметрами для открытой динамической подсистемы //Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 1979. – Т. 22. – №10. – С. 1236-1245.
- [216] Ефремов Г.Ф., Смирнов А.Ю. К микроскопической теории флуктуаций квантовых систем, взаимодействующих с гауссовым термостатом //ЖЭТФ. – 1981. – Т. 80. – №3. – С. 1071-1086.
- [217] Ефремов Г.Ф. Стохастические уравнения для открытых квантовых систем. Уч. пособие. Горький, 1982. – 120 с.
- [218] Smirnov A.Yu. Generalized Bloch equation and dissipation of longitudinal magnetic-field energy //Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 56. – №2. – Pp. 1484-1489.
- [219] Smirnov A.Yu. Radiation damping of a quantum particle with a spin magnetic moment //J. Phys. A: Math. Gen. 1997. Vol.30. Pp.1135-1141.
- [220] Smirnov A.Yu. Direct mechanism of spin orientation by circularly polarized light //Phys. Rev. B. – 1998. – Vol. 60. – №5. – Pp. 3040-3043.
- [221] Ефремов Г.Ф., Ступин С.А. Радиационное затухание магнитного момента электрона //Вестник ННГУ, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2001. – №1(23). – С. 136-145.
- [222] Puller V.I., Mouroukh L.G., Horing N.J.M., Smirnov A.Yu. Theory of open quantum systems as applied to spin relaxation in solid //arXiv. – 2002. – cond-mat/0205652v1.
- [223] Puller V.I., Mouroukh L.G., Horing N.J.M., Smirnov A.Yu. Electron spin relaxation in a semiconductor quantum well //Phys. Rev. B. – 2003. – Vol. 67. – P. 155309.

- [224] Саргсян В.В., Каноков З., Адамян Г.Г., Антоненко Н.В. Квантовые немарковские уравнения Ланжевена и транспортные коэффициенты для перевернутого осциллятора //ТМФ. – 2008. – Т. 156. – №3. – С. 425-443.
- [225] Адамян Г.Г., Антоненко Н.В., Каноков З., Саргсян В.В. Квантовые немарковские стохастические уравнения //ТМФ. – 2005. – Т. 145. – №1. – С. 87-101.
- [226] Саргсян В.В., Каноков З., Адамян Г.Г., Антоненко Н.В. Квантовые немарковские уравнения Ланжевена и транспортные коэффициенты //Ядерная Физика. – 2005. – Т. 68. – №12. – С. 1-13.
- [227] Бочков Г.Н., Ефремов Г.Ф. Нелинейные стохастические модели процессов и систем. I. Нелинейные динамические и статистические характеристики макроскопических систем. Уч. пособие. Горький, 1978. – 114 с.
- [228] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967. – С. 142.
- [229] Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Квантовые поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 384 с.
- [230] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 656 с.
- [231] Рытов С.М. Введение в статистическую радиофизику. Часть 1. Случайные процессы. М.: Наука, 1976, 494 с.
- [232] Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.-«Сов. радио», 1978. – 376 с.
- [233] Кляцкин В.И., Татарский В.И. Статистические средние в динамических системах //ТМФ. – 1973. – Т.17. – №2. – С. 273-282.
- [234] Ефремов Г.Ф. Квантовая теория радиационного трения релятивистского электрона //ЖЭТФ. – 1996. – Т. 110. – С. 1629-1640.
- [235] Ефремов Г.Ф. Радиационное затухание релятивистского электрона в классической электродинамике //ЖЭТФ. – 1998. – Т. 114. – С. 1661.
- [236] Ефремов Г.Ф., Мареева О.В., Воробьев Д.А., Шарков В.В. Статистическая теория радиационной силы трения электрона в фотонном и фононном полях //Актуальные проблемы статистической физики (Малаховский сборник). – 2003. – Т. 2. – С. 5-40.
- [237] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Расходимости и перенормировки в одночастичной модели квантовой электродинамики //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 1999. – №20. – С. 101-113.
- [238] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Броуновское движение нерелятивистского электрона в фотонном термостате //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. 1999. – №21. – С. 109-117.

- [239] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Радиационное затухание электрона Дирака //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2002. – №25. – С. 141-154.
- [240] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Эффект квантовой нелокальности и радиационное затухание электрона Дирака //ЖЭТФ. – 2004. – Т. 125. – №2. – С. 195-204.
- [241] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В. Квантово-статистическая теория радиационного трения релятивистского электрона //ТМФ. – 2009. – Т. 158. – №3. – С. 478-496.
- [242] Efremov G.F., Sharkov V.V., Krupennikov D.V. Nondivergent statistical quantum electrodynamics //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2008. – Vol. 18. – №9. – Pp. 2817-2824.
- [243] Ефремов Г.Ф., Шарков В.В., Петров Д.А. Квантово-статистическая теория радиационных эффектов без расходимостей //Актуальные проблемы статистической физики (Малаховский сборник). – 2007. – Т. 6. – С. 3-35.
- [244] Ефремов Г.Ф., Мареева О.В., Воробьев Д.А. Статистическая теория фононной силы трения, действующей на электрон проводимости //Изв. ВУЗов. Радиофизика. – 2005. – Т. 48. – №3. – С. 249-268.
- [245] Ефремов Г.Ф., Мареева О.В. Модель броуновского движения классического электрона в фононном термостате //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 1999. – №1(20). – С. 114-122.
- [246] Ефремов Г.Ф., Мареева О.В., Воробьев Д.А. Броуновское движение электрона проводимости в фононном поле кристаллической решетки //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2001. – №1(23). – С. 127-135.
- [247] Ефремов Г.Ф., Мареева О.В., Воробьев Д.А. К теории фононной силы трения //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2004. – №1(27). – С. 103-118.
- [248] Кузнецов А.Б., Смирнов А.Ю. Температурные эффекты в теории немарковской релаксации двухуровневой системы //Оптика и спектроскопия. – 1991. – Т. 70. – №4. – С. 763-765.
- [249] Кузнецов А.Б., Смирнов А.Ю. Терморелаксационный резонанс в квантовой теории броуновского движения //ТМФ. – 1992. – Т. 95. – №1. – С. 119-126.
- [250] Smirnov A.Yu., Mouroukh L.G., Horing N.J.M. Temperature dependence of electron transport through a quantum shuttle //Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 67. – P. 155310.

- [251] Морох Л.Г., Желтов С.Н. Подавление поперечных тепловых флуктуаций продольным электрическим полем в субмикронных цилиндрах //Вестник ННГУ, сборник научных трудов аспирантов под ред. А.В. Олейника. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 1995. – С.60-62.
- [252] Mourokh L.G., Zheltov S.N. Nonlinear transport and fluctuations in polar semiconductors //Physica B. – 1996. – Vol. 288. – Pp. 305-311.
- [253] Mourokh L.G. Electromagnetic wave effects on electron-phonon scattering in semiconductors //Phys. Rev. B, submitted to (1996).
- [254] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А., Маслов А.О. Фононное трение электрона проводимости и поляронный эффект // Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Физика твердого тела. – 2010. – №3(1). – С. 44-53.
- [255] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А., Маслов А.О. Фононное трение и проводимость кристаллов // Вестник ННГУ, Физика твердого тела. – 2011. – №4(1). – С. 36-42.
- [256] Соколов А.А., Тернов И.М., Жуковский В.Ч., Борисов А.В. Квантовая электродинамика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. – 312 с.
- [257] Reznia V., Maartens R. Vorticity affect the stability of neutron stars //Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – P. 2560.
- [258] Itoh N. Pulsar magnetic moment decay due to radiation damping and the pulsar in SN 1987 A //II Nuovo Cimento C. – 1989. – Vol. 12. – P. 625.
- [259] Джексон Дж. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965. – 702 с.
- [260] Ackerhalt J. R., Knight P.L., Eberly J. H. Radiation reaction and radiative frequency shift //Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 30. – P. 456-460.
- [261] Ackerhalt J. R., Eberly J. H. Quantum electrodynamics and radiation reaction: Nonrelativistic atomic frequency shifts and lifetimes //Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 10. – P. 3350.
- [262] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. Радиационное трение спинового магнитного момента в присутствии поля электромагнитного вакуума //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Радиофизика. – 2010. – №2(1). – С. 75-83.
- [263] Скалли М.О, Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 512 с.
- [264] Bloembergen N., Pound R.V. Radiation damping in magnetic resonance experiments //Phys. Rev. – 1954. – V. 95. – Pp. 8-12.
- [265] Bloom S. Effects of radiation damping on spin dynamics //J. Appl. Phys. – 1957. – Vol. 28. – Pp. 800-805.
- [266] Rourke D.E. Augustine M.P. Exact Linearization of the Radiation-Damped Spin System //Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – Pp. 1685-1688.
- [267] Augustine M.P. Transient properties of radiation damping //Prog. Nucl. Magn. Res. Spectr. – 2002. – Vol. 40. – Pp. 111-150.

- [268] Ho J., Khanna F.C., Choi B.C. Combination of dynamical invariant method and radiation-spin interaction to calculate magnetization damping //Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70. – P. 172402.
- [269] Ho J., Khanna F.C., Choi B.C. Radiation-spin interaction, Gilbert damping, and spin torque //Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 92. – P. 097601.
- [270] Lapert M., Assemat E., et al. Time-optimal control of spin-1/2 particles with dissipative and generalized radiation-damping effects //Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 043417.
- [271] Krishnan V.V., Murali N. Radiation damping in modern NMR experiments: Progress and challenges //Prog. Nucl. Magn. Res. Spectr. – 2013. – Vol. 68. – Pp. 41-57.
- [272] Dalibard J., Dupont-Roc J., Cohen-Tannoudji C. Vacuum fluctuations and radiation reaction: identification of their respective contributions //J. Physique. – 1982. – Vol. 43. – Pp. 1617-1638.
- [273] Boyer T.H. Thermal effects of acceleration for a classical spinning magnetic dipole in classical electromagnetic zero-point radiation //Phys. Rev. D. – 1984. – Vol. 30. – Pp. 1228-1232.
- [274] Barut A.O., Unal N. Generalization of the Lorentz-Dirac equation to include spin //Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 40. – Pp. 5404-5406.
- [275] Cheng Y.-J. Quantum relaxation dynamics of magnetic moments in a radiative reservoir //Phys. Rev. B. – 2004. – Vol. 70. – P. 224435.
- [276] Mancini S., Vitali D., Moya-Cessa H. Quantum dynamics in single-spin measurement //Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 71. – P. 054406.
- [277] Butler M.C., Weitekamp D.P. Resonator-induced dissipation of transverse nuclear-spin signals in cold nanoscale sample //Phys. Rev. B. – 2012. – Vol. 85. – P. 104405.
- [278] Tropp J. A quantum description of radiation damping and the free induction signal in magnetic resonance //J. Chem. Phys. – 2013. – Vol. 139. – P. 014105.
- [279] Weisskopf V.F. Recent development in the theory of the electron //Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21. – №1. – P. 305-315.
- [280] Пескин М., Шредер Д. Введение в квантовую теорию поля. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и Хаотическая Динамика», 2001. – 784 с.
- [281] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Курс теоретической физики: Том III. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 800 с.
- [282] Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 720 с.
- [283] Barut O.A., Bracken A.J. Zitterbewegung and the geometry of the electron //Phys. Rev. D. – 1981. – Vol. 23. – Pp. 2454-2463.
- [284] Rodrigues Jr.W.A., Jayme V.Jr., Recami E., Salesi G. About zitterbewegung and electron structure //Phys. Lett. B. – 1993. – Vol. 318. – Pp. 623-628.



- [285] Schrodinger E. Non powerful motion in the relativistic quantum mechanics //Sitzungsb. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl. – 1930. – Vol. 24. – Pp. 418-428.
- [286] Шредингер Э. О свободном движении в релятивистской квантовой механике. Избранные труды по квантовой механике. М.: Наука, 1976. – С. 218-228.
- [287] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. К вопросу о «распутывании» произведений операторов электронных плотностей в релятивистской квантовой теории //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование. Оптимальное управление. – 2011. – № 5(1). – С. 155-163.
- [288] Buishvili L.L., Zviadadze M.D., Khalvashi E.Kh. Bloch equations in the memory-function formalism //Zs. Eksp. Teor. Fiz. – 1986. – Т. 91. – С. 310-313.
- [289] Халваши Э.Х. Теория магнитного резонанса в формализме функции памяти //ЖЭТФ. – 1996. – Т. 110. – С. 703-713.
- [290] Халваши Э.Х. Немарковская теория электронного парамагнитного резонанса локализованных и квазилокализованных электронных спинов на примере манганитов с колоссальным магнитосопротивлением //ЖЭТФ. – 2005. – Т. 127. – С. 445-457.
- [291] Vladimirov A.A., Ihle D., Plakida N.M. Dynamical spin susceptibility in the t-J model: the memory function method //Theor. and Math. Phys. – 2005. – Vol. 145. – Pp. 1576-1589.
- [292] Goldman M. Formal theory of spin-lattice relaxation //J. Mag. Res. – 2001. – V. 149. – Pp. 160-187.
- [293] Bezzerrides B. Theory of line shape //Phys. Rev. – 1969. – Vol. 181. – Pp. 379-399.
- [294] Deng Z., Mukamel S. Non-Markovian dephasing of two-level resonance fluorescence in a strong radiation field //Phys. Rev. A. – 1984. – Vol. 29. – P. 1914.
- [295] Faid K., Fox R.F. Stochastic theory of line shape and relaxation //Phys. Rev. A. – 1986. – Vol. 34. – Pp. 4286-4302.
- [296] Kofman A. G., Zaibel R., Levine A. M., Prior Y. Non-Markovian Stochastic Jump Processes in Nonlinear Optics //Phys. Rev. Lett. – 1988. – Vol. 61. – P. 251.
- [297] Villaeys A.A., Vallet J.C., Lin S.H. Non-Markovian effects on optical absorption //Phys. Rev. A. – 1991. – Vol. 43. – Pp. 5030-5038.
- [298] Anderson M.H., Vemuri G., et al. Experimental study of absorption and gain by two-level atoms in a time-delayed non-Markovian optical field //Phys. Rev. A. – 1993. – Vol. 47. – Pp. 3202-3209.
- [299] Brinati J.R., Mizrahi S.S., Prativiera G.A. Effects of temperature on the absorption line-shape function for driven two-level atoms: A non-Markovian treatment //Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 52. – Pp. 2804-2810.
- [300] Arnoldus H.F., George T.F. Non-Markovian line shapes of physisorbed atoms on a crystal //Phys. Rev. B. – 1997. – Vol. 36. – P. 2987.

- [301] Brinati J.R., Mizrahi S.S., Prativiera G.A. Susceptibility of strongly driven two-level atoms: A non-Markovian analysis //Phys. Rev. A. – 1997. – Vol. 56. – Pp. 322-330.
- [302] Kilin S. Ya., Nizovtsev A. P., et al. Theory of non-Markovian relaxation of single triplet electron spins using time- and frequency-domain magnetic resonance spectroscopy measured via optical fluorescence: Application to single pentacene molecules in crystalline p-terphenyl //Phys. Rev. B. – 1998. Vol. 58. – P. 8997.
- [303] Goychuk I. Quantum dynamics with non-Markovian fluctuating parameters //Phys. Rev. E. – 2004. Vol. 70. – P. 016109.
- [304] Benotsmane A., Ahmadouche A. Dynamics of stochastic systems: Effect on spectral line shapes //Turk J Phys. – 2007. – Vol. 37. – Pp. 137-150.
- [305] Uchiyama Ch., Aihara M., Saeki M., Miyashita S. Master equation approach to line shape in dissipative systems //Phys. Rev. E. – 2009. – Vol. 80. – P. 021128.
- [306] Roy Ch., John S. Microscopic theory of multiple-phonon-mediated dephasing and relaxation of quantum dots near a photonic band gap //Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 81. – P. 023817.
- [307] Аверкиев Н.С. Анизотропия спиновой релаксации в двумерных полупроводниках //УФН. – 2010. – Т. 180. – С. 777-780.
- [308] Гребенник В.Г., Гуревич И.И. и др. Поиски атома мюония в меди //Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 22. – С. 36-39.
- [309] Гуревич И.И., Климов А.И. и др. Температурная зависимость частоты прецессии  $m$ -мезона в гадолинии //Письма в ЖЭТФ. – 1975. – Т. 21. – С. 16-19.
- [310] Тихомиров В.В. Радикальное изменение частоты прецессии спина ультрарелятивистских электронов в поле циркулярно поляризованной волны под влиянием взаимодействия с полем излучения //Письма в ЖЭТФ. – 1995. – Т. 61. – С. 171-181.
- [311] Горелкин В.Н., Гребенник В.Г. и др. Релаксация и сдвиг частоты прецессии спина отрицательного мюона в кремнии  $n$ -типа //Письма в ЖЭТФ. – 1996. – Т. 63. – С. 539-543.
- [312] Мамедов Т.Н., Андрианов Д.Г. и др. Релаксация магнитного момента мелкого акцепторного центра в сильно легированном кремнии //Письма в ЖЭТФ. – 2001. – Т. 73. – С. 759-762.
- [313] Safronova M.S., Kozlov M.G., Clark C.W. Precision calculation of blackbody radiation shifts for optical frequency metrology //Phys. Rev. Lett. – 2011. – Vol. 107. – P. 143006.
- [314] Romalis M.V., Fortson E.N. Zeeman frequency shifts in an optical dipole trap used to search for an electric-dipole moment //Phys. Rev. A. – 1999. – Vol. 59. – P. 4547.
- [315] Stoner R.E., Walsworth R.L. Measurement of the  $^{21}\text{Ne}$  Zeeman frequency shift due to Rb- $^{21}\text{Ne}$  collisions //Phys. Rev. A. – 2002. – Vol. 66. – P. 032704.

- [316] Биккин Х.М., Калашников В.П. Теория парамагнитного резонанса и релаксации электронов проводимости в квантовых магнитных полях //ТМФ. – 1971. – Т. 7. – С. 79-94.
- [317] Дероум Э. Современные методы ЯМР для химических исследований. М.: Мир, 1992. – 401 с.
- [318] Буньков Ю.М., Думеш Б.С., Куркин М.И. Одноимпульсное спиновое эхо в ядерных системах с большим динамическим сдвигом частоты //Письма в ЖЭТФ. – 1974. – Т. 19. – С. 216-219.
- [319] Чекмарев В.П., Петров М.П. и др. Динамический сдвиг частоты ЯМР ядер в доменных границах //Письма в ЖЭТФ. – 1977. – Т. 25. – С. 181-184.
- [320] Боровик-Романов А.С., Буньков Ю.М. и др. Спиновое эхо в системах со связанной ядерно-электронной прецессией //УФН. – 1984. – Т. 142. – С. 537-570.
- [321] Welton T.A. Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field //Phys. Rev. – 1948. – Vol. 74. – Pp. 1157-1167.
- [322] Crisp M.D., Jaynes E.T. Radiative effects in semiclassical theory //Phys. Rev. – 1969. – Vol. 179. – Pp. 1253-1261.
- [323] Stroud C.R., Jaynes E.T. Long-term solutions in semiclassical radiation theory //Phys. Rev. A. – 1970. – Vol. 1. – Pp. 106-121.
- [324] Lee Y. C., Lin D. L. Renormalized Frequency Shift of Coherent Radiation //Phys. Rev. A. – 1972. – Vol. 6. – P. 388.
- [325] Stroud C. R., Eberly J. H., Lama W. L., Mandel L. Superradiant Effects in Systems of Two-Level Atoms //Phys. Rev. A. – 1972. – Vol. 5. – P. 1094.
- [326] Ackerhalt J. R., Knight P.L., Eberly J. H. Radiation reaction and radiative frequency shift //Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 30. – Pp. 456-460.
- [327] Senitzky I.R. Radiation-reaction and vacuum-field effects in Heisenberg-picture quantum electrodynamics //Phys. Rev. Lett. – 1973. – Vol. 31. – Pp. 955-958.
- [328] Lai S. B., Knight P. L., Eberly J. H. Electron's Anomalous Moment and Its Spin-Precession Frequency Shift //Phys. Rev. Lett. – 1974. – Vol. 32. – P. 494.
- [329] Ackerhalt J. R., Eberly J. H. Quantum electrodynamics and radiation reaction: Nonrelativistic atomic frequency shifts and lifetimes //Phys. Rev. D. – 1974. – Vol. 10. – P. 3350.
- [330] Hioe F. T., Eberly J. H. Stimulated and spontaneous radiative frequency shifts of a two-level system //Phys. Rev. A. – 1975. – Vol. 11. – Pp. 1358–1364.
- [331] Banfi G., Bonifacio R. Superfluorescence and cooperative frequency shift //Phys. Rev. A. – 1975. – Vol. 12. – P. 2068.
- [332] Fontana P. R., Thomann P. Stimulated absorption and emission of strong monochromatic radiation by a two-level atom //Phys. Rev. A. – 1976. – Vol. 13. – P. 1512.

- [333] Crisp M.D. Magnetic effects in radiation reaction theory //Phys. Rev. A. – 1989. – Vol. 39. – P. 6224.
- [334] Китель Ч. Квантовая теория твердых тел. М.: Наука, 1967. – 492 с.
- [335] Koba Z. Semi-classical treatment of the reactive correction. I. The anomalous magnetic moment of the electron //Prog. Theor. Phys. – 1949. – Vol. 4. – Pp. 319-330.
- [336] Tani S. Connection between particle models and field theories. I. The case spin 1/2 //Prog. Theor. Phys. – 1951. – Vol. 6. – Pp. 267-285.
- [337] Schwinger J. On quantum-electrodynamics and the magnetic moment of the electron //Phys. Rev. – 1948. – Vol. 73. – P. 416.
- [338] Waller I. //Zs. Phys. – 1932. – Vol. 79. – P. 370.
- [339] Heitler W., Teller E. Time effects in the magnetic cooling method. I //Proc. Roy. Soc. – 1936. – Vol. A155. – Pp. 629-639.
- [340] Kronig R. de L. On the mechanism of paramagnetic relaxation //Physica. – 1939. – Vol. 6. – Pp. 33-43.
- [341] Van Vleck J.H. Paramagnetic Relaxation Times for Titanium and Chrome Alum //Phys. Rev. – 1940. – Vol. 57. – Pp. 426-447.
- [342] Orbach R. Spin-Lattice relaxation in Rare-Earth salts //Proc. Roy. Soc. – 1961. – Vol. A264. – Pp. 458-484.
- [343] Дьяконов М.И., Перель В.И. //ФТТ. – 1971. – Т. 13. – С. 3581.
- [344] Elliott R.J. Theory of the Effect of Spin-Orbit Coupling on Magnetic Resonance in Some Semiconductors //Phys. Rev. – 1954. – Vol. 96. – Pp. 266-279.
- [345] Yafet Y. g Factors and Spin-Lattice Relaxation of Conduction Electrons //Solid State Phys. – 1963. – Vol. 14. – Pp. 1-98.
- [346] Цидильковский И.М. Электроны и дырки в полупроводниках. Энергетический спектр и динамика. М.: Наука, 1972. – 640 с.
- [347] Рашба Э.И. Комбинированный резонанс в полупроводниках //УФН. – 1964. – Т. 84. – С. 557-578.
- [348] Бир Г.Л., Пикус Г.Е. Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках. М.: Наука, 1972. – 584 с.
- [349] Bardeen J., Shockley W. Deformation potentials and mobilities in non-polar crystals //Phys. Rev. – 1950. – Vol. 80. – Pp. 72-80.
- [350] Давыдов А.С. Теория твердого тела. М.: Наука, 1976. – 639 с.
- [351] Боголюбов Н.Н., Боголюбов Н.Н. (мл.) Аспекты теории полярона. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. – 176 с.
- [352] Ансельм А.И. Введение в теорию полупроводников. М.: Наука, 1978. – 616 с.

- [353] Шалимова К.В. Физика полупроводников. М.: Энергоатомиздат, 1985. – 392 с.
- [354] Гусейнов Д.В., Ежевский А.А., Сухоруков А.В., Попков С.А. Спиновая диффузия и релаксация электронов проводимости в кремнии //Вестник ННГУ. – 2010. – №5(2). – С. 330-334.
- [355] Данилов Ю.А., Демидов Е.С., Ежевский А.А. Новые магнитные материалы и приборы на их основе. Учебное пособие. Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского, 2010. – 99 с.
- [356] Петров Д.А. К вопросу о влиянии электрон-фононного взаимодействия и флуктуаций фононного поля на релаксацию спинового момента электрона проводимости в немагнитных кристаллах. I //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Физика твердого тела. 2013 (В печати).
- [357] Петров Д.А. К вопросу о влиянии электрон-фононного взаимодействия и флуктуаций фононного поля на релаксацию спинового момента электрона проводимости в немагнитных кристаллах. II //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Физика твердого тела. 2013 (В печати).
- [358] Каганов М.И., Лифшиц И.М. Квазичастицы: идеи и принципы квантовой физики твердого тела. М.: Наука, 1989. – 96 с.
- [359] Брандт Н.Б., Кульбачинский В.А. Квазичастицы в физике конденсированного состояния. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. 632 с.
- [360] Поляроны /Под ред. Ю.А. Фирсова. М.: Наука, 1975. – 423 с.
- [361] Maddox J. Where zitterbewegung may lead //Nature. – 1987. – Vol. 335. – P. 306.
- [362] Hestnes D. The zitterbewegung interpretation of quantum mechanics //Found. of Phys. – 1990. – Vol. 20 10. – Pp. 1213-1232.
- [363] Pavsic M., Recami E., Rodrigues Jr.W.A. Electron structure, zitterbewegung, and the new non-linear Dirac-like equation //Phys. Lett. B. – 1993. – Vol. 318. – Pp. 481-488.
- [364] Bolte J., Glaser R. Zitterbewegung and semiclassical observables for the Dirac equation //J. Phys. A. – 2004. – Vol. 37. – Pp. 6359-6373.
- [365] Vaishnav J.Y., Clark C.W. Observing zitterbewegung with ultracold atoms //Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – P. 153002.
- [366] Tenev T.G., Vitanov N.V. Zitterbewegung of neutral relativistic particles in static longitudinal fields //Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 012126.
- [367] Rusin T.M., Zawadzki W. Zitterbewegung of Klein-Gordon particles and its simulation by classical systems //Phys. Rev. A. – 2012. – Vol. 86. – P. 032103.
- [368] Romera E. Revivals of zitterbewegung of a bound localized Dirac particle //Phys. Rev. A. – 2011. – Vol. 84. – P. 052102.
- [369] Rusin T.M., Zawadzki W. Zitterbewegung of relativistic electrons in a magnetic field and its simulation by trapped ions //Phys. Rev. D. – 2010. – Vol. 82. – P. 125031.
- [370] David G., Cserti J. General theory of Zitterbewegung //Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 81. – P. 121417.

- [371] Zhang Q., Gong J., Oh C.H. Driven Dirac-like equation via mirror oscillation: Controlled cold-atom Zitterbewegung //Phys. Rev. A. – 2010. – Vol. 81. – P. 023608.
- [372] Wang Z.-Y., Xiong C.-D., Qiu Q. Photon wave function and Zitterbewegung //Phys. Rev. A. – 2009. – Vol. 80. – P. 032118.
- [373] Wang Z.-Y., Xiong C.-D. Zitterbewegung by quantum field-theory considerations //Phys. Rev. A. – 2008. – Vol. 77. – P. 045402.
- [374] Vaishnav J.Y., Clark C.W. Observing Zitterbewegung with Ultracold Atoms //Phys. Rev. Lett. – 2008. – Vol. 100. – P. 153002.
- [375] Krekora P., Su Q., Grobe R. Relativistic Electron Localization and the Lack of Zitterbewegung //Phys. Rev. Lett. – 2004. – Vol. 93. – P. 043004.
- [376] Barut A.O., Thacker W.D. Zitterbewegung of the electron in external fields //Phys. Rev. D. – 1985. – Vol. 31. – P. 2076.
- [377] Jung E., Park D., Park C.-S. Zitterbewegung in bilayer graphene: Effects of trigonal warping and electric field //Phys. Rev. B. – 2013. – Vol. 87. – P. 115438.
- [378] Zhang Y.-C., Song S.-W., Liu C.-F., Liu W.-M. Zitterbewegung effect in spin-orbit-coupled spin-1 ultracold atoms //Phys. Rev. A. – 2013. – Vol. 87. – P. 023612.
- [379] Cserti J., Gyula D. Relation between Zitterbewegung and the charge conductivity, Berry curvature, and the Chern number of multiband systems //Phys. Rev. B. – 2010. – Vol. 82. – P. 201405.
- [380] Dreisow F., Heinrich M., et al. Suggestion Classical Simulation of Relativistic Zitterbewegung in Photonic Lattices //Phys. Rev. Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 143902.
- [381] Romera E., de los Santos F. Revivals, classical periodicity, and zitterbewegung of electron currents in monolayer graphene //Phys. Rev. B. – 2009. – Vol. 80. – P. 165416.
- [382] Rusin T.M., Zawadzki W. Zitterbewegung of electrons in graphene in a magnetic field //Phys. Rev. B. – 2008. – Vol. 78. – P. 125419.
- [383] Rusin T.M., Zawadzki W. Transient Zitterbewegung of charge carriers in mono- and bilayer graphene, and carbon nanotubes //Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 76. – P. 195439.
- [384] Winkler R., Zulicke U., Bolte J. Oscillatory multiband dynamics of free particles: The ubiquity of zitterbewegung effects //Phys. Rev. B. – 2007. – Vol. 75. – P. 205314.
- [385] Cserti J., Gyula D. Unified description of Zitterbewegung for spintronic, graphene, and superconducting systems //Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 74. – P. 172305.
- [386] Brusheim P., Xu H.-Q. Spin Hall effect and zitterbewegung in an electron waveguide // Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 74. – P. 205307.
- [387] Schliemann J., Loss D., Westervelt R.M. Zitterbewegung of electrons and holes in III–V semiconductor quantum wells //Phys. Rev. B. – 2006. – Vol. 73. – P. 085323.

- [388] Zawadzki W. Zitterbewegung and its effects on electrons in semiconductors //Phys. Rev. B. – 2005. – Vol. 72. – P. 085217.
- [389] Ferrari L., Russo G. Nonrelativistic zitterbewegung in two-band systems //Phys. Rev. B. – 1990. – Vol. 42. – P. 7454.
- [390] Багров В.Г., Бисноватый-Коган Г.С., и др. Теория излучения релятивистских частиц. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 576 с.
- [391] Бочкарев Н.Г. Магнитные поля в космосе. М.: «ЛИБРКОМ», 2011. – 216 с.
- [392] Зельдович Я.Б., Рузмайкин А.А., Соколов Д.Д. Магнитные поля в астрофизике. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. – 384 с.
- [393] Ефремов Г.Ф., Петров Д.А. О характере движения электрона Дирака в постоянном магнитном поле //Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Математическое моделирование и оптимальное управление. – 2011. – №2(1). – С. 170-180.
- [394] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 536 с.