

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ» (СФУ)

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
«Федеральный исследовательский центр «Красноярский научный центр  
Сибирского отделения Российской академии наук» (ФИЦ КНЦ СО РАН)

Обособленное подразделение  
«ИНСТИТУТ ФИЗИКИ им. Л. В. КИRENСКОГО  
СИБИРСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»  
(ИФ СО РАН)

На правах рукописи

Пилипчук Артем Сергеевич

**СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ В КОНТИНУУМЕ В  
ИНТЕГРИРУЕМЫХ И НЕИНТЕГРИРУЕМЫХ  
ВОЛНОВОДНЫХ СТРУКТУРАХ**

Специальность 01.04.07. Физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., проф. А. Ф. Садреев

Красноярск 2018

## Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>1 Обзор литературы</b>	<b>13</b>
1.1 Механизмы возникновения связанных состояний в континууме . . . . .	15
1.2 Связанные состояния в акустике . . . . .	24
<b>2 Методология</b>	<b>26</b>
2.1 Метод Андо . . . . .	26
2.2 Метод эффективного неэрмитового Гамильтониана . . . . .	29
2.3 Способ обнаружения и построения связанных состояний в континууме	33
<b>3 Z- и П-образные электронные волноводы</b>	<b>35</b>
3.1 Трансмиссионные свойства . . . . .	35
3.1.1 Общее в проводимости Z- и П-образных структур . . . . .	37
3.1.2 Различия в проводимости Z- и П-образных структур . . . . .	38
3.2 Связанные состояния в континууме . . . . .	41
<b>4 Биллиард Синая</b>	<b>51</b>
4.1 Трансмиссионные свойства . . . . .	52
4.2 Связанные состояния в континууме . . . . .	54
<b>5 Цилиндрический акустический резонатор с некоаксиально подключеными полубесконечными волноводами</b>	<b>65</b>
5.1 Акустическая теория связанных мод . . . . .	66
5.2 Резонансная картина трансмиссии. Волевой кран . . . . .	70

5.3 Связанные состояния в континууме . . . . .	74
5.3.1 Длина резонатора фиксирована, поворачивается правый волновод . . . . .	75
5.3.2 Угол поворота фиксирован, изменяется длина резонатора . . . . .	78
<b>Заключение</b>	<b>92</b>
<b>Литература</b>	<b>95</b>

## Введение

### Актуальность и практическая ценность

Любой закрытый резонатор обладает дискретным набором собственных частот, но стоит систему открыть, как они превращаются в резонансы, ширины которых определяются коэффициентами связи дискретных собственных мод резонатора с континуумом. Ширины в свою очередь определяют добротность системы. Поиски способов повышения этого параметра проводятся на протяжении всей истории развития колебательных систем. В типичных резонаторах, добротность является фиксированным параметром: как только структура изготовлена, ее добротность не может быть изменена. Структуры, поддерживающие связанные состояния в континууме (ССК), напротив, являются резонаторами, добротность которых можно контролировать либо за счет эффекта Керра, либо за счет перестройки параметров самой системы: изменения высоты потенциала управляющего электрода, либо варьирования ширины или длины резонатора. В данный момент рекордные значения добротности удается получить в фотонно-кристаллических системах.

Явление ССК потенциально может применяться в нескольких прикладных областях, в которых понятие добротности является ключевым. Во-первых, это создание лазеров [1, 2, 3, 4]. Классические лазеры создаются с использованием оптических резонаторов, которые захватывают свет при помощи зеркал, полного внутреннего отражения или рассеяния на периодических микроструктурах, таких как фотонные кристаллы. Добротность таких систем определяется эффективностью отражающих поверхностей и она имеет предел, так как их качество невозможно

наращивать до бесконечности. В структурах, реализующих ССК, добротность при определенных параметрах может достигать колоссальных значений. Недавно был создан первый лазер [5, 6], основанный на применении этого явления.

Во-вторых, ССК с огромным временем жизни представляют интерес с точки зрения хранения оптической информации, что было продемонстрировано в работе[7]. Идея основана на том, что за счет эффекта Керра при прохождении импульса происходит временная реализация ССК, затем вторичный импульс освобождает запертый. Несмотря на то, что другие способы хранения оптической информации, например, при помощи эффекта замедления групповой скорости света, являются более стабильными и гибкими, предложенный подход имеет ряд неоспоримых преимуществ. Во-первых, не требуется тонкой настройки частот: достаточно того, чтобы частота лежала в зоне распространения фотонно-кристаллического волновода. Во-вторых, такие структуры очень компактны и, наконец, позволяют с легкостью извлечь находящуюся в них информацию.

В силу большого количества потенциально возможных областей применения, изучение оптических свойств графенов представляет большой интерес, и центральную роль во многих приложениях играет сила взаимодействия между графеном и электромагнитными волнами. Известно, однако, что данный материал в чистом виде (гомогенный слой) очень плохо взаимодействует с ЭМ излучением. Структуры, реализующие ССК, могут осуществлять колоссальное усиление сигнала, позволяя тем самым значительно увеличить это взаимодействие, как показано в работе[8]. Также такое усиление может быть весьма полезным для создания идеальных фильтров [9] и сверхчувствительных сенсоров [10].

В 1966г. Паркер, на примере серии параллельных пластин в воздушном потоке показал, что ССК могут являться причиной разрушения периодических механических конструкций[11, 12].

## Цель работы

Целью данной работы является изучение как численно, так и аналитически, связанных состояний в континууме в различных волноводных структурах:

1. Волноводах, имеющих два сгиба под прямым углом — так называемых Z- и П-образных (рис. 1). Они отличаются друг от друга направлением второго сгиба — в П-образном волноводе он имеет ту же киральность, что и первый, а в Z-образном — обратную;
2. Биллиарде Синая (рис. 2);
3. Цилиндрическом акустическом резонаторе (рис. 3).

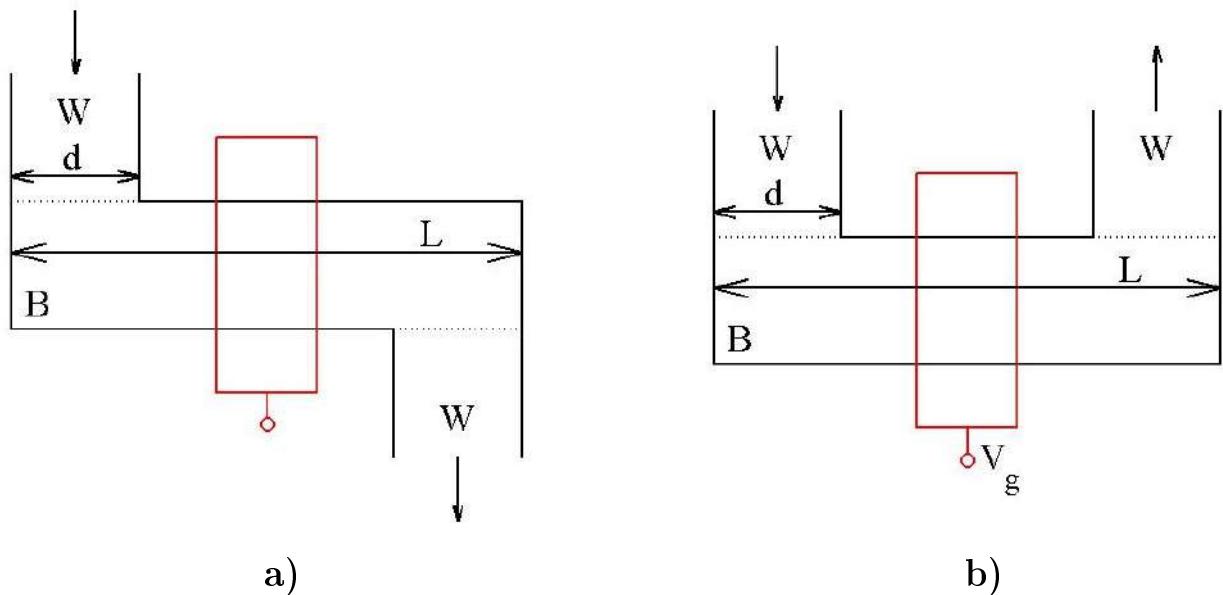


Рис. 1: а) Z-образная структура. б) П-образная структура.  $d$  — ширина волновода,  $L$  — ширина области рассеяния.  $B, W$  и  $V_g$  обозначают область рассеяния, волноводы и потенциал, соответственно.

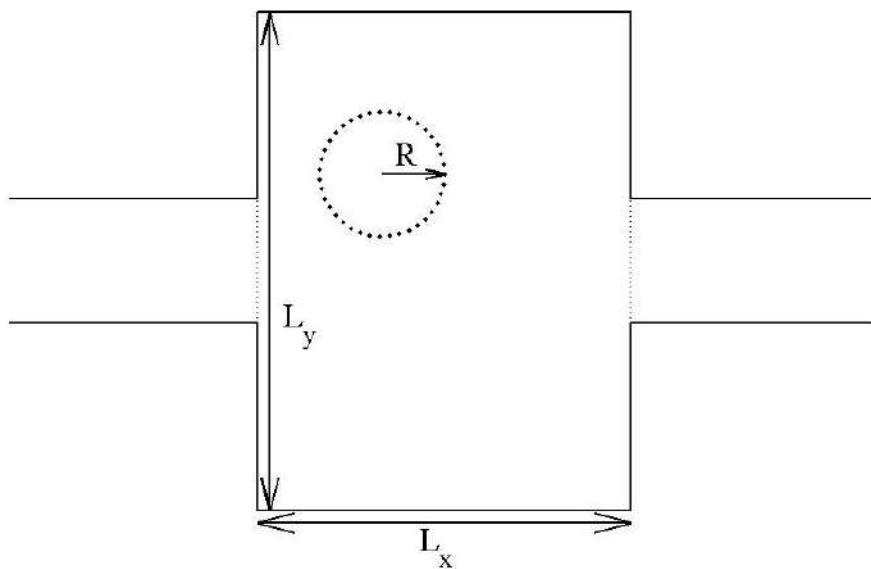


Рис. 2: Биллиард Синая — Прямоугольный резонатор с подключенными к нему полубесконечными проводами и наложенным потенциалом круговой симметрии с радиусом  $R$ .

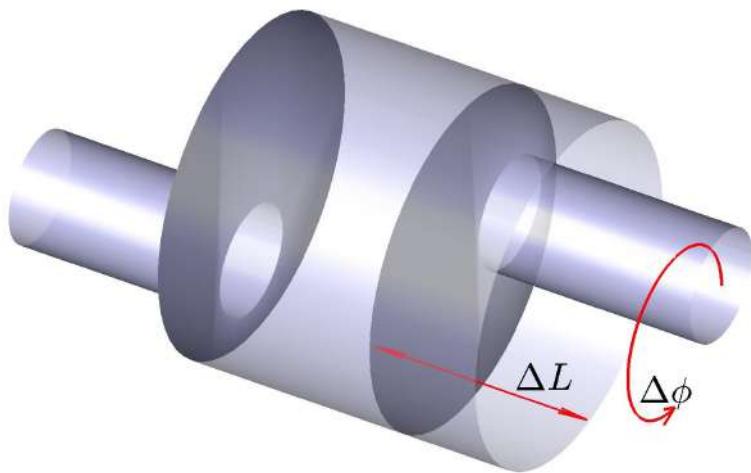


Рис. 3: Цилиндрический резонатор радиуса  $R$  и длины  $L$  с двумя присоединенными цилиндрическими волноводами радиуса  $r < R$ , смещенными относительно оси резонатора, и разнесенными между собой на угол  $\Delta\phi$ .

## Основные задачи

1. Исследовать свойства проводимости Z- и П-образных электронных волноводов;
  - 1.1. Используя метод неэрмитового эффективного Гамильтониана вычислить проводимость системы в зависимости от высоты потенциала управляющего электрода и расстояния между сгибами;
  - 1.2. Объяснить происхождение различий в картине проводимости Z- и П-образных волноводов.
2. Рассмотреть ССК в Z- и П-образных структурах, изменяя высоту потенциала управляющего электрода. Вычислить материальные параметры системы, при которых образуются ССК, и классифицировать их по известным механизмам реализации;
3. Исследовать явление ССК в хаотических биллиардах на примере биллиарда Синая;
  - 3.1. Изучить ССК в биллиарде Синая при четырех принципиально различных вариантах расположения потенциала с точки зрения симметрии. Потенциал может быть:
    - i. расположен случайным образом внутри биллиарда;
    - ii. расположен строго в центре прямоугольного биллиарда;
    - iii. сдвинут из центрального положения вдоль оси транспорта;
    - iv. сдвинут из центрального положения вдоль оси, перпендикулярной оси транспорта.
  - 3.2. Описать механизм возникновения ССК.

4. Исследовать трехмерную систему — акустический цилиндрический резонатор с некоаксиально подключенными к нему волноводами меньшего радиуса (рис. 3) — на наличие в ней трансмиссионных особенностей и связанных состояний в континууме.

- 4.1. При помощи акустической теории связанных мод вычислить матрицы связи волноводов с резонатором, а также эффективный Гамильтониан системы;
- 4.2. Изучить зависимость трансмиссии от длины резонатора  $L$  и угла поворота  $\Delta\phi$ ;
- 4.3. Вычислить значения длины резонатора  $L$  и угла поворота  $\Delta\phi$ , при которых образуются ССК;
- 4.4. Построить волновые функции ССК и исследовать их на предмет возникновения вихрей акустической мощности.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Имеются отличия в картинах проводимости Z- и П-образных волноводных структур, причем особенно сильно эти отличия проявляются при небольших расстояниях между сгибами;
2. Оба типа структур с двумя сгибами поддерживают связанные состояния в континууме, образующиеся за счет двух различных механизмов — Фабри-Перо и Фридриха-Вингена;
3. Несмотря на отсутствие вырождения собственных уровней энергии в хаотических биллиардах, в них могут образовываться ССК. Это происходит за счет "случайного" обращения в нуль матричного элемента связи некоторого соб-

ственного состояния закрытого биллиарда с распространяющимся решением волновода.

4. В трехмерном цилиндрическом акустическом резонаторе с присоединенными к нему волноводами меньшего радиуса, оси которых разнесены на угол  $\Delta\phi$ , за счет изменения этого угла можно настраивать Фано резонансы без перестройки собственных уровней резонатора, а также "открывать" и "закрывать" систему для распространяющейся волны.

### **Научная новизна диссертационной работы**

Предложены новые структуры, реализующие связанные состояния в континууме. Дано объяснение различиям в проводимости Z и П-образных электронных волноводов.

Впервые последовательно изучено явление ССК в хаотическом биллиарде. Показано, что несмотря на отсутствие вырождения собственных уровней системы, в ней могут образовываться ССК, отличные от класса защищенных по симметрии, за счет "Accidental" механизма.

До настоящего времени существовала единственная возможность управления коэффициентами связи между волноводами и резонатором — при помощи диафрагмы в районе интерфейса волновод-резонатор [13]. В диссертационной работе предложен принципиально новый для акустики способ — за счет вращения одного из волноводов относительно оси резонатора (изменения  $\Delta\phi$ ). Примечательно, что при таком варианте модуль матричных элементов связи не меняется, они лишь приобретают дополнительный фазовый множитель. Тем не менее, изменение угла  $\Delta\phi$  оказывает значительное влияние как на трансмиссионные свойства системы, так и на поведение Фано резонансов, вплоть до обращения их ширины в нуль, что соответствует возникновению ССК. При этом даже незначительные изменения  $\Delta\phi$

могут приводить к "открыванию" и "закрыванию" системы для распространяющейся волны, то есть она может выступать в роли "волнового крана".

## **Структура диссертации**

Материал диссертационной работы изложен в пяти главах и распределен следующим образом. В первой главе представлен краткий обзор проведенных ранее исследований явления ССК и описаны основные механизмы реализации таких состояний в физических системах различного рода. Во второй главе дано описание основных методов, использовавшихся в расчетах. Третья глава посвящена исследованию квантовых волноводных структур, имеющих два сгиба под прямым углом, названных Z- и П-образными. В четвертой главе исследуется неинтегрируемая система: "мягкий" биллиард Синая, который отличается от классического конечностью наложенного потенциала. Это прямоугольный биллиард с подключенными к нему полубесконечными проводами и наложенным потенциалом  $V$  круговой симметрии. Пятая глава посвящена изучению трансмиссионных особенностей и ССК в трехмерном акустическом цилиндрическом резонаторе с некоаксиально присоединенными волноводами меньшего радиуса. При этом оси волноводов смещены друг относительно друга на угол  $\Delta\phi$ , а правый волновод может вращаться вокруг оси резонатора как показано на рис. 3. В заключении сформулированы основные результаты.

Материал изложен на 103 страницах машинописного текста, включает 56 рисунков, 6 таблиц и содержит список литературы из 77 наименований.

## **Список опубликованных работ**

1. Садреев А. Ф., Пилипчук А. С. Связанные состояния в континууме, инициированные потенциалом электрода в зигзагообразной квантовой проволоке

- //Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 2014. – Т. 100. – №. 9. – С. 664-669.
2. Sadreev A. F., Maksimov D. N., Pilipchuk A. S. Gate controlled resonant widths in double-bend waveguides: bound states in the continuum //Journal of Physics: Condensed Matter. – 2015. – Т. 27. – №. 29. – С. 295303.
  3. Pilipchuk A. S., Sadreev A. F. Accidental bound states in the continuum in an open Sinai billiard //Physics Letters A. – 2017. – Т. 381. – №. 7. – С. 720-724.
  4. Sadreev A. F., Pilipchuk A. S., Lyapina A. A. Tuning of Fano resonances by rotation of continuum: Wave faucet //EPL (Europhysics Letters). – 2017. – Т. 117. – №. 5. – С. 50011.
  5. Lyapina A. A., Pilipchuk A. S., Sadreev A. F. Trapped modes in a non-axisymmetric cylindrical waveguide //Journal of Sound and Vibration. – 2018. – Т. 421. – С. 48-60.

## Глава 1

### Обзор литературы

Существует стандартное представление о том, что при наличии потенциальной ямы, состояния с энергией ниже ее края  $E < 0$  являются локализованными и имеют дискретный спектр, а состояния с  $E > 0$  — делокализованными распространяющимися решениями с непрерывным спектром (рис. 1.1). Однако еще на заре квантовой механики, в 1929 году, Д. Фон Нейман и Е. Вигнер предсказали существование локализованных состояний с дискретной энергией (связанных состояний в континууме), находящихся в континууме распространяющихся решений [14]. Они предложили локализованный центрально симметричный квантовый потенциал сложной структуры, в котором существуют такие состояния:

$$V(r) = \frac{48k^2 \sin^4(kr) - 8k^2(2kr - \sin(2kr)\sin(2kr))}{A^2 + (2kr - \sin(2kr))^2} + \frac{64k^2 A^2 \sin^4(kr)}{[A^2 + (2kr - \sin(2kr))^2]^2} \quad (1.1)$$

Однако смоделировать его на практике никому не удалось.

Ф. Х. Стиллинджер и Д. Р. Херрик 46 лет спустя [15] скорректировали и расширили подход, предложенный Д. Фон Нейманом и Е. Вигнером, и показали, что ССК могут образовываться в некоторых специфических молекулярных системах, а также представили несколько примеров сферически-симметричных потенциалов, поддерживающих ССК. Пример одного из них:

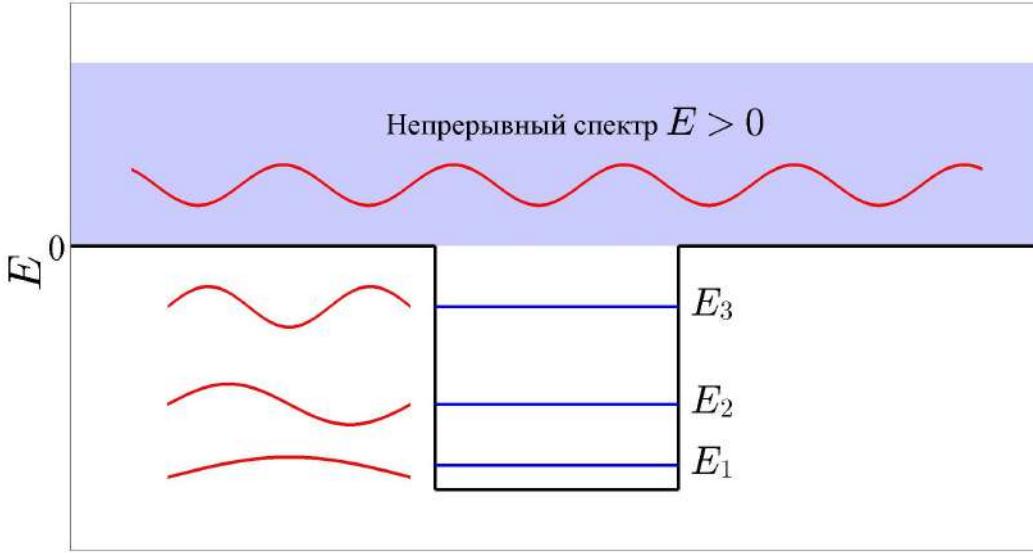


Рис. 1.1: Классическое представление об энергии локализованных и делокализованных состояний вблизи потенциальной ямы.  $E_1, E_2, E_3$  - дискретные уровни, лежащие ниже континуума.

$$V(r, D) = k^2 \left( \frac{2(kr)^{2\nu+1} J_\nu(kr) J_{\nu+1}(kr) - (3\nu + 1)(kr)^{2\nu} J_\nu^2(kr)}{A^2 + s(r, D)} \right) + \\ k^2 \left( \frac{(kr)^{4\nu+2} J_\nu^4(kr)}{[A^2 + s(r, D)]^2} \right) \quad (1.2)$$

, где

$$s(r, D) = \frac{(kr)^{2\nu+2}}{2(2\nu + 1)} [J_\nu^2(kr) + J_{\nu+1}^2(kr)]$$

Однако, как и в случае с вариантом Фон Неймана и Вигнера, в силу их сложности, реализовать их на практике никому не удалось. Настоящий прорыв дала работа Х. Фридриха и Д. Вингена, в которой авторы предложили двухуровневую модель формирования ССК применимую к любой области физики, показав тем самым, что ССК в системе могут образовываться за счет деструктивной интерференции двух близлежащих резонансных состояний [16]. Идеи, представленные

в этой работе в дальнейшем были серьезно развиты при изучении открытых резонаторов. Ключевыми работами, привлекшими интерес оптиков к данному явлению стали работы по ССК в фотонно-кристаллических волноводах [17, 18]. А первый целенаправленный эксперимент поставила группа М. Сегева. Они продемонстрировали защищенное по симметрии связанное состояние в континууме [19]. Эти работы привели к резкому росту количества теоретических, а затем и экспериментальных исследований в данной области. Таким образом, к настоящему моменту ССК обнаружены в большом количестве различных систем: фотонных кристаллах, оптических волноводах и волокнах, квантовых дотах, графенах, акустических системах и даже в волнах на мелкой воде [20, 21].

## 1.1 Механизмы возникновения связанных состояний в континууме

Существует несколько механизмов возникновения связанных состояний в континууме, простейшим из которых является симметрийный, который впервые был предложен Робником в 1986 году [22]. Он рассматривал прямолинейный квантовый волновод с наложенным в поперечном направлении потенциалом (рис. 1.2).

$$V_g = \begin{cases} 0, & x \notin [0, L_w] \\ -V_0, & x \in [0, L_w] \end{cases} \quad (1.3)$$

Волновые функции в такой системе:

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{\pi p}{d}\right) \psi(x), \quad (1.4)$$

где  $d$  — ширина волновода. Из уравнения Шредингера следует, что для области  $[0, L_w]$ , волновое число:

$$k_p = \sqrt{E + V_0 - \frac{\pi^2 p^2}{d^2}} \quad (1.5)$$

Таким образом, в случае первого открытого канала ( $\pi^2/d^2 < E < 4\pi^4/d^2$ ), в области с наложенным потенциалом существует бесконечное число локализованных состояний с  $p > 1$  и энергией, лежащей в зоне распространения. Они являются локализованными в силу их ортогональности распространяющемуся в первом канале состоянию с  $p = 1$ .

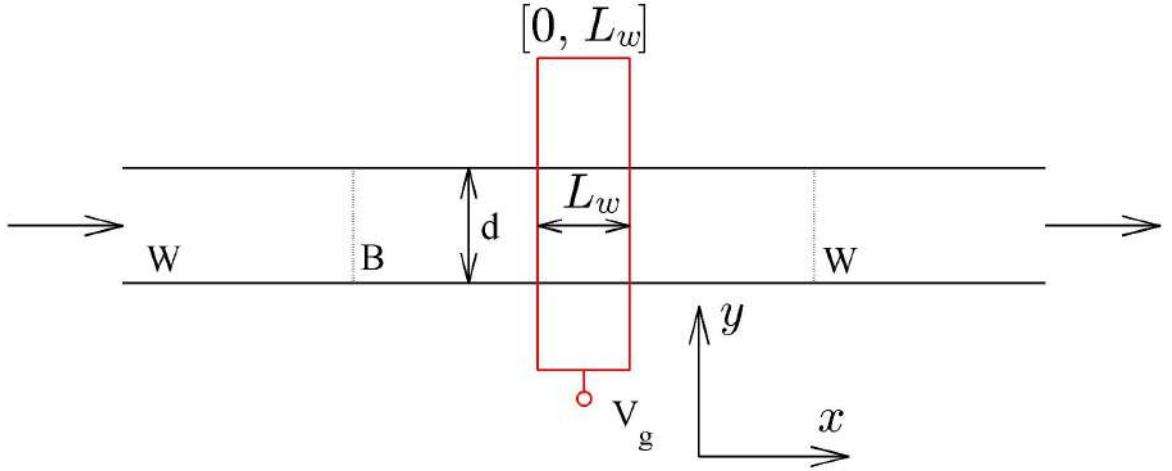


Рис. 1.2: Прямолинейный волновод с расположенным в поперечном направлении потенциалом.

Данная идея впоследствии была развита Н. Продановичем и др.[23]. Они обобщили ситуацию, рассмотренную Робником на трехмерный случай, а также предложили использовать систему, состоящую из нескольких таких потенциалов, расположенных на определенном расстоянии друг от друга как независящий от поляризации фото-детектор. Р. Л. Шульт и др. [24] обнаружили подобное ССК в крестовой структуре, состоящей из двух пересекающихся под прямым углом прямолинейных волноводов (рис. 1.4b). Данное состояние является локализованным, так как, являясь нечетным, имеет нулевую связь с распространяющимся в волноводах четным решением.

Рассмотренные ССК, названные защищенными по симметрии, возникают, когда состояния континуума и системы имеют разную четность, и существуют до тех

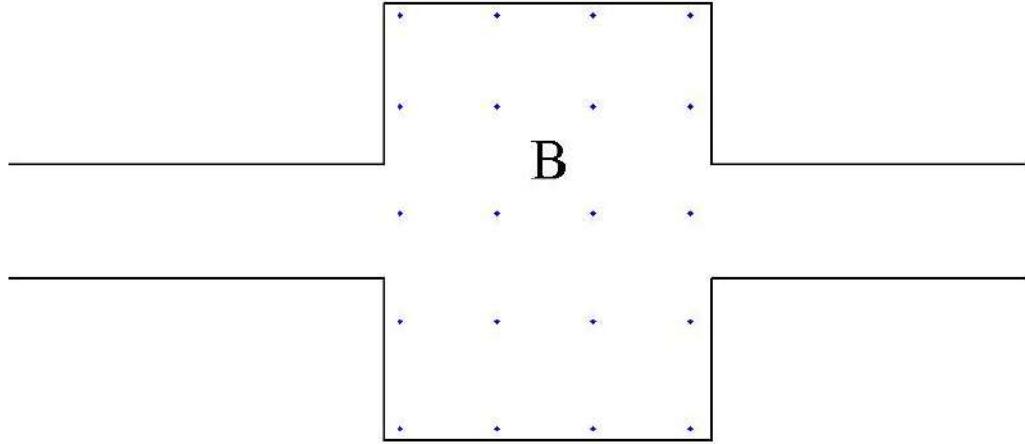


Рис. 1.3: Квантовый дот в слабом магнитном поле.

пор, пока симметрия системы не будет нарушена. Данное утверждение хорошо проиллюстрировано работой Д. Ю. Ноккеля[25], в которой рассматривался баллистический электронный транспорт через квантовый дот, находящийся в слабом магнитном поле. По мере уменьшения напряженности поля резонансы становятся уже, и при  $B = 0$  их ширина обращается в нуль, что соответствует появлению набора защищенных по симметрии связанных состояний в континууме. Пример одного такого состояния приведен на рис. 1.4а. Такие ССК можно обнаружить в квантовых волноводах[26, 27], графенах[28], в фотонных кристаллах[29] или в поверхностных волнах в водных каналах [30, 31].

Вторым механизмом возникновения ССК является механизм Фабри-Перо, использующий идею полного отражения. Типичный резонатор Фабри-Перо представляет собой два плоских зеркала, расположенных на определенном расстоянии друг от друга. Проводимость такой системы может быть рассчитана по формуле геометрической прогрессии если известны коэффициенты прохождения и отражения  $t$  и  $r$  каждого зеркала:

$$T = \frac{t^2 \exp(ikL)}{1 - r^2 \exp(2ikL)}, \quad (1.6)$$

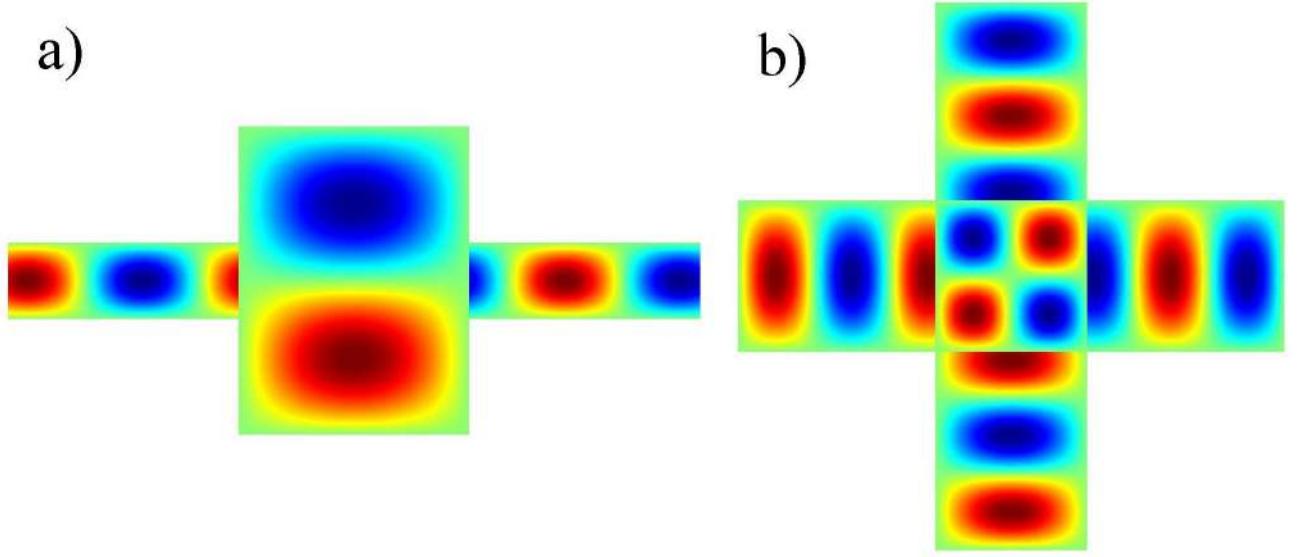


Рис. 1.4: Примеры защищенных по симметрии ССК. а) В квантовом доте, б) В системе пересекающихся под прямым углом однонаправленных волноводов.

где  $k$  - волновой вектор. Известно, что в такой системе могут возникать стоячие волны (рис. 1.5) при условиях, следующих из равенства ную знаменателя:

1. Коэффициент отражения каждого зеркала равен единице  $r = 1$ ;
2. Расстояние между зеркалами равно целому числу длин полуволн, т.е.  $L = n\lambda/2, \lambda = 2\pi/k$ .

Примечательно, что данное явление характерно не только для оптических систем. Впервые такой подход был реализован в 1994г. Т. В. Шахбазяном и М. Е. Райхом [32], которые рассматривали электронный волновод, роль зеркал в котором играли две примеси, расположенные внутри него. Вообще говоря, тот факт, что примесь в волноводе может выступать в роли зеркала с идеальным отражением, не вполне очевиден. Дело в том, что при наличии примеси в системе, у распространяющейся волны появляется два возможных пути распространения и волны, прошедшие область волновода с примесью разными путями, могут осуществить взаимодействие деструктивно, погасив друг друга. Как следствие происхо-

дит полное отражение от одной примеси. Далее в 1998г. Ч. С. Ким и А. М. Сатанин предложили в качестве структур с идеальным отражением использовать две потенциальные ямы с наложенными на них периодическими по времени потенциалами. Они продемонстрировали, что при определенных критических параметрах, может произойти локализация электронов в области между этими потенциальными ямами[33].

В дальнейшем такой подход был реализован в системах, состоящих из двух одинаковых квантовых дотов, соединенных квантовой проволокой определенной длины. Авторы показали, сначала аналитически на примере пятиуровневой модели [34], а затем численно [35], что ширины некоторых резонансов могут обращаться в нуль при определенных значениях длины или ширины проволоки и энергии падающей волны — то есть частица локализуется в проволоке, а квантовые доты играют при этом роль идеальных зеркал. Обобщая вышеизложенное, можно утверждать, что две резонансные структуры, имеющие при определенной частоте нуль проводимости (полное отражение), могут рассматриваться как идеальные зеркала, способные захватывать волны в области между ними.

Возникновение ССК посредством данного механизма также возможно в фотонно-кристаллических волноводах[18], в системе, состоящей из двух параллельных дифракционных решеток или массивов диэлектрических цилиндров [17], в акустических полостях [36], а также волнах на мелкой воде между двумя препятствиями, как впервые было показано М. МакИвером [37]. В Главе 3 диссертационной работы продемонстрировано, что в роли зеркал могут выступать не только резонаторы, но и изгибы волновода.

В 1985г. Фридрих и Винтген показали [16], что возникновение ССК является общей особенностью для любых физических систем, в которых происходит взаимодействие резонансных состояний. Они продемонстрировали, что при сближении двух резонансов как функции минимум одного непрерывного параметра системы,

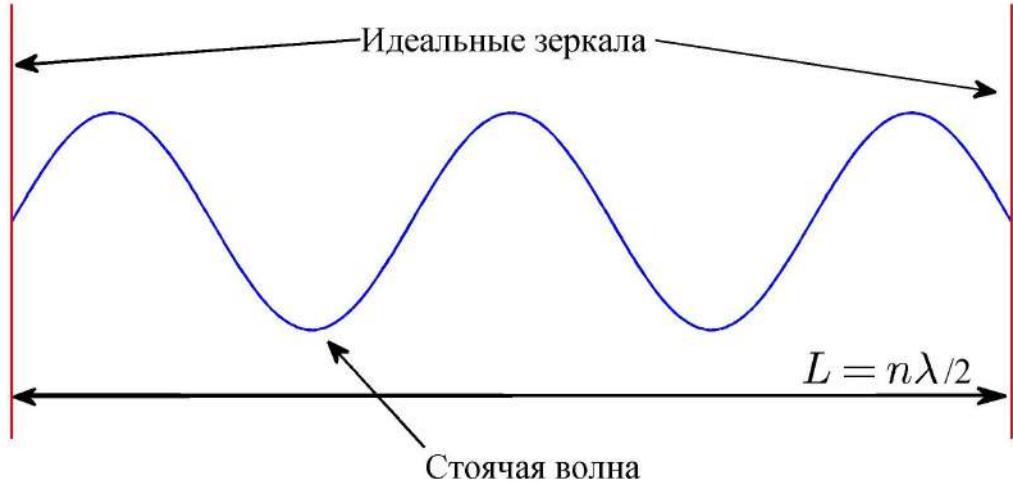


Рис. 1.5: Схематичное изображение Фабри-Перо резонатора. Два идеальных зеркала с  $r = 1$ , расстояние между которыми равно целому числу длин волн.

их интерференция может привести к тому, что ширина одного из этих состояний обратиться в нуль — оно станет локализованным (рис.1.7). Ширина резонанса пропорциональна квадрату его коэффициента связи с континуумом  $\gamma \sim V^2$ , поэтому резонансы, ширина которых равна нулю, имеют нулевую связь с континуумом распространяющихся решений, вследствие чего являются локализованными.

Эквивалентное объяснение звучит следующим образом: при варьировании некоторого параметра системы (например, ширины интегрируемого прямоугольного резонатора [38] или длины акустического цилиндрического резонатора [39]), может произойти вырождение ее собственных состояний с одинаковой симметрией. Тогда можно добиться обращения в нуль связи континуума с состоянием, являющимся суперпозицией этих двух вырожденных состояний  $\Psi = \alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ , за счет варьирования коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , несмотря на то, что связи с континуумом каждого из собственных состояний  $\psi_1$  и  $\psi_2$  отличны от нуля.

Такие ССК можно рассматривать аналитически, оставив в эффективном Га-

мильтониане (2.22) только те состояния, которые испытывают вырождение:

$$\hat{H}_{eff} = \begin{pmatrix} \epsilon - i\gamma_1 & u - i\sqrt{\gamma_1\gamma_2} \\ u - i\sqrt{\gamma_1\gamma_2} & -\epsilon - i\gamma_2 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где  $\epsilon$  — расстояние между уровнями энергии (рис.1.6),  $\gamma_{n=1,2}$  — ширины резонансов. Недиагональные элементы  $u$  превращают интегрируемую систему в неинтегрируемую. Собственные значения такого укороченного Гамильтониана легко найти:

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= -i\Gamma \pm R, R^2 = (\epsilon - i\Delta\Gamma)^2 + (u - i\sqrt{\gamma_1\gamma_2}) \\ \Gamma &= \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}, \Delta\Gamma = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Действительные части собственных значений эффективного Гамильтониана  $Re(z)$  определяют позиции резонансов, а мнимые части  $Im(z)$  — их ширины. Решение уравнения  $Im(z) = 0$  в общем виде впервые было найдено Волей и Зелевинским [40]:

$$u = \sqrt{\gamma_1\gamma_2}\epsilon/\Delta\Gamma \quad (1.9)$$

Отсюда в частности следует, что при  $u = 0$  (в интегрируемой системе), ССК возникает при  $\epsilon = 0$ , т.е. в точке вырождения (рис. 1.7а). Однако, явление вырождения собственных уровней имеет место только в интегрируемых системах. В неинтегрируемых собственные уровни не пересекаются, а испытывают расталкивание — так называемый Avoid crossing, как показано на рис. 1.6. Таким образом, ССК, реализованные благодаря механизму полной деструктивной интерференции Фридриха-Винтгена, возникают вблизи точек вырождения собственных уровней энергии системы.

Ситуацию, когда число континуумов больше одного, рассмотрел Павлов-Веревкин с соавторами[41]. Он показал, что интерференция  $N$  вырожденных со-

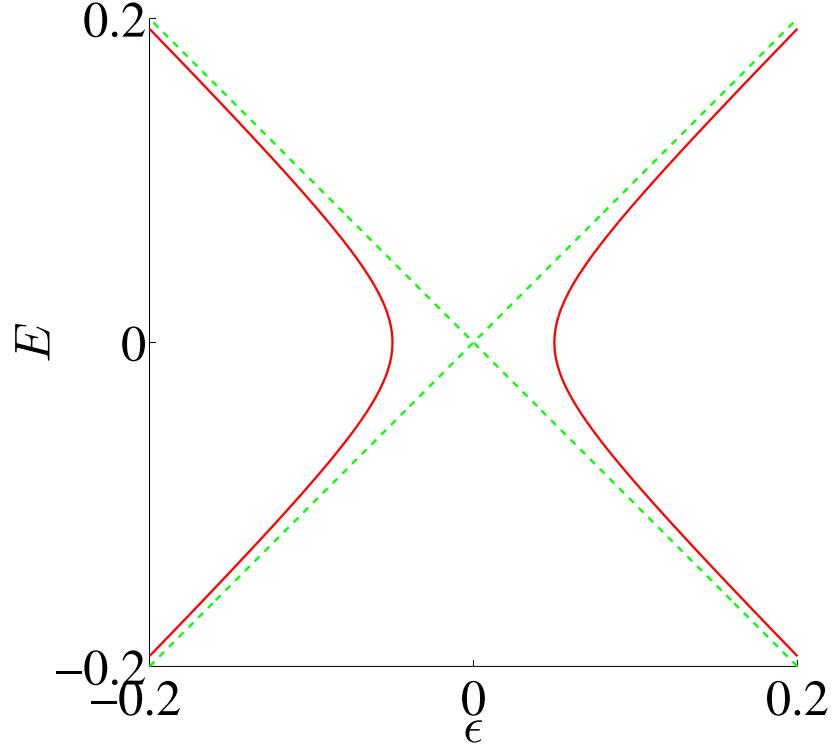


Рис. 1.6: Типичное поведение собственных уровней закрытой системы. Зеленый пунктир - для интегрируемой системы. Красная сплошная - для неинтегрируемой системы.

стояний, распадающихся в  $K$  невзаимодействующих континуумов, обычно приводит к формированию  $N - K$  связанных состояний в континууме. Альтернативная формулировка [38, 42]: существует  $N - K$  способов подобрать коэффициенты  $\alpha_n$  линейной суперпозиции  $N$  вырожденных состояний  $\sum_{n=1}^N \alpha_n \psi_n$  таким образом, чтобы коэффициенты связи этих состояний обратились в нуль одновременно с  $K$  континуумами. Соответственно, эти коэффициенты  $\alpha_n$  являются коэффициентами модального разложения ССК по собственным функциям открытой системы.

ССК, возникающие благодаря механизму деструктивной интерференции Фридриха - Винтгена, встречаются в квантовых биллиардах при непрерывном изменении их ширины[38], в открытых акустических резонаторах[36, 39], а также в микроволновых волноводах[43, 44]. В данной работе показано, что ССК такого типа

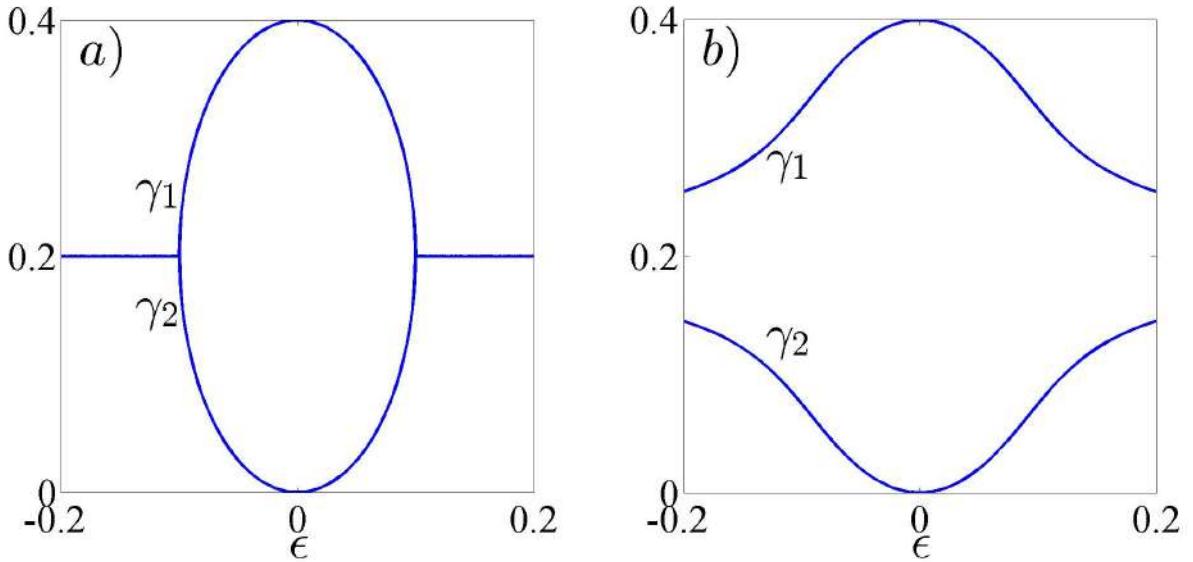


Рис. 1.7: Поведение ширин резонансов вблизи точки вырождения собственных уровней энергии а) в интегрируемых системах ( $u = 0$ , б) в неинтегрируемых системах  $u \neq 0$ .

могут встречаться также в квантовой проволоке, имеющей два сгиба. Рассмотренный механизм возникновения ССК является третьим в списке.

Не так давно был открыт новый механизм возникновения ССК, который заключается в "случайном" обращении в нуль коэффициента связи некоторого собственного состояния системы с континуумом распространяющихся решений [45]. Позднее, ССК данного типа были обнаружены (как теоретически, так и экспериментально) в фотонно-кристаллических слоях, а механизм назван Accidental [46]. Термин не совсем удачен, но именно он будет использоваться в диссертационной работе. В Главе 4 будет показано, что ССК в неинтегрируемом биллиарде — аналоге биллиарда Синая — реализуются за счет данного механизма.

## 1.2 Связанные состояния в акустике

Исторически сложилось так, что связанные состояния в континууме в акустике приобрели свое собственное название — "захваченные" моды. Но чтобы не множить термины, далее в тексте они также будут называться ССК. С точки зрения математики, акустические системы отличаются от квантовомеханических граничными условиями — они удовлетворяют граничным условиям Неймана, а квантовомеханические — Дирихле.

К настоящему моменту было исследовано большое количество различных волноводных структур с граничными условиями Неймана и показано, что наличие в них связанных состояний очень сильно зависит от геометрических параметров системы. На сегодняшний день, известно огромное количество систем, в которых реализуются связанные состояния с частотой ниже порога распространения (ниже первого среза). В 1951г Урселл [30] рассмотрел систему, состоящую из бесконечно длинного заполненного жидкостью волновода фиксированной ширины  $d$  с симметрично расположенным внутри него цилиндром, радиуса  $r < d$ . Он показал, что при малом радиусе этого цилиндра в системе могут образовываться связанные состояния. Такого рода системы стали весьма популярными для изучения. Так, в 1991г Линтон и Эванс развили эту идею и показали, что связанные состояния в такой системе могут возникать при любом радиусе цилиндра. Несколько лет спустя было показано [47, 48], что при наличии в такой системе  $N$  цилиндров, в ней возникает  $M \leq N$  связанных состояний.

Гораздо больший интерес представляют собой связанные состояния с частотой выше порога распространения, то есть ССК. В 1966г Р. Паркер [11, 12] столкнулся с резонансами чисто акустической природы в воздушном потоке через набор плоских параллельных пластин и показал, что ССК могут быть причиной разрушения периодических механических конструкций. Эванс и Портер [49] впервые

представили доказательства существования ССК в рассмотренной выше системе, состоящей из жесткого цилиндра, расположенного по центру волновода. А К. М. Линтон и М. МакИвер [50] обнаружили бесконечное число ССК в цилиндрическом волноводе, содержащем осесимметричное препятствие.

До недавнего времени при рассмотрении акустических систем выбирались специфические геометрические конфигурации, позволяющие снизить эффективную размерность акустического волновода как, например, в работах описанных выше. С. Хайн и др. [51, 36] в своих работах рассматривали трехмерные системы, представляющие собой цилиндрические волноводы и резонаторы с неосесимметрично расположенными внутри препятствиями, что уже не позволяло снизить эффективную размерность системы. Авторами были обнаружены как связанные состояния ниже первой частоты среза (ниже континуума), так и связанные состояния в континууме (выше первой частоты среза). Наиболее распространенный тип ССК, встречающийся в рассматриваемых авторами системах — защищенный по симметрии. Однако, в системах с двумя резонаторами были обнаружены также ССК, реализованные посредством механизма Фабри-Перо. Авторы утверждают, что подобные системы могут выступать в роли низкочастотных акустических фильтров.

Ю. Дуан и М. МакИвер исследовали возможность существования ССК, которые поддерживают вихри акустической мощности в бесконечном цилиндрическом акустическом волноводе, содержащем ряд радиально направленных лопастей, расположенных под равными углами вокруг оси волновода [52]. Они утверждают, что в такой системе имеются ССК, соответствующие двум классам — "неподвижные" и поддерживающие вращение.

## Глава 2

### Методология

#### 2.1 Метод Андо

Метод Андо [53] позволяет вычислить коэффициенты прохождения и отражения системы, а также построить ее волновые функции. Он основан на построении конечно-разностной схемы для уравнения Шредингера и рассмотреть его проще всего на примере одномерной tight-binding модели (рис. 2.1).

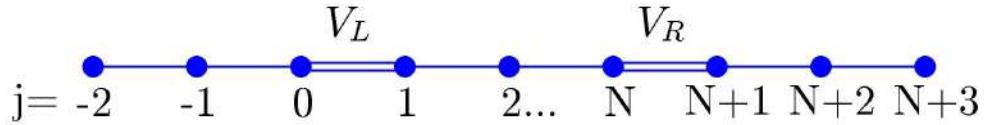


Рис. 2.1: Одномерная tight-binding model - цепочка атомов с определенными коэффициентами связи между ними

Эта цепочка состоит из так называемого бокса, содержащего  $N$  узлов, и двух подключенных к нему полубесконечных проводов. Общий вид уравнения Шредингера можно записать в виде:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad (2.1)$$

Гамильтониан такой модели имеет следующий вид:

$$\hat{H} = - \sum_j t_j |j\rangle\langle j+1| + c.c., \quad (2.2)$$

где  $j$  пробегает по всем узлам численной решетки. В рассматриваемом случае все связи между соседними узлами решетки равны единице ( $t=1$ ), за исключением

связей между 0 и 1 узлами и N и N+1 узлами, которые принимаются за vL и vR, соответственно. Уравнение (2.1) для некоторого узла  $j$  может быть переписано следующим образом:

$$E\langle j|\psi\rangle - \sum_{j'} \langle j|\hat{H}|j'\rangle \langle j'|\psi\rangle = 0 \quad (2.3)$$

А с учетом (2.2) второе слагаемое не обращается в нуль только при  $j' = j \pm 1$ . Тогда в явном виде уравнение (2.1) может быть записано таким образом:

$$E\psi_j + t_j\psi_{j-1} + t_j\psi_{j+1} = 0 \quad (2.4)$$

Решение уравнения Шредингера для левого провода ( $j < 1$ ) представляется в виде падающей и отраженной волн:

$$\psi_j = \exp(ikj) + r \exp(-ikj) \quad (2.5)$$

Внутри «бокса» ( $j = 1, 2, 3 \dots N$ ) решение выражается в виде стоячей волны:

$$\psi_j = \alpha \exp(ikj) + \beta \exp(-ikj) \quad (2.6)$$

Решение в правом проводе ( $j > N$ ) записывается в виде:

$$\psi_j = t \exp(ikj) \quad (2.7)$$

В данных формулах  $r$  — коэффициент отражения,  $t$  — коэффициент прохождения,  $\alpha, \beta$  — некоторые коэффициенты,  $k$  — волновой вектор, который может быть найден из закона дисперсии:

$$E(k) = -2 \cos(k) \quad (2.8)$$

При подстановлении данных функций в уравнение Шредингера 2.4, получается про-

стая система линейных уравнений на коэффициенты  $a, b, r, t$ :

$$\begin{cases} r(E + e^{ik}) + \alpha v_L e^{ik} + b v_L e^{-ik} = -(E + e^{ik}) \\ r v_L + \alpha e^{ik}(E + e^{ik}) + \beta e^{-ik}(E + e^{-ik}) = -v_L \\ \alpha e^{ikN}(E + e^{-ik}) + \beta e^{-ikN}(E + e^{ik}) + t v_R e^{ik(N+1)} = 0 \\ \alpha v_R e^{ikN} + \beta v_R e^{-ikN} + t e^{ik(N+1)}(E + e^{ik}) = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

В двумерном случае данный подход легко обобщается. Система разбивается на «ячейки» или «слои» с индексом  $j$ , как показано на рисунке 2.2.

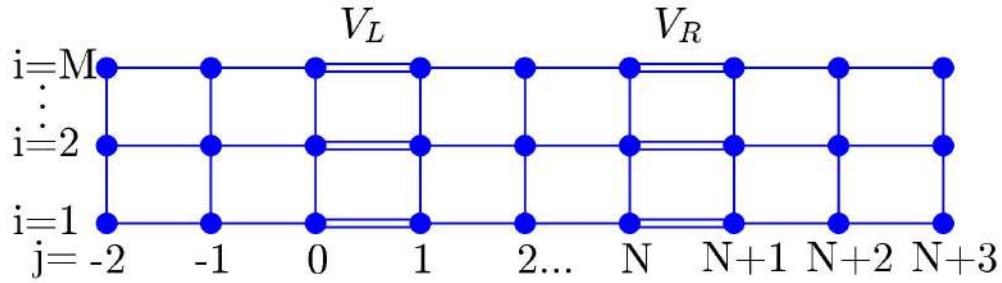


Рис. 2.2: Двумерная цепочка

Уравнение 2.4 может быть переписано следующим образом:

$$(E - \hat{H}_j)C_j + t_j C_{j-1} + t_j C_{j+1} = 0, \quad (2.10)$$

где  $\hat{H}_j$  — Гамильтониан  $j$ -ого слоя, количество узлов в котором соответствует численной ширине рассматриваемой структуры —  $M$ , а  $C_j$  — вектор, описывающий амплитуды этого слоя. Решение данного уравнения аналогично (2.5)-(2.7) с той лишь разницей, что добавляется поперечная компонента. Дальнейшие вычисления приводят к системе уравнений, аналогичной 2.9, позволяя вычислить искомые коэффициенты прохождения и отражения.

## 2.2 Метод эффективного неэрмитового Гамильтониана

Метод эффективного Гамильтониана хорошо зарекомендовал себя в задачах о квантовом транспорте [54, 55, 56, 57, 58, 59], а также недавно был успешно применен к задаче о распространении звука в акустических волноводах[39, 60]. Эффективный Гамильтониан является результатом проектирования полного Гильбертова пространства всей сложной системы на Гильбертово пространство некоторой ее части. Для структур аналогичных tight-binding модели, описываемой в разделе 2.1, вся система раскладывается на закрытую подсистему, так называемый «бокс», описываемую Гамильтонианом  $H_B$  с дискретным числом состояний  $|\psi_n\rangle, n = 1, 2, \dots, N$  и континуумом распространяющихся состояний  $|E, L\rangle$  и  $|E, R\rangle$ , соответствующих полубесконечным проводам, подключенным к «боксу», операторы Гамильтона которых для левого и правого провода, соответственно, равны  $H_L$  и  $H_R$ . Гамильтониан несвязанных подсистем:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_B + \hat{H}_L + \hat{H}_R \quad (2.11)$$

А полный Гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (2.12)$$

где  $V$  - оператор взаимодействия, описывающий связи между «боксом» и подключенными проводами:

$$V = \sum_n \sum_{C=L,R} \int dE V_n(E, C) |E, C\rangle \langle n| + c.c. \quad (2.13)$$

В этой формуле и далее по тексту  $C$  нумерует подключенные к системе полубесконечные провода.

При таком подходе функция рассеяния описывается уравнением Липпмана-Швингера:

$$|\psi\rangle = |\psi_0\rangle + (E + i0 - \hat{H}_0)^{-1} \hat{V} |\psi_0\rangle = [F(E + i0)]^{-1} |\psi_0\rangle, \quad (2.14)$$

где

$$F(E + i0) = 1 - (E + i0 - \hat{H}_0)^{-1} \hat{V}$$

$$|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} |E, L\rangle \\ 0 \\ |E, R\rangle \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

И выполняется

$$(E - \hat{H}_0)|\psi_0\rangle = 0 \quad (2.16)$$

Вводятся проекционные операторы для проводов и «бокса»:

$$P_C = \int dE |E, C\rangle \langle E, C| \quad (2.17)$$

$$P_B = \sum_n |n\rangle \langle n|$$

При помощи данных операторов волновая функция рассеяния может быть переписана следующим образом:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} P_L |\psi\rangle \\ P_B |\psi\rangle \\ P_R |\psi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_L\rangle \\ |\psi_B\rangle \\ |\psi_R\rangle \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

А оператор взаимодействия:

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} P_L V P_L & P_L V P_B & P_L V P_R \\ P_B V P_L & P_B V P_B & P_B V P_R \\ P_R V P_L & P_R V P_B & P_R V P_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V_{LB} & 0 \\ V_{BL} & 0 & V_{BR} \\ 0 & V_{RB} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Т.к. связи существуют только между левым проводом и «боксом» и правым проводом и «боксом», в нуль не обращаются только элементы, расположенные на над- и под-диагонали.

С использованием выражений (2.15) и (2.19) матрица  $F$  может быть перепи-

сана в явном виде:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{E-H_L}V_{LB} & 0 \\ -\frac{1}{E-H_B}V_{BL} & 1 & -\frac{1}{E-H_B}V_{BR} \\ 0 & -\frac{1}{E-H_R}V_{RB} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Вычислив матрицу  $F^{-1}$  и подставив ее совместно с (2.18) в уравнение (2.14) легко получить выражение для волновой функции внутри «бокса»:

$$|\psi_B\rangle = Q^{-1} \sum_{C=L,R} V_{BC} |E, C\rangle, \quad (2.21)$$

где  $Q = E^+ - \hat{H}_{eff}$ , а эффективный Гамильтониан представляет собой:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_B + \sum_{C=L,R} V_{BC} \frac{1}{E^+ - \hat{H}_C} V_{CB} \quad (2.22)$$

Выражение для  $S$ -матрицы, элементы которой являются искомыми коэффициентами прохождения и отражения, согласно [59] записывается следующим образом:

$$S_{CC'} = \delta_{CC'} - 2\pi i \langle E, C | V_{CB} Q^{-1} V_{BC'} | E, C' \rangle \quad (2.23)$$

Таким образом, зная выражения для волновых функций проводов и «бокса», можно вычислить матричные элементы оператора взаимодействия и с его помощью построить эффективный Гамильтониан системы. Затем, воспользовавшись формулой (2.23) можно рассчитать искомые коэффициенты отражения и прохождения.

Данный подход легко обобщается на системы большей размерности. Типичные особенности можно рассмотреть на примере трансмиссии через квантовый биллиард с двумя подключенными к нему проводами одинаковой ширины, как показано на рис. 2.3

В tight-binding модели  $x = a_0(i, l)$ , где  $a_0$  – шаг решетки, собственные функции и собственные значения могут быть записаны в виде:

$$\psi_{m,n}(l, j) = \psi_m(l)\psi_n(j) \quad (2.24)$$

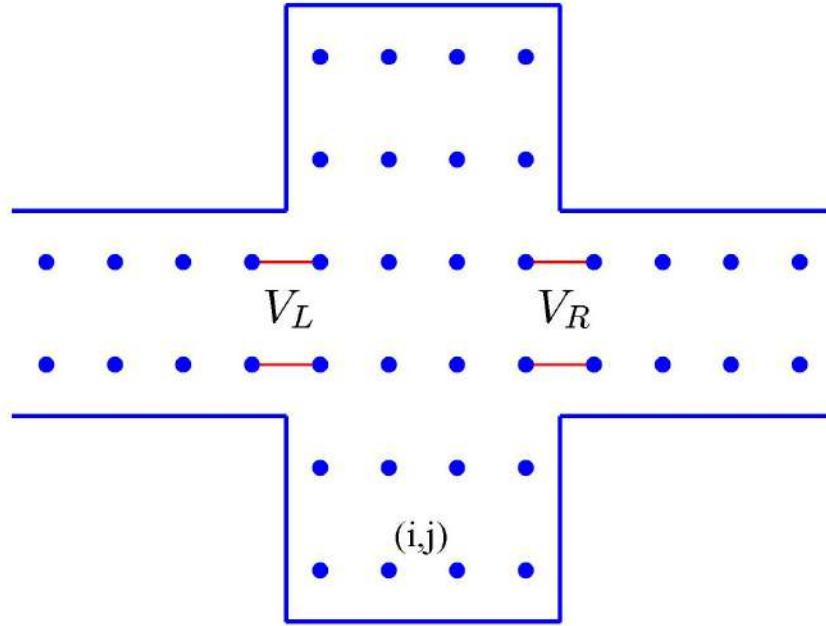


Рис. 2.3: Двумерная цепочка

$$E_{m,n} = E_m + E_n, \quad (2.25)$$

где для продольных и поперечных составляющих биллиарда:

$$\begin{aligned} E_m &= -2 \cos \left( \frac{\pi m}{N_x + 1} \right) \\ E_n &= -2 \cos \left( \frac{\pi n}{N_y + 1} \right) \\ \psi_m &= \sqrt{\frac{2}{N_x + 1}} \sin \left( \frac{\pi ml}{N_x + 1} \right), l = 1, 2, \dots, N_x \\ \psi_n &= \sqrt{\frac{2}{N_y + 1}} \sin \left( \frac{\pi nj}{N_y + 1} \right), j = 1, 2, \dots, N_y \end{aligned} \quad (2.26)$$

а для проводов:

$$\begin{aligned} \psi_{E,L,p}(l, j) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi |\sin(k_p)|}} \sin(k_p(1-l)) \phi_p(j) \\ \psi_{E,R,p}(l, j) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi |\sin(k_p)|}} \sin(k_p(l-Nx)) \phi_p(j) \\ E &= -2 \cos(k_p) + E_p, \quad E_p = -2 \cos \left( \frac{\pi p}{NL + 1} \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

В данных формулах  $p$  нумерует канал, а  $N_L$  — численная ширина провода. Необходимо также определить точки подключения проводов к биллиарду,  $N_1$  и  $N_2$ , так, что  $N_L = N_2 - N_1$ . Тогда область соприкосновения волноводов с биллиардом — прямая линия длины  $N_L$ , а поперечные волновые функции проводов можно задать так:

$$\phi_p(j) = \sqrt{\frac{2}{N_L + 1}} \sin\left(\frac{\pi p(j - N_1)}{N_L + 1}\right) \quad (2.28)$$

Тогда матричные элементы связи имеют вид:

$$\begin{aligned} V_{m,n}(E, L, p) &= v_L \psi_m(1) \sqrt{\frac{|\sin(k_p)|}{p\pi}} \sum_{j=N_1}^{N_2} \phi_p(j) \psi_n(j) \\ V_{m,n}(E, R, p) &= v_R \psi_m(Nx) \sqrt{\frac{|\sin(k_p)|}{p\pi}} \sum_{j=N_1}^{N_2} \phi_p(j) \psi_n(j), \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $L, R$  нумеруют левый и правый провода, соответственно, а  $v_L, v_R$  — константы связи проводов с биллиардом.

Таким образом, имеется все необходимое для определения эффективного Гамильтониана  $\hat{H}_{eff}$  согласно формуле (2.22), а матричные элементы  $S$ -матрицы с учетом наличия нескольких каналов рассеяния приобретают следующий вид:

$$\langle C, p_C | S | C', p'_{C'} \rangle = \delta_{CC'} \delta_{pp'} - 2\pi i \langle E, C, p_C | V_{CB} Q^{-1} V_{BC'} | E, C', p'_{C'} \rangle \quad (2.30)$$

и описывают рассеяние из канала  $p$  в канал  $p'$ .

### 2.3 Способ обнаружения и построения связанных состояний в континууме

Эффективный неэрмитовый Гамильтониан является, помимо прочего, мощным инструментом обнаружения в системе связанных состояний в континууме. Его собственные значения  $z$  являются комплексными и имеют простой физический смысл. Их действительные части  $Re(z)$  определяют позиции резонансов, а

мнимые  $Im(z)$  — их ширины, поэтому вычислить параметры резонанса можно, решая так называемые уравнения на "стабильную точку":

$$\begin{aligned} E_r &= Re(z(E_r, \alpha_p)) \\ \Gamma_r &= -2Im(z(E_r, \alpha_p)), \end{aligned} \quad (2.31)$$

где  $E_r$  — позиция резонанса по энергии,  $\Gamma_r$  — его ширина, а  $\alpha_p$  — набор варьируемых параметров системы. Тогда из условия  $\Gamma_r = 0$  следует необходимое и достаточное условие для существования в системе связанного состояния в континууме [61, 62]:

$$\begin{aligned} Im(z(E_{BSC}, \alpha_p)) &= 0 \\ Re(z(E_{BSC}, \alpha_z)) &= E_{BSC} \end{aligned} \quad (2.32)$$

которое можно переписать в виде одного уравнения следующим образом:

$$\|\hat{H}_{eff}(E_{BSC}) - E_{BSC}\| = 0 \quad (2.33)$$

При выполнении данного условия, матрица  $(E - \hat{H}_{eff})^{-1}$  из уравнения (2.21) не существует, так как детерминант  $\|E - \hat{H}_{eff}\|$  обращается в нуль. Этот факт отражается на картине проводимости в виде особенностей, в которых ее нуль совпадает с единицей — так называемых коллапсах резонанса Фано [38, 63]. Поэтому наличие в системе ССК может быть косвенным образом диагностировано по наличию таких особенностей в картине проводимости, что на сегодняшний день является самым распространенным способом экспериментального подтверждения присутствия в системе связанных состояний в континууме.

## Глава 3

### Z- и П-образные электронные волноводы

#### 3.1 Трансмиссионные свойства

Рассматриваемые Z- и П-образные волноводные структуры можно условно поделить на три части: два полубесконечных провода (W) и область рассеяния (B), их соединяющую (рис. 1). Волновые функции распространяющихся в волноводах состояний с энергией Ферми  $E_F = \pi^2 p^2 + k_p^2, p = 1, 2, 3\dots$  записываются следующим образом:

$$\psi_{\pm}(x, y) = \sqrt{\frac{1}{2\pi k_p}} \exp(\pm ik_p y) \phi_p(x), \quad (3.1)$$

где

$$\phi_p(x) = \sqrt{2} \sin(\pi p x) \quad (3.2)$$

В данном случае считается, что энергия Ферми измеряется в терминах  $E_0 = \frac{\hbar^2}{2m^*d^2}$ , координаты - в терминах ширины волноводов  $d$ , а волновой вектор  $k_p$  — в терминах обратной ширины волноводов. Собственные функции области рассеяния (B) вычисляются из следующего уравнения Шредингера:

$$\hat{H}_B \psi_{mn}(x, y) = E_{mn} \psi_{mn}(x, y), \quad \hat{H}_B = -\nabla^2 + V_g(x) \quad (3.3)$$

$$\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x) \psi_n(y), \quad \psi_n(y) = \sqrt{2} \sin(\pi n y) \quad (3.4)$$

$$E_{mn} = \epsilon_m(V_g) + \pi^2 n^2, \quad (3.5)$$

где  $\phi_m(x)$  и  $\epsilon_m$  - собственные функции и собственные значения энергии квантовой частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме ширины L с потенциалом

управляющего электрода  $V_g$ , симметричным относительно оси x. Точная аналитическая формула для профиля потенциала, записанная через обратные тригонометрические функции была выведена в статье [64]. Однако если электрод расположен достаточно близко к системе, потенциал может быть приближенно представлен прямоугольной ступенчатой функцией [65], с высотой  $V_g$  и шириной  $L_g$  равной ширине электрода.

Для расчета проводимости необходимо построить эффективный Гамильтониан системы [66, 54, 56, 67], который является результатом проектирования всего Гильбертова пространства системы на внутреннее пространство области рассеяния (B) с использованием описанной в статьях [68, 69] проекционной техники Фешбаха. Эффективный Гамильтониан имеет следующий стандартный вид:

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_B - i\pi \widehat{W}\widehat{W}^+ \quad (3.6)$$

$$\widehat{H}_{eff} = E_{mn}\delta_{mm'}\delta_{nn'} - \sum_p \exp(ik_p) \sum_{C=L,R} W_{C,p}W_{C,p}^+, \quad (3.7)$$

где  $\widehat{H}_B$  — Гамильтониан закрытой области рассеяния, без подключенных к ней проводов,  $E_{mn}$  — собственные значения энергии закрытой области рассеяния, а  $\widehat{W}$  — матрица, описывающая связь собственных состояний области рассеяния с распространяющими решениями подключенных к ней полубесконечных проводов. Матрицы связи выражаются следующими соотношениями [56, 67]:

$$W_{mn} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \int_0^1 dx \psi_1(x) \frac{\partial \psi_{mn}(x, y=0, 1)}{\partial y} = \frac{2\pi n}{\sqrt{k_1}} \int_0^1 dx \psi_1(x) \phi_m(x) \quad (3.8)$$

Интерфейсы "волновод – резонатор", по которым проводится интегрирование, обозначены на рис. 1 пунктирными линиями.

Имея выражения для матричных элементов связи и зная гамильтониан закрытой области рассеяния, можно рассчитать коэффициенты прохождения и отражения системы при помощи формулы (2.30)

### 3.1.1 Общее в проводимости Z- и П-образных структур

Существует несколько закономерностей, общих для обоих типов волноводных структур. Во-первых, с увеличением расстояния между сгибами, увеличивается количество резонансных пиков, во-вторых, они становятся уже.

Первое обстоятельство объясняется тем, что с ростом  $L$  между сгибами может «поместиться» все большее число длин волн. Это поведение является типичным для проводимости так называемых double-barrier structure, где пики проводимости соответствуют стоячим волнам между барьерами, как показано на рис. 3.1. Видно, что такое поведение в равной степени свойственно как Z-образным волноводам, так и П-образным.

Явление сужения резонансных пиков упоминается в некоторых статьях [70, 71, 72, 73], но ни в одной из них нет четкого объяснения, почему это происходит. Дело в том, что резонансные ширины зависят от матричных элементов связи (3.8). В силу того, что в эту формулу входит продольная волновая функция области рассеяния, которая нормирована на  $\sqrt{L}$ , резонансные ширины обратно пропорциональны расстоянию между сгибами, что и приводит к сужению резонансов с ростом этого расстояния, как показано на рис. 3.2.

С точки зрения эксперимента, непрерывно менять расстояние между сгибами в такого рода электронных волноводах не представляется возможным, так как для каждого измерения пришлось бы изготавливать новую волноводную структуру. Существует более простой способ видоизменять продольную волновую функцию области рассеяния – при помощи потенциала управляющего электрода. Варьируя его высоту, можно менять эффективное расстояние между сгибами, что позволяет нужным образом контролировать резонансные ширины. Этот факт является ключевым моментом в процессе формирования связанных состояний в континууме, как будет показано далее в разделе 3.2.

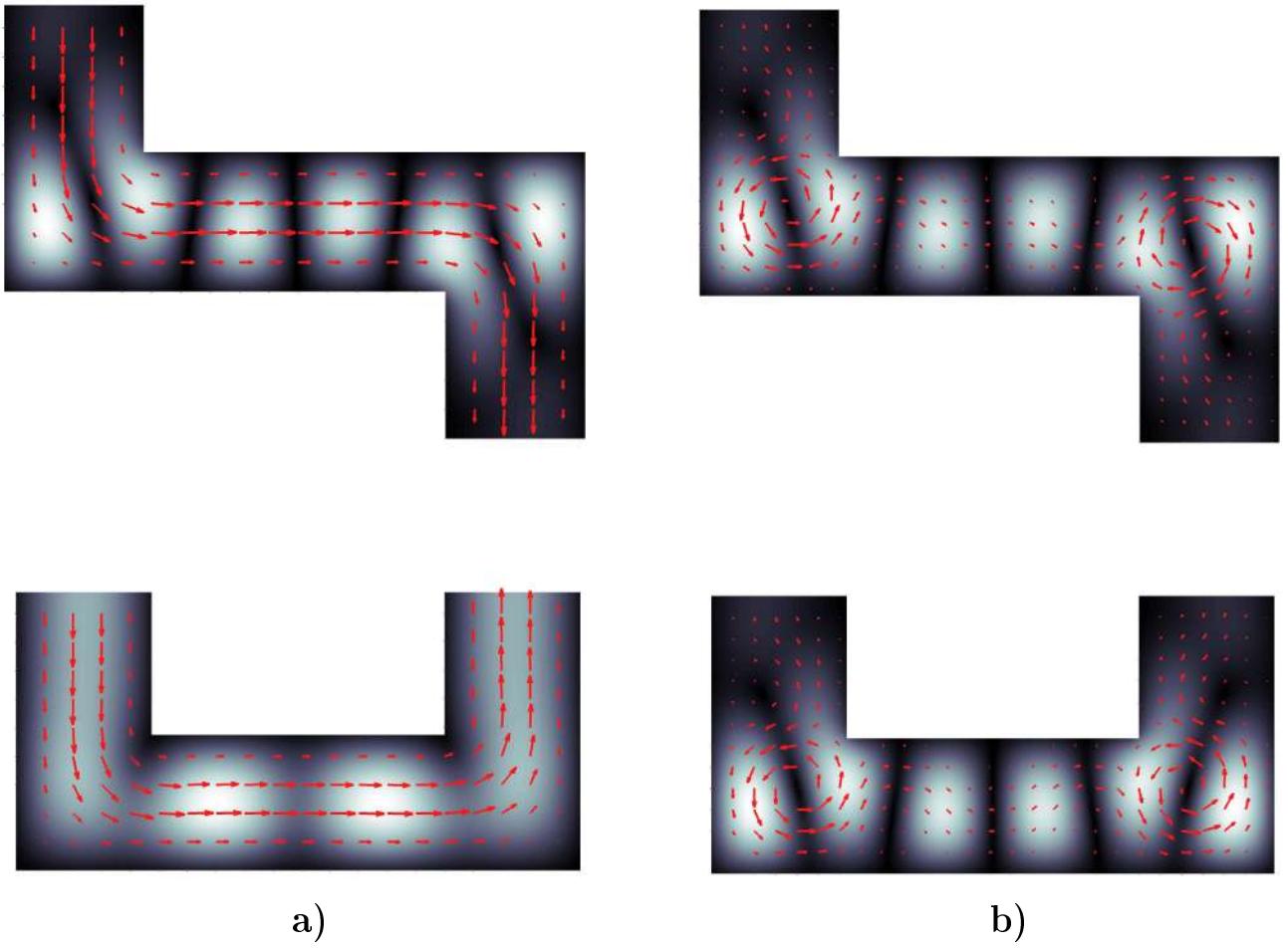


Рис. 3.1: Потоки(красные стрелки) и волновые функции рассеяния, соответствующие пикам проводимости в Z- и П-образных волноводных структурах при  $L = 4$ .  
а)  $E_F = 18.11$ , б)  $E_F = 32.33$

### 3.1.2 Различия в проводимости Z- и П-образных структур

Помимо прочего, на рис. 3.2 демонстрируется тот факт, что проводимость Z-образных структур отличается от проводимости П-образных, когда на процесс рассеяния начинает влиять второй канал, то есть, когда энергия падающего электрона близка к порогу второй зоны. Видно, что с увеличением расстояния между сгибами это отличие начинает сглаживаться.

На рис. 3.1а видно, что при энергиях, далеких от начала второй зоны и при достаточно большом расстоянии между сгибами, потоки находятся в ламинарном

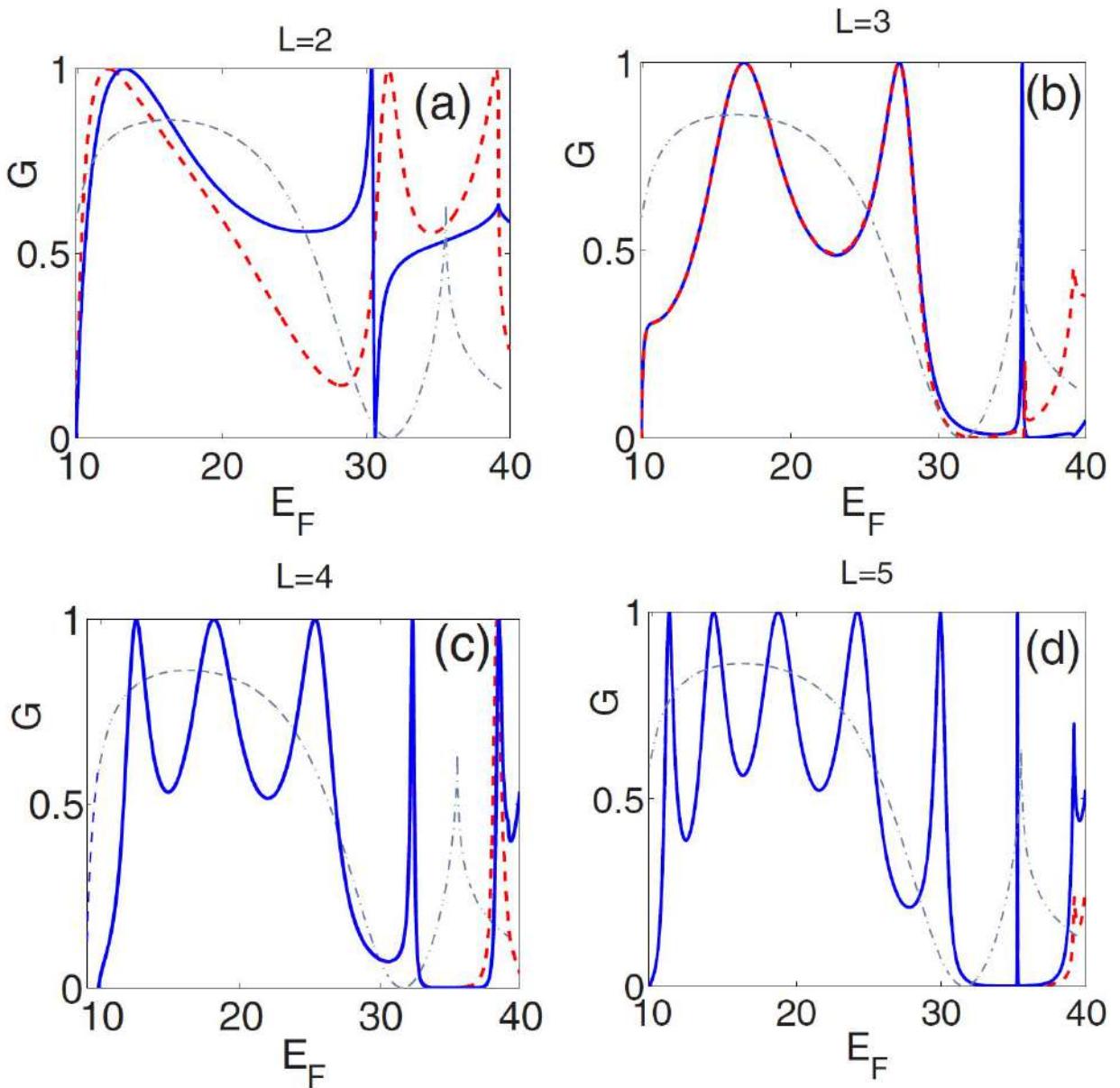


Рис. 3.2: Зависимость проводимости  $G$  от энергии  $E_F$  при различном расстоянии между сгибами. Синяя сплошная линия — для П-образного волновода, красная пунктирная — для Z-образного. Зеленой штрих-пунктирной линией обозначена проводимость единственного сгиба. а)  $L = 2$ , б)  $L = 3$ , в)  $L = 4$ , г)  $L = 5$ .

режиме, а в волновую функцию рассеяния дает вклад только функция  $\psi_{m1}(x, y)$ , соответствующая первому каналу. Таким образом, волноводы представляют собой одномерную квантовую проволоку, свойства которой никак не зависят от киральной последовательности сгибов. Но при энергиях близких ко второму каналу

$E = 4\pi^2$ , вклад волновой функции этого канала  $\psi_{m2}(x, y)$  становится значимым, что открывает возможность для вихревого движения потоков. Известно, что такое явление имеет место в волноводах с единственным сгибом [74]. Направление вращения этих вихрей зависит от киральности сгиба. Так как в П-образных структурах оба сгиба имеют одну и ту же киральную последовательность, направление вращения вихрей в них одинаковое: либо оба вращаются по часовой стрелке, либо против. В Z-образных волноводах, из-за того, что сгибы имеют различную киральную последовательность, вихри вращаются в разных направлениях, как показано на рис. 3.1b. Это обстоятельство приводит к различиям в проводимости Z- и П-образных волноводов.

В предельном случае, когда расстояние между сгибами очень мало, поведение потоков в разных типах волноводов в корне отличается даже при энергиях далеких от порогового значения для второй зоны, как показано на рис. 3.3, что приводит к различиям проводимости Z- и П-образных волноводов во всей зоне распространения, а не только вблизи порога второго канала - рис. 3.2а и 3.14.

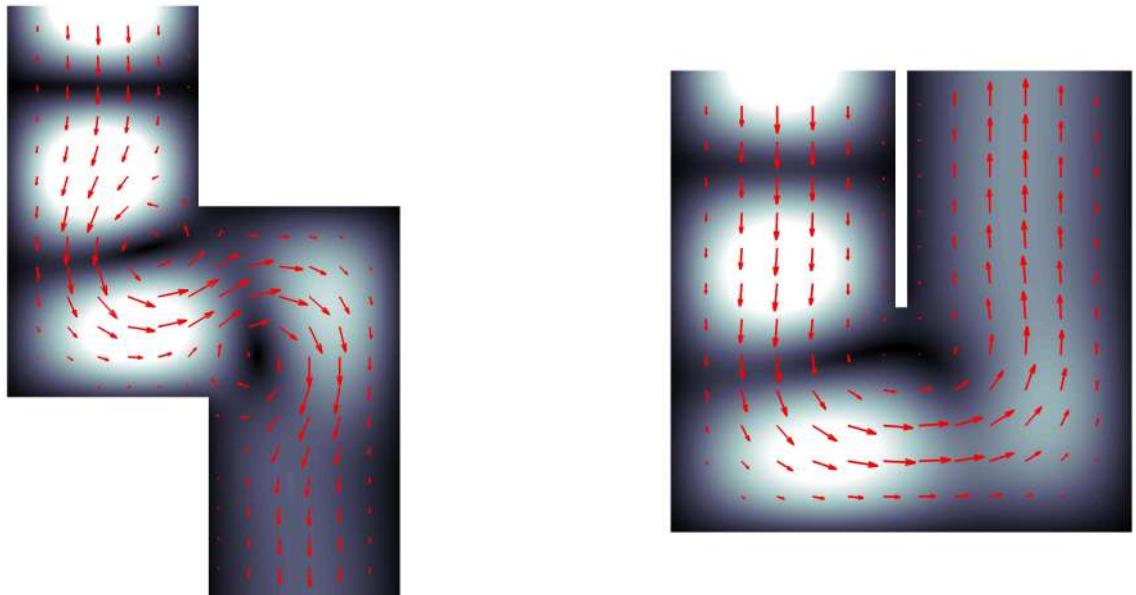


Рис. 3.3: Потоки(красные стрелки) и волновые функции рассеяния, соответствующие пикам проводимости в Z- и П-образных волноводных структурах при  $L = 2$ .

На рис. 3.4. показана проводимость в первом канале для обоих типов волноводов в зависимости от двух параметров – энергии Ферми и высоты потенциала для ширины области рассеяния  $L=3$ . В целом, проводимость обоих типов структур ведет себя похожим образом для обоих типов волноводов. Однако, характеры расталкивания резонансов кардинальным образом отличаются, что, как будет показано далее, сказывается на количестве ССК и их положении.

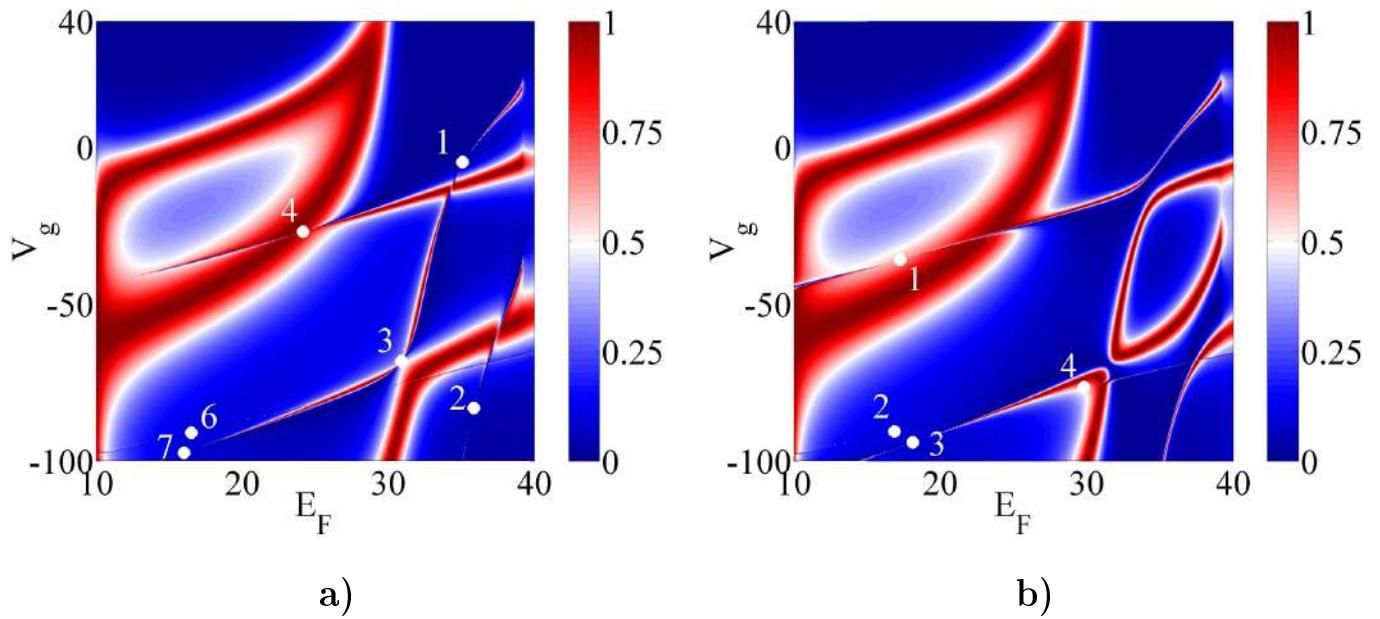


Рис. 3.4: Проводимость Z-образного(a) и П-образного(b) волноводов в зависимости от энергии Ферми и высоты потенциала. Белыми кругами обозначены позиции ССК.

### 3.2 Связанные состояния в континууме

На рис. 3.4 белыми кружками изображены точки, соответствующие коллапсам Фано резонанса, в которых нуль проводимости совпадает с единицей. Это и есть точки ССК, параметры которых можно найти используя необходимое и достаточное условие (2.32). Существует также альтернативный подход, который заключается в вычислении полюсов S-матрицы и нахождении условия, при котором полюс уходит на реальную ось. Очевидно, что оба метода приводят к аналогичным

результатам.

Поведение собственных значений  $\hat{H}_{eff}$  изображено на рис. 3.6. С ростом высоты потенциала продольные волновые функции области рассеяния выталкиваются из-под области с наложенным потенциалом, вследствие чего вдоль интерфейса "волновод – область рассеяния" постепенно накапливаются нодальные линии, как схематично показано на рис. 3.5. Поэтому интегралы перекрывания в (3.8) ведут себя не монотонно (рис. 3.8b):

$$J_m = \int_0^1 dx \psi_1(x) \phi_m(x) = \sqrt{2} \int_0^1 dx \sin(\pi x) \phi_m(x) \quad (3.9)$$

Этим можно объяснить осциллирующее поведение зависимости резонансных ширин от высоты потенциала  $V_g$  (рис. 3.6(a)). Красными кругами на рис. 3.7 обозначены точки ССК, в которых ширины резонансов обращаются в нуль.

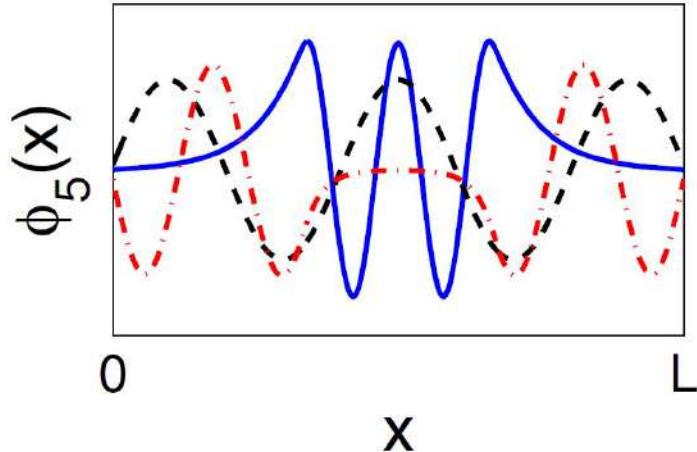


Рис. 3.5: Эволюция продольной волновой функции  $\phi_5(x)$  области рассеяния с ростом высоты потенциала  $V_g$ , где синяя линия соответствует  $V_g = -200$ , черная —  $V_g = 0$ , а красная —  $V_g = 200$

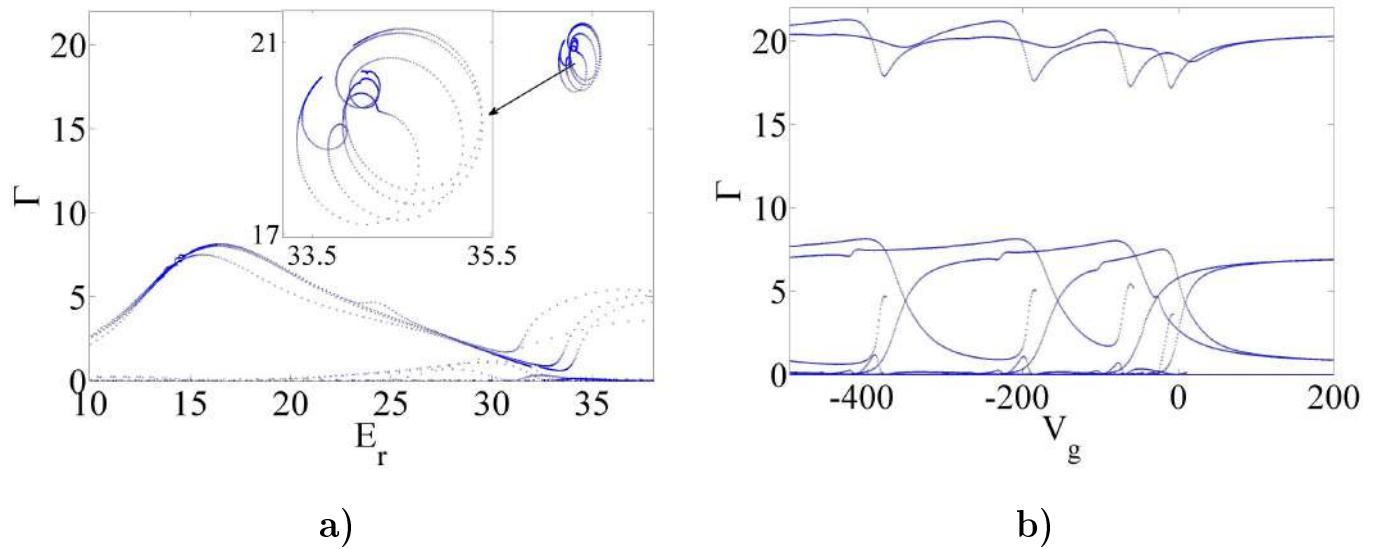


Рис. 3.6: а) Эволюция резонансных ширин и позиций в Z-образном волноводе при варьировании потенциала управляющего электрода  $V_g$  в диапазоне  $[-500, 200]$  при  $L = 3$ . б) Зависимость ширин резонансов от высоты потенциала управляющего электрода.

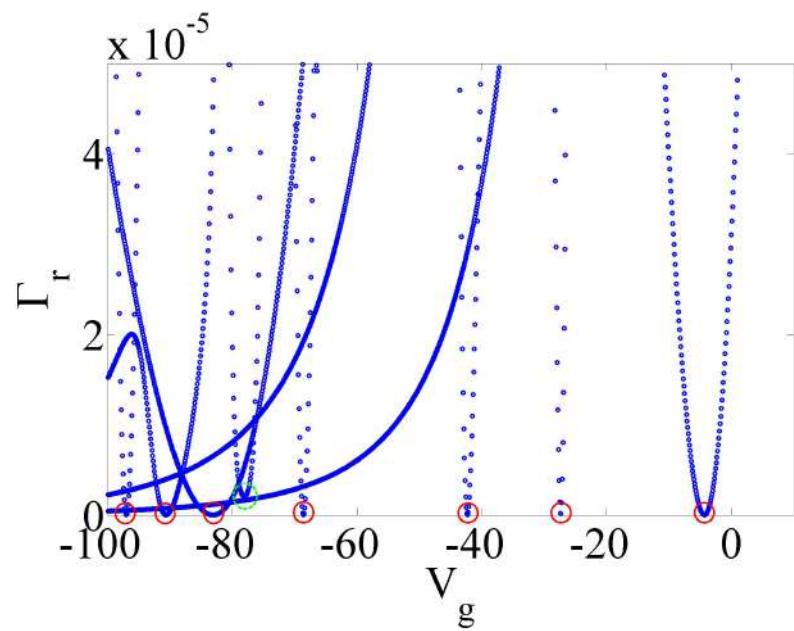


Рис. 3.7: Зависимость ширин резонансов от высоты потенциала управляющего электрода. Красными кругами обозначены точки ССК, зеленым — точка квази-ССК.

В Z- и П-образных системах могут возникать ССК двух разных типов. Первый тип (рис. 3.9) — ССК, возникающие за счет механизма Фабри-Перо. Второй тип (рис. 3.10) напоминает ССК, рассмотренные Робником [22] в прямолинейном квантовом волноводе с отрицательным потенциалом  $V_g$  (рис.1.2). Однако для обращения в нуль матричного элемента связи (3.8) необходимо, чтобы продольная волновая функция области рассеяния  $\phi_m(x)$  имела нодальную линию при  $x = 1/2$ . Численные расчеты показывают, что это может произойти только в случае, когда энергия Ферми лежит выше порога второго канала  $E_F > 4\pi^2$ . Это продемонстрировано на рис. 3.8. Таким образом, ССК при  $V_g < 0$  в данном случае не являются защищенными по симметрии, а реализуются посредством механизма полной деструктивной интерференции Фридриха-Вингена.

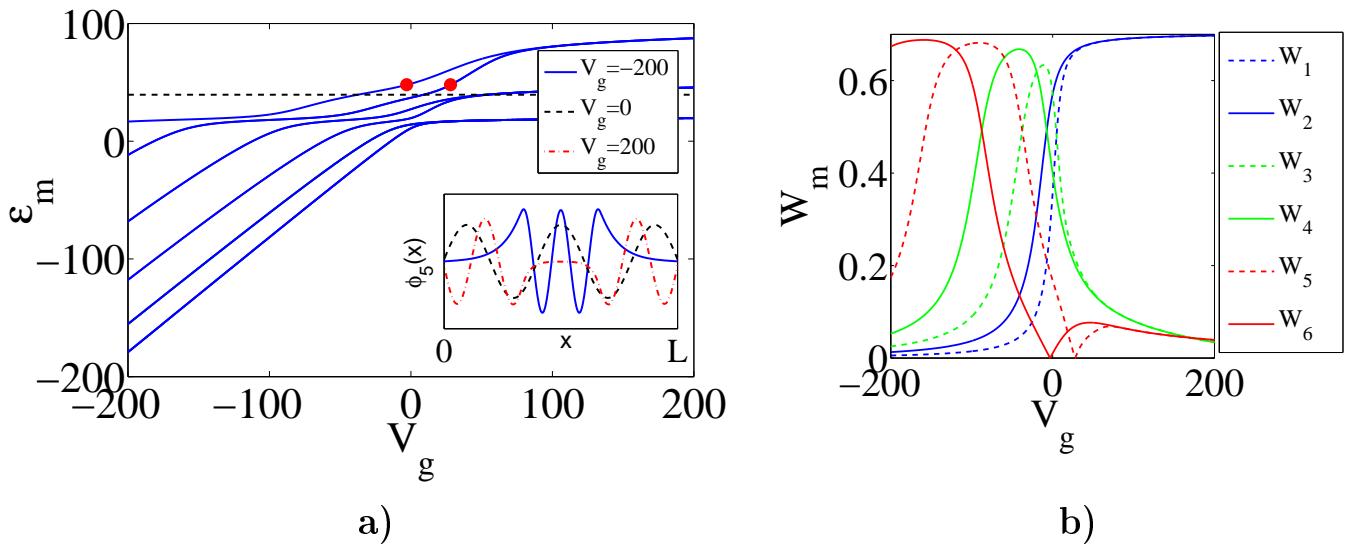


Рис. 3.8: а) Зависимость первых шести уровней энергии от высоты потенциала  $V_g$ . Пунктирная линия показывает порог второго канала. Красные точки соответствуют параметрам, при которых матричный элемент связи данного состояния  $W_m$  обращается в нуль. б) Интегралы перекрывания (3.9) для шести первых собственных мод области рассеяния.

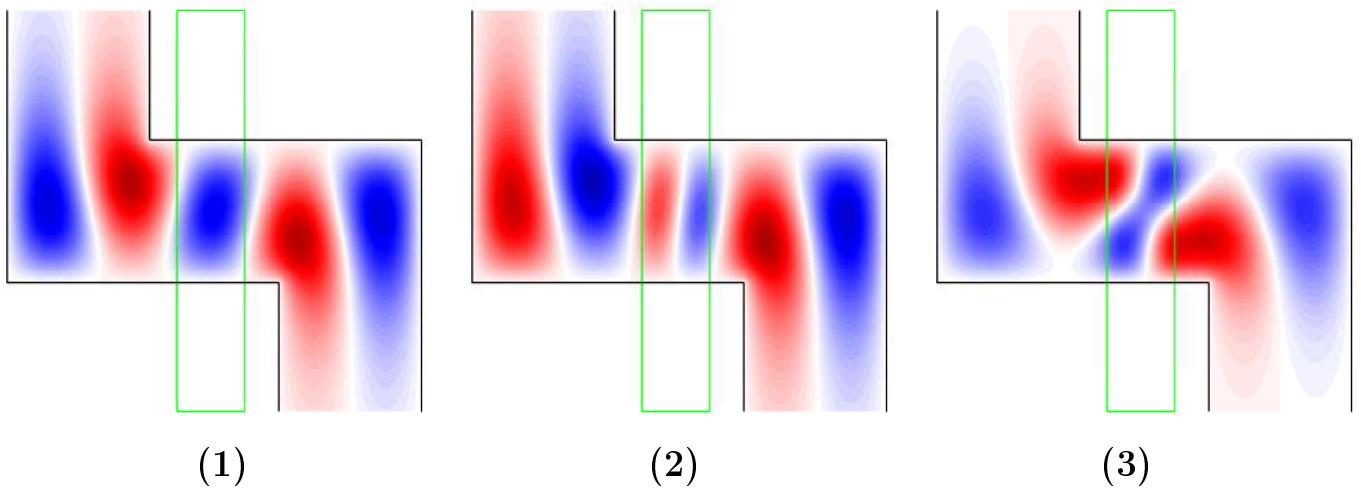


Рис. 3.9: Волновые функции ССК, возникающие за счет механизма Фабри-Перо в Z-образной структуре при  $L = 3$ . (1)  $E = 35.066, V_g = -4.8$ ; (2)  $E = 35.845, V_g = -83.11$ ; (3)  $E = 30.8864, V_g = -68.205$ .

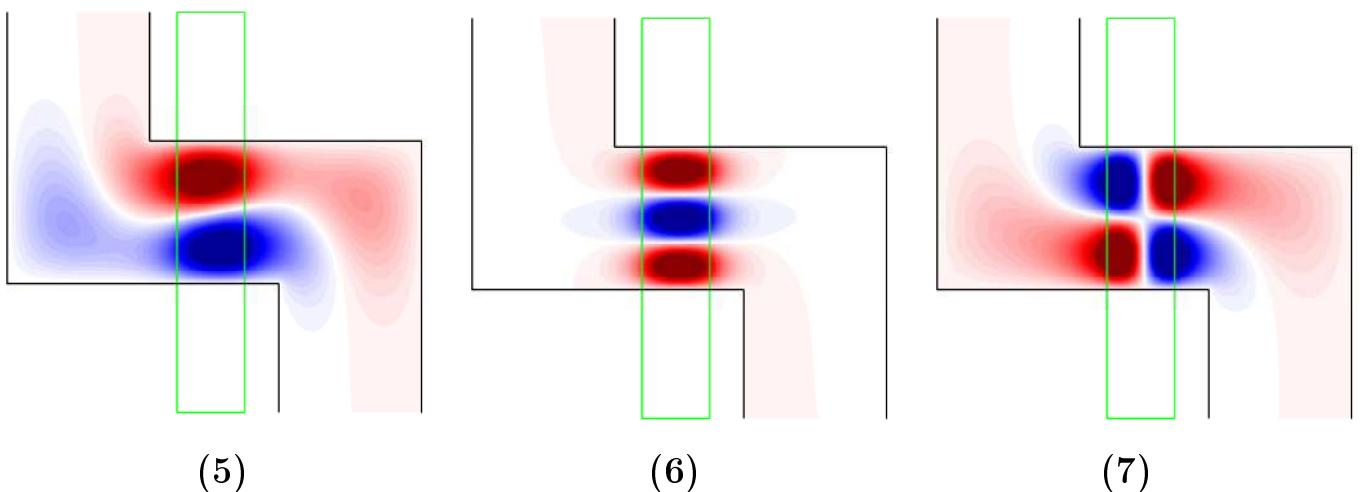


Рис. 3.10: Волновые функции ССК, возникающие за счет интерференционного механизма Фридриха-Винтгена в Z-образной структуре при  $L = 3$ . (5)  $E = 24.15, V_g = -26.98$ ; (6)  $E = 16.49, V_g = -90.98$ ; (7)  $E = 16.023, V_g = -97.37$ .

На рис. 3.11 и 3.12 показаны коэффициенты разложения волновых функций

ССК по собственным функциям области рассеяния  $\Psi_{m,n}(x, y)$  (3.4)

$$\Psi_{BSC}(x, y) = \sum_{m,n=1} \alpha_{m,n} \Psi_{m,n}(x, y) \quad (3.10)$$

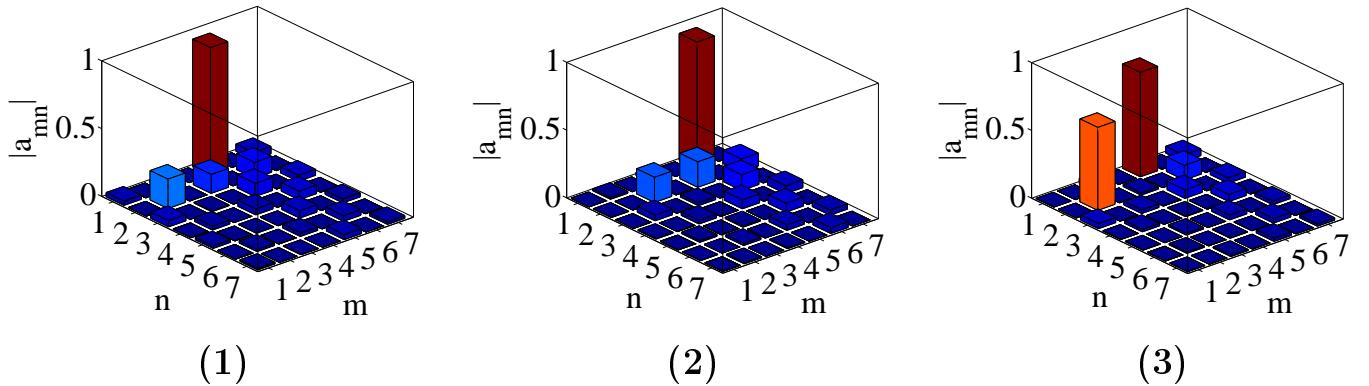


Рис. 3.11: Модальное разложение ССК 1-3, образованных за счет механизма Фабри-Перо.

Рис. 3.12 служит дополнительным аргументом в пользу того, что ССК второго типа образуются за счет интерференционного механизма Фридриха-Винтгена. Несмотря на то, что волновые функции ССК 5-7, изображенные на рис. 3.10, почти полностью локализованы в области под потенциалом, а основной вклад привносит только лишь одна собственная мода области рассеяния, видно, что имеются экспоненциально малые вклады и от других собственных мод.

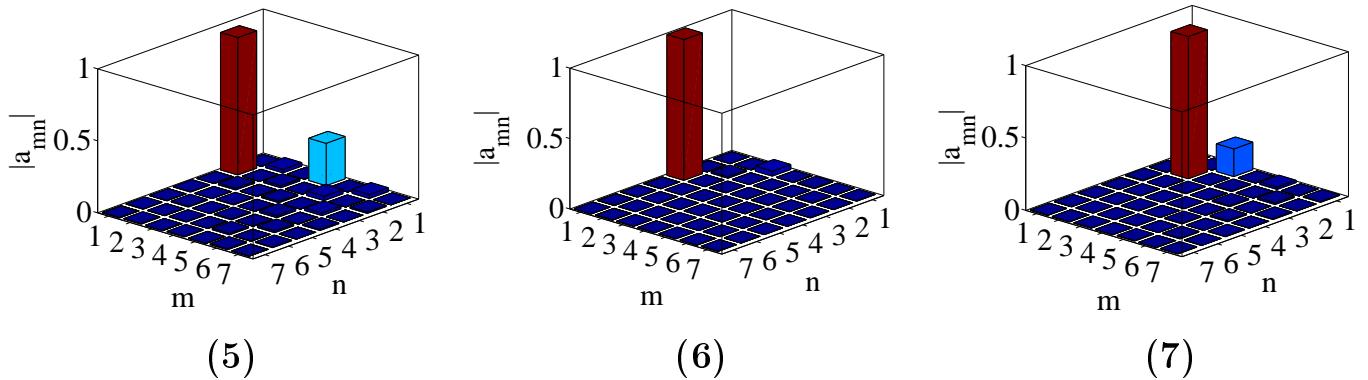


Рис. 3.12: Модальное разложение ССК 5-7, образованных за счет механизма Фридриха-Винтгена.

Волновые функции ССК в П-образной структуре показаны на рис. 3.13. Для  $L = 3$  и выбранного диапазона высоты потенциала  $V_g$ , в данной структуре не наблюдается ССК, реализованных за счет механизма Фабри-Перо, однако, они наблюдаются при  $L = 5$  что в очередной раз указывает на отличие П-образных структур от Z-образных.

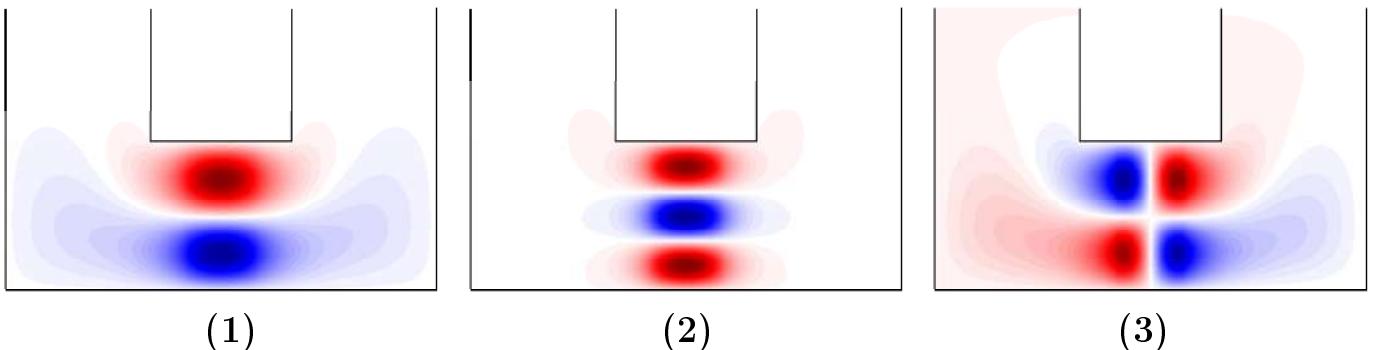


Рис. 3.13: Волновые функции ССК для П-образной структуры при  $L = 3$ . (1)  $E = 17.24, V_q = -35.86$ ; (2)  $E = 16.86, V_q = -90.58$ ; (3)  $E = 18.09, V_q = -94.11$ .

Отдельно имеет смысл рассмотреть предельный случай, когда расстояние между сгибами минимально ( $L = 2$ ), так как ранее (в разделе 3.1.2) уже было отмечено, что в этом случае свойства П-образных и Z-образных структур демон-

стрируют наибольшие различия. На рис. 3.14 показаны графики проводимости Z- и П-образной структуры в зависимости от энергии Ферми и высоты потенциала. Видно, что картины проводимости существенно отличаются даже при энергиях, близких к началу первой энергетической зоны.

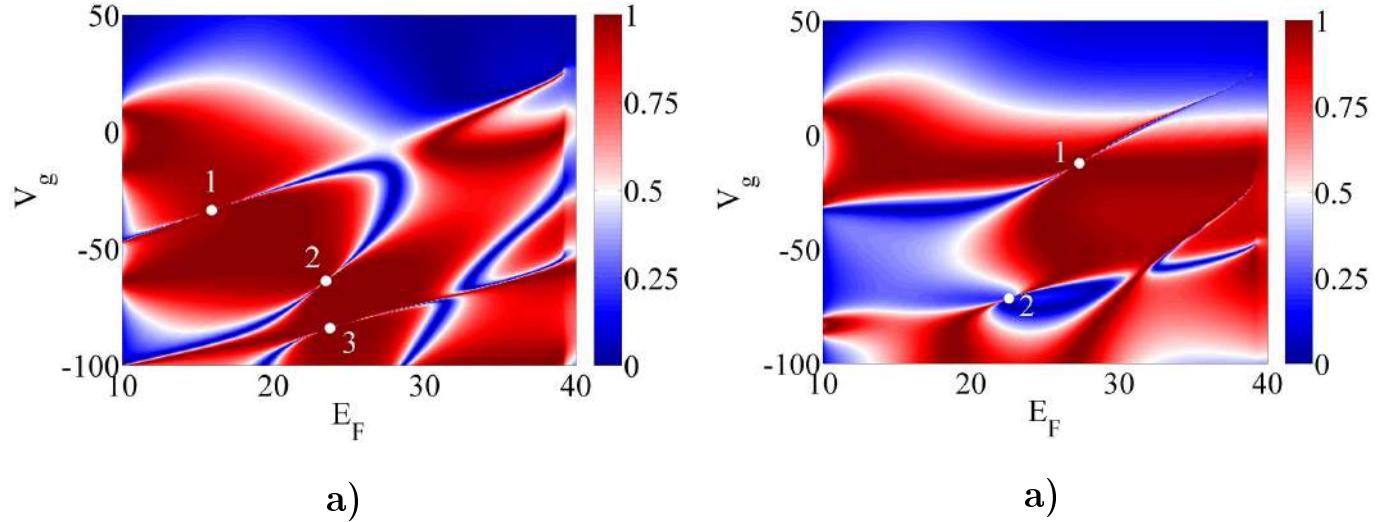


Рис. 3.14: Зависимость проводимости от энергии Ферми  $E_F$  и высоты потенциала  $V_g$  для Z-образной(a) и П-образной (b) структур при минимальном расстоянии между сгибами ( $L = 2$ ). Белыми кругами показаны точки коллапсов резонанса Фано, в которых реализуются связанные состояния в континууме.

На рис. 3.15 и 3.16 показаны волновые функции ССК и модальные разложения для Z-образной структуры. Видно, что в рамках двухуровневого подхода Фридриха-Винтгена можно описать только первое ССК, энергия которого существенно ниже оставшихся двух. С ростом же энергии становятся более существенными вклады остальных собственных функций области рассеяния.

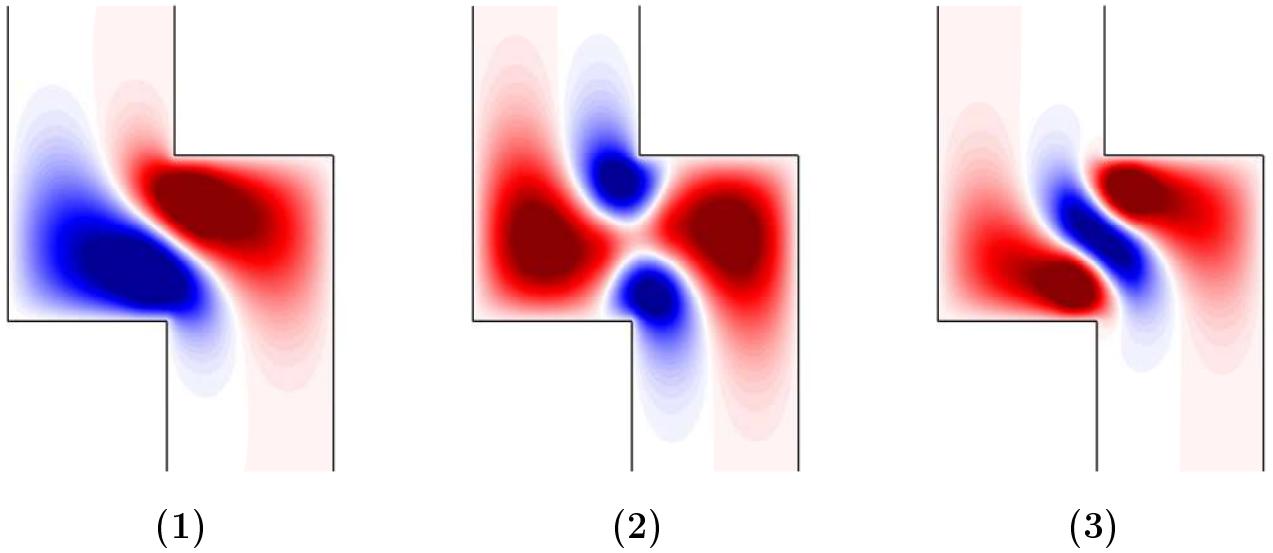


Рис. 3.15: Волновые функции ССК, отмеченных точками на рис. 3.14а, в Z-образном волноводе при минимальном расстоянии между сгибами  $L = 2$ . (1) $E = 15.9213, V_g = -33.54$ ; (2) $E = 23.464, V_g = -63.75$ ; (3) $E = 23.73, V_g = -83.932$ .

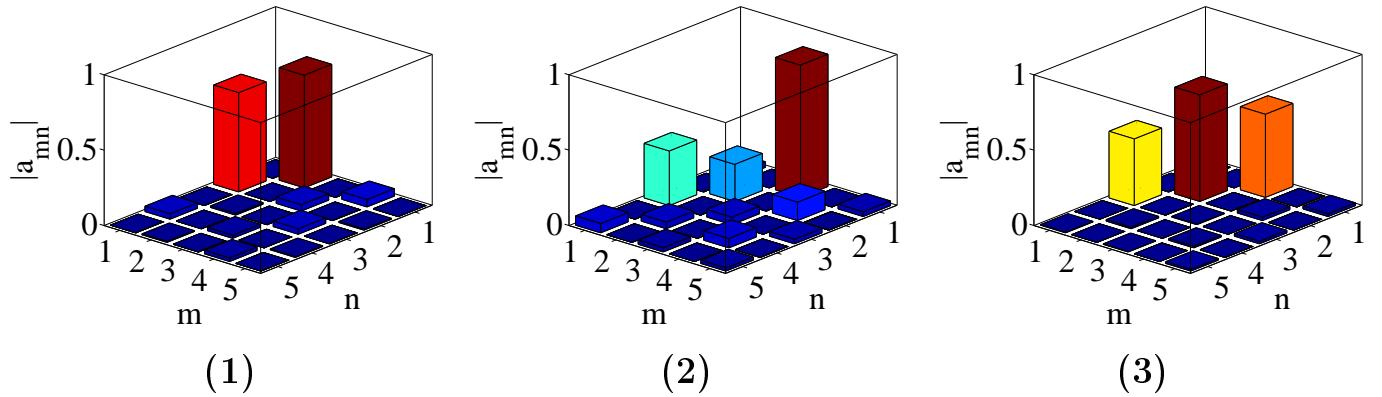


Рис. 3.16: Модальные разложения ССК, отмеченных точками на рис. 3.14а, в Z-образном волноводе при минимальном расстоянии между сгибами  $L = 2$ .

В то же время, для П-образной структуры двухуровневое приближение вполне применимо. Более того, существенным отличием от Z-образной структуры является тот факт, что вклад в волновую функцию ССК привносят только симметричные по оси  $x$  собственные функции области рассеяния  $\phi_m(x)$ . Волновые функции ССК и соответствующие им картины модального разложения для

П-образной структуры приведены на рис.3.17.

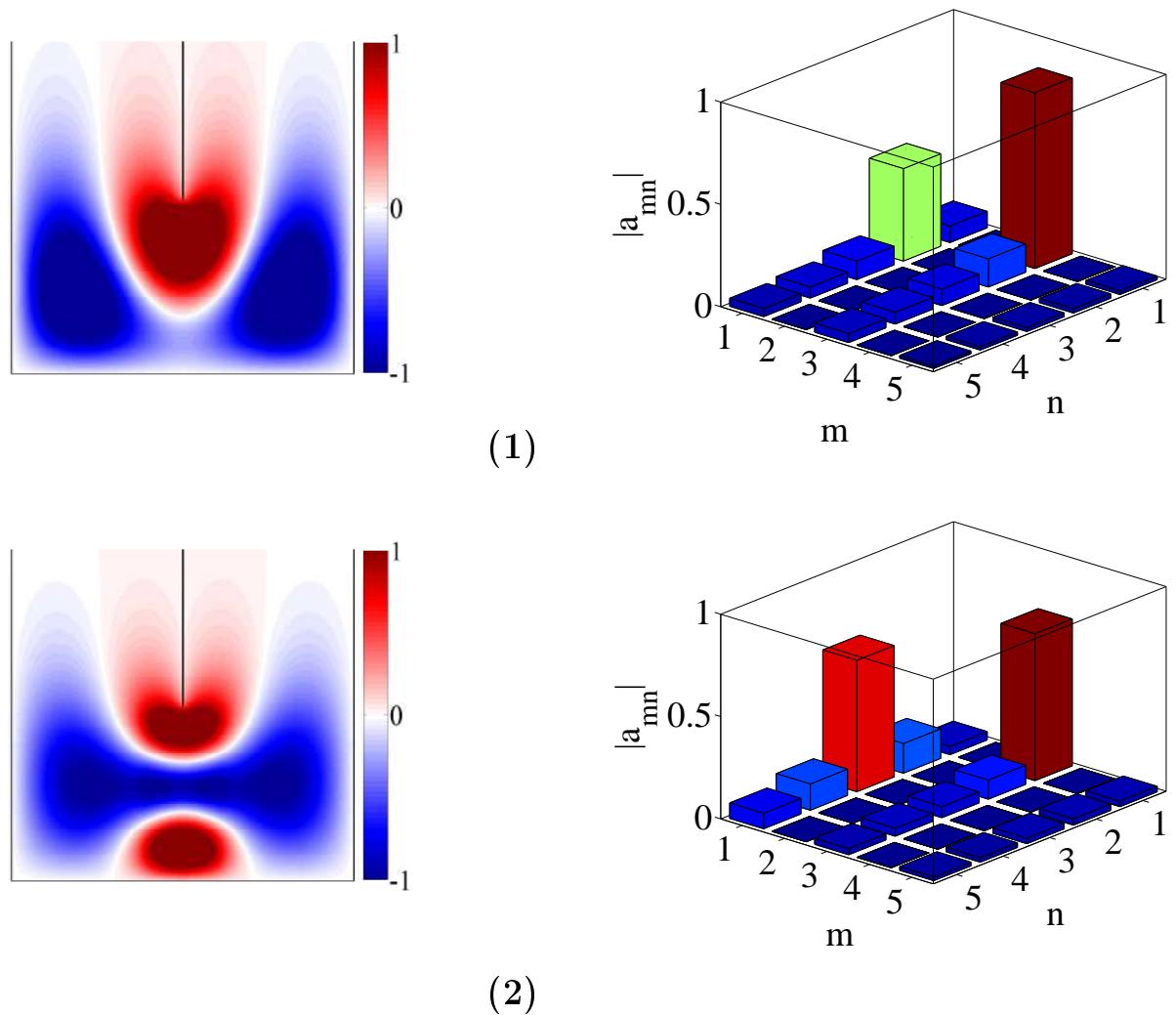


Рис. 3.17: Волновые функции и модальные разложения ССК, отмеченных на рис. 3.14b, в П-образном волноводе при минимальном расстоянии между сгибами  $L = 2$ . (1) $E = 27.3, V_g = -12.31$ ; (2) $E = 22.55, V_g = -71.34$ .

## Глава 4

### Биллиард Синая

Известно, что при текущем уровне развития науки и техники невозможно создавать идеальные (полностью однородные) материалы. В реальных системах всегда будут присутствовать примеси других элементов, что автоматически делает рассматриваемые модели неинтегрируемыми, то есть такими, в которых переменные в уравнении Шредингера не разделяются. Изучение связанных состояний в континууме в таких системах было решено начать с "мягкого" биллиарда Синая, который отличается от классического конечностью наложенного потенциала. Рассматриваемая система представляет собой прямоугольный биллиард с подключенными к нему двумя полубесконечными проводами и наложенным потенциалом круговой симметрии(рис. 2). Форма потенциала выбрана в виде распределения Гаусса:

$$V(x, y) = V_g \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{R^2} \right] \quad (4.1)$$

Метод эффективного Гамильтониана является неоценимым инструментом также и в расчетах, проводимых для неинтегрируемых систем. С учетом наложенного потенциала, он принимает вид:

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_B - i\pi \widehat{W} \widehat{W}^+ + \widehat{V}, \quad (4.2)$$

где  $H_B$  — Гамильтониан закрытого биллиарда, а  $\widehat{V}$  — оператор, описывающий наложенный потенциал.

Распространяющиеся решения в проводах известны и записываются анало-

гично формулам (3.1) и (3.2):

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{\pi k_p}} \exp(ik_p x) \sqrt{\frac{1}{L_w}} \sin\left(\frac{\pi p y}{L_w}\right) \quad (4.3)$$

Собственные функции биллиарда  $\psi_b$ , аналогично продольным функциям Z- и П-образных волноводов, не могут быть найдены аналитически и являются решениями уравнения:

$$[-\nabla^2 + V(x, y)] \psi_b(x, y) = E_b \psi_b(x, y) \quad (4.4)$$

Выражение для матрицы связи выглядит следующим образом[67, 56]:

$$W_{b,p_c} = \sqrt{\frac{1}{k_p}} \int_0^d dy \phi_p(y) \frac{\partial \psi_b(x, y)}{\partial x} \Big|_{x=x_b}, \quad (4.5)$$

где  $C = L, R$  нумерует границы между левым и правым проводами и резонатором. Эти границы показаны на рис. 2 пунктирными линиями.

Так как резонансные свойства открытых биллиардов изучаются преимущественно при помощи компьютерного моделирования с использованием конечно-разностных схем, эффективный Гамильтониан используется в своей tight-binding формулировке:

$$\hat{H}_{eff} = \hat{H}_B - v^2 \sum_p \sum_{C=L,R} \sum_{j_y=1}^{N_w} \exp(ik_p a_0) \phi_p(j_y) \phi_p(j_y)^+ \delta_{j_x, j_C}, \quad (4.6)$$

где  $H_B$  — Гамильтониан закрытого биллиарда Синая.  $\mathbf{j} = (j_x, j_y)$  — вектор, пробегающий по дискретной сетке  $x = a_0 j_x$ ,  $y = a_0 j_y$ , где  $j_x = 1, 2, \dots, N_x$ ,  $j_y = 1, 2, \dots, N_y$ ,  $N_x, N_y$  — численные размеры биллиарда, а  $N_w = 1/a_0$  — численная ширина волноводов.

## 4.1 Трансмиссионные свойства

Принципиальным отличием неинтегрируемых систем от интегрируемых является то, что в них не происходит пересечения собственных уровней одной сим-

метрии, они всегда испытывают расталкивание — avoid crossing. На рис. 4.1 представлена зависимость логарифма проводимости "мягкого" биллиарда Синая от энергии и высоты потенциала. Линиями разных цветов обозначены резонансные состояния различной симметрии. Хорошо видно, что они не пересекаются.

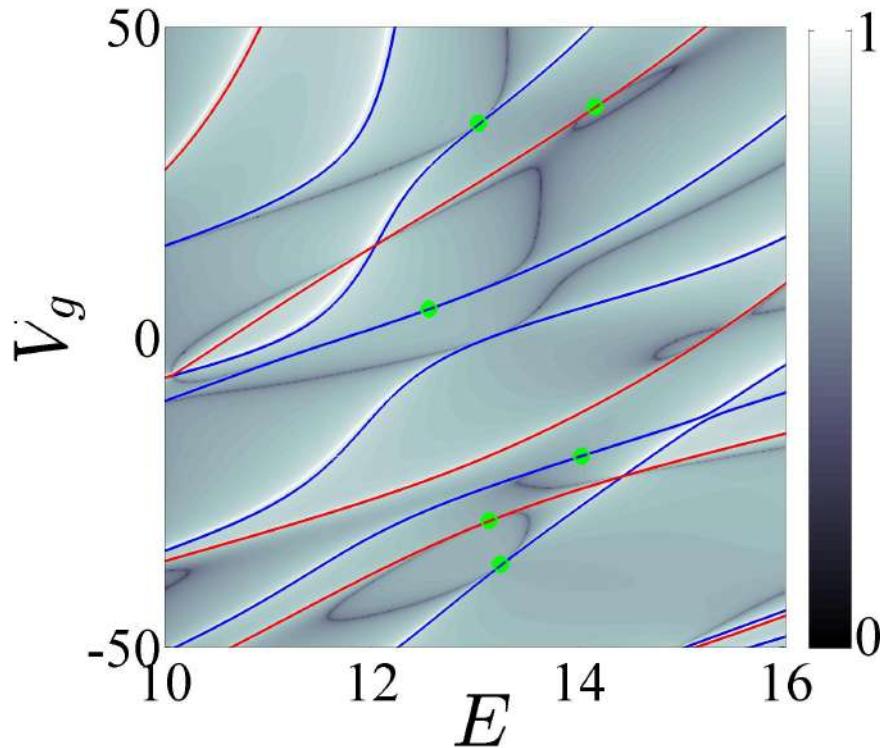


Рис. 4.1: Логарифм проводимости в биллиарде Синая в зависимости от энергии и высоты потенциала. Потенциал расположен в соответствии с вариантом (4), изображенным на рис. 4.2. Кругами отмечены точки ССК, линиями разных цветов — резонансы, соответствующие волновым функциям различной симметрии.

Как и в интегрируемых системах, возникновение ССК сопровождается явлением коллапса резонанса Фано, несмотря на то, что, как будет показано далее, в основе лежит иной механизм их формирования. На рис. 4.1 хорошо видно, что позиции ССК находятся в точках пересечения нуля проводимости и ее единицы.

## 4.2 Связанные состояния в континууме

Важную роль играет расположение потенциала с точки зрения симметрии. Существует четыре принципиально различных варианта, изображенные на рис. 4.2 — потенциал может быть:

1. расположен случайным образом;
2. расположен строго в центре прямоугольного биллиарда;
3. сдвинут из центрального положения вдоль оси транспорта;
4. сдвинут из центрального положения поперек оси транспорта.

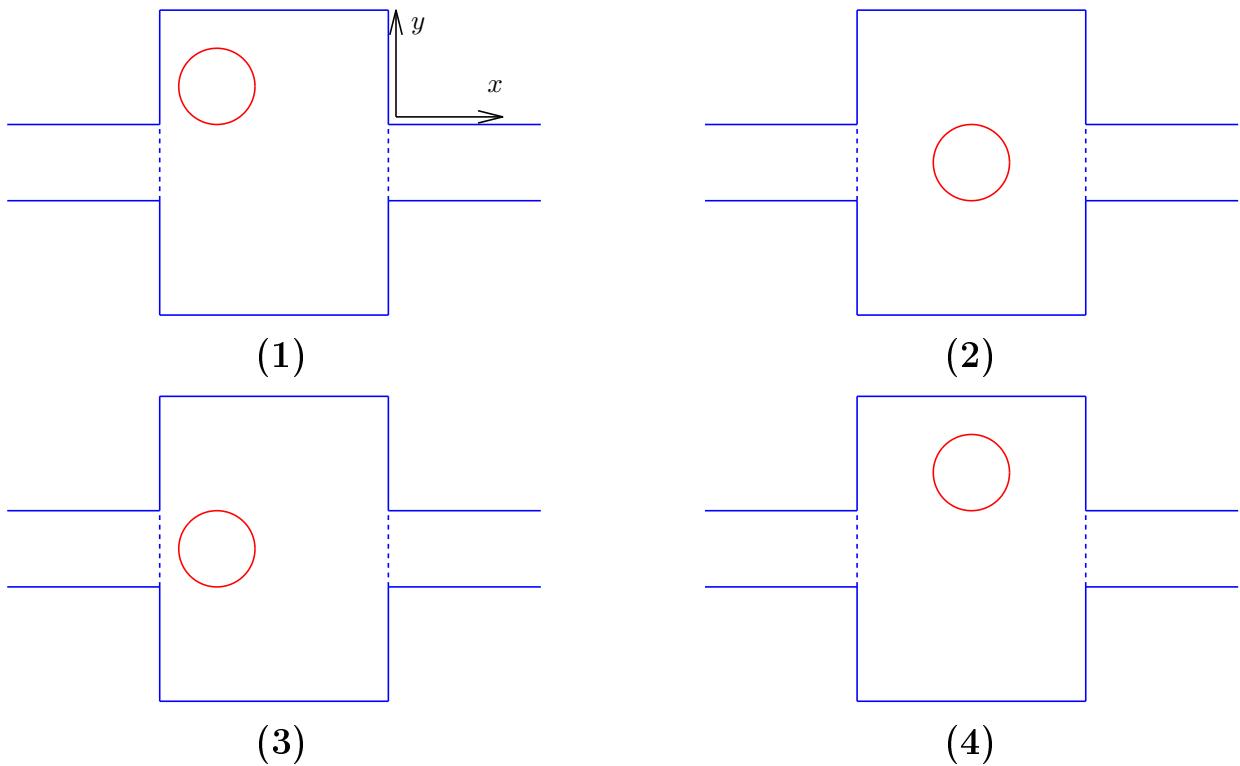


Рис. 4.2: Различные варианты расположения потенциала с точки зрения симметрии в прямоугольном биллиарде.

В случаях 1 и 3 из-за несимметричного расположения потенциала относительно проводов, матрицы связи левого и правого волноводов с биллиардом становятся

различными, что приводит к удвоению числа континуумов. В этом случае добиться обращения в нуль интеграла перекрывания сразу с левым и правым проводами при варьировании одного параметра системы невозможно, и в системе могут образовываться только защищенные по симметрии ССК, что проиллюстрировано графиками зависимости ширин резонансов от высоты потенциала — рис. 4.3. На этом рисунке, в случае (а) защищенные по симметрии ССК образуются только при  $V_g = 0$ , а в случае (б) все нечетные собственные состояния биллиарда являются защищенными по симметрии независимо от высоты потенциала, что происходит в силу его симметричного расположения относительно замены  $y \rightarrow -y$ .

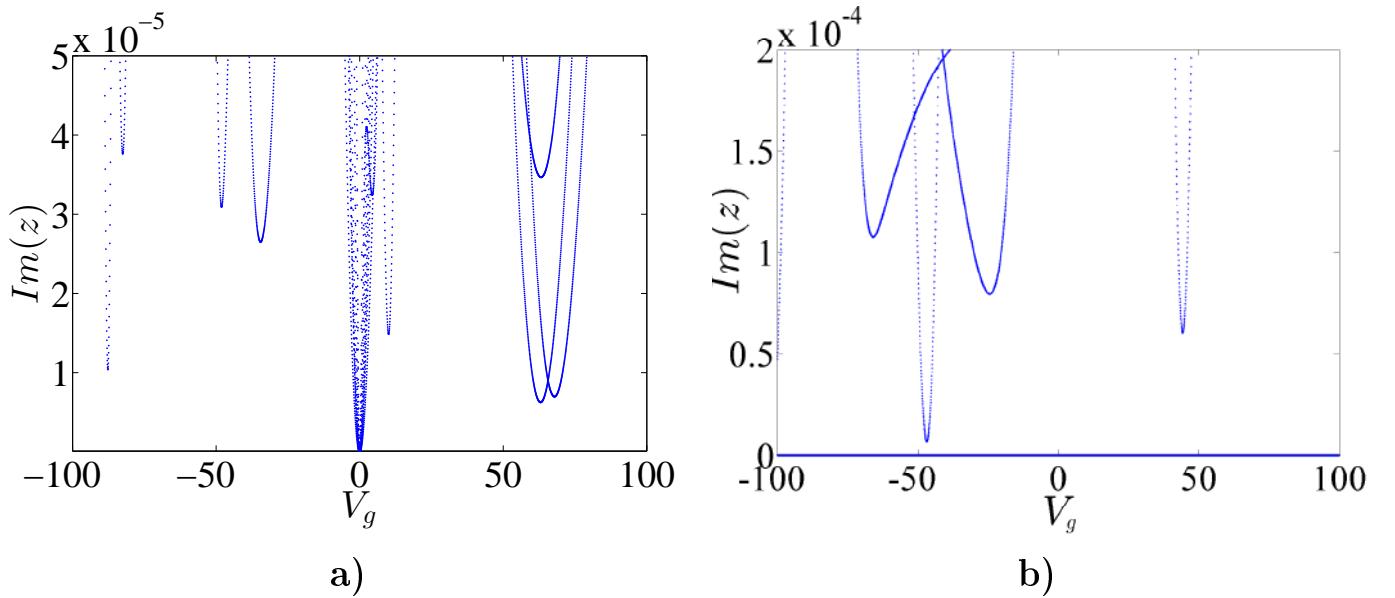


Рис. 4.3: Зависимость ширин резонансов  $\text{Im}(z)$  от высоты потенциала  $V_g$ . а) Для случая случайного расположения потенциала (рис. 4.2(1)). б) Для случая, когда потенциал сдвинут из центра биллиарда вдоль оси транспорта (рис. 4.2(3)).

Оставшиеся два варианта расположения потенциала представляют больший интерес. Зависимость ширин резонансов от высоты потенциала для случаев 2 и 4 изображена на рис. 4.4. Кругами отмечены позиции ССК, т.е. точки, в которых  $\text{Im}(z) = 0$ .

В случае, когда потенциал сдвинут из центра вдоль оси, перпендикулярной

оси транспорта, собственные функции делятся на четные и нечетные  $\psi(x, y) = \pm\psi(-x, y)$ . При этом собственные уровни каждого неприводимого представления в зависимости от высоты потенциала не пересекаются, а испытывают расталкивание (avoid crossing) — рис. 4.5. Тем не менее, несмотря на отсутствие вырождения, в системе имеется большое количество связанных состояний в континууме. Четные ССК отсортированы по энергии и отмечены кругами на рис. 4.5а, а нечетные на рис. 4.5б. Соответствующие значения энергии Ферми  $E_F$  и высоты потенциала  $V_g$  приведены в таблицах 4.1 и 4.2.

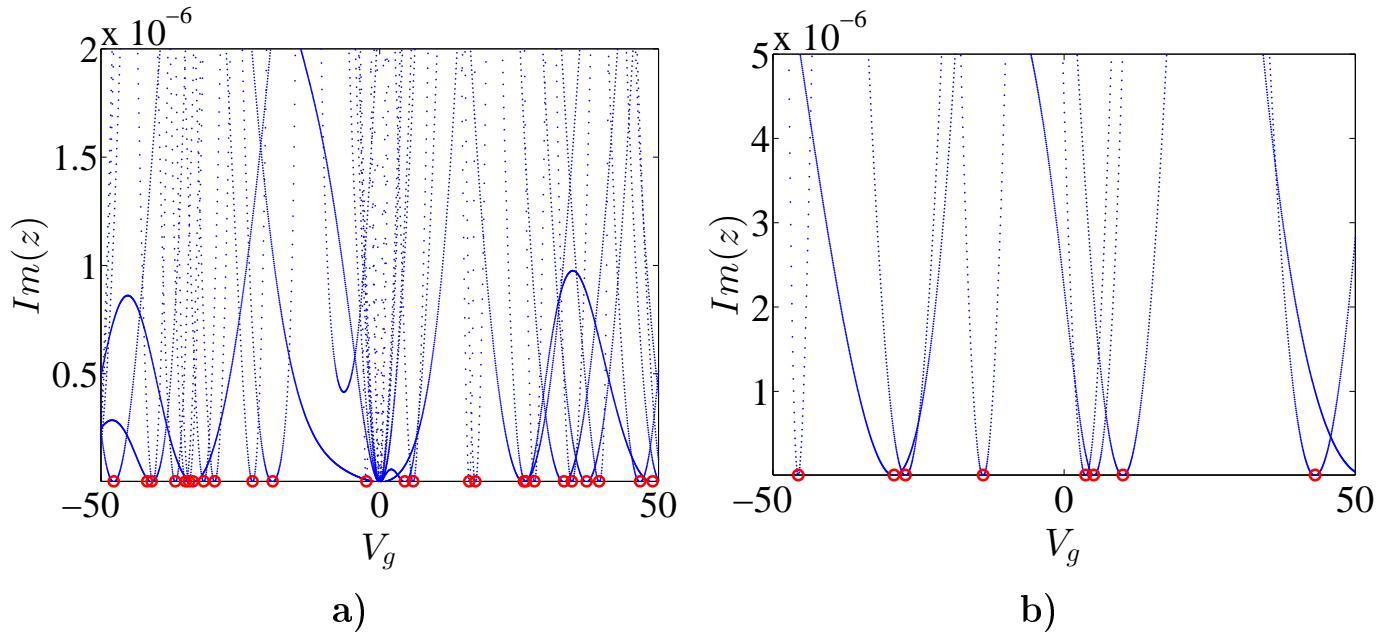


Рис. 4.4: Зависимость ширин резонансов от высоты потенциала  $V_g$ . a) Для случая, когда потенциал сдвинут из центра биллиарда вдоль оси, перпендикулярной оси транспорта (рис. 4.2(4)). б) Для случая, когда потенциал расположен строго в центре биллиарда (рис. 4.2(2)).

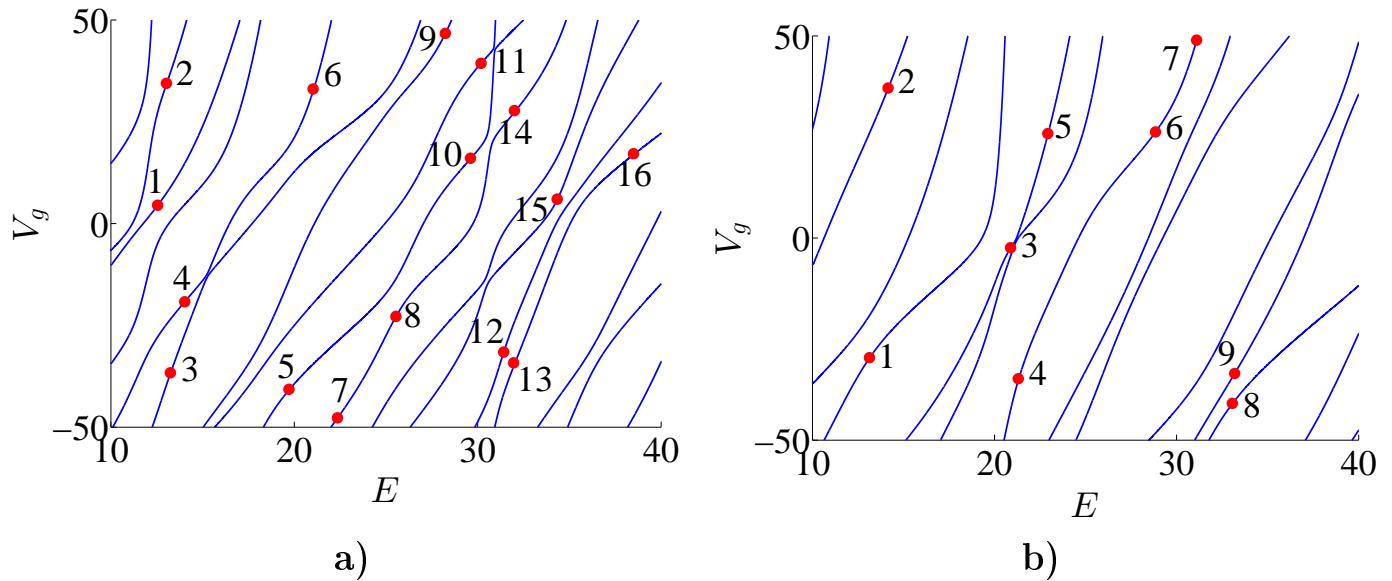


Рис. 4.5: Зависимость собственных уровней энергии закрытого "мягкого" биллиарда Синая от высоты потенциала  $V_g$  для четвертого случая расположения потенциала (рис. 4.2(4)). а) Для четных, б) для нечетных по отношению к замене  $x \rightarrow -x$  собственных функций. Кругами обозначены точки ССК.

Так как система является неинтегрируемой, и в ней отсутствует вырождение собственных уровней энергии биллиарда, механизм возникновения ССК отличен от характерных для интегрируемых систем механизмов полной деструктивной интерференции Фридриха-Винтгена и Фабри-Перо. ССК в данном случае образуются в результате деформации собственных функций закрытого биллиарда под воздействием потенциала (4.1) таким образом, что связь этого деформированного состояния с распространяющейся модой "случайным" образом обращается в нуль — рис. 4.6.

Рассмотрим, например, собственную функцию закрытого биллиарда  $b = 3$  с энергией, лежащей ниже порога распространения второго канала, то есть  $E_3 < 4\pi^2$ . При варьировании высоты потенциала, связь этого состояния с распростране-

Таблица 4.1: Значения параметров  $E_F$  и  $V_g$  четных ССК для случая, когда потенциал сдвинут из центрального положения вдоль оси, перпендикулярной оси транспорта (рис. 4.2(4)).

Номер ССК	$E_F$	$V_g$	Номер ССК	$E_F$	$V_g$
1	12.550	4.50	9	28.236	46.70
2	13.029	34.45	10	29.608	16.05
3	13.244	-36.65	11	30.181	39.35
4	14.026	-19.20	12	31.418	-31.55
5	19.709	-40.7	13	31.960	-34.20
6	21.025	33.05	14	32.002	27.75
7	22.355	-47.70	15	34.333	6.00
8	25.541	-22.80	16	38.495	17.15

няющейся модой может обратиться в нуль. Тогда матрица связи:

$$W_{b,C} = (W_1 \ W_2 \ 0 \ W_4 \dots) \quad (4.7)$$

И существует вектор

$$\psi_{BSC} = (0 \ 0 \ 1 \ 0 \dots) \quad (4.8)$$

являющийся собственным нуль-вектором матрицы  $WW^+$ . С другой стороны этот вектор (4.8) является собственным вектором Гамильтониана закрытого биллиарда с соответствующим собственным уровнем энергии  $E_3$ . Таким образом, нуль-вектор (4.8) является также собственным состоянием эффективного неэрмитового Гамильтониана (4.2):

$$\widehat{H}_B \psi_{b=3} = E_3 \psi_{b=3} \rightarrow \widehat{H}_{eff} \psi_{b=3} = E_3 \psi_{b=3} \quad (4.9)$$

Следовательно, он является решением уравнений на стабильную точку (2.31), ко-

Таблица 4.2: Значения параметров  $E_F$  и  $V_g$  нечетных ССК для случая, когда потенциал сдвинут из центрального положения вдоль оси, перпендикулярной оси транспорта (рис. 4.2(4)).

Номер ССК	$E_F$	$V_g$	Номер ССК	$E_F$	$V_g$
1	13.133	-29.60	6	28.844	26.25
2	14.155	37.10	7	31.099	48.95
3	20.882	-2.40	8	33.063	-40.90
4	21.307	-34.8	9	33.189	-33.50
5	22.927	25.85			

торые и определяют ССК. Стоит подчеркнуть, что это справедливо, во-первых, если матрицы связи для обоих проводов совпадают, во-вторых, если не учитываются эванесцентные моды ( $p > 1$ ). ССК такого типа в соответствии с [45, 75, 76] называются "случайными" (Accidental).

Эванесцентные моды привносят дополнительный вклад в эффективный Гамильтониан, который в tight-binding формулировке имеет следующий вид:

$$\hat{\tilde{H}}_B = \hat{H}_B - v^2 \sum_{p>1} \sum_{C=L,R} \sum_{j_y=1}^{N_w} \exp(-|k_p|a_0) \phi_p(j_y) \phi_p(j_y)^+ \delta_{j_x,j_C}. \quad (4.10)$$

С учетом этого вклада, все описанное выше также справедливо, но уже в терминах модифицированного Гамильтониана (4.10), то есть связь одного из состояний  $\hat{\tilde{H}}_B$  с первой распространяющейся модой  $\phi_1$  может обратиться в нуль при варьировании потенциала. Соответственно, это состояние становится ССК с энергией  $\tilde{E}_b$ , которая незначительно отличается от  $E_3$ .

Некоторые типичные волновые функции ССК, а также их модальные разложения показаны на рис. 4.7 и 4.8. Видно, что данные ССК сформированы единственной собственной функцией закрытого биллиарда Синая.

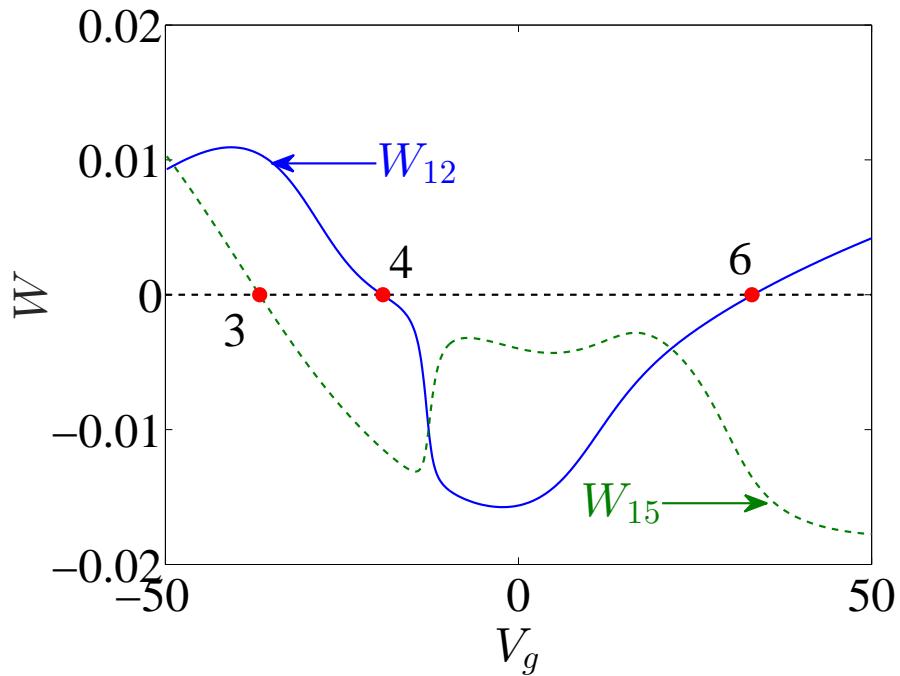


Рис. 4.6: Зависимость матричных элементов связи  $W$  от высоты потенциала  $V_g$  для 12 (сплошная линия) и 15 (пунктирная линия) собственных состояний закрытого биллиарда, в случае, когда потенциал сдвинут из центрального положения по оси, перпендикулярной оси транспорта (рис. 4.2(4))

В случае центрального расположения потенциала, собственные функции также делятся на четные и нечетные, но уже по обеим осям  $\psi(x, y) = \pm\psi(-x, -y)$ ,  $\psi(x, y) = \pm\psi(-x, y)$ ,  $\psi(x, y) = \pm\psi(x, -y)$ . Таким образом, существует четыре неприводимых представления, как показано на рис. 4.9, причем все состояния, соответствующие второму (рис. 4.9(2)) и третьему (рис. 4.9(3)) типам автоматически являются защищенными по симметрии ССК. ССК, соответствующие первому и четвертому типу реализуются также за счет "случайного" обращения в нуль матричного элемента связи некоторого деформированного под воздействием потенциала собственного состояния закрытого биллиарда с распространяющейся модой волновода. Некоторые типичные волновые функции таких ССК, а также их модальные разложения показаны на рис. 4.10.

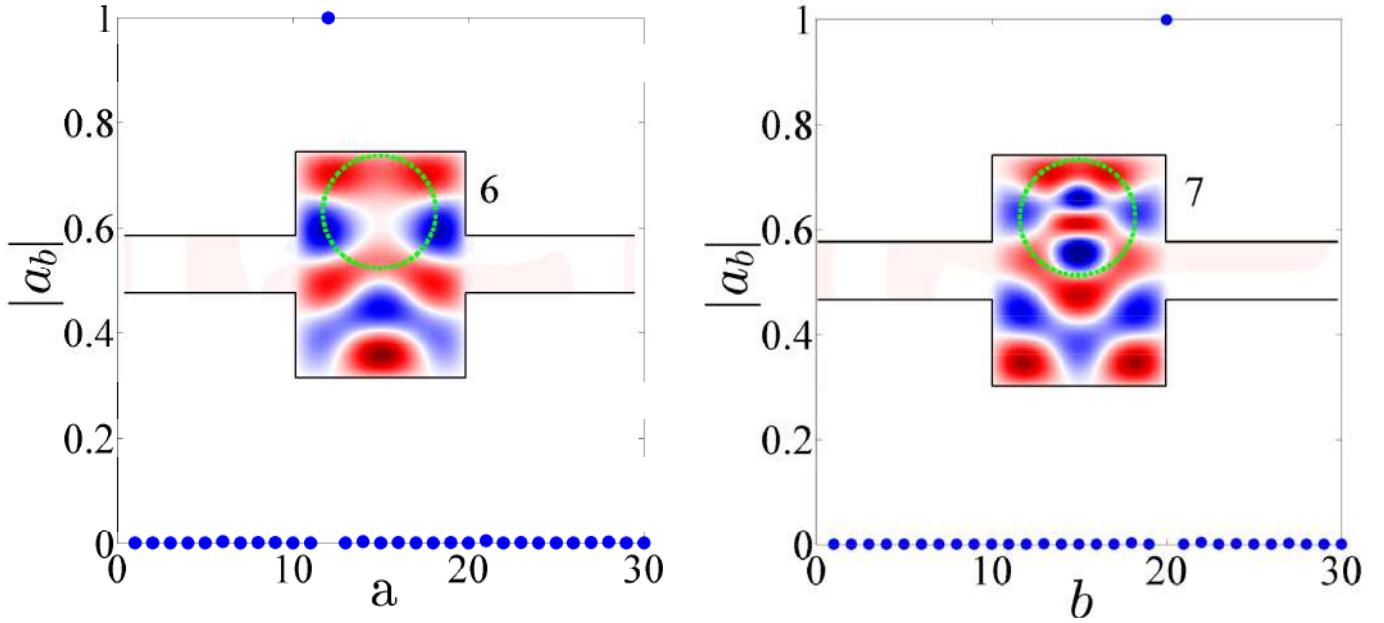


Рис. 4.7: Волновые функции четных ССК с номерами 6(слева) и 7(справа) в соответствии с таблицей 4.1 и их модальное разложение со собственным состояниям закрытого биллиарда Синая. Пунктиром обозначены границы наложенного потенциала.

Следует отметить, что помимо высоты потенциала  $V_g$ , в роли варьируемого параметра могут выступать позиция потенциала внутри биллиарда, его радиус, а также геометрические размеры самого биллиарда. Высота потенциала была выбрана в качестве варьируемого параметра, так как такой подход проще всего реализовать экспериментально. Кроме того, одночастичные состояния в квантовом биллиарде с жесткими стенками являются решениями того же стационарного уравнения Гельмгольца, с теми же граничными условиями как состояния плоского микроволнового резонатора. Это значит, что экспериментально вместо квантового волновода можно рассматривать его микроволновый аналог, в котором поперечное электрическое поле играет роль волновой функции. Роль потенциала (4.1) в этом случае может выполнить диэлектрический диск проницаемости  $\epsilon$  и радиуса  $R$ , помещенный внутрь прямоугольного резонатора. Тогда уравнение Гельмголь-

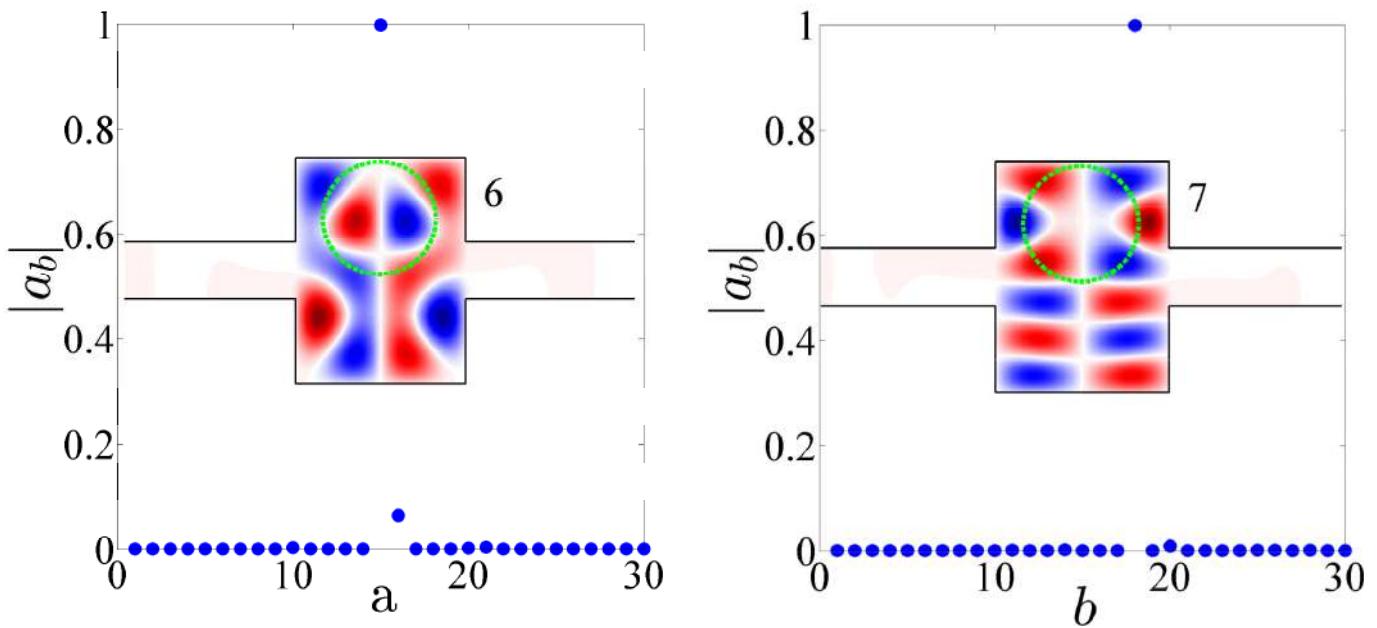


Рис. 4.8: Волновые функции нечетных ССК с номерами 3(слева) и 7(справа) в соответствии с таблицей 4.2 и их модальное разложение со собственным состояниям закрытого биллиарда Синая. Пунктиром обозначены границы наложенного потенциала.

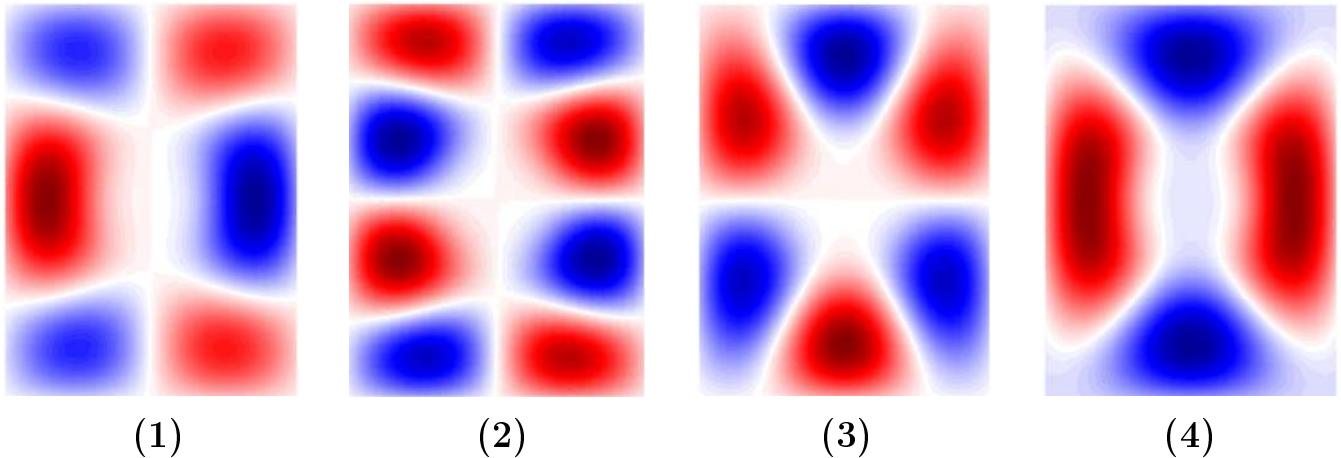


Рис. 4.9: Типичные волновые функции четырех неприводимых представлений для центрального расположения потенциала в биллиарде Синая.

ца для электрического поля, где опущена скорость света, выглядит следующим образом:

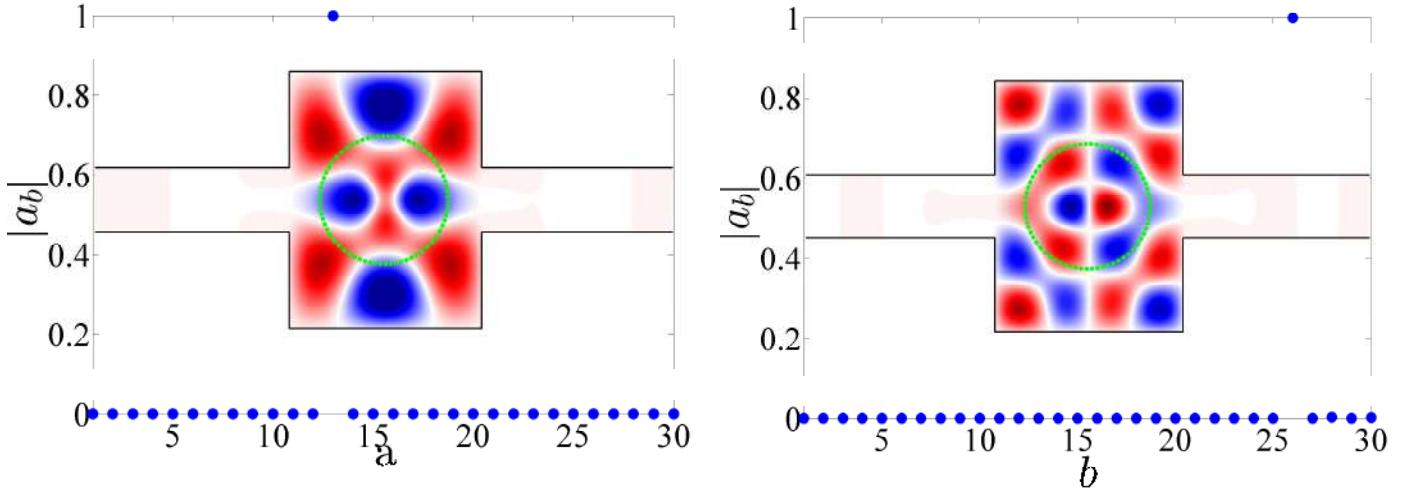


Рис. 4.10: Волновые функции ССК в биллиарде Синая при центральном расположении потенциала.

$$-\nabla \frac{1}{\epsilon(x, y)} \nabla \psi = \omega_2 \psi \quad (4.11)$$

После проектирования этого уравнения на собственный базис прямоугольного резонатора, эффективный Гамильтониан примет форму (4.2), в которой матричные элементы возмущения вызванного диэлектрическим диском, в соответствии с уравнением (4.11), могут быть вычислены следующим образом:

$$\langle mn | V | m' n' \rangle = \left( 1 - \frac{1}{\epsilon} \right) \int dx dy \nabla \psi_{mn}(x, y) \nabla \psi_{m'n'}(x, y), \quad (4.12)$$

где интегрирование проводится по диску. В квантовой механике было бы так:

$$\langle mn | V | m' n' \rangle = \int dx dy \psi_{mn}(x, y) V(x, y) \psi_{m'n'}(x, y) \quad (4.13)$$

Несмотря на различия между квантовомеханической матрицей возмущений и ее микроволновым аналогом, эффект деформации собственных мод микроволнового резонатора при наличии внутри диэлектрического диска схож с эффектом, который оказывает потенциал (4.1) на квантовый биллиард. В обоих случаях связь некоторых собственных мод с распространяющимся решением волновода может

обратиться в нуль, что соответствует возникновению в системе accidental связанных состояний в континууме.

## Глава 5

### **Цилиндрический акустический резонатор с некоаксиально подключенными полубесконечными волноводами**

Рассматриваемая в данной главе система представляет собой цилиндрический резонатор и два полубесконечных волновода, подключенных к нему таким образом, что их оси сдвинуты по отношению к оси резонатора на некоторое расстояние  $r_0$ , а также разнесены между собой на угол  $\Delta\phi$ , как показано на рис. 3.

Если бы волноводы были присоединены коаксиально, система была бы инвариантна относительно азимутального вращения, и полное Гильбертово пространство системы разделилось бы на независимые подпространства, определяемые орбитальным угловым моментом  $m$ . Трансмиссионные свойства системы в таком случае расчитывались бы независимо для каждого подпространства, а непрерывно изменяя длину резонатора можно было бы, как в случае с Z- и П-образными электронными волноводами, обнаружить в системе ССК, реализующиеся посредством механизма Фридриха-Винтгена. Подпространство с  $m = 0$  было рассмотрено в работе [39].

При некоаксиальном подключении волноводов различные подпространства, определяемые орбитальным угловым моментом, начинают перемешиваться, а матричные элементы связи повернутого на  $\Delta\phi$  волновода с резонатором приобретают фазовый множитель, что в значительной мере влияет как на трансмиссионные свойства системы, так и на поведение резонансов.

## 5.1 Акустическая теория связанных мод

При численном моделировании используется акустическая теория связанных мод, которая фактически является адаптацией метода неэрмитового эффективного Гамильтониана для граничных условий Неймана[60]. Каждое подпространство (резонатор, левый волновод, правый волновод) обладает вращательной симметрией и описывается стационарным уравнением Гельмгольца в цилиндрической системе координат:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \omega^2 \right] \psi = 0, \quad (5.1)$$

где  $\omega$  — безразмерная частота. Соответственно, распространяющиеся моды в цилиндрических волноводах с жесткими стенками с граничными условиями Неймана описываются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \psi_{pq}(\rho, \alpha, z) &= \psi_{pq}(\rho) \frac{1}{\sqrt{2\pi k_{pq}}} \exp(ip\alpha + ik_{pq}z) \\ \psi_{pq}(\rho) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{J_0(\mu_{0q})} J_0(\mu_{0q}\rho), p = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\mu_{pq}^2 - p^2}} \frac{mu_{pq}}{J_p(\mu_{pq})} J_p(\mu_{pq}\rho), p = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}, \quad (5.2)$$

где  $\rho$  и  $\alpha$  — полярные координаты, а  $\mu_{pq}$  — корни уравнения

$$\frac{dJ_p(mu_{pq}\rho)}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = 0, \quad (5.3)$$

возникающего из-за граничных условий Неймана на поверхности цилиндрического волновода. Все переменные —  $\rho, z, k_{pq}$  — нормированы на радиус волновода  $r$ , а частота измеряется в терминах  $s/r$ , где  $s$  — скорость звука. Закон дисперсии:

$$k_{pq} = \sqrt{\omega^2 - \mu_{pq}^2} \quad (5.4)$$

Зоны распространения, определяемые парой индексов — радиальным  $q = 1, 2, 3, \dots$  и азимутальным  $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  квантовыми числами — являются вырожденными относительно знака последнего. Профили распространяющихся мод, соответствующие  $\psi_{pq}(\rho) \cos(p\alpha)$  представлены в таблице 5.1

Таблица 5.1: Профили распространяющихся мод волноводов

Номер канала	Частота среза	Индексы	Профиль моды
1	0	$p = 0, q = 1$	
2	1.84118	$p = \pm 1, q = 1$	
3	3.0542	$p = \pm 2, q = 1$	
4	3.831706	$p = 0, q = 2$	

Собственные функции закрытого цилиндрического резонатора в соответствии с уравнением 5.1 задаются следующими выражениями:

$$\Psi_{mnl}(r, \phi, z) = \psi_{mn}(r) \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \exp(im\phi) \psi_l(z), \quad (5.5)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_{mn}(r) &= \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{RJ_0(\mu_{0n}R)} J_0\left(\frac{\mu_{0n}r}{R}\right), & m = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{\mu_{mn}^2 - m^2}} \frac{\mu_{mn}}{RJ_m(\mu_{mn}R)} J_m\left(\frac{\mu_{mn}r}{R}\right), & m = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \\ \psi_l(z) &= \sqrt{\frac{2 - \delta_{l,1}}{L}} \cos[\pi(l-1)z/L], \quad l = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (5.6)$$

Соответствующие собственные частоты:

$$\omega_{mnl}^2 = \left[ \frac{\mu_{mn}^2}{R^2} + \frac{\pi^2(l-1)^2}{L^2} \right] \quad (5.7)$$

В данном случае  $\mu_{mn}$  — корни уравнения

$$\left. \frac{dJ_m(\mu_{mn}r)}{dr} \right|_{r=R} = 0, \quad (5.8)$$

возникающего из-за граничных условий Неймана на поверхности цилиндрического резонатора.

Проектирование оператора Гамильтона всей системы на пространство собственных мод закрытого резонатора приводит к возникновению неэрмитового эффективного Гамильтониана в виде:

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_B + \sum_{C=L,R} W_{BC} \frac{1}{\omega^2 + i0 - H_C} W_{CB}, \quad (5.9)$$

где  $\widehat{H}_B$  — Гамильтониан закрытого резонатора,  $\widehat{H}_C$  — операторы Гамильтона подключенных к нему волноводов,  $W_{BC}, W_{CB}$  — матричные элементы связи между распространяющимися модами волноводов (5.2) и собственными функциями резонатора (5.5). Из-за граничных условий Неймана конечная формула для эффективного Гамильтониана приобретает вид, несколько отличный от (3.7):

$$\widehat{H}_{eff} = \widehat{H}_B - i \sum_{C=L,R} \sum_{pq} k_{pq} W_{C,pq} W_{C,pq}^+ \quad (5.10)$$

Матричные элементы связи определяются интегралами перекрывания:

$$\begin{aligned} W_{mnl;pq}^C &= \int_{\Omega_C} \rho d\rho d\alpha \psi_{pq}(\rho, \alpha) \Psi_{mnl}^*(r, \phi, z = z_C) \\ &= \psi_l(z_C) \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \rho d\rho \psi_{pq}(\rho, \alpha) \psi_{mn}^*(r(\rho, \alpha), \phi(\rho, \alpha)) \end{aligned}, \quad (5.11)$$

где  $W_{mnl;pq}$  — Матричный элемент связи распространяющейся моды, характеризуемой числами  $p, q$  с собственной функцией закрытого резонатора, характеризуемой числами  $m, n, l$ .  $\Omega_C$  — области, где волноводы подключаются к резонатору,  $z_L = 0$  для левого волновода и  $z_R = L$  для правого (рис.5.1). По ним проводится интегрирование. Для того, чтобы посчитать данные интегралы перекрывания,

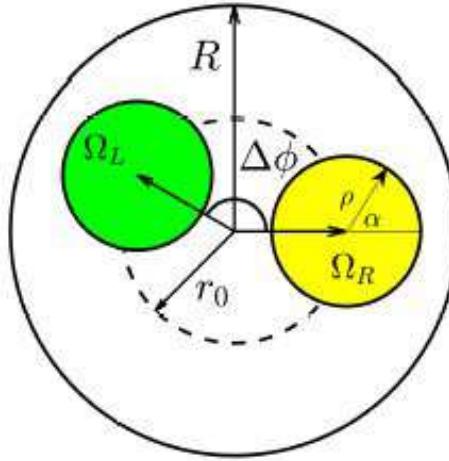


Рис. 5.1: Области интегрирования при расчетах интегралов перекрывания (5.11)

нужно соотнести полярные координаты резонатора и волноводов. Пусть ось левого волновода смещена относительно оси резонатора на расстояние  $r_0$ , причем, для простоты, только вдоль оси  $x$ . Тогда связь между полярными координатами резонатора и левого волноводов задается выражением:

$$\begin{aligned} r \sin(\phi) &= \rho \sin(\alpha), \\ r \cos(\phi) &= r_0 + \rho \sin(\alpha) \end{aligned} \tag{5.12}$$

В соответствии с (5.5),

$$\begin{aligned} \psi_l(z = 0) &= \sqrt{\frac{2 - \delta_{l,1}}{L}}, \\ \psi_l(z = L) &= \psi_l(z = 0)(-1)^{l-1} \end{aligned} \tag{5.13}$$

Т.к. волноводы одинаковые и отличаются только тем, что подключены к резонатору при различных азимутальных углах (рис.5.1), можно записать точное соотношение между матричными элементами связи левого неподвижного волновода и правого, смещенного на  $\Delta\phi$ :

$$W_{mnl;pq}^R = (-1)^{l-1} \exp(i(p-m)\Delta\phi) W_{mnl;pq}^L \tag{5.14}$$

Матрица эффективного Гамильтониана в явном виде:

$$\begin{aligned} \langle mnl | H_{eff} | m'n'l' \rangle &= \omega_{mnl}^2 \delta_{mm'} \delta_{nn'} \delta_{ll'} \\ -i \sum_{pq} k_{pq} \left[ 1 + (-1)^{l+l'} \exp(i(m' - m)\Delta\phi) \right] W_{mnl;pq} W_{m'n'l';pq}^+ \end{aligned} \quad (5.15)$$

Теперь проводимость системы может быть расчитана в соответствии с формулой (2.30). Ключевой момент здесь — наличие комплексного множителя  $\exp(i(m' - m)\Delta\phi)$  в уравнении (5.15), что, как будет показано далее, значительно влияет как на трансмиссионные свойства системы, так и на связанные состояния в континууме.

Далее по тексту рассматривается система со следующими параметрами:

1. Радиус резонатора  $R = 3$ ;
2. Радиус подключенных волноводов равен единице ( $r = 1$ );
3. Оба волновода сдвинуты относительно оси резонатора на расстояние  $r_0 = 1.5$ ;
4. Волна падает в первом канале ( $p = 0, q = 1$ ) в частотной области ниже второго среза, то есть  $0 < \omega < 1.8412$  в соответствии с таблицей 5.1.

## 5.2 Резонансная картина трансмиссии. Волновой кран

Первая особенность, отличающая трехмерную систему от двумерной — это резонансная трансмиссия (рис. 5.2). Матричные элементы связи первого канала  $W_{01}$  можно приблизительно оценить как отношение площадей поперечного сечения волновода и резонатора  $W_{01} \sim S_W/S_R$ . Для двумерных систем  $S_W = r, S_R = R$ , так как площадь поперечного сечения представляет собой линию. В случае цилиндрической системы  $S_W = \pi r^2, S_R = \pi R^2$ . Если положить  $r = 1$  получим, для двумерных систем  $W \sim R^{-1}$ , а для трехмерных  $W \sim R^{-2}$ . Так как ширины

резонансов пропорциональны квадрату матричных элементов связи, имеем для двумерных и трехмерных систем  $\Gamma \sim R^{-2}$  и  $\Gamma \sim R^{-4}$ , соответственно. Расстояние же между собственными уровнями в обоих случаях  $\Delta E \sim R^{-2}$ . Поэтому в трехмерном случае уже при  $R = 3$  осуществляется режим слабой связи [66], а для двумерной системы независимо от  $R$  она находилась бы в режиме перекрывающихся резонансов. На рисунках 5.3 и 5.4 хорошо видно, что пики проводимости такой системы проходят по собственным уровням закрытого резонатора.

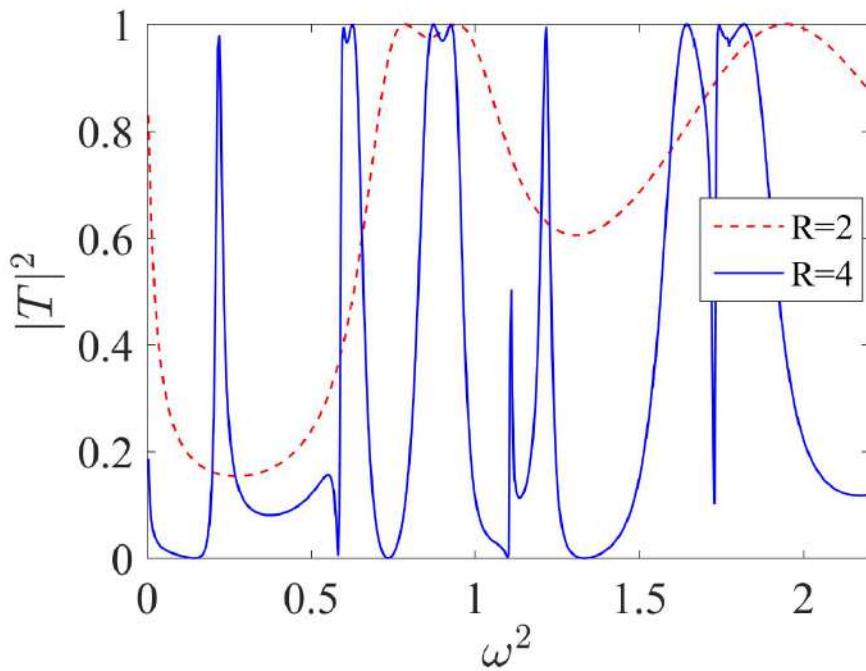


Рис. 5.2: Трансмиссия в зависимости от квадрата частоты для различных значений радиуса при  $\Delta\phi = 0$ .

Как видно из рис. 5.5, фазовый фактор в ур. (5.15) серьезно влияет на трансмиссионную картину. Даже незначительное изменение угла поворота  $\Delta\phi$  может кардинально изменить поведение системы — открыть ее или закрыть. Например, рассмотрим подробнее точку пересечения собственных уровней 012 и  $\pm 111$ . Как видно из рис. 5.3, точка пересечения приблизительно соответствует длине резонатора  $L = 5$ . Так как система находится в режиме слабой связи, основной вклад

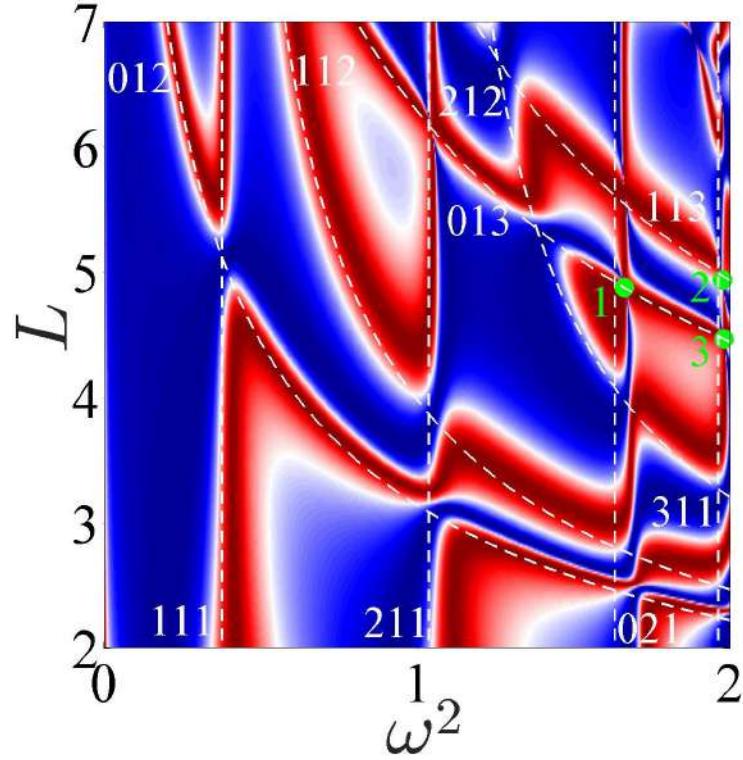


Рис. 5.3: Трансмиссия в зависимости от квадрата частоты  $\omega^2$  и длины резонатора  $L$  при  $\Delta\phi = 0$ . Пунктирными линиями обозначены собственные уровни закрытого резонатора с соответствующими индексами  $mnl$ . Кругами обозначены позиции ССК из таблицы 5.3.

в трансмиссию дает взаимодействие именно этих резонансов. В соответствии с (5.14), матричные элементы связи этих состояний с левым и правым волноводами задаются соотношениями  $W_{012;01}^R = -W_{012;01}^L$ ,  $W_{\pm 111;01}^R = W_{\pm 111;01}^L e^{\mp i\Delta\phi}$ . Таким образом, чтобы исходящие волны проинтерферировали конструктивно, необходимо, чтобы  $\Delta\phi = \pm\pi$ , а для деструктивной интерференции  $\Delta\phi = 0$ . Эти простые рассуждения хорошо подтверждаются рис. 5.6а.

Аналогично, для состояний 012 и  $\pm 211$  вблизи  $L = 3$  получаем соотношения для матричных элементов связи  $W_{012;01}^R = -W_{012;01}^L$ ,  $W_{\pm 211;01}^R = W_{\pm 211;01}^L \exp(\mp 2i\Delta\phi)$ . Таким образом, чтобы разрешить прохождение волны через систему, нужно выставить угол поворота  $\Delta\phi = \pi/2$  или  $\Delta\phi = 3\pi/2$  (рис. 5.6б). Рис. 5.6с подтверждает

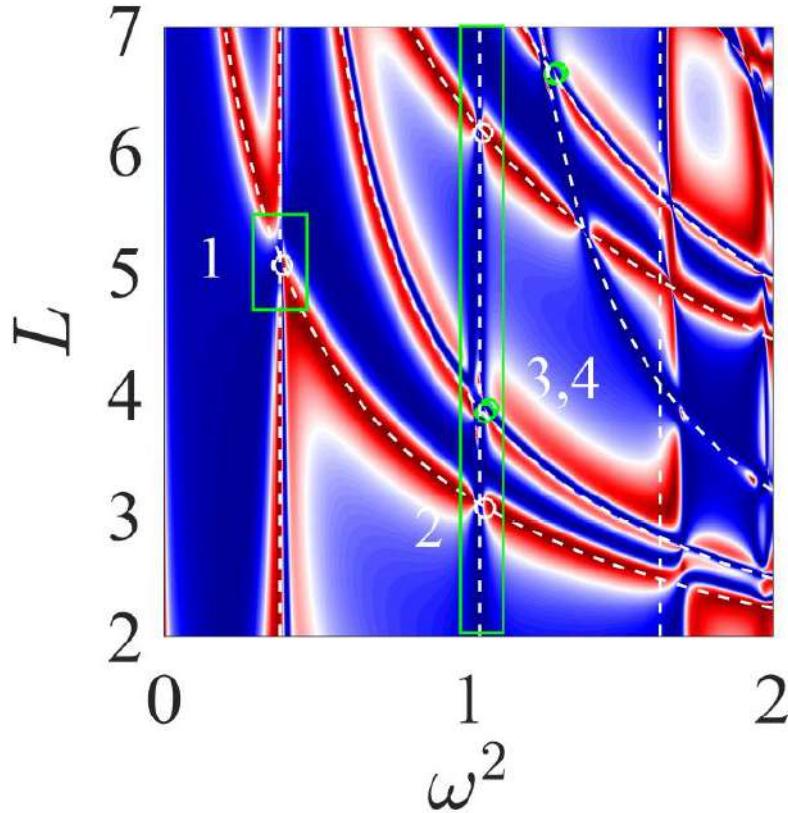


Рис. 5.4: Трансмиссия в зависимости от квадрата частоты  $\omega^2$  и длины резонатора  $L$  при  $\Delta\phi = \pi/4$ . Пунктирными линиями обозначены собственные уровни закрытого резонатора с соответствующими индексами  $tnl$ . Кругами обозначены позиции ССК из таблицы 5.4.

справедливость данных рассуждений также в том случае, когда оба состояния имеют орбитальный угловой момент отличный от 0. Для состояний  $\pm 112$  и  $\pm 211$ ,  $W_{\pm 112;01}^R = -W_{\pm 112;01}^L \exp(\mp i\Delta\phi)$ ,  $W_{\pm 211;01}^R = W_{\pm 211;01}^L \exp(\mp 2i\Delta\phi)$  и конструктивная интерференция достигается только при  $\Delta\phi = \pi$ .

Таким образом, варьируя угол поворота  $\Delta\phi$ , можно настраивать Фано резонансы вплоть до их коллапса, что, как уже было сказано ранее, является признаком наличия в системе ССК.

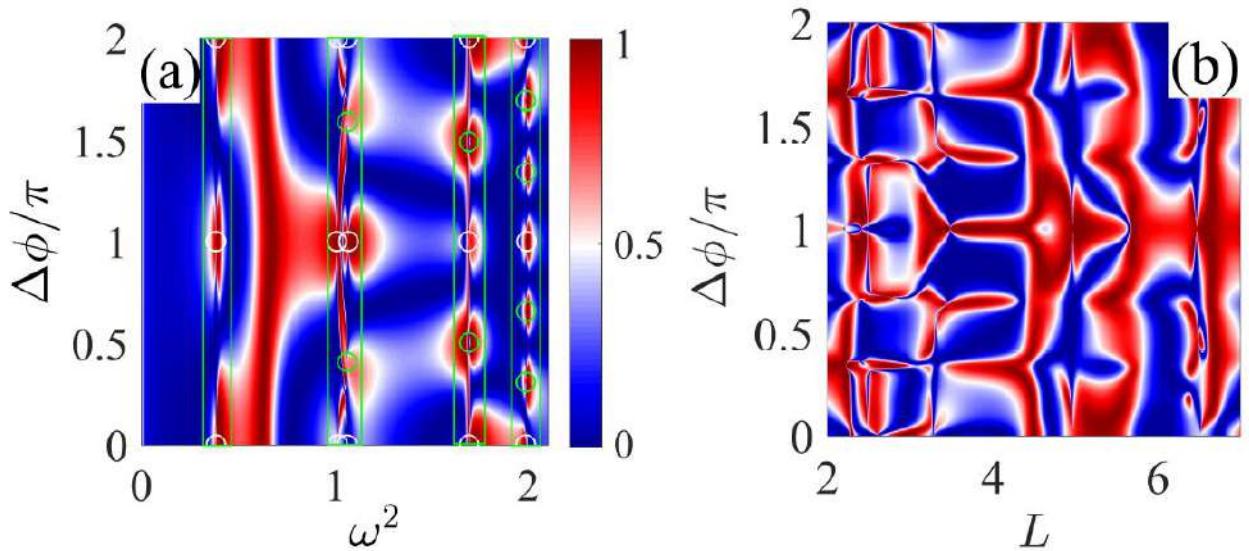


Рис. 5.5: Трансмиссия в зависимости от угла поворота  $\Delta\phi$  волноводов относительно друг друга и (а) частоты при фиксированной длине резонатора  $L = 4$ , (б) длины резонатора при фиксированной частоте  $\omega^2 = 2$ .

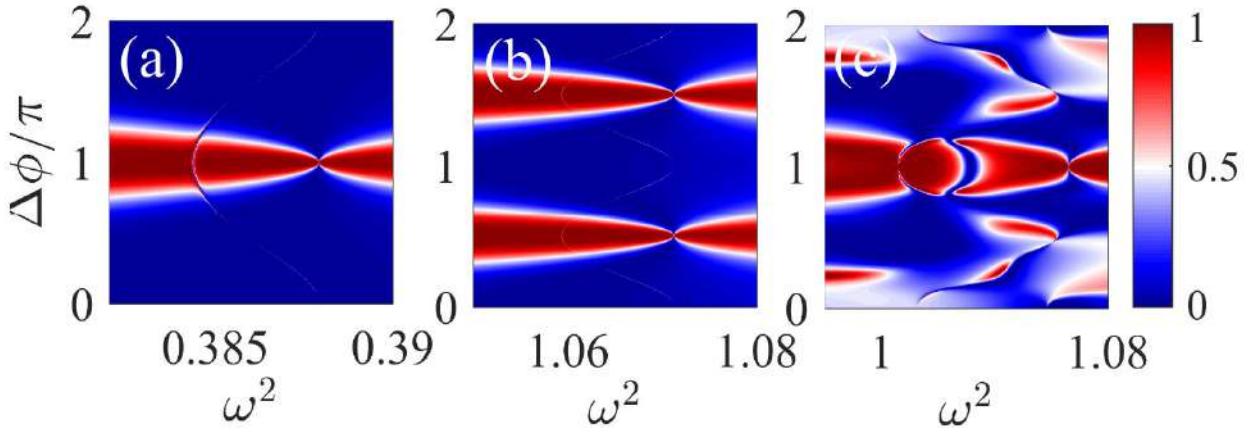


Рис. 5.6: Трансмиссия в зависимости от квадрата частоты  $\omega^2$  и угла поворота  $\Delta\phi$  вблизи пересечения собственных уровней (а) 012 и  $\pm 111$  при  $L = 5$ , (б) 012 и  $\pm 211$  при  $L = 3$ , (с)  $\pm 112$  и  $\pm 221$  при  $L = 4$ .

### 5.3 Связанные состояния в континууме

В случае, когда волноводы расположены коаксиально, матричные элементы связи совпадают, и имеется один континуум. При появлении угла поворота  $\Delta\phi \neq 0$ ,

матричные элементы связи повернутого волновода с резонатором приобретают фазовый множитель  $\exp(im\Delta\phi)$  и может сложиться впечатление, что в данной ситуации континуумов уже два и, согласно теореме Павлова-Веревкина, связь резонатора с обоими волноводами одновременно может обратиться в нуль только в точке тройного вырождения. Тем не менее, при повороте волновода не изменяются ни собственные моды резонатора, ни собственные функции волноводов, ни модуль матричных элементов связи, и на самом деле в системе по-прежнему имеется лишь один континуум. Поэтому в данном случае удается избежать проблемы тройного вырождения. Более того, в системе наблюдается огромное количество ССК.

Как и в случае рассмотренных ранее Z- и П-образных волноводов, а также биллиарда Синая, решая уравнения (2.32) можно легко найти параметры ССК. В данном случае, явный вид этих уравнений:

$$\omega_c^2 = \operatorname{Re}(z(\omega_c, L_c, \Delta\phi_c)), \operatorname{Im}(z(\omega_c, L_c, \Delta\phi_c)) = 0 \quad (5.16)$$

### 5.3.1 Длина резонатора фиксирована, поворачивается правый волновод

Для  $\Delta\phi \neq 0$  и произвольной длины резонатора могут существовать только защищенные по симметрии ССК, за исключением случаев, когда  $L$  соответствует одной из точек вырождения собственных состояний закрытого резонатора. На рис. 5.7 изображена трансмиссия в частотных диапазонах, выделенных прямоугольниками на рис. 5.5а. Кругами отмечены защищенные по симметрии ССК, возникающие в системе при различных углах поворота  $\Delta\phi$ . Зависимость ширин резонансов от угла поворота  $\Delta\phi$  при  $L = 4$  показана на рис. 5.8.

На рисунке 5.8 видно несколько случаев обращения в нуль резонансных ширин и каждый соответствует появлению в системе ССК. Параметры наиболее интересных отмечены кругами и представлены в таблице 5.2, а реальная часть их

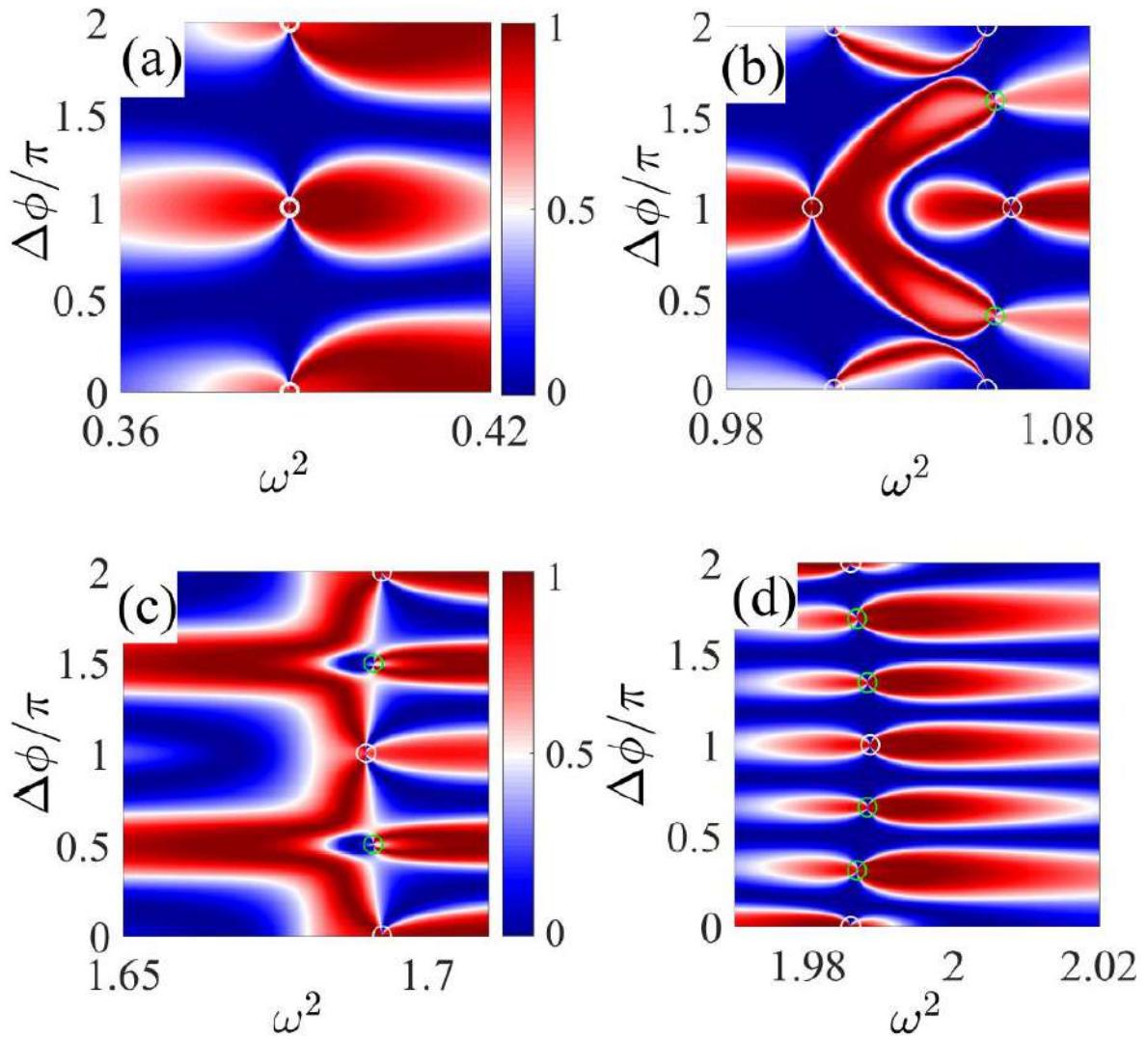


Рис. 5.7: Трансмиссия в зависимости от квадрата частоты  $\omega^2$  и угла поворота  $\Delta\phi$  при фиксированной длине резонатора  $L = 4$  в частотных диапазонах, обозначенных прямоугольниками на рис. 5.5а.

волновых функций изображена на рис. 5.9.

Три из четырех ССК, представленных в таблице 5.2, являются защищенными по симметрии, что видно из их модального разложения — это №1, №2 и №4. ССК №3 является интерференционным, так как его параметры лежат вблизи точки вырождения собственных уровней  $\pm 211$  и  $\pm 121$  при  $L \sim 4$ . Поэтому, как видно из рис. 5.9(3), его волновая функция является слегка подкрученной. Азимутальная

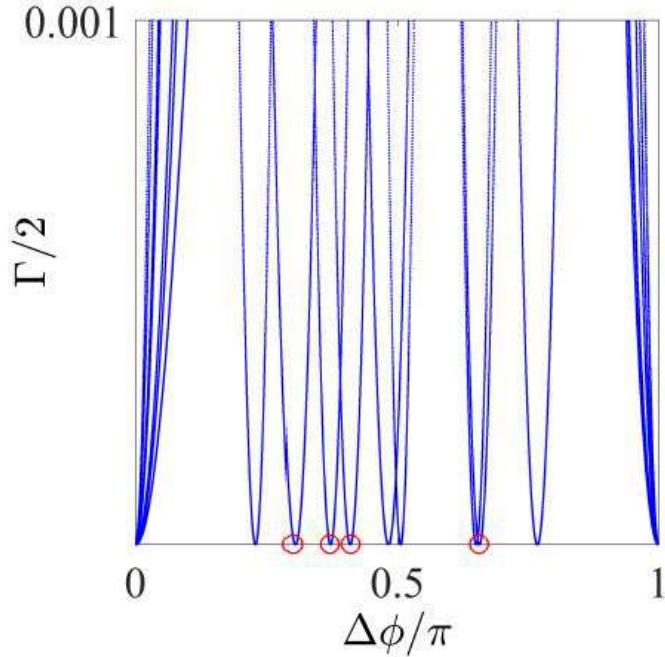


Рис. 5.8: Зависимость ширин резонансов от угла поворота  $\Delta\phi$  при  $L = 4$ . Кругами отмечены ССК, параметры которых приведены в таблице 5.2.

зависимость ССК №1 задается выражением  $\cos(3(\phi - \Delta\phi/2))$ . Чтобы связь этого состояния с левым волноводом обратилась в нуль, необходимо, чтобы нодальная линия проходила через  $\phi = 0$ , что приводит к уравнению  $\frac{3}{2}\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . Таким образом,  $\Delta\phi = \frac{\pi}{3}$  и азимутальная зависимость данного ССК:  $\cos(3(\phi - \pi/6))$ . Очевидно, что еще одна нодальная линия проходит через  $\phi = \pi/3$ , обращая в нуль связь резонатора также с правым волноводом. Стоит отметить, что полученное в результате численного моделирования значение  $\Delta\phi = 0.308\pi$  слегка отличается от расчетного из-за присутствия эванесцентных мод. Аналогично для ССК №2:  $\cos(4(\phi - \Delta\phi/2))$ , следовательно,  $\Delta\phi = \pi/4$ , что также близко к численно рассчитанному значению  $\Delta\phi = 0.235\pi$ . Для ССК №4 также получено хорошее соответствие между расчетным  $\Delta\phi = \pi/2$  и  $\Delta\phi = 0.5051\pi$ , полученным с помощью численных расчетов.

Таблица 5.2: Параметры ССК, отмеченных на рис. 5.8 для фиксированной длины резонатора  $L = 4$ .

Номер ССК	$\Delta\phi/\pi$	$\omega^2$	$mnl$	$a_{mnl}$
1	0.308	1.9868	311 −311	0.7056 $0.7056e^{-3i\Delta\phi}$
2	0.2351	3.17304	411 −411	0.705 $0.705e^{4i\Delta\phi}$
3	0.4171	1.05688	211 −211 112 −112	0.6898 $-0.6898e^{-2i\Delta\phi}$ $0.0933 + 0.1215i$ $-0.1415 + 0.059i$
4	0.5055	1.68872	211 −211	0.7043 $0.7043e^{-2i\Delta\phi}$

### 5.3.2 Угол поворота фиксирован, изменяется длина резонатора

Волновые функции защищенных по симметрии связанных состояний в континууме являются собственными функциями закрытого резонатора, матричные элементы связи которых с распространяющейся модой волновода равны нулю в силу симметрийных соображений. В отличие от них, волновые функции интерференционных ССК представляют собой ряд, состоящий из полного набора собственных функций закрытого резонатора:

$$\psi_{BSC}(r, \phi, z) = \sum_{mnl} a_{mnl} \Psi_{mnl}(r, \phi, z) \quad (5.17)$$

Коэффициенты разложения  $a_{mnl}$  также легко найти при помощи эффективного неэрмитового Гамильтониана — его собственный вектор, соответствующий

собственному значению, мнимая часть которого равна нулю, и является набором коэффициентов разложения.

$$\Delta\phi = 0$$

Зависимость ширин резонансов от  $L$  при  $\Delta\phi = 0$  представлена на рис. 5.10, а соответствующие обозначенным на этом рисунке ССК параметры даны в таблице 5.3. Выделены только те ССК, которые соответствуют энергетическому окну, в котором были проведены расчеты трансмисии — рис. 5.3. Данные ССК сформированы всего из нескольких собственных мод закрытого резонатора и находятся вблизи точек вырождения системы, т.е. являются результатом полной деструктивной интерференции Фридриха-Винтгена. Рис. 5.11 демонстрирует волновые функции ССК 1 и ССК 2 из таблицы 5.3.

Таблица 5.3: Параметры ССК, отмеченных на рис. 5.10 для фиксированного угла поворота  $\Delta\phi = 0$ .

Номер ССК	$\omega^2$	$L$	$mnl$	$a_{mnl}$
1	1.6617	4.8743	021	0.9276
			013	0.3665
2	1.9751	4.9371	$\pm 311$	0.6757
			$\pm 113$	-0.2066
3	1.9795	4.465	013	-0.3228
			$\pm 311$	0.6718

$$\Delta\phi = \pi/4$$

В рассмотренном выше случае, когда оси левого и правого волноводов проходят вдоль одной прямой (т.е.  $\Delta\phi = 0$ ), эти волноводы полностью идентичны и суммирование по  $C$  в формуле (5.10) приводит лишь к возникновению множителя  $= 2$ . Несмотря на то, что возникновение угла поворота  $\Delta\phi \neq 0$  не влияет на число континуумов и собственные функции резонатора и волноводов, возникающий в матричных элементах связи правого волновода с резонатором фазовый фактор оказывает существенное влияние на свойства системы.

Как уже неоднократно упоминалось, параметры ССК легко определить по точкам обращения в нуль мнимой части собственных значений эффективного Гамильтониана. Зависимость резонансных ширин от длины резонатора  $L$  показана на рис. 5.12, а соответствующие параметры ССК представлены в таблице 5.4.

Из рис. 5.4 видно, что ССК расположены вблизи точек вырождения собственных уровней закрытого резонатора, однако не лежат строго в этих точках. Этот сдвиг происходит из-за влияния эванесцентных мод. Так как, согласно таблице 5.4, данные ССК являются суперпозицией лишь нескольких собственных состояний закрытого резонатора, при составлении эффективного Гамильтониана можно ограничиться только этими состояниями и изучить систему аналитически на укороченном базисе. Рассмотрим ССК 1 из таблицы 5.4, который является суперпозицией 012 и  $\pm 111$  собственных мод закрытого резонатора.

Матричные элементы связи резонатора с основной распространяющейся модой, в соответствии с формулой (5.11), равны:

$$\begin{aligned}
W_{mnl;01}^L &= (w_0 \ w_1 \ w_1) \\
w_0 = W_{012;01}^L &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{L}} \\
w_1 = W_{\pm 111;01}^L &= 0.269\sqrt{\frac{1}{L}}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Весомыми также являются первые эванесцентные моды  $p = \pm 1, q = 1$ . Их матричные элементы связи:

$$\begin{aligned}
W_{mnl;11}^L &= (0 \ v_1 \ v_2), W_{mnl;-11}^L = (0 \ v_2 \ v_1) \\
v_1 = W_{111;11}^L &= 0.1141\sqrt{\frac{1}{L}} \\
v_2 = W_{-111;11}^L &= -0.0141\sqrt{\frac{1}{L}}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Согласно формуле (5.14), сопоставляющей матричные элементы связи левого и правого волноводов при  $\Delta\phi \neq 0$ :

$$\begin{aligned}
W_{mnl;01}^R &= (-w_0 \ w_1 e^{-i\Delta\phi} \ w_1 e^{i\Delta\phi}) \\
W_{mnl;11}^R &= (0 \ v_2 e^{-i\Delta\phi} \ v_1 e^{i\Delta\phi}) \\
W_{mnl;-11}^R &= (0 \ v_2 e^{-i\Delta\phi} \ v_1 e^{i\Delta\phi})
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Вкладом следующих эванесцентных мод можно пренебречь. Для открытого канала  $p = 0, q = 1$ , волновое число  $k_{01} = \omega$  является действительным, а для эванесцентных мод  $p = \pm 1, q = 1$ :  $k_{11} = i\kappa_{11}, \kappa_{11} = \sqrt{\mu_{11}^2 - \omega^2}$  — мнимым. Тогда укороченный эффективный Гамильтониан можно записать в следующей форме:

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{eff} &= \widehat{H}_B + \kappa_{11} \sum_{C=L,R} \sum_{p=\pm 1} \widehat{W}_{p1}^C \{\widehat{W}_{p1}^C\}^+ \\
-i\omega \sum_{C=L,R} \widehat{W}_{01}^C \{\widehat{W}_{01}^C\} &= \widehat{\tilde{H}}_B - i\omega \widehat{\Gamma}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

где эрмитовая часть:

$$\widehat{\tilde{H}}_B = \begin{pmatrix} \omega_{012}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{111}^2 + 2\kappa_{11}(v_1^2 + v_2^2) & 2\kappa_{11}v_1v_2(1 + e^{2i\Delta\phi}) \\ 0 & 2\kappa_{11}v_1v_2(1 + e^{-2i\Delta\phi}) & \omega_{111}^2 + 2\kappa_{11}(v_1^2 + v_2^2) \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

$\widehat{\tilde{H}}_B$  — это Гамильтониан резонатора с учетом эванесцентных мод, а антимеритовая выглядит следующим образом:

$$\widehat{\Gamma} = \begin{pmatrix} 2w_0^2 & w_0w_1(1 - e^{-i\Delta\phi}) & w_0w_1(1 - e^{i\Delta\phi}) \\ w_0w_1(1 - e^{i\Delta\phi}) & 2w_1^2 & w_1^2(1 + e^{2i\Delta\phi}) \\ w_0w_1(1 - e^{-i\Delta\phi}) & w_1^2(1 + e^{-2i\Delta\phi}) & 2w_1^2 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Собственные значения Гамильтониана (5.22):

$$\begin{aligned} E_1 &= \omega_{012}^2 \\ E_{2,3} &= \omega_{111}^2 + 2\kappa_{11} [v_1^2 + v_2^2 \pm 2v_1v_2 \cos(\Delta\phi)] \end{aligned} \quad (5.24)$$

и соответствующие собственные моды:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{i\Delta\phi} \\ 1 \end{pmatrix}, X_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{i\Delta\phi} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

ССК 1 из таблицы 5.4 расположено вблизи точки вырождения собственного уровня 012 с  $\omega_{012}^2 = \pi^2/L^2$  и вырожденного по  $m$  уровня  $\pm 111$  с  $\omega_{111}^2 = \mu^2/R^2$ . Логично было бы предположить, что так как в данном случае имеется два континуума, согласно теореме Павлова-Веревкина, ССК будет находиться в точке тройного вырождения этих собственных уровней — пунктирные линии на рис. 5.13. Однако расчеты показывают, что позиция ССК не совпадает с этой точкой. Согласно (5.24), эванесцентные моды сдвигают собственные уровни резонатора и расщепляют их — сплошные линии на рис. 5.13. Стоит отметить, что вырождение собственных уровней  $\pm 111$  восстанавливается, в соответствии с (5.24), при  $\Delta\phi = 0$ .

Таблица 5.4: Параметры ССК, отмеченных на рис. 5.12 для фиксированного угла поворота  $\Delta\phi = \pi/4$ .

Номер ССК	$\omega^2$	$L$	$mnl$	$a_{mnl}$	$ a_{mnl} $
1	0.385	5.065	012	$-0.113 + 0.272i$	0.294
			111	$-0.478(1 - i)$	0.675
			-111	0.675	0.675
2	1.055	3.051	012	$-0.261(1 - i)$	0.369
			211	$0.656i$	0.656
			-211	0.656	0.656
3	1.0535	3.833	211	$0.658i$	0.658
			-211	0.658	0.658
			112	$-0.237 - 0.098i$	0.256
			-112	$-0.098 - 0.237i$	0.256
3	1.065	3.869	211	-0.505	0.505
			-211	0.505	0.505
			112	$-0.455 - 0.189i$	0.493
			-112	$0.189 + 0.455i$	0.493

и  $\Delta\phi = \pi$ . В этих случаях континуумы левого и правого волноводов совпадают, и возникает защищенное по симметрии ССК в виде суперпозиции вырожденных собственных мод закрытого резонатора  $\pm 111$ :

$$\psi_{BSC}(r, \phi, z) = AJ_1(\mu_{11}r) \sin(\pi z/L) \sin(\phi) \quad (5.26)$$

Это ССК существует в системе при любой длине резонатора  $L$  и всегда имеет нулевую связь с распространяющимися в первом канале решениями волноводов

$\psi_{01}(\rho, \alpha, z)$ . Однако, при  $\Delta\phi \neq 0$ , точка тройного вырождения  $\omega_{111}^2 = \omega_{012}^2(L)$  расщепляется на две точки двухкратного вырождения  $E_1(L) = E2(L, \Delta\phi)$  и  $E_1(L) = E3(L, \Delta\phi)$ . При этом позиция ССК в точности совпадает с первой.

В первой точке двухкратного вырождения можно представить ССК в виде суперпозиции  $X_1$  и  $X_2$  (5.25) и потребовать, чтобы связь этой суперпозиции с левым волноводом обратилась в нуль. Тогда, в соответствии с (5.18) и (5.25):

$$\alpha w_0 + \frac{\beta w_1}{\sqrt{2}}(-e^{i\Delta\phi} + 1) = 0 \quad (5.27)$$

Данное уравнение принимает точно такой же вид и для повернутого (правого) волновода.

Для второй точки двухкратного вырождения ( $E_1(L) = E3(L, \Delta\phi)$ ), суперпозиция  $X_1$  и  $X_3$  приводит к возникновению следующих уравнений:

$$\pm\alpha w_0 + \frac{\beta w_1}{\sqrt{2}}(e^{i\Delta\phi} + 1) = 0 \quad (5.28)$$

которые невозможно удовлетворить одновременно, чтобы обратить в нуль связь данного суперпозиционного состояния и с левым, и с правым волноводами.

Таким образом, ССК 1, возникающее в точке двухкратного вырождения  $E_1$  и  $E_2$  можно записать в следующем виде:

$$\psi_{BSC} = w_1(1 - e^{i\Delta\phi})\psi_{012} + w_0(e^{i\Delta\phi}\psi_{111} - \psi_{-111}) \quad (5.29)$$

Подставив в это уравнение (5.5):

$$\begin{aligned} \psi_{BSC} = & 2ie^{i\Delta\phi/2}[w_1 \sin(\Delta\phi/2)\psi_{01}(r)\psi_2(z) \\ & + w_0 \sin(\phi + \Delta\phi/2)\psi_{11}(r)\psi_1(z)] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Примечательно, что данное ССК не поддерживает потоков акустической мощности  $\vec{j} = -\omega Im(\psi^*\nabla\psi)$ , в отличие от коаксиальных волноводов [37]. Это происхо-

дит потому, что эванесцентные моды некоаксиально подключенных к резонатору волноводов снимают вырождение собственных мод  $\Psi_{mnl}$  по знаку  $m$ .

Мнимая часть собственных значений  $\widehat{H}_{eff}$  в зависимости от длины резонатора и угла поворота в укороченном базисе представлена на рис. 5.14. Красными кругами обозначены защищенные по симметрии ССК, возникающие при  $\Delta\phi = 0, \pi/4$ , когда в соответствии с (5.24) восстанавливается вырождение по  $m$  собственных мод  $\pm 111$ . Зелеными кругами обозначена точка (интерференционного) ССК 1 из таблицы 5.4. Стоит отметить хорошее соответствие с результатами, полученными при расчетах с использованием полного базиса.

Реальная часть волновой функции ССК 1 из таблицы 5.4 на поверхности резонатора показана на рис. 5.15, а на рис. 5.16 — то же для ССК 3 и 4. Видно, что это действительно два разных состояния, несмотря на то, что они очень близки по параметрам  $L$  и  $\omega$ .

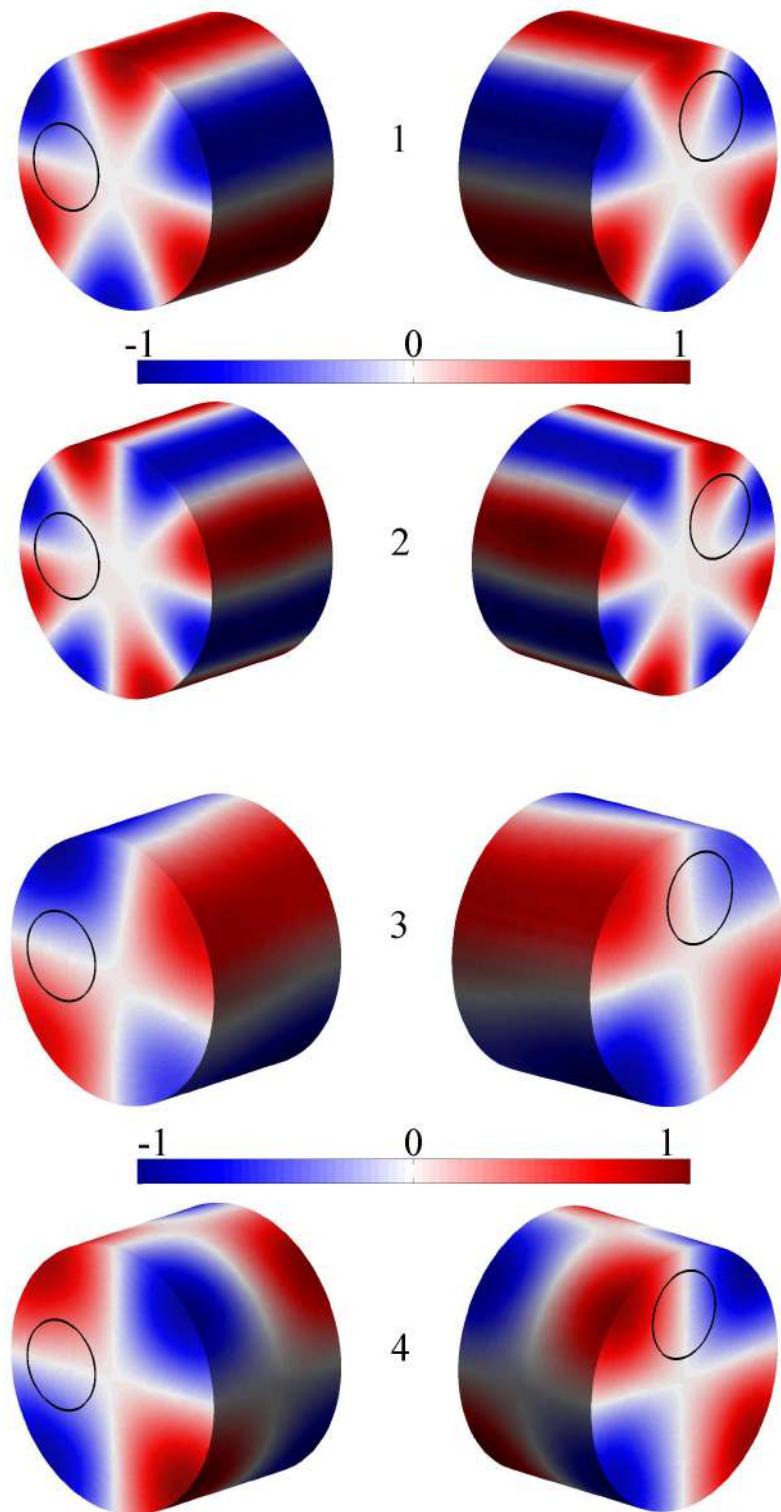


Рис. 5.9: Действительная часть волновых функций ССК, отмеченных на рис. 5.8 с параметрами из таблицы 5.2 на поверхности резонатора. Слева — со стороны левого торца, справа — со стороны правого, повернутого на  $\Delta\phi$ . Кругами обозначены места присоединения волноводов.

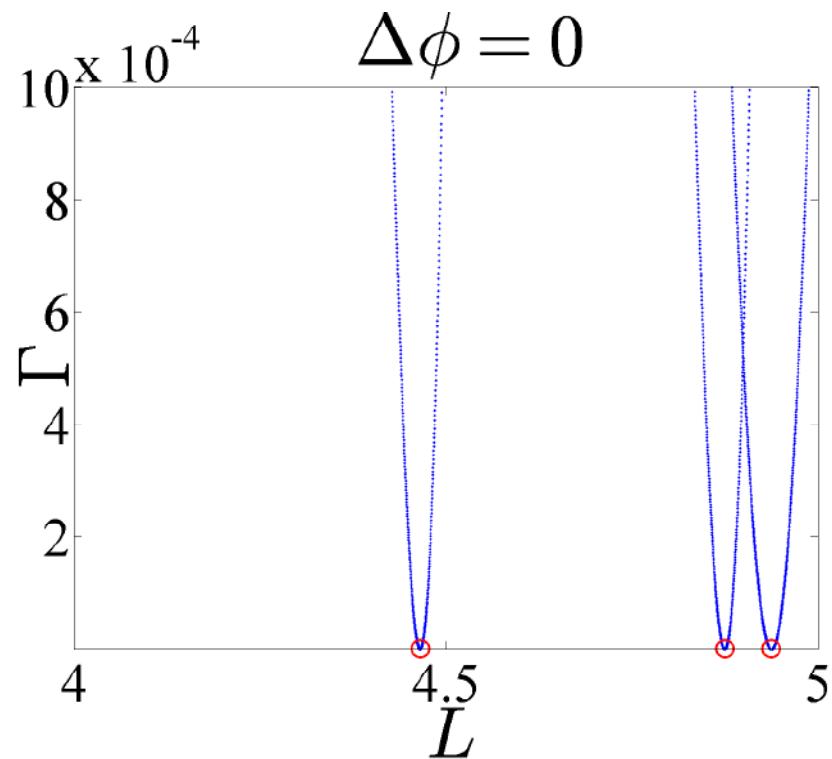


Рис. 5.10: Зависимость ширин резонансов от длины резонатора  $L$  при  $\Delta\phi = 0$ . Кругами обозначены точки ССК, параметры которых представлены в таблице 5.3.

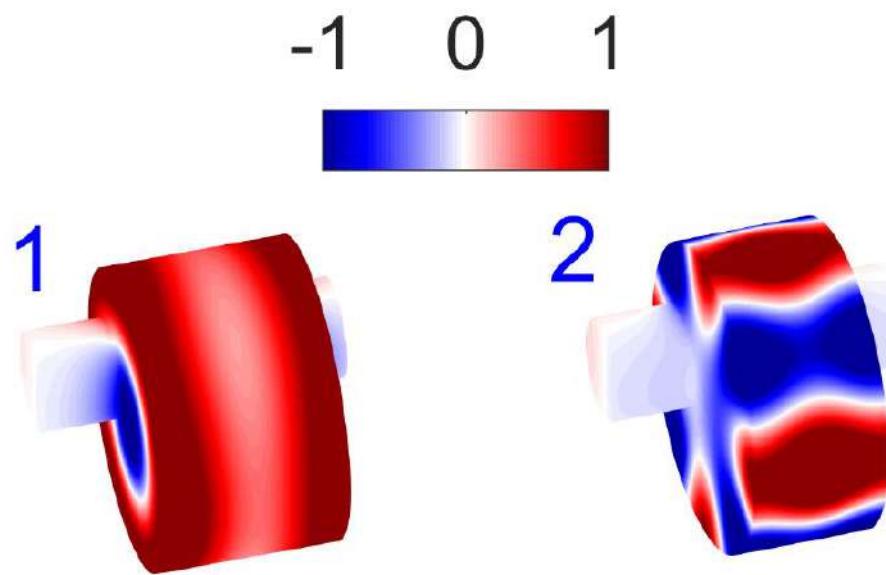


Рис. 5.11: Действительная часть волновых функций ССК 1 и 2 из таблицы 5.3 на поверхности системы.

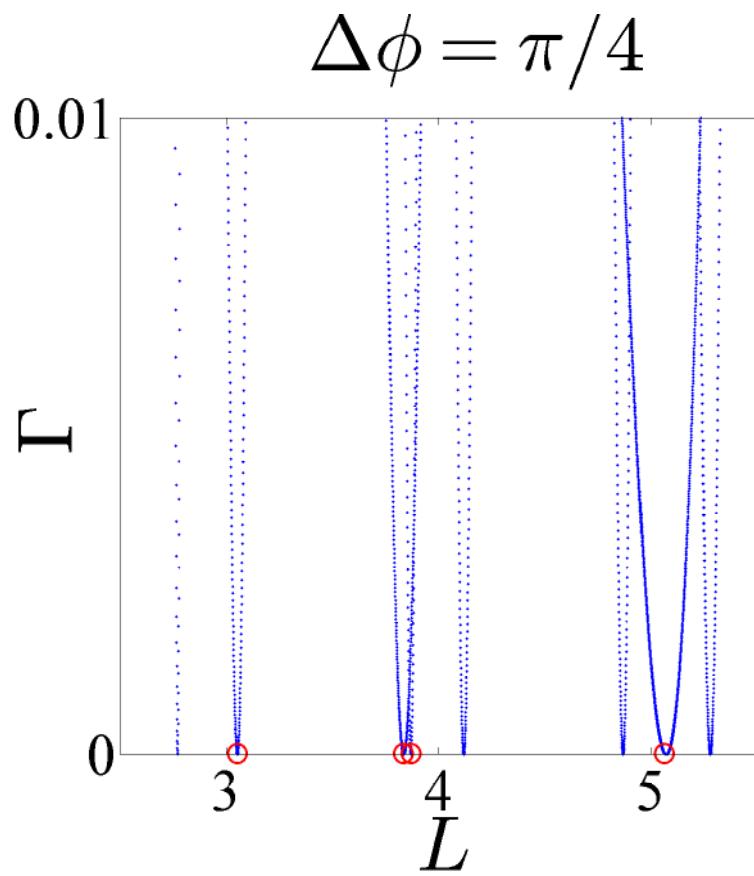


Рис. 5.12: Зависимость ширин резонансов от длины резонатора  $L$  при  $\Delta\phi = \pi/4$ .

Кругами обозначены точки ССК, параметры которых представлены в таблице 5.4.

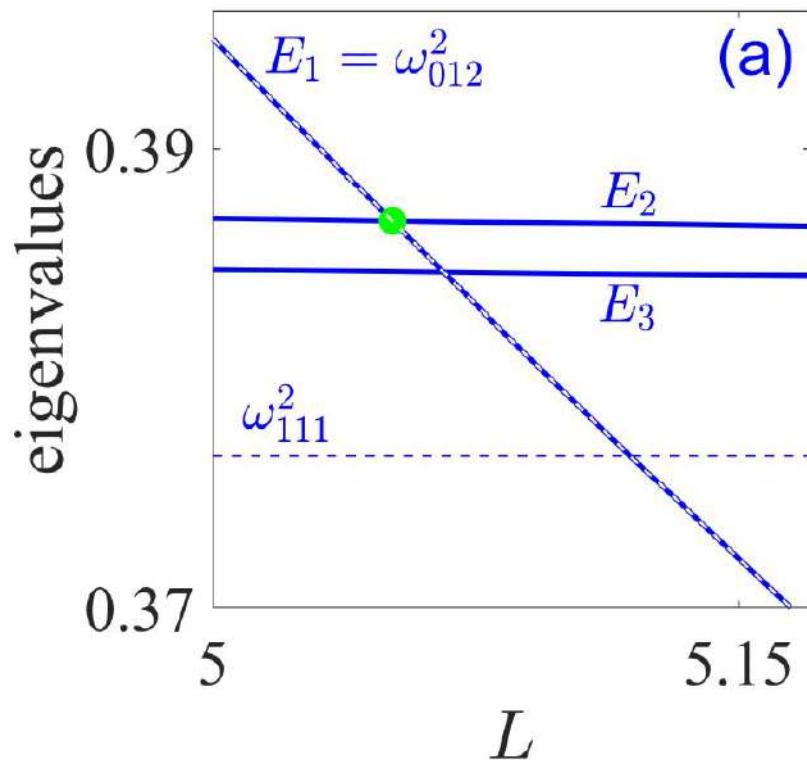


Рис. 5.13: Зависимость собственных уровней закрытого резонатора (пунктирные линии) и его собственных уровней, сдвинутых за счет влияния эванесцентных мод, от длины резонатора  $L$ .

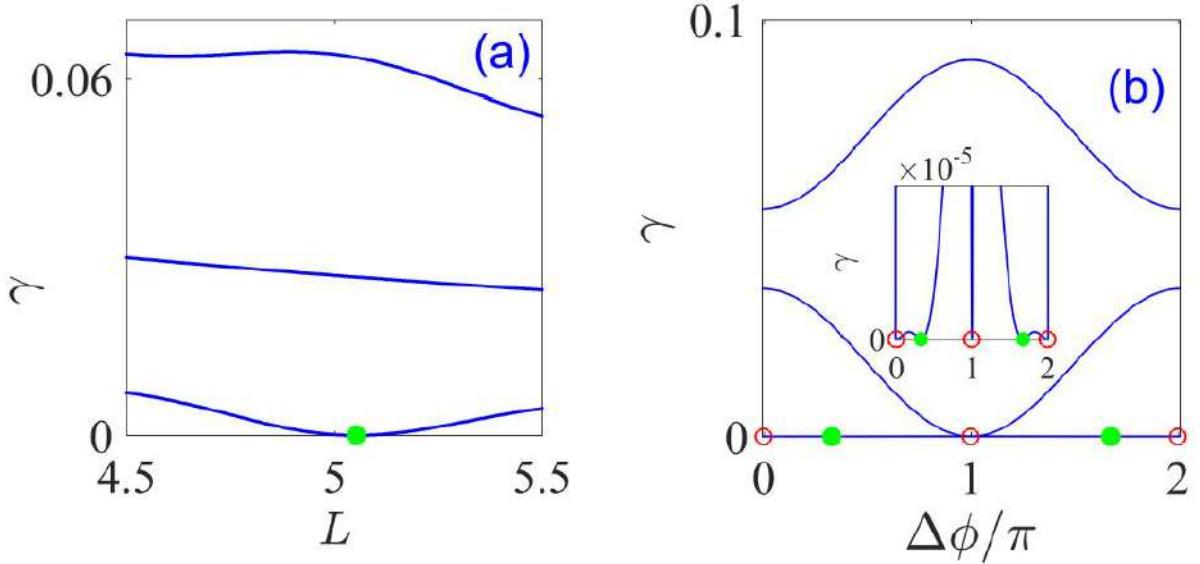


Рис. 5.14: Зависимость ширин резонансов, посчитанных с помощью укороченного эффективного Гамильтониана от (а) длины резонатора  $L$  при  $\Delta\phi = \pi/4$ , (б) угла поворота  $\Delta\phi$  при длине резонатора  $L = 5.065$ , соответствующей ССК 1 из таблицы 5.4. Кругами обозначены точки ССК, красными — защищенные по симметрии, зелеными — интерференционные.

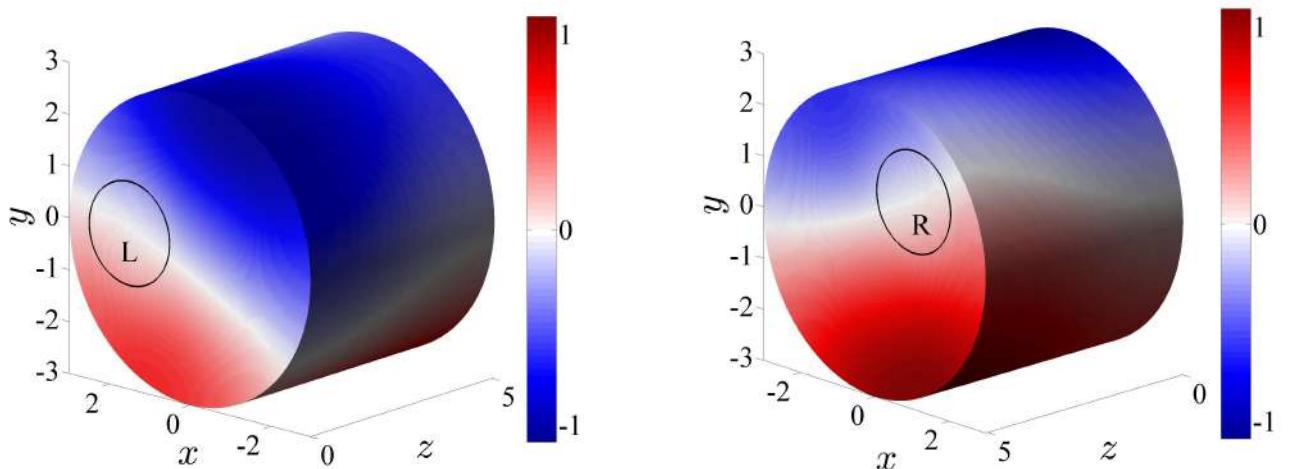


Рис. 5.15: Действительная часть волновой функции ССК 1 из таблицы 5.4 на поверхности резонатора. Кругами обозначены области подключения  $L$  — левого,  $R$  — правого волноводов.

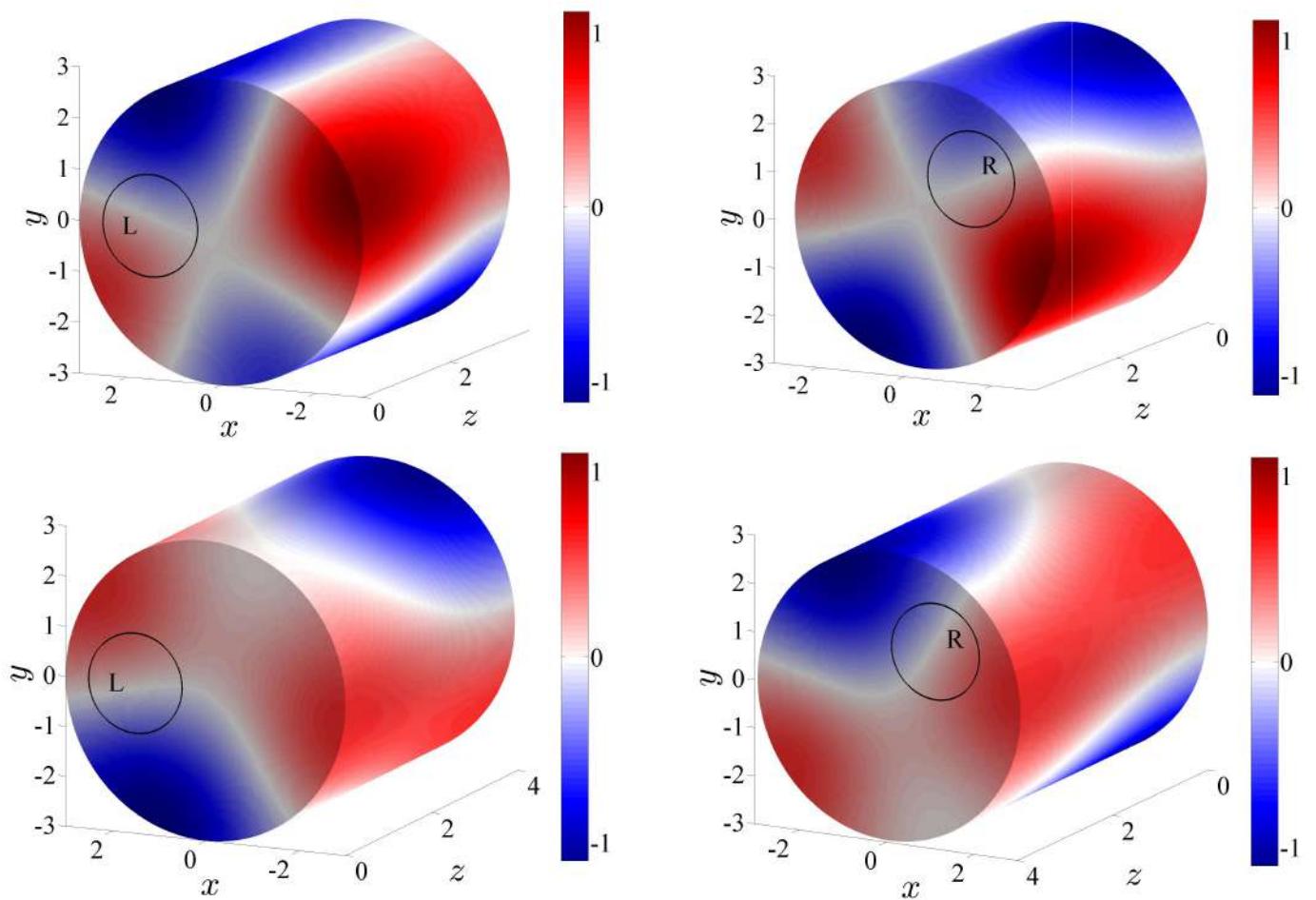


Рис. 5.16: Действительная часть волновых функций ССК 3 (верхняя пара) и ССК 4 (нижняя пара) из таблицы 5.4 на поверхности резонатора. Кругами обозначены области подключения  $L$  — левого,  $R$  — правого волноводов.

## Заключение

В диссертационной работе был проведен расчет проводимости Z- и П-образных электронных волноводов в зависимости от высоты потенциала управляющего электрода и расстояния между сгибами. Показано, что имеются различия в структуре матриц связи этих двух типов волноводов, вследствие чего вихри потоков вблизи сгибов П-образного волновода имеют одинаковое направление вращения, а в Z-образном врачаются в противоположных направлениях. Продемонстрировано, что данное обстоятельство приводит к значительным отличиям в картинах проводимости этих структур, причем эти отличия наиболее сильно проявляются при небольших расстояниях между сгибами.

Было также показано, что Z- и П-образные структуры с управляющим электродом можно рассматривать как транзисторы, способные контролировать не только свойства проводимости, но и резонансы, вплоть до обращения резонансной ширины в нуль, что соответствует образованию в системе связанных состояний в континууме (ССК). Установлено, что оба типа структур с двумя сгибами поддерживают ССК, образующиеся за счет двух различных механизмов — Фабри-Перо и механизма полной деструктивной интерференции Фридриха-Винтгена. Обратив внимание на эквивалентность квантовых волноводов и микроволновых систем с ТМ модами, можно предположить, что вполне возможно непосредственно наблюдать явление ССК в микроволновых волноводах, имеющих два сгиба под прямым углом — по особенностям на картине проводимости, в которых ее нуль пересекается с единицей — так называемым коллапсом Фано резонанса. В диэлектрическом резонаторе, расположенном в микроволновом волноводе, такие особенности уже были экспериментально обнаружены [44, 77].

Впервые было проведено последовательное исследование ССК в хаотическом биллиарде на примере аналога биллиарда Синая. Показано, что несмотря на отсутствие вырождения собственных уровней энергии закрытого биллиарда, в системе могут образовываться нетривиальные (не относящиеся к классу защищенных по симметрии) связанные состояния в континууме. Однако, в отличие от интегрируемых систем, в которых основным механизмом возникновения ССК является интерференционный механизм Фридриха-Вингена, в рассмотренной неинтегрируемой системе ССК образуются за счет "Accidental" механизма, то есть "случайного" обращения в нуль матричного элемента связи некоторого собственного состояния закрытого резонатора с распространяющимся решением волновода.

В диссертационной работе также были изучены трансмиссионные особенности и ССК в трехмерной акустической системе, которая представляет собой цилиндрический резонатор с некоаксиально подключенными к нему волноводами меньшего радиуса, оси которых "разнесены" на угол  $\Delta\phi$  (рис. 3). Примечательно, что изменение угла поворота  $\Delta\phi$  не меняет собственные уровни закрытого резонатора, а также никак не влияет на модуль матричных элементов связи. Тем не менее, комплексная фаза, которую приобретают матричные элементы связи повернутого волновода, значительно влияет на свойства системы. Таким образом, предложен новый для акустики способ настройки Фано резонансов, без перестройки собственных уровней системы — за счет вращения одного из волноводов вокруг оси резонатора. Показано, что система может выступать в роли "волнового крана": минимальные изменения  $\Delta\phi$  могут модифицировать трансмиссию системы, "открывая" или "закрывая" ее для распространяющейся волны. Установлено также, что ССК в такой системе не поддерживают орбитальные токи акустической мощности, в отличие от волновых функций рассеяния вблизи точек ССК.

## Благодарности

Я хочу выразить глубокую признательность своему научному руководителю, заведующему лабораторией теории нелинейных процессов Института физики им. Л. В. Киренского СО РАН, доктору физико-математических наук, профессору Садрееву Алмазу Фаттаховичу за постановку интересных и актуальных задач, многочисленные консультации и поддержку на всех этапах диссертационных исследований. Благодарю коллег Булгакова Евгения Николаевича, Пичугина Константина Николаевича и Максимова Дмитрия Николаевича за полученные от них ценные советы и замечания.

Я также хочу поблагодарить педагогический состав кафедры теоретической физики Сибирского Федерального Университета во главе с С. Г. Овчинниковым за те знания, которые они передали мне в студенческие годы и годы обучения в аспирантуре. Отдельную благодарность хочу выразить секретарю кафедры Шуваевой Евгении Владимировне за неоценимую помощь в решении административных вопросов. Также благодарю своих друзей и близких за всестороннюю поддержку, оказанную ими во время написания диссертационной работы.

Диссертационные исследования проводились при поддержке Российского научного фонда (грант 14-12-00266) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант 17-02-00440).

## Литература

- [1] Meier M. et al. Laser action from two-dimensional distributed feedback in photonic crystals //Applied Physics Letters. – 1999. – Т. 74. – №. 1. – С. 7-9.
- [2] Imada M. et al. Coherent two-dimensional lasing action in surface-emitting laser with triangular-lattice photonic crystal structure //Applied physics letters. – 1999. – Т. 75. – №. 3. – С. 316-318.
- [3] Noda S. et al. Polarization mode control of two-dimensional photonic crystal laser by unit cell structure design //Science. – 2001. – Т. 293. – №. 5532. – С. 1123-1125.
- [4] Miyai E. et al. Photonics: lasers producing tailored beams //Nature. – 2006. – Т. 441. – №. 7096. – С. 946-946.
- [5] Kodigala A. et al. Lasing Using Bound States in the Continuum //Laser Science. – Optical Society of America, 2016. – С. LTu1H. 5.
- [6] Kodigala A. et al. Lasing action from photonic bound states in continuum //Nature. – 2017. – Т. 541. – №. 7636. – С. 196-199.
- [7] Bulgakov E. N., Pichugin K. N., Sadreev A. F. All-optical light storage in bound states in the continuum and release by demand //Optics express. – 2015. – Т. 23. – №. 17. – С. 22520-22531.
- [8] Zhang M., Zhang X. Ultrasensitive optical absorption in graphene based on bound states in the continuum //Scientific reports. – 2015. – Т. 5. – С. srep08266.

- [9] Foley J. M., Young S. M., Phillips J. D. Symmetry-protected mode coupling near normal incidence for narrow-band transmission filtering in a dielectric grating //Physical Review B. – 2014. – T. 89. – №. 16. – C. 165111.
- [10] Yanik A. A. et al. Seeing protein monolayers with naked eye through plasmonic Fano resonances //Proceedings of the National Academy of Sciences. – 2011. – T. 108. – №. 29. – C. 11784-11789.
- [11] Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel plates: some experimental observations //Journal of Sound and Vibration. – 1966. – T. 4. – №. 1. – C. 62-72.
- [12] Parker R. Resonance effects in wake shedding from parallel plates: Calculation of resonant frequencies //Journal of Sound and Vibration. – 1967. – T. 5. – №. 2. – C. 330-343.
- [13] Rotter S. et al. Tunable Fano resonances in transport through microwave billiards //Physical Review E. – 2004. – T. 69. – №. 4. – C. 046208.
- [14] Von Neuman J., Wigner E. Über merkwürdige diskrete Eigenwerte. Über das Verhalten von Eigenwerten bei adiabatischen Prozessen //Physikalische Zeitschrift. – 1929. – T. 30. – C. 467-470.
- [15] Stillinger F. H., Herrick D. R. Bound states in the continuum //Physical Review A. – 1975. – T. 11. – №. 2. – C. 446.
- [16] Friedrich H., Wintgen D. Interfering resonances and bound states in the continuum //Physical Review A. – 1985. – T. 32. – №. 6. – C. 3231.
- [17] Marinica D. C., Borisov A. G., Shabanov S. V. Bound states in the continuum in photonics //Physical review letters. – 2008. – T. 100. – №. 18. – C. 183902.

- [18] Bulgakov E. N., Sadreev A. F. Bound states in the continuum in photonic waveguides inspired by defects //Physical Review B. – 2008. – T. 78. – №. 7. – C. 075105.
- [19] Efremidis N. K. et al. Discrete solitons in photorefractive optically induced photonic lattices //Physical Review E. – 2002. – T. 66. – №. 4. – C. 046602.
- [20] Cobelli P. J. et al. Experimental observation of trapped modes in a water wave channel //EPL (Europhysics Letters). – 2009. – T. 88. – №. 2. – C. 20006.
- [21] Cobelli P. J. et al. Experimental study on water-wave trapped modes //Journal of Fluid Mechanics. – 2011. – T. 666. – C. 445-476.
- [22] Robnik M. A simple separable Hamiltonian having bound states in the continuum //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 1986. – T. 19. – №. 18. – C. 3845.
- [23] Prodanović N. et al. Bound states in continuum: Quantum dots in a quantum well //Physics Letters A. – 2013. – T. 377. – №. 34. – C. 2177-2181.
- [24] Schult R. L., Ravenhall D. G., Wyld H. W. Quantum bound states in a classically unbound system of crossed wires //Physical Review B. – 1989. – T. 39. – №. 8. – C. 5476.
- [25] Nöckel J. U. Resonances in quantum-dot transport //Physical Review B. – 1992. – T. 46. – №. 23. – C. 15348.
- [26] Moiseyev N. Suppression of Feshbach resonance widths in two-dimensional waveguides and quantum dots: a lower bound for the number of bound states in the continuum //Physical review letters. – 2009. – T. 102. – №. 16. – C. 167404.

- [27] Exner P. et al. Bound states and scattering in quantum waveguides coupled laterally through a boundary window //Journal of Mathematical Physics. – 1996. – T. 37. – №. 10. – C. 4867-4887.
- [28] González J. W. et al. Bound states in the continuum in graphene quantum dot structures //EPL (Europhysics Letters). – 2010. – T. 91. – №. 6. – C. 66001.
- [29] Joannopoulos J. D. et al. Photonic crystals: molding the flow of light. – Princeton university press, 2011.
- [30] Ursell F. Trapping modes in the theory of surface waves //Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. – Cambridge University Press, 1951. – T. 47. – №. 2. – C. 347-358.
- [31] Callan M., Linton C. M., Evans D. V. Trapped modes in two-dimensional waveguides //Journal of Fluid Mechanics. – 1991. – T. 229. – C. 51-64.
- [32] Shahbazyan T. V., Raikh M. E. Two-channel resonant tunneling //Physical Review B. – 1994. – T. 49. – №. 24. – C. 17123.
- [33] Kim C. S., Satanin A. M. Dynamic confinement of electrons in time-dependent quantum structures //Physical Review B. – 1998. – T. 58. – №. 23. – C. 15389.
- [34] Sadreev A. F., Bulgakov E. N., Rotter I. Trapping of an electron in the transmission through two quantum dots coupled by a wire //Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters. – 2005. – T. 82. – №. 8. – C. 498-503.
- [35] Sadreev A. F., Bulgakov E. N., Rotter I. S-matrix formalism of transmission through two quantum billiards coupled by a waveguide //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2005. – T. 38. – №. 49. – C. 10647.

- [36] Hein S., Koch W., Nannen L. Trapped modes and Fano resonances in two-dimensional acoustical duct–cavity systems //Journal of fluid mechanics. – 2012. – T. 692. – C. 257-287.
- [37] McIver M. An example of non-uniqueness in the two-dimensional linear water wave problem //Journal of Fluid Mechanics. – 1996. – T. 315. – C. 257-266.
- [38] Sadreev A. F., Bulgakov E. N., Rotter I. Bound states in the continuum in open quantum billiards with a variable shape //Physical Review B. – 2006. – T. 73. – №. 23. – C. 235342.
- [39] Lyapina A. A. et al. Bound states in the continuum in open acoustic resonators //Journal of Fluid Mechanics. – 2015. – T. 780. – C. 370-387.
- [40] Volya A., Zelevinsky V. Non-Hermitian effective Hamiltonian and continuum shell model //Physical Review C. – 2003. – T. 67. – №. 5. – C. 054322.
- [41] Remacle F. et al. Trapping in competitive decay of degenerate states //Physics Letters A. – 1990. – T. 145. – №. 5. – C. 265-268.
- [42] Bulgakov E. N., Sadreev A. F. Spin polarized bound states in the continuum in open Aharonov–Bohm rings with the Rashba spin–orbit interaction //Journal of Physics: Condensed Matter. – 2016. – T. 28. – №. 26. – C. 265301.
- [43] Pan Y., Yang Z. Electronic structures and spin gapless semiconductors in BN nanoribbons with vacancies //Physical Review B. – 2010. – T. 82. – №. 19. – C. 195308.
- [44] Lepetit T., Kanté B. Controlling multipolar radiation with symmetries for electromagnetic bound states in the continuum //Physical Review B. – 2014. – T. 90. – №. 24. – C. 241103.

- [45] Bulgakov E., Sadreev A. Formation of bound states in the continuum for a quantum dot with variable width //Physical Review B. – 2011. – Т. 83. – №. 23. – С. 235321.
- [46] Hsu C. W. et al. Observation of trapped light within the radiation continuum //Nature. – 2013. – Т. 499. – №. 7457. – С. 188-191.
- [47] Evans D. V., Porter R. Trapped modes about multiple cylinders in a channel //Journal of Fluid Mechanics. – 1997. – Т. 339. – С. 331-356.
- [48] Utsunomiya T., Taylor R. E. Trapped modes around a row of circular cylinders in a channel //Journal of Fluid Mechanics. – 1999. – Т. 386. – С. 259-279.
- [49] Evans D. V., Porter R. Trapped modes embedded in the continuous spectrum //The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1998. – Т. 51. – №. 2. – С. 263-274.
- [50] Linton C. M., McIver M. Trapped modes in cylindrical waveguides //The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1998. – Т. 51. – №. 3. – С. 389-412.
- [51] Hein S., Koch W. Acoustic resonances and trapped modes in pipes and tunnels //Journal of Fluid Mechanics. – 2008. – Т. 605. – С. 401-428.
- [52] Duan Y., McIver M. Rotational acoustic resonances in cylindrical waveguides //Wave motion. – 2004. – Т. 39. – №. 3. – С. 261-274.
- [53] Ando T. Quantum point contacts in magnetic fields //Physical Review B. – 1991. – Т. 44. – №. 15. – С. 8017.
- [54] Rotter I. A continuum shell model for the open quantum mechanical nuclear system //Reports on Progress in Physics. – 1991. – Т. 54. – №. 4. – С. 635.

- [55] Okołowicz J., Płoszajczak M., Rotter I. Dynamics of quantum systems embedded in a continuum //Physics Reports. – 2003. – T. 374. – №. 4. – C. 271-383.
- [56] Sadreev A. F., Rotter I. S-matrix theory for transmission through billiards in tight-binding approach //Journal of Physics A: Mathematical and General. – 2003. – T. 36. – №. 45. – C. 11413.
- [57] Alhassid Y. The statistical theory of quantum dots //Reviews of Modern Physics. – 2000. – T. 72. – №. 4. – C. 895.
- [58] Datta S. Electronic transport in mesoscopic systems. – Cambridge university press, 1997.
- [59] Dittes F. M. The decay of quantum systems with a small number of open channels //Physics Reports. – 2000. – T. 339. – №. 4. – C. 215-316.
- [60] Maksimov D. N. et al. Coupled mode theory for acoustic resonators // Wave Motion. – 2015. – T. 56. – C. 52-66.
- [61] Bulgakov E. N. et al. Bound states in the continuum in open Aharonov-Bohm rings //JETP letters. – 2006. – T. 84. – №. 8. – C. 430-435.
- [62] Bulgakov E. N., Rotter I., Sadreev A. F. Comment on “Bound-state eigenenergy outside and inside the continuum for unstable multilevel systems” //Physical Review A. – 2007. – T. 75. – №. 6. – C. 067401.
- [63] Kim C. S. et al. Resonant tunneling in a quantum waveguide: Effect of a finite-size attractive impurity //Physical Review B. – 1999. – T. 60. – №. 15. – C. 10962.
- [64] Davies J. H., Larkin I. A., Sukhorukov E. V. Modeling the patterned two-dimensional electron gas: Electrostatics //Journal of Applied Physics. – 1995. – T. 77. – №. 9. – C. 4504-4512.

- [65] Sadreev A. F., Sherman E. Y. Effect of gate-driven spin resonance on the conductance through a one-dimensional quantum wire //Physical Review B. – 2013. – T. 88. – №. 11. – C. 115302.
- [66] Sokolov V. V., Zelevinsky V. G. Dynamics and statistics of unstable quantum states //Nuclear Physics A. – 1989. – T. 504. – №. 3. – C. 562-588.
- [67] Pichugin K., Schanz H., Šeba P. Effective coupling for open billiards //Physical Review E. – 2001. – T. 64. – №. 5. – C. 056227.
- [68] Feshbach H. Unified theory of nuclear reactions //Annals of Physics. – 1958. – T. 5. – №. 4. – C. 357-390.
- [69] Feshbach H. A unified theory of nuclear reactions. II //Annals of Physics. – 1962. – T. 19. – №. 2. – C. 287-313.
- [70] Weisshaar A. et al. Analysis of discontinuities in quantum waveguide structures //Applied Physics Letters. – 1989. – T. 55. – №. 20. – C. 2114-2116.
- [71] Wu J. C. et al. Interference phenomena due to a double bend in a quantum wire //Applied physics letters. – 1991. – T. 59. – №. 1. – C. 102-104.
- [72] Wang C. K., Berggren K. F., Ji Z. L. Quantum bound states in a double-bend quantum channel //Journal of applied physics. – 1995. – T. 77. – №. 6. – C. 2564-2571.
- [73] Mekis A. et al. High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides //Physical Review Letters. – 1996. – T. 77. – №. 18. – C. 3787.
- [74] Berggren K. F., Ji Z. L. Transition from laminar to vortical current flow in electron waveguides with circular bends //Physical Review B. – 1993. – T. 47. – №. 11. – C. 6390.

- [75] Sadreev A. F., Maksimov D. N., Pilipchuk A. S. Gate controlled resonant widths in double-bend waveguides: bound states in the continuum //Journal of Physics: Condensed Matter. – 2015. – Т. 27. – №. 29. – С. 295303.
- [76] Zhen B. et al. Topological nature of optical bound states in the continuum //Physical review letters. – 2014. – Т. 113. – №. 25. – С. 257401.
- [77] Lepetit T. et al. Resonance continuum coupling in high-permittivity dielectric metamaterials //Physical Review B. – 2010. – Т. 82. – №. 19. – С. 195307.