

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН

На правах рукописи

УДК 538.945

Погосов Вальтер Валентинович

**Сверхпроводники и разреженные сверхтекучие бозе-системы:
от микро- к макроуровню**

Специальность 01.04.02 – Теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА 1. Введение	6
1.1. Актуальность тематики	6
1.2. Исторический обзор	7
1.3. Цель работы	18
1.4. Основные результаты работы	18
1.5. Научная новизна, достоверность и личный вклад автора	20
1.6. Научная и практическая ценность	21
1.7. Список публикаций и апробация работы	23
ГЛАВА 2. Куперовское спаривание в подходе Ричардсона	29
2.1. Введение.	29
2.2. Вероятностный подход к уравнениям Ричардсона	31
2.2.1. Уравнения Ричардсона и термодинамический предел	31
2.2.2. Электростатическая аналогия	34
2.2.3. Обоснование вероятностного подхода	37
2.2.4. Электронно-дырочная симметрия и уравнения Ричардсона	45
2.2.5. Решение через биномиальные суммы	47
2.2.6. Факторизация вероятности	52
2.2.7. Оценка точности метода	53
2.2.8. Возбужденные состояния	56
2.3. Вириальное разложение	65
2.4. Приближение среднего поля и энергия связи куперовской пары.	69
2.5. Флуктуации и спаривание в наноразмерной системе	74
2.6. Краткие выводы	87
ГЛАВА 3. Вихревое состояние и флуктуации в системах малого размера: сверхпроводники и конденсаты атомов щелочных металлов.	91
3.1. Введение.	91

3.2. Фазовые диаграммы систем малого размера	95
3.2.1. Вихревое состояние в системах с подавленной поверхностной сверхпроводимостью	95
3.2.2. Гибридные структуры “сверхпроводник-ферромагнетик”	103
3.2.3. Спинорные конденсаты атомов щелочных металлов	109
3.3. Подавление поверхностного барьера температурными флуктуациями в сверхпроводящих островках.	118
3.3.1. Вводные замечания.	118
3.3.2. Поверхностный барьер.	121
3.3.3. Коэффициент вязкости	128
3.3.4. Время термоактивации	131
3.4. Подавление поверхностного барьера квантовыми флуктуациями	135
3.5. Температурные флуктуации, индуцированные геометрией системы	144
3.5.1. Вводные замечания.	144
3.5.2. Модель	145
3.5.3. Флуктуационные моды	146
3.5.4. Корреляционные функции	149
3.5.5. Результаты и их обсуждение	151
3.6. Проникновение вихря в конденсат в ловушке: роль пар “вихрь-антивихрь”.	156
3.6.1. Вводные замечания.	156
3.6.2. Модель	158
3.6.3. Устойчивость безвихревого состояния	160
3.6.4. Зарождение вихрей.	161
3.7. Температурное плавление вихревых кластеров в конденсатах	166
3.7.1. Вводные замечания.	166
3.7.2. Модель	168
3.7.3. Основное состояние	169

3.7.4.	Температурные флуктуации: гармоническое приближение . . .	170
3.7.5.	Плавление оболочек вихревых кластеров	173
3.7.6.	Вихри в ловушке с квадрупольной деформацией.	177
3.8.	Температурные флуктуации в спинорных конденсатах	182
3.8.1.	Вводные замечания.	182
3.8.2.	Конденсат со спином 1	183
3.8.3.	Конденсат со спином 2	190
3.9.	Краткие выводы	197
ГЛАВА 4. Вихревые решетки в сверхпроводниках: намагниченность, пиннинг, структура		203
4.1.	Введение.	203
4.2.	Обратимая намагниченность – вариационная модель	207
4.2.1.	Модель Клема и попытки ее обобщения	207
4.2.2.	Построение самосогласованной модели	213
4.3.	Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга.	219
4.3.1.	Вводные замечания.	219
4.3.2.	Фазовая диаграмма.	220
4.3.3.	Критический ток	229
4.4.	Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга и беспорядка: статика	232
4.4.1.	Модель	232
4.4.2.	Дефекты вихревой решетки	234
4.4.3.	Фазовая диаграмма.	241
4.5.	Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга и беспорядка: динамические режимы	252
4.6.	Краткие выводы	260

ГЛАВА 5. Коммутационная техника для экситонов Френкеля.	265
5.1. Введение.	265
5.2. Микроскопическая модель.	266
5.3. Коммутационная техника	278
5.4. Вычисление некоторых матричных элементов.	285
5.5. Энергия системы	288
5.6. Краткие выводы	297
Заключение	299
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Вычисление интеграла Норлунда-Райса методом седловой точки	304
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	313

ГЛАВА 1

Введение

1.1. Актуальность тематики

Развитие технологий и экспериментальной физики последних десятилетий позволило приступить к изучению сверхпроводящих и родственных им систем, характеризующихся пространственными и иными масштабами, недоступными еще в недавнем прошлом. Это - наноразмерные и наноструктурированные сверхпроводники, бозе-конденсаты в разреженных газах атомов щелочных металлов в магнитных и оптических ловушках, молекулярные экситоны в органических агрегатах, конденсаты поляритонов в микрополостях, межямные экситоны, высокотемпературные сверхпроводники и т. д.. Во многих из перечисленных случаев, речь идет о системах, находящихся в режиме перехода от микро- к макроуровню. В то же время, как известно, вопрос о том, как макроскопические свойства системы возникают по мере увеличения ее размеров, является достаточно нетривиальным. Изучение этой проблемы приобретает все большую актуальность в связи с бурным развитием методов миниатюризации и привлекает огромный интерес исследователей.

Помимо интереса с точки зрения фундаментальной науки, исследования в этом направлении, безусловно, перспективны и для технологических приложений (сверхпроводниковая электроника, квантовые компьютеры, квантовая криптография, органическая электроника, увеличение критического тока сверхпроводника и т.д.). Кроме того, они важны для дальнейшего развития методов теоретической и математической физики, применяемых к описанию физических явлений в таких системах, а также и для установления междисциплинарных связей между различными разделами современной физики.

Несмотря на то, что исследование сверхпроводимости и родственных явлений проводится весьма активно на протяжении уже десятилетий, целый круг проблем остается недостаточно изученным. Так, например, для описания куперовского спаривания в наноразмерных системах необходимо оставаться в представлении с фиксированным числом частиц и выходить за рамки приближения среднего поля. Всё это диктует необходимость создания новых подходов (или, по крайней мере, адаптации традиционных методов) к описанию сверхпроводников и родственных им систем, в которых можно было бы надлежащим образом учитывать размерные эффекты.

1.2. Исторический обзор

Явление сверхпроводимости было открыто Каммерлинг-Оннесом более ста лет назад [1]. Явление это было столь необычным для физики твердого тела, что понадобилось около пятидесяти лет для того, чтобы разработать приемлемое его описание на микроскопическом уровне, хотя с точки зрения феноменологии к этому времени и был достигнут внушительный прогресс – прежде всего, благодаря работам Лондонов, Гинзбурга, Ландау и Абрикосова [2–4].

Важную роль в объяснении сверхпроводимости сыграла догадка Фрелиха, который впервые указал на возможность пары электронов в твердом теле формировать связанное состояние [5]. Затем последовала работа Купера [6], который рассмотрел дополнительную пару электронов, добавленную поверх моря Ферми невзаимодействующих электронов в слой, в котором действует добавочное притяжение между ними. Ширина этого слоя соответствует частоте Дебая, что призвано описать тот факт, что притяжение между электронами возникает из их взаимодействия с фононами. Таким образом, в задаче Купера рассматривается двухчастичная конфигурация. Оказалось, что притяжение между электронами, насколько бы слабым оно ни

было, приводит к формированию связанного состояния пары электронов. Это важное обстоятельство связано с тем, что в “слое Дебая” имеется ненулевая плотность одночастичных электронных состояний.

В знаменитой статье [7], опубликованной в следующем году, Бардину, Куперу и Шрифферу (БКШ) удалось обобщить эти идеи на систему из макроскопически большого количества взаимодействующих электронов. Эта работа ознаменовала собой решающий этап на пути микроскопического описания феномена сверхпроводимости. В задаче, рассмотренной авторами [7], полагалось, что слой с взаимодействием располагается симметрично по обе стороны от поверхности Ферми, так что пары формируются электронами из этого слоя. Нетрудно заметить, что такую конфигурацию можно себе представить и несколько по-иному, руководствуясь соображениями непрерывности при переходе от задачи Купера – мысленно добавляя электроны в слой из задачи Купера, пока он не заполнится ровно наполовину. При этом, вообще говоря, можно на каждом шаге решать квантовомеханическую задачу многих тел. Здесь однако возникают некоторые сложности, связанные с необходимостью учитывать принцип Паули в системе с фиксированным числом частиц.

Эффективный путь преодоления этой проблемы и был предложен Бардиным, Купером и Шриффером, которые вместо этого использовали представление большого канонического ансамбля с фиксированным химическим потенциалом и переменным числом частиц (аналогичный метод применен в теории Горькова, оперирующей функциями Грина [8]). Как известно, оба подхода дают идентичные результаты в термодинамическом пределе. Отметим, что принципиальная возможность построения полноценной “канонической” теории сверхпроводимости была показана еще Боголюбовым [9], хотя технически задача на этом пути чрезвычайно усложняется - необходимо продолжить дальше цепочку уравнений для функций Грина, обрывая ее позже, чем это делается в теории Горькова. Более того, относи-

тельная легкость, с которой переход к представлению с переменным числом частиц позволяет преодолеть эти сложности, представляется крайне нетривиальной и даже несколько загадочной.

В теории БКШ, если говорить об ее оригинальной формулировке, квантовомеханическая задача решается с помощью вариационной функции для многочастичной волновой функции системы. Примерно в то же время иной способ решения этой же задачи был предложен Боголюбовым. В методе Боголюбова также фигурирует большой канонический ансамбль, а задача решается с помощью приближенной диагонализации гамильтониана путем введения операторов рождения и уничтожения квазичастиц. Результаты обоих подходов идентичны. Можно сказать, что оба используют приближение среднего поля. В то же время, подход Боголюбова технически намного проще и изящнее.

Точность метода среднего поля в приложении к теории БКШ исследовалась в ряде работ разных авторов [10–12]. Особенно большое внимание этому вопросу уделено в работах Боголюбова с соавторами. Общий вывод состоит в том, что метод является точным в термодинамическом пределе при нуле температур, если в нем используется так называемый редуцированный потенциал БКШ, спаривающий лишь электроны с противоположными импульсами. Здесь тем не менее стоит упомянуть, что в каждой своей последующей работе на эту тему Боголюбов с соавторами признавал аргументы предыдущих своих работ недостаточными [10], что указывает на нетривиальность проблемы. В недавней работе [13] утверждается, что теория БКШ дает неверные результаты для специфических корреляционных функций между наивысшими занятыми (HOMO) и наинизшими свободными (LUMO) состояниями. Если данный вывод и верен, остаётся не ясным, на каких измеримых величинах это отражается.

Заметим, что переход от задачи Купера к конфигурации БКШ представляет интерес и в контексте изучения перехода от конденсата Бозе-

Эйнштейна индивидуальных фермионных молекул к конденсату протяженных пар в режиме БКШ (переход БЭК-БКШ), который сейчас вызывает огромный интерес в связи с возможностью его реализации в ультрахолодных газах атомов щелочных металлов, где характерным размером пары можно манипулировать с помощью резонансов Фешбаха [14–17]. Действительно, в задаче Купера мы имеем дело с изолированной фермионной парой, а в режиме БКШ реализуется плотный режим таких пар, когда на масштабе размера пары помещается огромное их количество. Помимо ультрахолодных газов режим перехода между двумя пределами, как считается рядом авторов, может реализовываться и в высокотемпературных сверхпроводниках [18, 19].

Интересно, что связь между задачей Купера и режимом БКШ, в контексте изменения плотности пар, обсуждалась еще самими создателями теории БКШ. Так, в своей книге Шриффер [20] довольно категорически высказывается о том, что чрезвычайно сильное перекрытие волновых функций пар в режиме БКШ делает эту систему качественно отличной от рассмотренной в задаче Купера изолированной молекулы, так что физически эти пределы совершенно разные. Возможно, в появлении этой категоричности свою роль сыграли неудачи Шаффрофа и Блатта построить первую микроскопическую теорию сверхпроводимости, отталкиваясь от идеи об индивидуальных парах, которые при приближении к некоторой температуре сверху испытывают конденсацию. Этот подход также подвергался критике Шриффера [20].

В рамках теории среднего поля, переход БЭК-БКШ впервые был исследован в работах Игlsa [21] и Леггетта [22]. Игльс рассматривал эту задачу в контексте физики твердого тела, имея в виду ее приложение к описанию сверхпроводников с малой концентрацией носителей заряда (которые поэтому напоминают недодопированные высокотемпературные сверхпроводники). При этом перекрытие волновых функций пар в модели Игlsa осуществлялось за счет подстройки концентрации носителей (допирования). Леггетт имел в виду контекст атомной физики, и “подстраивал” силу взаи-

модействия между фермионами при их фиксированной концентрации. Тем не менее, выводы обеих работ одинаковы - переход плавлен, вдоль него не наблюдается никаких скачков (тем не менее, Леггетт оговаривается [22], что в окрестности перехода приближение среднего поля вполне может переставать работать). Леггетт придает этому факту серьезное значение, утверждая, что режимы БЭК и БКШ не столь уж отличны друг от друга, как утверждал Шриффер. Также Леггетт признает определенную ценность идей Шаффрофа и Блатта и предлагает качественную картину куперовских пар в режиме БКШ в виде “гигантских молекул”.

Поскольку в режиме перехода БЭК-БКШ сильны флуктуации, представляет интерес исследование этого перехода с выходом за рамки среднеполевых приближений. Этому вопросу посвящено большое число теоретических работ. Однако контролируемые методы решения этой задачи отсутствуют даже для случая редуцированного потенциала БКШ, который спаривает лишь электроны с противоположными импульсами. Остается не до конца ясным, насколько хорошо здесь работает приближение среднего поля. Данный вопрос имеет важное научное значение, поскольку переход, в некотором смысле, можно считать областью с сильным взаимодействием. Действительно, в пределе БЭК пары представляют собой почти изолированные объекты, которые между собой слабо взаимодействуют. В пределе БКШ поверхность Ферми невзаимодействующих частиц лишь слегка размыта ввиду сверхпроводящих корреляций, так что это состояние можно также считать режимом со слабым взаимодействием. Как известно, системы многих тел с сильным взаимодействием довольно плохо поддаются теоретическому описанию с помощью контролируемых аппроксимаций.

Выход за рамки среднеполевых приближений, основанных на большом каноническом ансамбле, необходим и при исследовании свойств наноразмерных сверхпроводников, способных вместить в себя лишь небольшое число пар. Здесь перестает работать сама идея большого канонического ан-

самбля, а кроме того и приближение среднего поля, в любых его вариациях, также приводит к погрешностям [23]. И действительно, к настоящему времени твердо установлено, что теория БКШ дает даже качественно неверные результаты для наноразмерных систем, предсказывая полное исчезновение сверхпроводящих корреляций при определенных условиях, тогда как они в реальности выживают [23]. Удовлетворительное описание перехода от такого режима к макроскопическому режиму теории БКШ также отсутствует.

Таким образом, представляется чрезвычайно актуальным развитие подходов и техник к решению задач с парами фермионов, которые позволяли бы выходить за рамки приближения среднего поля, оставаясь, по возможности, в рамках представления с фиксированным числом частиц. Поскольку фермионные пары встречаются в большом количестве реальных физических систем, начиная от нейтронных звезд и заканчивая полупроводниками, задача имеет важное междисциплинарное значение.

Проблема учета фермионной статистики для составных бозонов возникает и для экситонов [24–26]. От куперовских пар в обычных сверхпроводниках экситоны отличает прежде всего то, что здесь мы имеем дело с системой, характеризуемой относительно небольшой концентрацией составных бозонов, тогда как в случае куперовских пар на размере пары уместается огромное их число. Экситоны способны образовывать конденсат Бозе-Эйнштейна [27–29]. Одним из двух основных видов экситонов являются экситоны Френкеля [30] (наряду с экситонами Ванье-Мотта), для которых возбуждение локализовано на одном узле кристаллической решетки и переносится по системе от узла к узлу. Интерес к экситонам Френкеля в настоящее время значительно усилился из-за активных исследований молекулярных агрегатов, в которых такие экситоны реализуются, поскольку электроны в них остаются связанными [31]. Молекулярные агрегаты открывают возможность создания новых материалов для оптических технологий. Проблема учета фермионной статистики для составляющих экситоны Френкеля

электронов и дырок обсуждается достаточно давно [32–39], однако вычисления проводились лишь для задач, в которых фигурировали два экситона. Для произвольного их количества проблема становится технически значительно сложнее. Поэтому разработка систематического метода, с помощью которого можно было бы проводить вычисления в случае произвольного количества экситонов Френкеля, представляется важной и актуальной проблемой.

При увеличении размеров сверхпроводящих систем (и атомных конденсатов в ловушках) до характерных масштабов длины когерентности, по всей видимости, уже становятся применимыми среднеполевые методы описания (по крайней мере, если речь идет об обычных низкотемпературных сверхпроводниках или атомных конденсатах за пределами области перехода к режиму БКШ). Исследование подобных объектов – сверхпроводников и конденсатов атомов в ловушках – представляется весьма актуальным в связи с впечатляющими успехами в развитии технологий, который позволяет изучать их экспериментально.

Заметим, что впервые сверхпроводящее состояние в мезоскопических цилиндрах (оловянных) изучалось экспериментально еще в работах [40–42] путем измерения магнитной восприимчивости. За последние 10-15 лет был проведен ряд экспериментальных исследований магнитных свойств мезоскопических сверхпроводников микрометровых и нанометровых размеров. В работе [43] исследовались полевые зависимости намагниченности системы тонких индиевых дисков радиусом порядка длины когерентности (порядка одного микрона). Группа под руководством Мощалкова [44] исследовала переход сверхпроводников различной формы и размеров в нормальное состояние с ростом внешнего магнитного поля. В этих экспериментах измерялось сопротивление образцов. Эксперименты со свинцовыми образцами были проведены в [45], а в [46] изучались алюминиевые мезоскопические диски, кольца и проволоки. Одним из наиболее интересных результатов всех этих работ является то, что поверхностное критическое

поле оказывается осциллирующей функцией поперечных размеров образца и температуры и существенно зависит от формы образца, увеличиваясь для образцов с острыми углами. Намагниченность с изменением поля вела себя скачкообразно. В дальнейшем Гейм и др. предложили бесконтактный способ измерения намагниченности мезоскопических дисков при помощи холловских датчиков субмикронных размеров [47]. С помощью этого метода были исследованы одиночные алюминиевые диски радиусом вплоть до 0,1 мкм. Используемая методика позволила авторам [47] изучить с большой точностью особенности поведения намагниченности. Этой же экспериментальной группой [48] в мезоскопических дисках наблюдался парамагнитный эффект Мейсснера, заключающийся в том, что направление намагниченности совпадает с направлением внешнего поля. Отметим, что данный эффект в мезоскопических образцах также был обнаружен в [49, 50], где исследовались ниобиевые диски. В зависимости от толщины диска переходы из сверхпроводящего в нормальное состояние были как второго, так и первого рода. В поведении намагниченности наблюдались сильные гистерезисные эффекты. Эксперименты [51] с алюминиевыми дисками продемонстрировали, что вихри могут нести магнитный поток, как меньший, так и больший одного кванта потока. В ряде случаев вход очередного вихря в образец сопровождался даже уменьшением полного потока.

Несколько лет назад интерес к исследованию малоразмерных сверхпроводников возобновился в связи с развитием метода роста наноструктур в ультраразреженном вакууме, благодаря которому стало возможным получать свинцовые островки с поперечными размерами в десятки и сотни нанометров и толщиной в небольшое число моноатомных слоёв [52–54]. Сверхпроводящее состояние в них изучают с помощью методов сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии с огромной точностью, что позволило изучить структуру вихревой сердцевинки единичных вихрей. Исследуемые системы имеют столь малые размеры, что температурные и

квантовые флуктуации в них способны оказывать значительное влияние на физику топологических дефектов. Данная область остается практически не исследованной – несмотря даже на потенциальную важность ее для технологий. С другой стороны, вопросы, связанные с температурными флуктуациями в конденсатах атомов щелочных металлов в ловушках, также исследованы весьма слабо.

При переходе к системам макроскопического размера роль масштаба длины когерентности полностью не исчезает, поскольку именно этот масштаб задает размер сердцевинки единичного вихря. Отдельный вихрь Абрикосова имеет нитевидную структуру: на его оси параметр порядка подавлен до нуля, и характерным масштабом пространственного изменения параметра порядка является длина когерентности. Вихрь окружен сверхпроводящими токами, затухающими на расстоянии порядка лондонской глубины проникновения магнитного поля от сердцевинки вихря. В массивном изотропном сверхпроводнике в отсутствие дефектов вихри Абрикосова образуют правильную треугольную решетку. При этом каждый вихрь несет один квант магнитного потока. С увеличением магнитного поля расстояния между соседними вихрями уменьшаются, и модуль параметра порядка в сверхпроводнике подавляется. Вблизи второго критического поля сердцевинки вихрей начинают существенно перекрываться.

Наиболее просто вихревую решетку в массивном образце можно описать в области малых полей, вблизи первого критического поля H_{c1} . В этом случае сердцевинки вихрей Абрикосова занимают лишь малую часть объема сверхпроводника, что позволяет рассматривать смешанное состояние как совокупность отдельных взаимодействующих нитей. Для описания магнитных свойств сверхпроводников здесь применяется лондонская модель, в которой не учитывается пространственное изменение модуля параметра порядка в сердцевинах вихрей при расчете локальных полей и токов вне вихревых сердцевин. Эти величины, в свою очередь, требуются для расчета

намагниченности сверхпроводника. Заметим, что намагниченность сверхпроводников второго рода является их фундаментальной электромагнитной характеристикой. С ее помощью могут быть найдены основные параметры сверхпроводника. В больших полях лондоновская модель неприменима, так как плотность вихрей в этом случае велика. Модуль параметра порядка мал, и первое уравнение Гинзбурга-Ландау можно линеаризовать. Поведение намагниченности вблизи второго критического поля H_{c2} описывается известной теорией Абрикосова.

Таким образом, намагниченность может быть описана аналитически только в интервалах малых и больших полей. Между тем, для обработки экспериментальных данных по измерению намагниченности важен промежуточный интервал полей, так как, например, в высокотемпературных сверхпроводниках поле H_{c2} очень велико (порядка сотни тесла), и промежуток полей вблизи H_{c2} практически недоступен для экспериментального исследования. Данный промежуток полей может быть доступен только при температурах, очень близких к критической температуре. Однако в этом случае существенный вклад в намагниченность дают флуктуации параметра порядка, что значительно затрудняет анализ экспериментальных данных. Интервал малых полей тоже ненадежен из-за поверхностных эффектов и пиннинга. Таким образом, обратимая намагниченность наиболее удобно поддается экспериментальному изучению в промежуточном интервале полей. В этой связи представляется важным получить формулы для намагниченности сверхпроводника, которые были бы пригодны для количественных расчетов в широком диапазоне внешних магнитных полей, включая промежуточные поля, в которых сердцевинки вихрей играют важную роль. Эта проблема уже давно обсуждается в литературе.

Дополнительный пространственный масштаб в макроскопических сверхпроводниках возникает и из-за присутствия центров пиннинга, образующихся на неоднородностях. Центры пиннинга зацепляют вихревые нити,

искажая вихревую решетку. При пропускании через систему транспортного тока они блокируют движение вихрей вплоть до некоторого значения тока, называемого критическим током. Данный феномен имеет важное прикладное значение, поскольку движение вихрей в системе сопровождается диссипацией энергии, которой, конечно, в сверхпроводящих устройствах следует избегать. По этой причине исследованию феномена пиннинга и попыткам его оптимизации посвящено огромное число работ [55, 56]. Одним из перспективных направлений здесь является создание искусственных центров пиннинга с помощью современных нанотехнологических методов, которые позволяют формировать более эффективные центры, чем те, что возникают естественным образом. Так, если расположить центры пиннинга в узлах квадратной регулярной решетки, можно значительно повысить величину критического тока [57–60]. Центры пиннинга при этом представляют собой либо просто отверстия в сверхпроводящей пленке, либо ферромагнитные точки с размерами порядка десятка нанометров. Интересно, что системы периодических центров пиннинга для вихрей можно создавать и в конденсатах атомов щелочных металлов, в которых соответствующие модуляции плотности атомов вызываются лазерными лучами [61].

На структуру вихревой решетки в периодических потенциалах должен оказывать влияние и беспорядок, который так или иначе присутствует в любой системе. Он влияет и на величину критического тока. Помимо интереса с точки зрения прикладной физики, задача исследования структуры решетки в присутствии и регулярного, и случайного потенциалов представляет интерес и для фундаментальной науки – в контексте изучения переходов между упорядоченными и разупорядоченными фазами. Заметим, что проблема эта представляется достаточно общей, поскольку она возникает в разных областях современной физики (например, слоистые сверхпроводники, волны зарядовой и спиновой плотности, коллоиды на периодических подложках).

1.3. Цель работы

Настоящая диссертационная работа преследует следующие цели: 1) разработка новых методов решения уравнений Ричардсона для систем, описываемых гамильтонианом теории Бардина-Купера-Шриффера (БКШ), и исследование с их помощью коррелированного состояния с учетом размеров системы; 2) изучение топологических дефектов и флуктуаций в системах малого размера – сверхпроводниках и конденсатах разреженных газов атомов щелочных металлов в ловушках; 3) исследование структуры и свойств вихревых решеток в сверхпроводниках второго рода, в том числе, в присутствии одновременно беспорядка и искусственного периодического потенциала пиннинга; 4) разработка нового метода описания экситонов Френкеля, представляющих из себя один из примеров разреженных бозе-систем, с учетом фермионной статистики для составляющих экситоны электронов и дырок.

Несмотря на разнообразие задач, рассмотренных в диссертации, во всех них анализируются свойства систем, в которых возможно явление бозе-конденсации. Особое внимание уделяется вопросу о том, как свойства таких систем меняются при переходе от микроуровня к макроуровню.

1.4. Основные результаты работы

1. Предложен новый подход к нахождению решений уравнений Ричардсона (анзаца Бете) в термодинамическом пределе. Решение реконструируется с помощью методов интегрирования на комплексной плоскости. Аналитически рассчитаны соответствующие многомерные интегралы сельберговского типа. Метод может быть распространен на случаи других уравнений Бете.
2. Показано, что в термодинамическом пределе обобщение среднеполевой теории БКШ дает точные результаты для энергий основного и перво-

го возбужденного состояний вдоль всего перехода от конденсата БКШ к конденсату БЭК локальных пар при нуле температур. Предложена интерпретация результатов теории БКШ в терминах энергии связи изолированной пары, которая обеспечивает существование энергетического масштаба, отличающегося от сверхпроводящей щели.

3. Продемонстрировано существование скрытой симметрии между спаренными электронами и спаренными дырками в модели Ричардсона. Предложена формула для энергии основного состояния системы, применимая вдоль всего перехода от конденсата БКШ в термодинамическом пределе к режиму доминирования флуктуаций в ультрамалых системах. Выявлена роль масштаба энергии, относящегося к энергии связи изолированной пары: когда расстояния между соседними одноэлектронными уровнями становятся сопоставимыми с этой величиной, приближение среднего поля перестает давать точные результаты.
4. Исследованы вихревые фазовые диаграммы мезоскопических сверхпроводников, гибридных структур “сверхпроводник-ферромагнетик” и бозе-конденсатов атомов щелочных металлов. Предложен механизм проникновения вихрей в бозе-конденсат через образование пар “вихрь-антивихрь”.
5. Построена модель термоактивационного проникновения вихря в ультрамалый сверхпроводящий островок. Вычислено среднее время проникновения. Предложено объяснение экспериментально наблюдаемому подавлению магнитного гистерезиса в ультрамалых островках из свинца. Исследовано подавление поверхностного барьера за счет квантовых флуктуаций и установлены критерии перехода от квантового туннелирования вихря к термоактивации. Предсказано существование индуцированных геометрией флуктуаций параметра порядка в островках сложной формы с углами.
6. Для спинорных конденсатов атомов щелочных металлов предсказано существование сильных температурных флуктуаций разностей фаз между

- различными компонентами параметра порядка. Предсказан переход типа перехода с потерей огранки в циклической фазе конденсата со спином 2. Рассчитаны температуры плавления вихревых кластеров в скалярных конденсатах и выявлена их сильная зависимость от симметрии таких кластеров.
7. Предложена вариационная модель для вычисления обратимой намагниченности сверхпроводника второго рода, применимая во всем диапазоне полей между первым и вторым критическими полями. Модель позволяет учитывать перекрытие сердцевин вихрей в промежуточных полях, а также общее подавление параметра порядка.
 8. Исследована структура вихревой решетки и критические токи в присутствии периодической системы центров пиннинга с учетом межвихревого отталкивания, приводящего к существованию необычных фаз. Исследована эта же система, но с дополнительным беспорядком. Выявлено существование богатой фазовой диаграммы системы. Построена единая картина эволюции дефектов решетки. Проанализированы динамические режимы, возникающие при пропускании через систему тока. Выявлена роль дефектов типа “кинк”, а также пар “кинк-антикинк”.
 9. Предложено многочастичное описание для экситонов Френкеля, в котором самосогласованно учитывается фермионная статистика для составляющих их электронов и дырок. Для этого применены специальные диаграммная и коммутационная техники. Рассчитана энергия основного состояния системы в первом приближении по взаимодействию экситонов.

1.5. Научная новизна, достоверность и личный вклад автора

Основные результаты диссертационной работы получены впервые, её выводы обоснованы надежностью применявшихся аналитических методов и согласием с данными физических и численных экспериментов, выполнен-

ных другими авторами, где сравнение представилось возможным.

Приведенные в диссертации результаты получены автором. В ряде разделов материалы получены вместе с экспериментаторами, либо с соавторами, выполнявшими численные симуляции, - в этих случаях соискатель разрабатывал теоретические модели.

1.6. Научная и практическая ценность

Развитые в диссертационной работе методы могут быть использованы для описания широкого круга явлений в сверхпроводящих, сверхтекучих, а также иных системах.

Предложенные в диссертационной работе методы решения уравнений Ричардсона существенно обогащают данный раздел физики, а также представляют интерес в более широком контексте с точки зрения точно решаемых моделей статистической физики и техники анзаца Бете. Представляется, что данные методы могут быть обобщены на случай системы конечных размеров и конечные температуры. Можно пытаться использовать процедуру усреднения на комплексной плоскости, с соответствующей весовой функцией, для отыскания корреляционных функций в исходном пространстве. Кроме того, метод нахождения решений уравнений с помощью сельберговских интегралов вскрывает новые связи данного раздела физики с конформными теориями поля и теорией случайных матриц.

В диссертационной работе выявлено существование симметрии между парами электронов и парами дырок в моделях ричардсоновского типа, что является дополнительным инструментом анализа решений этих уравнений. В частности, с использованием этой симметрии впервые удалось получить простую формулу для энергии основного состояния в переходной области между конденсатом БКШ и режимом, в котором доминируют флуктуации (релеватном для ультрамалых систем). Предложен и исследован дополни-

тельный масштаб энергии, представляющий собой энергию связи изолированной пары. Показано, как обычные результаты теории БКШ могут быть интерпретированы в терминах этой величины. Данный масштаб проявляет себя явно в системах малого размера - когда расстояния между уровнями становятся сопоставимы с этой величиной, теория БКШ перестает быть точной.

В диссертационной работе было предсказано существование ряда флуктуационных эффектов в сверхпроводниках малого размера и конденсатах атомов щелочных металлов. Кроме того, были разработаны новые методы изучения этих явлений. Так, был предложен аналитический метод исследования флуктуационного проникновения вихря Абрикосова в ультрамалый сверхпроводник, в котором разложение параметра порядка по уровням Ландау не только используется для описания самого барьера, но и инкорпорируется в кинетическое уравнение Фоккера-Планка. В диссертации предсказано усиление температурных флуктуаций в углах сверхпроводящих наноструктур, что важно для обеспечения бесперебойной работы устройств на их основе (например, фотодетекторов). Впервые исследовано квантовое туннелирование вихрей Абрикосова через поверхностный барьер в ультратонких сверхпроводящих островках во внешнем поле. Построено описание поведения гетероструктур "сверхпроводник-ферромагнетик", которые могут использоваться в приложениях. Продемонстрирована возможность существования сильных температурных флуктуаций в конденсатах атомов щелочных металлов (несмотря на весьма низкие температуры). Предложен новый механизм проникновения вихря во вращающийся конденсат, согласно которому на границе системы возникают пары "вихрь-антивихрь", после чего антивихри удаляются на периферию системы, а вихри проникают вглубь облака.

В диссертационной работе впервые исследован соревновательный эффект периодического и случайного потенциала на вихревые решетки.

Помимо чисто научного интереса (исследование переходов типа “порядок-беспорядок”), результаты имеют и практическую ценность, поскольку различные системы искусственно созданных центров пиннинга используются для увеличения критического тока сверхпроводников. Было выявлено существование различных дефектов вихревой решетки и построена общая картина разупорядочивания системы при усилении беспорядка. Исследованы не только статическая фазовая диаграмма, но и динамические режимы. Данные результаты существенно обогащают имеющиеся представления о переходах между упорядоченными и разупорядоченными фазами.

В диссертационной работе был предложен аналитический вариационный метод описания вихревой решетки во всем диапазоне полей между первым и вторым критическими полями. Предложена единая формула для обратимой намагниченности сверхпроводника, которая, в частности, может использоваться для анализа экспериментальных данных.

Для экситонов Френкеля был предложен новый метод учета фермионной статистики для составляющих экситоны электронов и дырок. Использована коммутационная техника для вычисления различных матричных элементов. Для визуализации вычислений использована специальная диаграммная техника. Метод может быть использован для описания коллективных свойств экситонов Френкеля и исследования нелинейных оптических эффектов.

1.7. Список публикаций и апробация работы

Основные результаты, представленные в диссертации, докладывались и обсуждались на конференциях и совещаниях “International Conference Vortex III” (о. Крит, Греция, 2003); “International Argonne Fall Workshop on Nanophysics III” (Аргон, США, 2003); “Belgium Physical Society - International Meeting” (Гент, Бельгия, 2003); “14th International Laser Physics

Workshop” (Киото, Япония, 2005); “Physical Society of Japan Meeting”, (Токио, Япония, 2005), (Киото, Япония, 2005), (Мацуяма, Япония, 2006); XXXII Международная зимняя школа физиков-теоретиков “Коуровка-2008” (Екатеринбург, Россия, 2008); “9th European Conference on Applied Superconductivity (EUCAS 2009)”, (Дрезден, Германия, 2009); “General Scientific Meeting of the Belgian Physical Society and Belgian Biophysical Society” (Хассельт, Бельгия, 2009); “XXXV Собрание по физике низких температур (НТ-35)”, (Черноголовка, Россия, 2009); 4-ая Международная конференция “Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости”, (Звенигород, Россия 2011); XXXVI Собрание по физике низких температур, (Санкт-Петербург, Россия, 2012); Advanced research workshop “Meso-2012”, (Черноголовка, Россия, 2012), на семинарах в ИТПЭ РАН, ФИАН РАН, ИТФ РАН, ИФП РАН, ИТЭФ, университета Антверпена (Антверпен, Бельгия), университета Окаямы (Окаяма, Япония), Университета Лёвена (Лёвен, Бельгия), университета Лувен-ла-Нев (Лувен-ла-Нев, Бельгия), университета Пьера и Марии Кюри (Париж, Франция), Института физико-химических исследований RIKEN (Вако, Япония), Иллинойского университета в Урбане-Шампейне (Урбана-Шампейн, США), университете Брауна (Провиденс, США), Академии Синика (Тайвань), Центре ядерных исследований (Сакле, Франция).

Представленные в диссертационной работе результаты были получены при финансовой поддержке РФФИ, фонда “Династия”, Программы РАН “Сверхпроводимость”, Фонда содействия отечественной науке, Программы президента РФ для молодых ученых, ИНТАС, Японского общества продвижения науки (JSPS), Министерства образования Франции, программы ENS-Landau, стипендии для молодых ученых в рамках 7-ой рамочной программы Евросоюза, Исследовательского совета университета Левена (Бельгия), программы Vortex Европейского научного фонда, Программы Odysseus правительства Фландрии (Бельгия).

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 2000 – 2013 годах в 30 научных работах.

Список публикаций по теме диссертации

- A1. В. В. Погосов, А. Л. Рахманов, К. И. Кугель, *Намагниченность сверхпроводников второго рода в интервале полей $H_{c1} < H < H_{c2}$: вариационный метод*, ЖЭТФ **118**, 676 (2000).
- A2. W. V. Pogosov, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, E. H. Brandt, *Approximate Ginzburg-Landau solution for the regular flux-line lattice. Circular cell method*, Phys. Rev. B **64**, 064517 (2001).
- A3. W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov, E. A. Shapoval, *Vortex state in mesoscopic cylinders. Variational approach*, Physica C **356**, 225 (2001).
- A4. W. V. Pogosov, *Vortex phases in mesoscopic cylinders with suppressed surface superconductivity*, Phys. Rev. B **65**, 224511 (2002).
- A5. W. V. Pogosov, K. I. Kugel, A. L. Rakhmanov, *Variational calculations of vortex structures in bulk and mesoscopic superconductors*, Studies of High-Temperature Superconductors, vol.42, ed. by A. Narlikar, Nova Sci. Pub., New York (2002).
- A6. W. V. Pogosov, A. L. Rakhmanov, V. V. Moshchalkov, *Vortex lattice in presence of a tunable periodic pinning potential*, Phys. Rev. B **67**, 014532 (2003).
- A7. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Nucleation of superconductivity in Al mesoscopic disk with a magnetic dot*, Appl. Phys. Lett. **83**, 1593 (2003).
- A8. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Influence of the stray field of magnetic dot on the nucleation of superconductivity in a disk*, Europhys. Lett. **65**, 546 (2004).
- A9. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Little-Parks effect in a superconducting loop with a magnetic dot*, Phys. Rev. B **68**, 172503 (2003).

- A10. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Magnetic Phase Shifter for Superconducting Qubits*, Phys. Rev. Lett. **92**, 177904 (2004).
- A11. W. V. Pogosov, R. Kawate, T. Mizushima, K. Machida, *Vortex structure in spinor $F=2$ Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. A **72**, 063605 (2005).
- A12. W. V. Pogosov, K. Machida, *The effect of thermal fluctuations on spin degrees of freedom in spinor Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **74**, 023624 (2006).
- A13. W. V. Pogosov, K. Machida, *Thermal fluctuations of vortex clusters in quasi two-dimensional Bose-Einstein condensate*, Phys. Rev. A **74**, 023622 (2006).
- A14. W. V. Pogosov, K. Machida, *Cyclic phase in $F=2$ spinor condensate: long-range order, kinks, and roughening transition*, Phys. Rev. A **74**, 023611 (2006).
- A15. W. V. Pogosov, K. Machida, *Role of surface modes in vortex formation in BEC*, Laser Physics **16**, 376 (2006).
- A16. M. Combescot, W. V. Pogosov, *Microscopic derivation of Frenkel excitons in second quantization*, Phys. Rev. B **77**, 085206 (2008).
- A17. M. Combescot, W. V. Pogosov, *Composite boson many-body theory for Frenkel excitons*, Eur. Phys. J. B **68**, 161 (2009).
- A18. W. V. Pogosov, M. Combescot, *Ground state energy of N Frenkel excitons*, Eur. Phys. J. B **68**, 183 (2009).
- A19. W. V. Pogosov, V. R. Misko, H. J. Zhao, F. M. Peeters, *Collective vortex phases in periodic plus random pinning potential*, Phys. Rev. B **79**, 014504 (2009).
- A20. W. V. Pogosov, H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters, *Kink-antikink vortex transfer in periodic-plus-random pinning potential: Theoretical analysis and numerical experiments*, Phys. Rev. B **81**, 024513 (2010).
- A21. W. V. Pogosov, M. Combescot, *“Moth-eaten effect” driven by Pauli blocking, revealed for Cooper pairs*, Письма в ЖЭТФ **92**, 534 (2010).
- A22. W. V. Pogosov, V. R. Misko, F. M. Peeters, *Geometry-induced localization of thermal fluctuations in ultrathin superconducting structures*, Phys. Rev. B **82**, 054523 (2010).

- A23. W. V. Pogosov, *Thermal suppression of surface barrier in ultrasmall superconducting structures*, Phys. Rev. B **81**, 184517 (2010).
- A24. W. V. Pogosov, M. Combescot, M. Crouzeix, *Two-Cooper-pair problem and the Pauli exclusion principle*, Phys. Rev. B **81**, 174514 (2010).
- A25. W. V. Pogosov, M. Combescot, *From one to N Cooper pairs, step by step*, Physica C **471**, 566 (2011).
- A26. W. V. Pogosov, V. R. Misko, *Vortex quantum tunnelling versus thermal activation in ultrathin superconducting nanoislands*, Phys. Rev. B **85**, 224508 (2012).
- A27. W. V. Pogosov, *“Probabilistic” approach to Richardson equations*, J. Phys.: Condens. Matter **24**, 075701 (2012).
- A28. W. V. Pogosov, *Excited states in Richardson pairing model: ‘probabilistic’ approach*, Prog. Theor. Phys. **128**, 1 (2012).
- A29. M. Combescot, W. V. Pogosov, O. Betbeder-Matibet, *BCS ansatz, Bogoliubov approach to superconductivity and Richardson-Gaudin exact wave function*, Physica C **485**, 47 (2013).
- A30. W. V. Pogosov, N. S. Lin, V. R. Misko, *Electron-hole symmetry and solutions of Richardson pairing model*, Eur. Phys. J. B **86**, 235 (2013).

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из пяти глав, включая настоящее Введение, одного приложения, заключения и списка литературы. Полный объем работы составляет 332 страницы.

Во второй главе разрабатываются методы решения уравнений Ричардсона, которые обеспечивают точное решение многочастичного уравнения Шрёдингера для гамильтониана теории сверхпроводимости Бардина-Купера-Шриффера и некоторых других родственных гамильтонианов. При этом описание ведется в рамках представления с фиксированным числом частиц.

В третьей главе рассматриваются свойства сверхпроводников и конденсатов атомов щелочных металлов в ловушках, чьи размеры сопоставимы с длиной когерентности. Основной акцент сделан на исследовании топологических дефектов, а также температурных и квантовых флуктуаций с участием таких дефектов.

В четвертой главе рассматриваются уже свойства сверхпроводящих систем макроскопического размера, в которых однако имеется пространственный масштаб, связанный с размером сердцевин вихря. Сначала исследуется обратимая намагниченность сверхпроводника с полноценным учетом вихревых сердцевин, а затем – свойства сверхпроводников с дополнительным искусственным потенциалом пиннинга (наноструктурированные сверхпроводники).

В пятой главе рассматриваются экситоны Френкеля в системе макроскопического размера – с учетом фермионной статистики для составляющих экситон электрона и дырки.

ГЛАВА 2

Куперовское спаривание в подходе Ричардсона

2.1. Введение

Представляется актуальным построение описания сверхпроводящего состояния с выходом за пределы среднеполевых приближений и оставаясь в представлении с фиксированным числом частиц. Одним из возможных подходов на пути решения этой задачи является использование каких-либо точно- или квазиточнорешаемых моделей. К счастью, это оказывается возможным как раз в случае потенциала теории БКШ, для которого известен так называемый метод Ричардсона [62–64]. К сожалению, этот метод ограничен взаимодействиями, описываемыми потенциалами типа *редуцированного* потенциала БКШ, которые спаривают лишь электроны с противоположными направлениями импульса. Зато он позволяет находить точные решения многочастичного уравнения Шрёдингера, оставаясь, таким образом, в рамках представления с фиксированным числом частиц.

По сути, в своих работах Ричардсон смог угадать вид многочастичной волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шрёдингера. Эта волновая функция состоит из “строительных блоков”, напоминающих волновую функцию из двухчастичной задачи Купера. Она зависит от набора энергеподобных (комплексных, в общем случае) величин, которые удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений, называемых ныне уравнениями Ричардсона. Энергия системы коррелированных пар равна сумме этих величин, а их общее число совпадает с числом пар в системе. Таким образом, с увеличением числа частиц, вообще говоря, нужно решать все возрастающее число уравнений Ричардсона.

В дальнейшем было показано [65], что уравнения Ричардсона являются частным случаем уравнений анзаца Бете, который позволяет нахо-

дить точное решение некоторых многочастичных квантовых задач. Особенно тесно метод Ричардсона связан с весьма известной моделью Годена [66], описывающей спиновую цепочку, так что в настоящее время соответствующие уравнения иногда именуют уравнениями Ричардсона-Годена. Точно решаемые модели квантовой механики являются бурно развивающейся областью современной теоретической и математической физики, что придает еще большую значимость работам по исследованию уравнений Ричардсона.

Несмотря на то, что использование метода Ричардсона позволяет существенно упростить изначальную квантовую задачу, сводя ее к системе алгебраических уравнений, решение этих уравнений, в общем случае, представляет собой тяжелую математическую задачу из-за их нелинейности и возникающих сингулярностей. Все известные основные аналитические результаты были получены самим Ричардсоном. Так, он решил их в пределах очень сильного и очень слабого взаимодействий (где задача оказывается математически достаточно тривиальной). После появления работы Годена [66], Ричардсон воспользовался некоторыми из его идей и гипотез о характере распределения энергеподобных величин на комплексной плоскости и предложил метод решения в пределе большого числа частиц при фиксированной безразмерной константе взаимодействия, рассмотрев в точности конфигурацию теории БКШ (при нуле температур). В результате Ричардсон получил те же самые выражения для энергии конденсации и сверхпроводящей щели, что согласуется с выводами Боголюбова и других авторов о точности теории БКШ в термодинамическом пределе при нуле температур.

Метод Ричардсона сначала оказался более востребованным в ядерной физике, где он применялся для изучения свойств ядер, и оставался практически не известным сообществу физиков, работающих в области сверхпроводимости. Интерес к этому методу вспыхнул с новой силой в связи с экспериментами по изучению сверхпроводящего состояния в наногранулах, содержащих небольшое число частиц, для которых теория БКШ, как уже

отмечалось выше, работает неудовлетворительно [23]. В настоящее время уравнения Ричардсона активно применяются для изучения таких гранул, и они при этом решаются численно [23]. Также их использовали в случаях ультрахолодных газов [67] и пузырьков в жидком гелии [68]. Сравнительно недавно к модели Ричардсона стали применять мощные методы квантовой обратной задачи рассеяния для вычисления корреляционных функций [69–71] – однако эти методы все равно требуют знания решений самих уравнений.

В данной главе диссертационной работы разрабатываются новые аналитические методы решения и анализа уравнений Ричардсона, которые затем применяются к задачам о переходе БЭК-БКШ (в упоминавшемся контексте перехода от задачи Купера к режиму БКШ – в виде мысленного эксперимента), а также о переходе от режима доминирования флуктуаций в наноразмерных системах к режиму БКШ в макроскопической системе. Предложенные идеи должны представлять интерес и в контексте точно и квазиточнорешаемых моделей квантовой механики. Также они позволяют вскрыть новые и достаточно неожиданные связи с другими областями современной теоретической и математической физики и, возможно, с фундаментальными вопросами квантовой теории.

2.2. Вероятностный подход к уравнениям Ричардсона

2.2.1. Уравнения Ричардсона и термодинамический предел

Гамильтониан. — Рассмотрим систему фермионов со спином 1/2. Притяжение между ними описывается с помощью обычного редуцированного потенциала взаимодействия теории БКШ, который спаривает лишь электроны с противоположными импульсами и разными направлениями спина:

$$\mathcal{V} = -V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} a_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger a_{-\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}\uparrow}. \quad (2.1)$$

Полный гамильтониан системы имеет вид: $H = H_0 + \mathcal{V}$, где

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger a_{\mathbf{k}\uparrow} + a_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger a_{\mathbf{k}\downarrow}). \quad (2.2)$$

Будем считать, что потенциал \mathcal{V} действует только для состояний с кинетическими энергиями $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ и $\varepsilon_{\mathbf{k}'}$, ограниченными интервалом между ε_{F_0} и $\varepsilon_{F_0} + \Omega$. В теории БКШ нижний параметр обрезания ε_{F_0} соответствует энергии Ферми невзаимодействующих электронов, а Ω есть не что иное, как частота Дебая. Также будем предполагать постоянную плотность энергетических состояний внутри этого интервала, что является типичным признаком двумерных систем. Для трехмерных систем это работает приближенно в том случае, если $\Omega \ll \varepsilon_{F_0}$. Таким образом, полное количество состояний с той или иной проекцией спина в интервале энергий между ε_{F_0} и $\varepsilon_{F_0} + \Omega$ равно $N_\Omega \equiv \rho\Omega$. Можно считать, что эти состояния расположены эквидистантно, так что $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{F_0} + \xi_{\mathbf{k}}$, где $\xi_{\mathbf{k}}$ пробегает значения $0, 1/\rho, 2/\rho, \dots, \Omega$. Модель эквидистантных уровней полностью оправдана для систем бесконечного размера, тогда как для систем малого размера она является очевидной идеализацией. Тем не менее, и в этом случае, модель оказывается весьма полезной.

Энергетический интервал, в котором и локализовано взаимодействие, содержит $N < N_\Omega$ электронов каждого типа. Эти электроны и взаимодействуют между собой посредством потенциала (2.1).

Термодинамический предел. – В данном разделе диссертационной работы рассматривается лишь термодинамический предел, в котором $\Lambda \rightarrow \infty$, где Λ - объем системы. В этом случае, $\rho \sim \Lambda$ и $V \sim \Lambda^{-1}$, так что безразмерная константа взаимодействия, определенная как $v = \rho V$, не зависит от объема, $\sim \Lambda^0$. То же самое верно и в отношении ε_{F_0} и Ω ; таким образом $N_\Omega \sim \Lambda$. Количество куперовских пар при этом $N \sim \Lambda$; таким образом, фактор заполнения N/N_Ω также не зависит от объема, $\sim \Lambda^0$. Иными словами, анализируется предел бесконечного числа пар N при фиксации

безразмерной константы взаимодействия и фактора заполнения.

Будем рассматривать произвольные заполнения интервала с взаимодействием N/N_Ω , тогда как в теории БКШ фигурирует исключительно половинное заполнение. Изучение конфигураций с произвольным заполнением позволяет выявить интересную скрытую физику, которую трудно обнаружить при изучении исключительно половинного заполнения, которое является довольно особым с точки зрения симметрии. Более того, задача с половинным заполнением может иметь отношение и к реальным физическим системам - таким как, например, недодопированные сверхпроводники, в которых химический потенциал может опускаться ниже зоны проводимости [21, 72]. Можно сказать, что при изменении заполнения реализуется сценарий перехода между режимом БКШ и режимом конденсата Бозе-Эйнштейна локальных фермионных пар (за счет изменения плотности пар).

Уравнения Ричардсона. – Как было показано Ричардсоном [62, 63], гамильтониан, определенный выражениями (2.1) и (2.2), является точно решаемым. Отметим, что данный вывод, конечно, не ограничен термодинамическим пределом или моделью эквидистантных уровней - речь идет об общем свойстве гамильтониана. Ричардсон смог угадать вид многочастичной волновой функции, удовлетворяющей уравнению Шредингера. Эта волновая функция является непосредственным обобщением волновой функции для одной пары, найденной Купером – как обычно и оказывается в случае точно решаемых моделей. Волновая функция в основном состоянии системы с N парами зависит от набора N энергеподобных комплексных величин R_j ($j = 1, \dots, N$). Сумма этих величин равна энергии всей системы:

$$E_N = \sum_{j=1}^N R_j. \quad (2.3)$$

Сами же энергетические величины удовлетворяют системе нелинейных алгебраических уравнений, получивших название уравнений Ричардсона.

Уравнение для величины R_j имеет вид

$$1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{V}{2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j} + \sum_{l, l \neq j} \frac{2V}{R_j - R_l}, \quad (2.4)$$

где суммирование в первом слагаемом в правой части уравнения производится для $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ в интервале энергий, где действует притяжение. Важно отметить, что количество пар входит в формализм несколько необычным способом - через количество уравнений. Таким образом, в термодинамическом пределе, вообще говоря, нужно решать бесконечное количество уравнений. Случай одной пары был рассмотрен Купером, который также решал непосредственно уравнение Шредингера. Уравнение для энергии пары, полученное Купером, совпадает с соответствующим (единичным) уравнением Ричардсона.

Можно заметить, что общая структура уравнений Ричардсона напоминает структуру уравнений Бете из-за членов вида $1/(R_j - R_l)$. Действительно, некоторое время назад было показано, что эти уравнения можно получить и с помощью техники алгебраического анзаца Бете [65].

Существование точного решения задачи обусловлено упрощенным видом потенциала взаимодействия. Несмотря на то, что в соответствующем члене гамильтониана фигурируют произведения четырех фермионных операторов, спаривание происходит лишь между электронами с нулевым импульсом пары. При этом суммирование производится по двум, а не трем индексам, а амплитуда взаимодействия полагается не зависящей от импульсов. При включении спаривания между фермионами с ненулевым импульсом центра масс точное решение Ричардсона перестает работать.

2.2.2. Электростатическая аналогия

Рассмотрим функцию $E_{class}(\{R_j\})$, определенную как

$$E_{class}(\{R_j\}) = 2 \left(\sum_j ReR_j + V \sum_{j, \mathbf{k}} \ln |2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j| - 2V \sum_{j, l, j \neq l} \ln |R_l - R_j| \right). \quad (2.5)$$

Это выражение может быть переписано в следующем виде

$$E_{class}(\{R_j\}) = W(\{R_j\}) + W(\{R_j^*\}), \quad (2.6)$$

где

$$W(\{R_j\}) = \sum_j R_j + V \sum_{j,k} \ln(2\varepsilon_k - R_j) - 2V \sum_{j,l,j \neq l} \ln(R_l - R_j). \quad (2.7)$$

Годен подметил [66], что уравнения Ричардсона могут быть формально записаны как условия стационарности функции $W(\{R_j\})$: $\partial W(\{R_j\})/\partial R_j = 0$.

Далее, $E_{class}(\{R_j\})$ может быть интерпретирована как энергия N свободных классических частиц с кулоновским зарядом $2\sqrt{V}$ (кулоновская плазма), расположенных на плоскости и имеющих координаты $(\text{Re } R_j, \text{Im } R_j)$. Эти частицы помещены в поле внешней однородной силы, действующей вдоль оси абсцисс и равной -2 . Свободные заряды притягиваются к частицам с фиксированными положениями, расположенным на одноэлектронных уровнях энергии ε_k . Количество таких фиксированных частиц совпадает с количеством этих уровней N_Ω , а заряд каждой частицы равен $-\sqrt{V}$. Кроме того свободные частицы отталкивают друг друга. Тогда уравнения Ричардсона полностью эквивалентны условиям равновесия для системы из N свободных зарядов – изначальная квантовая задача может быть сведена к классической, то есть детерминистической задаче, но на плоскости комплексных значений энергии. Электростатическая аналогия проиллюстрирована на Рис. (2.1).

Электростатическая аналогия впервые была предложена Годеном [66] для его модели, являющейся частным случаем модели Ричардсона. Далее она была использована самим Ричардсоном [64], а после - переформулирована и развита рядом других авторов [73, 74]. Более того, похожие электростатические аналогии существуют для многих иных уравнений Бете [75, 76], а также для положений нулей одночастичных волновых функций в одномерных потенциалах квазиточнорешаемых моделей [75]. Имеются такие аналогии и для определения нулей различных полиномов, например, полиномов

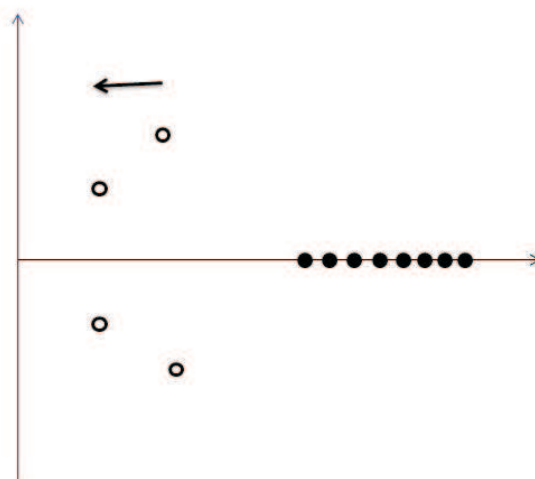


Рис. 2.1. Иллюстрация электростатической аналогии для уравнений Ричардсона при $N_{\Omega} = 8$, $N = 4$. Черные круги обозначают положения одноэлектронных уровней энергии. Пустые круги - положения энергиподобных величин R_j . Стрелка показывает направление однородного внешнего поля.

Лежандра [79]. Таким образом, мы здесь имеем дело с достаточно широким кругом “явлений”.

Обычно электростатические аналогии используются для решения уравнений Бете в термодинамическом пределе. А именно, предполагается определенная форма распределения свободных зарядов на плоскости - как правило, вдоль некоторых одномерных кривых или наборов таких кривых [77, 78]. Далее, используя методы электростатики вычисляются формы таких кривых и распределения зарядов вдоль них. Понятно, что такой подход серьезно редуцирует количество степеней свободы системы из-за предположений об одномерном характере распределения. По этой причине создатель метода Годен рассматривал его, как не вполне контролируемый, прямо называя предположение о квазиодномерности распределения свободных зарядов гипотезой [66]. В данной диссертационной работе, по сути, предлагается иной подход, в котором столь жестко не предопределяется характер распределения зарядов на плоскости.

2.2.3. Обоснование вероятностного подхода

Ключевая идея предложенного в диссертационной работе метода состоит в том, что от рассмотрения энергии системы свободных зарядов на плоскости можно перейти к гиббсовской вероятности $S(\{R_j\})$ найти эту систему в заданной конфигурации при достаточно низкой температуре T_{eff} . Затем положения зарядов (или центра масс системы зарядов) можно реконструировать методами интегрирования, без непосредственного решения уравнений Ричардсона.

В термодинамическом пределе наиболее естественным и удобным выбором такой температуры представляется

$$k_B T_{eff} \equiv V, \quad (2.8)$$

по причинам, которые обсуждаются ниже.

В качестве вероятности возьмем выражение

$$S(\{R_j\}) = \exp\left(-\frac{W(\{R_j\})}{V}\right). \quad (2.9)$$

Тогда, учитывая уравнение (2.7) для $W(\{R_j\})$, получаем для S компактное и красивое выражение

$$S(\{R_j\}) = \frac{\prod_{j,l,j<l}(R_l - R_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{k}}(2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j)} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^N R_j}{V}\right). \quad (2.10)$$

Заметим, что из-за множителя $\prod_{j,l,j<l}(R_l - R_j)^2$ это выражение имеет аналогию с квадратом волновой функции Лафлина при факторе заполнения 1, которая используется для объяснения эффекта квантового дробного эффекта Холла [80]. Факторизуемый вид выражения (2.10) обусловлен логарифмическим характером взаимодействия свободных зарядов.

Вообще говоря, могло бы показаться более естественным использовать функцию $E_{class}(\{R_j\})$ вместо $W(\{R_j\})$ в определении $S(\{R_j\})$. Действительно, соответствующая функция $\exp(-E_{class}(\{R_j\})/V)$ вещественна и положительна, так что по своим свойствам она больше напоминает обычную

функцию распределения, нежели $S(\{R_j\})$. Однако такая функция не является аналитической, поэтому ее использование не представляется целесообразным по причинам, которые станут более ясными из дальнейшего изложения.

Важнейшее обстоятельство заключается в том, что эффективная температура T_{eff} стремится к нулю в термодинамическом пределе как $k_B T_{eff} \sim \Lambda^{-1}$, что должно делать $W(\{R_j\})/V$ очень большим по своему модулю, а ландшафт $S(\{R_j\})$ - исключительно резким вблизи стационарных точек функции $W(\{R_j\})/V$. Поэтому и кажется привлекательной идея вычлнить информацию о стационарных точках $W(\{R_j\})$ при помощи интегрирования. Поясним нашу идею на элементарном примере. Пусть $g(x)$ является функцией x , имеющей резкий максимум при $x = x_0$. Тогда оказывается возможным найти x_0 приближенно, не решая напрямую уравнение $g'(x_0) = 0$, а используя интегрирование. А именно, рассмотрим отношение интегралов $\int x \exp(g(x)) dx / \int \exp(g(x)) dx$ с x_0 , расположенным “достаточно глубоко” внутри промежутка интегрирования. Основной вклад в оба интеграла обеспечивается некоторой окрестностью точки x_0 , так что их отношение близко к этой величине. В частности, если производные второго и более высоких порядков от $g(x)$ в точке x_0 пропорциональны какому-нибудь большому параметру (например, N), тогда, производя разложение $g(x)$ в ряд Тейлора вокруг x_0 , несложно показать, что ошибка в определении x_0 через отношение интегралов мала как N^{-1} .

Возвращаясь к нашей задаче, мы обнаруживаем, что непосредственное применение этой идеи в нашем случае наталкивается на некоторые трудности, которые видны уже при рассмотрении задачи с одной парой, решаемой и более простыми методами, что позволяет проводить сравнительный анализ. Проблема заключается в том, что стационарные точки вовсе не обязательно соответствуют минимумам энергии $E_{class}(\{R_j\})$ системы зарядов. Скорее, они задают седловые точки $E_{class}(\{R_j\})$, так что положения зарядов оказываются нестабильными. Так, для задачи с одной парой равновесное

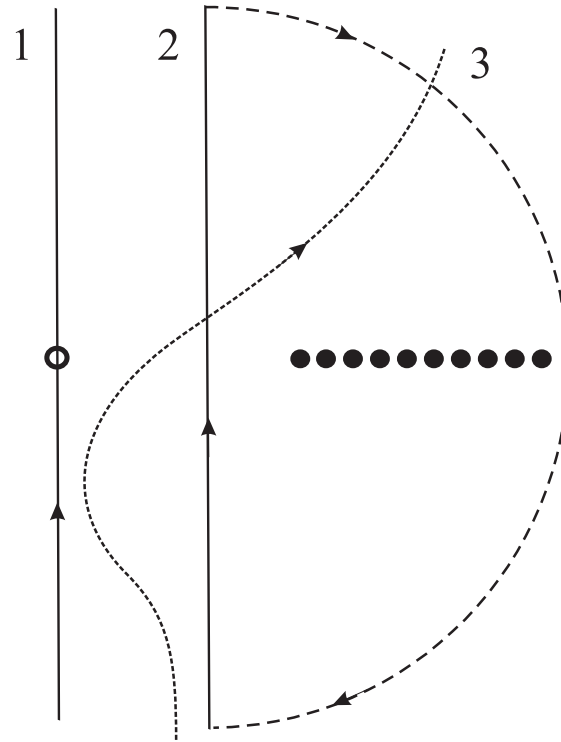


Рис. 2.2. Схематическое изображение комплексной плоскости значений R для задачи с одной парой Купера. Черные круги обозначают положения одноэлектронных уровней энергии. Пустой круг обозначает решение для основного состояния. Линия 1 показывает путь интегрирования через это решение в направлении скорейшего уменьшения $-\text{Re } W$. Линии 2 и 3 показывают эквивалентные линии 1 пути интегрирования. Пунктирная линия - вспомогательная полуокружность, введенная для использования теоремы о вычетах.

значение R расположено на вещественной оси, как показано на Рис. 2.2. Энергия заряда $E_{class}(R)$ (а также вещественная часть $W(R)$) увеличивается при смещении R с вещественной оси в перпендикулярном направлении, но она уменьшается при смещении вдоль вещественной оси в обоих направлениях. Более подробно это видно из материалов Приложения А. Следовательно, для определения положения седловой точки в случае энергии основного состояния мы должны использовать путь интегрирования, показанный на Рис. 2.2 линией 1. Казалось бы, эта процедура не даст нам ровным счетом ничего, поскольку мы *уже* должны знать положение седловой точки на комплексной плоскости для того, чтоб провести через нее путь интегрирования. Однако это совсем не так, поскольку мы использовали $W(\{R_j\})$ вместо $E_{class}(\{R_j\})$ в определении вероятности S . В результате, функция S оказалась мероморфной, что означает, по теореме Коши, инвариантность результата интегрирования для всех путей интегрирования, которые могут быть непрерывно трансформированы друг в друга без пересечения полюсов функции S . Следовательно, мы можем использовать множество эквивалентных путей интегрирования, которые начинаются при $-i\infty$ и заканчиваются при $+i\infty$, где S стремится к нулю. *Таким образом, используя нелокальность функции S , можно реконструировать неизвестное положение седловой точки на комплексной плоскости.*

Представляется полезным сначала довести до конечного ответа вывод для случая одной пары, а затем переключиться на более общую ситуацию. Итак, рассмотрим отношение интегралов, определенное как

$$E \equiv \frac{\int RS(R)dR}{\int S(R)dR}, \quad (2.11)$$

где интегрирование производится по комплексной плоскости от $-i\infty$ до $+i\infty$. С одной точки зрения, пропуская путь интегрирования через седловую точку, мы должны получить ее положение. С другой точки зрения, мы можем использовать любой путь интегрирования при условии, что он обходит все

полюса таким же образом, как линия 1 на Рис. 2.2. Учитывая определение (2.10) для $S(\{R_j\})$, можем переписать (2.11) в эквивалентной форме

$$E = -\frac{\partial}{\partial\left(\frac{1}{V}\right)} \ln Z, \quad (2.12)$$

где

$$Z \equiv \int S(R) dR. \quad (2.13)$$

Представим S для одной пары в более явном виде

$$S(R) = \frac{\exp(-R/V)}{\prod_{n=0}^{N_\Omega} (2\varepsilon_{F_0} + \frac{2n}{\rho} - R)}. \quad (2.14)$$

Далее, можно произвести разложение $1/\prod_{n=0}^{N_\Omega} (2\varepsilon_{F_0} - R + 2n/\rho)$ на элементарные дроби, используя обычные правила:

$$S(R) = C \exp(-2\varepsilon_{F_0}/V) \sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n \binom{N_\Omega}{n} \frac{\exp(-R/V)}{2\varepsilon_{F_0} - R + \frac{2n}{\rho}}, \quad (2.15)$$

где C иррелевантная, не зависящая от V постоянная ($C = (\rho/2)^{N_\Omega} (N_\Omega!)^{-1}$), которая далее будет опускаться, равно как и другие подобные ей иррелевантные множители; кроме того используется одно из стандартных обозначений для биномиального коэффициента

$$\binom{N_\Omega}{n} = \frac{N_\Omega!}{n!(N_\Omega - n)!}. \quad (2.16)$$

Теперь подставим (2.15) в (2.13) и проинтегрируем. Интеграл проще всего взять с помощью вычетов. Действительно, несложно заметить, что $S(R) \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ из-за экспоненциального множителя. Поэтому путь интегрирования можно замкнуть справа, включая в контур все полюса функции S , как показано на Рис. 2.2. Результат интегрирования будет зависеть лишь от этих полюсов, что позволяет при желании деформировать контур. Заметим, что замыкая меньшее количество полюсов, мы можем реконструировать положения R , соответствующие возбужденным состояниям

пары, в которых R располагается между соседними уровнями энергии одноэлектронных состояний; то есть топология путей интегрирования играет в нашем подходе важную роль.

После интегрирования мы легко получаем очень простое выражение для Z , соответствующей основному состоянию пары

$$Z = \exp(-2\varepsilon_{F_0}/V) \sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n \sigma^n \binom{N_\Omega}{n} = \exp(-2\varepsilon_{F_0}/V) (1 - \sigma)^{N_\Omega}, \quad (2.17)$$

где $\sigma = \exp(-2/\rho V)$ является неаналитической функцией от константы связи как раз такого рода, что фигурирует в теории БКШ. В этой теории зависимости подобного рода получаются при переходе от суммирования по одноэлектронным уровням энергии к интегрированию (например, при решении уравнения на щель). В нашем подходе σ возникает совсем иным образом.

Далее, вычисляя логарифмическую производную от Z по $1/V$, получаем хорошо известное выражение для энергии единичной пары, найденное еще Купером [6]

$$E_1 = 2\varepsilon_{F_0} - 2\Omega \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (2.18)$$

Это уравнение ранее получали заменой суммирования на интегрирование в уравнении Ричардсона.

Предложенную схему можно применить и к случаю многих пар. Для начала ограничим рассмотрение значениями N такими, что $N \leq N_\Omega/2$, для которых степень полинома $\prod_{l,j,j<l} (R_l - R_j)^2$ по каждой переменной R_j меньше, чем степень полинома $\prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{k}} (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j)$ по этой же переменной. Тогда из (2.10) следует, что $S(\{R_j\}) \sum_{j=1}^N R_j \rightarrow 0$ при $\text{Im } R_n \rightarrow \pm\infty$ для любой переменной R_n из множества $\{R_j\}$.

Теперь рассмотрим отношение интегралов такое же, как в (2.11), но в которых интегрирование производится по всем переменным R_j , а вместо R стоит сумма этих переменных:

$$E_N \equiv \frac{\int S(\{R_j\}) \sum R_j dR_j}{\int S(\{R_j\}) dR_j}. \quad (2.19)$$

В качестве пути интегрирования по каждой переменной для основного состояния системы выберем тот же контур, что и в случае одной пары. Данный выбор является предположением, которое может быть обосновано тем, что, как можно ожидать, чем большее число полюсов дает вклад в Z , тем меньше должна быть реконструируемая энергия исходной квантовой задачи. Далее будет показано, что такой выбор контура интегрирования позволяет воспроизвести результат теории БКШ для основного состояния. Тем не менее, задача исследования зависимости от контуров интегрирования представляется важной.

Итак, E_N , определенное (2.11), должно давать нам равновесное положение центра масс системы зарядов. Для оценки ошибки в определении центра масс подобным способом, можно вычислить среднеквадратичное отклонение, что будет сделано ниже. При этом окажется, что ошибка мала как N^{-1} (если рассматривать термодинамический предел с макроскопически большим N и фиксированным N/N_Ω). Именно положение центра масс и дает энергию изначальной квантовомеханической задачи. Заметим, что многомерные интегралы, фигурирующие в нашем подходе, являются факторизуемыми – именно это делает метод привлекательным.

Весьма нетривиальным представляется то обстоятельство, что E_N снова можно представить через логарифмическую производную от

$$Z = \int S(\{R_j\}) dR_j. \quad (2.20)$$

А именно:

$$E_N = -\frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{V}\right)} \ln Z. \quad (2.21)$$

Это позволяет назвать величину Z статистической суммой для системы зарядов на плоскости, хотя этот термин и не вполне точен.

Интересно, что энергия квантовомеханической задачи в нашем подходе дается логарифмической производной от классической статистической суммы, что является довольно необычным примером соответствия между

классической и квантовой физикой. Вообще, уже было давно замечено (см., например, [81]), что квантовые интегрируемые системы оказываются эквивалентными какой-либо классической интегрируемой системе. Вероятностный подход таким образом позволяет выявить еще один аспект данной проблемы. Возможно, (2.44) является проявлением AdS/CFT соответствия.

Отметим, что наш подход имеет также очевидные аналогии с термодинамическим описанием. Действительно, для описания свойств систем из макроскопически большого числа частиц, как правило, не нужно знать положения и скорости всех частиц, а достаточно оперировать глобальными усредненными характеристиками. Кроме того, подход имеет ряд сходств с методом рассмотрения предела больших N для газа Дайсона, предложенным некоторое время назад в работе [82]).

Одномерные интегралы со знаменателем в подынтегральном выражении формы $\prod_{k=0}^{N_\Omega} (r - k)$ при условии интегрирования по r от $-i\infty$ до $+i\infty$ называются интегралами Норлунда-Райса [83]. В то же самое время, множитель $\prod_{l,j,j<l} (R_l - R_j)^2$ в числителе подынтегрального выражения позволяет их классифицировать в качестве интегралов сельберговского типа (“кулоновские” интегралы), играющих важную роль в комформной теории поля [84] и теории случайных матриц [85]. Отметим, что возможность трансформации интегралов Норлунда-Райса в биномиальные суммы является известным их свойством [83]. Более того, биномиальные суммы могут быть далее преобразованы через операторы конечных разностей, а также через бета-функции Эйлера [83]. В совокупности с сельберговской структурой интеграла все это ведет к появлению исключительно богатой математической структуры (а также открывает возможность к представлению уравнений Ричардсона в весьма необычной форме - например, через операторы конечных разностей), что станет видно уже из следующего параграфа.

Ранее мы наложили ограничение на количество частиц $N \leq N_\Omega/2$. Для снятия этого ограничения можно использовать концепцию пар дырок,

то есть незанятых состояний в слое с взаимодействием. Покажем, что гамильтониан системы обладает дуальностью между электронами и дырками, что позволяет выразить энергию N пар через энергию $N_\Omega - N$ пар. Таким образом, при переходе через половинное заполнение мы можем переключиться к дырочному представлению. В параграфе 2.5 эта дуальность будет использована для анализа сверхпроводящего состояния в малоразмерных системах.

2.2.4. Электронно-дырочная симметрия и уравнения Ричардсона

Введем операторы рождения для дырок $b_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger = a_{\mathbf{k}\uparrow}$ и $b_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger = a_{\mathbf{k}\downarrow}$, а также соответствующие операторы уничтожения. Под дырками понимаются пустые состояния в слое Дебая. Используя коммутационные соотношения для фермионных операторов, можно переписать гамильтониан БКШ через операторы для дырок

$$H = -VN_\Omega + 2 \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}} - V) (b_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger b_{\mathbf{k}\uparrow} + b_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger b_{\mathbf{k}\downarrow}) - V \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} b_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger b_{-\mathbf{k}\downarrow} b_{\mathbf{k}\uparrow}. \quad (2.22)$$

Первые два слагаемых в (2.22) являются числами. Они дают, соответственно, потенциальную и кинетические энергии слоя Дебая, полностью заполненного электронными парами. Четвертое слагаемое в точности совпадает с потенциалом взаимодействия *электронов* (2.1). Существование дуальности между электронами и дырками, таким образом, связано именно с этим обстоятельством. Для анализа третьего слагаемого, введем величину $\xi_{\mathbf{k}}'$, определенную как $\xi_{\mathbf{k}}' = \varepsilon_{F_0} + (N_\Omega - 1)/\rho - \varepsilon_{\mathbf{k}}$, которая принимает значения $0, 1/\rho, 2/\rho, \dots, (N_\Omega - 1)/\rho$, так что $\xi_{\mathbf{k}}'$ пробегает все возможные одноэлектронные энергии, начиная с верха слоя Дебая и заканчивая его дном, то есть в обратном порядке. Тогда $-(\varepsilon_{\mathbf{k}} - V)$ может быть представлено как $\xi_{\mathbf{k}}' + (V - \varepsilon_{F_0} - (N_\Omega - 1)/\rho)$.

Аналогичный член (2.2) гамильтониана, записанного через электроны, содержит $\xi_{\mathbf{k}} + \varepsilon_{F_0}$, где $\xi_{\mathbf{k}}$ принимает значения $0, 1/\rho, 2/\rho, \dots, (N_{\Omega} - 1)/\rho$, пробегая все возможные одноэлектронные состояния с дна слоя Дебая до верха.

Таким образом, из-за особенностей потенциала взаимодействия БКШ существует симметрия между парами электронов и парами дырок в слое Дебая. Более того, в случае эквидистантного распределения одноэлектронных уровней, энергия основного состояния N пар может быть простым образом выражена через энергию $N_{\Omega} - N$ пар, для чего следует заменить ε_{F_0} на $(V - \varepsilon_{F_0} - (N_{\Omega} - 1)/\rho)$. Поэтому энергию $E_N(\varepsilon_{F_0})$ можно рассматривать как функцию ε_{F_0} и дискретной переменной N , принимающей значения $1, 2, \dots, N_{\Omega}$. Поскольку кинетическая энергия невзаимодействующих электронов для полностью заполненного слоя Дебая дается суммой членов арифметической прогрессии, $2N_{\Omega}\varepsilon_{F_0} + N_{\Omega}(N_{\Omega} - 1)/\rho$, приходим к соотношению

$$E_N(\varepsilon_{F_0}) = E_{N_{\Omega}-N} \left(V - \varepsilon_{F_0} - \frac{N_{\Omega} - 1}{\rho} \right) - VN_{\Omega} + 2N_{\Omega}\varepsilon_{F_0} + \frac{N_{\Omega}(N_{\Omega} - 1)}{\rho}. \quad (2.23)$$

Отметим, что в случае более сложного распределения электронных уровней в слое Дебая, требуется также переключиться от одного распределения к другому, переходя от электронных пар к дырочным парам, что отвечает пробеганию состояний от верха слоя Дебая к его низу. Это обстоятельство существенно усложняет задачу. Тем не менее, дуальность между электронными и дырочными парами сохраняется, поскольку она является следствием формы члена с взаимодействием в гамильтониане теории БКШ.

Существование простого соотношения (2.23) означает, что можно избежать рассмотрения конфигураций с $N > N_{\Omega}/2$, переключаясь к представлению в терминах дырок, то есть к куперовским парам, составленным из дырок, для которых имеются точно такие же уравнения Ричардсона. Более того, можно проверить, что выражение (3.25) для энергии основного состояния (здесь мы несколько забегаем вперед) удовлетворяет (2.23) с точностью до интенсивных слагаемых, пренебрежимо малых в термодинамическом пре-

деле. Таким образом, нам достаточно рассмотреть ситуацию $N < N_\Omega/2$, для которой непосредственно применим вероятностный подход.

2.2.5. Решение через биномиальные суммы

Энергия основного состояния. — Рассмотрим энергию основного состояния системы N пар, $N \leq N_\Omega/2$. Из (2.10) видно, что вероятность S может быть переписана с использованием разложения на элементарные дроби подобно тому, как это делалось в случае одной пары:

$$S(\{R_j = 2\varepsilon_{F_0} - r_j\}) = \exp\left(\frac{-2N\varepsilon_{F_0}}{V}\right) \left[\prod_{l,j,l>j} (r_l - r_j)^2 \right] \times \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^{N_\Omega} \left[\prod_{j=1}^N (-1)^{n_j} \binom{N_\Omega}{n_j} \frac{\exp(r_j/V)}{r_j + \frac{2n_j}{\rho}} \right]. \quad (2.24)$$

После подстановки (2.24) в (2.20) и интегрирования по каждой переменной вдоль того же контура, что и для случая одной пары, мы получаем следующую биномиальную сумму по многим переменным

$$Z = \exp(-2N\varepsilon_{F_0}/V)z, \quad (2.25)$$

где

$$z = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^{N_\Omega} \left[\prod_{j=1}^N (-1)^{n_j} \sigma^{n_j} \binom{N_\Omega}{n_j} \right] \prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2. \quad (2.26)$$

Без последнего множителя в правой части (2.26) эта сумма свелась бы к произведению тривиальных независимых сумм. Для того, чтобы найти такую сумму с множителем, сначала приведем некоторые соотношения, которые будут весьма полезны в дальнейшем. Введем символ Похгаммера (или спадающий факториал), определенный как

$$(n)_q = n(n-1)\dots(n-q+1) \quad (2.27)$$

и $(n)_0 \equiv 1$. Далее несложно получить следующее соотношение:

$$z_{a,b} \equiv \sum_{n=0}^{N_\Omega} (-1)^n \sigma^n \binom{N_\Omega}{n} (n)_a (N_\Omega - n)_b = \sigma^a (1 - \sigma)^{N_\Omega - a - b} (-1)^a \frac{N_\Omega!}{(N_\Omega - a - b)!}, \quad (2.28)$$

где $a + b \leq N_\Omega$. Рассмотрим теперь произведение N сумм (2.28), где в каждом множителе суммирование ведется по своей переменной, а также в каждом из них есть свои параметры a и b . Такое произведение можно записать в виде

$$z_{a_1, b_1} \dots z_{a_N, b_N} = \sigma^{\sum_{j=1}^N a_j} (1 - \sigma)^{NN_\Omega - \sum_{j=1}^N (a_j + b_j)} (-1)^{\sum_{j=1}^N a_j} \prod_{j=1}^N \frac{N_\Omega!}{(N_\Omega - a_j - b_j)!}. \quad (2.29)$$

Отметим два важных обстоятельства, которые нам пригодятся в дальнейшем: 1) Зависимость от V (через σ) содержится лишь в двух последних множителях; 2) Зависимость этих двух множителей от наборов чисел a_j и b_j проявляется только через их суммы $\sum_{j=1}^N a_j$ и $\sum_{j=1}^N b_j$, которые дают степени полиномов $\prod_{j=1}^N (n_j)_{a_j}$ и $\prod_{j=1}^N (N_\Omega - n_j)_{b_j}$, соответственно.

Вернемся к сумме (2.26). Идея состоит в том, чтоб трансформировать ее в линейную комбинацию сумм типа (2.29), используя подходящее представление для множителя, обеспечивающего перепутывание между переменными суммирования. Для этого учтем то обстоятельство, что $\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)$ может быть переписано через детерминант матрицы Вандермонде

$$\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j) \equiv V(\{n_j\}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n_1 & n_2 & n_3 & \dots & n_N \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 & \dots & n_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n_1^{N-1} & n_2^{N-1} & n_3^{N-1} & \dots & n_N^{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

На следующем шаге учтем, что $\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)$ может быть также представлено как $(-1)^{N(N-1)/2} V(\{N_\Omega - n_j\})$, поскольку $n_l - n_j =$

$-\left[(N_\Omega - n_l) - (N_\Omega - n_j)\right]$. В итоге, получаем следующее соотношение:

$$\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2 = (-1)^{N(N-1)/2} V(\{n_j\}) V(\{N_\Omega - n_j\}). \quad (2.31)$$

Используем теперь известное правило, действующее для детерминантов матриц: детерминант не изменяется при добавлении к любой строке или столбцу линейной комбинации других строк или столбцов. Легко увидеть, что $V(\{n_j\})$ может быть переписан через символы Похгаммера как

$$V(\{n_j\}) = \det \begin{bmatrix} (n_1)_0 & (n_2)_0 & (n_3)_0 & \dots & (n_N)_0 \\ (n_1)_1 & (n_2)_1 & (n_3)_1 & \dots & (n_N)_1 \\ (n_1)_2 & (n_2)_2 & (n_3)_2 & \dots & (n_N)_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n_1)_{N-1} & (n_2)_{N-1} & (n_3)_{N-1} & \dots & (n_N)_{N-1} \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

а $V(\{N_\Omega - n_j\})$ может быть представлен в аналогичной форме с n_j , замененными на $N_\Omega - n_j$.

Очевидно, что используя (2.32), $V(\{n_j\})$ может быть записано через линейную комбинацию полиномов, каждый из которых имеет форму $\prod_{j=1}^N (n_j)_{a_j}$. Исключительно важен тот факт, что для каждого полинома в этой линейной комбинации $\sum_{j=1}^N a_j$ *одна и та же*: она равна степени полинома $V(\{n_j\})$. Степень же полинома $V(\{n_j\})$ дается суммой степеней полиномов из каждого ряда матрицы Вандермонде (2.32), то есть $0 + 1 + \dots + (N - 1) = N(N - 1)/2$. Аналогичный вывод можно сделать для $V(\{N_\Omega - n_j\})$, которое представляется в виде линейной комбинации полиномов вида $\prod_{j=1}^N (N_\Omega - n_j)_{b_j}$ с $\sum_{j=1}^N b_j = N(N - 1)/2$. Теперь легко видеть, что (2.32) вместе с аналогичным выражением для $V(\{N_\Omega - n_j\})$ позволяет представить $\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2$ в виде линейной комбинации полиномов вида $\left(\prod_{j=1}^N (n_j)_{a_j}\right) \left(\prod_{j=1}^N (N_\Omega - n_j)_{b_j}\right)$ с *одинаковыми суммами* $\sum_{j=1}^N a_j$ и $\sum_{j=1}^N b_j$ для каждого полинома. На этой стадии мы можем провести суммирование в

(2.26) с использованием (2.29), после чего получаем

$$z = \sigma^{\frac{N(N-1)}{2}} (1 - \sigma)^{NN_\Omega - N(N-1)} A(N, N_\Omega), \quad (2.33)$$

где $A(N, N_\Omega)$ есть некоторая функция N и N_Ω , которая иррелевантна для получения квантовомеханической энергии, поскольку последняя дается логарифмической производной Z по $1/V$.

Тем не менее, вычисление функции $A(N, N_\Omega)$ представляет определенный интерес. Найти ее можно разными способами. Простейший из них сводится к тому, что функцию z , задаваемую (2.33), можно разложить в ряд Тейлора по степеням σ ; тогда $A(N, N_\Omega)$ задает множитель при члене разложения с наименьшей степенью σ , равной $N(N-1)/2$. Далее, можно вернуться к (2.26) и заметить, что ненулевые члены в этой сумме даются наборами значений переменных суммирования, отличных друг от друга, а слагаемое, пропорциональное $\sigma^{\frac{N(N-1)}{2}}$ получается, когда эти значения образуют арифметическую прогрессию от 0 до $N-1$ (с учетом всех возможных перестановок переменных суммирования). Теперь несложно вычислить численный множитель при $\sigma^{\frac{N(N-1)}{2}}$. Окончательно для $A(N, N_\Omega)$ имеем

$$A(N, N_\Omega) = (-1)^{\frac{N(N-1)}{2}} (N_\Omega!)^N \frac{sf(N) sf(N_\Omega - N)}{sf(N_\Omega)}, \quad (2.34)$$

где $sf(N)$ - суперфакториал, задаваемый выражением

$$sf(N) = 1!2!\dots N!. \quad (2.35)$$

Отметим, что структура полученного выражения напоминает структуру результата для другого интеграла сельберговского типа - интеграла Мехта, известного из теории случайных матриц [85].

Далее, учитывая (2.25) и вычисляя логарифмическую производную от найденной функции z , получаем выражение для энергии основного состояния системы из N пар:

$$E_N = 2N\varepsilon_{F_0} + \frac{N(N-1)}{\rho} - 2N \left(\Omega - \frac{N-1}{\rho} \right) \frac{\sigma}{1-\sigma}. \quad (2.36)$$

Анализ этого выражения показывает, что два первых слагаемых в правой части соответствуют кинетической энергии пар в отсутствие взаимодействия между электронами. Действительно, имеется N пар, которые, согласно принципу Паули, заполняют состояния от $2\varepsilon_{F_0}$ до $2\varepsilon_{F_0} + \frac{N-1}{\rho}$, расположенные эквидистантно с шагом $2/\rho$. Сумма членов соответствующей арифметической прогрессии и дается двумя первыми слагаемыми в правой части (3.25). Третье слагаемое обусловлено спаривающим потенциалом; будучи взятым со знаком минус оно представляет собой энергию конденсации $E_N^{(cond)}$. Слагаемое имеет весьма примечательную структуру. Так, оно оказывается пропорциональным и количеству пар N (то есть занятых парных состояний) в слое Дебая, и количеству свободных состояний (дырок) $\rho\Omega + 1 - N$. Более того, энергия конденсации в случае одной пары, $N = 1$, в точности совпадает с энергией связи изолированной пары, найденной Купером. Как видно из (3.25), энергия конденсации в состоянии с N парами может быть также интерпретирована через энергию связи одной пары, которая оказывается уменьшенной по сравнению с энергией связи *изолированной* пары. Что примечательно, уменьшение это пропорционально числу занятых состояний в слое Дебая. Физически такое уменьшение ожидаемо, поскольку пары являются составными объектами, сконструированными из фермионов, которые блокируют состояния в слое Дебая, не давая им таким образом участвовать в формировании коррелированного состояния. Далее, можно увидеть, что выражение (3.25) для энергии конденсации полностью совпадает с соответствующим выражением теории БКШ при половинном заполнении $N = N_\Omega/2$. Более детальное сравнение с теорией БКШ будет проведено в параграфе 2.4.

2.2.6. Факторизация вероятности

Вероятностный подход к уравнениям Ричардсона позволяет также развить качественное, интуитивное понимание, исходя из картины на комплексной плоскости энергий, а не из исходной квантовой задачи. Поясним это на примере. Для этого вернемся к определению вероятности, задаваемому выражением (2.10). Его можно переписать как

$$\begin{aligned}
 S(\{R_j = 2\varepsilon_{F_0} - r_j\}) = & \exp(-2N\varepsilon_{F_0}/V) \frac{1}{\prod_{j=1}^N \prod_{n=0}^{\rho\Omega} (r_j + \frac{2n}{\rho})} \exp\left(\frac{\sum_{j=1}^N r_j}{V}\right) \\
 & \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \prod_{n=0}^0 (r_1 + \frac{2n}{\rho}) & \prod_{n=0}^0 (r_2 + \frac{2n}{\rho}) & \dots & \prod_{n=0}^0 (r_N + \frac{2n}{\rho}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{n=0}^{N-2} (r_1 + \frac{2n}{\rho}) & \prod_{n=0}^{N-2} (r_2 + \frac{2n}{\rho}) & \dots & \prod_{n=0}^{N-2} (r_N + \frac{2n}{\rho}) \end{bmatrix} \\
 & \times \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \prod_{n=0}^0 (r_1 + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) & \prod_{n=0}^0 (r_2 + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) & \dots & \prod_{n=0}^0 (r_N + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \prod_{n=0}^{N-2} (r_1 + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) & \prod_{n=0}^{N-2} (r_2 + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) & \dots & \prod_{n=0}^{N-2} (r_N + 2\Omega - \frac{2n}{\rho}) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Из этого выражения видно, что вероятность $S(\{R_j\})$ может быть представлена в факторизованном виде как сумма произведений N вероятностей для индивидуальных пар. Каждая такая пара однако соответствует конфигурации, в которой часть одноэлектронных состояний из слоя Дебая сверху и снизу этого слоя убрана, что является своеобразным отражением действия принципа Паули. Энергия индивидуальной пары в состоянии с n убранными уровнями внизу слоя Дебая и m - вверху этого слоя получается из уравнения (2.18) простой заменой переменных: $\varepsilon_{F_0} \rightarrow \varepsilon_{F_0} + n/\rho$, $\Omega \rightarrow \Omega - (n+m)/\rho$. Тогда из (2.37) следует, что сумма энергий единичных пар для каждого слагаемого в факторизованной вероятности одна и та же, хотя наборы этих энергий и разные. Сумма энергий для каждого из слагаемых и дается выражением

(3.25).

Иными словами, можно считать, что изначальная система N пар, взаимодействующих через принцип Паули, является суперпозицией состояний из N единичных пар, но каждая такая пара помещена в свой собственный окружающий мир, в котором часть одноэлектронных состояний из слоя Дебая убрана. Более того, сумма энергий пар в каждом из таких состояний суперпозиции - одна и та же. Заметим, что здесь можно усмотреть определенную аналогию с преобразованием Хаббарда-Стратоновича [86, 87], которое позволяет представить статистическую сумму системы взаимодействующих частиц через статсумму системы невзаимодействующих частиц, но в флуктуирующем поле. В частности, при использовании этого преобразования в сочетании с методами Монте-Карло возникает известная проблема смены знака, которая становится тем более тяжелой, чем больше частиц в рассматриваемой системе. В нашем подходе можно усмотреть схожую особенность. А именно, если мы попробуем проинтегрировать факторизованную вероятность (2.37) по траекториям, проходящим через седловые точки для каждой индивидуальной пары (например, численно), мы увидим, что по абсолютной величине полученное выражение для Z будет намного меньше, чем результат для каждого слагаемого в суперпозиции. Математически причина этой проблемы может быть увязана с детерминантной структурой (2.37), которая приводит к внутренним сокращениям. Ситуация становится более и более тяжелой с ростом N . К счастью, используя метод, основанный на вычислении биномиальных сумм, мы можем найти Z точно и обойти таким образом все эти сложности.

2.2.7. Оценка точности метода

Итак, с помощью предложенного метода мы можем реконструировать положение центра масс системы свободных зарядов на плоскости. Исполь-

зование эффективной температуры, стремящейся к нулю как $1/N$ при увеличении размеров системы (с фиксированным N/N_Ω), должно гарантировать точность реконструкции в лидирующем порядке по $1/N$.

Действительно, можно вычислить среднеквадратичное отклонение $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2$, где под усреднением подразумевается интегрирование с весом, равным вероятности S , так что $\langle E \rangle$ - это просто вычисленная выше энергия E_N , а для $\langle E^2 \rangle$ выполняются соотношения

$$\langle E \rangle^2 = \frac{\int dRS(R)(\sum R)^2}{\int dRS(R)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial(1/V)^2} \int dRS(R)}{\int dRS(R)} = \frac{\frac{\partial^2}{\partial(1/V)^2} Z}{Z}. \quad (2.38)$$

Тогда получаем: $\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 = (\ln Z)''$, где производная берется по $1/V$.

Поскольку Z нам известна, дальнейшие вычисления не представляют труда. В итоге, можно удостовериться, что

$$\frac{\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2}}{E_N^{(cond)}} = \sqrt{\frac{2}{1-\sigma}} \sqrt{\frac{1}{\rho E_N^{(cond)}}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma N(N_\Omega - (N-1))}}, \quad (2.39)$$

и относительная погрешность действительно пренебрежимо мала в термодинамическом пределе (пропорциональна $1/N_\Omega$). Более того, погрешность остается малой и в случае, когда N конечно, а N_Ω (объем системы) бесконечно велико. Частным случаем этой последней ситуации является конфигурация с одной парой, рассмотренная Купером. В этом случае, погрешность оказывается пропорциональной $1/\sqrt{N_\Omega}$. К сожалению, для систем ультрамалого размера погрешность, определяемая (2.39), вовсе не обязана быть малой. Окончательно получаем критерий применимости подхода:

$$\sqrt{N(N_\Omega - (N-1))} \exp\left(-\frac{1}{\rho V}\right) \gg 1. \quad (2.40)$$

Возвращаясь к (2.39), отметим, что среднеквадратичное отклонение можно выразить и в виде

$$\sqrt{\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2} = \frac{2}{\rho} \frac{\sqrt{\sigma}}{1-\sigma} \sqrt{N(N_\Omega - (N-1))}. \quad (2.41)$$

Весьма примечательно, что выражение, стоящее в правой стороне, *в точности* совпадает с выражением (2.62), определяющим спектр системы в режиме БКШ (сверхпроводящая щель). Это обстоятельство является весьма неожиданным и должно нести в себе определенный смысл.

Представляется возможным обобщить вероятностный подход на случай систем конечного размера, для чего необходимо оперировать с более низкой температурой и, в частности, вычислять соответствующие сельберговские интегралы, в которых подынтегральные выражения содержат более высокие степени детерминантов Вандермонде.

В диссертационной работе был предложен и другой способ вычисления многомерного интеграла сельберговского типа, определяющего статистическую сумму – с помощью интегрирования по частям через седловую точку для индивидуальной пары. Метод представлен в Приложении А. Он позволяет итерационно вычислять плотность энергии системы в ее основном состоянии, представляя ее в виде разложения по степеням плотности пар. В этом смысле, это разложение вириального типа. Однако вычисление каждого следующего слагаемого требует все более и более сложных вычислений, так что расчеты были произведены лишь для нескольких первых слагаемых. В частности, было показано, что в плотности энергии отсутствуют слагаемые, пропорциональные второй и третьей степеням плотности. Из выражения (3.25), полученного с помощью биномиальных сумм, видно, что ряд и впрямь должен обрываться. Однако в рамках представленного в Приложении А подхода доказать, что все члены ряда идентично равны нулю, представляется чрезвычайно сложным. Более того, метод не слишком удобен для нахождения энергий возбужденных состояний. Заметим, что концептуально этот подход аналогичен методу решения уравнений Ричардсона через разложение вокруг решения для изолированной пары, который представлен в параграфе 2.3.

Отметим, что выражение (2.33) может быть получено и с помощью

бета-функции Эйлера. При этом однако приходится использовать все то же представление через произведение двух детерминантов Вандермонде, которое в наших выкладках играет центральную роль. Поэтому вывод через бета-функцию Эйлера по-сути эквивалентен приведенному выше расчету биномиальных сумм.

2.2.8. Возбужденные состояния

Известно, что в системе, описываемой гамильтонианом БКШ, имеется два типа возбужденных состояний [62, 63]. Это обстоятельство находит свое отражение и в подходе Ричардсона. А именно, возбуждения первого типа соответствуют ситуации, в которой одна из энергиподобных величин является чисто вещественной и располагается между двумя соседними одноэлектронными уровнями, то есть в квазиконтинуальном спектре, если речь идет о термодинамическом пределе. Возбуждения второго типа соответствуют ситуации, когда в системе имеются неспаренные электроны, которые могут образоваться вследствие, например, разрыва пары. Неспаренные электроны блокируют соответствующие одноэлектронные состояния. Их роль заключается в том, что они привносят свою кинетическую энергию в общую энергию системы и более того изменяют энергию оставшихся пар. В диссертационной работе сначала рассматриваются возбужденные состояния первого типа, а именно, состояние с N парами и одним неспаренным электроном. В термодинамическом пределе энергия возбужденного состояния первого типа может быть вычислена из энергии возбужденного состояния второго типа, поскольку запираение одной из энергиподобных величин между двумя уровнями приблизительно эквивалентно их блокировке, что ясно из электростатической аналогии. Отметим, что в рамках первоначальной, то есть вариационной формулировки теории БКШ, возбуждения первого типа именовались реальными парами, тогда как возбуждения второго типа

назывались разорванными парами [7]. В рамках подхода Боголюбова, основанного на введении операторов рождения и уничтожения квазичастиц, оказывается возможным не делать различия между возбуждениями обоих типов, что технически более удобно.

Одиночный неспаренный электрон блокирует занимаемое им состояние. Действительно, если состояние занято таким электроном, никакого рассеяния на нем не происходит, поскольку потенциал БКШ действует лишь между электронами с противоположными направлениями импульса и спина. Следовательно, занятое состояние должно быть исключено из сумм, фигурирующих в уравнениях Ричардсона. Сумма соответствующих энергетических величин определяет энергию системы пар в присутствии неспаренного электрона. Полная энергия будет получаться добавкой к этой величине кинетической энергии неспаренного электрона.

Обозначим полную минимально возможную энергию системы N пар и одного неспаренного электрона с заданным импульсом \mathbf{p} как $E_{N,\mathbf{p}}$. Для энергии N пар в присутствии неспаренного электрона будем использовать обозначение $E_{R,\mathbf{p}}$. Именно эта величина должны быть найдена из уравнений Ричардсона с уровнем $\varepsilon_{\mathbf{p}}$, исключенным из сумм. Таким образом, $E_{N,\mathbf{p}} = E_{R,\mathbf{p}} + \varepsilon_{\mathbf{p}}$.

Для рассматриваемого случая с одним неспаренным электроном выражение для вероятности $S(\{R_j\})$ имеет вид

$$S(\{R_j\}) = \frac{\prod_{j,l,j<l}(R_l - R_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{k} \neq \mathbf{p}} (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j)} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^N R_j}{V}\right), \quad (2.42)$$

где заблокированный уровень $2\varepsilon_{\mathbf{p}} = 2\varepsilon_{F_0} + 2n_{\mathbf{p}}/\rho$ был исключен из произведений в знаменателе. Это выражение может быть переписано как

$$S(\{R_j\}) = \frac{\left\{ \prod_{j,l,j<l}(R_l - R_j)^2 \right\} \prod_j (2\varepsilon_{\mathbf{p}} - R_j)}{\prod_{j=1}^N \prod_{\mathbf{k}} (2\varepsilon_{\mathbf{k}} - R_j)} \exp\left(-\frac{\sum_{j=1}^N R_j}{V}\right). \quad (2.43)$$

Заметим, что в то время как $S(\{R_j\})$, соответствующая основному состоянию квантовой системы, имеет аналогии с волновой функцией Лафлина для

основного состояния, выражение (2.43) напоминает лафлиновскую волновую функцию для возбужденных состояний из-за наличия дополнительного множителя такого же типа, $\prod_j (2\varepsilon_p - R_j)$ [80].

Как и прежде, интегрирование функции $S(\{R_j\})$ производится по каждой переменной вдоль замкнутого контура, показанного на Рис. 2.3. Сумма энергеподобных величин снова дается логарифмической производной

$$E_{R,p} = -\frac{\partial}{\partial \left(\frac{1}{V}\right)} \ln Z. \quad (2.44)$$

Производя интегрирование, получаем

$$Z = \exp(-2N\varepsilon_{F_0}/V)z, \quad (2.45)$$

где

$$z = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_N=0}^{N_\Omega} \left(\prod_{j=1}^N (-1)^{n_j} \sigma^{n_j} \binom{N_\Omega}{n_j} (n_j - n_p) \right) \left(\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2 \right). \quad (2.46)$$

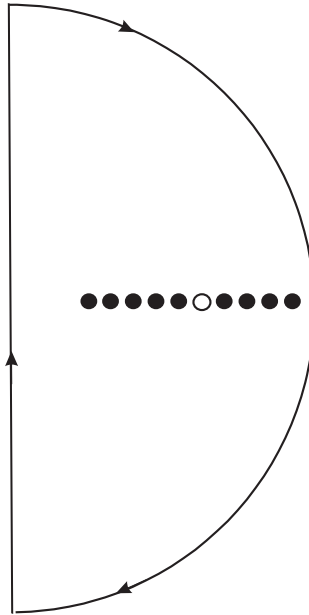


Рис. 2.3. Схематическое изображение комплексной плоскости значений R_j . Черные круги обозначают положения одноэлектронных уровней энергии. Пустой круг обозначает положение недостающего (блокированного) уровня. Сплошная линия соответствует пути интегрирования по каждой величине R_j .

Перепишем выражение $(n_j - n_{\mathbf{p}}) \left(\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2 \right)$ через детерминанты Вандермонде как

$$(n_j - n_{\mathbf{p}}) \left(\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2 \right) = (-1)^{N(N-1)/2} V(\{n_j, n_{\mathbf{p}}\}) V(\{N_{\Omega} - n_j\}). \quad (2.47)$$

Далее, для детерминантов Вандермонде будем использовать представление через символы Похкгаммера. Благодаря симметрии суммы (2.46) относительно перестановки индексов суммирования, в сумме можно заменить $V(\{N_{\Omega} - n_j\})$ на следующее выражение

$$N!(N_{\Omega} - n_1)_0(N_{\Omega} - n_2)_1 \dots (N_{\Omega} - n_N)_{N-1}, \quad (2.48)$$

которое получается после раскрытия детерминанта $V(\{N_{\Omega} - n_j\})$. Тогда выражение $(n_j - n_{\mathbf{p}}) \left(\prod_{l,j,l>j} (n_l - n_j)^2 \right)$ можно заменить на

$$(-1)^{N(N-1)/2} N! \times \det \begin{bmatrix} (N_{\Omega} - n_1)_0(n_1)_0 & (N_{\Omega} - n_2)_1(n_2)_0 & \dots & (N_{\Omega} - n_N)_{N-1}(n_N)_0 & (n_{\mathbf{p}})_0 \\ (N_{\Omega} - n_1)_0(n_1)_1 & (N_{\Omega} - n_2)_1(n_2)_1 & \dots & (N_{\Omega} - n_N)_{N-1}(n_N)_1 & (n_{\mathbf{p}})_1 \\ (N_{\Omega} - n_1)_0(n_1)_2 & (N_{\Omega} - n_2)_1(n_2)_2 & \dots & (N_{\Omega} - n_N)_{N-1}(n_N)_2 & (n_{\mathbf{p}})_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (N_{\Omega} - n_1)_0(n_1)_N & (N_{\Omega} - n_2)_1(n_2)_N & \dots & (N_{\Omega} - n_N)_{N-1}(n_N)_N & (n_{\mathbf{p}})_N \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Суммирование теперь можно проводить прямо “внутри” детерминанта, поскольку элементы каждого m -го столбца зависят лишь от n_m , что делает задачу технически значительно проще.

Производя суммирование, после соответствующей нормировки, получаем:

$$z = (-1)^N N!(N_{\Omega}!)^N \frac{sf(N_{\Omega} - 1 - N)}{sf(N_{\Omega} - 1)} \sigma^{\frac{N(N+1)}{2}} (1 - \sigma)^{N(N_{\Omega} - N)}$$

$$\times \det \begin{bmatrix} 1 & (N_\Omega - 0)_1 & \dots & (N_\Omega - 0)_{N-1} & u_0 \\ 1 & (N_\Omega - 1)_1 & \dots & (N_\Omega - 1)_{N-1} & u_1 \\ 1 & (N_\Omega - 2)_1 & \dots & (N_\Omega - 2)_{N-1} & u_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (N_\Omega - N)_1 & \dots & (N_\Omega - N)_{N-1} & u_N \end{bmatrix}, \quad (2.50)$$

где для краткости введено обозначение

$$u_m = (-1)^m \frac{(n_{\mathbf{p}})_m}{(N_\Omega)_m} (\sigma^{-1} - 1)^m. \quad (2.51)$$

Полученную матрицу можно привести к треугольному виду. На шаге 1 вычтем из каждой строки матрицы следующую строку. Последняя строка, таким образом, останется неизменной. На шаге 2 вычтем точно так же строки полученной после шага 1 матрицы, оставив 2 последние строки неизменными. Продолжим вычитать строки, оставляя на шаге m последние m строк неизменными. После шага N можно видеть, что матрица приобрела треугольную структуру - все элементы выше ее неглавной диагонали стали равны 0. На неглавной диагонали на строке m (кроме первой строки) стоит $(N + 1 - m)!$, а на первой строке стоит выражение

$$(-1)^N \Delta_x^N u_x, \quad (2.52)$$

взятое при $x = 0$, где Δ_x - оператор конечных разностей, определенный как

$$\Delta_x f(x) = f(x + 1) - f(x). \quad (2.53)$$

По сути, числа $(N + 1 - m)!$, стоящие на неглавной диагонали, получаются при действии этим оператором $(N + 1 - m)$ раз на элементарный моном x^{N+1-m} (или, что здесь эквивалентно, символ Похгаммера).

Используя хорошо известные свойства операторов конечных разностей (соответствие между Δ_x^N и биномиальной суммой, см., например, [88]), выражение (2.52) можно представить в виде

$$z' = \sum_{m=0}^N \binom{N}{m} \frac{(n_{\mathbf{p}})_m}{(N_\Omega)_m} (\sigma^{-1} - 1)^m. \quad (2.54)$$

Тогда для z имеем

$$z = \alpha \sigma^{N(N+1)/2} (1 - \sigma)^{N(N_\Omega - N)} z', \quad (2.55)$$

где α не зависит от σ и имеет вид

$$\alpha = A(N, N_\Omega - 1). \quad (2.56)$$

Примечательно, что нормировочный множитель свелся в точности к такому же множителю, что и в случае основного состояния системы, но с N_Ω , уменьшенным на 1 вследствие наличия неспаренного электрона, блокирующего один из доступных уровней.

Полученное выражение (2.54) может рассматриваться в качестве ряда гипергеометрического типа. Фактически (2.55) уже позволяет выразить энергию системы через логарифмическую производную от такого ряда, что формально дает решение задачи. Однако получаемое таким образом выражение будет слишком сложным для дальнейшего анализа. Поэтому приведем z' к более простому виду, учитывая, что нас интересует термодинамический предел. Начнем с того, что для натуральных чисел n_p и m , $(n_p)_m = 0$ для любого m , которое больше n_p . Следовательно, можно заменить верхний предел суммирования в (2.54) на $\min(n_p, N)$. После этого все слагаемые в сумме оказываются отличными от нуля, так что можно заменить символы Похгаммера от n_p на отношения соответствующих факториалов: $(n_p)_m = n_p! / (n_p - m)!$.

Далее учтем, что $\sigma^{-1} - 1 \equiv \exp(2/\nu) - 1$ всегда положительно. Последнее обстоятельство весьма важно: из него следует, что сумма не осциллирует по знаку, а поэтому ее можно заменить интегралом. Также можно использовать асимптотическое разложение для факториалов, входящих как в символы Похгаммера, так и в биномиальные коэффициенты, поскольку исследуется термодинамический предел. Отметим, что важный случай $n_p = 0$ должен рассматриваться как $n_p = 0 \times N$, хотя в этом конкретном случае можно и не заменять сумму на интеграл, поскольку выкладки оказываются особенно

простыми (результаты обоих подходов в итоге совпадают). После некоторых вычислений мы получаем соотношение

$$z' \simeq \int_0^{\min(n_p, N)} e^{H(m)} dm, \quad (2.57)$$

где

$$H(m) = (N_\Omega - m) \ln(N_\Omega - m) - m \ln(m) - (N - m) \ln(N - m) - (n_p - m) \ln(n_p - m) + m \ln(\sigma^{-1} - 1). \quad (2.58)$$

Подчеркнем, что в (2.57) был опущен, как делалось и прежде, иррелевантный множитель, который не зависит от V .

Для вычисления интеграла в правой части (2.57) используем метод седловой точки. Несложно удостовериться, что $H(m)$ имеет единственный максимум внутри интервала интегрирования, который достигается при

$$m_0 = \frac{1}{2} \left\{ (n_p + N)(1 - \sigma) + N_\Omega \sigma \right\} \times \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{4n_p N(1 - \sigma)}{((n_p + N)(1 - \sigma) + N_\Omega \sigma)^2}} \right\}. \quad (2.59)$$

Также можно убедиться, что этот максимум расположен достаточно далеко от обоих пределов интегрирования, поскольку $H''(m_0) \sim N^{-1}$, тогда как $1/\sqrt{H''(m_0)} \sim \sqrt{N}$ определяет ширину окрестности m_0 , дающую основной вклад в интеграл. В то же самое время, и m_0 , и $(\min(n_p, N) - m_0)$ пропорциональны N . Вместе с тем фактом, что $H^{(n)}(m_0) \sim N^{-n+1}$ при $n > 2$, это позволяет свести интеграл к простому гауссову интегралу. Сохраняя лидирующий порядок по N , получаем

$$\ln z' = H(m_0). \quad (2.60)$$

Находя логарифмическую производную функции z , задаваемой (2.55), и прибавляя кинетическую энергию неспаренного электрона $\varepsilon_{F0} + n_p/\rho$, мы приходим к выражению для полной энергии $E_{N,p}$ системы из N пар и одного

неспаренного электрона. После некоторых выкладок, используя найденное ранее выражение для энергии основного состояния E_N , мы можем представить $E_{N,p}$ как

$$E_{N,p} = E_N + \mu + \sqrt{\Delta^2 + (\varepsilon_p - \mu)^2}, \quad (2.61)$$

где

$$\Delta = \frac{2}{\rho} \frac{\sqrt{\sigma}}{1 - \sigma} \sqrt{N(N_\Omega - N)}, \quad (2.62)$$

$$\mu = \varepsilon_{F0} + \frac{N}{\rho} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} - \Omega \frac{\sigma}{1 - \sigma}. \quad (2.63)$$

Рассмотрим теперь $E_{N,p}$ как функцию ε_p . В особенности нас интересует наименьшее возможное значение $E_{N,p}$.

Прежде всего можно увидеть, что величина μ , задаваемая (2.63), может рассматриваться в качестве химического потенциала. Действительно, вычислив $(E_N - E_{N-1})/2$, можно убедиться, что эта величина совпадает с μ .

Минимальное значение $E_{N,p}$ достигается при n_p , которое дает минимум $(\varepsilon_p - \mu)^2$ при условии, что n_p заключено между 0 и N_Ω . Если $\mu - \varepsilon_{F0}$ тоже попадает в этот интервал, всегда можно выбрать $n_p/\rho = \mu - \varepsilon_{F0}$ так, что $(\varepsilon_p - \mu)^2$ равно нулю, тогда как корень квадратный в (2.61) сводится к Δ . Легко видеть, что для половинного заполнения, $N_\Omega = N/2$, выражение для Δ , определяемое (2.62), в точности соответствует выражению теории БКШ для сверхпроводящей щели. Более подробное сравнение с результатами теории БКШ будет проведено в параграфе 2.4.

Если же химический потенциал попадает под нижнее обрезание ε_{F0} , то есть $\mu - \varepsilon_{F0}$ отрицательно, тогда условный минимум $E_{N,p}$ достигается при $n_p = 0$. Решая уравнение $\mu - \varepsilon_{F0} = 0$, видим, что переход между двумя этими режимами происходит при $N = N_0$, где

$$N_0 = N_\Omega \frac{\sigma}{1 + \sigma}. \quad (2.64)$$

Если химический потенциал попадает выше верхнего параметра обрезания, условный минимум энергии соответствует ε_p , совпадающему с этим параметром обрезания. Решая уравнение $\mu - \varepsilon_{F0} = \Omega$, находим, что переход между этими двумя режимами происходит при $N_\Omega - N_0$. Этот результат полностью согласуется с фактом существования электронно-дырочной симметрии задачи.

Таким образом, для минимума $E_{N,p}$ имеются три режима:

$$\min(E_{N,p}) = E_N + \mu + \left(\frac{N}{\rho} + \Omega \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right), \quad (2.65)$$

при $N \leq N_0$;

$$\min(E_{N,p}) = E_N + \mu + \Delta, \quad (2.66)$$

при $N_0 < N < N_\Omega - N_0$;

$$\min(E_{N,p}) = E_N + \mu + \left\{ \left(\Omega - \frac{N}{\rho} \right) + \Omega \frac{\sigma}{1 - \sigma} \right\}, \quad (2.67)$$

при $N_\Omega - N_0 \leq N$.

В пределе слабой связи, $\sigma \ll 1$, имеем: $N_0 \simeq N_\Omega \sigma$. Это значение в двумерной системе фактически соответствует плотности пар, при которой их волновые функции начинают перекрываться, что является признаком перехода от режима изолированных пар к плотному режиму БКШ.

В разреженном пределе, $N < N_0$, энергия возбуждения контролируется величиной $\Omega \sigma / (1 - \sigma)$, что является не чем иным, как половиной от энергии связи ε_c изолированной пары.

В плотном режиме, $N_\Omega - N_0 \geq N > N_0$, энергия возбуждения дается щелью типа БКШ Δ , которую поэтому следует рассматривать в качестве коллективного отклика системы на появление неспаренного электрона. Интересно отметить, что энергия связи пары и сверхпроводящая щель имеют схожие, но разные зависимости от безразмерной константы связи v . А именно, в пределе слабой связи, первая величина пропорциональна $\exp(-2/v)$,

тогда как вторая – $\sim \exp(-1/\nu)$. Соотношение (2.62) также показывает, что Δ симметрично по отношению к замене количества электронов и дырок. Третий режим может рассматриваться в качестве сверхплотного режима пар, составленных из электронов, или разреженного режима пар, составленных из дырок. В этом режиме снова фигурирует энергия связи пары, которая и определяет $\min(E_{N,p})$. Ее теперь можно понимать как энергию связи пары, составленной из дырок.

Итак, мы идентифицировали три режима для разницы между $E_{N,p}$ и E_N в зависимости от заполнения окна Дебая. Это - разреженный предел пар, режим БКШ и разреженный предел дырок. С изменением заполнения слоя Дебая переходы между этими режимами происходят постепенно. Анализ показывает, что разрыв в точках перехода терпят лишь высшие производные от $E_{N,p}$ по N .

2.3. Вириальное разложение

Вероятностный подход избегает прямого решения уравнений Ричардсона - вместо этого положение центра масс системы зарядов на плоскости реконструируется с помощью методов интегрирования. В данном параграфе предложен метод **непосредственного** решения уравнений - через разложение вокруг энергии изолированной пары. Во многом этот подход схож с примененным в рамках вероятностного метода способом вычисления статистической суммы путем интегрирования через седловую точку изолированной пары (Приложение А). В итоге получается разложение плотности энергии основного состояния системы по степеням плотности пар, напоминающее вириальное разложение. Обычное вириальное разложение получается из рассмотрения исходной квантовой задачи в реальном пространстве. В нашем же случае исследуется двумерное пространство энергеподобных величин, в котором и решается задача. Это обстоятельство демонстрирует

новый аспект интересной связи между квантовой и классической системами, о которых идет речь в данной главе диссертационной работы.

Начнем со случая одной пары. В этом случае, единственное уравнение Ричардсона имеет вид

$$1 = V \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}} - E_1}. \quad (2.68)$$

Заменяя сумму интегралом, что позволительно сделать в пределе системы большого размера, получаем

$$V \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{k}} - E_1} \simeq \frac{\rho V}{2} \int_{\varepsilon_{F_0}}^{\varepsilon_{F_0} + \Omega} \frac{2d\varepsilon}{2\varepsilon - E_1} = (v/2) \ln \left| \frac{2\varepsilon_{F_0} + 2\Omega - E_1}{2\varepsilon_{F_0} - E_1} \right| \quad (2.69)$$

Подставляя (2.69) в (2.68) и решая уравнение, получаем знакомое уже выражение для энергии изолированной пары (2.18).

В случае системы из N пар соответствующую сумму по одноэлектронным уровням (2.68) можно разложить в степенной ряд по $R - E_1$. Сначала учтем, что выполняется соотношение

$$V \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}} - R} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} s_m (R - E_1)^m \quad (2.70)$$

Величины s_m в этом разложении выражаются через энергию изолированной пары как

$$s_m = V \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{(2\varepsilon_{\mathbf{p}} - E_1)^{m+1}} = \frac{v}{2m} \frac{I_m}{\epsilon_c^m} \quad (2.71)$$

где $I_m \simeq 1 - \sigma^m$.

Ввиду (2.68), удобно нормировать разницу энергетических величин (2.70) как

$$R - E_1 = z\epsilon_c \quad (2.72)$$

Это позволяет переписать суммы, фигурирующие в уравнениях Ричардсона, в безразмерной форме

$$V \sum_{\mathbf{p}} \frac{1}{2\varepsilon_{\mathbf{p}} - R} = 1 + v \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_m}{m} z^m. \quad (2.73)$$

Разложение априори применимо только при условии, когда $|z|$ намного меньше 1.

Используя разложение (2.73), можно представить уравнение для j -ой энергетической величины в безразмерном виде

$$0 = \sum_{m=1} \frac{I_m}{m} z_j^m + \sum_{l, l \neq j} \frac{\gamma}{z_j - z_l} \quad (2.74)$$

где z_j и R_j связаны посредством (2.72), а именно, $R_j - E_1 = z_j \epsilon_c$. Безразмерный параметр γ в этих уравнениях имеет вид

$$\gamma = \frac{4}{\rho \epsilon_c} = \frac{4}{N_c} \quad (2.75)$$

где $N_c = \rho \epsilon_c$ количество одноэлектронных состояний, помещающихся на масштабе энергии связи единичной пары. В термодинамическом пределе это число макроскопически велико. Малая величина γ связана с малой величиной δ , определенной в Приложении А: $\gamma = 2\delta^2(1 - \sigma)$. Представленное в данном разделе разложение вокруг E_1 вполне аналогично разложению, произведенному в Приложении А в рамках вероятностного подхода.

Четное число пар. – Когда число пар n , следовательно, число уравнений четны, $N = 2n$, можно ожидать симметричного относительно вещественной оси расположения энергетических величин на комплексной плоскости. В низшем порядке по γ имеем:

$$z_1 = -z_{2n} \simeq a_1 \sqrt{\gamma}, \quad z_2 = -z_{2n-1} \simeq a_2 \sqrt{\gamma}, \quad \dots, \\ z_n = -z_{n+1} \simeq a_n \sqrt{\gamma} \quad (2.76)$$

Подставляя эти выражения в уравнения Ричардсона, получаем n разных уравнений для a_1, \dots, a_n . В низшем порядке по γ они имеют вид

$$0 \simeq I_1 a_1 + \frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_1 - a_3} + \dots \\ + \frac{1}{a_1 + a_3} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{2a_1} \quad (2.77)$$

Если это обе части этого уравнения умножить на a_1 и добавить к аналогичным уравнениям для a_2, \dots, a_n , получим

$$0 \simeq I_1 (a_1^2 + \dots + a_n^2) + 2 \binom{n}{2} + \frac{n}{2} \quad (2.78)$$

где $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ - число способов выбрать пару $(a_i - a_j)$ из n чисел a_i .

Теперь рассмотрим уравнения Ричардсона, в которых сохраняется два слагаемых в сумме. Складывая эти уравнения, получаем

$$0 \simeq I_1 \sum_{i=1}^{2n} z_i + \frac{I_2}{2} \sum_{i=1}^{2n} z_i^2 \quad (2.79)$$

Используя (2.76), (2.78), (2.79), имеем в лидирующем порядке по γ

$$\sum_{i=1}^{2n} z_i \simeq [2n(n-1)/2 + n/2] \gamma I_2 / I_1^2 \simeq n(n-1/2) \gamma \frac{I_2}{I_1^2} \quad (2.80)$$

Таким образом, сумма энергетических величин оказывается равной

$$\begin{aligned} E_{2n} &= R_1 + \dots + R_{2n} = 2nE_1 + (z_1 + \dots + z_{2n})\epsilon_c \\ &\simeq 2n(E_1 + \frac{2n-1}{\rho} \frac{I_2}{I_1^2}). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Нечетное число пар. – Если количество пар и уравнений Ричардсона нечетно, $N = 2n+1$, одна из величин z_i теперь равна 0 в лидирующем порядке по $\sqrt{\gamma}$. Тогда (2.77) нужно заменить на

$$\begin{aligned} 0 \simeq I_1 a_1 + \frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_1 - a_3} + \dots + \frac{1}{a_1 - a_n} \\ + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_n} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2} + \frac{1}{2a_1} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Сумма a_n подчиняется снова (2.78) с $n/2$, замененным на $3n/2$. Тогда имеем вместо (2.80)

$$\sum_{i=1}^n z_i \simeq [2n(n-1)/2 + 3n/2] \gamma I_2 / I_1^2 = n(n + \frac{1}{2}) \gamma \frac{I_2}{I_1^2}, \quad (2.83)$$

что ведет к ожидаемому уже результату

$$E_{2n+1} = R_1 + \dots + R_{2n+1} \simeq (2n+1) \left(E_1 + \frac{2n}{\rho} \frac{I_2}{I_1^2} \right) \quad (2.84)$$

Видно, что результаты и для четного, и для нечетного количества пар полностью согласуются с полученным ранее в рамках вероятностного подхода выражением (2.80), в котором никакого разложения вокруг энергии изолированной пары не производилось. Это означает, что вириальное разложение должно прерываться, то есть слагаемые второй и высших степеней по плотности пар в разложении плотности энергии либо равны нулю точно, либо дают интенсивные вклады в энергию, а потому пренебрежимо малы. Эти слагаемые могут быть вычислены в рамках предложенного в этом параграфе подхода, но для этого нужно рассматривать вклады все более и более высоких порядков по γ , что технически чрезвычайно сложно. Тем более примечательно, что эта программа была осуществлена в полном объеме в работе [89], в которой было показано, что **все** слагаемые высших степеней в термодинамическом пределе дают интенсивные вклады. В рамках вероятностного подхода этот же результат мы получили гораздо более простым способом.

2.4. Приближение среднего поля и энергия связи куперовской пары

Полученное в предыдущих параграфах выражение для энергии основного состояния сверхпроводника при половинном заполнении совпадает с известным выражением теории БКШ для этой же величины. Действительно, энергия конденсации в теории БКШ обычно записывается следующим образом: $E_{BCS} = \frac{1}{2}\rho\Delta^2$ with $\Delta = 2\omega_c e^{-1/\rho V}$. Поскольку $2\omega_c = \Omega$ - это ширина слоя Дебая, E_{BCS} можно представить в виде:

$$E_{BCS} = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 e^{-2/\rho V} = \frac{N_\Omega}{2} \frac{\epsilon_c}{2} \quad (2.85)$$

где $N_\Omega/2$ - это просто количество пар в случае половинного заполнения. Таким образом, этот результат теории БКШ может быть интерпретирован с несколько необычных позиций: все электроны в слое Дебая формируют

куперовские пары, а энергия связи такой пары равна в точности половине энергии связи изолированной пары из задачи Купера. Эта картина полностью согласуется с выражением (3.25), полученным с помощью решения уравнений Ричардсона.

Для того, чтобы понять, существует ли согласие между результатами решения уравнений Ричардсона и среднеполевыми методами в случае *произвольного* заполнения, подход теории БКШ следует модифицировать. Для этого необходимо учесть, что химический потенциал μ не обязательно попадает в точности посередине окна Дебая, как в стандартной конфигурации теории БКШ, отвечающей половинному заполнению. К уравнению на щель нужно добавить уравнение на химический потенциал, которое получается из требования равенства среднего количества частиц заданной величине. Затем эти два связанных уравнения нужно решить совместно.

Уравнения на химический потенциал и сверхпроводящую щель получаются минимальным обобщением теории БКШ в духе подходов, предложенных Иглсом [21] и Леггеттом [22], и имеют вид:

$$\frac{2}{\rho V} = \ln \frac{\epsilon_{F_0} - \mu + \Omega + \sqrt{(\epsilon_{F_0} - \mu + \Omega)^2 + \Delta^2}}{\epsilon_{F_0} - \mu + \sqrt{(\epsilon_{F_0} - \mu)^2 + \Delta^2}}, \quad (2.86)$$

$$\Omega - \frac{2N}{\rho} = \sqrt{(\epsilon_{F_0} - \mu + \Omega)^2 + \Delta^2} - \sqrt{(\epsilon_{F_0} - \mu)^2 + \Delta^2}. \quad (2.87)$$

Эти уравнения допускают аналитическое решение, которое описывается формулами (2.62) и (2.63), полученными из уравнений Ричардсона с помощью вероятностного подхода. Используя найденные выражения для Δ и μ , несложно убедиться в том, что выражение для энергии основного состояния в рамках обобщенной теории БКШ совпадает с найденной ранее зависимостью (3.25), полученной из подхода Ричардсона. Более того, энергия возбужденного состояния тоже описывается выражением (2.61), так что и здесь применимы все наши рассуждения о разных режимах для куперовских пар.

Итак, показано, что обобщение теории БКШ в духе подходов Иглса и Леггета приводит к тем же результатам для энергий основного и первого возбужденного состояний, что и вероятностный метод решения уравнений Ричардсона, которые дают *точное* решение многочастичной задачи. Таким образом, можно сделать вывод, что, в случае потенциала типа БКШ, приближение среднего поля дает точные в термодинамическом пределе и при нуле температур результаты для энергии системы вдоль *всего* перехода от режима БКШ к разреженному режиму пар – по крайней мере, в случае постоянной плотности состояний. Заметим, что Леггеттом [22] отмечалось, что приближение среднего поля в окрестности точки перехода может переставать работать.

Рассмотрение более общей конфигурации – с произвольным заполнением окна Дебая – позволяет также установить простую связь между двухчастичной задачей Купера и многочастичной задачей БКШ, хотя в литературе (например, в книге Шриффера [20]) встречаются утверждения о том, что эти задачи между собой связать сложно, поскольку в режиме БКШ волновые функции пар перекрываются очень сильно. Возможно, такой радикальный вывод обусловлен неудачами Шафрота и Блатта построить первую микроскопическую теорию сверхпроводимости, отталкиваясь от картины, основанной на индивидуальных парах [20]. Заметим однако, что некоторыми авторами – например, Леггеттом [22], подчеркивалась адекватность представления о куперовских парах, как о гигантских молекулах. Тем не менее, как показано выше, оказывается возможным представить энергию основного состояния системы не через щель, а в эквивалентном виде через энергию связи куперовской пары, которая зависит простым образом от заполнения окна Дебая, уменьшаясь линейно по мере роста заполнения. Такое понимание вполне соответствует физике составных бозонов, которые состоят из фермионов, так что рост плотности составных бозонов должен приводить к уменьшению доступных мест, участвующих в формировании

связанных состояний. Похожий эффект наблюдается и для экситонов Ванье-Мотта [90].

Энергия связи куперовской пары задает масштаб энергий ϵ_c , отличающийся от масштаба, связанного с щелью Δ . Заметим, что эти величины имеют схожие, но все же отличные друг от друга зависимости от константы связи: в режиме слабой связи, $\nu \ll 1$, $\epsilon_c \sim \exp(-2/\nu)$, тогда как $\Delta \sim \exp(-1/\nu)$. Множитель 2 в экспоненте важен, поскольку энергия связи оказывается гораздо меньше щели. Отметим, что разница в экспоненте между энергией связи изолированной пары в задаче Купера и сверхпроводящей щелью в теории БКШ уже отмечалась в литературе (см., например, стр. 169 книги Шриффера [20]). Концептуально, сверхпроводящая щель в режиме БКШ представляет собой разницу между энергией первого возбужденного состояния и энергией основного состояния. Можно сказать, что она определяет коллективный отклик системы на попытку разорвать одну из пар. В то же время энергия связи пары представляет собой энергию конденсации (то есть часть энергии основного состояния, связанную со сверхпроводящими корреляциями), деленную на число пар.

Примечательно, что развитое здесь понимание энергии конденсации отличается от распространенного в литературе. А именно, мы полагаем, что все электроны, находящиеся в слое Дебая, участвуют в спаривании, так что число пар просто равно числу электронов с определенной проекцией спина. В книге Шриффера такие пары назывались сверхтекучими [20]. Подчеркнем, что волновая функция теории БКШ в ее вариационном виде зависит от операторов рождения и уничтожения именно этих электронов. Если эту волновую функцию спроецировать на состояние с фиксированным числом частиц, то окажется, что проекция представляет собой состояние, в которой *все* эти пары сконденсированы в одно и то же состояние. В то же время, когда речь заходит об анализе энергии конденсации, говорят, что число “куперовских пар” равно числу электронов в тонком слое порядка

Δ вокруг энергии Ферми, то есть $\rho\Delta$, что в режиме слабой связи гораздо меньше полного числа электронов в слое Дебая. Следуя книге Шриффера, будем называть такие пары виртуальными. При этом полагают, что каждая виртуальная пара обладает энергией связи порядка Δ . Перемножая эти две величины, снова получают, по порядку величины, энергию конденсации. Таким образом, два этих понимания отвечают двум возможным способам разложения выражения для энергии конденсации на множители. По сути, здесь показано, что, оставаясь в рамках представления сверхтекучих пар, можно предложить простое и физически ясное понимание энергии основного состояния, причем при *произвольном* заполнении слоя Дебая. Более того, предложенная интерпретация позволяет описывать с единых позиций как режим БКШ, так и разреженный предел пар, тогда как концепция виртуальных пар, очевидно, имеет смысл только в первом случае.

Энергия связи пары обеспечивает дополнительный масштаб энергии. Однако этот масштаб оказывается скрытым в обычных сверхпроводниках большого размера. Представляет интерес вопрос, не может ли этот масштаб проявиться в каких-то ситуациях? Поскольку теория БКШ оказывается точной в термодинамическом пределе при нуле температур, можно ожидать, что этот масштаб даст о себе знать в тех ситуациях, когда данные требования нарушаются. Так, известно, что теория БКШ перестает работать даже на качественном уровне в малоразмерных системах, содержащих небольшое число пар [23]. Другой случай - конечные температуры в режиме перехода от предела БКШ к пределу локальных пар, где проявляются эффекты, связанные с “псевдощелью”; а “псевдощель”, согласно некоторым представлениям, как раз может описывать разрыв пары, но без коллективного, когерентного отклика системы. Этот последний случай в диссертационной работе не рассматривается; однако в следующем параграфе мы коснемся первого случая и покажем, что энергия связи пары здесь проявляется.

2.5. Флуктуации и спаривание в наноразмерной системе

В подходе Ричардсона количество частиц фиксировано, то есть используется канонический ансамбль (по поводу применимости канонического ансамбля, как такового, к теории сверхпроводимости см., например, [9]). В то же время, в теории БКШ количество частиц не фиксировано – используется описание с помощью большого канонического ансамбля, которое становится точным в пределе большого числа частиц. Кроме того, в теории БКШ применяется метод среднего поля, который, по определению, является приближенным. Тем не менее, погрешности в термодинамическом пределе нивелируются, так что результаты теории БКШ – по крайней мере, для низколежащей части спектра – оказываются точными.

Ясно однако, что описание с помощью большого канонического ансамбля должно переставать работать, если количество частиц в системе становится небольшим. Из литературы известно, что именно это и происходит с теорией БКШ, если ее применить к малоразмерным системам – например, сверхпроводящим наногранулам [23]. Однако и здесь можно *частично* исправить ситуацию, если использовать различные типы приближений среднего поля, в которых число частиц фиксировано [23, 91]. С другой стороны, в этом случае пропадают изящество и простота, характерные для теории БКШ, и приходится применять тяжелые численные методы.

В отличие от теории БКШ подход Ричардсона дает точное решение задачи в представлении с фиксированным числом частиц, то есть оба источника погрешностей, характерных для теории БКШ, здесь отсутствуют. К сожалению, за это приходится заплатить свою цену - в общем случае уравнения Ричардсона пока не поддаются аналитическому решению. Известны лишь решения в нескольких пределах, среди которых - рассмотренный нами ранее термодинамический предел с конечной безразмерной константой связи, в котором оказывается точной теория БКШ (заметим, что все извест-

ные ранее аналитические решения были получены Ричардсоном и Годеном). В этом пределе энергия конденсации является неаналитической функцией константы взаимодействия. Другие два предела - предел очень слабой связи и предел сильной связи, в которых энергия конденсации в лидирующем порядке просто пропорциональна константе взаимодействия. Предел очень слабой связи релевантен для малоразмерных сверхпроводников, в которых щель (и, как утверждается ниже, энергия связи пары) оказывается сравнимой с расстоянием между соседними одноэлектронными уровнями. В этом случае, теория БКШ перестает работать даже на качественном уровне, поскольку она предсказывает отсутствие сверхпроводящих корреляций, как таковых. Можно сказать, что в термодинамическом пределе квантовые флуктуации фактически отсутствуют, тогда как в пределе очень слабой связи они доминируют. Разные режимы проиллюстрированы на Рис. 2.4.

Таким образом, существует принципиальный вопрос, как описать переход от одного типа поведения к другому? Данный вопрос является харак-

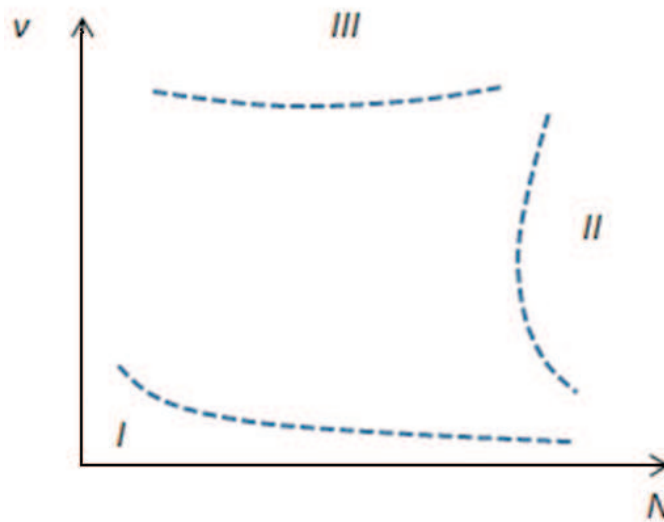


Рис. 2.4. Разные режимы для энергии основного состояния при $N = N_{\Omega}/2$. Режим I соответствует пределу очень слабой связи: $v \ll 1/\ln N_{\Omega}$ при $N_{\Omega} \rightarrow \infty$. Режим II соответствует термодинамическому пределу: v постоянна и конечна при $N_{\Omega} \rightarrow \infty$. Режим III - предел сильной связи $v \gg 1$. Режим I и переходная область не удовлетворяют критерию (2.40)

применимости вероятностного подхода.

терным для современной физики твердого тела, в которой уделяется особое внимание тому, как макроскопические свойства возникают по мере увеличения размеров системы. В нашем случае, данная проблема имеет явную математическую составляющую – требуется описать переход от неаналитической зависимости от константы связи к зависимости аналитической. С точки зрения физики вопрос так же нетривиален, ведь в пределе БКШ энергия конденсации является экстенсивной величиной, а в пределе очень слабой связи – интенсивной [62–64].

До настоящего времени переход от одного предела к другому, в рамках подхода Ричардсона, исследовался либо с помощью численных методов решения уравнений, либо с помощью разложений с одного или другого предела [23, 92]. В области перехода по-видимому не существует малого параметра, который можно было бы использовать для построения какого-либо разложения.

Заметим, что, вообще говоря, представляется возможным обобщить развитый ранее вероятностный подход на случай системы малого размера. Однако для этого необходимо оперировать с более низкой эффективной температурой кулоновского газа на плоскости, что требует умения вычислять более сложные интегралы сельберговского типа, чем те, что фигурировали в предыдущих параграфах – в частности, они должны содержать более высокие степени определителей Вандермонде. Технически эта задача весьма трудна. Тем более примечательно, что некоторые результаты можно получить и без вероятностного подхода, но развивая отдельные предложенные нами ранее идеи.

Целью настоящего параграфа состоит в том, чтобы использовать симметричные соображения для получения аналитических результатов в области перехода. Известно, что симметричные соображения могут быть очень полезными в случаях, когда прямые методы решения малоэффективны. Так, квантовые флуктуации не могут нарушить симметрию гамильтониана. Ранее

нами было показано, что гамильтониан, принятый в теории БКШ, для которого и существует точное решение Ричардсона, обладает симметрией между парами электронов и парами дырок. В модели с эквидистантным расположением одноэлектронных уровней это приводит к возможности связывать между собой выражения для энергий *разного* количества электронов в слое Дебая *точными* соотношениями (см. (2.23)). Ранее мы уже использовали электронно-дырочную симметрию в рамках вероятностного подхода – при переходе через половинное заполнение окна Дебая мы переключались от представления гамильтониана в терминах электронов к представлению через дырки, для которых также могут быть записаны свои уравнения Ричардсона. При этом мы отбрасывали, как несущественные в термодинамическом пределе, некоторые слагаемые в (2.23). Теперь все эти слагаемые требуется сохранять.

Несмотря на то, что электронно-дырочная симметрия содержится в гамильтониане, она явным образом не проявляется в уравнениях Ричардсона. Поэтому использование этой симметрии – это дополнительный инструмент, который может быть весьма полезен при решении уравнений с помощью, например, тех или иных разложений. Более того, подобными скрытыми симметриями должны обладать и другие уравнения Бете.

Итак, снова рассмотрим систему фермионов с двумя возможными проекциями спина. Будем считать, что по-прежнему эту систему можно описывать с помощью гамильтониана теории БКШ, спаривающего лишь электроны с противоположными направлениями импульса и проекциями спина (точнее, тут речь должна идти о спаривании состояний, получающихся друг из друга операцией обращения времени). Хотя такой гамильтониан кажется слишком простым для описания сверхпроводников ультрамалого размера, его применимость в маленьким диффузным сверхпроводящим гранулам была обоснована в ряде работ [94–96] (т.н. универсальный гамильтониан). Для этого важно, чтоб энергия Таулесса, которая определяет обратное

время диффузии через гранулу, была намного больше среднего расстояния между соседними уровнями энергии. Также считается, что энергия Таулесса должна превышать величину сверхпроводящей щели.

Будем снова полагать, что энергии одноэлектронных уровней распределены равномерно (модель эквидистантных уровней), так что разница между энергиями двух соседних уровней ε_k равна $1/\rho$. Плотность состояний ρ увеличивается с ростом размеров системы, а константа связи V уменьшается; в сверхпроводнике большого размера безразмерная константа связи $v = \rho V$ конечна. Напомним, что в теории БКШ интервал энергий между ε_{F_0} и $\varepsilon_{F_0} + \Omega$ всегда заполнен наполовину. Таким образом, полное количество доступных состояний с одной из двух проекций спина равно $N_\Omega \equiv \rho\Omega$ при $N = N_\Omega/2$; ε_k пробегает значения от ε_{F_0} до $\varepsilon_{F_0} + (N_\Omega - 1)/\rho$, всего принимая N_Ω значений. Мы же снова будем рассматривать общий случай произвольного заполнения, и теперь это будет делаться с достаточно прикладной целью - а именно, рассматривая произвольное заполнение, мы будем стремиться получить информацию о половинном заполнении, которое, по всей видимости, наиболее физически релевантно. Результаты будут представлены только для половинного заполнения. При этом для простоты будем ограничиваться четными значениями N_Ω .

В диссертационной работе рассматривается лишь модель эквидистантных уровней, которая дает простейшее, но физически осмысленное распределение одноэлектронных уровней энергии (хотя и не учитывает реальную форму системы). Именно по этой причине данная модель представляется наиболее привлекательной начальной точкой для изучения значения электронно-дырочной симметрии для решения уравнений Ричардсона. Отметим, что в литературе ранее также анализировались сверхпроводящие корреляции в малоразмерных системах со случайными расстояниями между уровнями, распределенными в соответствии с гауссовым ортогональным ансамблем [97]. При этом использовалось как приближение среднего поля,

так и точный подход Ричардсона (в последнем случае уравнения решались численно). Подобная статистика типична для малых металлических гранул. В результате было показано, что кроссовер между сверхпроводящим состоянием и режимом доминирования флуктуаций в этом случае плавлен, как и в случае модели эквидистантных уровней. Принимая во внимание этот факт, равно как и то обстоятельство, что нас интересуют ответы на достаточно принципиальные вопросы, возникающие для любых типов распределения, использование модели эквидистантных уровней здесь представляется полностью оправданным.

Итак, электронно-дырочная симметрия диктует соотношение (2.23) для энергий основного состояния. Разделим E_N на аддитивный вклад $2N\varepsilon_{F_0}$, который просто соответствует сдвигу всех энергетических величин в уравнениях Ричардсона, и вклад E'_N , который не зависит от ε_{F_0}

$$E_N(\varepsilon_{F_0}) = 2N\varepsilon_{F_0} + E'_N. \quad (2.88)$$

Подставляя (2.88) в (2.23), приходим к функциональному уравнению

$$E'_N = E'_{N_\Omega - N} + (N_\Omega - 2N) \left(V - \frac{N_\Omega - 1}{\rho} \right), \quad (2.89)$$

которое выполняется точно. Это нетривиальное соотношение позволит нам связать энергию конденсации N пар с этой же величиной для $N_\Omega - N$ пар. Заметим, что оно автоматически выполняется при половинном заполнении, $N = N_\Omega/2$.

Подчеркнем, что хотя электронно-дырочная симметрия может быть достаточно легко извлечена из гамильтониана, представляется совсем не очевидным, что решение N уравнений связано с решением $N_\Omega - N$ уравнений через такое простое и универсальное соотношение, как (2.89).

Поскольку E'_N - функция дискретной переменной N , которая пробегает N_Ω значений, E'_N всегда может быть представлено в виде полинома от N степени N_Ω . При этом вместо использования элементарных мономов

N^n , разложение удобнее проводить по символам Похгаммера, так как $(N)_n$ может рассматриваться в качестве полинома от N степени n . Тогда имеем

$$E'_N = \sum_{n=1}^{N_\Omega} e_n(N)_n, \quad (2.90)$$

где e_n - набор неизвестных величин.

Далее, E'_N может быть тоже разделено на энергию конденсации $E_N^{(cond)}$ и вклад от чистой кинетической энергии (в нормальном состоянии). Последняя представляется универсально в виде $N(N-1)/\rho$, и эта величина может быть описана с помощью второго слагаемого в сумме (2.90).

Вплоть до этого момента все результаты были точными. Теперь мы делаем предположение, что основной вклад в E'_N обеспечивается двумя первыми слагаемыми в сумме (2.90), то есть

$$E'_N \simeq e_1 N + e_2 N(N-1). \quad (2.91)$$

Это предположение представляется полностью разумным, поскольку именно такая форма E'_N возникает в трех пределах, решаемых аналитически, о которых речь шла выше (см. Рис. 2.4). Обсудим структуру энергии конденсации в этих трех пределах – кинетическая энергия $N(N-1)/\rho$ всегда согласуется с (2.91), как уже упоминалось чуть выше.

Итак, первый предел - это режим очень слабой связи, который может реализовываться при конечных N_Ω ($v \ll 1/\ln(N_\Omega)$, а потому критерий (2.40) не выполняется), в котором все энергетические величины расположены на вещественной оси, причем каждая величина находится чуть ниже своего одноэлектронного уровня энергии. Таким образом, вся энергия системы приближается к энергии системы невзаимодействующих электронов. В этом случае, $E_N^{(cond)} = -VN$, так что (2.91) удовлетворено. Второй предел - это предел сильной связи ($v \gg 1$), в котором все энергетические величины находятся далеко от линии одноэлектронных энергий на комплексной плоскости. В этом случае, $E_N^{(cond)}$ содержит слагаемые, пропорциональные N и

$N(N - 1)$. Наконец, есть третий предел бесконечно большого N при конечном ненулевом ν , который ранее нами решался с помощью вероятностного подхода; $E_N^{(cond)}$ здесь имеет ту же структуру. Эти три режима крдинально отличаются друг от друга, но при этом форма $E_N^{(cond)}$ в них одна и та же. Именно поэтому мы и предположили, что эта форма должна оставаться устойчивой, сохраняясь в переходной области, которая характеризуется конечными N_Ω и произвольными ν (критерий (2.40) снова не выполняется). Заметим, что, помимо универсальности, зависимость энергии конденсации от N в этих трех пределах характеризуется исключительной простотой, тогда как зависимость от ν меняется радикальным образом – от аналитической к неаналитической.

Теперь будем рассматривать e_1 и e_2 в качестве неизвестных чисел и подставим (2.91) в (2.89). Затем приравняем множители при $(N)_0$, $(N)_1$ и $(N)_2$ и получим таким образом систему трех линейных уравнений для e_1 и e_2 . Эти уравнения оказываются зависимыми и поэтому дают лишь одно условие

$$e_2 = -\frac{e_1}{N_\Omega - 1} + \left(\frac{N_\Omega - 1}{\rho} - V \right) \frac{1}{N_\Omega - 1}. \quad (2.92)$$

На данном шаге остается только одно неизвестное число, e_1 . Оно может быть легко определено, если рассмотреть задачу с одной парой в качестве граничного условия в пространстве дискретных значений N . Получаем: $E'_1 = e_1$, где e_1 дается решением единственного уравнения Ричардсона:

$$V = \sum_{n=0}^{N_\Omega-1} \frac{1}{2n/\rho - e_1}, \quad (2.93)$$

при условии $e_1 < 0$, которое гарантирует, что мы выбираем наименьшее по энергии решение; тогда $-e_1$ есть ничто иное, как энергия связи единичной пары. В общем случае, $-e_1$ должно быть найдено численно, тогда как точные аналитические результаты возможны в некоторых пределах, как показано ниже. Заметим, что (2.93) может быть представлено с использованием

дигамма-функции:

$$\frac{\rho V}{2} = \psi\left(N_{\Omega} + \frac{\rho|e_1|}{2}\right) - \psi\left(\frac{\rho|e_1|}{2}\right). \quad (2.94)$$

Выражение для E'_N получается подстановкой (2.92) в (2.91):

$$E'_N = \frac{N(N-1)}{\rho} + Ne_1\left(1 - \frac{N-1}{N_{\Omega}-1}\right) - VN\frac{N-1}{N_{\Omega}-1}, \quad (2.95)$$

где первое слагаемое происходит из кинетической энергии нормальных электронов, тогда как два следующих дают энергию конденсации. Примечательно, что метод воспроизводит первый вклад точно, хотя уравнения Ричардсона мы и не решали. В итоге, выражение для энергии конденсации принимает вид

$$E_N^{(cond)}/N = e_1\left(1 - \frac{N-1}{N_{\Omega}-1}\right) - V\frac{N-1}{N_{\Omega}-1}. \quad (2.96)$$

Выражение (2.96), дополненное (2.93), является основным результатом данного параграфа.

Теперь рассмотрим пределы, в которых уравнение (2.93) может быть решено аналитически, чтобы проверить, дает ли (2.96) разумные результаты.

Начнем с предела очень слабой связи, в котором решение (2.93) приближается к нижнему одноэлектронному уровню настолько близко, что расстояние становится гораздо меньше, чем $1/\rho$, и, более того, вклады от других уровней пренебрежимо малы. Тогда мы получаем простое решение $e_1 = -V$. Оценивая отброшенные вклады от остальных уровней, получаем критерий применимости данного результата: $v \ll 1/\ln(N_{\Omega})$. В этом случае, благодаря сокращению в (2.96), $E_N^{(cond)}/N$ сводится к $-V$, как и должно быть. Заметим, что энергия конденсации в этом пределе не зависит от фактора заполнения окна Дебая.

Далее, рассмотрим противоположный предел, в котором расстояние между единственной энергетической величиной и низшим уровнем намного больше расстояния между уровнями $1/\rho$, и количество уровней N_{Ω} также

велико. Эти обстоятельства позволяют заменить сумму в (2.93) интегралом, что дает

$$e_1 \simeq -2\Omega \frac{\exp(-2/v)}{1 - \exp(-2/v)}. \quad (2.97)$$

Таким образом, имеются два критерия применимости этого результата: $N_\Omega \gg 1$ и $N_\Omega \exp(-2/v)/(1 - \exp(-2/v)) \gg 1$. Предел образца бесконечного размера, в котором v фиксировано и конечно, таким образом всегда удовлетворяет этим критериям. Также легко видеть, что $|e_1|$, задаваемое (2.93), намного больше, чем V в пределе образца большого размера, $N_\Omega \rightarrow \infty$, так что $V \sim |e_1|/N_\Omega$. Это означает, что в этом пределе V может быть опущено в (2.96). Тогда имеем

$$E_N^{(cond)}/N \simeq -2 \left(\Omega - \frac{N}{\rho} \right) \frac{\exp(-2/v)}{1 - \exp(-2/v)}, \quad (2.98)$$

что дает нам уже знакомый результат для термодинамического предела.

Подчеркнем, что полученные результаты представляются весьма нетривиальными. Действительно, энергия конденсации (2.96) дается суммой двух вкладов. В пределе очень слабого спаривания, оба они по порядку величины совпадают, а их сумма дает точный результат. При этом, в пределе образца большого размера, $N_\Omega \rightarrow \infty$ с конечным ненулевым v , одно из слагаемых становится по порядку величины $1/N_\Omega$ от второго, так что его можно опустить, поскольку оно дает лишь интенсивный вклад. Зато теперь оставшееся слагаемое снова дает точный результат. Такая весьма необычная конкуренция между этими двумя слагаемыми указывает на то, что предложенная формула для энергии конденсации должна оставаться применимой и вне данных пределов.

Фактически с помощью манипуляций с энергией связи единичной пары, которая в общем случае должна быть отыскана численно, мы обходим проблему неприменимости методов, использующих разложения по $1/N$ к нормальному состоянию в пределе малых V , которая была заострена еще Ричардсоном [64].

Для того, чтобы удостовериться в применимости полученных результатов к переходной области, проведем сравнение теоретических предсказаний с результатами численного решения системы уравнений Ричардсона для разного количества пар – от 1 до 50 при половинном заполнении. Сравним энергии конденсации при использовании (2.96) (где e_1 получалось численным решением (2.93)). Вдобавок приведем результаты для энергии конденсации, получаемые при использовании теории БКШ с нефиксированным количеством частиц; единственная разница со стандартной версией этой теории будет заключаться в том, что мы не станем заменять суммы на интегралы, решая уравнение на щель и вычисляя энергию конденсации, как таковую, что важно для систем с малым количеством пар, поскольку замены сумм на интегралы здесь приводят к заметным погрешностям.

Результаты представлены на Рис. 2.5 для трех значений N . Энергия конденсации нормирована на $2/\rho$. Сплошные линии соответствуют аналитической формуле (2.96), пунктирные линии – результатам численного решения уравнений Ричардсона, а точечные линии – теории БКШ. Видно, что в общем имеется хорошее согласие в переходной области. Поэтому наше предположение можно считать подтвержденным. Напротив, результаты теории БКШ становятся адекватными лишь в пределе больших N , тогда как для любого N есть область малых значений ν , в которых теория БКШ неверна даже качественно из-за того, что исчезает решение уравнения на щель (уравнения самосогласования). При этом в данном пределе, где говорят о доминировании квантовых флуктуаций, наша формула работает хорошо.

Нетрудно заметить, что в рамках подхода, предложенного в этом параграфе, снова возникает энергетический масштаб, дающий энергию связи единичной пары, который альтернативен щели Δ . Эта величина является основным “строительным блоком”, используемым в нашем подходе. Поскольку в малых системах теория БКШ перестает работать, можно ожидать, что здесь этот скрытый параметр начнет себя как-то проявлять в явном виде.

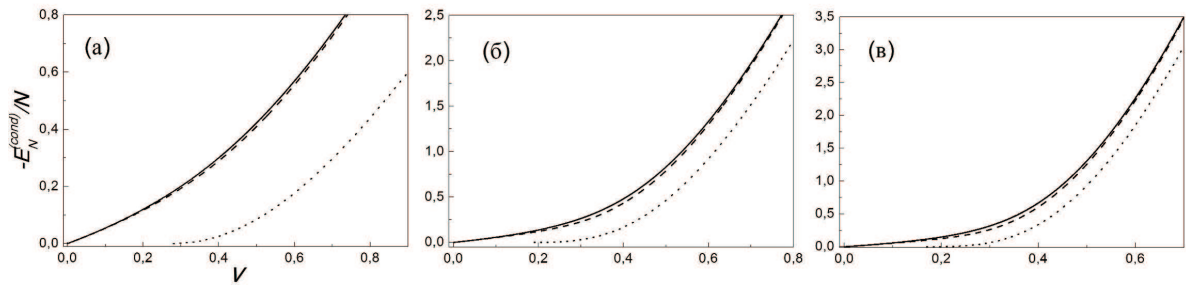


Рис. 2.5. Энергия конденсации на пару (нормированная на $2/\rho$), как функция константы взаимодействия $\nu = \rho V$ для N пар: $N = 5$ (а), $N = 25$ (б), $N = 50$ (в). Сплошные линии - результат аналитических вычислений, пунктирные - численное решение уравнений Ричардсона, точечные линии - теория БКШ.

Действительно, анализ формул (2.96) и (2.93) показывает, что когда расстояния между соседними уровнями оказываются сопоставимыми с энергией связи изолированной пары, в уравнении (2.93) нельзя перейти от суммирования к интегрированию, и (2.96) начинает существенно отличаться от предсказаний теории БКШ.

Примечательно, что к аналогичному выводу пришли авторы работы [92], в которой, также с использованием подхода Ричардсона, было замечено, что, при уменьшении размеров системы, результат теории БКШ для энергии основного состояния перестает давать адекватные результаты гораздо раньше, чем когда расстояние между соседними уровнями становится сравнимым с Δ . Согласно [92], это происходит, когда для расстояний $1/\rho$ начинает выполняться соотношение $1/\rho \approx 2\Delta^2/\Omega$. Авторы [92] предположили, что это подразумевает наличие дополнительного масштаба энергии $2\Delta^2/\Omega$. Из записанного в таком виде выражения трудно понять его "происхождение", его структура выглядит загадочной. Однако несложные манипуляции показывают, что в пределе системы большого размера $2\Delta^2/\Omega$ есть не что иное как все та же энергия связи $-e_1$ (когда ν мало), что прошло мимо внимания авторов работы [92]. В частности, как обсуждалось в предыдущем параграфе, в этом пределе обе величины имеют схожие, но все же различные зависимости от ν . Заметим, что в [92] были высказаны некоторые

предложения о том, как энергию конденсации гранулы можно исследовать экспериментально с помощью измерения спиновой намагниченности и спиновой восприимчивости.

Таким образом, можно сделать вывод, что в малоразмерных системах скрытый энергетический масштаб, представляющий собой энергию связи единичной пары, проявляет себя в явном виде. А именно, теория БКШ перестает адекватно работать, когда расстояния между соседними одноэлектронными уровнями энергии оказываются приближенно равными этому масштабу. Когда же расстояния оказываются сопоставимы со сверхпроводящей щелью Δ , БКШ перестает работать даже на качественном уровне, предсказывая полное исчезновение сверхпроводящих корреляций.

Отметим, что представляется перспективным обобщить подход на возбужденные состояния, а также на другие типы распределения одноэлектронных уровней. Не исключено, что точность предложенной формулы в переходной области может быть улучшена, если каким-то образом инкорпорировать логарифмические зависимости от количества частиц в разложение (2.90). Кроме того, анализ симметрий между электронами и дырками может быть полезным в более широком контексте решения уравнений Бете. Например, этот инструмент можно применять при исследовании вопроса о том, обеспечивают ли решения уравнений Бете полноту базиса волновых функций, следующую из исходного уравнения Шредингера [93]. Также заметим, что точное соотношение (2.89) может использоваться для проверки точности найденных численными методами решений уравнений Ричардсона, а также для анализа природы сингулярностей в решении уравнений, возникающих при определенных условиях (как отражается переход к представлению через дырки на сингулярностях).

2.6. Краткие выводы

В этой главе изучалось куперовское спаривание в рамках подхода Ричардсона, который позволяет найти точное многочастичное решение гамильтониана теории БКШ.

Был предложен новый способ решения уравнений Ричардсона в термодинамическом пределе, в котором не предполагается заранее, что энергетические величины выстраиваются в одномерные структуры на комплексной плоскости (как это делалось ранее в методе, восходящем к Годену). Для лучшего понимания сущности этого метода полезно привлечь точную электростатическую аналогию для уравнений Ричардсона, в которой энергетические величины ставятся в соответствие со свободными взаимодействующими зарядами на плоскости, а положения зарядов соответствуют значениям этих величин (кулоновская плазма). Таким образом квантовая задача сводится к некоторой классической, детерминистической задаче в пространстве энергетических величин.

В диссертационной работе от рассмотрения энергии зарядов на плоскости предложено перейти к аналогу гиббсовской вероятности при конечной, но низкой температуре. Выражение для вероятности оказывается схожим с волновой функцией Лафлина; оно факторизуется. Далее положение центра масс системы свободных зарядов, которое и равно энергии исходной квантовой задачи, реконструируется путем вычисления соответствующей статистической суммы. При этом оказывается, что энергия квантовой задачи определяется логарифмической производной по обратной температуре от классической статсуммы, что представляется довольно необычным примером соответствия между квантовой и классической физикой.

Статсумма задается многомерным интегралом сельберговского типа. Интегралы такого типа фигурируют в комформной теории поля и теории случайных матриц. Предложены аналитические методы вычисления соот-

ветствующих интегралов, основанные на сведении интегралов к суммам биномиального типа, которые далее вычисляются с помощью манипуляций детерминантами Вандермонде. Вычислены интегралы, относящиеся к основному и первому возбужденным состояниям квантовой задачи при произвольном заполнении окна Дебая. При этом контур интегрирования выбирался, исходя из некоторых достаточно правдоподобных предположений. Проведено обобщение среднеполевой теории БКШ на случай произвольного заполнения окна Дебая.

В результате показано, что обобщенная теория БКШ точно описывает энергию основного и первого возбужденного состояний системы в термодинамическом пределе и при нуле температур при любом заполнении окна Дебая, то есть вдоль всего перехода от предела локальных пар к плотному пределу БКШ. Данный вывод подтверждается и с помощью еще одного метода решения уравнений Ричардсона, предложенного в диссертационной работе, который позволяет находить разложение плотности энергии системы по степеням плотности пар, то есть в виде вириального разложения. Оба метода могут быть применены и к другим уравнениям анзаца Бете, среди которых уравнения Ричардсона представляют собой лишь один пример.

Рассмотрение конфигурации с произвольным заполнением окна Дебая позволило проследить, как меняется энергия основного состояния при переходе от двухчастичной задачи Купера к плотному режиму БКШ. Оказалось, что энергию конденсации всегда можно представить в терминах энергии связи пары, которая, в многочастичной конфигурации, уменьшается пропорционально числу занятых состояний в слое Дебая по сравнению с изолированной парой. Количество таких пар равно полному количеству электронов с заданной проекцией спина в окне Дебая. Эта интерпретация отличается от довольно распространенной интерпретации того же результата в терминах “виртуальных” пар, согласно которой куперовские пары образуется лишь электронами, лежащими в слое толщиной порядка сверх-

проводящей щели вокруг уровня Ферми, а энергия связи такой пары равна щели. Два этих представления отвечают двум возможным разбиениям энергии конденсации на множители. Тем не менее, предложенная в диссертационной работе картина обладает некоторыми преимуществами, позволяя связать воедино разреженный и плотный режимы пар. Кроме того в ней более четко видна прослеживается многочастичная природа щели, представляющей собой коллективный отклик системы на разрыв пары.

Предложенная интерпретация результатов теории БКШ предполагает, что существует скрытый масштаб энергии, задаваемый не сверхпроводящей щелью, а энергией связи пары, которая значительно меньше в пределе слабой связи. В диссертационной работе рассмотрены системы малого размера, в которых теория БКШ, как известно, перестает работать, и поэтому можно ожидать проявления этого скрытого масштаба энергий в более явном виде. Это было сделано с привлечением идеи об электронно-дырочной симметрии.

А именно, было показано, что уравнения Ричардсона обладают скрытой симметрией между спаренными электронами и спаренными дырками в слое Дебая. Используя этот факт, а также дополнительное предположение об общей структуре решения, выполняемое в точно решаемых пределах, была предложена единая формула для энергии конденсации системы, которая применима вдоль всего перехода от режима БКШ в термодинамическом пределе к режиму доминирования флуктуаций в пределе систем ультрамалого размера. Для проверки точности этой формулы проводилось сравнение с результатами численного решения уравнений Ричардсона для разного числа пар. Выявлена хорошая точность в переходной области. В предложенном подходе задача решения уравнений Ричардсона сводится к решению одного уравнения для единичной пары, в роли основного "строительного блока" естественным образом снова выступает энергия связи такой пары. Более того, показано, что по мере уменьшения размера системы, теория

БКШ перестает давать точные результаты, когда среднее расстояние между соседними одноэлектронными уровнями становится сравнимым с энергией связи пары. Когда она становится сопоставимой с щелью, теория БКШ перестает работать даже качественно, неправильно предсказывая исчезновение всяких сверхпроводящих корреляций.

Анализ литературы показал, что на существование дополнительного масштаба энергий в малоразмерных системах, отличного от щели, уже обращалось внимание - именно в вышеуказанном смысле. В диссертационной работе было показано, что предложенное в работе [92] выражение для этого дополнительного масштаба энергии может быть легко переписано в эквивалентном виде, в котором оно как раз и совпадает с энергией связи изолированной пары. Таким образом, действительно можно считать, что в малоразмерных системах существование дополнительного масштаба энергий проявляется в явном виде.

ГЛАВА 3

Вихревое состояние и флуктуации в системах малого размера: сверхпроводники и конденсаты атомов щелочных металлов

3.1. Введение

В данной главе диссертационной работы исследуются свойства малоразмерных сверхпроводящих и сверхтекучих систем, чьи размеры сопоставимы с длиной когерентности, которая задает характерный размер сердцевины топологического дефекта. Для таких систем, в целом, уже могут использоваться среднеполевые методы описания сверхпроводящих и сверхтекучих состояний.

Интерес к подобным системам в полной мере проявился в последние 10-20 лет в связи с впечатляющим прогрессом в экспериментально-технологических методах. Так, современные технологии миниатюризации позволяют создавать твердотельные образцы с поперечными размерами, начиная с десятков нанометров, и хорошо контролируемой формой. Свойства таких систем активно исследуются как экспериментально, так и теоретически. Этот интерес связан как с фундаментальными вопросами – например, как макроскопические свойства системы образуются при увеличении размеров системы, так и возможностью использовать наноразмерные сверхпроводники в приложениях – фотодетекторах [99–101], элементах низкотемпературной электроники (см., например, [102, 103]), СКВИДах, кубитах и т.д..

В то же время, развитие техники понижения температуры до рекордно низких величин позволило создавать конденсаты атомов щелочных металлов в лабораторных условиях. Подобные системы зачастую могут описываться уже известными из физики твердого тела подходами. Однако отсутствие структурных дефектов и относительная простота этих систем, по

сравнению с твердыми телами, позволяет проверять адекватность этих подходов на более надежном уровне. Так, уравнение Гросса-Питаевского, выведенное достаточно давно, не было до недавнего времени приложимо ни к одной из известных систем, поскольку для его справедливости требуется малая плотность частиц, что, очевидно, не соблюдается в жидком гелии. Лишь с получением разреженных конденсатов атомов щелочных металлов появилась возможность применить уравнение Гросса-Питаевского к изучению реальных объектов, что и было сделано. Подчеркнем, что помимо использования известных методов и подходов, понимание физики ультрахолодных атомов, конечно, требует и разработки новых идей. В частности, это относится и к переходу БЭК-БКШ.

Малоразмерные (как иногда называют в литературе, мезоскопические) сверхпроводники и конденсаты атомов щелочных металлов в ловушках представляются достаточно родственными объектами с точки зрения физики топологических дефектов, поскольку в обоих случаях речь идет о системах размерами порядка длины когерентности, так что квантование числа этих дефектов играет определяющую роль. С теоретической точки зрения, свойства сверхпроводников можно описывать с помощью теории Гинзбурга-Ландау, применимой вблизи критической температуры перехода в нормальное состояние, а свойства конденсатов атомов – с помощью уравнения Гросса-Питаевского, применимого наоборот при низких температурах. Оба формализма математически близки друг к другу. Существенная разница заключается в наличии степени свободы, связанной с магнитным полем, в случае сверхпроводников. Однако, для малоразмерных сверхпроводников, как правило, можно пренебречь изменением поля внутри системы, считая его равным внешнему полю, что делает две системы еще более близкими друг к другу.

Экспериментальное изучение свойств малоразмерных сверхпроводников началось с работ Гейма с сотрудниками (см., например, [98]), которые

исследовали с помощью транспортных измерений свойства дисков из алюминия субмикронных поперечных размеров и толщиной в десятки нанометров. Было зафиксировано скачкообразное изменение намагниченности при изменении внешнего поля, отвечающее входу и выходу индивидуальных вихрей из образца. При этом отдельные вихри, из-за эффектов метастабильности и малоразмерности, были способны нести как дробный, так даже и отрицательный поток. После экспериментов Гейма с сотрудниками свойства таких сверхпроводников стали активно исследоваться в литературе на теоретическом уровне (см., например, [104–109]), и было достигнуто приемлемое описание результатов этих экспериментов.

В дальнейшем была поставлена серия экспериментов [110–113] с гибридными образцами “сверхпроводник-ферромагнетик” субмикронного размера, которые теоретически были описаны автором диссертационной работы. Этому вопросу будет посвящена часть данной главы диссертационной работы.

Последующий прогресс в технологиях миниатюризации привел к новому скачку в данном направлении. Методом роста в ультраразреженном вакууме стало возможным получать островки из свинца с характерными поперечными размерами в десятки и сотни нанометров и толщиной в небольшое число моноатомных слоёв (см., например, [52–54]). Такие островки подвергаются исследованию во внешнем поле с помощью методов сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии. Как будет показано в настоящей главе диссертационной работы, в этих экспериментах система подходит к столь малым размерам, что температурные и квантовые флуктуации способны оказывать значительное влияние на физику топологических дефектов. В частности, этим может объясняться наблюдавшееся в экспериментах подавление поверхностного барьера на вход и выход вихря. Ранее влияние флуктуаций на топологические дефекты в малоразмерных сверхпроводниках практически не исследовалось. В частности, для этого требуются новые

подходы, которые в полной мере учитывали бы то обстоятельство, что размер сердцевины вихря лишь ненамного меньше размера образца.

В то же время, практически неисследованными оказываются и вопросы, связанные с температурными флуктуациями в конденсатах атомов щелочных металлов. Этому вопросу также уделено внимание в этой главе диссертационной работы. При этом исследуются и так называемые спинорные конденсаты, в которых параметр порядка имеет несколько компонент, и появляется новая степень свободы, связанная с разностью или разностями фаз между компонентами. Эти величины также могут испытывать температурные флуктуации. Спинорные конденсаты аналогичны сверхпроводникам с многокомпонентными параметрами порядка, которые сейчас активно исследуются. Поэтому результаты данной главы могут быть полезными и для этого случая.

Заметим, что, когда речь заходит о малоразмерных сверхпроводниках или атомных конденсатах, как правило, непросто достичь описания их свойств на аналитическом уровне, поскольку лондоновская модель перестает работать. В этой связи, обычно используются тяжелые методы численного решения уравнений. При всей привлекательности такого подхода, зачастую результаты таких расчетов сами требуют объяснения, тем более, что подчас результаты вычислений разных авторов отличаются друг от друга. В данной главе диссертационной работы особое внимание уделено разработке и усовершенствованию методов решения уравнений Гинзбурга-Ландау и Гросса-Питаевского для вихревого состояния в малоразмерных системах, основанных на использовании пробных функций. Эти методы позволяют получать многие результаты на аналитическом или полуаналитическом уровнях и таким образом глубже понимать круг анализируемых физических явлений. Основы подходов были заложены другими авторами. Однако в диссертационной работе они обобщены на более сложные ситуации. С их помощью исследуется процесс образования вихрей, *кинетика* термоактивации вихря

через поверхностный барьер, флуктуации вихревых кластеров, экзотические топологические дефекты и флуктуации в спинорных конденсатах, сверхпроводящее состояние в гетероструктурах “сверхпроводник-ферромагнетик”.

Итак, можно констатировать, что несмотря на большое число работ, посвященных физике топологических дефектов в малоразмерных сверхпроводниках и конденсатах атомов щелочных металлов, остается значительное количество нерешенных вопросов. Этим проблемам – в особенности, влиянию температурных и квантовых флуктуаций – и посвящена данная глава диссертационной работы.

3.2. Фазовые диаграммы систем малого размера

Когда размер системы становится сопоставимым с длиной когерентности, которая определяет размер сердцевинки топологического дефекта, квантование числа таких дефектов в системе начинает играть существенную роль. В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров.

3.2.1. Вихревое состояние в системах с подавленной поверхностной сверхпроводимостью

Прогресс в методах миниатюризации, достигнутый за последние 10-15 лет, позволяет изучать сверхпроводящие образцы с размерами порядка сверхпроводящей длины когерентности $\xi(T)$.

Можно ожидать, что на вихревое состояние в малоразмерных сверхпроводниках будет оказывать влияние и окружающая образец среда. В рамках теории Гинзбурга-Ландау, это обстоятельство можно учесть через граничное условие для параметра порядка на поверхности сверхпроводника. В литературе оно обычно именуется граничным условием де Женна [114, 115]. С его помощью можно, в частности, описать подавление сверхпроводимости на поверхности системы, которое может вызываться контактом с нормаль-

ным металлом либо с другим сверхпроводником, обладающим более низкой критической температурой. Исследуем вихревую фазовую диаграмму с учетом граничного условия де Женна в наиболее простом случае цилиндра с длиной, намного превышающей лондоновскую глубину $\lambda(T)$, в магнитном поле, параллельном поверхности.

Рассмотрение будем вести в рамках теории Гинзбурга-Ландау. Поскольку цилиндр длинный, и параметр порядка, и магнитное поле не меняются вдоль его оси, так что задача двумерна. Введем систему единиц, в которой все расстояния нормированы на длину когерентности $\xi(T)$, магнитное поле измеряется в единицах H_{c2} , а параметр порядка нормирован на свое значение в бесконечной системе. Будем использовать цилиндрическую систему с координатами r, φ, z и единичными векторами $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$.

Система уравнений Гинзбурга-Ландау имеет вид:

$$|\psi|^2 \psi - \psi + (i\nabla + \mathbf{a})^2 \psi = 0, \quad (3.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{h} = \frac{1}{\kappa^2} \left[\mathbf{a}|\psi|^2 + \frac{i}{2} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right], \quad (3.2)$$

где \mathbf{a}, \mathbf{h} и ψ - безразмерные векторный потенциал, локальное магнитное поле и параметр порядка ($\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{a}, \mathbf{h} = h\mathbf{e}_z$); κ - параметр Гинзбурга-Ландау. Уравнения (3.1) и (3.2) должны быть дополнены граничными условиями:

$$h(R) = h_e, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{n}(-i\nabla - \mathbf{a})\psi = \frac{i}{b}\psi; \quad r = R, \quad (3.4)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор в нормальном направлении к поверхности, b длина экстраполяции де Женна, R радиус цилиндра, h_e внешнее поле. Для b выполняются следующие соотношения: $b \rightarrow \infty$ на границе обычного сверхпроводника и вакуума [115–117], тогда как $b \sim 1$ ($\xi(T)$ в размерных единицах) на границе сверхпроводника с нормальным металлом.

Далее, разложим все величины по степеням $1/\kappa$:

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n} \frac{1}{\kappa^{2n}}, \quad \mathbf{a} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}_{2n} \frac{1}{\kappa^{2n}}, \quad h = \sum_{n=0}^{\infty} h_{2n} \frac{1}{\kappa^{2n}}. \quad (3.5)$$

Подставим (3.5) в (3.1) и (3.2), а также в граничные условия (3.3) и (3.4), а затем приравняем величины при равных степенях κ . Получаем, что векторный потенциал и магнитное поле в лидирующем порядке равны:

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{e}_\phi \frac{h_e r}{2}, \quad h_0 = h_e. \quad (3.6)$$

Параметр порядка в лидирующем порядке ψ_0 дается решением первого уравнения Гинзбурга-Ландау (3.1) и граничным условием (3.4) при $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$. Это условие задается соотношением:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\psi_0}{b} = 0. \quad (3.7)$$

В следующем порядке из (3.2) получаем:

$$h_2 = - \int_0^r dr \mathbf{e}_\phi \left[|\psi_0|^2 \mathbf{a}_0 + \frac{i}{2} (\psi_0^* \nabla \psi_0 - \psi_0 \nabla \psi_0^*) \right] \quad (3.8)$$

Итак, в лидирующем порядке магнитное поле постоянно внутри образца. Иными словами, дополнительное поле, создаваемое мейсснеровскими токами и вихрями, по порядку величины составляет $1/\kappa^2$ от внешнего поля. Поэтому энергию достаточно вычислить лишь в лидирующем порядке, если κ велико. Поскольку и поперечный размер образца мал, данный вывод сохраняется и для умеренных значений κ . Намагниченность сверхпроводника определяется следующим порядком, и она может быть найдена из (3.8).

Представим ψ_0 в виде разложения Фурье:

$$\psi_0(r, \phi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(r) \exp(-ik\phi). \quad (3.9)$$

Если модуль параметра порядка аксиально-симметричен, лишь одно слагаемое в (3.9) отличается от нуля. Сюда подпадают безвихревое, одновихревое

состояния, а также фаза с гигантским вихрем кратности L посередине образца. Эти три состояния соответствуют гармоникам с $k = 0, 1$ и L , соответственно. В состоянии с кластером вихрей Абрикосова не равны нулю более одной компоненты разложения. В этом случае, симметрия кластера накладывает определенные ограничения - некоторые из членов разложения равны нулю. Что важно, принимая во внимание небольшое количество членов разложения (во многих случаях, всего лишь два основных, если речь идет о системе малого размера), можно добиться описания с приемлемой точностью. Так, вихревой кластер с L вихрями, расположенными кольцом, может быть описан с учетом лишь двух членов разложения – с $k_1 = 0$ и $k_2 = L$. Кластер с вихрем на оси цилиндра и $(L - 1)$ вихрями, расположенными кольцом вокруг него, соответствуют $k_1 = 1$ и $k_2 = L$. Относительная простота этого метода делает его весьма привлекательным. Впервые он был применен в работах [118, 119] для исследования равновесных конфигураций вихрей. В данной главе диссертационной работы мы обобщим метод на другие, более разнообразные задачи, среди которых – исследование температурных флуктуаций.

Из (3.1) и (3.9) несложно показать, что каждая функция $f_k(r)$ имеет следующую асимптотику при $r \rightarrow 0$:

$$f_k(r) \sim r^k. \quad (3.10)$$

Кроме того, каждая функция $f_k(r)$ удовлетворяет граничному условию (3.7). Найти $f_k(r)$ непосредственно из первого уравнения Гинзбурга-Ландау без привлечения численных методов не представляется возможным. Вместо этого можно использовать пробную функцию для $f_k(r)$. Воспользуемся следующей функцией:

$$f_k(r) = p_1^k \exp\left(-q_k(p_2^k, p_3^k) \frac{r^2}{R^2}\right) \left(\left(\frac{r}{R}\right)^k + p_2^k \left(\frac{r}{R}\right)^{k+2} + p_3^k \left(\frac{r}{R}\right)^{k+4} \right), \quad (3.11)$$

где p_1^k, p_2^k, p_3^k вариационные параметры, а $q_k(p_2^k, p_3^k)$ находится из граничного

вия (3.7):

$$q_k(p_2^k, p_3^k) = \frac{R}{2b} + \frac{k + p_2^k(k + 2) + p_3^k(k + 4)}{2(1 + p_2^k + p_3^k)} \quad (3.12)$$

Пробная функция (3.11) использовалась в [120] для изучения поверхностной сверхпроводимости в образцах с разной геометрией поверхности при обычном граничном условии на параметр порядка.

Найдем энергию Гиббса G образца в состоянии с кластером вихрей Абрикосова. Функционал Гинзбурга-Ландау для G может быть представлен в виде суммы двух вкладов G_b и G_s . Первый из них – объемный, а второй – поверхностный:

$$G_b = \int \left[-|\psi|^2 + \frac{1}{2}|\psi|^4 + |(-i\nabla - \mathbf{a})\psi|^2 + \kappa^2 \mathbf{h}^2 - 2\kappa^2 \mathbf{h} \mathbf{h}_e \right] dV, \quad (3.13)$$

$$G_s = \frac{1}{b} \int |\psi|^2 dS \quad (3.14)$$

Интегрирование в (3.13) и (3.14) проводится по объему и поверхности системы, соответственно.

Подставляя (3.9) в (3.13) и (3.14) и учитывая (3.6), получаем энергию системы в состоянии с кластером вихрей (на единицу длины цилиндра):

$$G_b = 2\pi \int_0^R r dr \left[\frac{1}{2} (f_{k_1}^4 + f_{k_2}^4 + 4f_{k_1}^2 f_{k_2}^2) - f_{k_1}^2 - f_{k_2}^2 + \left(\frac{df_{k_1}}{dr} \right)^2 + \left(\frac{df_{k_2}}{dr} \right)^2 - \kappa^2 h_e^2 + f_{k_1}^2 \left(\frac{h_e r}{2} - \frac{k_1}{r} \right)^2 + f_{k_2}^2 \left(\frac{h_e r}{2} - \frac{k_2}{r} \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

$$G_s = \frac{2\pi R}{b} (f_{k_1}^2(R) + f_{k_2}^2(R)). \quad (3.16)$$

Используя (3.11) и (3.12), находим из (3.15) и (3.16) энергию G как аналитическую функцию вариационных параметров $p_1^{k_1}$, $p_2^{k_1}$, $p_3^{k_1}$ and $p_1^{k_2}$, $p_2^{k_2}$, $p_3^{k_2}$ (выражение слишком громоздко и мы его поэтому не приводим). Значения этих параметров окончательно определяем численно из условия минимума энергии.

Далее, зная параметр порядка, можем вычислить намагниченность, которая задается соотношением:

$$-4\pi M = \langle h \rangle - h_e, \quad (3.17)$$

где $\langle h \rangle$ среднее поле в образце. Учитывая (3.8) и (3.9), получаем:

$$-4\pi M = \frac{2}{\kappa^2 R^2} \int_0^R r dr \int_0^r dx \left[f_{k_1}^2(x) \left(\frac{h_e x}{2} - \frac{k_1}{x} \right) + f_{k_2}^2(x) \left(\frac{h_e x}{2} - \frac{k_2}{x} \right) \right] \quad (3.18)$$

Сравнивая энергии различных состояний, можно определить равновесную фазовую диаграмму цилиндра. Результаты вычислений показаны на Рис. 3.1 для разных значений b : $b = 1$ (а), $b = 2,5$ (б), $b = 5$ (в), $b \rightarrow \infty$ (г). Кривая 1 соответствует переходу из нормального в сверхпроводящее состояние (поверхностное критическое поле h_{c3}). Функция $h_{c3}(R)$ существенно образом зависит от b : $h_{c3}(R)$ уменьшается с увеличением b . Ниже h_{c3} происходят переходы между состояниями с различной завихренностью. Видно,

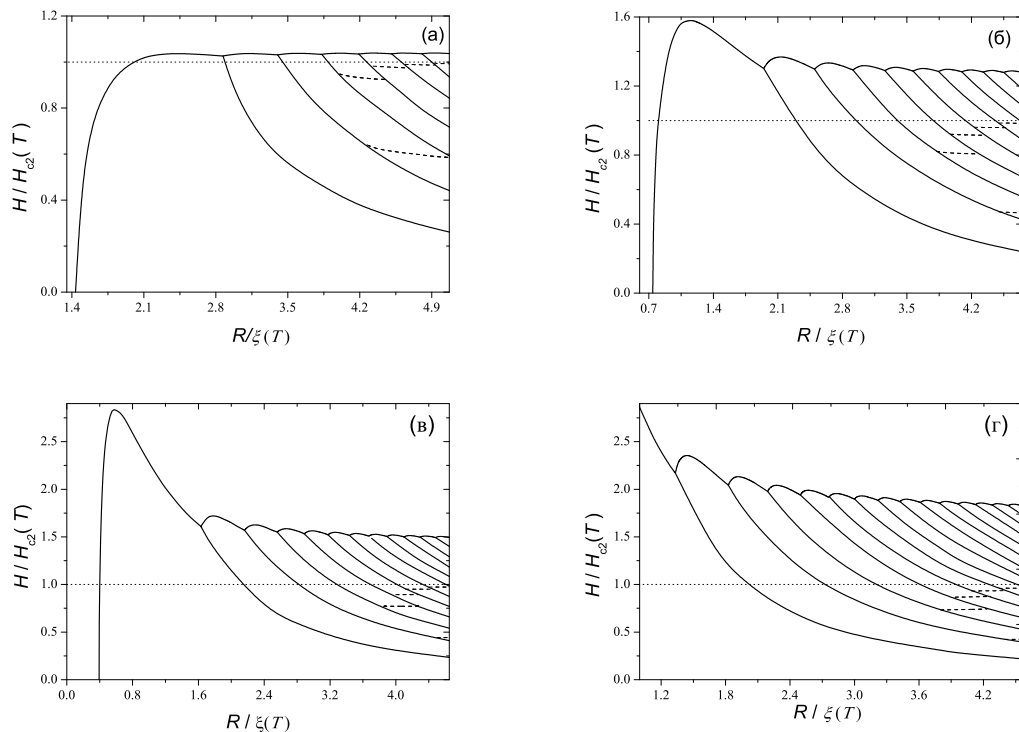


Рис. 3.1. Равновесные фазовые диаграммы цилиндров для различных значений длины экстраполяции де Женна: $b = \xi(T)$ (а), $b = 2,5\xi(T)$ (б), $b = 5\xi(T)$ (в), $b \rightarrow \infty$ (г). Сплошные (пунктирные) линии показывают переходы первого (второго) рода.

что площадь домена на фазовой диаграмме, в котором выгодно существование гигантских вихрей, быстро уменьшается по мере уменьшения b . Пунктирные линии показывают переходы между состояниями с гигантским вихрем и вихревым кластером, происходящие без изменения завихренности. Ниже этих линий вихревые кластеры имеют меньшую энергию. Переходы между этими двумя состояниями являются переходами второго рода, тогда как переходы с изменениями завихренности всегда являются переходами первого рода. При этих переходах второго рода, с уменьшением поля, гигантский вихрь расщепляется на отдельные вихри, расстояние между которыми постепенно растет. Кривая 2 соответствует нижнему критическому полю.

С увеличением внешнего поля сверхпроводящее состояние в цилиндре способно проходить довольно сложный ряд превращений. Оно может переходить из состояния с гигантским вихрем в состояние с кластером вихрей и затем обратно. Например, при $R = 4,4$, $b = 1$ происходит следующий ряд переходов: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2_m \rightarrow 2_g \rightarrow 3_m \rightarrow 3_g \rightarrow 4_m \rightarrow 4_g$, где число обозначает завихренность, а индекс – тип состояния: "m" относится к состоянию с кластером вихрей, "g" – к состоянию с гигантским вихрем. При $R = 4,1$, $b = \infty$ происходят следующие переходы: $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2_g \rightarrow 3_m \rightarrow 3_g \rightarrow 4_m \rightarrow 4_g \rightarrow 5_g \rightarrow 6_g \rightarrow 7_g \rightarrow 8_g \rightarrow 9_g \rightarrow 10_g \rightarrow 11_g$.

Результаты вычислений для намагниченности при $\kappa = 5$ представлены на Рис. 3.2 (а) для $b = 1$, $R = 4,625$ и на Рис. 3.3 (а) для $b \rightarrow \infty$, $R = 4,05$. В этих двух случаях, образцы могут вместить в себя гигантские вихри с максимальными завихренностями 5 и 11 перед переходом в нормальное состояние. Скачки намагниченности соответствуют переходам между состояниями с разными завихренностями. В первом случае, при $h_e \approx 0,61$ ($0,61H_{c2}$ в размерных единицах) происходит переход от кластера с двумя вихрями в состояние с гигантским вихрем с завихренностью 2 ($2_m \rightarrow 2_g$). Во втором случае, переход $3_m \rightarrow 3_g$ происходит при $h_e \approx 0,74$ и переход $4_m \rightarrow 4_g$ проис-

ходит при $h_e \approx 0,87$. Все эти переходы сопровождаются слабыми скачками первой производной намагниченности по полю. Поведение намагниченности вблизи переходов показано на Рис. 3.2 (б) и 3.3 (б). Сплошные линии относятся к равновесной намагниченности, пунктирные - к метастабильным состояниям, относящимся к фазам с гигантскими вихрями.

Примечательно, что уменьшение b ведет к сглаживанию дискретного характера намагниченности, то есть характерные величины скачков уменьшаются.

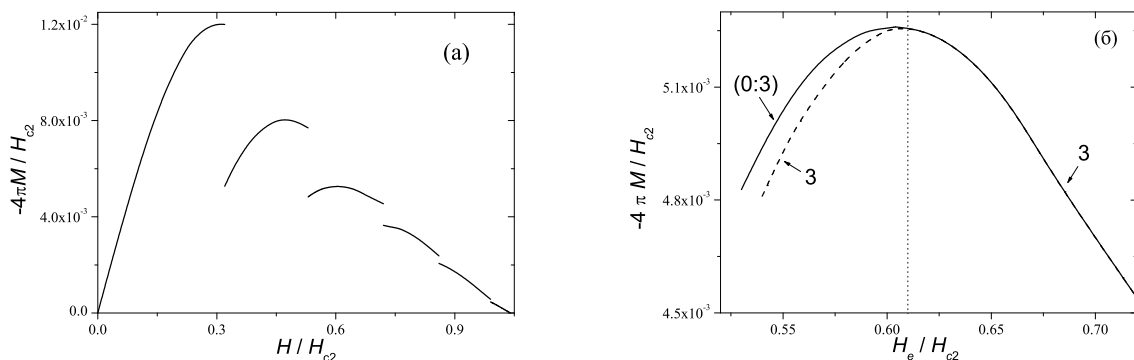


Рис. 3.2. Равновесная намагниченность цилиндра $R = 4,625$ при $b = 1$, $\kappa = 5$. Пунктирная линия - намагниченность в метастабильной фазе.

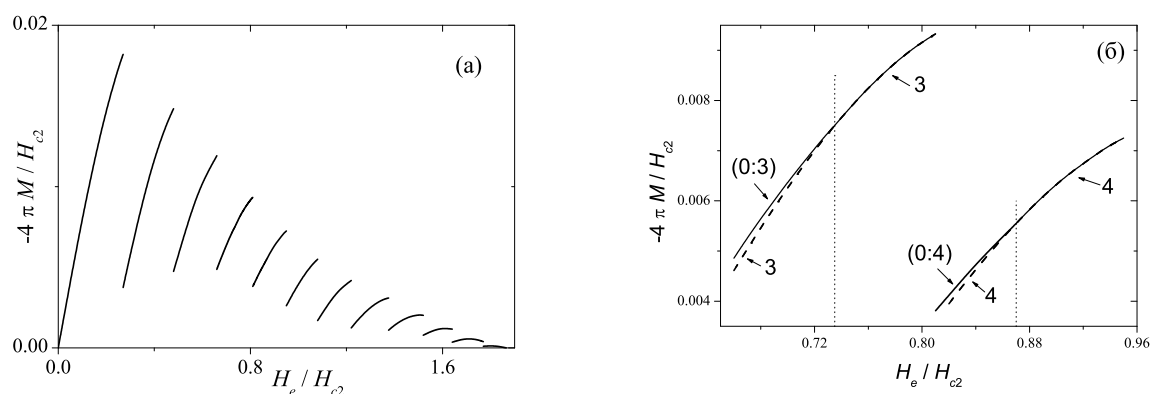


Рис. 3.3. Равновесная намагниченность цилиндра $R = 4,05$ при $b \rightarrow \infty$, $\kappa = 5$. Пунктирная линия - намагниченность в метастабильной фазе.

3.2.2. Гибридные структуры “сверхпроводник-ферромагнетик”

В настоящее время гибридные структуры ферромагнетик/сверхпроводник привлекают значительное внимание. Подобные структуры рассматриваются в качестве кандидатов для технологических приложений, т.к. в них, в частности, можно подстраивать магнитное поле, в котором возникает сверхпроводящее состояние.

Сверхпроводящее кольцо с помещенной посередине него магнитной точкой может служить в качестве возможного элемента низкотемпературной электроники. В работе [122] была предложена конструкция кубита на основе кольца субмикронного размера, содержащего три джозефсоновских контакта. Прикладывая внешний магнитный поток, можно получать состояния с противоположной циркуляцией тока в кольце. В частности, если пренебречь зарядовой энергией, состояния с противоположными циркуляциями оказываются вырожденными при значении потока через кольцо, равном $\Phi_0/2$. Если учесть зарядовую энергию, между этими двумя состояниями появляется разность в энергии. Их можно использовать в качестве двух квантовых состояний кубита.

Представляется важным инкорпорировать “ π -сдвиг” в само устройство [123]. Этой проблеме уделяется большое внимание, и был выдвинут ряд соответствующих предложений. Одно из них сформулировано в работе [113] с участием автора диссертационной работы. В ней предлагалось поместить в центр кольца магнитный дот со специально подобранными параметрами, которые бы обеспечивали “ π -сдвиг”. Это предложение обладает важным преимуществом по сравнению с другой популярной идеей - использовать сверхпроводник с d -симметрией параметра порядка. А именно, в устройстве с магнитным дотом можно использовать обычный сверхпроводник, что не приводит к декогерентности квазичастиц, как в d -сверхпроводнике. Подобное устройство было успешно реализовано [112, 113]. Использовалось

алюминиевое кольцо, по центру которого помещалась кобальт-палладиевая магнитная точка с перпендикулярной плоскости кольца намагниченностью.

Для описания поведения кольца с магнитом во внешнем поле необходимо учитывать тот факт, что поле магнитной точки существенно неоднородно. Поэтому наличие магнита может приводить к довольно нетривиальным последствиям. Между тем, осуществления “ π -сдвига” требует весьма тонкой настройки параметров системы. Поэтому представляется важным построение адекватной теоретической модели описания кольца с магнитом.

Остановимся подробнее на эксперименте [112]. В нем внутренний и внешний радиусы кольца составляли $R_i = 0,55$ мкм и $R_o = 1,05$ мкм, соответственно. Радиус магнитной точки был $r_d = 0,27$ мкм. Изучалась зависимость температуры перехода в нормальное состояние T_c от внешнего поля. Из-за неоднородности поля значения магнитного потока, создаваемого точкой через внутреннюю (пустую) часть кольца и через само кольцо, противоположны по знаку. Поэтому ясно, что должно наблюдаться некоторое соревнование между этими двумя потоками. Свободная энергия изучаемой сверхпроводящей структуры может быть выражена как

$$F = 2\pi \int_{R_i}^{R_o} r dr \left[\alpha\psi + \beta\psi^3 + \frac{\hbar^2}{4m} \left(L - \frac{2\pi}{\Phi_0} A \right) \psi^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \left(\frac{d\psi}{dr} \right)^2 \right], \quad (3.19)$$

где L - завихренность параметра порядка, интегрирование проводится по поперечному сечению кольца, а цилиндрическая симметрия модуля параметра порядка уже учтена. Параметр порядка не меняется вдоль оси кольца, поскольку кольцо тонкое. Векторный потенциал может быть выражен в виде $A(r) = A_s(r) + Br/2$, где $A_s(r)$ векторный потенциал, создаваемый магнитной точкой, а B – приложенное поле. Несложно убедиться в том, что в условиях данного эксперимента можно считать, что модуль параметра порядка не меняется и в радиальном направлении. Задача тогда существенно упрощается.

На Рис. 3.4 показана зависимость $1 - T_c(B)/T_{cm}$ от Φ/Φ_0 , где T_{cm} - максимальная критическая температура структуры. Теоретическая кривая

(сплошная линия) соответствует $R_i = 0,55$ мкм, $r_d = 0,27$ мкм. Длина когерентности $\xi(T = 0)$ служила подгоночным параметром. Из-за влияния контактов внешний радиус также следует считать подгоночным параметром. Наилучшее согласие было получено при $\xi(0) = 96$ нм и $R_o = 1130$ нм.

Рассчитанная кривая $T_c(B)$ находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. Асимметрия кривой, сдвиг и периодичность хорошо воспроизведены. Асимметрия и сдвиг могут быть объяснены из (3.19), из которого следует, что максимальная критическая температура для фиксированного L реализуется, когда приложенное поле равно

$$B = -\frac{4\Phi_0}{\pi(R_o^4 - R_i^4)} \int_{R_i}^{R_o} r^2 dr \left(\frac{2\pi A}{\Phi_0} - \frac{L}{r} \right) \quad (3.20)$$

Соответствующая критическая температура:

$$1 - \frac{T_c}{T_{c\infty}} = \frac{2\xi(0)^2}{R_o^2 - R_i^2} \left[\int_{R_i}^{R_o} r dr \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} A - \frac{L}{r} \right)^2 - \frac{4}{R_o^4 - R_i^4} \left(\int_{R_i}^{R_o} r^2 dr \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} A - \frac{L}{r} \right) \right)^2 \right] \quad (3.21)$$

где $T_{c\infty}$ соответствует объему. Для простоты далее будем считать, что поле магнитной точки не меняется существенно на ширине кольца. Обозначим средние поля в открытой части кольца и в сверхпроводящей части, как B_{op} и B_l , соответственно. Тогда (3.20) и (3.21) сводятся к

$$B = -B_l - \frac{2\Phi_0}{\pi(R_o^2 + R_i^2)} \left(\frac{\pi R_i^2 (B_l - B_{op})}{\Phi_0} - L \right) \quad (3.22)$$

и

$$1 - \frac{T_c}{T_{c\infty}} = \frac{2\xi(0)^2}{R_o^2 - R_i^2} \left(\frac{\pi R_i^2 (B_l - B_{op})}{\Phi_0} - L \right)^2 \left[\ln\left(\frac{R_o}{R_i}\right) - \frac{R_o^2 - R_i^2}{R_o^2 + R_i^2} \right] \quad (3.23)$$

Максимальная критическая температура T_{cm} может быть найдена минимизацией (3.23) по квантованному L . Соотношение (3.22) определяет сдвиг кривой $T_c(B)$ вдоль оси B вблизи T_{cm} , вызванный присутствием дополнительного поля. Этот сдвиг дается суммой двух вкладов. Первое слагаемое описывает компенсацию поля B_l внутри сверхпроводника. Второе

слагаемое описывает влияние неоднородности поля. Этот вклад ведет себя довольно нетривиально по причине дискретности L . Например, когда $0 < \pi R_i^2(B_{op} - B_l) < 0,5\Phi_0$, из (3.23) следует, что $L = 0$, и второй вклад в сдвиг - отрицателен. Если размер точки или интенсивность поля увеличить $0,5\Phi_0 < \pi R_i^2(B_{op} - B_l) < \Phi_0$, L скачком меняется до 1, а второй вклад становится положительным. Физически это означает, что системе выгодно скачком изменить завихренность для уменьшения тока. В результате, ток и полный сдвиг, определяемый (3.22), могут сменить знак. Итак, вклад в сдвиг, вызванный неоднородностью поля, является периодической функцией $B_{op} - B_l$ и становится равным 0 в случае однородного поля, $B_{op} = B_l$.

Таким образом, полный сдвиг кривой $T_c(B)$ вдоль оси B вблизи T_{cm} может быть обоих знаков при одной и той же ориентации намагниченности магнитной точки.

Вычисления показывают, что при низких температурах сдвиг $T_c(B)$ определяется только средним полем внутри сверхпроводника, и равен $-B_l$. Неоднородность поля приводит к двум разным и независимым сдвигам $T_c(B)$ при низких и высоких температурах, что “скручивает” всю кривую, как видно из Рис. 3.4. Отметим, что некоторые отличия эксперимента и теории при низких температурах могут объясняться влиянию контактов, которые меняют саму геометрию системы.

Мезоскопические структуры, состоящие из алюминиевого диска с расположенной на нем кобальт-палладиевой магнитной точкой, исследовались в экспериментально-теоретических работах [110, 111] с участием автора диссертационной работы. В [110] параметр порядка по-видимому был сильно подавлен на границе сверхпроводника с магнитом из-за эффекта близости. Радиус и толщина диска, в этом случае, составляли 1000 нм и 45 нм, соответственно, а магнитная точка имела радиус и толщину 500 нм и 16,5 нм. В работе [111] магнитная точка и диск были разделены специальным слоем кремния, что исключало подавление сверхпроводимости за счет эф-

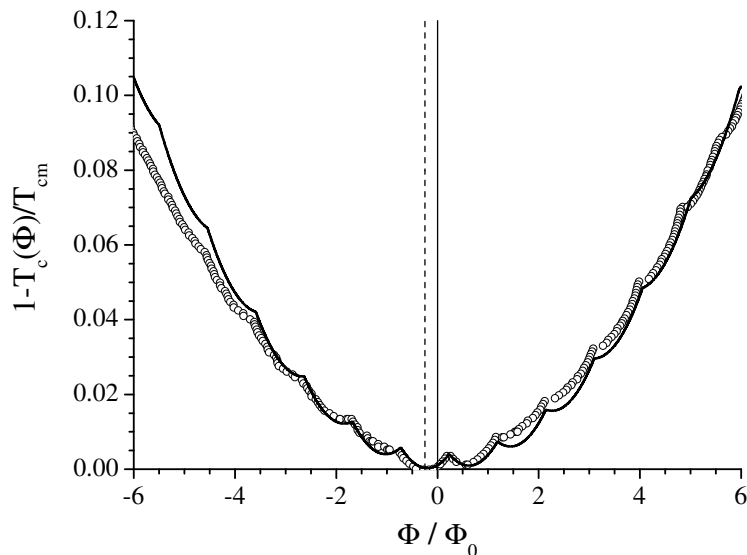


Рис. 3.4. Граница между сверхпроводящей и нормальной фазами для сверхпроводящего кольца с магнитной точкой посередине из эксперимента [112].

фекта близости. Радиус диска составлял 1,08 мкм, его толщина – 60 нм. Радиус и толщина магнитной точки – 270 нм и 16,5 нм, соответственно. Толщина слоя кремния между диском и точкой – 10 нм.

Для описания вихревого состояния использовалась пробная функция (3.12), в которой однако пришлось учесть еще одно слагаемое в разложении по степеням расстояния от центра диска. Вывод о направлении сдвига границы перехода в нормальное состояние, сделанный выше для случая кольца, сохраняется.

На Рис. 3.5 проводится сравнение результатов эксперимента и теории. Кружки показывают экспериментальные данные, а сплошная кривая – результат вычислений. Видно, что между теорией и экспериментом наблюдается хорошее согласие. Наблюдается двойное влияние *неоднородного* поля магнитной точки на зарождение сверхпроводящей фазы: граница между фазами сдвигается вдоль оси B вблизи максимальной критической температуры, а также и вдоль оси T , в результате чего вся кривая деформируется.

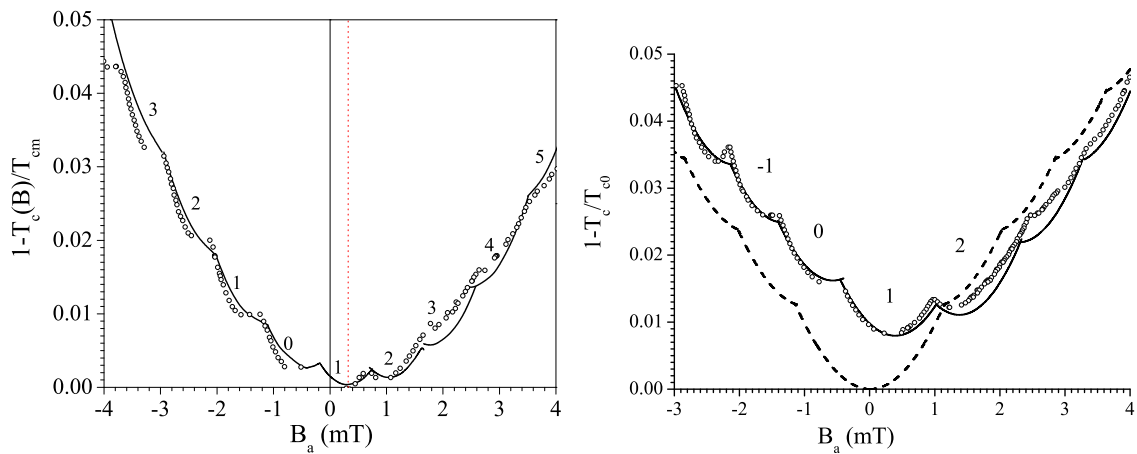


Рис. 3.5. Граница между сверхпроводящей и нормальной фазами для гибридной структуры из эксперимента [110] (а). Круги - экспериментальные данные, сплошные линии - результат вычислений, числа - значения завихренности в соответствующем сверхпроводящем состоянии перед переходом системы в нормальное состояние. Граница между сверхпроводящей и нормальной фазами для гибридной структуры из эксперимента [111] (б). Круги - экспериментальные данные, сплошные линии - результат вычислений, числа - значения завихренности в соответствующем сверхпроводящем состоянии перед переходом системы в нормальное состояние. Пунктирная линии - фазовая граница без магнитной точки (результат вычислений)

3.2.3. Спинорные конденсаты атомов щелочных металлов

Использованная техника пробных функций для параметра порядка может быть применена и для случая конденсата атомов щелочных металлов, в которых уравнения Гинзбурга-Ландау заменяются уравнением Гросса-Питаевского. Эти уравнения схожи по своей математической структуре.

Конденсаты атомов щелочных металлов могут иметь внутренние спиновые степени свободы. Первый реализованный в эксперименте пример таких систем со спином 1 – атомы ^{23}Na в оптической ловушке [124]. В нулевом магнитном поле, конденсат со спином 1 может быть в двух разных состояниях - ферромагнитном и полярном [125, 126], в зависимости от значений параметров взаимодействия. Вихревое состояние в таких системах отличается чрезвычайным разнообразием. Этому вопросу было посвящено большое количество работ. Однако куда менее изученным остается вопрос о вихревых состояниях в конденсатах со спином 2, которые также были получены в экспериментах [127–129]. Такие конденсаты имеют на один параметр взаимодействия больше по сравнению с конденсатом со спином 1. Поэтому к перечисленным выше фазам для конденсата со спином 1 добавляется еще и так называемая циклическая фаза. Заметим, что системы из атомов ^{87}Rb and ^{23}Na располагаются где-то поблизости от границы раздела между полярной и циклической фазами [130].

Изучим вихревые структуры во вращающихся конденсатах со спином 2 в случае, когда у системы имеется конечная намагниченность. Таким образом, необходимо решать систему из пяти уравнений Гросса-Питаевского, поскольку макроскопическая волновая функция имеет пять компонент. Снова будет применяться метод пробных функций.

Рассмотрим двумерный конденсат со спином 2, содержащий N частиц в захватывающем потенциале

$$U(r) = \frac{m\omega_{\perp}^2 r^2}{2}, \quad (3.24)$$

где ω_{\perp} запрающая частота, m масса атома, а r радиальная координата. Система вращается с частотой Ω .

Энергия системы зависит от трех параметров взаимодействия α , β и γ , которые можно определить как [130]

$$\alpha = \frac{1}{7}(4g_2 + 3g_4), \quad (3.25)$$

$$\beta = -\frac{1}{7}(g_2 - g_4), \quad (3.26)$$

$$\gamma = \frac{1}{5}(g_0 - g_4) - \frac{2}{7}(g_2 - g_4), \quad (3.27)$$

где ($q = 0, 2, 4$)

$$g_q = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a_q \quad (3.28)$$

а a_q - длина рассеяния для столкновений атомов в состояниях с полным спином 0, 2 и 4. В конденсатах атомов щелочных металлов $\alpha \gg \beta, \gamma$.

Параметр порядка имеет пять компонент Ψ_i ($i = -2, -1, 0, 1, 2$). Энергия может быть записана как [125, 126]

$$F = \int dS \left[\Psi_j^* \widehat{h} \Psi_j + \frac{\alpha}{2} \Psi_j^* \Psi_k^* \Psi_j \Psi_k + \frac{\beta}{2} \Psi_j^* \Psi_l^* (F_a)_{jk} (F_a)_{lm} \Psi_k \Psi_m + \frac{\gamma}{2} \Psi_j^* \Psi_k^* \Psi_{-j} \Psi_{-k} (-1)^j (-1)^k - B_z M - i\hbar \Omega \cdot \Psi_j^* (\nabla \times \mathbf{r}) \Psi_j \right], \quad (3.29)$$

где интегрирование проводится по площади системы, повторяющиеся индексы суммируются, B_z - магнитное поле, которое рассматривается в качестве множителя Лагранжа, \widehat{h} - одночастичный гамильтониан, а M - намагниченность, которые определяются выражениями

$$\widehat{h} = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + U(r), \quad (3.30)$$

$$M = \int dS |\Psi_i|^2 i. \quad (3.31)$$

Здесь F_a ($a = x, y, z$) - оператор углового момента, который можно выразить в обычной матричной форме [130].

Представляется удобным ввести два дополнительных параметра порядка $\langle \mathbf{f} \rangle = \Psi_j^* \mathbf{F}_{jk} \Psi_k / |\Psi|^2$ и $\Theta = (-1)^j \Psi_j^* \Psi_{-j} / |\Psi|^2$, характеризующих фер-

ромагнитное упорядочение и формирование синглетных пар, соответственно [130]. В ферромагнитной фазе только одна компонента параметра порядка не равна нулю: $\Psi_{-2} = 1$. В циклической фазе $\Psi_{-1}, \Psi_1 = 0$ и $\Psi_{-2} = \frac{1}{2}e^{i\theta}$, $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\Psi_2 = \frac{1}{2}e^{-i\theta}$, где θ произвольная фаза (энергия системы по ней вырождена). В полярной фазе имеется три возможности: в первом случае, $\Psi_{-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$, $\Psi_{-1}, \Psi_0, \Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\nu}$, во втором случае, $\Psi_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$, $\Psi_{-2}, \Psi_0, \Psi_2 = 0$, $\Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\nu}$ и, в третьем случае, $\Psi_0 = 1$, и все остальные компоненты равны нулю. Здесь величины θ и ν снова произвольны. В ферромагнитной фазе, $\Theta=0$, $|\langle \mathbf{f} \rangle| = 2$; в циклической фазе, $\Theta=0$, $\langle \mathbf{f} \rangle = 0$; в полярной фазе, $|\Theta|=1$, $\langle \mathbf{f} \rangle = 0$.

Уравнения Гросса-Питаевского получают варьированием функционала (3.29). Количество частиц $N = \int dS \Psi_i \Psi_i^*$ и намагниченность M выступают независимыми переменными. Здесь мы будем рассматривать решения уравнений, в которых модуль каждой из компонент параметра порядка обладает аксиальной симметрией:

$$\Psi_j(r, \varphi) = f_j(r) \exp(-L_j \varphi), \quad (3.32)$$

где φ полярный угол, а L_j - завихренность. Будем обозначать фазы посредством указания завихренностей соответствующих компонент параметра порядка (например, $(-2, -1, 0, 1, 2)$). Если какая-то из компонент параметра порядка равна нулю идентично, число будем заменять значком "×".

Будем искать решения уравнений Гросса-Питаевского, используя пробную функцию (3.11) для каждой компоненты параметра порядка. Используя (3.29) и условие нормировки для параметра порядка, можно найти аналитически энергию системы, как функцию вариационных параметров, а затем отыскать их оптимальные значения численной минимизацией. Также уравнения можно решить численно. Результаты обоих подходов очень близки друг к другу.

Будем рассматривать ситуацию, когда концентрация атомов в направ-

лении z равна 2000 мкм^{-1} , а длина рассеяния $a_0 = 5,5 \text{ нм}$. Согласно работе [130], случаи атомов ^{23}Na , ^{83}Rb , ^{87}Rb , ^{85}Rb соответствуют точкам на фазовой диаграмме в координатах " $a_2 - a_4$ и $a_0 - a_4$ " (в отсутствие внешнего магнитного поля и вращения), которые располагаются в непосредственной близости к границам между ферромагнитной, полярной и циклической фазами. Имеются даже некоторые неопределенности, связанные с ошибками измерений a_q . В [130] было предположено, что атомы ^{23}Na , ^{83}Rb , и ^{85}Rb находятся в полярной, ферромагнитной и циклических фазах, соответственно, тогда как ^{87}Rb соответствует границе между полярной и циклическими фазами. Здесь все вычисления будут произведены для полярной фазы при $\beta = \frac{\alpha}{50}$, $\gamma = -\frac{\alpha}{50}$; для циклической фазы $-\beta = \frac{\alpha}{50}$, $\gamma = \frac{\alpha}{50}$; для состояния на границе между циклической и полярной фазами $\beta = \frac{\alpha}{50}$, $\gamma = 0$. Рассчитаем зависимости энергии системы от намагниченности для этих трех состояний в разных вихревых фазах, но при постоянной частоте вращения $\Omega = 0,4\omega_{\perp}$. Результаты численного счета показаны на Рис. 3.6 для фаз циклической (а), полярной (б) и состояния на их границе (в).

Во всех рассмотренных случаях оказалось, что конденсату энергетически выгодно распределить частицы по 1, 2 или 3 состояниям, а не по 4 или 5. Из Рис. 3.6 видно, что, во всех случаях, состояния с ненулевыми завихренностями всегда выгодны из-за вращения системы. Изменяя намагниченность, можно перескакивать из одной вихревой фазы в другую. Которая из фаз соответствует минимуму энергии при данной намагниченности, зависит от многих факторов. Например, когда намагниченность велика (близка к $M/N = 2$), конденсат должен быть заперт преимущественно в состоянии с $m_F = 2$. Поскольку система вращается с достаточной частотой для создания вихря, в этом случае выгодно иметь завихренность 1. Для других частиц, которые находятся вне состояния $m_F = 2$, выгодно иметь завихренность 0 для того, чтоб концентрироваться в центральной части ловушки, где запирающий потенциал слаб. Именно по этой причине во всех трех случа-

ях, представленных на Рис. 3.6, вихревая фаза $(-1, \times, 0, \times, 1)$ энергетически выгодна при большой намагниченности.

Зависимости плотности частиц в каждом состоянии от расстояния от центра ловушки показаны на Рис. 3.7 для случая полярной фазы при $M/N = 1,87$. Пространственное поведение параметров порядка Θ и $|\langle \mathbf{f} \rangle|$, вычисленное вариационным способом, показано на Рис. 3.7 (б). Из него видно, что m максимален в центре ямы и исчезает вдали от него. В то же время, $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ имеет минимум при $r = 0$ и стремится к 2 при $r \rightarrow \infty$. Это происходит из-за того, что при $r = 0$ компонента с $m_F = 0$ имеет максимум, а все остальные компоненты малы. Поэтому Θ , характеризующее формирование синглетных пар, имеет максимум при $r = 0$, и $|\langle \mathbf{f} \rangle| = 0$. Вдали от центра облака плотность частиц с $m_F = 2$ намного больше, чем с $m_F = 0$, а плотности частиц во всех остальных состояниях очень малы. По этой причине $\Theta = 0$ и $|\langle \mathbf{f} \rangle| = 2$ при $r \rightarrow \infty$.

При более низкой намагниченности конденсат должен быть распределен между состояниями с $m_F = 0, 1, 2$. Оказывается, что снова во всех трех случаях, отображенных на Рис. 3.6, основное состояние представлено фазой $(-2, -1, 0, 1, 2)$ в довольно широком интервале значений M . Это происходит оттого, что в этом случае энергетически выгодно поместить большинство атомов в состояние с завихренностью 0 для того, чтоб занять внутреннюю часть ловушки. Большинство оставшихся частиц конденсируется в состояние с завихренностью 2, заполняя внешнюю часть ловушки и таким образом понижая взаимодействие в канале плотности частиц с $m_F = 0$ и 2. Иными словами, наблюдается своеобразное соревнование между разными факторами. Типичные распределения плотностей частиц для этой вихревой фазы показаны на Рис. 3.7 (в) для циклической фазы при $M/N = 1,21$. На Рис. 3.7 (г) показывает зависимости от r параметров порядка Θ и $|\langle \mathbf{f} \rangle|$

Итак, при относительно слабой намагниченности частицы должны распределяться между несколькими состояниями с разными m_F . В этом

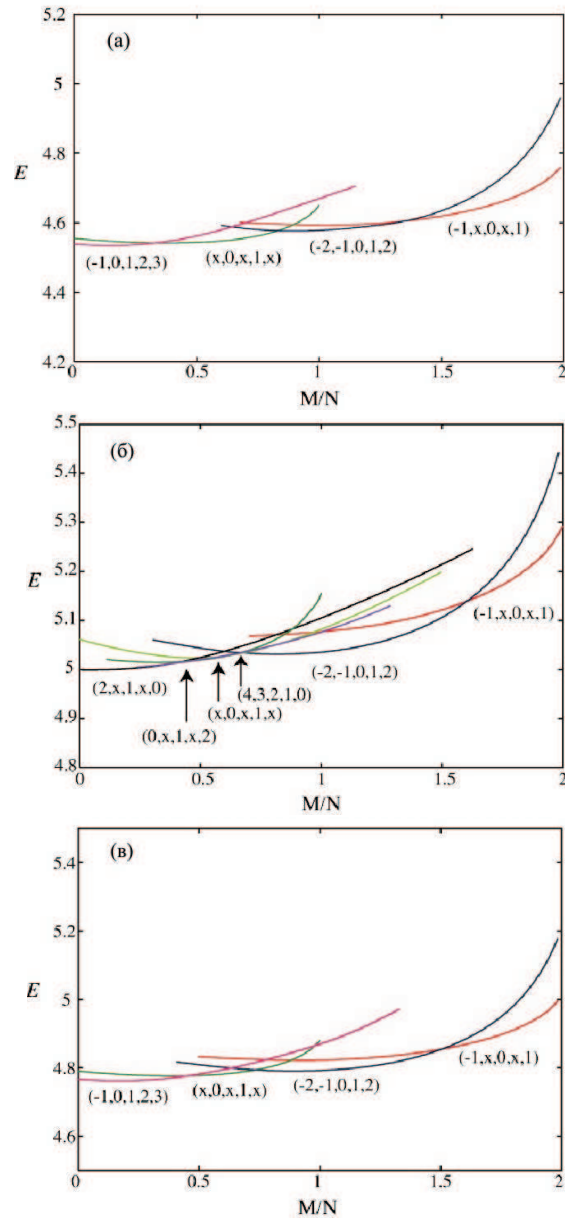


Рис. 3.6. Зависимость энергии от намагниченности для разных вихревых фаз для циклического (а) и полярного (б) состояний, а также состояния на их границе (в). Энергия измеряется в единицах $\hbar\omega_{\perp}$.

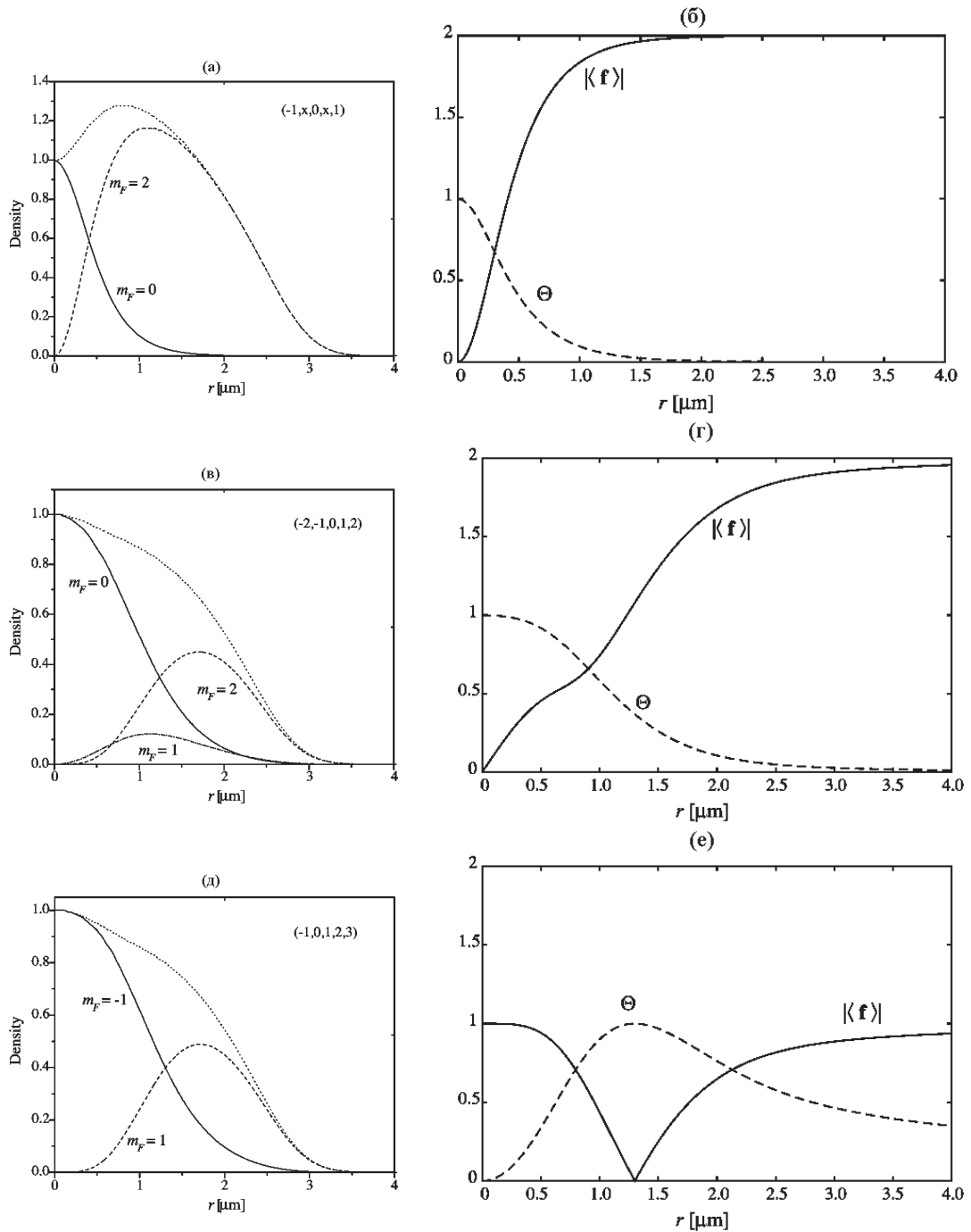


Рис. 3.7. Пространственное распределение плотности частиц в разных гиперспинных состояниях, нормализованное на значение полной плотности в центре ловушки, а также параметры порядка Θ и $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ для разных вихревых фаз. (а) и (б) соответствуют полярной фазе $(-1, \times, 0, \times, 1)$ при $M/N = 1,87$; (в) и (г) фазе $(-2, -1, 0, 1, 2)$ при $M/N = 1,21$; (д) и (е) фазе на границе полярной и циклической $(-1, 0, 1, 2, 3)$ при $M/N = 0,18$. Точечные линии показывают полную плотность. Число частиц 10000.

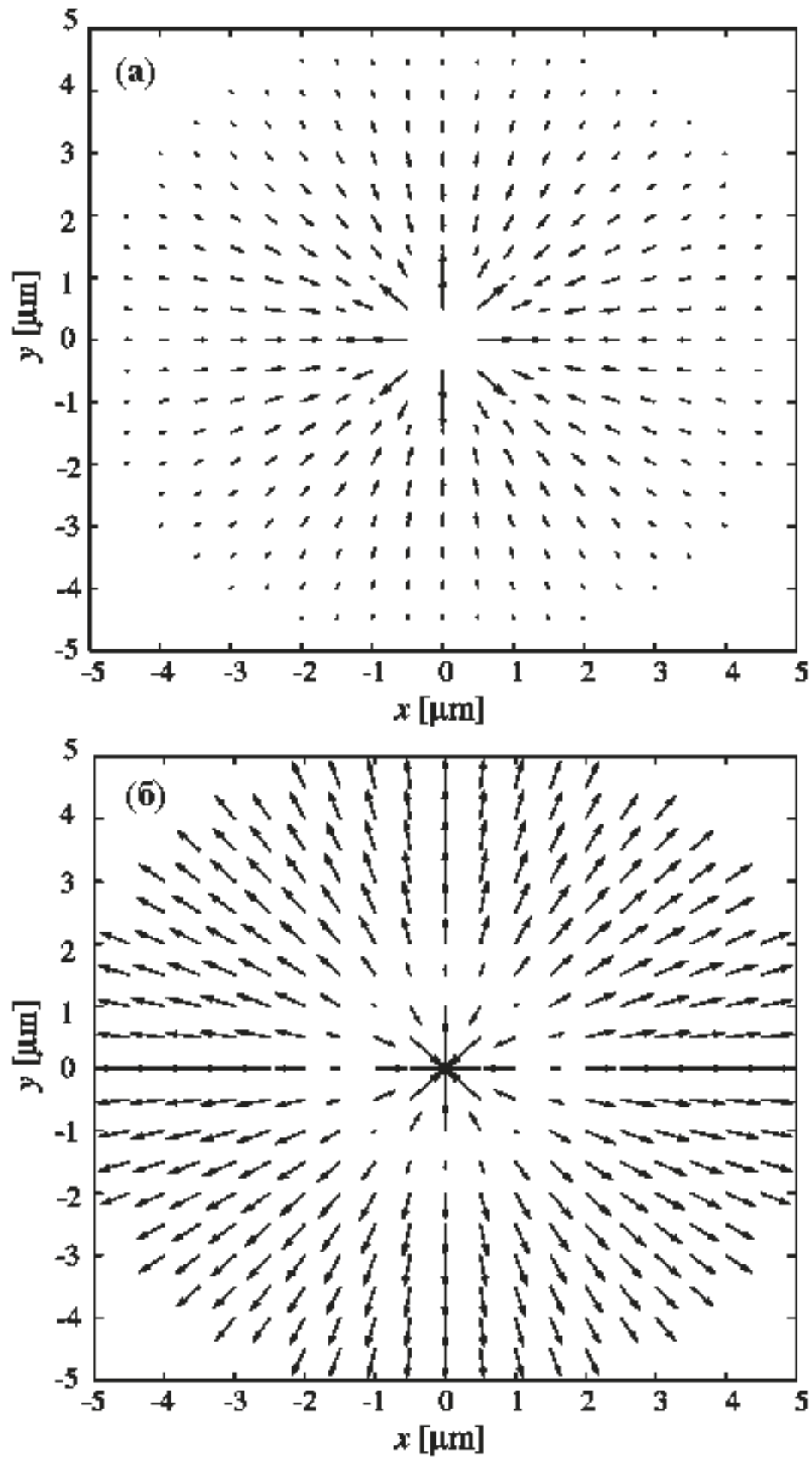


Рис. 3.8. Спиновые текстуры, $\langle f_x \rangle$ и $\langle f_y \rangle$, для циклической фазы $(-1, 0, 1, 2, 3)$ при $M/N = 0, 16$ (а) и циклической фазы $(-2, -1, 0, 1, 2)$ при $M/N = 1, 21$ (б).

случае, становятся важными взаимодействия в спиновом канале. Поэтому последовательности переходов для разных случаев на Рис. 3.6 тоже различны. *Можно сделать вывод, что при большой намагниченности состояние с наименьшей энергией определяется, в первую очередь, взаимодействиями в канале плотности, тогда как при маленькой намагниченности $M \sim 0$, играют важную роль спиновые взаимодействия.*

На Рис. 3.7 (д) и (е) представлены зависимости плотности частиц в разных состояниях от r , а также параметры порядка Θ и $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ для состояния на границе полярной и циклической фаз $(-1, 0, 1, 2, 3)$ при $M/N = 0, 18$. В этом случае, частицы распределены между состояниями с $m_F = -1$ и $m_F = 1$. Состояние с $m_F = -1$ имеет завихренность 0, и эти атомы занимают место с наименьшим запирающим потенциалом. Все остальные частицы сконденсированы в состояние с завихренностью 2, уменьшая таким образом взаимодействие в канале плотности. В результате, параметр порядка Θ не равен нулю нигде, за исключением точки $r = 0$, поскольку при любом $r > 0$ есть частицы в состояниях с $m_F = \pm 1$, так что возможно формирование синглетных пар. Параметр порядка $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ не равен 0 при $r = 0$ и $r \rightarrow \infty$, поскольку в обоих случаях имеются атомы, сконденсированные в состояния с ненулевым m_F . В то же время, при малых r большинство частиц конденсировано в состояние с $m_F = -1$, а при больших r – в состояние с $m_F = 1$. Поэтому имеется резкое изменение в направлении спина при промежуточных значениях r . Это приводит к исчезновению $|\langle \mathbf{f} \rangle|$ вблизи сердцевины вихря.

На Рис. 3.8 показана спиновая текстура $\langle f_x \rangle$ и $\langle f_y \rangle$ для фаз $(-1, 0, 1, 2, 3)$ и $(-2, -1, 0, 1, 2)$ в циклическом состоянии. В первом случае, спины поляризованы вдоль направления z внутри сердцевины вихря. Во внешней области спин становится равным нулю, а Θ растет, так что в итоге формируется чистое полярное состояние. Во втором случае, во внешней области, спины поляризованы вдоль z . В сердцевине вихря спины накло-

няются к центру. В центре спин становится равным нулю, и формируется чистое полярное состояние ($\Theta = 1$). Заметим, что вихри $(-2, -1, 0, 1, 2)$ и $(-1, 0, 1, 2, 3)$ ранее не были описаны в литературе.

В целом, вариационный метод решения уравнений Гинзбурга-Ландау, а также Гросса-Питаевского для малоразмерных систем оказывается весьма удобным и эффективным. В следующих параграфах он будет применен для описания более сложных ситуаций, чем исследование *равновесной* фазовой диаграммы системы.

3.3. Подавление поверхностного барьера температурными флуктуациями в сверхпроводящих островках

3.3.1. Вводные замечания

Возникновение вихря Абрикосова в сверхпроводнике второго рода становится энергетически выгодным, когда магнитное поле достигает нижнего критического поля H_{c1} . На самом же деле, любой реальный сверхпроводник имеет границы, и возникнуть вихрь может лишь проникнув через границу, либо родившись в паре с антивихрем. Процесс проникновения вихря через границу сверхпроводника впервые был рассмотрен в классической работе Бина и Ливингстона в рамках лондонского приближения [131]. В их модели вихрь представлял собой прямую линию, входящую в полубесконечный образец через границу без какого-либо изгиба. Бин и Ливингстон обнаружили существование поверхностного барьера, препятствующего входу и выходу вихря. Барьер на вход вихря исчезает, когда внешнее поле H подходит к термодинамическому критическому полю H_c , которое намного больше H_{c1} в сверхпроводниках с большими значениями параметра Гинзбурга-Ландау κ ($H_c/H_{c1} \sim \kappa/\ln \kappa$). Барьер является следствием конкуренции между двумя силами: взаимодействием между вихрем и мейсснеровскими токами, которые стремятся затолкнуть вихрь внутрь образца, и магнусовым при-

тяжением вихря к поверхности, которое может быть интерпретировано в терминах взаимодействия вихря с его изображением – антивихрем.

Вообще говоря, барьер Бина-Ливингстона может быть преодолен путем температурной активации. Это явление впервые было описано Петуховым и Чечеткиным [132], которые рассмотрели зародыш вихря в виде полукольца, расширяющегося от поверхности внутрь сверхпроводника. Профиль соответствующего поверхностного барьера вычислялся также в рамках лондонского приближения, а типичное время термоактивации определялось из уравнения Фоккера-Планка. Среднее время термоактивации дается формулой аррениусовского типа. После подстановки параметров, характерных для известных тогда сверхпроводников, высота барьера в единицах $k_B T$ была оценена как 10^3 - 10^5 , что казалось бы исключало возможность экспериментально наблюдать термоактивацию вихрей.

Однако двадцать лет спустя, после открытия явления высокотемпературной сверхпроводимости, термоактивация вихрей привлекла большое внимание исследователей. Как было показано Копыловым с соавторами [133], термоактивация оказывается возможной в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках, в которых смешанное состояние представляет собой набор квазидвумерных пенкейков. Далее термоактивация была рассмотрена Бурлачковым [134] для случая высокотемпературных сверхпроводников типа $YBaCuO$, в которых вихри имеют обычную форму трехмерных нитей. Было продемонстрировано, что высота барьера в этих соединениях радикально понижается по сравнению со случаем обычных низкотемпературных сверхпроводников до значений $10 - 100k_B T$, что должно вести к экспериментально наблюдаемым следствиям. Действительно, эти выводы согласуются с данными многочисленных экспериментов (см, например, [135] и [136]).

Таким образом, в целом сейчас доминирует точка зрения, согласно которой термоактивационное проникновение вихрей в низкотемпературные

сверхпроводники не возможно, тогда как оно вполне наблюдаемо в случае высокотемпературных сверхпроводников.

Однако в недавнем эксперименте французской группы Родичева с соавторами [52] было обнаружено полное отсутствие гистерезиса для входа и выхода вихрей в нано-островок из свинца, имеющий очень малую толщину ($\approx 5,5$ nm). Поперечные размеры этого образца были столь малы (~ 100 nm), что он был способен вместить лишь один вихрь Абрикосова перед переходом в нормальное состояние. Похожий эксперимент был поставлен в Японии [53]. В нем также наблюдалось подавление, хотя и неполное, поверхностного барьера. Заметим, что температура, при которой проводились измерения, была примерно вдвое ниже, чем в экспериментах французской группы.

Цель данного раздела диссертационной работы – показать, что за подавление барьера, обнаруженное в экспериментах, могут быть ответственны температурные флуктуации. Для этого необходимо разработать новый подход к проблеме термоактивации, в котором учитывались бы экстремально малые размеры системы. Действительно, в использовавшихся ранее подходах рассмотрение всегда велось в рамках лондоновского приближения. Однако это приближение полностью неприменимо для систем с размерами, сопоставимыми с размерами сердцевин вихря. Более того, в нашем случае проблема еще глубже, поскольку вообще не представляется возможным использовать положение вихря в качестве подходящей независимой переменной, так как в малоразмерных сверхпроводниках поверхностный барьер обусловлен, главным образом, процессом зарождения вихря на границе, а не движением уже сформировавшегося вихря вглубь образца.

Для того, чтобы обойти эти трудности, мы здесь предлагаем и используем альтернативный подход:

1) Сначала решаются уравнения Гинзбурга-Ландау с использованием разложения параметра порядка по низшим уровням Ландау. Поверхностный

барьер описывается в терминах населенностей соответствующих уровней, а не через положение вихря. Рассматриваемый образец, соответствующий эксперименту [52], столь мал, что может вместить в себя лишь один вихрь. Поэтому для описания барьера с хорошей точностью достаточно учесть лишь два уровня, отвечающих завихренностям 0 и 1, которые описывают безвихревое и одновихревое состояния, соответственно. Населенности этих уровней дальше используются в качестве "хороших" переменных вместо координаты вихря. Заметим, что не существует принципиальных трудностей на пути увеличения количества учитываемых уровней Ландау, что может потребоваться при применении подхода к образцам большего размера.

2) Затем вводятся в рассмотрение и оцениваются коэффициенты вязкости, связанные с изменениями параметра порядка, спроецированного на уровни Ландау. При этом учитываются эффекты размагничивания.

3) На конечном этапе решается уравнение Фоккера-Планка - снова в терминах населенностей уровней Ландау.

Так мы приходим к основному результату – аналитическому выражению для среднего времени термоактивации вихря в/из сверхпроводника. Вычисления показывают, что барьер, в условиях эксперимента [52], составляет примерно $20k_B T$. Эта величина более характерна для высокотемпературных сверхпроводников, чем для низкотемпературных соединений. Время термоактивации оценено как $\tau \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ с. Оно оказывается малым, что и может служить объяснением результатов экспериментов [52, 53].

3.3.2. Поверхностный барьер

Основные параметры. – Сверхпроводящий островок в эксперименте [52] имел сглаженную гексагональную форму с небольшим утоньшением посередине, как видно из Рис. 1(b) [52]. Наименьший поперечный размер образца составлял 110 нм, тогда как толщина островка была $d = 5,5$ нм.

Температура, при которой проводились измерения, составляла $T = 4,3$ К. Переход между безвихревым и одновихревым состояниями происходил в поле $0,235$ Тл. Переход был обратим с точностью 3% . Обратимость подразумевает, что в этом поле энергии безвихревого и одновихревого состояний сравниваются.

Между островком и кремниевой подложкой располагался разупорядоченный слой, который ограничивает длину свободного пробега квази-частиц [52] до $l \approx 2d$. Длина когерентности при нуле температур оценивалась [52]) с использованием выражения для грязных сверхпроводников $\approx \sqrt{\xi_0 l}$, где $\xi_0 = 80$ нм - длина когерентности в объемном сверхпроводнике из свинца. Это дает ≈ 30 нм. Длина когерентности $\xi(T = 4,3\text{К})$ оценивалась как $40 - 45$ нм [52]. Здесь мы будем использовать значение 48 нм. Для глубины проникновения используется обычное выражение [137] для грязных сверхпроводников, $\lambda(T) \simeq 0.615\lambda_0 \sqrt{\frac{\xi_0/l}{(1-T/T_c)}}$ где $\lambda_0 \simeq 40$ нм глубина проникновения в объемном образце из свинца, $T_c = 7,2$ К. Это дает $\lambda(4,3\text{К}) \simeq 102$ нм. Соответствующее значение параметра Гинзбурга-Ландау $\kappa \approx 2$. При рассмотрении диамагнитного отклика островка необходимо иметь в виду, что эффективное значение этого параметра значительно больше [138], так как $d \ll \lambda(T)$.

Хотя образец имеет сглаженную гексагональную форму, он все же довольно близок по форме к диску (Рис. 1(b) [52]). Поэтому мы его и будем моделировать диском. Что касается диаметра, будем использовать значение 150 нм, которое примерно соответствует нижнему поперечному размеру образца. Это значение вместе с длиной когерентности 48 нм позволит нам воспроизвести найденное экспериментально поле перехода между безвихревым к одновихревым состояниями ($0,235$ Тл).

Заметим, что диаметр диска составляет приблизительно $1,55$ длин когерентности. Согласно результатам предыдущего параграфа, такой диск действительно может вместить в себя лишь один вихрь перед переходом в

нормальное состояние.

Предварительные оценки. – Сравним энергию $k_B T$ с энергией, требующейся для создания зародыша вихря, для которого необходимо подавить параметр порядка до нуля на площади $\sim \xi(T)^2 d$. Аналогичная оценка часто используется для вычисления параметра Гинзбурга [139]. В рамках теории Гинзбурга-Ландау, такая энергия равна

$$\sim \frac{H_c(T)^2}{2\mu_0} \xi(T)^2 d, \quad (3.33)$$

где $H_c(T)$ термодинамическое критическое поле, равное

$$H_c(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi \sqrt{2} \xi(T) \lambda(T)}. \quad (3.34)$$

Для эксперимента при температуре $T = 4,3\text{K}$ получаем следующую оценку для отношения двух величин:

$$k_B T \left(\frac{H_c(T)^2}{2\mu_0} \xi(T)^2 d \right)^{-1} \sim 10^{-2}, \quad (3.35)$$

из которого видно, что отношение не так уж мало. Заметим, что параметр порядка сильно подавлен в окрестности перехода между одновихревым и безвихревым состояниями. Это должно уменьшить энергию конденсации, а значит увеличить (3.35) в несколько раз. Более того, мы можем предполагать, что высота барьера должна быть существенно ниже приведенной оценки из-за дополнительной причины: в столь малой системе проникновение вихря приводит скорее к перераспределению параметра порядка, а не к его подавлению. В итоге, можно ожидать, что отношение $k_B T$ и высоты барьера поднимется до значений, характерных для высокотемпературных сверхпроводников.

Вычисление профиля барьера. – Запишем функционал теории Гинзбурга-Ландау для сверхпроводящей энергии диска:

$$F = \frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r dr \left(-|f|^2 + \frac{1}{2} |f|^4 + |(-i\nabla - \mathbf{a}) f|^2 \right), \quad (3.36)$$

где интегрирование производится по поперечному сечению диска (используется цилиндрическая система координат), $r_0 = R/\xi(T)$ - безразмерный радиус диска, f - безразмерный параметр порядка, $a = h_e r/2$ - векторный потенциал, который имеет лишь азимутальную компоненту, $h_e = H/H_{c2}(T)$ внешнее магнитное поле в единицах $H_{c2}(T) = \Phi_0/2\pi\xi(T)^2$, а все расстояния измеряются в единицах $\xi(T)$. Из-за малых размеров системы внешнее магнитное поле проникает внутрь системы практически полностью, так что можно считать поле постоянным в пространстве. Поскольку толщина диска d намного меньше $\xi(T = 4, 3K)$, параметр порядка не меняется в направлении z . Тогда задача для параметра порядка сводится к двумерной.

Далее мы снова раскладываем параметр порядка в разложение Фурье, подобно тому, как это делалось в предыдущем параграфе:

$$f(r, \varphi) = \sum_n c_n \varphi_n(r) e^{-in\varphi}. \quad (3.37)$$

В безвихревом состоянии только один коэффициент из c_n не равен нулю, а именно c_0 . В одновихревом состоянии ненулевым коэффициентом становится c_1 . Диск так мал, что может вместить в себя лишь один вихрь - поэтому мы можем с хорошей точностью спроецировать параметр порядка на подпространство с всего двумя ненулевыми компонентами:

$$f(r, \varphi) \simeq c_0 \varphi_0(r) + c_1 \varphi_1(r) e^{-i\varphi}. \quad (3.38)$$

Суперпозиция (3.38) фактически описывает вход и выход вихря. Если мы начинаем выводить систему из безвихревого состояния ($c_1 = 0$), увеличение c_1 сначала приводит к подавлению параметра порядка в некотором месте на краю образца, а затем параметр порядка продавливается до нуля и меняет знак - в этом месте образуется фазовая особенность, которая и есть центр вихря. При дальнейшем увеличении c_1 вихрь смещается к центру образца. Наоборот, если в начальном состоянии $c_0 = 0$, тогда имеется вихрь в центре диска, а увеличение c_0 приводит к его смещению к краю с последующим

полным исчезновением.

Далее для $\varphi_0(r)$ и $\varphi_1(r)$ будем использовать собственные функции оператора кинетической энергии, соответствующие завихренностям $L = 0$ и $L = 1$, и радиальному квантовому числу равному 0 (волновые функции не имеют нулей вне начала координат). Эти функции описывают решение первого уравнения Гинзбурга-Ландау при переходе в нормальное состояние в высоких полях, где уравнение может быть линеаризовано. Поэтому такой выбор оправдан и в окрестности этого перехода, в которой система и находится. В цилиндрических координатах имеем

$$-\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi_L}{dr} \right) + \varphi_L \left(\frac{h_e r}{2} - \frac{L}{r} \right)^2 = \varepsilon_L \varphi_L. \quad (3.39)$$

Решение этого уравнения:

$$\varphi_L = r^L \varepsilon_L^{L/2} \exp\left(-\frac{h_e r^2}{4}\right) \Phi\left(\frac{h_e - \varepsilon_L}{2h_e}, L + 1, \frac{h_e r^2}{2}\right), \quad (3.40)$$

где Φ - функция Куммера. Выражение (3.39) следует дополнить граничным условием для случая границы вакуум/сверхпроводник

$$\left. \frac{d\varphi_L}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (3.41)$$

Значение ε_L для заданных h_e , r_0 и L находятся численно из (3.40) и (3.41).

Теперь будем рассматривать c_0 и c_1 в качестве вариационных параметров и вычислим энергию (3.36) как их функцию. Видно, что энергия задается биквадратной функцией вариационных параметров, что позволяет получать многие результаты аналитически. Без потери общности, можем также считать c_0 и c_1 вещественными и положительными. Для энергии имеем:

$$F = \frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \left(c_0^2 \alpha_0 + c_1^2 \alpha_1 + c_0^4 \beta_0 + c_1^4 \beta_1 + 2\gamma c_0^2 c_1^2 \right), \quad (3.42)$$

где ($L = 0, 1$)

$$\alpha_L = (\varepsilon_L - 1) \int_0^{r_0} \varphi_L^2 r dr, \quad (3.43)$$

$$\beta_L = \frac{1}{2} \int_0^{r_0} \varphi_L^4 r dr, \quad (3.44)$$

$$\gamma = \int_0^{r_0} \varphi_0^2 \varphi_1^2 r dr. \quad (3.45)$$

Подчеркнем, что параметры α_L , β_L , γ зависят от магнитного поля.

Минимизация энергии по вариационным параметрам дает энергии безвихревого и одновихревого состояний:

$$F(L=0) = -\frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \left(\frac{\alpha_0^2}{4\beta_0} \right), \quad (3.46)$$

$$F(L=1) = -\frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \left(\frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} \right). \quad (3.47)$$

Для нахождения барьера на вход вихря сначала рассматривается безвихревое состояние, $c_1 = 0$, затем c_1 увеличивается и при этом минимизируется F относительно c_0 при каждом фиксированном c_1 . В результате получаем следующую оптимальную зависимость F от c_1

$$F(0 \rightarrow 1) = \frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \left[-\frac{\alpha_0^2}{4\beta_0} + c_1^2 \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0 \gamma}{\beta_0} \right) + c_1^4 \left(\beta_1 - \frac{\gamma^2}{\beta_0} \right) \right], \quad c_1 \leq \sqrt{-\frac{\alpha_0}{2\gamma}},$$

$$F(0 \rightarrow 1) = \frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d (c_1^2 \alpha_1 + c_1^4 \beta_1), \quad \sqrt{-\frac{\alpha_0}{2\gamma}} < c_1 \leq \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\beta_1}}, \quad (3.48)$$

а также - аналогичную зависимость для случая выхода вихря, $F(1 \rightarrow 0)$.

Высота барьера определяется седловой точкой в пространстве (c_0, c_1) и дается минимумом $F(0 \rightarrow 1)$ относительно c_1 :

$$U_{en} = \frac{H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \frac{\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0 \gamma}{\beta_0} \right)^2}{4 \left(\frac{\gamma^2}{\beta_0} - \beta_1 \right)}. \quad (3.49)$$

Анализ показывает, что безвихревое состояние становится нестабильным по отношению к проникновению вихря при $H \simeq 0,255$ Тл; тогда как одновихревое состояние нестабильно относительно выхода вихря при $H \simeq 0,195$ Тл. Таким образом, относительная ширина гистерезиса, в отсутствие флуктуаций, ~ 30 %.

На Рис. 3.9 приводится зависимость высоты барьера для входа и выхода вихрей (в единицах $k_B T$) от внешнего поля H . Видно, что высоты обоих барьеров $\approx 23 k_B T$ в окрестностях $H = 0,235$ Тл, где энергии состояний равны. Отношение высоты барьера и тепловой энергии характерны больше для высокотемпературных сверхпроводников, нежели чем для низкотемпературных соединений. Причины этого кроются в очень малой толщине островка и в малых поперечных размерах, что приводит к подавлению параметра порядка в окрестности интересующего нас перехода.

На Рис. 3.10 поверхностный барьер для входа вихрей, задаваемый (3.48), показан, как функция c_1 . Примечательно, что практически весь интервал значений c_1 от $c_1 = 0$ до седловой конфигурации соответствует формированию вихревой сердцевины, а не движению уже сформированного вихря вглубь островка. Таким образом, в условиях рассматриваемого эксперимента, положение вихря действительно никак не может использоваться в качестве независимой координаты для описания термоактивации.

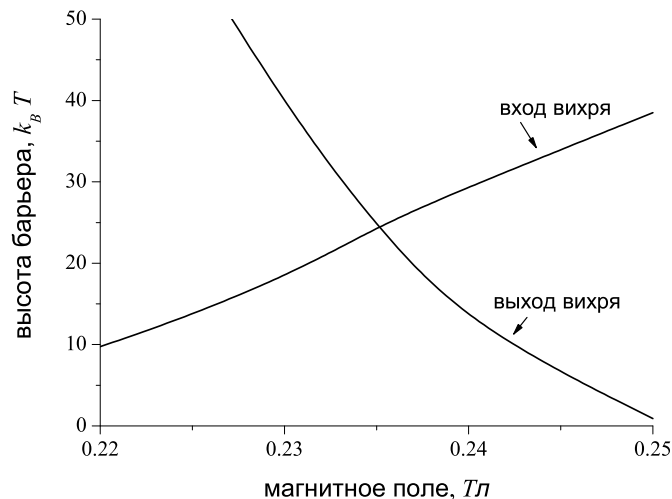


Рис. 3.9. Зависимость высоты барьера от внешнего поля H .

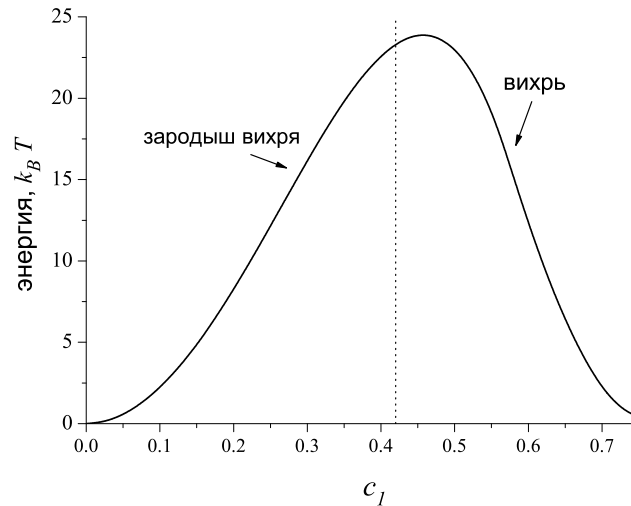


Рис. 3.10. Потенциальный барьер, препятствующий росту c_1 , то есть населенности уровня Ландау, ответственного за появление вихря в системе, при $H = 0,235$ Тл. Точечная линия разделяет состояния с зарождающимся вихрем и с реальной фазовой особенностью.

3.3.3. Коэффициент вязкости

При движении вихрей локальные магнитные поля внутри сверхпроводника испытывают изменения во времени. Согласно закону Фарадея, это должно приводить к появлению электрического поля, которое далее должно вести к диссипации энергии. Диссипация может быть описана с помощью вязкой силы, действующей на движущиеся вихри. Микроскопическая теория этих явлений достаточно сложна, однако, разумные оценки для силы вязкости могут быть получены в рамках теории Гинзбурга-Ландау [137, 140–142]. Здесь мы применим подобный подход для коэффициента вязкости, описывающего изменение населенностей уровней Ландау, а не изменение положение вихря, как такового.

При вычислении энергии островка мы пренебрегали изменениями магнитного поля внутри него. Это полностью оправдано, поскольку диск очень тонок ($d \ll \lambda(T)$), а его радиус также мал, $R \sim \lambda(T)$, что позволяет применить теорию возмущений по малому параметру $1/\kappa_{eff}^2$, где κ_{eff} намного больше κ из-за размагничивания. Физически это означает, что дополнитель-

ное магнитное поле, создаваемое мейсснеровскими токами и вихрем, мало по сравнению с внешним полем. Если известно решение первого уравнения Гинзбурга-Ландау для параметра порядка в лидирующем порядке, векторный потенциал \mathbf{a}_{add} этого дополнительного поля может быть найден в виде

$$\mathbf{a}_{add} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}}{r} dV, \quad (3.50)$$

где интегрирование производится по объему образца, а \mathbf{j} плотность сверхтока, определяемая как

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\kappa^2} \left[\mathbf{a}|f|^2 + \frac{i}{2} (f^* \nabla f - f \nabla f^*) \right], \quad (3.51)$$

где $\mathbf{a} = \mathbf{e}_\varphi h_c r / 2$ безразмерный векторный потенциал в лидирующем порядке. Вместо точного решения для f , будем использовать приближенное решение через уровни Ландау, которое мы нашли ранее.

Вход или выход вихря соответствует изменениям f во времени. Это создает локальное электрическое поле, которое можно найти из закона Фарадея

$$\text{rot } \mathbf{e} = -\frac{\partial(\text{rot } \mathbf{a}_{add})}{\partial t}, \quad (3.52)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{a}_{add}}{\partial t}, \quad (3.53)$$

где \mathbf{a}_{add} дается (3.50).

Параметр порядка уже сильно подавлен в окрестности перехода. Поэтому проводимость оказывается близкой к проводимости свинца в нормальном состоянии σ_n . Тогда скорость диссипации внутри образца W может быть оценена как

$$W / (H_{c2}(T)^2 \xi(T)^5) \sim \sigma_n \int \mathbf{e}^2 dV. \quad (3.54)$$

Рассмотрим процесс входа вихря, используя наше представление для параметра порядка. Вход вихря описывается ростом во времени s_1 , начиная с

0, вдоль оптимального пути. Тогда из (3.51) легко увидеть, что в лидирующем по c_1 порядке \mathbf{j} имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned} j_\varphi &= -\frac{1}{\kappa^2} c_0 c_1 f_1 f_0 \left(h_e r - \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ j_r &= -\frac{1}{\kappa^2} c_0 c_1 (f'_{1r} f_0 - f'_{0r} f_1) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Подставим (3.55) в (3.50). Поскольку диск тонок, $d \ll R$, можно пренебречь зависимостью от z в знаменателе подынтегрального выражения в (3.50). Тогда для радиальной компоненты $\mathbf{a}_{add}^{(r)}$, после интегрирования по углу, получаем

$$\mathbf{a}_{add}^{(r)} = \frac{d \cos \varphi}{2\pi \xi(T) \kappa^2} c_0 c_1 g(r), \quad (3.56)$$

где

$$g(r) = \frac{1}{r} \int_0^{r_0} r_1^{-1} (f'_{1r_1} f_0 - f'_{0r_1} f_1) \left[-(r_1 + r) E \left(\frac{2\sqrt{rr_1}}{r+r_1} \right) + \frac{r^2 + r_1^2}{r+r_1} K \left(\frac{2\sqrt{rr_1}}{r+r_1} \right) \right] dr_1, \quad (3.57)$$

где K и E - полные эллиптические интегралы первого и второго рода, соответственно. Аналогично находим выражение для $\mathbf{a}_{add}^{(\varphi)}$, которое пропорционально $\sin \varphi$, тогда как под интегралом теперь стоит $f_0 f_1 (h_e r_1 - 1/r_1)$ вместо $(f'_{1r_1} f_0 - f'_{0r_1} f_1)$. Причина, по которой вязкость вычисляется лишь в лидирующем порядке по c_1 , станет ясной из дальнейшего изложения.

Используя (3.53), находим локальное электрическое поле \mathbf{e} , как функцию производной по времени c'_{1t}

$$e_r = -c'_{1t} \cos \varphi \frac{d}{2\pi \xi(T) \kappa^2} \sqrt{-\frac{\alpha_0}{2\beta_0}} g(r), \quad (3.58)$$

и аналогично - для e_φ . Мощность потерь теперь определяется из (3.54), как

$$W \sim (c'_{1t})^2 \sigma_n \delta \frac{H_c(T)^2 \xi(T)^2 d^3}{\kappa^2}, \quad (3.59)$$

где δ находится численным интегрированием зависимости от r выражения для \mathbf{e} (3.57), и с использованием вычисленных значений α_0 и β_0 . В итоге получаем оценку

$$\delta \sim 10^{-2}. \quad (3.60)$$

“Сила”, препятствующая росту c_1 , задается отношением W к c'_{1t} . Она пропорциональна c'_{1t} . Тогда коэффициент вязкости равен

$$\eta^{(c_1)} \sim \sigma_n \frac{H_c(T)^2 \xi(T)^2 d^3}{\kappa^2} 10^{-2}. \quad (3.61)$$

Такое же выражение было найдено и для коэффициента вязкости, связанного с ростом c_0 (случай выхода вихря). Оценка для δ также остается в силе.

Подчеркнем, что $\eta^{(c_1)}$, по определению, напрямую связано с изменением населенности уровня с завихренностью 1, а не с изменением положения вихря.

3.3.4. Время термоактивации

Итак, мы нашли зависимости энергии системы от населенностей соответствующих уровней Ландау для входа и выхода вихрей, а также коэффициенты вязкости, описывающие изменения этих населенностей. Теперь мы можем приступить к нахождению среднего времени термоактивации вихря через барьер. Это может быть сделано с помощью уравнения Фоккера-Планка, также записанного в терминах населенностей.

Сначала рассмотрим вход вихря. Зависимость $U(c_1)$ энергии системы от c_1 показана на Рис. 3.10. Изначально система находится в левой яме.

Следуя [143], введем вероятность $p(c'_1, t | c_1, 0)$ найти систему в точке c'_1 в момент времени t при условии, что она была в c_1 в момент $t = 0$. Релевантный интервал значений c_1 - между двумя ямами $c_1 \in [a, b]$, где $a = 0$, $b = \sqrt{-\frac{\alpha_1}{2\beta_1}}$. Также обозначим значение c_1 в седловой точке, как s . Тогда вероятность $G(c_1, t)$ того, что система еще находится в этом интервале, равна

$$G(c_1, t) = \int_a^b p(c'_1, t | c_1, 0) dc'_1. \quad (3.62)$$

Поскольку в задаче присутствует однородность по времени, можно заменить $p(c'_1, t | c_1, 0)$ на $p(c'_1, 0 | c_1, -t)$, для которой выполняется обратное

уравнение Фоккера-Планка

$$\frac{\partial p(c'_1, 0 | c_1, -t)}{\partial(-t)} = \frac{1}{\eta^{(c_1)}} \frac{\partial U}{\partial c_1} \frac{\partial p(c'_1, 0 | c_1, -t)}{\partial c_1} - \frac{k_B T}{2\eta^{(c_1)}} \frac{\partial^2 p(c'_1, 0 | c_1, -t)}{\partial c_1^2}. \quad (3.63)$$

Теперь можно перейти обратно к $p(c'_1, t | c_1, 0)$ и проинтегрировать (3.63) по $c_1 \in [a, b]$. Учитывая (3.62), получаем уравнение для $G(c_1, t)$:

$$\frac{\partial G(c_1, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\eta^{(c_1)}} \frac{\partial U}{\partial c_1} \frac{\partial G(c_1, t)}{\partial c_1} + \frac{k_B T}{2\eta^{(c_1)}} \frac{\partial^2 G(c_1, t)}{\partial c_1^2}. \quad (3.64)$$

Также накладываем условие

$$p(c'_1, 0 | c_1, 0) = \delta(c_1 - c'_1), \quad (3.65)$$

которое показывает, что в момент $t = 0$ система была в определенном состоянии. Из этого условия и (3.62), имеем

$$G(c_1, 0) = 1, \quad (3.66)$$

что показывает, что система была в интервале $c_1 \in [a, b]$ при $t = 0$.

Далее принимается отражающее условие при $c_1 = a$, которое означает, что система никогда не покидает интервал $[a, b]$ через этот его конец. Для противоположного конца интервала, $c_1 = b$, накладываем поглощающее условие, которое подразумевает, что если система достигает этой точки, она никогда больше не входит обратно в интервал $[a, b]$. Теперь вычислим среднее время $\tau(c_1)$, которое система проводит в интервале, при условии, что в начальный момент времени она была в некоторой фиксированной точке c_1 . Тогда $\tau(a)$ даст нам среднее время прохода из ямы в $c_1 = a$ до другой ямы в $c_1 = b$.

Время $\tau(c_1)$ может быть выражено из $G(c_1, t)$. Заметим сначала, что $G(c_1, t)$ дает вероятность того, что система в момент t все еще находится в интервале $[a, b]$, а $G(c_1, t + dt)$ вероятность того, что она все еще там в момент $t + dt$. Разница, $-\frac{\partial G(c_1, t)}{\partial t} dt$, представляет собой вероятность выхода в интервале времени $[t, t + dt]$. Тогда среднее время выхода $\tau(c_1)$ равно

$$\tau(c_1) = - \int_0^\infty dt \left\{ \frac{\partial G(c_1, t)}{\partial t} \right\} = - \int_0^\infty dG(c_1, t). \quad (3.67)$$

Используя (3.64) для $G(c_1, t)$, получаем дифференциальное уравнение для $\tau(c_1)$ путем интегрирования (3.64) по t от 0 до ∞ :

$$-\frac{1}{\eta^{(c_1)}} \frac{\partial U}{\partial c_1} \frac{\partial \tau(c_1)}{\partial c_1} + \frac{k_B T}{2\eta^{(c_1)}} \frac{\partial^2 \tau(c_1)}{\partial c_1^2} = -1, \quad (3.68)$$

где учтено (3.66). Уравнение (3.68) определяет среднее время прохода от произвольного $c_1 \in [a, b]$ до b . Это уравнение следует дополнить отражающим условием на a и поглощающим условием на b :

$$\left. \frac{\partial \tau(c_1)}{\partial c_1} \right|_{c_1=a} = 0, \quad (3.69)$$

$$\tau(b) = 0. \quad (3.70)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (3.68) с граничными условиями (3.69) и (3.70) может быть легко решено стандартными способами. Окончательно для $\tau(a)$, которое далее будем обозначать просто как τ , получаем

$$\tau \equiv \tau(a) = \frac{2}{k_B T} \int_a^b \left\{ \exp\left(\frac{U(y)}{k_B T}\right) \int_a^y \eta^{(c_1)} \exp\left(\frac{-U(x)}{k_B T}\right) dx \right\} dy. \quad (3.71)$$

При интегрировании по y основной вклад в (3.71) дается значениями y , для которых $\exp(U(y)/k_B T)$ максимально, т.е. окрестностью седловой точки s . В то же время, внутренний интеграл фактически постоянен в этой области. Поэтому он может быть аппроксимирован с помощью замены y в верхнем пределе интегрирования на b . В итоге, интеграл (3.71) переписывается через произведение двух независимых интегралов

$$\tau \simeq \frac{2}{k_B T} \left(\int_a^b \exp\left(\frac{U(y)}{k_B T}\right) dy \right) \left(\int_a^b \eta^{(c_1)} \exp\left(\frac{-U(x)}{k_B T}\right) dx \right). \quad (3.72)$$

Высокая точность использованной замены подтверждается и численными расчетами.

Основной вклад в первый интеграл в (3.72) обеспечивается окрестностью s , а для второго интеграла - окрестностью a . Именно по этой причине

мы ранее вычисляли коэффициент вязкости $\eta^{(c_1)}$ лишь в лидирующем порядке по c_1 : учет поправок не приведет к заметным изменениям. Теперь разложим U в окрестностях s и a как

$$U(x \approx s) \approx U(s) - \frac{|U''(s)|}{2}(x-s)^2, \quad (3.73)$$

$$U(x \approx a) \approx U(a) + \frac{|U''(a)|}{2}(x-a)^2. \quad (3.74)$$

Легко видеть, что для простой функции (3.48), $|U''(s)| = 2|U''(a)|$. После подстановки (3.73) и (3.74) в (3.72) и интегрирования имеем

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{U_{en}}{k_B T}\right), \quad (3.75)$$

где $U_{en} = U(s) - U(a)$ - это высота барьера (3.49). "Время попытки" τ_0 равно

$$\tau_0 \approx \frac{\pi \sqrt{2} \eta^{(c_1)}}{U''(a)}. \quad (3.76)$$

Используя (3.48), для $U''(a)$ получаем

$$U''(a) = \frac{2H_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_0 \gamma}{\beta_0} \right), \quad (3.77)$$

с $(\alpha_1 - \alpha_0 \gamma / \beta_0) \sim 0.1$.

Итак, (3.76) и (3.77) вместе с выражением (3.61) для $\eta^{(c_1)}$ дают следующую оценку для времени термоактивационного проникновения τ_0

$$\tau_0 \sim \sigma_n \mu_0 \frac{d^2}{\kappa^2}. \quad (3.78)$$

Можем считать, что проводимость линейно зависит от T , так что из известного значения σ_n свинца при комнатной температуре мы можем оценить σ_n в условиях эксперимента [52] как $\sigma_n \gtrsim 10^8 \Omega^{-1} m^{-1}$. Тогда $\tau_0 \sim 10^{-15} - 10^{-14}$ с. Это значение, совместно с нашим результатом для высоты барьера, $U_{en} \approx 23k_B T$, дает $\tau \sim 10^{-5} - 10^{-4}$ с. Очень малая величина τ_0 обусловлена тем фактом, что сверхток циркулирует по исключительно малому объему $\sim \xi(T)^2 d$, так что магнитный отклик островка весьма слаб. Кроме

того параметр порядка подавлен. Наконец, расстояние от края островка, которое должен преодолеть вихрь, также очень мало.

Представленные выше вычисления для случая входа вихря легко модифицируются на случай его выхода. Все оценки для времени выхода остаются в силе.

Полученные оценки для времени термоактивации вихря показывают, что именно этот механизм и может определять наблюдаемое экспериментально подавление барьера в ультрамалых свинцовых островках.

3.4. Подавление поверхностного барьера квантовыми флуктуациями

Квантовые флуктуации усиливаются при уменьшении толщины образца, так что можно ожидать, что они будут доминировать над температурными флуктуациями в пределе ультратонких структур, состоящих из всего нескольких моноатомных слоев, и при низких температурах.

Рассмотрим сверхпроводящий островок в форме диска, состоящий из всего нескольких моноатомных слоёв, с радиусом, на этот раз намного большим длины когерентности при нуле температур. Такие островки могут быть исследованы современными экспериментальными методами. Магнитное поле по-прежнему приложено перпендикулярно поверхности наноструктуры. Будем использовать лондоновскую модель, которая применима и при относительно низких температурах. Использование этой модели в данном случае оправдано, так как размер сердцевин вихря - гораздо меньше поперечных размеров образца. В рамках этой модели, поверхностный барьер, равно как и поля входа и выхода вихрей в отсутствие флуктуаций, могут быть вычислены с помощью подхода Буздина [144].

Для оценки вероятности макроскопического квантового туннелирования вихря Абрикосова в/из образца используем подход Леггетта и Кал-

деиры [145], который позволяет учесть влияние диссипации энергии. Для вихря с массой m_v в потенциале $V(r)$ (который мы найдем с использованием лондоновского приближения), евклидово действие дается выражением [145]

$$S_E = \int dt \left[\frac{m_v}{2} (\dot{r})^2 + V(r) \right] + \frac{\eta}{4\pi} \int dt \int dt' \frac{[r(t) - r(t')]^2}{(t - t')^2}. \quad (3.79)$$

Последнее слагаемое в (3.79) нелокально. Оно и ответственно за диссипацию. При вычислении евклидова действия S_E от временной зависимости радиальной координаты вихря $r(t)$ удобнее перейти к ее фурье-образу $u(\omega)$.

После интегрирования по времени имеем

$$S_E = \int \frac{d\omega}{2\pi} \left\{ \frac{m_v}{2} \left[1 + \frac{\eta}{|\omega|m_v} \right] \omega^2 |u(\omega)|^2 + V(u) \right\}. \quad (3.80)$$

Следуя [55], введем в рассмотрение частотно-зависимую эффективную массу $m_{eff}(\omega) = m_v + \eta/|\omega|$.

В принципе, из (3.80) можно найти $u(\omega)$ точно. Однако известно, что достаточно точные результаты для эффективного действия можно получить гораздо проще - используя метод размерных оценок [55]. Для перепроверки результатов также будем использовать другой приближенный подход, развитый в [146].

Найдем характерную частоту туннелирования ω_0 из баланса кинетической и потенциальной энергий

$$m_{eff}(\omega_0) l_b^2 \omega_0^2 = V_b, \quad (3.81)$$

где V_b и l_b - высота и ширина барьера, соответственно. Уравнение (3.81) является квадратным, из него можно найти ω_0 . В вязком пределе ($m_v V_b \ll \eta^2 l_b^2$), решение имеет вид

$$\omega_0 \approx \frac{V_b}{\eta l_b^2} \left[1 - \frac{m_v V_b}{\eta^2 l_b^2} \right], \quad (3.82)$$

где сохранено линейное слагаемое. Ниже будет показано, что диссипативный режим действительно реализуется в случае рассматриваемых остров-

ков. Используя (3.80) и (3.82), для действия получаем

$$S_E \approx 2\eta l_b^2 \left(1 + \frac{mV_b}{\eta^2 l_b^2} \right). \quad (3.83)$$

Отметим, что в случае потенциала, задаваемого суммой квадратной и кубической зависимостей, который был решен точно в [147], появляется дополнительный множитель $\pi/2$ вместо 2 в лидирующем слагаемом (3.83). Столь небольшое различие демонстрирует высокую эффективность применяемого метода размерных оценок.

Масса вихря может быть оценена с использованием известного выражения Сула [148]. Согласно модели Сула, масса включает два слагаемых: вклад от кинетической энергии сердцевины вихря и вклад от электромагнитной энергии. В работе [149] было выявлено существование еще одного вклада, связанного с деформациями кристаллической решетки. Этот дополнительный вклад по порядку величины совпадает с массой вихря в модели Сула, так что условие вязкого предела не нарушается. Данный вывод верен для грязного предела, который и реализуется в случае наноструктур на разупорядоченных подложках, исследуемых в экспериментах. Напротив, в чистом пределе, следует учитывать гораздо большую массу вихря, возникающую из-за квантования электронных состояний в сердцевине вихря [150], которая к тому же может зависеть от частоты внешней силы. В грязном пределе, однако этот вклад опять-таки становится по порядку величины равным массе, найденной Сулом [149, 151, 152].

Вероятность квантового туннелирования с экспоненциальной точностью равна $P_{QT} \sim \exp(-S_E/\hbar)$, тогда как вероятность температурной активации $P_{TA} \sim \exp(-V_b/k_B T)$.

Эффективное действие в диссипативном пределе зависит преимущественно от ширины барьера, что видно из (3.83) (см. также [55, 153]). Таким образом, вероятность квантового туннелирования обусловлена, в основном, шириной барьера. В то же время, вероятность термоактивации определяет-

ся высотой барьера. Ниже мы покажем, что эта нетривиальная конкуренция между двумя характеристиками барьера приводит к довольно богатому набору возможностей поведения системы.

В модели Лондонов энергия, как функция положения вихря, может быть найдена аналитически [144]. Для диска с радиусом намного меньшим эффективной глубины проникновения поля $\lambda_{\perp} = \lambda(T)^2/d$ зависящая от положения вихря часть энергии может быть записана, как [144]:

$$U(\rho) = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda(T)^2} \left\{ \ln \frac{R^2 - \rho^2}{R\xi(T)} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \left(\frac{\rho^2}{R^2} \right) \right\}, \quad (3.84)$$

где Φ - магнитный поток через диск.

Ранее было показано экспериментально [154], что для наноструктур рассматриваемого типа оказывается применимой теория Гинзбурга-Ландау. Поскольку мы находимся в грязном режиме с длиной свободного пробега $2d$, для $\lambda(T)$ и $\xi(T)$ станем использовать соответствующие выражения для этого режима

$$\lambda(T) = 0.6\lambda_0 \sqrt{\frac{\xi_0/2d}{1 - T/T_c}}, \quad \xi(T) = \sqrt{\frac{2\xi_0 d}{1 - T/T_c}}, \quad (3.85)$$

где для свинца объемные значения $\lambda_0 = 40$ нм и $\xi_0 = 80$ нм. Для зависимости T_c от d используем соотношение, полученное из экспериментов с свинцовыми пленками, состоящими из нескольких монослоев [154]:

$$T_c(d) = T_{c0} \left(1 - \frac{d_c}{d} \right), \quad (3.86)$$

где $T_{c0} = 7.2$ К критическая температура свинца в объеме, а “критическая толщина” d_c соответствует приблизительно полутора монослоям.

Из (3.84) легко получить, что положение седловой точки, разделяющей безвихревое и одновихревое состояния, дается выражением

$$\rho_c = R \left(\frac{\Phi - \Phi_0}{\Phi} \right)^{1/2}. \quad (3.87)$$

Условие для входа вихря в отсутствие флуктуаций может быть тогда получено приравниванием ρ_c к $R - \xi(T)$. После несложных вычислений получаем для критического потока Φ_{in} , при котором пропадает барьер

$$\frac{\Phi_{in}}{\Phi_0} = \frac{R}{2\xi(T)} \frac{1}{1 - \frac{\xi(T)}{2R}}. \quad (3.88)$$

Когда поток меньше Φ_{in} , высота барьера U_{in} для входа вихря не равна нулю. Она дается разницей энергий в седловой конфигурации и при $\rho = R - \xi(T)$:

$$U_{in} = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda(T)^2} \left\{ \ln \frac{R}{\xi(T) \left(2 - \frac{\xi(T)}{R}\right)} - \ln \frac{\Phi}{\Phi_0} + \frac{\Phi}{\Phi_0} \left(\frac{2\xi(T)}{R} - \frac{\xi(T)^2}{R^2} \right) - 1 \right\}. \quad (3.89)$$

Условие для выхода вихря таково: $\rho_c = 0$, что сразу же ведет к условию для соответствующего критического потока $\Phi_{out} = \Phi_0$. Когда $\Phi > \Phi_{out}$, высота барьера U_{out} для выхода вихря отлична от нуля. Она равна разнице энергий в седловой конфигурации и при $\rho = 0$:

$$U_{out} = \frac{\Phi_0^2 d}{8\pi^2 \lambda(T)^2} \left\{ \left[\frac{\Phi}{\Phi_0} - 1 \right] - \ln \frac{\Phi}{\Phi_0} \right\}. \quad (3.90)$$

Таким образом, оказывается возможным найти аналитически высоты барьеров для входа и выхода вихря. Однако этого нельзя сделать для ширин барьеров, потому что они задаются решениями трансцендентных уравнений. А именно, ширина барьера для входа вихря дается разницей двух значений ρ , первое из которых $R - \xi(T)$, а второе определяется другим решением уравнения $U(\rho) = U(R - \xi(T))$. Аналогично, ширина барьера на выход вихря задана ненулевым значением ρ , при котором $U(\rho) = U(0)$. Эти два уравнения будем решать численно.

Рассмотрим случай образца с размерами $R = 120$ нм and $d = 1$ нм. Это - реалистические параметры; образцы таких размеров могут быть изучены экспериментально. Радиус диска в единицах $\xi(0)$ равен 10, а d примерно соответствует 3 монослоям. В результате получаем $T_c = 3,6$ К. На Рис. 3.11

показаны типичные профили барьеров на вход и выход вихря. Примечательно, что ширина барьера для случая входа вихря в целом гораздо меньше, чем для выхода. Поскольку вероятность квантового туннелирования определяется квадратом ширины барьера, можно ожидать, что подобная асимметрия будет служить увеличению вероятности температурного выхода вихря из островка по сравнению с квантовым туннелированием.

Нас интересуют ответы на два вопроса. Во-первых, мы хотим понять, насколько вообще реалистично квантовое туннелирование для рассматриваемой системы. Во-вторых, мы хотим определить, который из механизмов доминирует в зависимости от T и Φ .

Вычисления показывают, что показатели экспоненты и для квантового туннелирования, и для термоактивации равны $\sim 10 - 100$ практически для всей фазовой диаграммы. Исходя из результатов предыдущего параграфа, а также из работ [134, 155], в которых вычислялись предэкспоненциаль-

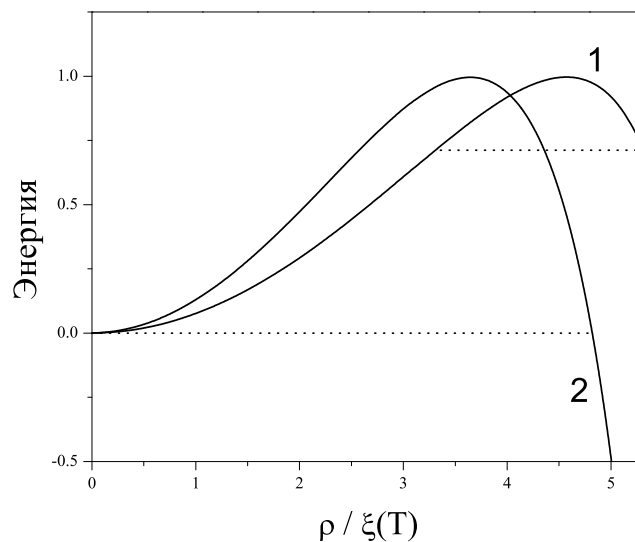


Рис. 3.11. Типичные зависимости энергии системы от положения вихря, в случае сверхпроводящего островка радиусом 120 нм и толщиной 1 нм. Линия 1 показывает барьер на вход вихря при $\Phi = 2,1\Phi_0$ и $T = 0,6T_c$. Линия 2 соответствует барьеру на выход вихря при $\Phi = 1,5\Phi_0$ и $T = 0,6T_c$. Энергии нормированы на свои значения в седловых точках.

Точечные линии носят вспомогательный характер, обозначая ширины барьеров.

ные множители, представляется разумным сделать вывод о том, что этих значений достаточно для наблюдения рассматриваемых явлений экспериментально. Заметим, что из вычислений также следует, что мы действительно находимся в диссипативном пределе, поскольку $m_\nu V_b / \eta^2 l_b^2$ на несколько порядков меньше 1.

Основные результаты представлены на Рис. (3.12). Кривая 1 изображает Φ_{in} как функцию T . Кривая 2 представляет Φ_{out} . Штриховая кривая 3 соответствует Φ , при котором энергии состояния с вихрем посередине диска и при $\rho = R - \xi(T)$ равны. Для участка на фазовой диаграмме, расположенном между кривыми 3 и 1, вход вихря энергетически выгоден (в пренебрежении флуктуациями). Для участка между кривыми 3 и 2, выгоден выход вихря.

Кривая 4 разделяет два участка: ниже этой кривой изменение топологического заряда системы более вероятно через температурные флуктуации, тогда как выше этой линии доминируют квантовые флуктуации. Обозначим соответствующую температуру как T_0 , то есть $k_B T_0 = (\hbar/2\eta)(V_b/l_b^2)$. Для участка между кривыми 4 и 1 квантовое туннелирование вихря внутрь дис-

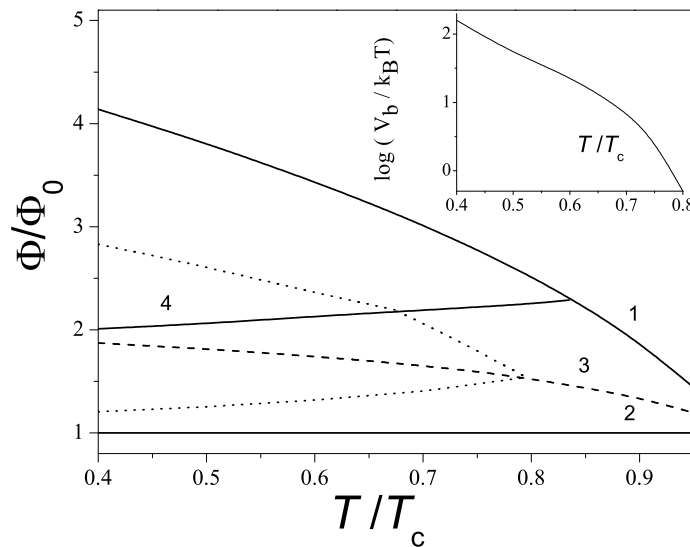


Рис. 3.12. Диаграмма состояний в плоскости “магнитное поле – температура”. Вставка показывает поведение десятичного логарифма S_E/\hbar на T/T_c вдоль линии 4.

ка более выгодно, чем термоактивация. Видно, что ширина этого участка расширяется с уменьшением T , что представляется разумным. Для участка, заключенного между кривыми 1, 3 и 4, более вероятна термоактивация вихря в диск. Примечательно, что этот сценарий доминирует вплоть до достаточно низких температур. Участок между кривыми 2 и 3 соответствует выходу вихря из образца. В отличие от случая выхода вихря он полностью определяется температурным механизмом - даже при довольно низких температурах. Это объясняется тем обстоятельством, что ширина барьера на выход достаточно велика и контролируется, в целом, радиусом диска, тогда как ширина барьера на вход зависит преимущественно от $\xi(T)$ (см. Рис. 3.11).

Вставка на Рис. 3.12 показывает зависимость $V_b/k_B T$ от T/T_c вдоль кривой 4, где эта величина равна S_E/\hbar . Интересно, что кривая 4 ориентирована приблизительно горизонтально на этой "фазовой диаграмме". Она пересекает кривую 1, которая относится к входу вихря в отсутствие флуктуаций, при $T \approx 0.85T_c$. Это означает, что вдоль кривой 1 квантовое туннелирование остается более вероятным вплоть до достаточно высоких температур.

Наконец, две точечные линии на Рис. 3.12 показывают границы участков, близкие к значениям Φ , соответствующим переходам, где показатель экспоненты для доминирующего механизма входа или выхода вихря становятся меньше 10; это означает, что изменение топологического заряда системы становится весьма вероятным. Можно поэтому сказать, что на этих линиях барьер Бина-Ливингстона давится за счет флуктуаций. Линии пересекаются в некоторой точке на кривой 3, где оба барьера подавлены, так что вход и выход вихря должны становиться примерно обратимыми.

В использованном в данном параграфе подходе применялся метод размерных оценок, основанный на работе с двумя характеристиками барьера - его высотой и шириной. Для дополнительной проверки полученных результатов также применялся метод, предложенный в работе [146] для опи-

сания квантового крипа в слоистых высокотемпературных сверхпроводниках. В рамках этого подхода, эффективное действие сначала вычисляется в режиме высоких температур, где оно полностью определяется термоактивацией. Затем температура кроссовера T_0 находится путем решения уравнения движения при учете всего лишь первой гармоники в качестве поправки к статическому решению. Для $T < T_0$ действие оценивается с помощью выражения для термоактивации, но при $T = T_0$. Проверка показала, что результаты использованного здесь метода и подхода [146] очень близки друг к другу. Например, T_0 может быть найдено из уравнения (25) работы [146], если в нем опустить irrelevantное для нашего случая "упругое" слагаемое, $k_B T_0 = -\hbar U''(\rho_c)/2\pi\eta$. Поскольку $U''(\rho_c) \approx -V_b/l_b^2$, мы в итоге получаем аналогичный результат для T_0 . Вычисляя $U''(\rho_c)$, несложно показать, что $k_B T_0 \sim (\Phi - \Phi_0)$, в согласии с кривой 4 на Рис. 3.12. Разница в численных множителях в этих двух подходах фактически компенсируется очень резкой зависимостью T_0 , как функции Φ .

Важным вопросом является, как предсказанные особенности можно проверить экспериментально. Напрямую можно обнаружить отсутствие или присутствие вихря, используя методы сканирующей туннельной микроскопии и спектроскопии, как делалось в экспериментах французской и японской групп. Можно исследовать температурную зависимость средних полей входа и выхода вихрей. Как видно из Рис. 3.12, поток для входа вихря не должен зависеть от T , тогда как в случае доминирования флуктуаций он должен расти с ростом T . При низких температурах соответствующее значение потока должно быть близко к Φ_{out} . Раскладывая (3.87), (3.89) и (3.90) по степеням $\Phi - \Phi_{out}$, можно легко показать, что ширина флуктуационной области, в случае доминирования температурных флуктуаций, зависит от температуры как $\sim \sqrt{T}$. Это выполняется и в случае выхода вихря. Напротив, если доминируют квантовые флуктуации, ширина флуктуационной области приблизительно не зависит от T (за исключением слабой при низких

температурах зависимости $\xi(T)$ и $\lambda(T)$), так что она стремится к постоянной величине при $T = 0$. Таким образом, анализируя низкотемпературное поведение, можно различить два механизма подавления барьера. Для случая входа вихря, должен происходить переход от квантового туннелирования к термоактивации. В этом случае, зависимости соответствующего потока от температуры, которые близки к линейным, должны отличаться при низких и высоких температурах.

Возможно, более тонкий и эффективный метод экспериментального изучения температурной активации был предложен Булаевским с соавторами в работе [156]. Было предложено медленно и периодически изменять приложенное поле, а измерять не только средние поля входа и выхода вихрей, но также и их распределения. Распределение должно уширяться с ростом T в случае термоактивации. Этот подход представляет еще одну возможность различить два возможных сценария подавления барьера.

3.5. Температурные флуктуации, индуцированные геометрией системы

3.5.1. Вводные замечания

Ультратонкие сверхпроводящие островки, полученные методом испарения в ультравысоком вакууме, далеко не всегда имеют простую форму. Эти островки растут по сценарию Странски-Крастанова из зародышей, имеющих выраженную фасеточную форму. В результате, островки, имеющие поперечные размеры 100 нм и менее, стремятся приобрести сглаженную гексагональную форму, тогда как островки больших размеров зачастую вырастают в треугольные структуры [см., например, Рис. 1(a) в [52]].

Из литературы известно, что треугольная геометрия образца может приводить к довольно необычным последствиям для сверхпроводящего конденсата, зажато в такой геометрии. Так, в работах [157, 158] было показа-

но, что в приложенном поле внутри треугольных образцов могут возникать стабильные кластеры вихрей, которые содержат посередине антивихрь.

В данном параграфе диссертационной работы исследуется, как треугольная геометрия, или, более обще - присутствие острых углов в тонких сверхпроводящих наноструктурах влияет на температурные флуктуации параметра порядка. Можно ожидать, что флуктуации будут усиливаться в углах по сравнению с внутренними частями островка, поскольку в углах конденсат зажат с боков границами. Это, в свою очередь, как бы понимает локально размерность системы до квазиодномерной, в которой флуктуации должны усиливаться. Для проверки нашей гипотезы будем рассматривать самый простой случай нулевого внешнего поля.

3.5.2. Модель

Выкладки, приведенные в данном параграфе, относятся к случаю температуры ниже T_c . Не представляет особого труда модифицировать их на случай температур выше T_c .

Функционал Гинзбурга-Ландау для энергии системы в безразмерной форме имеет вид:

$$F = \frac{B_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \int d^2r \left(-|f|^2 + \frac{1}{2} |f|^4 + |\nabla f|^2 \right), \quad (3.91)$$

где интегрирование проводится по плоскости сечения наноструктуры, а все расстояния по-прежнему измеряются в единицах $\xi(T)$; $B_c(T)$ - термодинамическое критическое поле

$$B_c(T) = \frac{\Phi_0}{2\pi \sqrt{2} \xi(T) \lambda(T)}. \quad (3.92)$$

Рассматриваются ультратонкие системы с $d \ll \xi(T)$, так что задача эффективно двумерная. Граничное условие для параметра порядка на каждой из трех сторон берется в его обычной форме для границы ваку-

ум/сверхпроводник

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (3.93)$$

где \mathbf{n} единичный вектор в направлении, перпендикулярном границе.

Будем, как и прежде, рассматривать островки, состоящие из нескольких моноатомных слоев.

3.5.3. Флуктуационные моды

Разложим параметр порядка f вокруг его среднего значения в отсутствие флуктуаций

$$f = 1 + \delta f. \quad (3.94)$$

Подставляя (3.94) в (3.91), получаем выражение для увеличения энергии из-за температурных флуктуаций

$$\delta F = \frac{B_c(T)^2}{\mu_0} \xi(T)^2 d \int d^2 r \left(|\delta f|^2 + \frac{1}{2} (\delta f^2 + \delta f^{*2}) + |\nabla \delta f|^2 \right), \quad (3.95)$$

где сохранены лишь квадратичные по δf и δf^* слагаемые.

Очевидно, δf может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн. Однако δf для каждой флуктуационной моды должно удовлетворять граничному условию (3.93), которое представляет собой очень сильное ограничение, налагаемое геометрией и размерами системы. Для того, чтоб обойти эту сложность, мы будем использовать - с некоторыми необходимыми изменениями – подход, примененный в работе [159] для треугольного островка из графена, для которого были найдены точные электронные волновые функции. Основная разница с задачей с графеном состоит в другом типе граничных условий, которые для графена представляют собой требование равенства нулю самой волновой функции на границе, а не ее производной.

Следуя [159], сначала мы рассмотрим сектор, расположенный между гранями I и II [см. Рис. 3.13]. Найдем форму δf , которая удовлетворяет

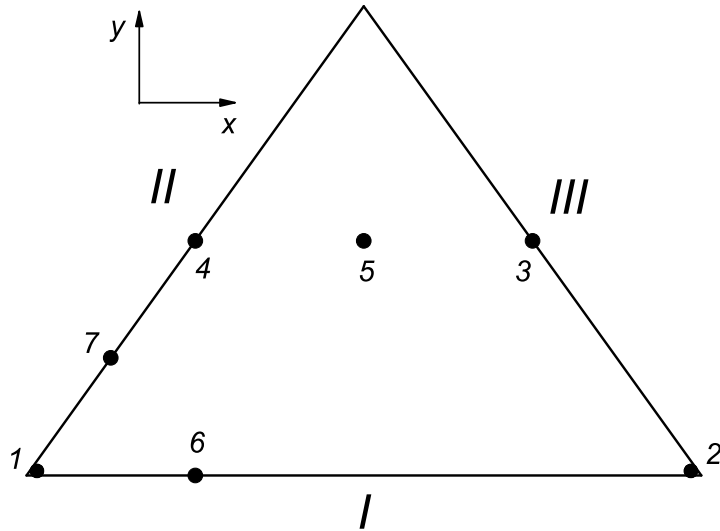


Рис. 3.13. Схематическое изображение треугольной наноструктуры. Корреляторы вычисляются вдоль отрезков, соединяющих точки, обозначенные числами.

условию (3.93) на этих двух гранях. Рассмотрим плоскую волну с волновым вектором $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y)$:

$$\psi_1 = \exp(-i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}). \quad (3.96)$$

Отражаясь от грани I, она превращается в волну ψ_2 с $\mathbf{k}_2 = (k_x, -k_y)$. Далее легко видеть, что сумма ψ_1 и ψ_2 удовлетворяет (3.93) на грани I. Когда эти две волны отражаются от грани II, появляются две новые волны с $\mathbf{k}_5 = -\frac{1}{2}(k_x + \sqrt{3}k_y, -\sqrt{3}k_x + k_y)$ и $\mathbf{k}_6 = -\frac{1}{2}(k_x - \sqrt{3}k_y, -\sqrt{3}k_x - k_y)$. После отражения от грани I, они порождают волны с $\mathbf{k}_3 = -\frac{1}{2}(k_x - \sqrt{3}k_y, \sqrt{3}k_x + k_y)$ и $\mathbf{k}_4 = -\frac{1}{2}(k_x + \sqrt{3}k_y, \sqrt{3}k_x - k_y)$. Наконец, после отражения от грани II, эти последние волны не приводят к возникновению никаких новых волн. Мы можем констатировать, что сумма шести волн $\psi_1 + \dots + \psi_6$ удовлетворяет граничному условию (3.93) на гранях I и II при любом \mathbf{k}_1 . Это же граничное условие на границе III приводит к правилам квантования для (k_x, k_y) , которые, конечно, отличаются от найденных в [159]. Легко видеть, что раз-

решенные значения (k_x, k_y) разделяются на две ветви:

$$k_x^{(1)} = \frac{4\pi}{3L}m, \quad (3.97)$$

$$k_y^{(1)} = \frac{4\pi}{3L}n\sqrt{3}, \quad (3.98)$$

и

$$k_x^{(2)} = \frac{4\pi}{3L}\left(m + \frac{1}{2}\right), \quad (3.99)$$

$$k_y^{(2)} = \frac{4\pi}{3L}\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{3}, \quad (3.100)$$

где L безразмерная длина стороны треугольника, а m и n - произвольные целые числа.

Для этих двух ветвей собственные энергии даются выражениями

$$E_{mn}^{(1)} = \left(\frac{4\pi}{3L}\right)^2 (m^2 + 3n^2), \quad (3.101)$$

$$E_{mn}^{(2)} = \left(\frac{4\pi}{3L}\right)^2 \left[\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right]. \quad (3.102)$$

Используя соответствующий выбор m и n , получаем следующий базис нормированных функций

$$\varphi_{mn}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_1^{(1)} + \dots + \psi_6^{(1)}), \quad n > |m|, \quad (3.103)$$

$$\varphi_{mn}^{(1)} = 1, \quad n = m = 0, \quad (3.104)$$

где $\psi_1^{(1)}, \dots, \psi_6^{(1)}$ зависит от $(k_x^{(1)}, k_y^{(1)})$, и

$$\varphi_{mn}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{6}} (\psi_1^{(2)} + \dots + \psi_6^{(2)}), \quad n > |m + 1/2|, \quad (3.105)$$

где $\psi_1^{(2)}, \dots, \psi_6^{(2)}$ зависит от $(k_x^{(2)}, k_y^{(2)})$.

Можно разложить флуктуационный вклад в параметр порядка по полученному базису

$$\delta f = \sum_{n,m,\alpha} c_{mn}^{(\alpha)} \varphi_{mn}^{(\alpha)}, \quad (3.106)$$

где $\alpha = 1, 2$ относится к разным ветвям. Теперь подставим разложение (3.106) в (3.95). После интегрирования по поперечному сечению образца получаем следующее выражение для статистической суммы

$$Z = \prod_{n,m,\alpha} \int d(\text{Re}(c_{mn}^{(\alpha)})) d(\text{Im}(c_{mn}^{(\alpha)})) \times \exp \left\{ -G(T) \frac{L^2 \sqrt{3}}{4} \left[(\text{Re}(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 (E_{mn}^{(\alpha)} + 2) + (\text{Im}(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 E_{mn}^{(\alpha)} \right] \right\}. \quad (3.107)$$

Оно содержит произведение гауссовых интегралов, которые могут быть легко найдены:

$$Z = \prod_{n,m,\alpha} \frac{2\pi}{L \sqrt{E_{mn}^{(\alpha)} (E_{mn}^{(\alpha)} + 2) G(T) \sqrt{3}}}. \quad (3.108)$$

3.5.4. Корреляционные функции

Для исследования пространственной локализации флуктуаций в островке ниже T_c , проанализируем отдельно флуктуации фазы и плотности, поскольку они ведут себя по-разному. А именно, флуктуации фазы параметра порядка оказываются ответственными за отсутствие дальнего порядка [139].

Из (3.94) видно, что фаза χ параметра порядка может быть выражена как

$$\chi = \frac{1}{2i} (\delta f - \delta f^*). \quad (3.109)$$

Мы будем искать корреляционную функцию

$$K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\chi(\mathbf{r}_1) - \chi(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle_T. \quad (3.110)$$

В изотропной бесконечной системе эта величина зависит лишь от расстояния $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Данная корреляционная функция расходится логарифмически на больших расстояниях, что отражает факт потери дальнего порядка. Однако для ограниченной в размерах системы с анизотропной геометрией $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ зависит и от \mathbf{r}_1 , и от $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$.

Используя (3.106) и (3.109), приходим к следующему выражению для $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$

$$K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \sum_{m,n,\alpha} \langle (Im(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 \rangle_T \left\{ Re \left[\left(\Gamma_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right)^2 \right] + \left| \Gamma_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right|^2 \right\} - \frac{1}{2} \sum_{m,n,\alpha} \langle (Re(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 \rangle_T \left\{ Re \left[\left(\Gamma_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right)^2 \right] - \left| \Gamma_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \right|^2 \right\}, \quad (3.111)$$

где

$$\Gamma_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \varphi_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_1) - \varphi_{mn}^{(\alpha)}(\mathbf{r}_2). \quad (3.112)$$

Усредненные значения $(Re(c_{mn}^{(\alpha)}))^2$ и $(Im(c_{mn}^{(\alpha)}))^2$ могут быть определены аналитически:

$$\langle (Re(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 \rangle_T = \frac{2}{G(T)L^2 \sqrt{3} (E_{mn}^{(\alpha)} + 2)}, \quad (3.113)$$

$$\langle (Im(c_{mn}^{(\alpha)}))^2 \rangle_T = \frac{2}{G(T)L^2 \sqrt{3} E_{mn}^{(\alpha)}}. \quad (3.114)$$

Подставляя (3.113) и (3.114) в (3.111) и производя суммирование, получаем $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль различных траекторий внутри островка. Эта сумма однако расходится при больших m и n , и эта расходимость должна быть обрезана стандартным образом [139] на волновых векторах $k \sim 1/\xi(T)$. Оказалось, что зависимость окончательных результатов от конкретного выбора параметра обрезания достаточно слаба (в пределах 10 %).

Аналогичным образом можно выразить флуктуационную часть δn_s плотности сверхпроводящих электронов $|f|^2$ в терминах δf и δf^*

$$\delta n_s = \delta f + \delta f^*. \quad (3.115)$$

Используя этот подход, несложно также вычислить коррелятор плотность-плотность, определяемый как

$$K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \delta n_s(\mathbf{r}_1) \delta n_s(\mathbf{r}_2) \rangle_T. \quad (3.116)$$

Температурные флуктуации параметра порядка также имеются и при температурах выше T_c . В этом случае, значение параметра порядка в отсутствие флуктуаций равно нулю, поэтому следует модифицировать (3.94) и

(3.108), а следовательно - и (3.113), (3.114). Опустим детальный вывод, а далее результаты представим для корреляционной функции параметра порядка как такового, без разделения на плотность и фазу

$$K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle f(\mathbf{r}_1)^* f(\mathbf{r}_2) \rangle_T. \quad (3.117)$$

Выше T_c также удобно нормировать все расстояния на $\xi(T)$, где $\xi(T) = \sqrt{\hbar^2/2m|\alpha(T)|}$.

3.5.5. Результаты и их обсуждение

Обсудим поведение корреляционных функций как выше так и ниже T_c .

Температура ниже T_c . – Результаты для фазовой корреляционной функции $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в зависимости от $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ вдоль разных траекторий показаны на Рис. 3.14 для случая треугольного островка с $L = 8$, что соответствует размеру в несколько сотен нанометров для наноструктуры из свинца при параметрах $T = 0,75T_c$, $G(T = 0,75T_c) = 10$. Разные кривые показывают поведение $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль прямых линий, соединяющих разные точки внутри островка - эти точки обозначены на Рис. 3.13. Кривая 1 \rightarrow 2 соответствует траектории между двумя углами наноструктуры. Кривая 1 \rightarrow 3 соответствует $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль биссектрисы, начиная с угла. Кривые 4 \rightarrow 3 и 5 \rightarrow 3 соответствуют линиям во внутренней области наноструктуры (длины отрезков 1 – 4 и 2 – 3 равны $L/2$, а длины отрезков 4 – 5 и 5 – 3 равны между собой). Кривая 6 \rightarrow 7 показывает изменение $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при переходе через биссектрису [длины отрезков 1 – 6 и 1 – 7 равны $L/5$].

Формы всех этих кривых схожи, и, в общем, напоминают соответствующую кривую для изотропной двумерной системы. А именно, коррелятор сначала быстро растет с ростом $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, после чего рост быстро замедляется. В то же время, однако есть явные различия между кривыми - как количественные, так и качественные. Во-первых, видно, что на началь-

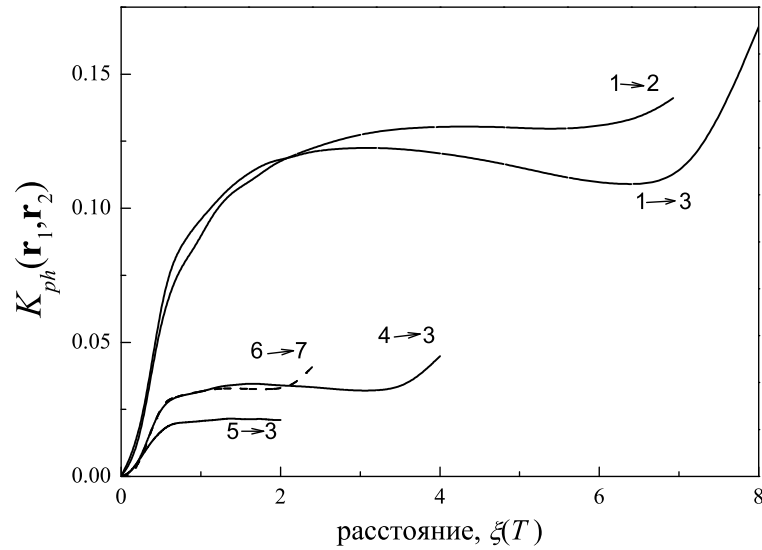


Рис. 3.14. Зависимость корреляционной функции $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ от $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ вдоль разных траекторий в треугольной структуре ниже T_c .

ном этапе быстрого роста расфазировка вдоль траекторий, начинающихся из угла, намного сильнее (в несколько раз). Это хорошо согласуется с нашим первоначальным предположением об усилении флуктуаций в углах. Таким образом, это предположение оправдывается. Во-вторых, $K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль траектории $1 \rightarrow 2$ начинает снова резко расти по мере приближения к другому углу, тогда как для остальных траекторий это повторное увеличение коррелятора выражено не так сильно. Эта особенность говорит о потере когерентности между параметром порядка в разных углах наноструктуры, что опять же подтверждает нашу гипотезу. Для использованных здесь значений параметров видно, что максимальное $\sqrt{K_{ph}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)}$ - около 0,4, что подразумевает весьма существенное ослабление когерентности между разными углами.

Рис. 3.15 показывает коррелятор плотность-плотность $K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль трех траекторий: $1 \rightarrow 2$, $4 \rightarrow 3$ и $5 \rightarrow 3$. Снова видим, что корреляционная функция в углу ($1 \rightarrow 2$) - намного больше, чем во внутренней области ($4 \rightarrow 3$ и $5 \rightarrow 3$). Это означает, что не только фаза параметра по-

рядка, но и плотность сверхпроводящих электронов флуктуирует сильнее в углах наноструктуры. Также интересно отметить, что, как показывает сравнение $K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль траекторий $4 \rightarrow 3$ and $5 \rightarrow 3$, флуктуации немного усилены также вдоль всей поверхности островка.

Интенсивность температурных флуктуаций в заданной точке может быть охарактеризована через коррелятор плотность-плотность $K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ с $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim \xi(T)$, усредненный при всех таких значениях \mathbf{r}_2 [139, 141]. Таким образом можно установить характерные размеры области с усиленными флуктуациями. Как и следовало ожидать, она составляет несколько величин $\xi(T)$.

Для иллюстрации полученных результатов построим "фазовую диаграмму" треугольной наноструктуры с размером стороны $15\xi(0)$ и толщиной $d = 5$ нм. Возьмем траекторию $1 \rightarrow 3$ вдоль биссектрисы и для каждой точки \mathbf{r} на этой линии вычислим величину $\sqrt{K_{den}(\mathbf{r}, \mathbf{r})}$, которая определяет флуктуацию плотности сверхпроводящих электронов. Будем использовать следующий качественный критерий: если эта величина при определенной

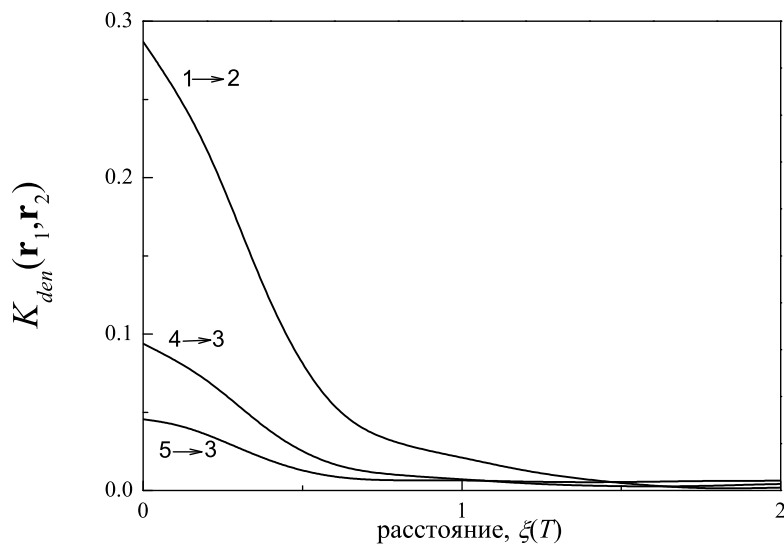


Рис. 3.15. Зависимость корреляционной функции $K_{den}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ от $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ вдоль разных траекторий ниже T_c .

температуре превышает 0,15, значит реализуется флуктуационный режим. Результаты для кроссовера между низкотемпературным и флуктуационным режимами представлены на Рис. 3.16 в плоскости “расстояние вдоль траектории $1 \rightarrow 3$ и $1 - T/T_c$ ”. Действительно можно видеть, что характерная температура кроссовера в углах сильно зависит от координаты. Конечно, переход между двумя режимами не является резким. Предложенная картина является качественной и представлена для чисто иллюстративных целей.

Температура выше T_c . – Корреляционная функция для параметра порядка $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ выше T_c была определена в (3.117). Она должна уменьшаться [139] с увеличением $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$. Результаты вычислений для $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ вдоль разных траекторий изображены на Рис. 3.17 для $T = 1,25T_c$ и $L = 8$ (в единицах $\xi(T)$). Коррелятор для удобства нормирован на свое значение $K(\mathbf{r}, \mathbf{r})$ в точке 5, которая расположена по центру наноструктуры (“объем”). Можно убедиться в быстром убывании $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ с увеличением $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$, но снова коррелятор вдоль траектории, начинающейся из угла ($1 \rightarrow 2$), существенно отличается от соответствующей величины для внутренней области

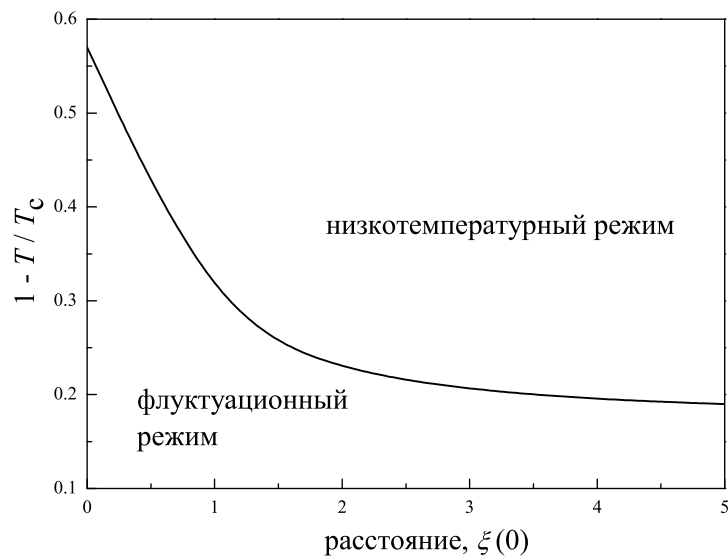


Рис. 3.16. Диаграмма состояний треугольной структуры ниже T_c .

наноструктуры. А именно, среднее плотность сверхпроводящих электронов, индуцированных температурными флуктуациями, намного больше в углах наноструктуры. Опять же, флуктуации вблизи поверхности усилены (ср. $4 \rightarrow 3$ и $5 \rightarrow 3$). Ширина флуктуационной области в углах и в этот раз составляет несколько величин $\xi(T)$.

Сравнение результатов для корреляционных функций ниже и выше T_c показывает, что сверхпроводимость давится ниже T_c , начиная с углов, а выше T_c она наоборот возникает в углах. Однако тут нет противоречия, поскольку при подходе к T_c длина когерентности расходится, так что вблизи перехода наноструктура находится в квазиульмерном режиме, так что параметр порядка в пространстве не меняется. Иными словами, флуктуационная область при подходе к T_c расширяется с углов на всю систему, а при отходе от T_c локализуется в углах. При этом, конечно, размер наноструктуры должен быть гораздо больше $\xi(0)$ для того, чтоб эффект возникал.

Подчеркнем, что усиления флуктуаций можно ожидать в образцах различной формы и размеров, а не только в треугольных островках. Общая

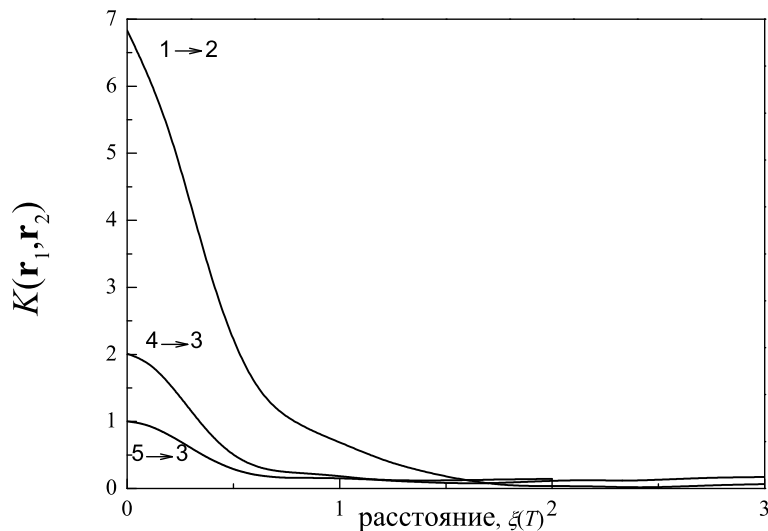


Рис. 3.17. Коррелятор $K(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, как функция $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ вдоль разных траекторий, выше T_c .

тенденция здесь понятна – чем острее угол, тем сильнее в нем будут флуктуации. Данный вывод важен и для приложений, в которых используются малоразмерные тонкопленочные элементы из сверхпроводников. Для избежания флуктуаций в таких системах необходимо стараться делать их без острых углов. Особенно существенно это обстоятельство для современных высокочувствительных фотодетекторов на основе систем сверхпроводящих наноостровков, соединенных контактами в сеть, которые уже используются на коммерческой основе. Как считается, именно флуктуации параметра порядка ответственны за ложные срабатывания подобных фотодетекторов.

3.6. Проникновение вихря в конденсат в ловушке: роль пар “вихрь-антивихрь”

3.6.1. Вводные замечания

Одной из наиболее интересных проблем физики топологических дефектов в конденсатах Бозе-Эйнштейна атомов щелочных металлов является вопрос о входе вихрей во вращающийся конденсат. Данному вопросу было посвящено большое количество экспериментальных и теоретических работ (см, например, [160–163] и [164–173], соответственно). Входу вихря препятствует барьер, схожий с поверхностным барьером в сверхпроводниках, который изучался в параграфе 3.3 диссертационной работы. Несмотря на сходства, между этими двумя случаями есть и различия. Так, например, во вращающемся конденсате отсутствует хорошо выраженная поверхность.

Проникновение вихря теоретически исследовалось с помощью нескольких подходов. Один из наиболее популярных - это исследование стабильности безвихревого состояния с аксиально-симметричным распределением атомов по отношению к возмущениям параметра порядка ψ [125, 168, 169, 172]. В рамках этого подхода было получено, что безвихревое состояние становится неустойчивым по отношению к так называемым

поверхностным модам, которые приводят к хорошо известной неустойчивости Ландау. Однако, строго говоря, из такого линейного анализа сложно понять, содержит ли окончательное состояние, к которому приходит система после неустойчивости, вихри, либо же она оказывается возмущенной каким-то иным способом – например, через периодические в пространстве модуляции поверхности.

Второй подход заключается в использовании лондонской модели или каких-то ее модификаций; вихри рассматриваются в виде точечных объектов [166, 170, 171]. В этом случае, вводилась граница Томаса-Ферми, на которой ψ становится равным нулю. Используя эти приближения, можно вычислить критическую угловую скорость вращения конденсата, при которой подавляется барьер, препятствующий входу вихрей в систему через границу Томаса-Ферми. Однако можно заметить, что в реальности не существует резкой границы, на которой ψ в точности равно нулю. Поэтому представляется проблематичным адекватно описать процесс зарождения вихря в рамках такой модели. Согласно [170, 171], поверхностный барьер разрушается при частотах вращения, не превышающих частоту неустойчивости Ландау.

Третий подход к решению задачи заключается в использовании численных методов интегрирования временного уравнения Гросса-Питаевского [165, 167, 173, 174]. Здесь тоже имеются некоторое разногласие результатов. Так, в [174] было получено, что вход вихря вообще невозможен без введения в уравнение Гросса-Питаевского дополнительного затухания. Вычисления [167] указывают на то, что затухание не является необходимым, но вход вихря происходит при частотах, значительно превышающих критическую частоту Ландау для поверхностных мод.

Подчеркнем, что экспериментальные результаты [160–163] для критической частоты формирования вихря также несколько отличаются друг от друга. Этот факт обсуждается в [171], где автором аргументировалось, что

в эксперименте [160] вихри появляются при критической частоте Ландау, а неудачи пронаблюдать их появление при таких низких частотах в остальных экспериментах были вызваны тем фактом, что время возникновения вихря оказывалось слишком длительным.

Целью исследования, представленного в данном параграфе диссертационной работы, является дальнейшее и более глубокое изучение процесса формирования вихря в конденсате с помощью ранее не применявшегося для этой цели метода, а также прояснение роли поверхностных мод. В особенности, будут затронуты два вопроса:

- Где именно и как именно образуются вихри?
- Каково значение критической частоты формирования вихря?

3.6.2. Модель

Рассмотрим длинное сигарообразное облако разреженного газа. Будем считать вихри прямыми линиями. Таким образом, задача эффективно двумерна. Функционал Гросса-Питаевского для энергии системы в безразмерном виде может быть представлен, как

$$F = \int r dr \int d\varphi \left(\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + \frac{r^2}{2} |\psi|^2 + \frac{2\pi p}{N} |\psi|^4 - i\omega\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \right), \quad (3.118)$$

где интегрирование проводится по площади системы; (r, φ) – полярные координаты, N – количество атомов в облаке, ω – частота вращения, $p = an_z$ – газовый параметр, a и n_z – длина рассеяния и концентрация атомов вдоль оси облака, соответственно. Условие нормировки для параметра порядка имеет вид $\int r dr \int d\varphi |\psi|^2 = N$.

Далее для параметра порядка будет использоваться тот же общий подход, который применялся нами ранее для сверхпроводников малых размеров, содержащих вихри. В общем случае, ψ может быть разложен

$$\psi(r, \varphi) = \sum_l f_l(r) \exp(-il\varphi). \quad (3.119)$$

В пределе невзаимодействующего газа ($p = 0$) легко получить, подставляя (3.119) в уравнение Гросса-Питаевского, что каждая функция $f_l(r)$ совпадает с собственной функцией гармонического осциллятора для углового момента l . Эти функции имеют гауссов профиль $\sim r^l \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)$. Поэтому можно считать, что гауссов характер распределения приближенно сохраняется в случае слабо взаимодействующих частиц. Точность может быть улучшена, если ввести вариационный параметр R_l , характеризующий пространственное уширение $f_l(r)$. Окончательно, наша пробная функция для $f_l(r)$ имеет вид:

$$f_l(r) = C_l \left(\frac{r}{R_l}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{2R_l^2} - i\phi_l\right), \quad (3.120)$$

где C_l , R_l и ϕ_l могут быть получены из условия минимума (3.118), а C_l вещественно. Этот подход для случая конденсата атомов щелочных металлов использовался впервые в [177] (см. также [178]). В данной работе мы ограничимся величинами газового параметра $0 < p < 10$, поскольку, согласно нашим оценкам, гауссово приближение перестает адекватно работать при больших p . Для подтверждения точности мы сравнивали известные численные результаты для термодинамической критической частоты вращения с найденными этим методом значениями.

Теперь подставим (3.119), (3.120) в (3.118) и, проинтегрировав, получим

$$\begin{aligned} F = & \sum_l \alpha_l C_l^2 + \sum_l I_{llll} C_l^4 + 4 \sum_{l>k} I_{llkk} C_l^2 C_k^2 \\ & + 4 \sum_{l>k>m} I_{lkkm} C_l C_k^2 C_m \delta_{l+m,2k} \cos(\phi_l + \phi_m - 2\phi_k) \\ & + 8 \sum_{l>k>m>n} I_{lkmn} C_l C_k C_m C_n \delta_{l+k,m+n} \cos(\phi_l + \phi_k - \phi_m - \phi_n), \quad (3.121) \end{aligned}$$

где

$$\alpha_l = \frac{\pi}{2} \Gamma(l+2) (1 + R_l^4) - \pi R_l^2 \Gamma(l+1) \omega l, \quad (3.122)$$

$$I_{lkmn} = \frac{2\pi^2 p}{N} \Gamma\left(\frac{l+m+n+k}{2} + 1\right) R_{lkmn}^2$$

$$\times \left(\frac{R_{lkmn}}{R_l} \right)^l \left(\frac{R_{lkmn}}{R_k} \right)^k \left(\frac{R_{lkmn}}{R_m} \right)^m \left(\frac{R_{lkmn}}{R_n} \right)^n, \quad (3.123)$$

$$R_{lkmn} = \sqrt{2} \left(R_l^{-2} + R_k^{-2} + R_m^{-2} + R_n^{-2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.124)$$

где $\Gamma(l)$ – гамма-функция. Условие нормировки теперь принимает вид

$$\pi \sum_l C_l^2 R_l^2 \Gamma(l+1) = N. \quad (3.125)$$

Значения параметров R_l , C_l и ϕ_l могут быть найдены из минимума энергии (3.121) при учете (3.125). Например, для безвихревого состояния $C_0 = \sqrt{N/\pi R_0^2}$, $R_0 = (1+2p)^{1/4}$, и $C_l = 0$ при $l \geq 1$.

В окрестности локального минимума отклонения энергии от наименьшего значения могут быть представлены в виде

$$\Delta F = \sum_{lk} A_{lk} \Delta C_l \Delta C_k, \quad (3.126)$$

где ΔC_l – отклонение C_l от равновесного значения. В (3.126) сохранены слагаемые до второго порядка по ΔC_l . Критерий устойчивости решения состоит в том, что все главные миноры матрицы $\|A_{lk}\|$ должны быть положительны.

3.6.3. Устойчивость безвихревого состояния

Сначала исследуем безвихревое состояние на устойчивость, а затем выйдем за пределы линейного анализа. Рассмотрим ситуацию, когда система начинает раскручиваться квазистатически. Для аксиально-симметричного состояния без вихря матрица $\|A_{lk}\|$ диагональна. Тогда несложно найти ω , при которой это состояние становится неустойчивым по отношению к поверхностной моде с угловым моментом l :

$$\omega_{inst}(l, p) = \frac{2}{l\Gamma(l+1)} \left[\frac{(l-1)\Gamma(l+1)}{\sqrt{1+2p}} + \frac{1}{4} \left[\frac{1+R_l^4}{R_l^2} \right] \Gamma(l+2) + \frac{4(1+2p)^{n/2}\Gamma(l+1)}{(\sqrt{1+2p}+R_l^2)^{n+1}} \right]. \quad (3.127)$$

Величина R_l может быть найдена из условия минимума $\omega_{inst}(l, p)$ по R_l . На Рис. 3.18 представлены зависимости $\omega_{inst}(l, p)$ от p для разных l . Фактическая функция $\omega_{inst}(p)$ определяется минимальным значением $\omega_{inst}(l, p)$ по дискретной величине l . Эта функция показана на Рис. 3.18 (б), она соответствует хорошо известному критерию Ландау для переноса углового момента в сверхтекучую систему. Из Рис. 3.18 б можно видеть, что значение l_{inst} , приводящее к неустойчивости, увеличивается с ростом газового параметра p . Интересно, что безвихревая фаза всегда устойчива по отношению к появлению гармоники с $l = 1$. При малых p неустойчивость по отношению к гармонике $l = 3$ имеет место быть при меньших ω , чем для $l = 2$. На Рис. 3.18 (б) также представлена термодинамическая критическая частота вращения как функция p , которая вычислялась сравнением энергий безвихревого и одновихревого состояний. Как и ожидалось, эта частота оказывается существенно ниже, чем ω_{inst} .

3.6.4. Зарождение вихрей

Теперь выйдем за пределы линейного анализа. Основная идея заключается в том, чтоб представить ψ в окрестности точки неустойчивости в виде суперпозиции гармоник с $l = 0$ и $l = l_{inst}$. Далее энергия системы вычисляется в таком приближении двух гармоник при значениях ω , немного превышающих ω_{inst} . При каждом ω мы также исследуем стабильность полученного приближенного решения по отношению к возникновению других гармоник с разными l . Несмотря на приближенный характер этого метода, представляется, что с его помощью можно уловить основные особенности процесса возникновения вихря.

Сначала рассмотрим самый простой случай $l_{inst} = 3$. В точке неустойчивости появляется примесь гармоники с $l = 3$. Поверхностная мода приводит к модуляции $|\psi|$ в азимутальном направлении; всего появляются три

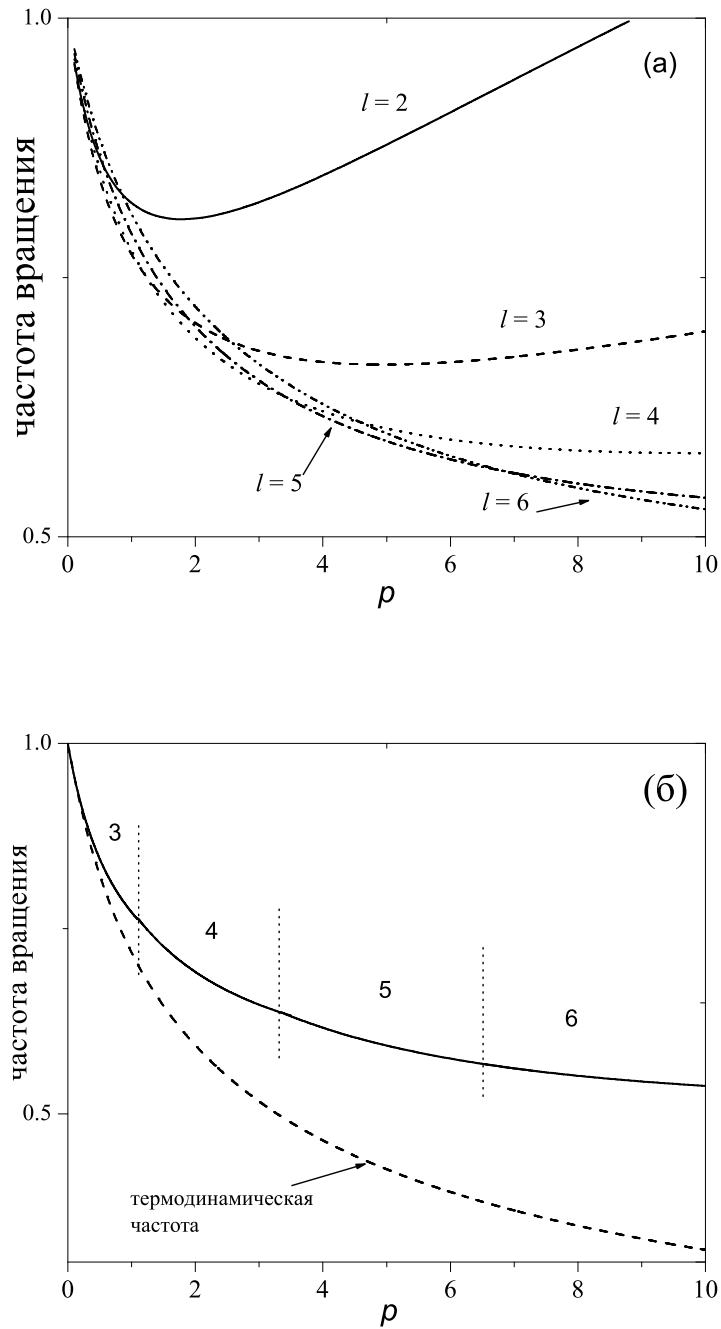


Рис. 3.18. Рис. (а) – Зависимость частот вращения $\omega_{inst}(l)$, при которых аксиально-симметричное безвихревое состояние становится нестабильным, от газового параметра ρ при разных значениях квантованного углового момента l . Рис. (б) – Минимальная частота, приводящая к нестабильности $\omega_{inst}(l)$. Точечные линии разделяют участки, соответствующие разным значениям l_{inst} . Пунктирная линия соответствует термодинамической критической частоте вращения.

горба и три впадины. На Рис. 3.19 показана эволюция $|\psi|$ вдалике от центра системы вдоль одного из трех направлений, где $|\psi|$ минимален, при $p = 1$. Вначале $|\psi|$ в этом направлении является монотонной функцией r . С увеличением ω появляется локальный минимум на зависимости $\psi(r)$, как показано на Рис. 3.19 а. Этот минимум становится глубже и глубже, пока $|\psi|$ не продавливается до нуля в некоторой точке, см. Рис. 3.19 (б). Если продолжить раскручивать систему, минимум распадется на пару “вихрь-антивихрь”, см. Рис. 3.19 (в). Дальнейшее увеличение ω сопровождается смещением вихря в центр облака, а антивихря - в противоположном направлении. Этот же процесс происходит и вдоль двух других направлений. В результате, в системе появляются три вихря, которые проникают во внутреннюю часть облака симметрично, тогда как антивихри уходят далеко от центра облака, но, вообще говоря, не исчезают.

Заметим, что область значений ω между точкой неустойчивости и вихревым состоянием оказывается весьма узкой, порядка 10^{-3} запирающей частоты. Это служит подтверждением сценария [170, 171].

Аналогичный сценарий реализуется при значениях p , соответствующих $l_{inst} = 5$. В этом случае, пять вихрей проникают во внутреннюю часть облака, а пять антивихрей удаляются в обратных направлениях. Иными словами, поверхностные моды вызывают модуляцию параметра порядка, а затем минимумы естественным образом распадаются на пары "вихрь-антивихрь".

Однако, когда l_{inst} четно, $l_{inst} = 4$ или 6 , ситуация несколько меняется. Сначала $|\psi|$ становится модулированным в азимутальном направлении, а с увеличением ω минимумы ψ становятся все более и более выраженными, в точности как в случае нечетных l_{inst} . Но как раз перед формированием вихрей это состояние внезапно становится нестабильным по отношению к возникновению гармоники с $l = l_{inst}/2$. Стационарное состояние после этой неустойчивости соответствует локальному минимуму энергии с ψ , задавае-

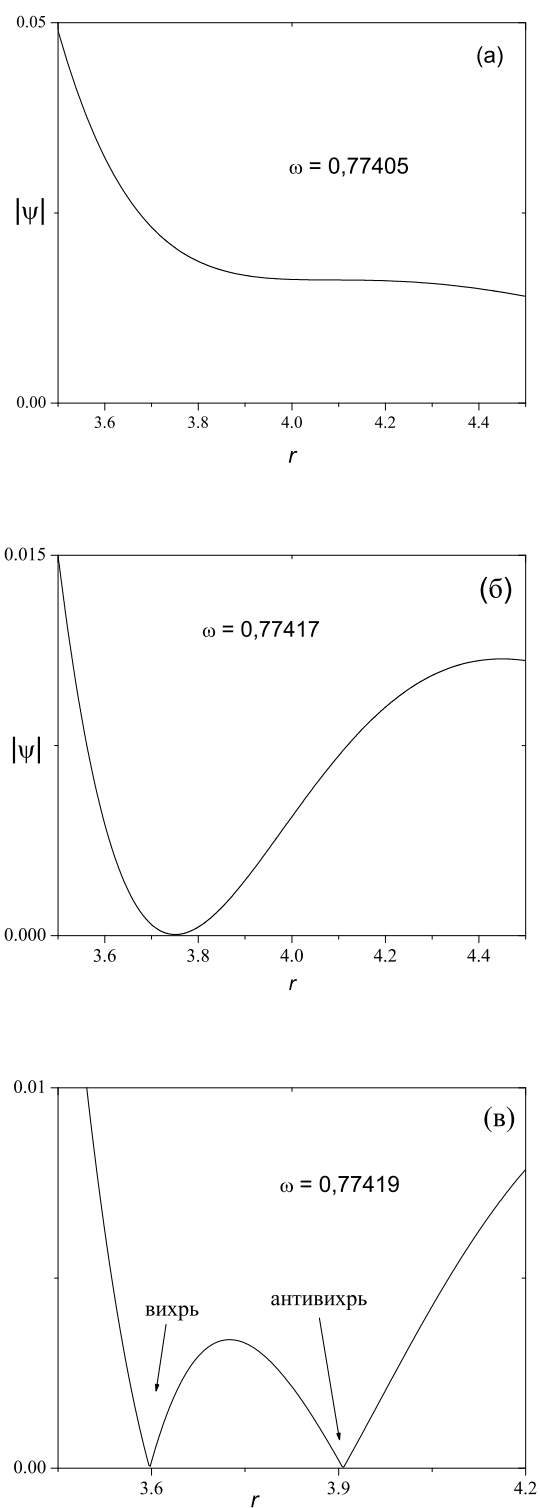


Рис. 3.19. Эволюция модуля параметра порядка в окрестности точки, где возникает пара “вихрь-антивихрь”. Число частиц – 10000, $p = 1$.

мым суперпозицией гармоник $l = 0$, $l_{inst}/2$ и l_{inst} . При $1 \lesssim p \lesssim 1,5$ ($l_{inst} = 4$) это состояние тоже неустойчиво по отношению к возникновению гармоники с $l = 1$. Это означает, что конечное состояние содержит один вихрь в центре облака. Таким образом, получается, что для четных l_{inst} , не все минимумы ψ трансформируются в пары “вихрь-антивихрь”. Число этих пар равно 3 для $l_{inst} = 6$ и 1 или 2 для $l_{inst} = 4$ в зависимости от p . Можно сказать, что роль поверхностных мод состоит в упрощении входа одного или большего количества вихрей во внутреннюю часть облака. Здесь нетрудно усмотреть явную аналогию со случаем проникновения вихря в сверхпроводящий на-ноостровок, рассмотренным в параграфе 3.3, где в то же время у системы имелась четкая граница, и поэтому антивихрь не возникал.

Аналогичный механизм был выявлен в работе Питаевского с соавторами [166] для случая конденсата атомов щелочных металлов для конкретной квадрупольной моды, $l = 2$, которая упрощала проникновение единственного вихря. Антивихри в этой работе также не фигурировали, поскольку в рассмотрение вводилась граница Томаса-Ферми. Наш результат показывает, что проникновение вихрей связано с разными поверхностными модами в зависимости от p . После каскада нестабильностей, в которых появляются различные гармоники параметра порядка, в систему могут войти сразу несколько вихрей, а не обязательно лишь один. В нашем подходе, барьер, препятствующий возникновению вихрей, подавляется при критических частотах, лишь слабо превышающих частоту Ландау для поверхностных мод. Таким образом, этот подход поддерживает результаты Англина [170, 171], которые были получены при использовании совершенно иного метода - гидродинамического подхода, в котором учитывается пространственное изменение параметра порядка в поверхностном слое Томаса-Ферми.

Механизм появления вихрей через пары “вихрь-антивихрь” представляется типичной особенностью систем, в которых нет четко выраженной границы. В случае трехмерной системы роль таких пар должны выполнять

вихревые кольца, раздувающиеся с периферийных областей системы. Действительно, изогнутые вихревые линии были обнаружены в трехмерных численных симуляциях [179], хотя размер соответствующих областей был слишком маленьким для получения "антивихревой" части кольца.

Другое интересное следствие - это равенство нулю полного топологического заряда системы. Это означает, что для любой стабильной конфигурации вихрей во внутренней части облака имеется соответствующая ей конфигурация антивихрей вдали от центра, где плотность частиц мала. Заметим, что нечто подобное наблюдалось в некоторых численных симуляциях [173, 174]. А именно, вдалеке от центра облака обнаруживались странные топологические дефекты, которые авторами этих работ были названы "вихрями-привидениями"(ghost vortices).

Интересно, что в литературе уже были выявлены случаи, когда в системах энергетически выгодно появление антивихрей в областях с пониженным параметром порядка. Так, в работах [157, 175] рассматривалось вихревое состояние в треугольных и квадратных сверхпроводящих островках. Было показано, что из-за симметрии системы посередине островка может возникать антивихрь. В работе Мельникова [176] с соавторами речь шла о депиннинге вихря с колоннообразного дефекта, при котором также образуется добавочный антивихрь. Таким образом, можно констатировать, что здесь мы сталкиваемся с рядом схожих явлений в сверхпроводящих и сверхтекучих системах.

3.7. Температурное плавление вихревых кластеров в конденсатах

3.7.1. Вводные замечания

Некоторое время назад в литературе был рассмотрен вопрос о возможности перехода Березинского-Костерлица-Таулесса (БКТ), сопровожда-

ющего возникновением пар “вихрь-антивихрь”, в квазидвумерных облаках конденсатов атомов щелочных металлов [180–182]. Был сделан вывод о том, что этот переход может происходить в экспериментально доступной области основных параметров системы. Так, согласно [181], переход БКТ может произойти при $T \approx 0,5T_c$ и числе частиц $N \sim 10^3 \div 10^4$. Вскоре предсказания были подтверждены экспериментально [183].

Эти результаты подчеркивают важность температурных эффектов в квазидвумерных конденсатах даже при температурах существенно более низких, чем T_c – и это при том, что T_c весьма низка. В то же самое время, влияние температурных флуктуаций на вихревое состояние таких конденсатов в литературе не исследовалось, хотя из общих соображений ясно, что соответствующие эффекты должны проявляться при еще более низких температурах, чем температура перехода БКТ. Здесь можно упомянуть лишь работу [184], которая однако относится к режиму сильных флуктуаций в относительно высоких температурах, которые полностью разрушают порядок в расположении вихрей.

В конечных системах флуктуации положений вихрей зависят еще и от количества вихрей в системе. Конечно, в таких системах температура плавления не является строго определенной величиной. Однако типичная температура разупорядочивания может быть введена с использованием критерия Линдемманна, см., например, обсуждение в [185]. В системах с переходным к макроскопическому количеству вихрей флуктуации положений вихрей можно описывать с помощью теории упругости и так называемых мод Ткаченко [186]. В то же время, когда число вихрей становится небольшим, эффекты квантования этого числа начинают играть очень важную роль, и температуры “плавления” в этом случае могут оказываться значительно ниже, чем в больших системах.

В литературе до этого уже исследовались температурные флуктуации систем взаимодействующих *точечных* частиц, помещенных во внешний за-

пирающий потенциал (см., например, [185, 187–190]). При этом преимущественно использовался метод Монте-Карло. Из литературы известно, что если в системе содержится небольшое число таких частиц, они выстраиваются в кластер, состоящий из отдельных оболочек. Как было показано Лозовиком с соавторами [187, 188], с увеличением температуры сначала теряется порядок в расположении этих оболочек друг относительно друга, так что они расцепляются. Требуется снова существенно повысить температуру, чтобы произошло теперь уже радиальное разупорядочивание кластеров. В результате возникает иерархия температур “плавления”, которые исключительно сильно зависят от симметрии кластера и количества частиц в нем.

В данном параграфе мы исследуем разупорядочивание небольших вихревых кластеров в конденсатах атомов щелочных металлов в квазидвумерной геометрии. Будут рассмотрены лишь кластеры, состоящие из двух оболочек. Вихри в таких кластерах нельзя считать точечными частицами, поскольку размер сердцевин вихря оказывается сопоставимым с размерами всей системы и примерно соответствует среднему расстоянию между самими вихрями в кластере. Поэтому возникает вопрос, сохранится ли столь сильная зависимость температуры разупорядочивания оболочек для таких “размазанных” объектов? Кроме того, важно понять, насколько велики температуры разупорядочивания, и можно ли достичь соответствующих параметров в современных экспериментах с конденсатами.

3.7.2. Модель

Рассмотрим квазидвумерный конденсат с N частицами в гармоническом потенциале. Система вращается с угловой частотой ω . Будем рассматривать лишь температуры, которые существенно ниже T_c . Энергию системы можно записать в прежнем виде (3.118). Будем анализировать случай разреженного газа. Для определенности результаты будут представлены для

случая $p = 5$. Рассмотрение проведем для разных значений N , но при фиксированной константе g . Такое рассмотрение имеет смысл, поскольку в случае единичного облака в виде блина, можно всегда подстроить запирающую частоту в поперечном направлении, сохраняя значение p . В случае облака в одномерной оптической решетке, можно менять длину волны лазера, создающего потенциал. Для того, чтоб не выйти из квазидвумерного режима, следует также подстроить ω_{\perp} , а потому и скорость вращения, чтобы держать безразмерную величину ω постоянной. В реальных конденсатах a составляет несколько нанометров. Наиболее реалистическое значение N для такого p – порядка 10^3 . Для иллюстрации эффекта смены N будут рассматриваться значения от 10^2 до 10^4 .

Для критической температуры имеем

$$\frac{\hbar\omega_{\perp}}{kT_c} = \sqrt{\frac{\zeta(2)}{N}}, \quad (3.128)$$

где $\sqrt{\zeta(2)} \approx 1,28$. Выражение (3.128) применимо и в случае взаимодействующих частиц [191].

3.7.3. Основное состояние

Здесь мы снова сталкиваемся с ситуацией, когда лондоновское приближение нельзя применять из-за того, что размеры сердцевин вихря сопоставимы с расстояниями между вихрями и даже размерами всей системы. Удобно опять воспользоваться разложением параметра порядка по гармоникам (3.119) с соответствующим выбором пробных функций (3.120).

Обозначим количество вихрей в системе как ν . Если распределение плотности частиц имеет кратную q симметрию в азимутальном направлении, тогда только слагаемые со значениями l , делящимися без остатка на q , выживают в разложении параметра порядка. Например, вихревой кластер, состоящий из единственной оболочки из ν вихрей соответствует разложению с $l = 0, \nu, 2\nu, 3\nu, \dots$ Двухоболочечный кластер с ν_1 и ν_2 вихрями в оболочках

($v_1 + v_2 = v$), где v_2 делится на v_1 , соответствует разложению с $l = 0, v_1, 2v_1, 3v_1, \dots$. Если v_2 не делится нацело на v_1 , тогда, вообще говоря, разложение содержит все гармоники. Обычно основной вклад в энергию дается всего несколькими из них, так что учитывая примерно десяток гармоник, можно найти энергию с хорошей точностью, при условии, что количество вихрей в системе не слишком велико, $v \lesssim 10 \div 20$.

3.7.4. Температурные флуктуации: гармоническое приближение

После нахождения значений вариационных параметров можно вычислить равновесные положения вихрей $\{r_0^{(j)}, \varphi_0^{(j)}\}$, $j = 1, \dots, v$, решая численно уравнение

$$\psi(r_0^{(j)}, \varphi_0^{(j)}, p_n^{(0)}) = 0, \quad (3.129)$$

где мы ввели обозначение $\{p_n\}$ для набора всех вариационных параметров (R_l, C_l и ϕ_l), а $\{p_n^{(0)}\}$ обозначает значения этих параметров в основном состоянии системы. Флуктуации p_n , которые представляют собой степени свободы системы в нашей модели, приводят к флуктуациям положений вихрей. Обозначим отклонения вариационных параметров от их равновесных значений, как δp_n , и выразим отклонения положений вихрей $\delta r^{(j)}$ и $\delta \varphi^{(j)}$ через отклонения параметров, используя линейное приближение. Возмущенные положения вихрей даются решениями уравнения

$$\psi(r_0^{(j)} + \delta r^{(j)}, \varphi_0^{(j)} + \delta \varphi^{(j)}, p_n^{(0)} + \delta p_n) = 0. \quad (3.130)$$

Окончательно отклонение положения вихря равно

$$\delta r^{(j)} = \frac{A_n^{(j)}}{D^{(j)}} \delta p_n, \quad (3.131)$$

$$\delta \varphi^{(j)} = \frac{B_n^{(j)}}{D^{(j)}} \delta p_n. \quad (3.132)$$

Здесь и далее повторяющиеся индексы суммируются; $A_n^{(j)}$, $B_n^{(j)}$ и $D^{(j)}$ равны

$$A_n^{(j)} = \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \right) \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \right) \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad (3.133)$$

$$B_n^{(j)} = \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \right) \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) - \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial p_n} \right) \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right), \quad (3.134)$$

$$D^{(j)} = \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right) - \text{Re} \left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \text{Im} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \right). \quad (3.135)$$

Все производные по p_n , r и φ в (3.133), (3.134), (3.135) берутся при значениях параметров $p_n = p_n^{(0)}$ для основного состояния и пространственных координатах для равновесного положения данного вихря $r = r_0^{(j)}$, $\varphi = \varphi_0^{(j)}$. Квадрат отклонения радиальной и угловой координаты двух вихрей, помеченных как j_1 и j_2 , относительно друг друга равен

$$\delta r_{(j_1 j_2)}^2 = G_{mn}^{(j_1 j_2)} \delta p_m \delta p_n, \quad (3.136)$$

$$\delta \varphi_{(j_1 j_2)}^2 = J_{mn}^{(j_1 j_2)} \delta p_m \delta p_n, \quad (3.137)$$

где

$$G_{mn}^{(j_1 j_2)} = \left(\frac{A_n^{(j_1)}}{D^{(j_1)}} - \frac{A_n^{(j_2)}}{D^{(j_2)}} \right) \left(\frac{A_m^{(j_1)}}{D^{(j_1)}} - \frac{A_m^{(j_2)}}{D^{(j_2)}} \right), \quad (3.138)$$

$$J_{mn}^{(j_1 j_2)} = \left(\frac{B_n^{(j_1)}}{D^{(j_1)}} - \frac{B_n^{(j_2)}}{D^{(j_2)}} \right) \left(\frac{B_m^{(j_1)}}{D^{(j_1)}} - \frac{B_m^{(j_2)}}{D^{(j_2)}} \right). \quad (3.139)$$

Аналогично можно выразить отклонения энергии от значения в основном состоянии, как квадратичную функцию отклонений вариационных параметров:

$$\delta F = E_{st} \delta p_s \delta p_t, \quad (3.140)$$

где

$$E_{st} = \frac{\partial^2 F}{\partial p_s \partial p_t}. \quad (3.141)$$

Здесь производные тоже берутся при $p_n = p_n^{(0)}$. Усредненные квадраты отклонений радиальных и полярных координат двух вихрей относительно друг друга, обусловленные температурными флуктуациями, равны

$$\langle \delta r_{(j_1 j_2)}^2 \rangle_T = \frac{\int d(\delta p) G_{mn}^{(j_1 j_2)} \delta p_m \delta p_n \exp(-\frac{1}{kT} E_{st} \delta p_s \delta p_t)}{\int d(\delta p) \exp(-\frac{1}{kT} E_{st} \delta p_s \delta p_t)}, \quad (3.142)$$

$$\langle \delta\varphi_{(j_1 j_2)}^2 \rangle_T = \frac{\int d(\delta p) J_{mn}^{(j_1 j_2)} \delta p_m \delta p_n \exp(-\frac{1}{kT} E_{st} \delta p_s \delta p_t)}{\int d(\delta p) \exp(-\frac{1}{kT} E_{st} \delta p_s \delta p_t)}. \quad (3.143)$$

В общем случае, интегралы в (3.142) и (3.143) не могут быть вычислены аналитически, поскольку матрица E_{st} не обязательно диагональна. Поэтому следует перейти к другому базису $\delta t = M \delta t$, где M - матрица, которая диагонализует квадратичную форму (3.140). Здесь и ниже будем использовать матричную запись для уравнений. Квадратичные формы (3.136), (3.137), (3.140) в новом базисе могут быть представлены в виде

$$\delta r_{(j_1 j_2)}^2 = (\delta t)^T P^{(j_1 j_2)} \delta t, \quad (3.144)$$

$$\delta\varphi_{(j_1 j_2)}^2 = (\delta t)^T R^{(j_1 j_2)} \delta t, \quad (3.145)$$

$$\delta F = (\delta t)^T Q \delta t, \quad (3.146)$$

где $Q = M^T E M$, $P^{(j_1 j_2)} = M^T G^{(j_1 j_2)} M$, $R^{(j_1 j_2)} = M^T J^{(j_1 j_2)} M$. Матрица Q должна быть диагональной, из этого условия можно найти матрицу M численно, а после вычислить $P^{(j_1 j_2)}$ и $R^{(j_1 j_2)}$. В новом базисе интегралы в (3.142) и (3.143) находятся аналитически, после чего получаем

$$\langle \delta r_{(j_1 j_2)}^2 \rangle_T = kT \frac{P_{nn}^{(j_1 j_2)}}{Q_{nn}}, \quad (3.147)$$

$$\langle \delta\varphi_{(j_1 j_2)}^2 \rangle_T = kT \frac{R_{nn}^{(j_1 j_2)}}{Q_{nn}}. \quad (3.148)$$

Как обычно, в рамках гармонического приближения, квадраты отклонений пропорциональны температуре.

Для вихревого кластера, состоящего из двух оболочек, также вводим величину $\Delta\varphi$, которая имеет значение среднего отклонения вихревых оболочек относительно друг друга. Ее можно задать как корень из квадрата смещений пар вихрей из разных оболочек, усредненного по всем возможным парам вихрей:

$$\Delta\varphi = \left[\frac{1}{v_1 v_2} \sum_{j_1, j_2} \langle \delta\varphi_{(j_1 j_2)}^2 \rangle_T \right]^{1/2}. \quad (3.149)$$

Теперь если мы учтем (3.148) и тот факт, что энергия в основном состоянии пропорциональна $\hbar\omega_{\perp}N$, получим следующее соотношение:

$$\Delta\varphi = \frac{t^{1/2}}{N^{1/4}}d(p, \omega). \quad (3.150)$$

где t - это безразмерная температура, $t = T/T_c$; функция $d(p, \omega)$ не зависит от температуры и числа частиц. Конечно, $d(p, \omega)$ также очень сильно зависит от симметрии вихревого кластера. Далее мы ее вычислим для некоторых значений p и ω , а также для разных конфигураций вихрей.

Отметим, что гармоническое приближение применимо, покуда отклонения положений вихрей гораздо меньше характерного расстояния между соседними вихрями. Температуру “плавления” определим из критерия Линдемманна.

3.7.5. Плавление оболочек вихревых кластеров

Если в системе содержится лишь небольшое число вихрей, они располагаются в оболочках, концентрически. В состоянии с одним вихрем, он занимает центр системы. Если число вихрей ν больше 1, но меньше 6, они располагаются в единственной оболочке. С увеличением числа вихрей один из них переходит в центр, а остальные по-прежнему располагаются в единственной оболочке [192]. В этих случаях, температурные флуктуации могут вести лишь к радиальному разупорядочиванию. Однако при дальнейшем увеличении числа вихрей они начинают занимать две оболочки. Например, в работе [177] было показано, что в состоянии с 10 вихрями два из них располагаются во внутренней оболочке, а остальные 8 - во внешней. Если еще увеличить число вихрей, их количество во внутренней оболочке будет расти.

Здесь мы рассмотрим процесс разупорядочивания оболочек в двухоболочечных кластерах, содержащих 10, 11, 12 и 13 вихрей. Выберем значение газового параметра $p = 5$, как уже упоминалось выше, а затем

найдем основное состояние системы. Было найдено, что состояние системы с такими кластерами является основным в окрестности точки $\omega = 0,9$. Так, основное состояние содержит кластеры с 10, 11, 12 и 13 вихрями при $\omega = 0,9, 0,91, 0,92, 0,94$, соответственно. В этих случаях, внутренние оболочки содержат $v_1 = 2, 3, 3$ и 4 вихря, а внешние - $v_2 = 8, 8, 9$ и 9 вихрей, соответственно. На Рис. (3.20) показано распределение плотностей частиц в этих состояниях. Теперь вычислим отклонения положений вихрей.

Используя разработанную выше технику, было показано, что при уве-

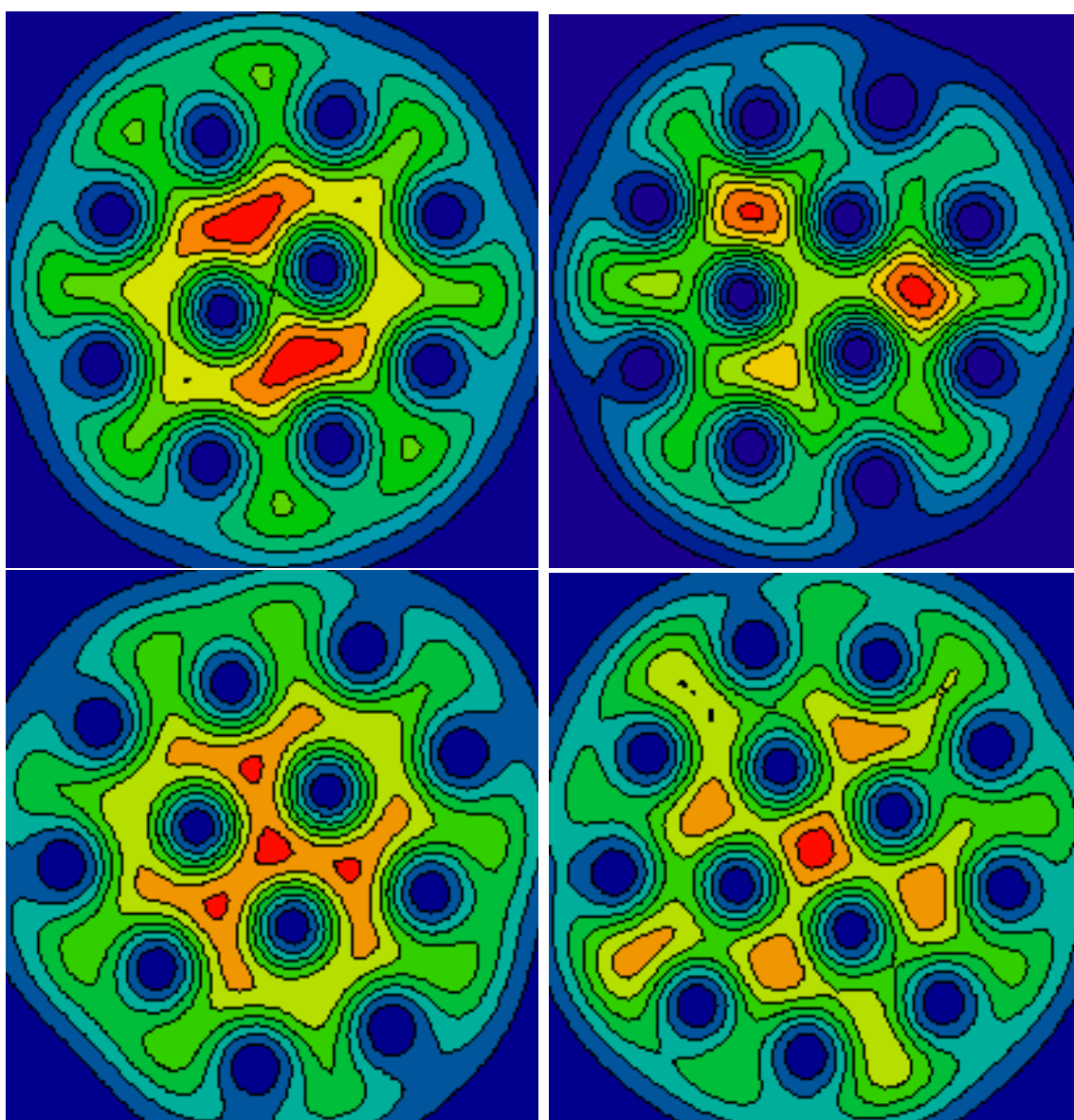


Рис. 3.20. Плотность частиц в состояниях с 10, 11, 12 и 13 вихрями. Темные участки соответствуют вихрям.

личении температуры от нуля сначала становятся существенными флуктуации разностей фаз ϕ_l разных гармоник параметра порядка, и отклонения положений вихрей практически полностью определяются флуктуациями фазы ϕ_l , а не флуктуациями C_l и R_l . Этот результат можно понять, вспомнив, что флуктуации фазы параметра порядка более выражены при низких температурах. Интересно, что флуктуации ϕ_l приводят преимущественно к азимутальному смещению вихрей, тогда как радиальные отклонения значительно слабее. Это и отражает тот факт, что температура межоболочечного “плавления” существенно ниже температуры радиального “плавления”. Определим температуру межоболочечного “плавления” t_{melt} как температуру, при которой $\Delta\varphi$ равно $\gamma \frac{360}{v_2}$, где $\gamma \sim 0,1$ характеристическое число из критерия Линдемманна:

$$t_{melt} = \left(\frac{360}{n_2 d(p, \omega)} \gamma \right)^2 \sqrt{N}. \quad (3.151)$$

Множитель $360/v_2$ в (3.151) отражает тот факт, что двухоболочечный кластер инвариантен относительно вращения оболочек друг относительно друга на угол $360/v_2$. Были вычислены значения d для кластеров с 10, 11, 12 и 13 вихрями. Получены следующие результаты: $d(p, \omega) \approx 608, 3500, 123$ и 810 , соответственно. Видно, что кластеры из 10 и 12 вихрей наиболее стабильны среди всех проанализированных случаев, так что средний угол отклонения оболочек относительно друг друга здесь наименьший. Это происходит из-за того, что количество вихрей во внешней оболочке v_2 делится на v_1 . Интуитивно также понятно, что стабильность кластера с v_2 делящимся на v_1 также зависит и от отношения v_2/v_1 , поскольку в пределе $v_2/v_1 \rightarrow 1$ каждому вихрю из внешней оболочки соответствует ровно один вихрь из оболочки внутренней. Вероятно, этим и объясняется тот факт, что кластер из 12 вихрей более стабилен, чем кластер из 10 вихрей. Видно также, что кластеры с 11 и 13 вихрями наиболее нестабильны. Связано это с несоизмеримостью v_2 и v_1 . Из (3.151) и наших оценок для $d(p, \omega)$ следует, что кластер с 12 вихрями

не разупорядочивается, оставаясь стабильным до $N \sim 10^3$ и $t \lesssim 0,1$, тогда как во всех остальных случаях угловое отклонение оболочек сопоставимо с углом между соседними вихрями во внешней оболочке, а потому оболочки можно считать расцепленными.

На Рис. 3.21 представлена зависимость температуры межоболочечного “плавления”, как функция числа частиц, в логарифмическом масштабе для разных вихревых кластеров при $t \leq 0,2$ и $10^2 \leq N \leq 10^4$. Эта температура была определена из (3.151) с $\gamma = 0,15$. Видно, что 12-вихревой кластер находится в упорядоченном состоянии почти при всех температурах $t \leq 0,1$. В то же время, кластеры с 10, 11 и 13 вихрями переходят в состояние с расцепленными оболочками при достаточно низких температурах.

Экспериментально “плавление” вихревых кластеров может исследоваться с помощью подстройки ω при фиксированных p и N . После получения требуемой вихревой конфигурации можно менять T , достигая таким образом области температур, соответствующих “плавлению”. Положения вихрей затем могут быть определены с помощью обычной техники свобод-

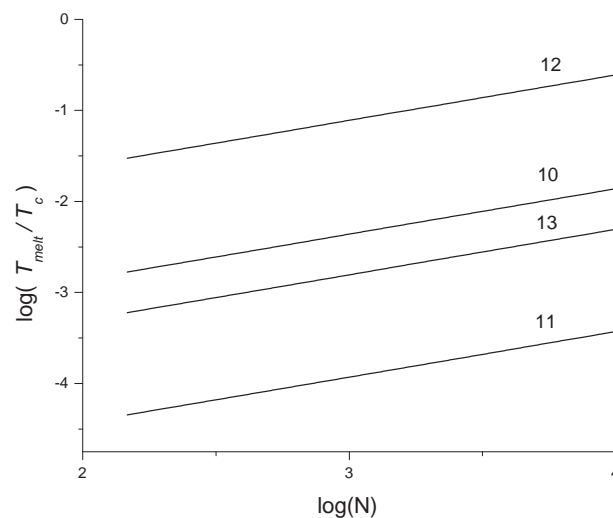


Рис. 3.21. Зависимость температуры межоболочечного разупорядочивания от числа частиц в системе для кластеров с 10, 11, 12, 13 вихрями при фиксированной константе связи $p = 5$ и $\omega = 0,9, 0,91, 0,92, 0,94$, соответственно.

ного расширения облака. После повторов этой процедуры можно набрать статистику и исследовать порядок в расположении вихрей. Для систем с гораздо большим количеством вихрей можно использовать также брэгговскую спектроскопию.

Отметим, что “плавление” вихревых кластеров должно наблюдаться и в сверхпроводящих островках, состоящих из нескольких моноатомных слоев, о которых шла речь в первых параграфах данной главы диссертационной работы. Межоболочечное плавление при этом должно проявляться при существенно более низких температурах, чем температуры, при которых происходит изменение количества вихрей за счет термоактивации. В этом случае, однако определенное влияние будет оказывать отклонение формы островка от дискообразной, что особенно важно, учитывая тенденцию к формированию островков гексагональной формы в процессе их роста. Может оказаться, что барьер для вращения оболочек вихрей друг относительно друга будет определяться скорее этим фактором, нежели одним взаимодействием оболочек друг с другом. Интересно, что подобная физика возникает и в экспериментах с конденсатами атомов. Ниже рассматривается один из примеров.

3.7.6. Вихри в ловушке с квадрупольной деформацией

Рассмотрим флуктуации вихревых кластеров в ловушке с дополнительным слабым искажением запирающего потенциала, имеющим квадрупольную структуру. Такие искажения потенциала запираения часто используются в экспериментах для облегчения процесса формирования вихря. Они аналогичны отклонениям формы сверхпроводящего островка от дискообразной. Квадрупольное искажение фактически приводит к появлению предпочтительного направления в расположении вихревого кластера. Этот до-

полнительный потенциал задается выражением

$$U_{quadr}(r) = \frac{\varepsilon m \omega_{\perp}^2 r^2 \cos 2\varphi}{2}, \quad (3.152)$$

где ε мало число, $\varepsilon \ll 1$. Дополнительный потенциал (3.152) приводит к следующему вкладу в энергию системы:

$$\frac{F_{quadr}}{\hbar \omega_{\perp} N} = 2\pi\varepsilon \sum_m c_m c_{m+2} \frac{R_{m+2}^{m+4} R_m^{m+6}}{(R_{m+2}^2 + R_m^2)^{m+3}} \times \Gamma(m+3) \cos(\phi_{m+2} - \phi_m). \quad (3.153)$$

Данный вклад связывает разницы фаз и амплитуды разных гармоник параметра порядка со значениями углового момента, отличающимися на 2 друг от друга. Мы здесь будем анализировать ситуацию, когда в ловушке содержатся 2, 3 или 4 вихря. Распределения плотностей атомов для этих состояний показаны на Рис. 3.22. Направление минимума потенциала запираания - вертикальное.

В случае слабых деформаций, $\varepsilon \lesssim 0, 1$, флуктуации разниц фаз между гармониками параметра порядка намного больше флуктуаций их амплитуд. Флуктуации разниц фаз ведут преимущественно к смещению вихрей в азимутальном направлении. В литературе соответствующие колебательные моды получили название “ножниц” (scissors modes) [193–196].

В пределе малых ε , можно рассматривать F_{quadr} в качестве возмущения энергии системы с $\varepsilon = 0$. Если в системе есть два вихря, невозмущенный параметр порядка содержит все гармоники с четными угловыми моментами, а основной вклад в энергию дается компонентами с $l = 0$ и 2. Амплитуды этих гармоник по порядку величины равны ε^0 , разницы фаз между ними фиксированы, а энергия вырождена по отношению к ϕ_2 , что отражает тот факт, что вихревая молекула может свободно вращаться. Квадрупольное возмущение связывает между собой ϕ_0 и ϕ_2 , ϕ_2 и ϕ_4 , ϕ_4 и ϕ_6 и т.д.. В результате, $F_{quadr} \sim \varepsilon^1$ и угол отклонения вихревой молекулы из-за температурных

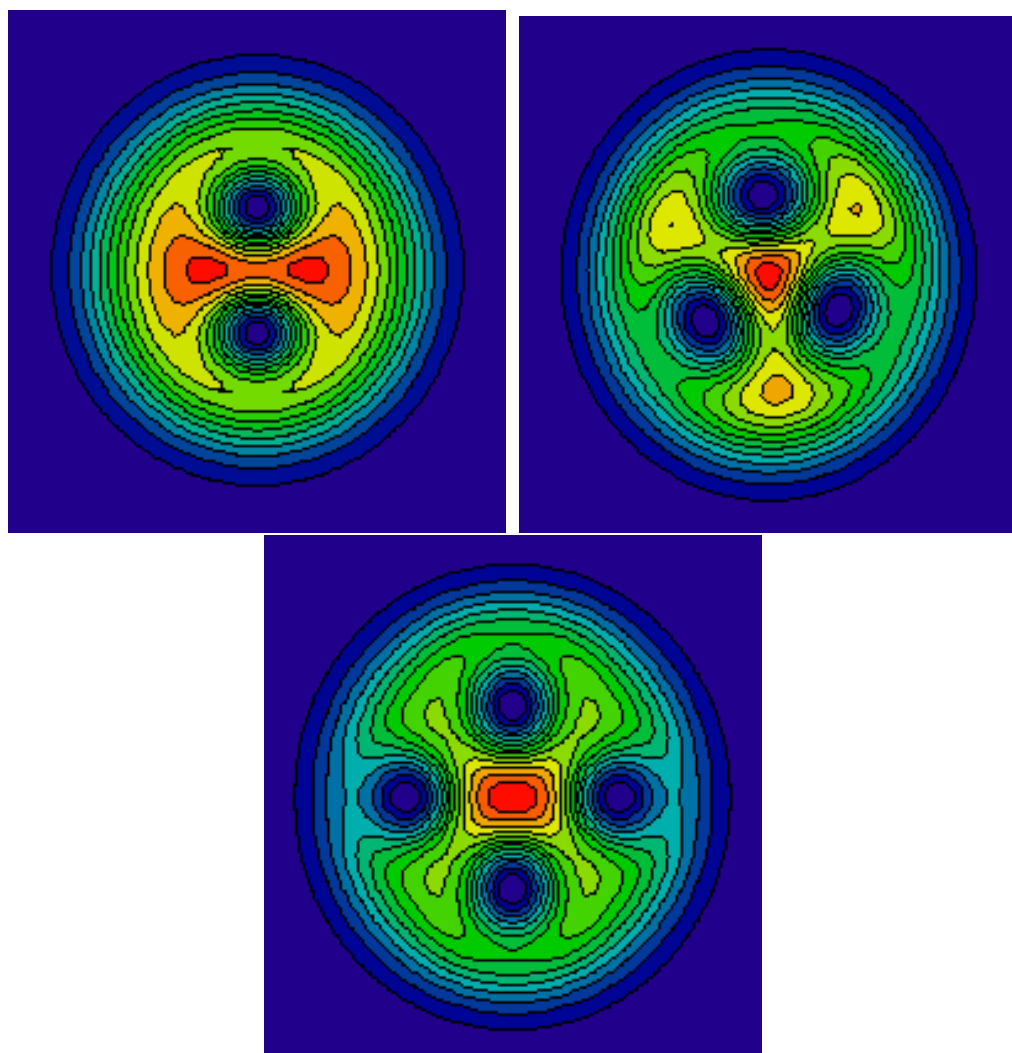


Рис. 3.22. Плотности частиц в состояниях с 2, 3 и 4 вихрями в ловушке с малой квадрупольной деформацией.

флуктуаций равен

$$\Delta\varphi = \frac{t^{1/2}}{\varepsilon^\tau N^{1/4}} d(g, \omega), \quad (3.154)$$

где $d(g, \omega)$ снова не зависит от t и N ; $\tau = 0.5$.

Если система содержит 4 вихря, тогда при $\varepsilon = 0$ параметр порядка содержит все гармоники с угловыми моментами, делящимися на 4. Однако эти гармоники нельзя теперь связать между собой через (3.153), поскольку их угловые моменты должны отличаться на 2, а не на 4. В этом случае, зацепление вихревой молекулы на квадрупольной деформации описывается следующим порядком по ε . А именно, возмущение индуцирует гармонику с $l = 2$, чья амплитуда по порядку величины равна ε^1 , и окончательно $F_{quadr} \sim \varepsilon^2$; так что мы снова приходим к (3.154), но с $\tau = 1$.

Теперь проанализируем ситуацию, когда в системе содержатся 3 вихря. Снова невозмущенный параметр порядка содержит все гармоники с угловыми моментами, делящимися на 3, а их фазы не связываются через (3.153). В следующем приближении по ε , квадрупольное искажение индуцирует другие гармоники со всеми целочисленными l , а их амплитуды имеют порядок ε^1 . Это возможно, поскольку любое целое l , не кратное 3, может быть представлено как $3l \pm 2$, то есть может быть получено путем прибавления или вычитания 2 из $3l$. Однако оказывается, что энергия даже в следующем порядке по ε снова вырождена, а вырождение снимается в следующем порядке по ε . В конце концов, $F_{quadr} \sim \varepsilon^3$ и (3.154) снова выполнено, но теперь с $\tau = 1,5$.

Видно, что симметрия вихревой конфигурации диктует асимптотическое поведение энергии пиннинга и среднего отклонения вихревой молекулы при $\varepsilon \rightarrow 0$. Кластер с двумя вихрями запиннигован сильнее всего, а кластер с тремя вихрями - наиболее слабо. Этот эффект отражает соизмеримость между угловым моментом квадрупольного искажения ($l = 2$) и той гармоники параметра порядка, которая ответственна за вихри в данной

конфигурации ($l = 2, 3, 4$). Интересно, что к этому выводу мы здесь пришли снова в рамках нашего представления параметра порядка в виде разложения, а не через координаты вихря. Более того, в данном случае эффекты соизмеримости между угловыми моментами выявляются наиболее ярко.

Рассчитаем $d(p, \omega)$ для кластеров с 2, 3 и 4 вихрями при $p = 5$ и $\omega = 0,68, 0,75$ и $0,78$, соответственно, где эти конфигурации энергетически выгодны. Результаты для этих состояний такие: $d(p, \omega) \approx 65, 130$ и 11 , соответственно. Если угол отклонения $\Delta\varphi$ становится по порядку величины сопоставимым с углом между двумя соседними вихрями в молекуле, $2\pi/\nu$, будем считать, что такой вихрь сорван с потенциала пиннинга. Используя (3.154), получаем диаграмму состояний в пространстве (t, ε, N) . Пример двумерного среза в плоскости $N-\varepsilon$ представлен на Рис. 3.23 для $t = 0, 1$. Каждая линия определяет границу между запиннигованным и депиннигованным кластерами. Сверху каждой такой линии кластер запиннигован, а ниже - свободен. Линия, соответствующая депиннингу кластера с 3 вихрями, на рисунке не показана, поскольку этот кластер уже отпиннигован в соответствующей области параметров. Из рисунка видно, что область стабильности для молекулы из двух вихрей существенно шире, чем в двух других случаях. Этот вывод снова подчеркивает важность эффектов соизмеримости.

Отметим, что разработанная здесь техника может быть использована и для учета влияния отклонения формы поверхности сверхпроводящего островка от формы идеального диска (например, гексагональная деформация в экспериментах группы Родичева). Особенно привлекательным представляется тот факт, что это может быть сделано на полу-аналитическом уровне и без привлечения сложных методов численного решения уравнений Гинзбурга-Ландау в двумерном случае.

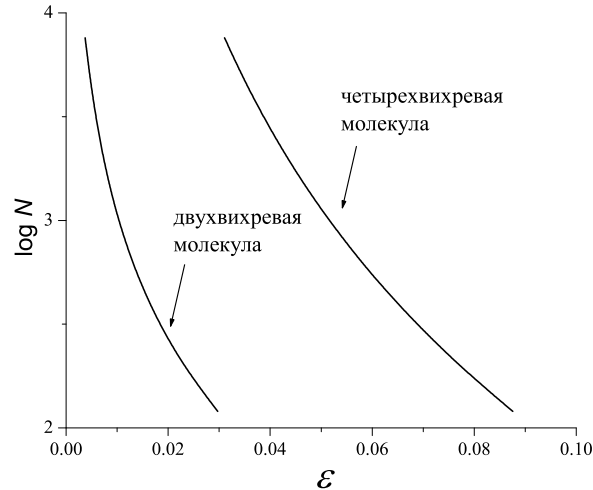


Рис. 3.23. Диаграмма состояний для 2- и 4-вихревых кластеров в ловушке с квадрупольным искажением при $t = 0, 1$. Ниже сплошных линий кластеры можно считать сорванными с выделенного направления, а выше – запиннигованными на нем.

3.8. Температурные флуктуации в спинорных конденсатах

3.8.1. Вводные замечания

Ранее мы рассматривали температурные флуктуации в скалярных конденсатах и обычных сверхпроводниках с s -спариванием. Разлагая параметр порядка по гармоникам Фурье, мы убедились, что наиболее сильно при низких температурах выражены флуктуации разностей фаз между разными гармониками, что может приводить, в частности, к расщеплению оболочек вихревых кластеров. Однако похожий эффект может наблюдаться и в системах с многокомпонентными параметрами порядка – таких как, например, спинорные конденсаты или сверхпроводники с нетривиальной симметрией спаривания, где параметр порядка не требуется "искусственно" разлагать на гармоники. Здесь флуктуировать могут углы между разными компонентами параметра порядка, что, в случае атомных конденсатов, может приводить к флуктуациям намагниченности. Отметим, что фазу конденсата в настоящее время уже возможно исследовать экспериментально [197, 198]. Более

того, существуют неdestructивные методы для измерения его локальной намагниченности [199].

Рассмотрим несколько примеров. Помимо всего прочего, нас, как и раньше, будет интересовать, при каких температурах можно наблюдать соответствующие флуктуационные эффекты в реальных конденсатах атомов щелочных металлов.

3.8.2. Конденсат со спином 1

В конденсате со спином $F = 1$ имеются три компоненты параметра порядка Ψ_j ($j = -1, 0, 1$). Энергия соответствующей квазидвумерной системы может быть записана как

$$F = \hbar\omega_{\perp}N \int dS \left[\Psi_j^* \widehat{h} \Psi_j + 2\pi g_n \Psi_j^* \Psi_k^* \Psi_j \Psi_k + 2\pi g_s \Psi_j^* \Psi_l^* (F_a)_{jk} (F_a)_{lm} \Psi_k \Psi_m - i\mathbf{\Omega} \cdot \Psi_j^* (\nabla \times \mathbf{r}) \Psi_j \right], \quad (3.155)$$

где интегрирование производится по площади системы, по повторяющимся индексам производится суммирование, F_a ($a = x, y, z$) – оператор углового момента, который может быть представлен в обычном виде через матрицы Паули, \widehat{h} – одночастичный гамильтониан

$$\widehat{h} = -\frac{\nabla^2}{2} + \frac{r^2}{2}. \quad (3.156)$$

Константы g_n и g_s характеризуют взаимодействия в канале плотности и спина,

$$g_n = \frac{(a_0 + 2a_2)n_z}{3}, \quad (3.157)$$

$$g_s = \frac{(a_2 - a_0)n_z}{3}, \quad (3.158)$$

где a_0 и a_2 длины рассеяния для состояний со спином 0 и 2. В реальных спинорных конденсатах $|g_s| \ll |g_n|$, поскольку $a_0 \approx a_2$. Выполняется соотношение $|g_s/g_n| \sim 0,001 - 0,01$, более того, эта величина в экспериментах подстраивается. Здесь мы снова будем исследовать случай относительно

разреженного газа. Результаты будут представлены для $g_n = 10$. Как и в параграфе 3.7, будем изучать системы при разных N , но фиксированном g_n .

Полная намагниченность конденсата фиксирована:

$$M = \int dS |\Psi_j|^2 j. \quad (3.159)$$

Намагниченность M нормирована на N , так что максимальное возможное значение $|M|$ равно 1. Следует также принять во внимание условие нормировки для параметра порядка:

$$\int dS \Psi_j \Psi_j^* = 1. \quad (3.160)$$

Пространственные распределения всех компонент параметра порядка в равновесии могут быть найдены из условия минимума энергии (3.155). Также удобно ввести в рассмотрение продольную l_z и поперечную l_{tr} локальные намагниченности конденсата

$$l_z = |\Psi_1|^2 - |\Psi_{-1}|^2, \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} l_{tr}^2 &= l_x^2 + l_y^2 \\ &= 2|\Psi_0|^2|\Psi_1|^2 + 2|\Psi_0|^2|\Psi_{-1}|^2 + 4(\Psi_0^2\Psi_1^*\Psi_{-1}^* + c.c.). \end{aligned} \quad (3.162)$$

Спиновая энергия в этом случае может быть представлена как

$$F_{spin} = 2\pi g_s \hbar \omega_{\perp} N \int dS (l_z^2 + l_{tr}^2). \quad (3.163)$$

Для выявления эффектов температурных флуктуаций на такую систему мы здесь ограничимся лишь простейшим случаем аксиально-симметричных фаз, когда модули всех компонент параметра порядка не зависят от азимутального угла, являясь только функциями радиальной координаты r . Заметим, что равновесные вихревые фазы в этой ситуации изучались в работах [200, 201]. Для аксиально-симметричных фаз каждая компонента параметра порядка может быть представлена в виде

$$\Psi_j(r, \varphi) = f_j(r) \exp(-iL_j\varphi - i\delta_j), \quad (3.164)$$

где φ полярный угол, L_j - завихренность, а δ_j относительная фаза. Будем обозначать такие фазы, как (L_{-1}, L_0, L_1) . Как показано в [201], аксиальная симметрия решения накладывает следующее ограничение на завихренности: $L_1 + L_{-1} = 2L_0$. В этом случае, согласно (3.162) и (3.163), спиновая энергия зависит от разницы фаз $\chi = 2\delta_0 - \delta_1 - \delta_{-1}$.

Важно отметить, что только спиновый вклад в полную энергию (3.155) зависит от фаз δ_j . Для стационарного состояния значение χ определяется знаком константы взаимодействия в спиновом канале g_s . Для положительных g_s (случай антиферромагнетизма) минимум F_{spin} достигается при $\chi = \pi$, тогда как для отрицательных g_s (случай ферромагнетизма) $\chi = 0$.

Согласно результатам работы [201], для антиферромагнитного состояния фазы $(-1, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ энергетически выгодны при малых и умеренных значениях намагниченности M . Фаза $(-1, 0, 1)$ реализуется при малой частоте вращения Ω , а состояние $(1, 1, 1)$ – при больших Ω . В работе [200], было показано, что состояние $(0, 1, 2)$ энергетически выгодно в случае ферромагнитной системы при умеренных значениях Ω и M . Что крайне важно для нас - в этих фазах все три гиперспиновых состояния населены. Говорить о флуктуациях угла χ , конечно, имеет смысл лишь в этом случае. Здесь мы сконцентрируемся на случаях этих трех вихревых состояний, поскольку они кажутся наиболее явными кандидатами для иллюстрации обсуждаемых явлений.

Важной чертой реальных конденсатов атомов щелочных металлов является малость взаимодействия в спиновом канале по сравнению с взаимодействием в канале плотности ($|g_s| \ll |g_n|$). В то же время, когерентность между разными компонентами параметра порядка (величина χ) полностью определяется взаимодействиями в спиновом канале. Величина χ также влияет на поперечную намагниченность конденсата, как видно из (3.162).

Малость g_s по сравнению с g_n приводит к тому факту, что температурные флуктуации χ становятся существенными при намного более низких

температурах, чем флуктуации плотности атомов. Поэтому при относительно низких температурах можно полагать, что модули всех компонент параметра порядка не меняются, тогда как χ флуктуирует, то есть можно провести разделение между переменными. Если χ флуктуирует слабо, можно использовать гармонический анализ и представить отклонение энергии системы от равновесного $\delta F = F(\chi_0 + \delta\chi) - F(\chi_0)$, как квадратичную функцию отклонений угла χ от равновесия $\delta\chi = \chi - \chi_0$:

$$\delta F = 2\pi g_s \hbar \omega_{\perp} N I (\cos(\chi_0 + \delta\chi) - \cos(\chi_0)) \approx \pi |g_s| \hbar \omega_{\perp} N I (\delta\chi)^2, \quad (3.165)$$

где $I = \int dS (f_1 f_{-1} f_0^2)$. В рамках такого приближения, среднеквадратичное отклонение χ равно

$$\langle (\delta\chi)^2 \rangle_T = \frac{\int d(\delta\chi) (\delta\chi)^2 \exp(-\frac{\delta F}{k_B T})}{\int d(\delta\chi) \exp(-\frac{\delta F}{k_B T})}. \quad (3.166)$$

Интеграл в (3.166) может быть легко взят аналитически. Учитывая (3.128), получаем

$$\langle (\delta\chi)^2 \rangle_T = \frac{t}{1.28 \sqrt{N} 4 |g_s| I}. \quad (3.167)$$

Введем в рассмотрение также величину $\Delta\chi = \sqrt{\langle (\delta\chi)^2 \rangle_T}$, которая представляет собой среднее отклонение угла χ из-за температурных флуктуаций. Видно, что $\Delta\chi$ зависит от безразмерной температуры $t = T/T_c$, количества частиц N и интеграла I . Для данного вихревого состояния I также является функцией M . Важно отметить, что (3.167) снова имеет смысл, только если g_n не зависит от N . Для вычисления I опять будем использовать вариационный метод, основанный на пробных функциях для компонент параметра порядка.

На Рис. 3.24 показана найденная зависимость $\Delta\chi$ в градусах от числа частиц для разных вихревых фаз при $t = 0, 1$ и $g_n = 10$. Эта величина g_n близка к типичным экспериментальным значениям ($a_0 \approx 5$ нм, $n_z \approx 2$ нм⁻¹). Мы полагаем, что для состояний $(-1, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$ выполняются соотношения $g_s = 0,01g_n$ и $M = 0,1$, а для состояния $(0, 1, 2)$ – $g_s = -0,01g_n$ и

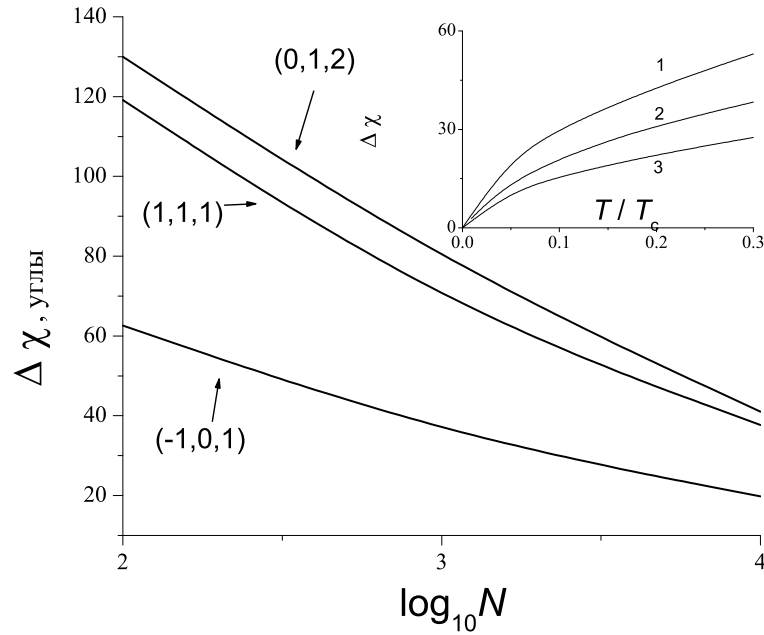


Рис. 3.24. Зависимость $\Delta\chi$ (в градусах) от числа частиц в разных вихревых фазах при $g_n = 10$ и $t = 0, 1$. На вставке: $\Delta\chi$ как функция температуры в фазах $(0, 1, 2)$ (линия 1), $(1, 1, 1)$ (линия 2), $(-1, 0, 1)$ (линия 3).

$M = 0, 5$. Отметим, что $\Delta\chi$ для данной конкретной фазы не зависит от Ω , поскольку I обладает этим же свойством. Видно, что даже для довольно низких температур $\Delta\chi$ может быть довольно большим, так что когерентность между разными компонентами параметра порядка фактически разрушена. Для меньших значений $|g_s|$, флуктуации χ , конечно, еще существеннее. Для иллюстрации влияния температуры на вставку к Рис. 3.24 показана зависимость $\Delta\chi$ от T для $(0, 1, 2)$ -фазы (кривая 1), $(1, 1, 1)$ -фазы (кривая 2) и $(-1, 0, 1)$ -фазы (кривая 3) при фиксированном числе атомов $N = 1000$, $g_s = -0, 05g_n$ для первой кривой и $g_s = 0, 05g_n$ для двух остальных. Заметим, что $\Delta\chi$ почти не зависит от полной намагниченности M конденсата.

Как уже отмечалось, флуктуации χ приводят к флуктуациям l_{tr} . В гармоническом приближении можно выразить отклонения $|l_{tr}|$ от $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T$ через отклонения χ :

$$\frac{\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T}{|l_{tr}|} = (-1)^u \frac{1}{2} \langle (\delta\chi)^2 \rangle_T \frac{f_1 f_{-1}}{(f_1 + (-1)^{u+1} f_{-1})^2}, \quad (3.168)$$

где $u = 0$ для случая антиферромагнетизма и $u = 1$ для случая ферромагнетизма. Если в первом случае полная намагниченность невелика $M \lesssim 0,5$, можно ожидать, что $(f_1 - f_{-1})^2 \ll f_1 f_{-1}$, и поэтому даже слабые флуктуации χ приводят к сильным относительным флуктуациям $|l_{tr}|$. В то же время, для случая ферромагнитной системы, $u = 1$ в этом соотношении, и относительные флуктуации $|l_{tr}|$ намного меньше.

Итак, мы вычислили $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T$ для разных вихревых фаз, и вычисления выявили, что $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ практически не зависит от радиальной координаты r для состояний $(-1, 0, 1)$ и $(1, 1, 1)$. Это объясняется тем фактом, что $|L_{-1}| = |L_1|$ для этих состояний, и поэтому $f_1(r)$ примерно пропорционально $f_{-1}(r)$, и, согласно (3.166), $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ должно лишь слабо зависеть от r . На Рис. 3.25 представлено $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$, как функция полной намагниченности конденсата для состояния $(-1, 0, 1)$ при $t = 0.1$, $g_s = 0,01 g_n$ (случай антиферромагнетизма), и $N = 1000$. Видно, что относительные флуктуации поперечной намагниченности могут быть существенны даже при низкой температуре. Величина $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ уменьшается с увеличением M . Результат понятен, поскольку конденсат становится все более поляризованным с увеличением M . Абсолютное значение $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T$ также остается заметным. Хотя величина $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ увеличивается с уменьшением M , значение $|l_{tr}|$ само по себе уменьшается. Поэтому наиболее предпочтительное значение M для наблюдения флуктуаций - в окрестности точки $M = 0,2$, где и $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$, и $|l_{tr}|$ велики: $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}| \gtrsim 0,1$, тогда как l_{tr} сравнимо с продольной намагниченностью l_z в полностью поляризованном состоянии при $M = 1$, когда оно должно быть легко измеряемо экспериментально. Величина $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ зависит также от вихревой фазы; было найдено, что в состоянии $(1, 1, 1)$ она даже превышает соответствующую величину в состоянии $(-1, 0, 1)$.

Представляет интерес рассмотреть также случай ферромагнитного конденсата в отсутствии вращения для определения того, как температурными флуктуациями будет разрушаться порядок в направлении спинов. Та-

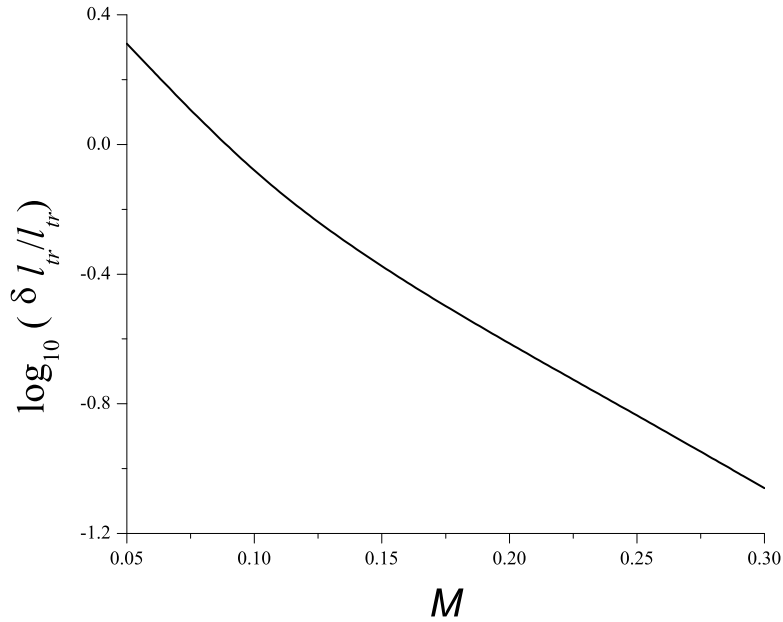


Рис. 3.25. Зависимости $\langle \delta |l_{tr}| \rangle_T / |l_{tr}|$ от полной намагниченности для фазы (-1, 0, 1) при $N = 1000$; $g_n = 10$, $t = 0, 1$, $g_s = 0, 01g_n$.

ким образом, будем рассматривать безвихревое состояние, причем в случае системы большого размера. Энергия такой системы не зависит от направления спина, но зависит от градиентов спина. Будем полагать, что в основном состоянии все атомы населяют лишь одно состояние, $\Psi_{-1} = \Psi_0 = 0$, $\Psi_1 = \sqrt{n}$. Исследуем слабые флуктуации, вызываемые температурой. В основном состоянии спин направлен вдоль оси z , т.е. $S_z = 1$, $S_x = S_y = 0$. Возмущение Ψ_0 приводит к возмущениям S_x и S_y :

$$\delta S_x = \frac{1}{\sqrt{2n}} (\delta \Psi_0 + \delta \Psi_0^*), \quad (3.169)$$

$$\delta S_y = \frac{i}{\sqrt{2n}} (\delta \Psi_0 - \delta \Psi_0^*). \quad (3.170)$$

Спектр для случая $F = 1$ был получен в работах [125, 126]. Частота моды, ответственной за флуктуации Ψ_0 , задается выражением

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}. \quad (3.171)$$

Используя (3.169), мы можем вычислить среднеквадратичные флуктуации

S_x и S_y на больших расстояниях. Получаем, что порядок отсутствует в одно- и двумерных системах. Для иллюстрации приведем здесь выражения для коррелятора в двумерном случае:

$$\langle [S_x(\mathbf{r}) - S_x(0)]^2 \rangle_T = \frac{T}{T_d} \ln \frac{r}{\lambda_T}, \quad (3.172)$$

где

$$\lambda_T = \frac{\hbar}{\sqrt{2mk_B T}}. \quad (3.173)$$

В случае одномерной системы, корреляторы с ростом r растут линейно. Это означает, что в низкоразмерных системах отсутствует дальний порядок в направлении спина. Однако двумерная система может быть разделена на блоки характерного размера L , $\xi_s \ll L \ll \lambda_T \exp(T_d/T)$, с приблизительно одним и тем же направлением спина в каждом блоке ($\xi_s \sim \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{\beta n}}$ характерный масштаб изменения направления спина). Разные блоки не коррелированы. При температурах порядка $2T_d / \ln(k_B T_d / \beta n)$, ξ_s становится сопоставимо с $\lambda_T \exp(T_d/T)$. В этом случае размер каждого блока становится порядка ξ_s .

В квазиодномерных и квазидвумерных конденсатах, помещенных в ловушки, с размерами превышающими ξ_s , при низких температурах, можно ожидать одинакового направления спина по всей системе. При более высоких температурах облако будет состоять из некоррелированных блоков. Такое поведение схоже с поведением фазы параметра порядка в случае скалярного конденсата (квазиконденсат) [202–204]. Отметим, что ферромагнитная фаза в конденсате со спином 2 ведет себя аналогичным образом, тогда как поведение циклической фазы оказывается иным. Приступим к описанию этого случая.

3.8.3. Конденсат со спином 2

Сначала рассмотрим случай системы бесконечного размера с заданной плотностью частиц n в нулевом магнитном поле. Параметр порядка в

случае $F = 2$ имеет пять компонент Ψ_i ($i = -2, -1, 0, 1, 2$). Энергия системы определяется выражением (3.29). В отсутствие магнитного поля и вращения конденсат может быть в трех разных состояниях [130], как видно из (??). Это - ферромагнитная, полярная и циклическая фазы [130]. В циклической фазе $\Psi_{\pm 1} = 0$ и $\Psi_{-2} = \frac{\sqrt{n}}{2}e^{i\theta}$, $\Psi_0 = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}}$, $\Psi_2 = -\frac{\sqrt{n}}{2}e^{-i\theta}$, где θ произвольная фаза (энергия системы по ней вырождена). В основном состоянии $\chi = 0$. В зависимости от a_q одна из трех фаз имеет наименьшую энергию. В циклической фазе энергия, задаваемая (3.29), содержит вклад

$$F_{sm} = \gamma |\Psi_0|^2 |\Psi_2| |\Psi_{-2}| \cos \chi. \quad (3.174)$$

Рассмотрим слабые осцилляции параметра порядка в циклической фазе. Флуктуация фаз данной компоненты может быть выражена через флуктуацию самого параметра порядка данной компоненты как $\delta S_j = \text{Im}(\delta \Psi_j) / |\Psi_j|$. Для $\delta \chi$ имеем $\delta \chi = 2\delta S_0 - \delta S_2 - \delta S_{-2}$.

Отклонения всех компонент $\delta \Psi_j$ могут быть представлены в виде

$$\delta \Psi_j = \sum_{\mathbf{k}} \left\{ c_{\mathbf{k}}^{(j)} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}}t) + d_{\mathbf{k}}^{(j)*} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t) \right\}, \quad (3.175)$$

где $c_{\mathbf{k}}^{(j)}$ и $d_{\mathbf{k}}^{(j)}$ искомые величины. Флуктуации $\Psi_{\pm 1}$ расцеплены с флуктуациями Ψ_0 и $\Psi_{\pm 2}$, как следует из линеаризованных уравнений на слабые колебания в циклической фазе. Спектр осцилляций Ψ_0 , $\Psi_{\pm 2}$ имеет три ветви. Впервые он был получен в [205]:

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(1)} = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} + 2\gamma n, \quad (3.176)$$

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(2)} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 2\alpha n \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}, \quad (3.177)$$

$$\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(3)} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}\right)^2 + 4\beta n \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m}}. \quad (3.178)$$

Температурное распределение квазичастиц задается выражением ($j = 1, 2, 3$)

$$N_{\mathbf{k}}^{(j)} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(j)}/k_B T) - 1}. \quad (3.179)$$

Можно также найти собственные векторы, соответствующие ветвям (3.176), (3.177), (3.178). Собственные векторы для (3.177), (3.178) не дают вклада в $\delta\chi$, что видно из анализа уравнений, описывающих слабые осцилляции. За флуктуации χ отвечает исключительно ветвь (3.176). Физически это связано с тем фактом, что лишь собственная энергия ветви (3.176) зависит от γ . Окончательно, получаем простое выражение для $\delta\chi$:

$$\delta\chi = \frac{1}{2i\sqrt{V}\sqrt{n}} \sum_{\mathbf{k}} \{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega_{\mathbf{k}}t) - \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega_{\mathbf{k}}t)\}. \quad (3.180)$$

Теперь определим поведение среднеквадратичного отклонения χ на больших расстояниях. Несложно увидеть, что эта величина при любой размерности задачи стремится к постоянной величине, что должно означать наличие дальнего порядка для χ . Это обусловлено наличием щели в спектре возбуждений (3.176). Для иллюстрации ниже приводятся вычисления и их результаты для двумерной задачи. Из (3.180) имеем

$$(\delta\chi(r) - \delta\chi(0))^2 = -\frac{1}{4Vn} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} A_{\mathbf{k}_1} A_{\mathbf{k}_2}, \quad (3.181)$$

где

$$A_{\mathbf{k}} = \exp(i\omega_{\mathbf{k}}^{(1)}t) (\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) - 1) - \exp(-i\omega_{\mathbf{k}}^{(1)}t) (\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) - 1).$$

После усреднения, только слагаемые с $k_1 = k_2$ выживают в (3.181). Для коррелятора имеем

$$\begin{aligned} \langle [\delta\chi(\mathbf{r}) - \delta\chi(0)]^2 \rangle_T &= -\frac{1}{8\pi Vn} \sum_{k, \varphi_1, \varphi_2} N_{\mathbf{k}}^{(j)} \times \\ &\quad (e^{ikr \cos \varphi_1} - 1)(e^{ikr \cos \varphi_2} - 1), \end{aligned} \quad (3.182)$$

где φ_1 и φ_2 - это углы между \mathbf{r} и \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , соответственно. Теперь можем перейти от суммирования к интегрированию; после интегрирования по φ_1 и φ_2 получаем

$$\langle [\delta\chi(\mathbf{r}) - \delta\chi(0)]^2 \rangle_T = \frac{1}{2\pi n} \int k dk N_{\mathbf{k}}^{(1)} (1 - J_0(kr))^2, \quad (3.183)$$

где $J_0(r)$ функция Бесселя. Этот интеграл можно вычислить аналитически при больших r в пределах низких и высоких температур. При низкой температуре, $k_B T \ll \gamma n$, $N_{\mathbf{k}}^{(1)} = \exp(-\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(j)}/k_B T)$. При высокой температуре, $k_B T \gg \gamma n$, $N_{\mathbf{k}}^{(1)} = k_B T/\hbar\omega_{\mathbf{k}}^{(j)}$. Окончательно, имеем

$$\langle [\delta\chi(\mathbf{r}) - \delta\chi(0)]^2 \rangle_T = \begin{cases} T/T_d \exp(-2\gamma n/k_B T), & k_B T \ll \gamma n, \\ T/T_d \ln(k_B T/2\gamma n), & k_B T \gg \gamma n, \end{cases} \quad (3.184)$$

где $T_d = 2\pi\hbar^2 n/k_B m$.

Ветви спектра возбуждений (3.177) и (3.178) ответственны за флуктуации фазы отдельных компонент параметра порядка. Поведение этих величин стандартно - дальний порядок отсутствует в одно- и двумерных системах. Флуктуации населенностей малы по порядку малости $T \ll T_d$.

До этого момента рассмотрение температурных флуктуаций велось с помощью анализа слабых отклонений от однородных в пространстве решений обобщенных уравнений Гросса-Питаевского. Однако можно заметить, что у уравнений могут быть решения типа "кинк", соответствующие изменению χ на $2\pi l$ при переходе из одной области пространства в другую, где l - целое число, не равное 0. Известно, что кинки играют важную роль в разрушении порядка флуктуациями [206]. Сначала определим структуру единичного кинка в наиболее важном случае, т.е. при $l = 1$ и в ситуации, когда все величины меняются лишь вдоль одной координаты x . Для χ имеются граничные условия $\chi(\infty) = 2\pi$, $\chi(-\infty) = 0$. Зависящая от фазы часть энергии состоит из двух вкладов:

$$F_{ph} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{j=-1}^1 |\Psi_{2j}|^2 (\nabla S_{2j})^2 + \gamma |\Psi_0|^2 |\Psi_2| |\Psi_{-2}| \cos \chi \right]. \quad (3.185)$$

Это выражение можно переписать в диагональной форме

$$F_{ph} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\hbar^2 n}{8m} \frac{1}{4} (\nabla \chi)^2 + \frac{\gamma n^2}{4} \cos \chi + \frac{\hbar^2 n}{8m} \left(\frac{1}{2} (\nabla S_2 - \nabla S_{-2})^2 + \frac{1}{4} (\nabla S_2 + \nabla S_{-2} + 2\nabla S_0)^2 \right) \right]. \quad (3.186)$$

Из (3.186) видно, что решение для кинка с наименьшей энергией соответствует условиям $\nabla S_2 - \nabla S_{-2} = 0$ и $\nabla S_2 + \nabla S_{-2} + 2\nabla S_0 = 0$. В этом случае, энергия (3.186) может быть сведена к функционалу синус-Гордона. Функция $\chi(x)$ находится из минимума F_{ph} : $\delta F_{ph}/\delta\chi = 0$ и граничных условий. Окончательно, имеем

$$\chi(x) = 2\pi - 4 \tan^{-1} \exp(-x/\xi_\chi), \quad (3.187)$$

$$S_2(x) = S_{-2}(x) = -S_0(x) = -\frac{1}{4}\chi(x), \quad (3.188)$$

где

$$\xi_\chi = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{4\gamma n}} \quad (3.189)$$

- масштаб длины, на котором изменяется χ , то есть длина кинка. Пространственная структура единичного кинка показана на Рис. 3.26, где приведена зависимость от x величин χ , $S_{\pm 2}$ и S_0 . Единичный кинк, распространяющийся в пространстве, представляет собой солитон. Как видно из (3.186), энергия кинка F_{kink} ведет себя, как $\gamma\xi_\chi \sim \sqrt{\gamma}$. Более точные вычисления с использованием (3.187) дают

$$F_{kink} = n^{3/2} \sqrt{\frac{\hbar^2 \gamma}{m}}. \quad (3.190)$$

Отметим, что в реальных конденсатах атомов щелочных металлов γ должно быть намного меньше α и поэтому ξ_χ намного больше длины когерентности, которая представляет собой характерную длину изменения плотности.

Теперь рассмотрим роль кинков в разрушении порядка в системе температурными флуктуациями. При нулевой температуре система, описываемая моделью синус-Гордона, при любой размерности задачи “заблокирована” в одном из эквивалентных минимумов энергии, соответствующих $\chi = 2\pi l$. При ненулевой температуре присутствие кинков может стать выгодным из-за их энтропийного вклада в свободную энергию [206]. В результате кинки могут разрушить дальний порядок, а соответствующий переход называют переходом с потерей огранки (roughening transition). Для одномерной

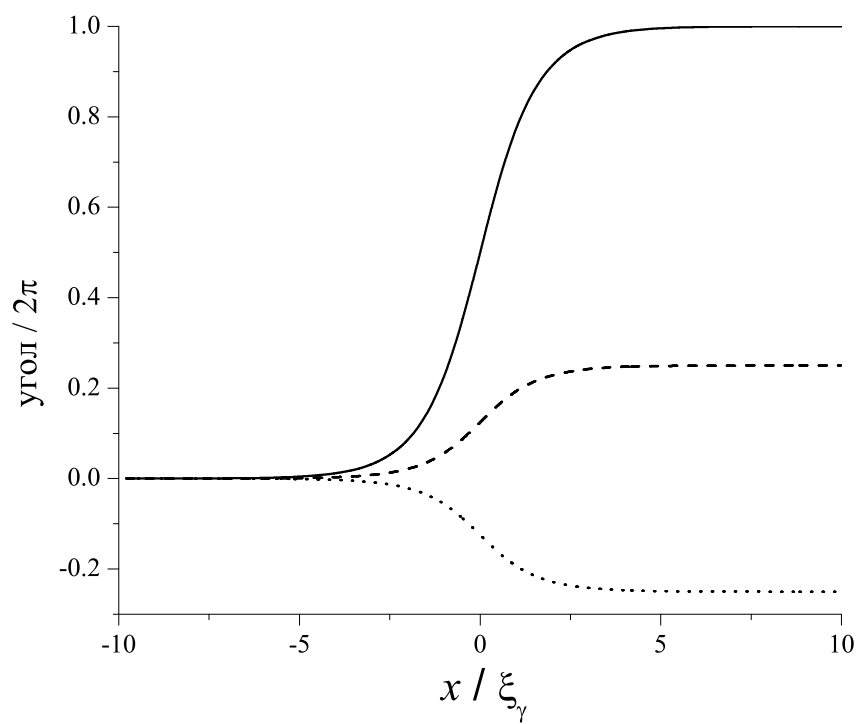


Рис. 3.26. Структура единичного кинка в циклической фазе. Сплошная кривая показывает χ , пунктирная - S_0 , точечная - $S_2 = S_{-2}$.

системы длиной L ($L \gg \xi_\chi$), энтропия, соответствующая единичному кинку, может быть оценена как $\ln L/\xi_\chi$, где L/ξ_χ - число “посадочных мест” для кинка. Поэтому для температуры перехода с потерей огранки имеем

$$T_R^{1D} \approx \frac{F_{kink}}{k_B \ln L/\xi_\chi}. \quad (3.191)$$

В случае бесконечной одномерной системы ($L \rightarrow \infty$), $T_R^{1D} = 0$. Подчеркнем, что этот результат качественно отличается от результата, основанного на учете лишь малых осцилляций параметра порядка, который показывает присутствие дальнего порядка для χ . Заметим, что в одномерных системах конечного размера $T_R^{1D} \rightarrow 0$ при $\gamma \rightarrow 0$.

Температура перехода с потерей огранки в двумерном случае T_R^{2D} также может быть легко оценена. В этом случае, выражение (3.190 для F_{kink} задает энергию единицы длины кинка. Критический зародыш разупорядоченной фазы представляет собой скачок χ на 2π с периметром $\approx 2\pi\xi_\chi$. Полная энергия такого зародыша $2\pi F_{kink}\xi_\chi = \pi\hbar^2 n_s/2m$, где полная плотность атомов n заменена на сверхтекучую плотность n_s перед переходом с разупорядоченное состояние. Интересно, что в двумерном случае эта энергия не зависит от γ . Температура перехода с потерей огранки может быть оценена из условия равенства энергии зародыша и термической энергии:

$$T_R^{2D} = \frac{\pi\hbar^2 n_s}{2k_B m}. \quad (3.192)$$

Итак, можно сделать вывод, что дальний порядок для χ в двумерной системе выживает вплоть до достаточно высоких температур (порядка температуры перехода БКТ).

Если размер одно- или двумерной системы меньше, чем ξ_χ , формирование кинка невозможно, так что χ примерно постоянно внутри системы. Однако его значение может отличаться от $2\pi l$ из-за температурных флуктуаций. В этом смысле, мы находимся в квазиульмерном режиме. Похожий случай был рассмотрен выше для системы со спином 1, в котором наличие

запирающего потенциала может приводить к ненулевым значениям для всех трех компонент параметра порядка, хотя для системы бесконечного размера такие фазы энергетически невыгодны. Другой метод создания подобных состояний был предложен в [207], где в систему вводилась микроволновая энергия, что приводило к перераспределению частиц между разными компонентами параметра порядка. Таким образом, циклическая фаза в конденсате со спином 2 представляет собой один из примеров таких состояний, в которых энергия системы зависит от когерентности трех компонент параметра порядка, а соответствующая разница фаз может испытывать заметные температурные флуктуации даже при весьма низких температурах.

3.9. Краткие выводы

В этой главе изучались сверхпроводящие и сверхтекучие состояния в малоразмерных системах, чьи размеры сопоставимы с размерами сердцевин топологического дефекта. Для систем таких размеров уже применимо описание с помощью теории среднего поля, поэтому рассмотрение велось в рамках теории Гинзбурга-Ландау для сверхпроводников и с помощью уравнений Гросса-Питаевского для конденсатов атомов щелочных металлов.

Для рассмотрения вихревых состояний был развит вариационный метод, основанный на пробных функциях для параметра порядка. С помощью этого подхода удается на полуаналитическом уровне получить многие результаты, которые иначе приходилось бы получать с использованием тяжелых методов численного счета. Подобные подходы применялись и ранее, но в диссертационной работе они были значительно усовершенствованы, и с их помощью удалось изучить системы с многокомпонентными параметрами порядка, вопросы, связанные с температурными флуктуациями, а также проблему термоактивационного проникновения вихря в систему.

Были исследованы равновесные фазовые диаграммы тонких сверх-

проводящих цилиндров с учетом возможного подавления параметра порядка на границе. Прослежена эволюция вихревой фазовой диаграммы системы и ее равновесной намагниченности в зависимости от значения “длины экстраполяции” де Женна, описывающей подавление параметра порядка на поверхности. Было показано, что подавление ведет к сглаживанию дискретного характера зависимости намагниченности от приложенного поля.

Также было предложено теоретическое описание результатов серии экспериментов с малоразмерными структурами “сверхпроводник-ферромагнетик”, в которых связь между ферромагнетиком и сверхпроводником осуществлялась преимущественно за счет магнитного поля ферромагнетика. Были описаны следующие конфигурации: сверхпроводящий диск с магнитной точкой на его поверхности; та же система, но с дополнительным защитным слоем между сверхпроводником и ферромагнетиком, который подавлял эффект близости; сверхпроводящее кольцо с магнитной точкой посередине. Было продемонстрировано хорошее согласие между теорией и экспериментом для зависимости критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние от приложенного магнитного поля. В случае кольца большинство результатов получено аналитически. Показано, что соответствующая фазовая граница может деформироваться под влиянием поля ферромагнетика таким образом, что в области максимальной критической температуры возможен сдвиг границы как в направлении внешнего поля, так и против него при одной и той же ориентации намагниченности точки. За счет специального подбора параметров системы можно добиться так называемого π -сдвига в кольце, когда состояния с противоположными циркуляциями тока вырождены не при потоке внешнего поля, равном $\Phi_0/2$, а при нулевом внешнем поле. Данное обстоятельство может оказаться важным для предложенной ранее конструкции кубита в виде сверхпроводящего кольца с джозефсоновскими контактами.

Метод пробных функций применен к исследованию конденсата ато-

мов щелочных металлов со спином 2 в ловушке. В этом случае, параметр порядка имеет пять компонент. Была построена равновесная фазовая диаграмма такого конденсата и предложено простое качественное объяснение серий фазовых переходов между состояниями с различными типами топологических дефектов. Описаны новые типы таких дефектов, отличающиеся необычной спиновой текстурой.

Далее, метод пробных функций для параметра порядка был усовершенствован на случай неравновесных процессов. А именно, он применен к исследованию термоактивации вихря Абрикосова в малоразмерный сверхпроводящий диск. Свинцовые образцы такого рода в настоящее время стали доступны для экспериментального исследования. В таких экспериментах было обнаружено полное либо частичное подавление поверхностного барьера для выхода и входа вихря при приложении внешнего поля к образцу. В диссертационной работе было предложено объяснение этого явления в терминах термоактивации вихрей. При описании термоактивации в образцах ультрамалых размеров не представляется возможным использовать лондоновское приближение, поскольку размеры системы лишь ненамного превышают величину сердцевины вихря. По этой причине был разработан новый подход к этой проблеме, который применим специально для случая малоразмерных сверхпроводников. А именно, использовалось разложение параметра порядка по уровням Ландау, а населенности релевантных уровней рассматривались в качестве подходящих независимых переменных, альтернативных положению центра вихря. Затем вычислялся профиль поверхностного барьера в пространстве населенностей уровней Ландау, вводились и оценивались коэффициенты вязкости, связанные с изменениями населенностей, а в конце решалось уравнение Фоккера-Планка, из которого отыскивалось среднее время термоактивации. В итоге, удалось показать, что время термоактивации в условиях анализировавшихся экспериментов на несколько порядков меньше 1 секунды, что и может служить объяснением

наблюдавшимся явлениям.

Был также исследован вопрос о том, не могут ли квантовые флуктуации вести к подавлению поверхностного барьера. Были рассмотрены образцы в форме дисков из свинца толщиной всего в несколько моноатомных слоев. Были определены критерии перехода от термоактивации к режиму макроскопического квантового туннелирования. Показано, что квантовое туннелирование может наблюдаться экспериментально и предложены некоторые идеи, как это может быть сделано на практике. Продемонстрировано, что на выход вихря наибольшее влияние оказывают квантовые флуктуации, а на вход - температурные, что связано с особенностями поверхностного барьера в малоразмерных системах.

Малоразмерные сверхпроводящие островки из свинца, которые исследуются в современных экспериментах, имеют сглаженную гексагональную форму, но, вырастая до размеров в несколько сотен нанометров, стремятся приобрести форму треугольника. Известно, что треугольная геометрия может вести к нетривиальным последствиям для сверхпроводящего конденсата, помещенного в нее. В диссертационной работе исследовалась локализация температурных флуктуаций в таких системах для случая тонкого квазидвумерного островка, состоящего из небольшого числа моноатомных слоев, в нулевом внешнем поле. Было показано, что флуктуации параметра порядка значительно усиливаются в углах таких островков - как ниже, так и выше критической температуры. Предложено качественное объяснение этого явления, которое состоит в том, что конденсат в углах оказывается зажатым с боков и эффективная локальная размерность системы как бы понижается, а, как известно, чем меньше размер системы, тем сильнее выражены флуктуации. Результаты могут быть важными для современных фотодетекторов на основе малоразмерных сверхпроводящих островков, сбои в работе которых объясняются как раз влиянием флуктуаций. Для подавления флуктуационных эффектов следует избегать наличия углов в данных приборах и

по возможности закруглять их.

Метод пробных функций был применен к решению важной задачи о проникновении вихря во вращающийся конденсат атомов щелочных металлов, помещенный в ловушку. Несмотря на то, что этому вопросу было ранее посвящено большое количество исследований, наблюдается некоторое разногласие между их результатами по величине частоты вращения, приводящей к возникновению вихря. Имеются разногласия и в данных экспериментов разных групп. Причины отличий в теоретических работах выявить непросто, поскольку почти во всех них задача решалась численными методами. Метод пробных функций позволяет получить многие результаты на полуаналитическом уровне и лучше понять физику явлений на качественном уровне. В диссертационной работе было показано, что конденсат оказывается нестабильным по отношению к так называемым поверхностным модам, после чего практически сразу следует формирование вихрей на периферии системы. Это служит подтверждением одному из сценариев, предложенных ранее в литературе. Более того, впервые указано на то, что в системе без четко выраженных границ возникновение вихрей возможно только в паре с антивихрями. Было продемонстрировано, что на периферии системы происходит зарождение таких пар, после чего вихри перемещаются в центр системы, а антивихри уходят еще дальше от центра системы. Предложенный механизм в литературе ранее не описывался.

Метод пробных функций был развит далее и применен к изучению температурных флуктуаций вихревых кластеров в двумерных конденсатах атомов. Были рассмотрены кластеры, состоящие из двух колец вихрей. Исследовалось разупорядочиванием колец таких кластеров, вызванное флуктуациями. Была выявлена весьма сильная зависимость характерной температуры разупорядочивания от симметрии кластера – высокосимметричные кластеры более стабильны. Это свойство было ранее найдено для точечных частиц во внешнем запирающем потенциале. По сути, в диссертационной

работе показано, что свойство сохраняется и в случае вихрей в ловушке, в которых они расстояния между вихрями примерно соответствуют размерам сердцевин, и точечными частицами они никак считаться не могут. Были оценены характерные температуры разупорядочивания и показано, что данное явление можно наблюдать в реально существующих системах с атомами щелочных металлов. Также рассматривались флуктуации вихревых молекул в ловушках со слабой дополнительной квадрупольной деформацией. Такие деформации используются в экспериментах для облегчения процесса формирования вихря. Были выявлены сильные эффекты соизмеримости между симметрией вихревой молекулы и квадрупольной деформацией.

Наконец, рассматривались температурные флуктуации в спинорных конденсатах со спином 1 и 2. В таких системах в некоторых случаях возможны ситуации, когда атомы населяют три гиперспиновых состояния. Энергия системы в этом случае зависит от линейной комбинации фаз трех соответствующих компонент волновой функции. Было показано, что температурные флуктуации могут вести к потере когерентности между этими компонентами волновой функции, что приводит к флуктуациям локальной намагниченности. Вычислены соответствующие температуры и продемонстрировано, что когерентность может теряться в экспериментально доступных областях основных параметров системы. Для системы со спином 2 в так называемой циклической фазе найдено решение типа “кинк”. Предсказано существование перехода с потерей огранки при повышении температуры, при котором порядок разрушается из-за распространения пар кинков и антикинков.

ГЛАВА 4

Вихревые решетки в сверхпроводниках: намагниченность, пиннинг, структура

4.1. Введение

В данной главе диссертационной работы мы перейдем от исследования свойств сверхпроводящих систем на микроскопическом и “мезоскопическом” уровнях к их изучению на уровне макроскопическом. А именно, рассмотрим некоторые аспекты физики смешанного состояния в сверхпроводниках второго рода, которые не получили должного внимания в литературе. Как и прежде, часть результатов будет иметь прямое отношение и к разреженным сверхтекучим системам - конденсатам атомов щелочных металлов.

Важной вехой в исследовании магнитных свойств сверхпроводников стали работы Абрикосова, который, используя теорию Гинзбурга-Ландау, показал, что проникновение магнитного поля в сверхпроводник второго рода происходит в виде квантованных вихревых нитей [4], аналогичных вихрям в сверхтекучем гелии. С тех пор свойства вихревых решеток в сверхпроводниках исследовались в огромном количестве работ [56]. Особенно богатым оказывается поведение слоистых и анизотропных сверхпроводников [55], а также и сверхпроводников с нетривиальными симметриями спаривания [208]. Новым толчком к изучению вихрей в сверхпроводниках явилось открытие высокотемпературной сверхпроводимости.

Как известно, движение вихрей по системе сопровождается диссипацией энергии. Поэтому для увеличения критического тока, то есть максимального транспортного тока, который способен бездиссипативно протекать по системе, крайне важно каким-то образом "закреплять" вихри пространственно в сверхпроводнике. Такое зацепление вихрей происходит на

структурных дефектах кристаллической решетки (пиннинг). Исследованию пиннинга и выработке рекомендаций по его усилению посвящено большое число статей [55]. Пионерской теоретической работой в этом направлении можно считать концепцию коллективного пиннинга Ларкина-Овчинникова, описывающую случай слабого беспорядка [209, 210], приводящего к пиннингу не индивидуальных вихревых нитей, а целых доменов решетки.

Некоторое время назад было предложено увеличивать критической ток в сверхпроводниках, создавая искусственные центры пиннинга, которые отличались бы большей эффективностью по сравнению с обычным беспорядком, возникающим спонтанно. Этот случай отвечает сильному пиннингу, при котором зацепление вихрей на центрах происходит индивидуально. Такие центры можно получать с помощью бомбардировки сверхпроводника тяжелыми ионами [211], либо используя современные нанотехнологические методы, которые позволяют создавать регулярные решетки магнитных точек или отверстий в сверхпроводящей плёнке [58]. В последнем случае, регулярность потенциала пиннинга дополнительно усиливает критический ток. Оба подхода были реализованы экспериментально и интенсивно разрабатываются в настоящее время.

Заметим, что исследование вихревого состояния в сверхпроводниках с беспорядком имеет важное междисциплинарное и фундаментальное значения, поскольку схожие задачи возникают в совершенно разных областях физики. Для физиков-теоретиков такие сверхпроводящие системы являются подходящим "полигоном" для изучения достаточно общих вопросов о порядке и беспорядке.

Несмотря на всё обилие как экспериментальных, так и теоретических работ, посвященных магнитным свойствам сверхпроводников второго рода, остаётся еще немало нерешенных или не до конца решенных задач. Так, оказывается, что до недавних пор отсутствовала надежная и простая модель, которая позволяла бы описать намагниченность идеального сверхпроводни-

ка второго рода (в котором нет пиннинга) в переходном промежутке полей между первым и вторым критическими полями. Известны лишь ставшие уже классическими асимптотические результаты вблизи нижнего и верхнего критического полей [4, 212, 213], а в переходной области, как это часто бывает, применяются численные методы [214]. В литературе предпринимались неоднократные попытки продолжить разложения с того или иного конца по направлению вглубь переходной области (см., например, [215–217]), но к существенному прогрессу это не привело, несмотря на подчас серьезное усложнение формализма. Устранению данного пробела и посвящена часть этой главы диссертационной работы. Для этого будет применен вариационный метод, основанный на пробной функции для параметра порядка в единичной ячейке вихревой решетки. Подчеркнем, что вариационный метод хорошо себя зарекомендовал в решении класса задач для малоразмерных систем, которые рассматривались в предыдущей главе диссертационной работы.

Необходимо отметить, что помимо чисто теоретического интереса, описание переходной области полей важно и для анализа экспериментальных данных по изучению намагниченности сверхпроводников второго рода – в особенности, высокотемпературных сверхпроводников. Измеряя поле-вую зависимость намагниченности, определяют основные параметры сверхпроводящего состояния – такие, как величины критических полей, лондонскую глубину проникновения магнитного поля и длину когерентности. Важность именно переходной области обусловлена тем, что вблизи нижнего критического поля практически не удается добиться обратимости намагниченности из-за влияния структурных дефектов, тогда как область вблизи верхнего критического поля чрезвычайно сложна для экспериментального исследования вследствие большой величины этого поля в высокотемпературных сверхпроводниках.

Как уже упоминалось выше, сверхпроводники с искусственно создан-

ными периодическими потенциалами пиннинга в настоящее время привлекают особый интерес исследователей. На практике искусственные центры пиннинга практически всегда располагают в узлах квадратной решетки. Более того, аналогичные потенциалы пиннинга научились формировать и в разреженных конденсатах атомов щелочных металлов с помощью перекрещивающихся лазерных лучей, которые создают так называемую оптическую решетку (см., например, [61]). В частности, с помощью оптических решеток пытаются получать аналоги кристаллических решеток в твердых телах. Их можно изучать с помощью новых экспериментальных методов, в неожиданных режимах основных параметров и на ином уровне, недоступном для физики конденсированного состояния - сохраняя при этом квантовый характер системы. Между тем почти во всех исследованиях на тему вихревого состояния в таких системах пренебрегалось тем обстоятельством, что сама решетка вихрей, как известно, стремится приобрести треугольную симметрию [4, 212, 213]. Таким образом, в этой, казалось бы тривиальной ситуации, возникает интересное противоборство между двумя типами симметрии. Более того, если рассмотреть произвольное соотношение между концентрациями вихрей и центров пиннинга, задача приобретает чрезвычайную сложность. В этой главе диссертационной работы рассмотрены отдельные частные случаи для двумерной системы в слабых полях, когда отношение концентраций является рациональной дробью. Некоторые предсказания по видимому подтверждаются экспериментальными данными по структурным переходам вихревой решетки в атомных конденсатах с оптической решеткой [61, 218–220].

Далее в этой главе исследуется та же система, но с дополнительным беспорядком, который всегда присутствует в реальных системах. Этот фактор придает еще большую сложность изучаемой системе и ведет к еще более богатому её поведению. Рассматривается как статическая вихревая решетка, так и динамические режимы, возникающие при пропуска-

нии через сверхпроводник транспортного тока. Выводы работы о солитоннообразном характере переноса вихрей дефектами решетки типа "кинк" и "антикинк" подтверждены недавними экспериментами со сверхпроводящими пленками [221].

Рассмотренные в данной главе задачи о системах с периодическим пиннингом относятся не только к случаю сверхпроводников и конденсатов атомов щелочных металлов, но и к другой весьма актуальной области - динамике коллоидных частиц на периодических подложках (см., например, [222, 223]). Более того, эти задачи имеют связи со многими другими реальными системами, в которых проявляется конкуренция между беспорядком и регулярным потенциалом, а также происходят переходы между соизмеримыми и несоизмеримыми фазами, но где размерности всей системы или некоторых подсистем отличаются от фигурирующих тут. Так, можно упомянуть вихревые решетки в слоистых сверхпроводниках, где слои действуют в качестве одномерных центров пиннинга. Подобные центры могут также создаваться границами двойникования. Из-за противоборства со случайным потенциалом здесь также имеется богатая фазовая диаграмма [224–226]. Другой пример - волны зарядовой и спиновой плотностей. Наконец следует также упомянуть своеобразные эксперименты с заряженными пластиковыми шариками миллиметрового размера, помещенными на плоскость с периодическими "ловушками" – такие системы призваны моделировать вихревую решетку [227].

4.2. Обратимая намагниченность – вариационная модель

4.2.1. Модель Клема и попытки ее обобщения

Намагниченность сверхпроводников второго рода является их фундаментальной электромагнитной характеристикой. Исследованию намагниченности посвящено огромное количество экспериментальных и теоретиче-

ских работ (см., например, обзоры [56, 228]). В этой связи представляется важным получить формулы для намагниченности сверхпроводника, которые были бы пригодны для количественных расчетов в широком диапазоне внешних магнитных полей. Эта проблема уже давно обсуждается в литературе (см., например [56, 212, 213, 217, 228–234, 236–238]). Однако до недавнего времени не существовало удобного и надежного подхода, который позволял бы аналитически вычислить намагниченность сверхпроводника второго рода во всем интервале внешних полей $H_{c1} \leq H \leq H_{c2}$.

Наиболее просто проблема расчета магнитного момента сверхпроводника M решается в области малых полей $H \ll H_{c2}$. Здесь сердцевинные вихри Абрикосова занимают лишь малую часть объема и для нахождения $M(H)$ при $\kappa \gg 1$ используется лондоновское приближение, в рамках которого при вычислении локальных полей и токов вне сердцевин вихрей модуль параметра порядка полагается постоянным [212, 213]. В лондоновской модели зависимость намагниченности идеального изотропного сверхпроводника от магнитного поля в полях $H \gg H_{c1}$ может быть описана формулой Феттера [229]:

$$-4\pi M = H_{c1} - \frac{1}{4\kappa} \{\ln[2\kappa(H - H_{c1}) + 1, 34]\}. \quad (4.1)$$

В этой формуле, а также и в дальнейшем используется система единиц [213], в которой все расстояния нормированы на лондоновскую глубину проникновения магнитного поля $\lambda(T)$, магнитное поле нормировано на $H_c \sqrt{2}$ (где H_c термодинамическое критическое поле), а параметр порядка нормирован на свое равновесное значение. Безразмерные значения локального магнитного поля, векторного потенциала и параметра порядка обозначим, как \mathbf{h} , \mathbf{a} и f , соответственно. Заметим, что в этой системе единиц квант потока $\Phi_0 = 2\pi/\kappa$, а $H_{c2} = \kappa$. Зависимость Феттера (4.1) расходится при $H \rightarrow H_{c1}$. В непосредственной близости к H_{c1} намагниченность в лондоновской модели может быть рассчитана численно [237] или найдена аналитически в

приближении, в котором учитывается взаимодействие вихрей лишь с ближайшими соседями по вихревой решетке [213]. Для расширения области применимости лондоновского приближения были развиты различные подходы, частично учитывающие вклад сердцевин вихрей в свободную энергию сверхпроводника (см. [56, 217]).

Нижнее критическое поле не может быть вычислено самосогласованно в рамках модели Лондонов. По этой причине H_{c1} входит в соотношение (4.1) в виде параметра, и при $\kappa \gg 1$ его можно записать в виде [213]:

$$H_{c1} = \frac{1}{2\kappa}(\ln \kappa + \varepsilon), \quad (4.2)$$

Постоянная $\varepsilon \sim 1$ определяется структурой параметра порядка в сердцевине вихря. Отметим, что величина этой константы серьезным образом влияет на нижнее критическое поле, а потому и на обратимую намагниченность, поскольку зависимость от κ в (4.2) - довольно слабая (логарифмическая), так что даже для высокотемпературных сверхпроводников с большими κ ее точное значение необходимо учитывать. Константа ε была найдена Ху путем численного решения полной системы уравнений Гинзбурга-Ландау [230] (см. также [231]), при этом было получено: $\varepsilon \simeq 0,50$.

Несколькими годами позже Клем предложил [233] изящную и простую вариационную модель для описания сердцевин вихря Абрикосова, из которой, в частности, получил свою собственную оценку для данной константы: $\varepsilon \simeq 0,52$. Полученное Клемом значение оказывается чрезвычайно близким к найденной Ху величине, что подчеркивает высокую эффективность модели Клема, которая в итоге стала довольно популярной (см., например, работу [239], в которой она применялась для описания сердцевин вихря в сверхпроводнике с двухкомпонентным параметром порядка).

В модели Клема используется следующая пробная функция для параметра порядка $|\psi|$:

$$|\psi| = f(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_v^2}}, \quad (4.3)$$

где ξ_v вариационный параметр. Что чрезвычайно важно, использование этой функции позволяет решить аналитически второе уравнение Гинзбурга-Ландау (для магнитного поля). В итоге можно найти аналитически энергию вихря, как функцию вариационного параметра. Поле изолированного вихря описывается следующей функцией:

$$h(r) = \frac{1}{\kappa \xi_v K_1(\xi_v)} K_0\left(\sqrt{r^2 + \xi_v^2}\right), \quad (4.4)$$

где K_n - модифицированные функции Бесселя. Минимизация энергии при $\kappa \gg 1$ дает $\xi_v = \sqrt{2}/\kappa$ ($\sqrt{2}\xi(T)$ в размерных единицах). Таким образом, в выражении (4.4) исчезает характерная для модели Лондонов расходимость поля вихря в его сердцевине.

Учитывая высокую эффективность модели Клема для единичного вихря, представляется естественным попытаться ее обобщить на случай решетки вихрей, что позволило бы, в частности, отыскивать обратимую намагниченность сверхпроводника во всем диапазоне магнитных полей между H_{c1} и H_{c2} . Хорошо известно, что приемлимое аналитическое описание имеется лишь для области низких полей (лондоновская модель) и области высоких полей вблизи H_{c2} (подход Абрикосова).

Попытка обобщить модель Клема была предпринята в работе [234] самим Клемом с соавторами. В качестве пробной функции, описывающей поведение параметра порядка, было предложено использовать функцию (4.3), домноженную на дополнительный вариационный параметр f_∞ . Такая модифицированная пробная функция, примененная однако для *изолированного* вихря, позволяет снова отыскать магнитное поле аналитически. В итоге, в [234] была приведена аналитическая формула для намагниченности, применимая во всем диапазоне между H_{c1} и H_{c2} . При ее выводе полагалось, что полное магнитное поле в данной точке сверхпроводника задается суперпозицией полей единичных вихрей. Кроме того, соответствующая сумма заменялась интегралом. Далее, как утверждается в [234], значения вариаци-

онных параметров при фиксированной индукции B (то есть фиксированной плотности вихрей) вычислялись из условия минимума энергии системы. При этом оказывалось, что система переходит в нормальное состояние *в точности* при правильном значении верхнего критического поля, а выражение для намагниченности в высоких полях полностью согласуется с найденной Абрикосовым асимптотикой. В дальнейшем эта модель, получившая название модели Хао и Клема (Hao-Clem model), была обобщена на случай анизотропных сверхпроводников [235]. Модель Хао и Клема стала довольно популярной. Формула для намагниченности использовалась во многих десятках работ для анализа экспериментальных данных по измерению магнитного момента различных сверхпроводников (см., например, [240–247]).

Анализ предложенной в работе [234] идеи вскрывает некоторые несоответствия. Прежде всего, параметр порядка в регулярной решетке вихрей Абрикосова меняется в пространстве периодически, а не описывается выражением (4.3), пусть и с дополнительным параметром f_∞ . Это означает, что представление локального поля в виде суперпозиции вкладов отдельных вихрей, как это было сделано в [234], неправомерно – так мы *не* получаем решения второго уравнения Гинзбурга-Ландау. Далее, переход от суммирования к интегрированию должен привносить дополнительные погрешности. Поэтому вызывает недоумение, как использование столь грубой и несамосогласованной аппроксимации могло привести к *полному* согласию с известными *точными* результатами в высоких полях. Как было показано в статье с участием автора диссертационной работы [248], приведенные в [234] зависимости вариационных параметров от магнитной индукции не следуют из приведенных же в [234] выражений для энергии сверхпроводника. Более того, даже исключая переход от суммирования к интегрированию, не удастся разрешить данную проблему. Наиболее патологическое поведение обнаруживается как раз в высоких полях, так что система переходит в нормальное состояние в полях, существенно более высоких, нежели точ-

ное значение H_{c2} . По-видимому, зависимости вариационных параметров от индукции в [234] были подобраны таким образом, чтоб получить хорошее согласие с асимптотическими результатами Абрикосова в высоких полях. Поэтому модель ни в коем случае не может считаться самосогласованной и вариационной.

Далее, Хао и Клем опубликовали работу [236], в которой содержится утверждение о том, что даже в малых полях нельзя пренебрегать “влиянием вихревых сердцевин”, и поэтому модель Лондонов вообще не способна давать точного результата. Действительно, приведенная в [234] формула для намагниченности не слишком хорошо согласуется с лондоновской моделью даже в малых полях. Это однако связано с тем обстоятельством, что переход от суммирования к интегрированию в [234] приводит к дополнительной погрешности. Поэтому модель Лондонов, на самом деле, дает правильные результаты в своей области применимости [248], при условии, что используется правильное значение постоянной ε , входящей в H_{c1} . Эта константа, по сути, как раз и учитывает вихревые сердцевинки в малых полях. Отметим, что в ряде работ обращалось внимание на разногласия между результатами модели Хао-Клема и другими подходами к той же проблеме в малых полях [249], что признавалось некоторым недостатком этой модели – особенно, в контексте анализа экспериментальных данных. При этом однако подробному анализу эта модель не подвергалась.

Подчеркнем, что исходная модель Клема для единичного вихря является правильной. Поэтому представляется привлекательным обобщить ее, используя полностью самосогласованный подход, то есть развить полноценную вариационную процедуру. Это и сделано в диссертационной работе.

4.2.2. Построение самосогласованной модели

Ключевой идеей самосогласованной модели является отказ от использования какой-либо суперпозиции полей отдельных вихрей для описания локального магнитного поля. С самого начала можно ввести в рассмотрение круглую ячейку Вигнера-Зейтца, площадь которой однозначно связана с магнитной индукцией, а затем описывать параметр порядка в этой ячейке с помощью той же функции, что и в работе [234]. Отметим, что модель Вигнера-Зейтца уже использовалась в литературе для описания решетки вихрей - в численных расчетах и в малых полях, в том числе в рамках квазиклассических подходов [232, 250–254].

В рамках приближения Вигнера-Зейтца, и параметр порядка, и магнитное поле в ячейке имеют аксиальную симметрию. Тогда параметр порядка $|\psi|$ может быть представлен в виде $f(r) \exp(-i\varphi)$, где r радиальная координата, а φ - полярный угол. Плотность свободной энергии сверхпроводника может быть записана в виде суммы двух вкладов $F = F_{em} + F_{core}$, где F_{em} - энергия токов и полей, а F_{core} - энергия, связанная с подавлением $|\psi|$ в сердцевине вихря. В нашем случае, вклады определяются следующими формулами:

$$F_{em} = \frac{2\pi}{\kappa A_{cell}} \int_0^R \left[f^2 \left(a - \frac{1}{\kappa r} \right)^2 + h^2 \right] r dr, \quad (4.5)$$

$$F_{core} = \frac{2\pi}{\kappa A_{cell}} \int_0^R \left[\frac{1}{2} (1 - f^2)^2 + \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{df}{dr} \right)^2 \right] r dr, \quad (4.6)$$

где R и $A_{cell} = \pi R^2$ радиус и площадь ячейки, которые связаны с магнитной индукцией B соотношением $A_{cell} = 2\pi/B\kappa$.

Уравнения Гинзбурга-Ландау имеют вид:

$$-\frac{1}{\kappa^2 r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{df}{dr} \right) + f^3 - f + f \left(a - \frac{1}{\kappa r} \right)^2 = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dh}{dr} = f^2 \left(a - \frac{1}{\kappa r} \right). \quad (4.8)$$

Магнитное поле и векторный потенциал связаны соотношением

$$h = \frac{1}{r} \frac{d(ra)}{dr}. \quad (4.9)$$

Эти уравнения дополняются граничными условиями для магнитного поля и параметра порядка

$$h(R) = h_e, \quad (4.10)$$

$$f(0) = 0, \quad f'(R) = 0, \quad (4.11)$$

$$rf^{-2}(r) \frac{dh}{dr} = -1/\kappa; \quad r \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

Условие (4.12) следует из (4.8) и (4.9). Система уравнений (4.7)-(4.12) – намного проще, чем аналогичная система для ячейки гексагональной формы.

Используя пробную функцию, $f(r) = f_\infty r / \sqrt{r^2 + \xi_v^2}$, из работы [234], мы можем решить второе уравнение Гинзбурга-Ландау в ячейке *аналитически*:

$$h(r) = uI_0(f_\infty \sqrt{r^2 + \xi_v^2}) + vK_0(f_\infty \sqrt{r^2 + \xi_v^2}), \quad (4.13)$$

где u и v могут быть найдены из граничных условий (4.10) и (4.12):

$$u = \frac{f_\infty}{\kappa \xi_v} \frac{K_1(f_\infty \rho)}{K_1(f_\infty \xi_v)I_1(f_\infty \rho) - I_1(f_\infty \xi_v)K_1(f_\infty \rho)}, \quad (4.14)$$

$$v = \frac{f_\infty}{\kappa \xi_v} \frac{I_1(f_\infty \rho)}{K_1(f_\infty \xi_v)I_1(f_\infty \rho) - I_1(f_\infty \xi_v)K_1(f_\infty \rho)}, \quad (4.15)$$

где мы ввели обозначение $\rho = \sqrt{R^2 + \xi_v^2}$. Отметим, что пробная функция не удовлетворяет условию (4.11). Однако, соответствующая производная мала, так что это не приводит к каким-либо существенным погрешностям.

Значения вариационных параметров при данной индукции должны определяться из условия минимума плотности энергии $F = F_{em} + F_{core}$. Используя (4.8) и (4.1), можно найти следующее выражение для плотности магнитной энергии $F_{em} = Bh(0)$. Учитывая (4.13)-(4.15), получаем:

$$F_{em} = \frac{Bf_\infty}{\kappa \xi_v} \frac{K_0(f_\infty \xi_v)I_1(f_\infty \rho) + I_0(f_\infty \xi_v)K_1(f_\infty \rho)}{K_1(f_\infty \xi_v)I_1(f_\infty \rho) - I_1(f_\infty \xi_v)K_1(f_\infty \rho)}. \quad (4.16)$$

Выражение для F_{core} в [234] было определено правильно; оно имеет вид:

$$F_{core} = \frac{1}{2}(1 - f_{\infty}^2)^2 + \frac{1}{2}B\kappa\xi_v^2 f_{\infty}^2 (1 - f_{\infty}^2) \ln \left[1 + \frac{2}{B\kappa\xi_v^2} \right] + \frac{f_{\infty}^4}{2} - \frac{f_{\infty}^4}{2 + B\kappa\xi_v^2} + \frac{Bf_{\infty}^2 (1 + B\kappa\xi_v^2)}{\kappa(2 + B\kappa\xi_v^2)^2}. \quad (4.17)$$

Зависимость вариационных параметров от индукции рассчитывается численно путем минимизации $F(B, \kappa, \xi_v, f_{\infty})$ относительно ξ_v и f_{∞} . Ее можно аппроксимировать следующими аналитическими зависимостями (с точностью примерно 0,5%):

$$\xi_v(B, \kappa) = \xi_{v0} \left(1 - 4,3 \left(1,01 - \frac{B}{1,05\kappa} \right)^{6,3} \left(\frac{B}{\kappa} \right)^{1/2} \left(1 - 0,56 \left(\frac{B}{\kappa} \right)^{0,9} \right)^{1/2} \right), \quad (4.18)$$

$$f_{\infty}(B, \kappa) = \left(1 - \frac{B^2}{2,8\kappa^2} \right) \left(1 - \left(\frac{B}{t\kappa} \right)^4 \right)^{1/2} \left(1 + \frac{1,7B}{\kappa} \left(1 - \frac{1,4B}{\kappa} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (4.19)$$

где $t = 0,985$, а ξ_{v0} – значение ξ_v при $B = 0$. Оно определяется решением уравнения:

$$\kappa\xi_{v0} = \sqrt{2} \left[1 - \frac{K_0^2(\xi_{v0})}{K_1^2(\xi_{v0})} \right]. \quad (4.20)$$

Когда $\kappa \gg 1$, (4.20) имеет решение $\xi_{v0} = \sqrt{2}/\kappa$. Итак, мы нашли распределение магнитного поля и параметра порядка в ячейке в зависимости от магнитной индукции.

Верхнее критическое поле определяется как поле, при котором параметр порядка становится равным нулю. Как видно из (4.19), $f = 0$ при $H = 0,985\kappa$. Таким образом, разница между точным значением $H_{c2} = \kappa$ и вычисленным вариационным образом составляет примерно 1,5%. Расхождение представляется довольно естественным, ведь вариационный метод является приближенным. В то же время, малость погрешности свидетельствует о его высокой точности.

Отметим, что в нашем подходе можно учесть и анизотропию сверхпроводника в случае, если поле приложено вдоль одной из его главных осей [255].

Теперь мы можем найти обратимую намагниченность сверхпроводника. Она определяется известным соотношением:

$$-4\pi M = H - B. \quad (4.21)$$

Если известно точное решение уравнений Гинзбурга-Ландау, намагниченность может быть вычислена двумя эквивалентными способами. Во-первых, магнитное поле может быть найдено из условия минимума свободной энергии Гиббса $G = F - 2BH$:

$$H = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial B} \quad (4.22)$$

Второй метод заключается в использовании вириальной теоремы [256]: приложенное поле H может быть найдено из локальных магнитного поля h и параметра порядка f , как

$$H = \frac{1}{2BA_{cell}} \int (f^2 - f^4 + 2h^2) d^2\mathbf{r}, \quad (4.23)$$

где интегрирование проводится по площади ячейки.

Найдем намагниченность с помощью обоих методов. Согласно (4.22), имеем

$$\begin{aligned} -4\pi M = & -B + \frac{f_\infty}{\kappa\xi_v} \frac{K_0(f_\infty\xi_v)I_1(f_\infty\rho) + I_0(f_\infty\xi_v)K_1(f_\infty\rho)}{K_1(f_\infty\xi_v)I_1(f_\infty\rho) - I_1(f_\infty\xi_v)K_1(f_\infty\rho)} + \\ & + \frac{1}{2B\kappa^2\xi_v^2\rho^2} \{K_1(f_\infty\xi_v)I_1(f_\infty\rho) - I_1(f_\infty\xi_v)K_1(f_\infty\rho)\}^{-2} + \\ & + \frac{f_\infty^2(2 + 3B\kappa\xi_v^2)}{2\kappa(2 + B\kappa\xi_v^2)^3} + \frac{\kappa^2 f_\infty^2 \xi_v^2}{2} \left\{ \frac{1 - f_\infty^2}{2} \ln \left[\frac{2}{B\kappa\xi_v^2} + 1 \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1 - f_\infty^2}{2 + B\kappa\xi_v^2} + \frac{f_\infty^2}{(2 + B\kappa\xi_v^2)^2} \right\}, \quad (4.24) \end{aligned}$$

Итак, в случае использования первого подхода, зависимость намагниченности от индукции B задается (4.24) и (4.18)-(4.20). Зависимость H от B задается (4.21). Таким образом, мы получаем неявную функцию $M(H)$.

В рамках второго подхода, интеграл (4.23) может быть рассчитан лишь численно. Вычисления показывают, что значения намагниченности,

найденные обоими методами, практически неразличимы, что свидетельствует о высокой точности метода.

В малых полях вариационные параметры (4.18) и (4.19) могут рассматриваться в качестве констант, независимых от B при $\kappa \gg 1$. В этом случае, (4.24) может быть разложено в ряд по ξ_v . Тогда мы получаем известное из литературы [232] выражение для намагниченности в рамках приближения Вигнера-Зейтца в малых полях с H_{c1} , в котором учтено $\varepsilon = 0,52$:

$$-4\pi M(B) = H_{c1} + \frac{1}{2\kappa} \left[\frac{K_1(R)}{I_1(R)} + \frac{1}{2I_1^2(R)} \right] - B. \quad (4.25)$$

Когда $H \gg H_{c1}$, радиус ячейки $R \ll 1$, и (4.25) можно разложить по степеням R :

$$-4\pi M(B) = H_{c1} - \frac{1}{4\kappa} [\ln(2\kappa(H - H_{c1}) + \sigma)], \quad (4.26)$$

где $\sigma = 1,3456$. Аналогичный результат был получен в лондоновском пре-

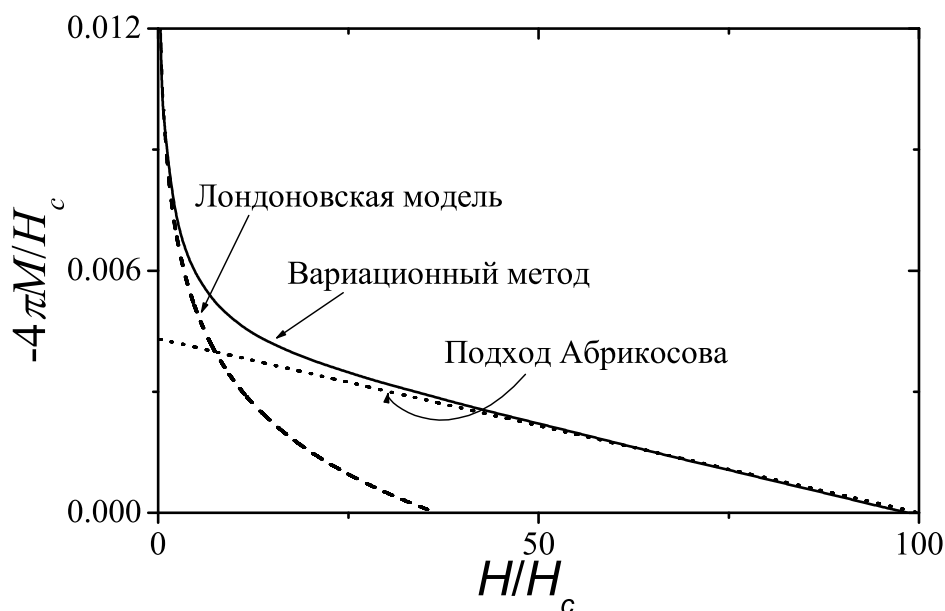


Рис. 4.1. Зависимости $-4\pi M(H)$ при $\kappa = 100$. Сплошная линия - результат вариационного метода, пунктирная линия - лондоновская модель, точечная линия - результат Абрикосова. На вставке - результат нашей вариационной модели (сплошная линия); в рамках модели Хао-Клема (точечная линия) – без замены суммы на интеграл и с самосогласованным вычислением вариационных параметров.

деле в [229] для треугольной решетки с $\sigma = 1.3431$. Таким образом, при правильном построении вариационной модели с пробной функцией [234] результаты в малых полях приходят в полное согласие с лондоновской моделью. Утверждение работы [233] о неприменимости этой модели является некорректным.

Зависимость намагниченности (4.24) от магнитного поля показана на Рис. 4.1 для $\kappa = 100$. Кривые намагниченности, в рамках модели Лондонов и подхода Абрикосова, также приведены. В малых полях намагниченность прекрасно описывается лондоновской моделью. Разница составляет менее одного процента. При $H \sim H_{c2}$ поведение намагниченности хорошо согласуется с результатами подхода Абрикосова. Наблюдается лишь небольшая разница, вызванная, главным образом, отклонением H_{c2} от точного значения. Для улучшения точности вблизи H_{c2} можно положить константу t в (4.19) равной 1. Также проводилось сравнение с результатами численного решения всей системы уравнений Гинзбурга-Ландау для треугольной решетки по методу Е. Х. Брандта [214] и с использованием его компьютерной программы, которое подтвердило высокую точность и в промежуточных полях. Сравнение с результатами для случая малых значений κ показывает, что тут точность ухудшается, но все же остается разумной. Тем не менее, лучше всего наш метод подходит для сверхпроводников с большими значениями κ .

На вставке к Рис. 4.1 сравниваются зависимости $-4\pi M(H)$, найденные в нашем подходе, и с использованием суммирования по вкладам от единичных вихрей, как предложено в [234]. Видно, что данное неконтролируемое приближение дает неадекватное поведение в высоких полях. Если при этом перейти к интегрированию от суммирования, как делалось в [234], получим дополнительные погрешности еще и в малых полях.

Отметим, что предложенная нами формула для обратимой намагниченности может использоваться для анализа экспериментальных данных.

Интересно, что формула Клема для параметра порядка в случае еди-

ничного вихря может использоваться и для описания одновихревого состояния в конечноразмерных сверхпроводниках, обладающих аксиальной симметрией. В частности, с ее помощью можно отыскать первое критическое поле. Результаты таких вычислений хорошо согласуются с результатами для вихревой фазовой диаграммы цилиндра (в случае большой длины экстраполяции де Женна), представленными в Главе 3 диссертации.

4.3. Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга

4.3.1. Вводные замечания

Сверхпроводники с системами периодически расположенных центров пиннинга, получаемыми с помощью современных нанотехнологических методов, в настоящее время привлекают большое внимание [57–60, 257–261]. Используя электронно-лучевую литографию, представляется возможным реализовывать хорошо контролируемые системы субмикронных “антидотов” и магнитных точек в сверхпроводящих пленках со слабым внутренним пиннингом. Такие наноструктурированные пленки демонстрируют резкие скачки в зависимости намагниченности от поля, которые соответствуют некоторым определенным конфигурациям вихрей, стабилизированным потенциалом пиннинга. При температурах, приближающихся к T_c , притяжение вихрей искусственно созданными центрами пиннинга особенно ярко выражено. Это, в частности, проявляется в том, что симметрия решетки вихрей при полях $H = H_1$ и $H = H_{1/2}$ (где H_1 – поле, при котором на каждый центр пиннинга приходится 1 квант потока) совпадает с квадратной, которая навязывается аналогичной симметрией потенциала пиннинга. Данная симметрия решетки вихрей была визуализирована непосредственно с помощью лоренцевской микроскопии [258]. В то же время, в отсутствие такого потенциала решетка обладает треугольной симметрией, которая, как хорошо

известно, минимизирует энергию межвихревого взаимодействия при заданной плотности вихрей.

Периодический потенциал пиннинга для вихрей можно создавать и в конденсатах атомов щелочных металлов с помощью оптической решетки. Явление навязывания своей симметрии потенциалом пиннинга вихревой решетке было продемонстрировано в этом случае экспериментально [61].

Представляет интерес вопрос, что будет происходить, если начать понижать силу пиннинга, создаваемого потенциалом с *квадратной* симметрий. Можно ожидать, что рано или поздно межвихревое отталкивание начнет доминировать над силами пиннинга, что каким-то образом приведет к восстановлению треугольной решетки. Именно этому вопросу и посвящен данный раздел диссертационной работы. Работа в этом направлении интересна как с точки зрения фундаментальной науки (переходы между соизмеримыми и несоизмеримыми фазами в *двумерной* ситуации), так и с точки зрения приложений (критический ток в сверхпроводниках).

4.3.2. Фазовая диаграмма

Рассмотрим двумерную систему с регулярной системой центров пиннинга периодом a , имеющей квадратную симметрию. Будем считать, что внешнее магнитное поле не превышает H_1 и соизмеримо с ним, то есть равно рациональной дроби от H_1 . Вихревая решетка может существовать, по крайней мере, в виде двух стабильных фаз - запиннигованной периодической решетки и треугольной решетки - в пределах сильного и слабого пиннинга, соответственно. Симметрия запиннигованной фазы не обязательно является квадратной. Вихревые конфигурации для разных полей в пределе сильного пиннинга перечислены в [59]. Некоторые из них будут далее фигурировать на Рис. 4.2. Когда сила пиннинга мала и конечна, энергетически выгодной должна быть слегка искаженная треугольная решетка. Она не яв-

ляется периодической, поскольку периоды в расположении рядов вихрей и в периодическом потенциале несоизмеримы. Переходы между этими фазами в пределе бесконечно малой характерной длины изменения потенциала пиннинга вокруг каждого его центра впервые исследовались в работе [262]. Здесь мы рассмотрим более общий случай произвольной ширины потенциальной ямы, создаваемой каждым центром пиннинга. Отметим, что данные экспериментов с конденсатами атомов щелочных металлов [61] для своего объяснения требуют как раз рассмотрения этого случая.

Две важные величины, которые будут фигурировать в дальнейшем изложении, – это энергия запиннингованной периодической решетки E_1 и энергия искаженной треугольной решетки E_2 . Плотность энергии пиннинга $U(x, y)$ удобно разложить в ряд Фурье:

$$U(x, y) = \sum_{m,n} A_{mn} \cos \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{a}. \quad (4.27)$$

Тогда, если все вихри запиннингованы, энергию можно представить через сумму коэффициентов в разложении

$$E_1 = E_{FL} + U(0, 0) = E_{FL} + \sum_{m,n} A_{mn}, \quad (4.28)$$

где $U(0, 0)$ потенциал в центре пиннинга, а E_{FL} – энергия вихревой решетки в заданной конфигурации (Рис. 4.2).

Энергия E_2 может быть найдена с привлечением методов теории упругости, в которой дискретная вихревая решетка заменяется эластичной средой. Ниже мы обсудим точность этой модели. Итак, для E_2 имеем

$$E_2 = E_{\Delta} + E_{pin} + E_{elast}, \quad (4.29)$$

где E_{Δ} энергия идеальной треугольной решетки, E_{pin} энергия пиннинга, а E_{elast} энергия искажения решетки. Для нахождения E_{pin} и E_{elast} сначала вычислим отклонения вихрей от положений в треугольной решетке. Введем

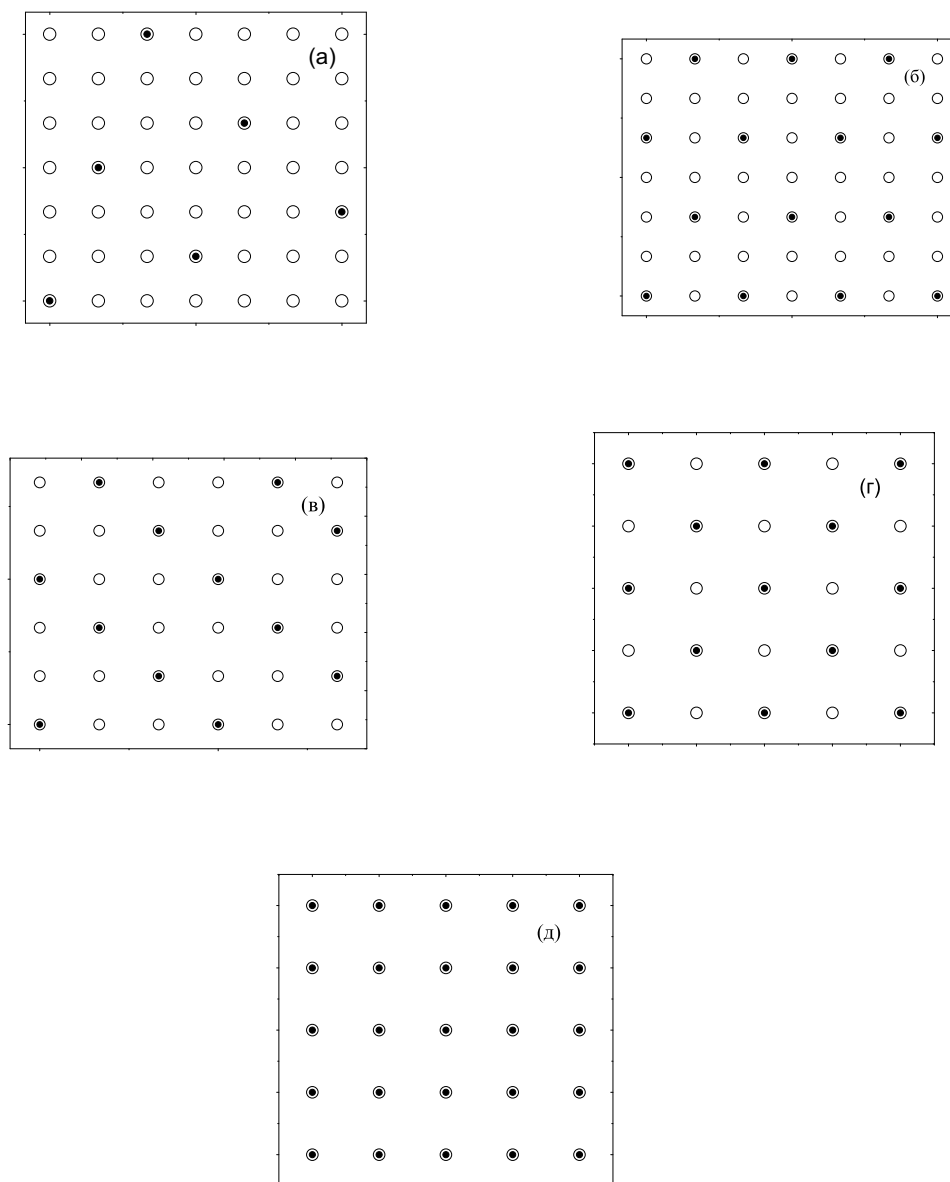


Рис. 4.2. Вихревые конфигурации при разных полях: (а) - $1/8$, (б) - $1/4$, (в) - $1/3$, (г) - $1/2$, (д) - 1. Темные круги - положения вихрей, незаполненные круги - положения центров пиннинга.

двумерный вектор отклонений эластичной среды $u(x, y)$. Для E_{pin} и E_{elast} имеем [209]:

$$E_{elast} = \frac{1}{2S} \int dS \left[(c_{11} - c_{66}) (\nabla u)^2 + c_{66} (\nabla_\alpha u_\beta)^2 \right], \quad (4.30)$$

$$E_{pin} = \frac{1}{2S} \int dS [U(x, y) - u(x, y)f(x, y)], \quad (4.31)$$

где интегрирование производится по площади S образца, а $f = -dU/dr$ – сила пиннинга, действующая на вихрь. В (4.31) учитывается лишь первое слагаемое в разложении энергии по $u(x, y)$.

Поле деформаций может быть найдено из минимума энергии (4.29).

Используя представление фурье, несложно получить

$$u_{k\alpha} = -\frac{(kf_k)k_\alpha}{c_{11}k^4} - \frac{k^{-2}(kf_k)k_\alpha - f_{k\alpha}}{c_{11}k^2}, \quad (4.32)$$

где $\mathbf{u}_k = \int \mathbf{u}(r)e^{i\mathbf{k}r} dS$, $\mathbf{f}_k = \int \mathbf{f}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}r} dS$. Учитывая (4.27), можно найти следующее выражение для $u(x, y)$:

$$u_x = -\frac{a}{2\pi c_{11}} \sum_{m,n} A_{mn} \frac{m}{m^2 + n^2} \sin \frac{2\pi mx}{a} \cos \frac{2\pi ny}{a}, \quad (4.33)$$

$$u_x = -\frac{a}{2\pi c_{11}} \sum_{m,n} A_{mn} \frac{n}{m^2 + n^2} \cos \frac{2\pi mx}{a} \sin \frac{2\pi ny}{a}. \quad (4.34)$$

Следует отметить, что слагаемое, пропорциональное $1/c_{66}$ в (4.32), пропадает из (4.33) и (4.34). Это слагаемое ответственно за скручивание решетки, и исчезает оно лишь в случае периодического потенциала.

В рамках теории упругости отклонения должны быть намного меньше, чем межвихревое расстояние d , что приводит к следующему ограничению:

$$u_x = -\frac{a}{2\pi c_{11}} \sum_{m,n} A_{mn} \frac{n}{m^2 + n^2} \cos \frac{2\pi mx}{a} \sin \frac{2\pi ny}{a}. \quad (4.35)$$

Теперь можно найти E_{elast} и E_{pin} из (4.30) и (4.31)

$$E_{elast} = \frac{1}{2c_{11}} (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2), \quad (4.36)$$

$$E_{elast} = \langle U \rangle - \frac{1}{2c_{11}} (\langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2). \quad (4.37)$$

Здесь мы использовали тождество Парсеваля:

$$\sum_{m,n} A_{mn}^2 + A_{00} = 2 \langle U^2 \rangle. \quad (4.38)$$

Итак, энергия упругости (4.36) зависит от дисперсии потенциала пиннинга, которая представляет собой меру резкости потенциала. Первое слагаемое в (4.37) – это энергия пиннинга в нулевом приближении по $\mathbf{u}(\mathbf{r})$. В этом приближении, положения вихрей не зависят от потенциала пиннинга, а энергия упругости равна 0. Последнее слагаемое описывает энергию корреляций между положениями вихрей и центров пиннинга. Это слагаемое в точности равно $-E_{elast}$ и поэтому исчезает из окончательного выражения для полной энергии:

$$E_2 = E_{\Delta} + \langle U \rangle. \quad (4.39)$$

Отметим, что соотношения (4.37)-(4.39) выполняются для любого потенциала пиннинга единичного центра. Для иллюстрации на Рис. 4.3 приведем структуру искаженной треугольной решетки, полученную из (4.33) и (4.34) при $H_1, c_{11}/U_{00} = 0, 2, \sigma = 0, 1a$. Пустые круги обозначают положения центров пиннинга, а черные круги - вихрей.

Сравнивая энергии запиннигованной решетки E_1 и искаженной треугольной решетки E_2 , можно получить приближенный критерий перехода между этими двумя состояниями. Сначала будем использовать гауссов профиль для моделирования взаимодействия между вихрем и центром пиннинга:

$$U(x, y) = -U_0 \exp\left[-(r/\sigma)^2\right], \quad (4.40)$$

где U_0 амплитуда взаимодействия, r расстояние между вихрем и центром пиннинга, σ – характерный масштаб изменения потенциала. Полная энергия пиннинга во всем образце дается суммой вкладов от всех центров:

$$U(x, y) = -U_0 \exp\left[-(r/\sigma)^2\right], \quad (4.41)$$

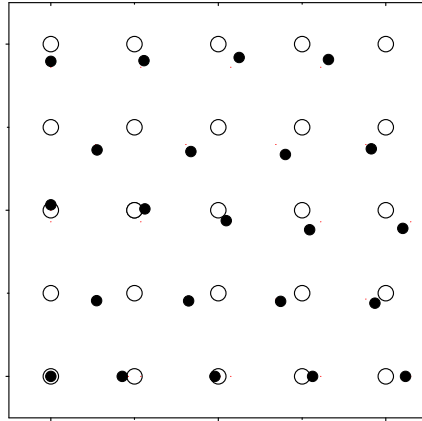


Рис. 4.3. Структура треугольной решетки, искаженной периодическим потенциалом пиннинга.

Учитывая (4.41) и соотношение $\langle U(x, y) \rangle = -U_0 \pi \sigma^2 / a^2$, приравняем (4.28) и (4.39), получив следующий критерий перехода:

$$U_0 = \frac{\Delta E}{\pi \frac{\sigma^2}{a^2} - \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 m^2}{\sigma^2}\right) \right)^2}, \quad \Delta E = E_{lat} - E_{tr}. \quad (4.42)$$

Это соотношение определяет границу между запиннингованной и искаженной треугольной решетками. Диаграмма состояний представлена на Рис. 4.4 в плоскости $U_0 - \sigma$. Ниже линии 1 треугольная решетка имеет наименьшую энергию, а выше – запиннингованная периодическая решетка. Ясно видно, что эффективность пиннинга зависит не только от амплитуды потенциала, но также и от размера ямы. Действительно, из (4.42) следует, что контролирующий параметр – это $U_0 \left[\pi \frac{\sigma^2}{a^2} - \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 m^2}{\sigma^2}\right) \right)^2 \right]$.

Чем больше размер потенциальной ямы, тем большая амплитуда требуется для стабилизации запиннингованной фазы. Вскоре мы убедимся, что эта диаграмма состояний соответствует решетке при разных полях, соизмеримых с H_1 , но не превышающих его (например, $H_{1/8}$, $H_{1/4}$, $H_{3/8}$, $H_{1/3}$, $H_{2/3}$), кроме H_1 and $H_{1/2}$, когда ситуация несколько сложнее.

При некоторых определенных полях структура вихревой решетки мо-

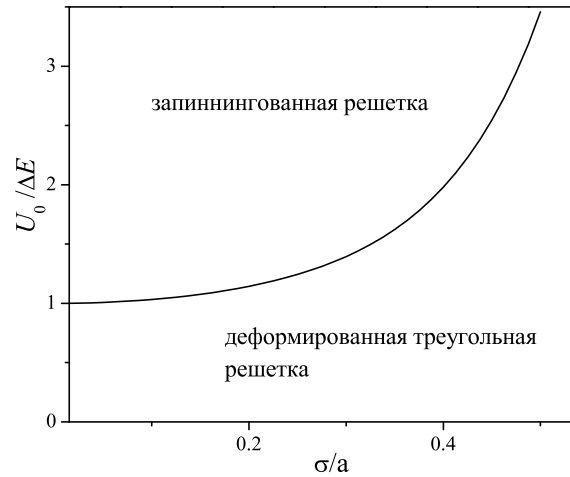


Рис. 4.4. Диаграмма состояний в плоскости “амплитуда взаимодействия центра пиннинга и вихря – характерный масштаб потенциала пиннинга” в полях соизмеримых с H_1 , но меньших его и не равных $H_{1/2}$.

жет становится более сложной. Это, в частности, происходит при H_1 и $H_{1/2}$, когда в запиннигованной фазе решетка имеем квадратную симметрию (Рис. 4.2 (d), (e)). Как было замечено в [262], в этом случае, диаграмма состояний обогащается *промежуточной* фазой, в которой вихри в, скажем, нечетных рядах сорваны с центров пиннинга и смещены в пространства посередине центров пиннинга, как показано на Рис. 4.5. Иными словами, запиннигована только половина вихрей. В [262] существование этого состояния было предсказано для случая ямы бесконечно малого размера. Симметрия вихревой решетки в промежуточной фазы близка к гексагональной, а увеличение энергии пиннинга по сравнению с запиннигованной квадратной решеткой компенсируется уменьшением энергии межвихревого взаимодействия. Исследуем диаграмму состояний при $H = H_{1/2}, H_1$, учитывая существование промежуточного состояния. Энергия этой фазы может быть представлена в виде

$$E_{int} = E'_{tr} + \frac{1}{2} \left(U(0, 0) + U\left(0, \frac{a}{2}\right) \right). \quad (4.43)$$

где E'_{tr} энергия взаимодействия вихрей. Отметим, что E'_{tr} близко к E_{tr} . Грани-

ца между искаженной треугольной решеткой и промежуточной фазой определяется следующим соотношением:

$$U_0 = 2(E'_{tr} - E_{tr}) \left[-2\pi \frac{\sigma^2}{a^2} + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 m^2}{\sigma^2}\right) \right)^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(m+0.5)^2}{(\sigma/a)^2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2}{(\sigma/a)^2}\right) \right]^{-1}. \quad (4.44)$$

Граница между промежуточным состоянием и квадратной запиннигованной решеткой определяется равенством:

$$U_0 = 2(E_{sq} - E'_{tr}) \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 m^2}{\sigma^2}\right) \right)^2 - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2(m+0.5)^2}{\sigma^2}\right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{a^2 m^2}{\sigma^2}\right) \right]^{-1}, \quad (4.45)$$

где E_{sq} энергия идеальной квадратной решетки ($E_{lat} = E_{sq}$).

Диаграмма состояний для H_1 и $H_{1/2}$ представлена схематически на Рис. 4.6. Она оказывается более сложной, чем диаграмма на Рис. 4.4. Ниже линии 1 искаженная треугольная решетка более энергетически выгодна; в области между линиями 1 и 2 - промежуточное состояние; выше линии 2 - запиннигованная квадратная решетка. Значения E_{tr} , E'_{tr} и E_{sq} были вычислены с использованием модели Лондонов при $H = H_1$, $a = \lambda$. Энергия нормализована на $H_c^2/8\pi$.

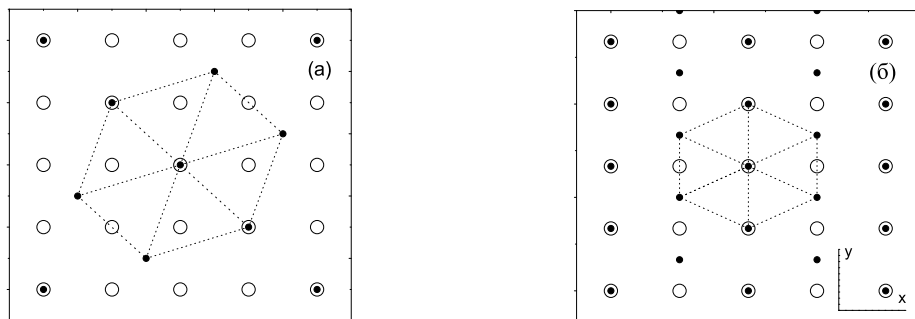


Рис. 4.5. Структура полузапиннигованной (промежуточной) решетки в полях $H_{1/2}$ (а) и H_1 (б).

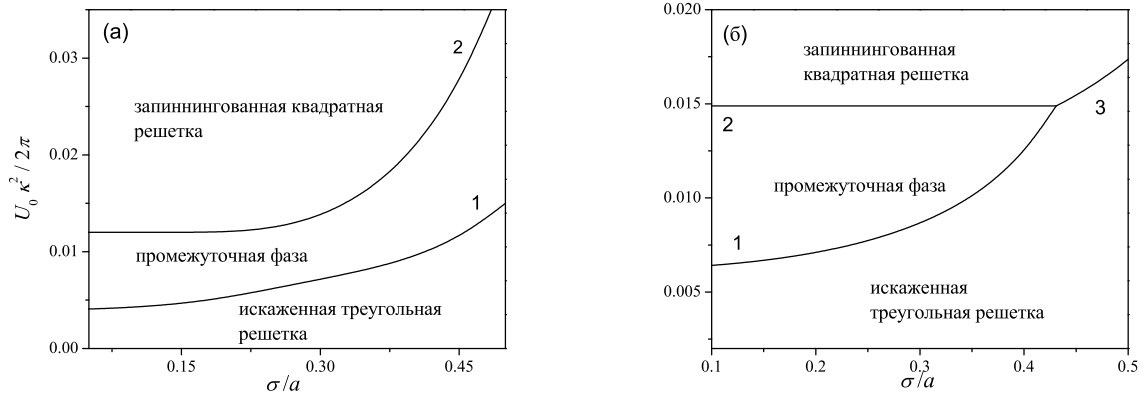


Рис. 4.6. Диаграмма состояний в плоскости “амплитуда взаимодействия вихря с центром пиннинга – масштаб потенциала пиннинга” при $H = H_1$. Рис. (а) относится к гауссову модельному потенциалу, а (б) - к параболическому. Аналогичные диаграммы получаются и при $H = H_{1/2}$.

Для исследования того, как диаграмма состояний зависит от модельного потенциала пиннинга, был также проанализирован случай параболического потенциала пиннинга отдельного центра:

$$V(r) = -U_0 \left[1 - \left(\frac{r}{\sigma} \right)^2 \right], \text{ if } r \leq \sigma; V(r) = 0, r > \sigma, \quad (4.46)$$

В этом случае следующие критерии определяют переходы между тремя состояниями (в порядке роста силы пиннинга):

$$U_0 = \frac{2(E'_{tr} - E_{tr})}{1 - \pi \frac{\sigma^2}{a^2}}, \quad (4.47)$$

$$U_0 = 2(E_{sq} - E'_{tr}), \quad (4.48)$$

$$U_0 = \frac{E_{sq} - E'_{tr}}{1 - \pi \frac{\sigma^2}{2a^2}}. \quad (4.49)$$

Диаграмма состояний для этого потенциала представлена на Рис. 4.6 для $a = 0, 2\lambda$ и $H = H_1$. На ней также присутствует промежуточное состояние. Основная разница со случаем гауссова потенциала - существование тройной точки. В этом случае, увеличивая глубину ямы, можно и не прийти в промежуточное состояние, а перейти сразу из треугольной решетки в

квадратную. Интересно, что именно такое поведение было получено в экспериментальной работе [61] с конденсатами атомов щелочных металлов в оптической решетке. По-видимому, эти результаты объясняются тем обстоятельством, что потенциал пиннинга представлял из себя набор “широких” ям.

4.3.3. Критический ток

Здесь мы исследуем критический ток образца в необычном промежуточном состоянии. Рассмотрим две ситуации - когда внешний ток течет вдоль осей y и x на Рис. 4.2. Понятно, что критические токи отличаются в этих двух случаях.

Фактически в промежуточной фазе существует две системы потенциальных ям для единичного вихря. Первая система формируется центрами пиннинга, как таковыми, и положения этих ям фиксированы. Вторая система формируется из-за взаимодействия с вихрями, захваченными центрами пиннинга. В отсутствие внешнего тока ямы второго типа имеют минимумы в междуузлиях. Когда приложен транспортный ток, вихри, захваченные центрами пиннинга, смещаются, и поэтому смещаются и положения ям второго типа. Поэтому смещения и запиннигованных вихрей и вихрей в междуузлиях зависят друг от друга, а также от параметров потенциала пиннинга.

Сначала рассмотрим ситуацию, когда ток направлен по оси j , а $H = H_1$. Сила Лоренца, действующая на вихри, направлена по x и по модулю равна

$$f_L = \frac{2\pi}{\kappa} j. \quad (4.50)$$

Здесь и ниже используем безразмерные переменные: расстояния r , поле h и плотность энергии нормированы на λ , $H_c \sqrt{2}$, $H_c^2/8\pi$, соответственно. В этой системе $\Phi_0 = 2\pi/\kappa$. Для вычисления энергии системы будем использовать

лондоновское выражение для поля вихря:

$$b(r) = \frac{1}{\kappa} K_0(r). \quad (4.51)$$

Для магнитной энергии вихря имеем:

$$E_m = \frac{2\pi}{\kappa} h(0), \quad (4.52)$$

где $h(0)$ полное поле в центре вихря. Для описания потенциала единичного центра пиннинга используем модельную гауссову зависимость (4.41). Обозначим смещения вихрей в междуузлиях и на центрах пиннинга как x_1 и x_2 . Энергии F_1 и F_2 этих вихрей равны

$$F_1 = \frac{2\pi}{\kappa^2} \sum_{m,n} K_0 \left(\sqrt{(a + x_1 - x_2 + 2am)^2 + \left(\frac{a}{2} + an\right)^2} \right) - U_0 \sum_{m,n} \exp \left(-\frac{(x_1 + am)^2 + \left(\frac{a}{2} + an\right)^2}{\sigma^2} \right) + f_L x_1, \quad (4.53)$$

$$F_2 = \frac{2\pi}{\kappa^2} \sum_{m,n} K_0 \left(\sqrt{(a + x_1 - x_2 + 2am)^2 + \left(\frac{a}{2} + an\right)^2} \right) - U_0 \sum_{m,n} \exp \left(-\frac{(x_2 + am)^2 + (an)^2}{\sigma^2} \right) + f_L x_2. \quad (4.54)$$

В этих выражениях были опущены все слагаемые, не зависящие от x_1 и x_2 .

Положения вихрей x_1 и x_2 могут быть найдены из баланса сил:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 0. \quad (4.55)$$

Два последних уравнения можно решить численно. В результате можно найти критический ток, то есть максимальное значение тока, при котором (4.55) еще имеют решения. Зависимость криттока от амплитуды взаимодействия между вихрем и центром пиннинга U_0 показана на Рис. 4.7 при $\sigma = 0, 1a$, $a = \lambda$. Ниже сплошной линии вихревая решетка стабильна, а выше она становится неустойчивой, т.е. вихри приходят в движение.

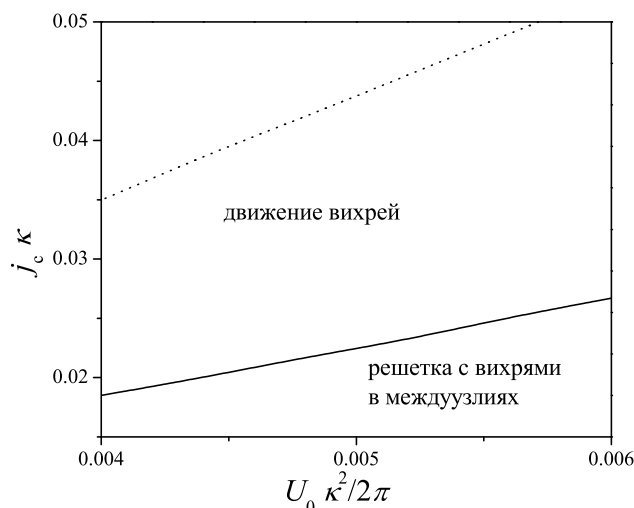


Рис. 4.7. Диаграмма состояний для промежуточной фазы в плоскости “транспортный ток – амплитуда взаимодействия вихря с центром пиннинга” при $H = H_1$, $\sigma = 0, 1a$, $a = \lambda$. Ток течет в направлении y . Сплошная линия описывает критический ток, при котором решетка приходит в движение. Точечная кривая - критический ток в направлении x .

Ситуация оказывается более сложной, если внешний ток течет в направлении x , см. Рис. 4.2 (б). Для этого случая также решалась система уравнений, аналогичных (4.53)-(4.55). Результаты представлены на Рис. 4.8. Было получено, что срыв вихревой решетки с системы центров пиннинга происходит в два этапа. Сначала положения вихрей в междуузлиях становятся неустойчивыми при некотором конечном токе, и вихри перепрыгивают в ближайшие центры пиннинга в направлении y . Зависимость этого тока от U_0 показана на Рис. 4.8 при $\sigma = 0, 1a$, $a = 1$ (кривая 1). Запиннигованная квадратная решетка остается стабильной до значения полного критического тока (кривая 2), который более чем в две раза превышает ток, приводящий к первой неустойчивости. Таким образом, диаграмма состояний (Рис. 4.8) состоит из трех областей: фазы с вихрями в междуузлиях, запиннигованной квадратной решеткой и движущимися вихрями. Зависимость критического тока от U_0 для этого случая также показана на Рис. 4.7 (точечная линия) для сравнения с критическим током в направлении y (сплошная кривая).

Критический ток в первом случае значительно сильнее. Это происходит из-за того, что для разрушения стабильности в расположении вихрей в первом случае требуется подавить потенциальные ямы, создаваемые центрами пиннинга, а во втором случае – всего лишь ямы, создаваемые отталкиванием от запиннигованных вихрей. Анизотропия критического тока – специфическая черта промежуточного состояния, которая может использоваться для его экспериментального обнаружения.

4.4. Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга и беспорядка: статика

4.4.1. Модель

В данном параграфе рассматривается более сложная ситуация по сравнению с той, что изучалась в предыдущем параграфе. А именно, в систему добавляется случайный потенциал. Беспорядок всегда присутствует

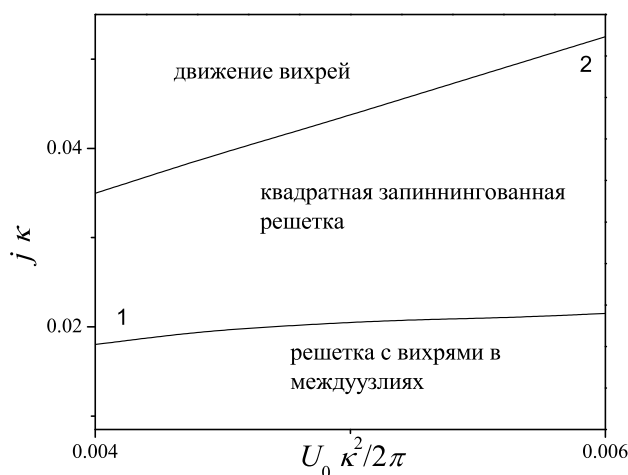


Рис. 4.8. Диаграмма состояний для промежуточной фазы в плоскости “транспортный ток – амплитуда взаимодействия вихря с центром пиннинга” при $H = H_1$, $\sigma = 0,1a$, $a = \lambda$. Ток течет в направлении x . Линия 1 соответствует переходу от решетки с вихрями в междуузлиях к запиннигованной квадратной решетке, а линия 2 описывает депиннинг.

в реальных физических системах. Более того, его нельзя полностью исключить и в численном моделировании, где его влияние должно тщательно анализироваться.

Системы с периодически расположенными центрами пиннинга, потенциально важные для приложений, должны по всей видимости быть гораздо больше размера элементарной ячейки решетки таких центров. Поэтому некоторый беспорядок в расположении вихрей или дефекты вихревой решетки неизбежны. Таким образом, понимание основных свойств систем с двумя типами потенциала пиннинга представляет не только научный, но и практический интерес.

С точки зрения фундаментальной науки, мы здесь имеем дело с моделью Френкеля-Конторовой в двух измерениях с дополнительным беспорядком. Очевидно, что точно такая задача не решается. Однако многие результаты могут быть получены с помощью относительно несложного полуквантового анализа, основанного на классификации возможных дефектов решетки вихрей. Далее результаты можно сравнить с результатами численного моделирования методами молекулярно-динамических симуляций. Данный подход, который мы и станем использовать, позволяет, с одной стороны, подтвердить картину, основанную на рассмотрении дефектов решетки, а с другой - понять сами результаты численных экспериментов, которые обычно нуждаются в объяснении не меньше, чем данные реальных экспериментов.

Итак, структура решетки вихрей зависит от соревновательного действия трех факторов: решетки центров пиннинга, имеющей квадратную симметрию, которая пытается навязать свою конфигурацию решетке вихрей; межвихревого взаимодействия, стремящегося выстроить решетку треугольной симметрии; случайного потенциала, пытающегося разрушить порядок в расположении вихрей.

Будем считать, что случайный потенциал создается хаотически рас-

положенными центрами пиннинга, каждый из которых создает яму с размерами $\sigma_r \lesssim \sigma$, a и глубиной $U_r \lesssim U_0$. Концентрация таких центров n_r больше или равна концентрации регулярно расположенных центров пиннинга $n_r \gtrsim a^{-2}$. Для описания потенциала единичного центра – как из числа расположенных периодически, так и из тех, которые расположены случайно – будем использовать параболический потенциал (4.46) с разными параметрами для этих двух типов центров.

Полная энергия системы равна

$$E = \sum_{i,j} H_{int}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) + \sum_{i,n} V(\mathbf{R}_n - \mathbf{r}_i) + \sum_i \varepsilon(\mathbf{r}_i), \quad (4.56)$$

где \mathbf{r}_i и \mathbf{R}_n - положения вихрей и регулярно расположенных центров пиннинга, соответственно. Будем также рассматривать самую простую ситуацию, отвечающую фактору заполнения 1, когда плотность вихрей и периодически расположенных центров пиннинга совпадают.

Известно, что эффективная энергия пиннинга создается флуктуациями плотности случайного потенциала пиннинга, то есть сгустками центров пиннинга. Можно считать, что эта энергия на площади S_0 равна среднеквадратичному отклонению потенциала пиннинга, $U_r \sqrt{n_r S_0}$ [55, 209, 210].

4.4.2. Дефекты вихревой решетки

Рассмотрим типичные дефекты решетки вихрей в отсутствии случайного потенциала, а затем определим, при каких ограничениях на случайный потенциал могут возникать те или иные дефекты. При этом деформированная треугольная решетка, возникающая в пределе слабого периодического пиннинга, уже является разупорядоченной.

Кинки. – И квадратная, и промежуточная (полузапиннигованная) решетки вихрей периодичны. Можно ожидать, что существует конфигурация (кинк), в которой решетка в одной части системы сдвинута на период a относительно другой, а между ними есть некоторая переходная область. В

этом смысле, система напоминает систему типа синус-Гордона. В системе синус-Гордона кинк имеет протяженный характер, так что в зависимости от параметров задачи переходная область может быть сколь угодно большой по сравнению с периодом решетки. Кинки играют важную роль в разрушении порядка. До этого в параграфе мы рассматривали систему типа синус-Гордона, в которой порядок разрушался температурными флуктуациями, а сейчас мы имеем дело с "вмороженным" беспорядком. Изучим более подробно структуру кинка в исследуемой системе.

Несмотря на аналогии с системой типа синус-Гордона, имеются и важные отличия. А именно, и квадратная и промежуточная фазы решетки, в отличие от треугольной, не соответствуют минимуму энергии межвихревого взаимодействия. Более того, они локально нестабильны относительно деформаций. Поэтому ясно, что кинк должен иметь дискретную структуру, как показано на Рис. 4.9, и ширина переходной области всегда равна a . Более подробно это показано в приложении к работе [263] (с участием автора диссертации).

В работе [264] исследовалось разупорядочивание эластических сред случайным потенциалом в присутствии периодического пиннинга. Рассматривался общий случай разных размерностей системы и потенциала пиннинга. Система, которая изучается в данной главе диссертационной работы, подпадает под один из частных случаев, рассмотренных в [264]. Однако авторы этой работы упустили из виду, что квадратная решетка сама по себе нестабильна, и описывали энергию деформации в терминах упругости, что ставит под сомнение адекватность их результатов.

Важно отметить, что в системе большого размера прямой кинк не выгоден энергетически, поскольку его энергия пропорциональна размеру системы. Поэтому беспорядок индуцирует замкнутые кинки конечного размера, как показано на Рис. 4.9 (а).

Кинк можно себе представить в виде цепочки или "пружины" из де-

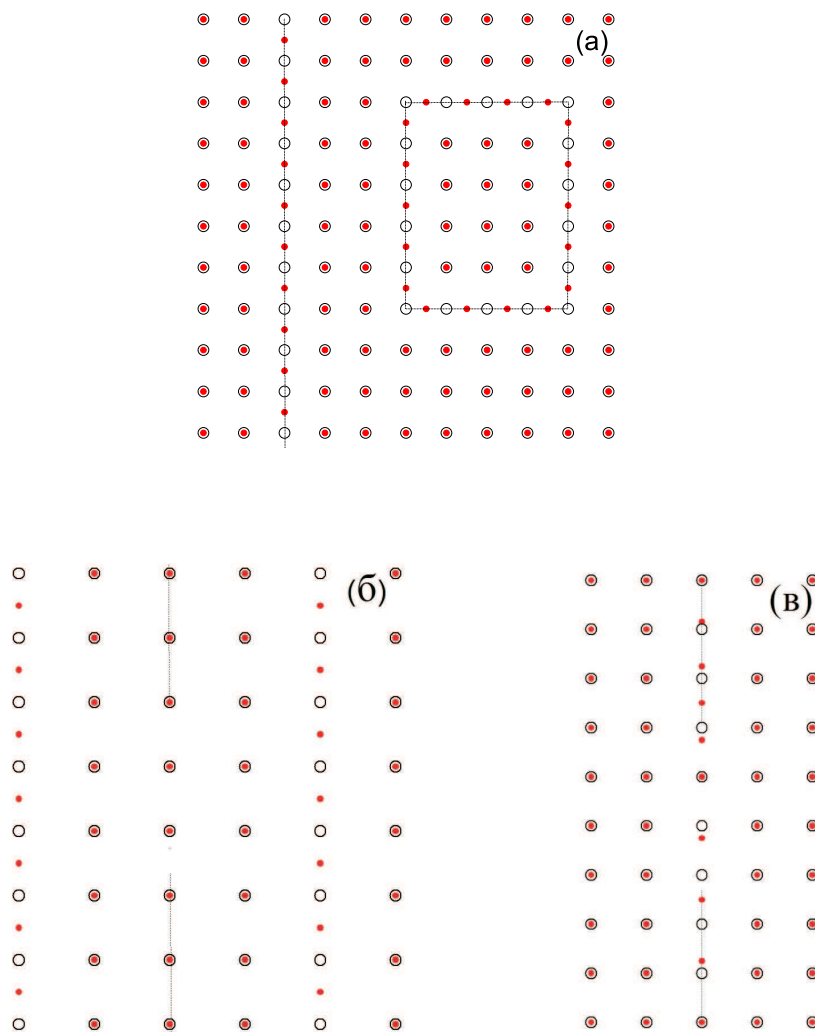


Рис. 4.9. Схематические изображения типичных дефектов вихревой решетки. Вихри изображены красными кругами, а центры пиннинга – незаполненными кругами. На Рис. (а) изображены цепочки депиннигованных вихрей – прямая и замкнутая. На Рис. (б) изображен ряд запиннигованных вихрей в промежуточной фазе. На Рис. (в) изображен квазиодномерный дефект типа “кинк-антикинк” внутри запиннигованной фазы.

пиннингованных вихрей, которая ведет себя как некоторый эластичный объект, так что вихри внутри него коррелированы и их поведение существенно коллективно из-за их взаимодействия. Из Рис. 4.9 (а) видно, что подобный дефект может рассматриваться в качестве зародыша промежуточного состояния. Поэтому плотность энергии такого дефекта может быть оценена из сравнения энергий промежуточной и запиннированного состояний, которые, в свою очередь, определяются выражениями

$$\varepsilon_{hp} = \frac{E_{hp} - U_0/2}{a^2}, \quad (4.57)$$

$$\varepsilon_{sq} = \frac{E_{sq} - U_0}{a^2}. \quad (4.58)$$

Первые слагаемые в числителях обоих выражений соответствуют энергии межвихревого взаимодействия, а вторые – энергию пиннинга на один вихрь. Окончательно, для плотности энергии дефекта получаем

$$E_d^{(1)} \approx \varepsilon_{hp} - \varepsilon_{sq} = \frac{U_0/2 - (E_{sq} - E_{hp})}{a^2}. \quad (4.59)$$

Важно отметить, что плотность энергии кинка в этом приближении обращается в нуль при переходе от квадратной к промежуточной решетке, т.е. при $U_0 = 2(E_{sq} - E_{hp})$, поскольку энергии этих двух состояний сравниваются.

Домены треугольной решетки. – Несложно понять, что запиннированное состояние может также содержать дефект в виде домена деформированной треугольной решетки. Опять-таки, вихри в подобной структуре депиннигованны коллективно. Плотность энергии в этом дефекте может быть оценена тем же образом, что и раньше. В итоге, получаем:

$$E_d^{(2)} \approx \varepsilon_{tr} - \varepsilon_{sq} = \frac{U_0 - (E_{sq} - E_{tr})}{a^2}. \quad (4.60)$$

Теперь кратко опишем возможные дефекты промежуточной фазы. Здесь можно ожидать, что типичный кинк состоит из ряда пиннигованных вихрей. Вдобавок снова можно ожидать и появления доменов треугольной

решетки. Дефект первого типа изображен на Рис. 4.9 (б). Плотности энергии для этих двух типов дефектов могут быть снова оценены в виде разницы в плотностях энергии между зарождающейся в них фазой и начальным состоянием. В итоге, имеем, соответственно

$$E_d^{(3)} \approx \varepsilon_{sq} - \varepsilon_{hp} = \frac{-U_0/2 + (E_{sq} - E_{hp})}{a^2}, \quad (4.61)$$

$$E_d^{(4)} \approx \varepsilon_{tr} - \varepsilon_{hp} = \frac{U_0/2 - (E_{hp} - E_{tr})}{a^2}. \quad (4.62)$$

Который из дефектов имеет меньшую плотность энергии, зависит от положения на диаграмме состояний.

Квазиодномерные дефекты типа "кинк-антикинк". – Поскольку система двумерна, в ней имеется периодичность и внутри одного ряда регулярных центров пиннинга. Значит, можно ожидать появления дефектов типа “кинк” внутри *одного* ряда. Такие дефекты стабилизируются в системе при значительно больших значениях U_0 , когда потенциальная яма для запиннигованного вихревого ряда намного глубже, чем эффективная яма, создаваемая для депиннигованного вихря окружающими рядами запиннигованных вихрей. Дефект представляет собой цепочку вихрей, имеющую *конечную* длину, но при этом цепочка не является замкнутой. Это возможно, поскольку в одной части цепочка растянута, так что есть одна вакансия, а в другой – сжата, так что имеется один лишний вихрь. Дефект изображен на Рис. 4.9 (в) для простейшего случая, когда цепочка прямая. Его можно интерпретировать как структуру типа “кинк-антикинк”.

Изучим более подробно рассматриваемый дефект. Будем считать, что положения всех остальных вихрей вне цепочки фиксированы. Потенциальная энергия вихря в цепочке задается суммой энергии его взаимодействия с фиксированными вихрями, с центрами пиннинга и с другими вихрями в цепочке. Первый вклад может быть найден суммированием по обратной

решетке, что, при $a \sim 1$, ведет к

$$E_1^{(1D)} \simeq \frac{4\pi\pi}{\kappa^2 a} \sum_k \left(\frac{\exp(-a)}{1 - \exp(-a)} + \frac{a}{\pi} \exp(-2\pi) \cos \frac{2\pi y_k}{a} \right), \quad (4.63)$$

где суммирование производится по положениям всех вихрей в цепочке y_k . Из этого выражения видно, что межвихревое взаимодействие стремится произвести сдвиг на $a/2$ в направлении y , приведя симметрию решетки ближе к треугольной.

Энергия взаимодействия вихрей в цепочке с центрами пиннинга имеет вид

$$E_2^{(1D)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_k V(an - y_k), \quad (4.64)$$

где n нумерует центры пиннинга. Для иллюстрации суммы $E_1^{(1D)}$ и $E_2^{(1D)}$ представлена на Рис. 4.10 для вихрей в цепочке, расположенных периодически, $y_k = y + ka$. Сумма, конечно, тоже является периодической функцией. Минимум энергии для цепочки достигается при квадратной конфигурации из-за надлежащего выбора параметров.

Третий вклад в энергию дефекта может быть оценен с привлечением идей теории упругости. Этот вклад зависит от взаимного расположения

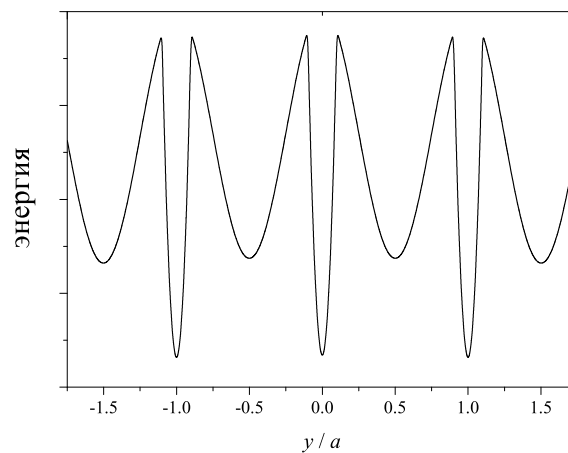


Рис. 4.10. Потенциальная энергия для вихревого ряда, как целого, в квадратной решетке вдоль одной из основных осей.

вихрей. Будем учитывать лишь взаимодействие с ближайшими соседями. Используя разложение Тейлора для модифицированной функции Бесселя, получаем выражение для энергии всей цепочки

$$E_3^{(1D)} = \frac{2\pi}{\kappa^2} \left(K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a} \right) \sum_k (\Delta u_k)^2, \quad (4.65)$$

где Δu_k смещение вихря под номером k по отношению к его соседу под номером $(k-1)$. Заменяем $\Delta u_k/a$ на du/dy и перейдем в (4.65) от суммирования к интегрированию:

$$E_3^{(1D)} = \frac{2\pi a}{\kappa^2} \left(K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a} \right) \int \left(\frac{du}{dy} \right)^2 dy, \quad (4.66)$$

где интегрирование ведется вдоль цепочки.

Таким образом, полная энергия дефекта дана суммой трех вкладов:

$$E^{(1D)} = E_1^{(1D)} + E_2^{(1D)} + E_3^{(1D)}. \quad (4.67)$$

Ее можно оценить весьма простым способом. Будем считать, что типичный “кинк-антикинк” имеет характерную длину l_{1D} . Всего имеется l_{1D}/a вихрей в такой цепочке – и эти вихри сорваны со своих центров пиннинга. Депиннинг приводит к увеличению энергии каждого такого вихря. Если ширина потенциальной ямы σ намного меньше расстояния между вихрями a , увеличение энергии равно U_0 , что следует из (4.66). В то же время, каждый вихрь теряет некоторую энергию, поскольку решетка больше не является квадратной и приближается локально к треугольной, как видно из (4.63). Полное увеличение энергии для цепочки l_{1D}/a вихрей приблизительно равно

$$E_1^{(1D)} + E_2^{(1D)} \approx l_{1D}/a \left(U_0 - \frac{4\pi}{\kappa^2} e^{-2\pi} \right). \quad (4.68)$$

Эластичная энергия цепочки $E_3^{(1D)}$ может быть легко оценена из (4.66):

$$E_3^{(1D)} \approx \frac{2\pi a^3}{\kappa^2} \frac{1}{l_{1D}} \left(K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a} \right). \quad (4.69)$$

Теперь можно минимизировать полную энергию $E^{(1D)}$ по l_{1D} , после чего находим оптимальную длину дефекта

$$l_{1D} \approx \sqrt{\frac{2\pi a^4}{\left(U_0 - \frac{4\pi}{\kappa^2} e^{-2\pi}\right) \kappa^2} \left(K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a}\right)}. \quad (4.70)$$

Тогда для энергии дефекта получаем

$$E^{(1D)} \approx 2 \sqrt{\frac{2\pi a^2 \left(U_0 - \frac{4\pi}{\kappa^2} e^{-2\pi}\right)}{\kappa^2} \left(K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a}\right)}. \quad (4.71)$$

Ниже будет показано, что в пределе слабого пиннинга квазиодномерные дефекты имеют более высокую энергию по сравнению с дефектами, которые анализировались выше.

4.4.3. Фазовая диаграмма

С увеличением случайного потенциала происходит разрушение порядка в расположении вихрей путем генерации дефектов решетки. При этом треугольная искаженная решетка сама по себе уже является разупорядоченной из-за несоизмеримости периода решетки вихрей и регулярных центров пиннинга.

Рассмотрим сначала квадратную решетку. Здесь наименьшей плотностью энергии обладает первый тип дефектов – замкнутые цепочки депиннированных вихрей. Характерные размеры такой цепочки не могут быть слишком маленькими из-за дискретности системы. Тогда дефект с наименьшей энергией должен иметь радиус R_d порядка периода решетки, $R_d \sim a$, см. Рис. 4.9 (а). Представим R_d в виде ar_d , где $r_d \sim 1$. Энергия дефекта может быть найдена из (4.59):

$$E_{kink} \sim 2\pi r_d \left[U_0/2 - (E_{sq} - E_{hp}) \right]. \quad (4.72)$$

Площадь, занимаемая таким дефектом, $\pi a^2 r_d^2$. Для оценки параметров случайного потенциала, вызывающего появление этого дефекта, приравняем его энергию к среднеквадратичному отклонению энергии случайного

пиннинга на этой площади $U_r \sqrt{n_r \pi a^2 r_d^2}$:

$$U_r \sim \sqrt{\frac{\pi}{n_r a^2}} [U_0 - 2(E_{sq} - E_{hp})]. \quad (4.73)$$

Из (4.73) видим, что U_r , требующееся для разрушения порядка в квадратной решетке, уменьшается до нуля в точке перехода между квадратной и промежуточной решетками.

Будем строить фазовую диаграмму системы в плоскости $U_0 - U_r$ при равных концентрациях центров пиннинга двух типов, $n_r a^2 = 1$. Граница раздела между запиннигованной решеткой и смесью запиннигованного и промежуточного состояниями показана кривой 1 на Рис. 4.11 при $a = 1$ и $\kappa = 5$. Эта решетка может по-прежнему рассматриваться в качестве запиннигованной, как целое, системой периодически расположенных центров пиннинга.

Теперь изучим, как разупорядочивается полузапиннигованная решетка. Как было указано выше, дефект с наименьшей энергией в этом случае соответствует цепочке запиннигованных вихрей, которая локально реконструирует квадратную решетку, см. Рис. 4.9 (а). Повторяя вывод соотноше-

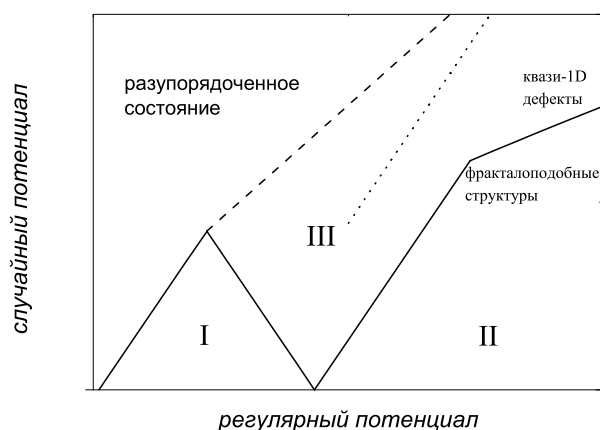


Рис. 4.11. Схематическая диаграмма состояний вихревой решетки в плоскости “амплитуда периодического потенциала U_0 – амплитуда случайного потенциала U_r ”. I - промежуточная фаза, II - квадратная решетка, III - смешанное состояние I и II.

ния (4.73), получаем следующий критерий появления таких дефектов

$$U_r \sim \sqrt{\frac{\pi}{n_r a^2}} \left[-U_0 + 2(E_{sq} - E_{hp}) \right]. \quad (4.74)$$

Для соответствующего перехода имеем кривую 2 на диаграмме состояний, которая представляет собой по-сути зеркальное отображение границы, задаваемой (4.73). Интересно, что в этом случае *беспорядок* ведет к частичному восстановлению квадратной решетки вихрей. Отметим также, что если двигаться вдоль кривых 1 и 2 в направлении усиления периодического потенциала, случайный потенциал, разрушающий порядок в расположении вихрей, меняется немонотонно. Такое нетривиальное поведение обусловлено межвихревыми взаимодействиями.

Промежуточная решетка также может разупорядочиваться через дефекты второго типа – домены искаженной треугольной решетки, плотность энергии которой определяется (4.62). Энергия U_r , требуемая для этого, может быть оценена как

$$U_r \sim \sqrt{\frac{\pi}{n_r a^2}} \left[U_0 - 2(E_{hp} - E_{tr}) \right]. \quad (4.75)$$

Соответствующая зависимость показана кривой 3 на Рис. 4.11. Эта кривая разделяет режимы с доминированием промежуточной и искаженной треугольной, то есть полностью разупорядоченной, решетками. Распространение дефектов второго типа ведет к полному депиннингу решетки вихрей с периодического потенциала.

Теперь рассмотрим, как решетка, представляющая из себя смесь запиннигованной и промежуточной фаз, в итоге полностью срывается с периодического потенциала. Сначала оценим U_r , приводящее к появлению доменов треугольной решетки внутри квадратной:

$$U_r \sim 2 \sqrt{\frac{\pi}{n_r a^2}} \left[U_0 - (E_{sq} - E_{tr}) \right]. \quad (4.76)$$

Данная зависимость соответствует кривой 4 на Рис. 4.11. В реальности, перед тем как такие домены возникнут внутри квадратной решетки вихрей,

последняя уже должна быть возмущена зародышами промежуточной фазы, так что кривая 4 не вполне адекватно описывает соответствующий переход. Тот же вывод можно сделать относительно кривой 3. В итоге, на самом деле, кривые 3 и 4 должны пересекаться.

Из полученной диаграммы состояний видно, что разрушение порядка в квадратной запиннигованной решетке вихрей в пределе слабого пиннинга всегда происходит в два этапа. На первом этапе некоторые вихри депиннигуются и формируют замкнутые эластичные цепочки. Общее количество таких вихрей в системе растет с усилением беспорядка. На втором этапе, в системе распространяются домены искаженной треугольной решетки вихрей, которые и ведут к полному разупорядочиванию.

Разупорядочивание промежуточной фазы может происходить по двум сценариям. Если потенциал периодического пиннинга относительно слаб, порядок разрушается в один шаг путем распространения доменов искаженной треугольной решетки. Если же потенциал относительно велик, порядок снова разрушается в два этапа. Сначала в системе появляются зародыши запиннигованной фазы, восстанавливающей локально квадратную решетку, а затем - снова домены треугольной решетки.

В предыдущем параграфе мы также описали квазиодномерный дефект, который разрушает порядок в расположении вихрей внутри одного ряда вихрей, см. Рис. 4.9 (в). Характерная площадь такого дефекта $\sim l_{1D}a$, где l_{1D} определяется (4.70). Энергия дефекта дана выражением (4.71). Тогда для U_r , приводящего к появлению таких дефектов, получаем оценку

$$U_r \sim \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{2\pi}{\kappa^2} \left(U_0 - \frac{4\pi}{\kappa^2} e^{-2\pi} \right)^{3/4} \left[K_0(a) + \frac{K_1(a)}{a} \right]^{1/4}. \quad (4.77)$$

Оценки показывают, что это значение U_r должно быть больше величин, соответствующим кривым 2 и 3. Физически это связано с тем, что рассматриваемый дефект относится к промежуточному случаю перехода от коллективного пиннинга к режиму индивидуального пиннинга отдельных вих-

рей, реализующемуся в пределе сильного пиннинга. Кривая 5 на Рис. 4.11 соответствует переходу к состоянию, в котором выгодно появление таких дефектов. Поскольку квазиодномерные дефекты разрушают порядок в расположении вихрей в отдельных рядах, состояние, в котором смешиваются запиннингованная решетка и промежуточная фаза, также характеризуется потерей порядка в рядах депиннингованных вихрей; то есть цепочки депиннингованных вихрей теперь не обязательно замкнуты.

Можно ожидать, что конечный режим с большими значениями U_0 соответствует режиму квазиульмерных дефектов решетки, когда вихри депиннингуются индивидуально. Таким образом, можно сказать, что размерность типичных дефектов меняется от 2 до 0 с ростом U_0 . При малых U_0 периодичность в расположении вихрей разрушается замкнутыми цепочками коллективно депиннингованных вихрей, но внутри каждой цепочки сохраняется порядок в расположении вихрей. С ростом U_0 цепочки начинают рваться. При дальнейшем увеличении U_0 цепочки становятся квазиодномерными прямыми дефектами, см. Рис. 4.11. В конце концов, их длина становится малой, как период решетки, и мы переходим в режим сильного пиннинга.

Для исследования промежуточных режимов, которые труднодоступны для изучения с помощью аналитических методов, проанализируем результаты численного моделирования методами Монте-Карло. На Рис. 4.12, 4.13, 4.14 и 4.15 представлены типичные конфигурации вихревой решетки, соответствующие усилению случайного потенциала U_r при фиксированной концентрации центров пиннинга. Начальное состояние системы - квадратная решетка запиннингованных вихрей. Образец в численном эксперименте имеет размеры $20 \times 20 \lambda$ и содержит 20×20 центров пиннинга, расположенных периодически, и 400 вихрей. Выбрано значение $U_0 = 0,045 \times 2\pi/\kappa^2$, а расстояние между соседними вихрями равно 1 в единицах λ . Это значение U_0 в несколько раз больше требуемого для перехода от квадратной к тре-

угольной решетке в отсутствие беспорядка, т.е. мы действительно находимся в промежуточной области, где можно ожидать и замкнутых и разомкнутых цепочек депиннигованных вихрей. Действительно, именно такую картину можно увидеть на Рис. 4.12 при $U_r = 0,72U_0$. Интересно, что цепочки депиннигованных вихрей, в общем, выстраиваются в конечные фракталоподобные структуры. Типичные "строительные блоки" этих структур представляют собой части квадратов. Если теперь мы увеличим U_r , как на Рис. 4.13 для $U_r = 0,85U_0$, в системе возникают домены искаженной треугольной решетки, которые поначалу сосуществуют с фракталоподобными структурами. Однако из-за конкуренции за место в пространстве домены подавляют фракталоподобные дефекты, разрезая их на части. Дальнейшее увеличение U_r приводит к увеличению концентрации доменов, как показано на Рис. 4.14 для $U_r = 1,28U_0$. Интересно, что домены запиннигованной квадратной решетки оказываются очень устойчивыми по отношению к беспорядку – они выживают вплоть до высоких значений U_r , в несколько раз превышающих значение U_r на Рис. 4.14. На Рис. 4.15 показано конечное состояние с большими значениями $U_r = 5,3U_0$, в котором почти все вихри депиннигованы с периодического потенциала. Отметим, что типичные значения U_r , приводящие к распространению дефектов в численных экспериментах, находятся в хорошем качественном согласии с теоретическими предсказаниями. Данные численных экспериментов с большими значениями U_0 также подтверждают предложенный выше сценарий изменения коллективных дефектов к квази-нульмерным при смещении в режим сильного пиннинга. В итоге, мы можем построить общую картину эволюции дефектов решетки в нашей системе, которая и представлена на Рис. 4.16.

Отметим, что ситуация, когда количество вихрей в системе слегка отличается от количества центров пиннинга, расположенных периодически, аналогична присутствию слабого беспорядка в системе.

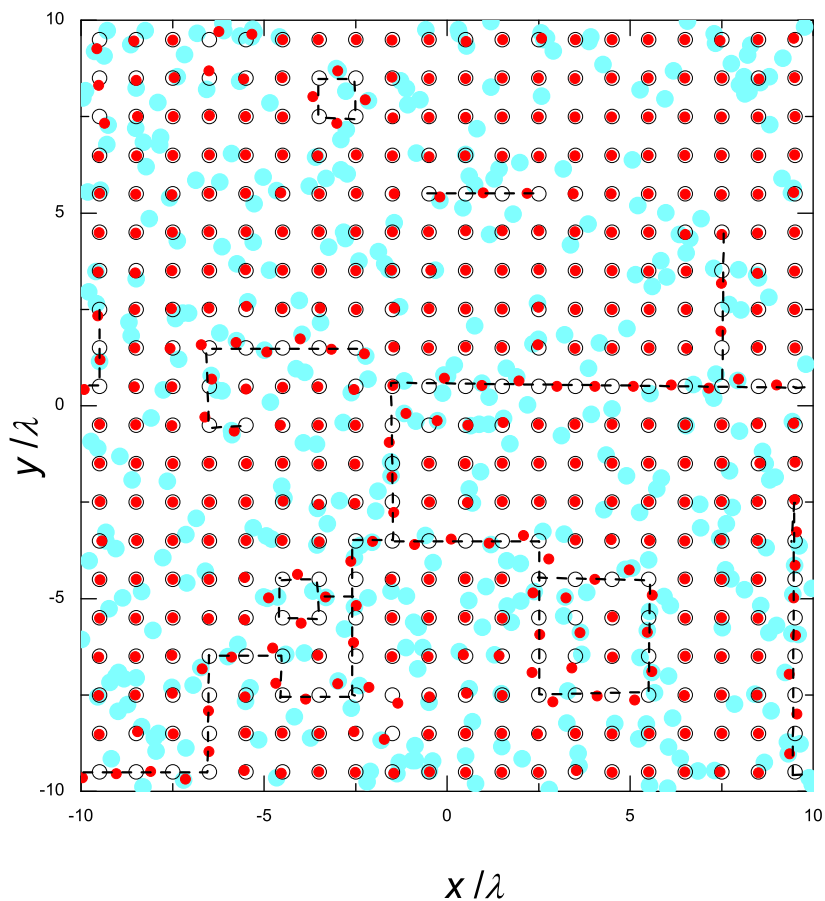


Рис. 4.12. Вихревая решетка в системе двух типов центров пиннинга при $U_r = 0,72U_0$. Результаты получены методом молекулярно-динамических симуляций. Пунктирные линии показывают положения цепочек депиннигованных вихрей. Штрих-пунктирные линии обозначают границы доменов деформированной треугольной решетки. Хаотически расположенные голубые круги - положения случайных центров пиннинга. Периодически расположенные незаполненные круги - регулярные центры пиннинга.

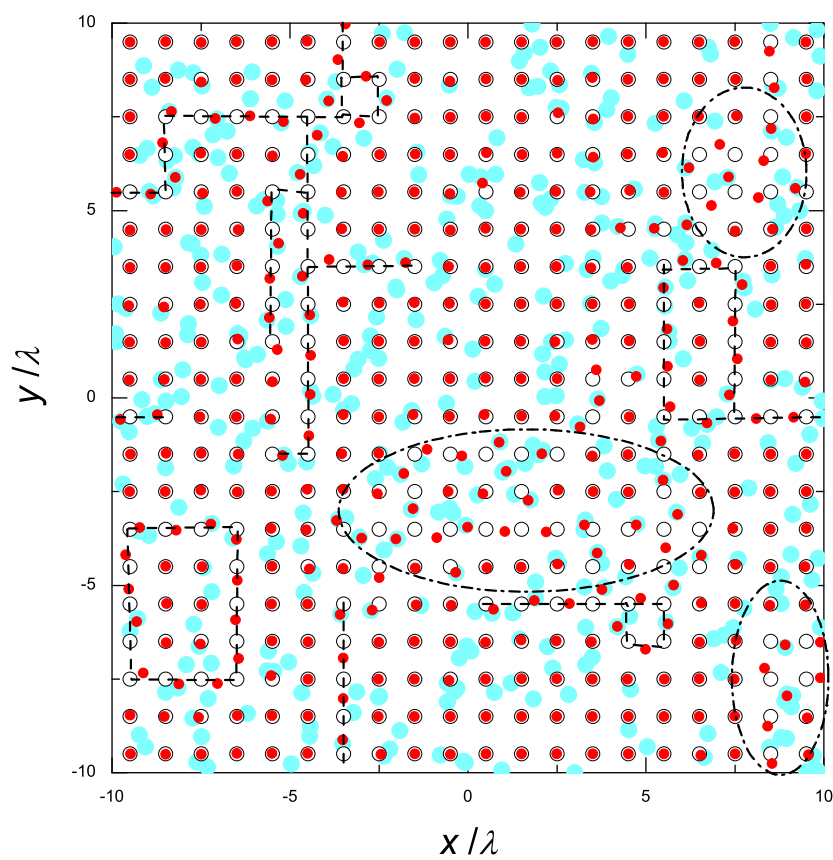


Рис. 4.13. Вихревая решетка в системе двух типов центров пиннинга при $U_r = 0,85U_0$.

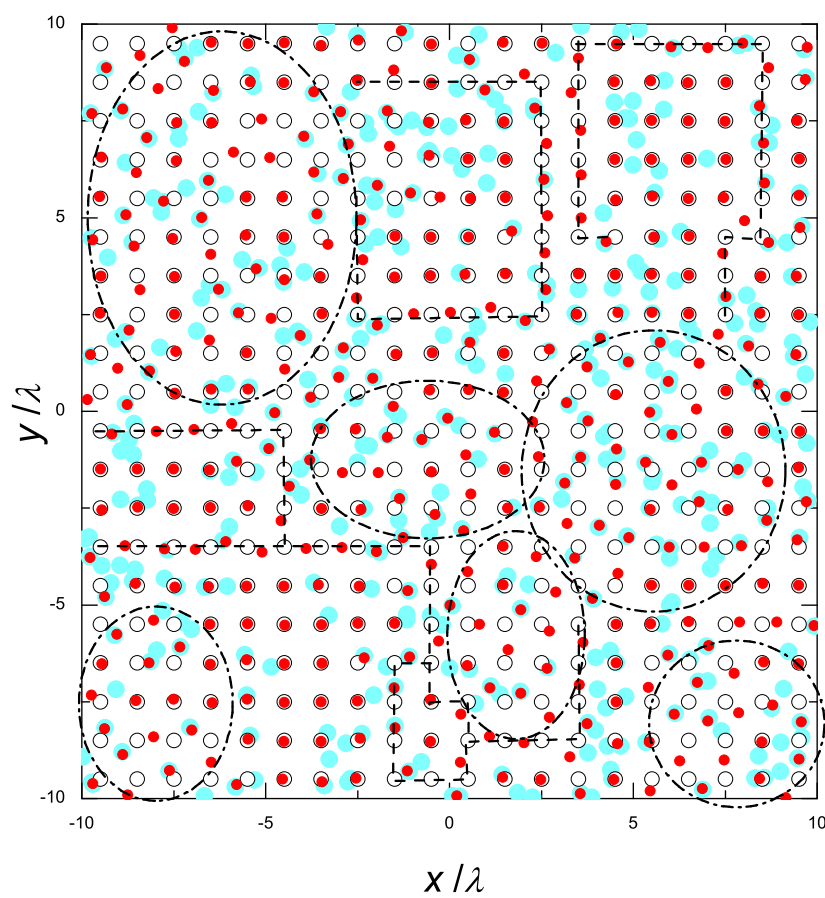


Рис. 4.14. Вихревая решетка в системе двух типов центров пиннинга при $U_r = 1,28U_0$.

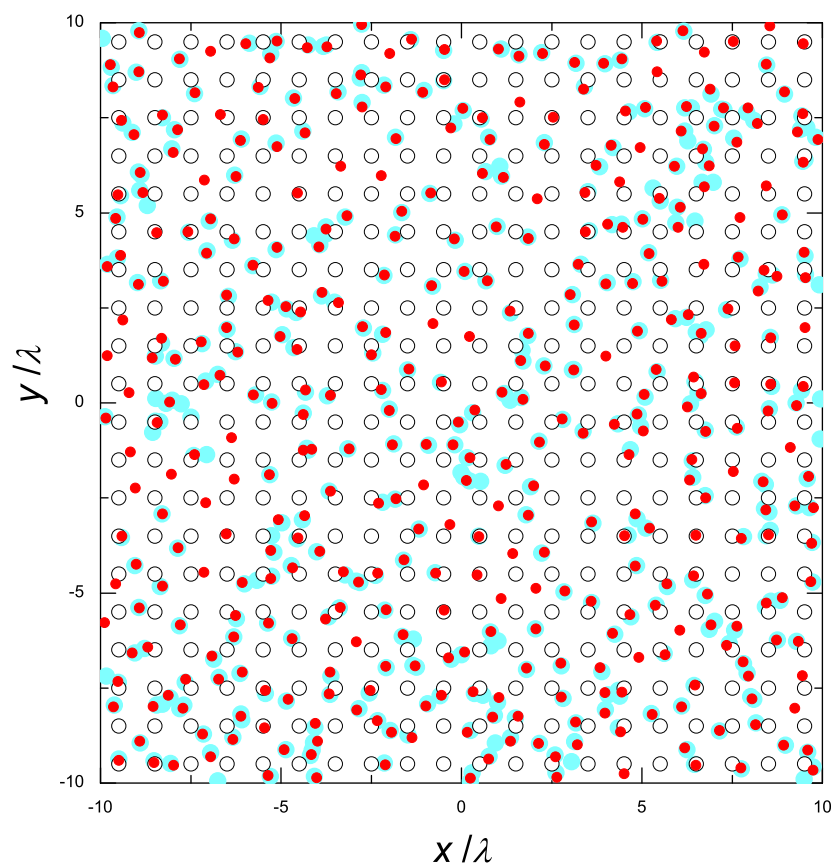


Рис. 4.15. Вихревая решетка в системе двух типов центров пиннинга при $U_r = 5,3U_0$.

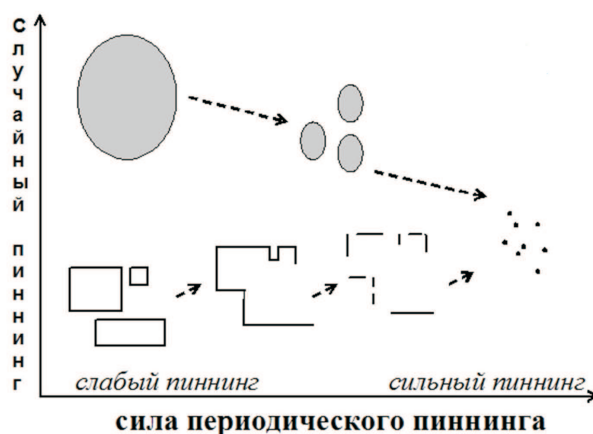


Рис. 4.16. Общая картина эволюции дефектов квадратной вихревой решетки, порождаемых беспорядком. Нижняя ветвь относится к цепочкам коллективно-депиннированных вихрей. Сначала они появляются в виде замкнутых цепочек, которые затем разрываются и выпрямляются. Их перекрытие ведет к формированию фракталоподобных кластеров. Затем они распадаются на квазиодномерные дефекты типа страйпов, которые постепенно укорачиваются, переходя в квази-нульмерные дефекты, соответствующие режиму индивидуального пиннинга. Верхняя ветвь показывает эволюцию дефектов с большей плотностью энергии, которые представляют собой домены коллективно-депиннированных вихрей, формирующих треугольную искаженную решетку. Эти домены распадаются на некоррелированные блоки меньшего размера и в конце концов также сводятся к квази-нульмерным дефектам, так что обе ветви дефектов в режиме сильного пиннинга сходятся.

4.5. Вихревая решетка в присутствии периодической системы центров пиннинга и беспорядка: динамические режимы

В этом параграфе будут рассматриваться различные динамические режимы движения вихрей в ситуации, когда количество вихрей равно количеству центров пиннинга, расположенных периодически. Параметры задачи таковы, что в отсутствие беспорядка выгодно формирование квадратной запиннигованной решетки вихрей. При этом будем исследовать случай слабого беспорядка.

Динамические режимы изучались с помощью метода молекулярно-динамических симуляций в статье [265] с участием автора диссертационной работы. В [265] содержатся и видеоматериалы движения вихревой решетки – их можно найти по следующему адресу в интернете: <http://prb.aps.org/abstract/PRB/v81/i2/e024513>. Рассматривалась ситуация, когда внешняя сила, действующая на каждый вихрь, направлена вдоль ряда вихрей. На практике эта сила может представлять собой силу Лоренца, вызываемую протеканием по системе транспортного тока. В данном параграфе диссертационной работы будут проанализированы и объяснены результаты численных экспериментов.

Важная величина, которая позволяет различить различные динамические режимы, - это средняя скорость $\langle v \rangle$ движения вихрей в направлении действия внешней силы \mathbf{F}_d как функция \mathbf{F}_d . Усреднение производится по всем вихрям в системе, а также по времени - после того, как движение стабилизировалось [266].

Ниже будут приведены результаты для следующего набора параметров: период решетки вихрей $a = \lambda(T)$, $\sigma_{reg} = 0,15a$, $\sigma_{ran} = 0,2a$, $f_{reg} = 0,6\Phi_0^2/8\pi^2\lambda(T)^3$, количества периодически и хаотически расположенных центров пиннинга совпадают. Результаты эти обладают достаточной общностью при изменении основных параметров задачи до тех пор, пока

выполнены условия $\sigma_{ran}, \sigma_{reg} \ll a \sim \lambda(T)$. Значение f_{reg} выбрано таким образом, чтоб оно соответствовало наиболее интересному случаю промежуточной силы пиннинга, рассмотренной в предыдущем параграфе, в котором на первом этапе разрушения порядка в статической системе возникают фракталоподобные цепочки депиннигованных вихрей.

Типичные зависимости $\langle v \rangle$ от F_d представлены на Рис. 4.17, на котором можно видеть три разных участка на зависимостях для случая слабого беспорядка (кривые 1 и 2), тогда как для более сильного беспорядка эти режимы размываются (кривая 3). Эти участки можно интерпретировать в качестве разных динамических режимов движения вихрей. Полученные кривые, конечно, чувствительны к конкретной реализации беспорядка, однако, их формы остаются достаточно устойчивыми. Характерные значения значений силы, соответствующие переходам между режимами, также неплохо воспроизводятся.

Режим I: депиннинг кинков. – Когда F_d достигает некоторого значения $F_d^{(I)}$, часть вихрей депиннигуется и начинает движение по системе.

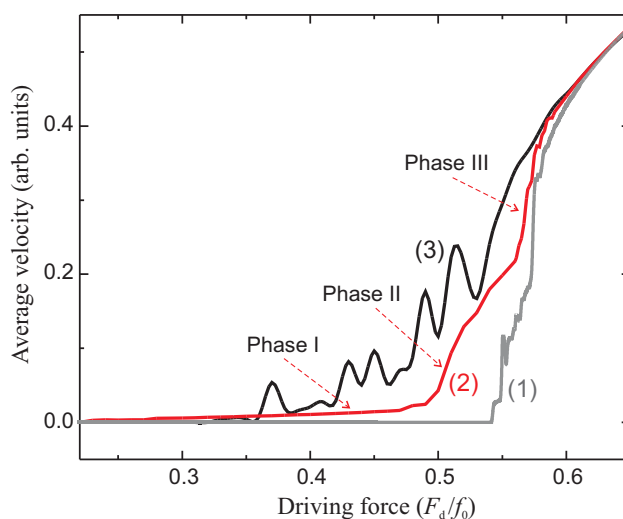


Рис. 4.17. Средняя скорость вихрей, как функция внешней силы при разных значениях силы случайного пиннинга: $f_{rand} = f_{reg}/6$ (кривая 1), $f_{reg}/3$ (2), $f_{rand} = f_{reg}/2$ (3). Данные молекулярно-динамических симуляций [265].

Анализ характера движения из результатов молекулярно-динамических симуляций показывает, что вихри движутся не поодиночке, а в коллективных квазиодномерных структурах солитонообразного типа. По-сути, это кинки, которые содержат один лишний вихрь, и антикинки, которые содержат одну вакансию. Их можно интерпретировать и как одиночные волны сжатия и волны разрежения решетки вихрей. При этом кинки движутся по направлению F_d , а антикинки - в противоположную сторону.

В режиме I в движение приходят кинки и антикинки, которые уже существовали в системе до включения внешней силы, то есть в статической конфигурации, и которые были описаны в предыдущем параграфе. Из этого рассмотрения несложно определить, какую внешнюю силу нужно приложить для депиннинга единичного кинка. Длина единичного кинка дается выражением (4.62). Если теперь резко включить внешнюю силу F_d , действующую на каждый вихрь, полная внешняя сила, действующая на весь кинк, будет DF_d , где D - количество вихрей в кинке. В то же время, сила, препятствующая срыву кинка, возникает главным образом из-за того, что первый вихрь перед кинком и последний вихрь за кинком запиннингованы, так что максимальная сила сопротивления равна $2f_{reg}$. Приравнявая внешнюю силу и силу сопротивления, получаем простое условие для депиннинга кинка:

$$F_d^{(I)} \approx \frac{2f_{reg}}{D}. \quad (4.78)$$

Срыв и движение кинков приводит к движению вихрей, что в экспериментах соответствует скачку электрического сопротивления системы. Отметим, что (4.78) может быть выведено с использованием континуального приближения в рамках одномерной модели Френкеля-Конторовой, из которой можно вычислить поле деформации для вихревой цепочки, вызванное внешней силой, а затем приравнять давление, которое из-за этого испытывает первый вихрь перед кинком, к силе пиннинга f_{reg} . Соотношение

(4.78) показывает, что, в пределе длинного кинка, он ведет себя как твердое тело, содержащее D частиц - именно поэтому он приходит в движение при малых значениях внешней силы, что и наблюдается в численных экспериментах. Это соотношение также показывает, что $F_d^{(I)}$ очень чувствительно к D , которое в свою очередь зависит от периодического потенциала пиннинга. Общая тенденция такова, что чем сильнее этот потенциал, тем короче кинки и антикинки, так что в пределе сильного пиннинга мы снова приходим к режиму, когда дефекты вихревой решетки не являются более коллективными, а вихри под действием внешней силы депиннируются индивидуально.

Результаты, полученные с использованием (4.62) и (4.78), находятся в хорошем полуколичественном согласии с результатами численных экспериментов. Так, например, для набора параметров, которые мы здесь используем для иллюстрации, депиннинг должен происходить при $F_d^{(I)} \approx 0,48f_{reg}$, тогда как в численных экспериментах эта величина колебалась между $0,30f_{reg}$ и $0,42f_{reg}$. Заметим, что в случае конкретной реализации беспорядка, соответствующей кривой 1 на Рис. 4.17, в системе отсутствовали статические кинки и антикинки, и именно поэтому вихри покоились вплоть до динамического режима II.

В численных экспериментах было получено, что при столкновении кинков и антикинков они всегда исчезают. Похожий процесс, известный как аннигиляция кинков и антикинков, исследовался в работе [267] для (одномерной) модели синус-Гордона в неоднородной среде с диссипацией, что близко к условиям рассматриваемой здесь задачи.

Напомним, что в статической конфигурации кинки и антикинки были лишь частью фракталоподобных структур сложной формы. Эти структуры состоят из сегментов двух типов - содержащих лишней вихрь или вакансию и не содержащих таковые. Интересно, что внешняя сила частично устраняет ("излечивает") такие дефекты. А именно, сегменты второго типа исчезают за счет восстановления запиннированной решетки. Для сегментов первого

типа этот процесс не представляется возможным. Типичная внешняя сила $F_d^{(h)}$, приводящая к исчезновению сегментов второго типа, может быть оценена из рассмотрения цепочки депиннигованных вихрей бесконечной длины в качестве предельного случая. Эффективная сила пиннинга для вихрей в цепочке создается взаимодействием с окружающими рядами вихрей. Далее, несложно получить оценку:

$$F_d^{(h)} \approx \frac{\Phi_0^2}{4\pi\lambda(T)^2 a} e^{-2\pi}. \quad (4.79)$$

В режиме промежуточной силы периодического пиннинга $F_d^{(h)}$ намного меньше $F_d^{(l)}$. Далее мы однако увидим, что $F_d^{(h)}$ играет важную роль в динамических режимах при больших значениях F_d .

Для простоты мы здесь рассматриваем лишь случай, когда количества вихрей и центров пиннинга, расположенных периодически, равны. Небольшое изменение концентрации вихрей будет приводить к дополнительным кинкам или антикинкам в статической конфигурации.

Режим II: генерация пар “кинк-антикинк”. – Изучим происхождение второго горба на кривых 1 и 2 Рис. 4.17, который относится к режиму II. Анализ данных численных экспериментов показывает, что когда внешняя сила достигает критической величины $F_d^{(II)}$, время от времени в системе возбуждаются пары “кинк-антикинк”. После возникновения такой пары кинк убегает в направлении действия силы, а антикинк движется в противоположную сторону. Из-за генерации таких пар средний ток значительно увеличивается по сравнению с режимами I и II, как видно из Рис. 4.17. Пары возникают из-за действия дополнительного потенциала типа “стиральной доски”, создаваемого движущимися кинками и антикинками в соседних рядах, как показано на Рис. 4.18. Один из вихрей срывается с центра пиннинга, создавая области сжатия и разрежения вихревой цепочки, которые затем трансформируются в пару “кинк-антикинк”. Несложно понять, что амплитуда дополнительного потенциала “стиральной доски” приблизительно равна

$F_d^{(h)}$ в пределе длинных кинков ($D \gg 1$), так что максимальная эффективная внешняя сила в ряду вихрей, соседнем с рядом, содержащим движущийся кинк или антикинк, равна $F_d^{(eff)} \approx F_d + F_d^{(h)}$. Однако в некоторых численных экспериментах в системе в статической конфигурации вовсе не было кинков и антикинков (см., например, кривую 1 на Рис. 4.17), но пары “кинк-антикинк” все же возникали в некоторых *слабых точках*, где вихри особенно сильно были смещены случайным потенциалом. Поэтому можно сделать вывод, что в режиме II беспорядок является основной причиной возникновения пар, тогда как движущиеся кинки лишь помогают процессу. Более того, сравнение с данными численных экспериментов показывает, что значение $F_d^{(h)}$ слишком мало для объяснения данных для $F_d^{(II)}$ только через действие потенциала типа “стиральной доски”.

Проанализируем, как именно беспорядок может приводить к генерации пар “кинк-антикинк”, и оценим соответствующее значение внешней силы $F_d^{(II)}$. Поместим центр системы координат в один из расположенных периодически центров пиннинга, а ось x направим вдоль внешней силы. В отсутствие беспорядка эта сила смещает запиннингованный вихрь в точку с координатами $(r_0, 0)$, где $r_0 = \sigma_{reg} F_d / f_{reg}$. Движущийся кинк или антикинк в соседнем ряду приводит к дополнительному смещению, амплитуда которого может быть оценена через замену F_d на $F_d^{(eff)}$. Если теперь учесть беспорядок и пренебречь взаимодействием вихрей внутри цепочки, полу-

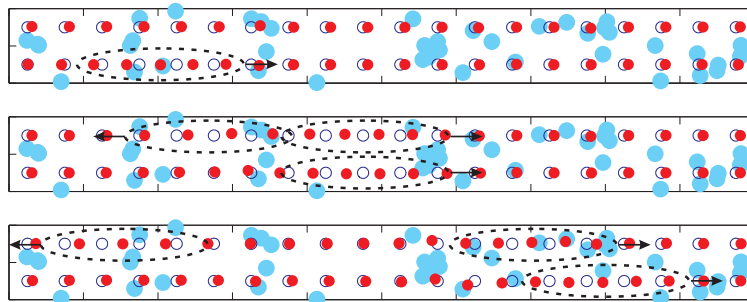


Рис. 4.18. Движущийся кинк в нижнем ряду порождает пару “кинк-антикинк” в верхнем ряду.

чим, что случайная сила не должна быть равной 0 для депиннинга вихрей. Это обстоятельство ограничивает возможные положения центров случайного пиннинга, действующих на вихрь в точке $(r_0, 0)$: в круге радиусом σ_{ran} с центром в должен быть, как минимум, один вихрь. Далее, будем считать, что случайная сила, действующая на вихрь, создается одним центром пиннинга, т.е. пренебрежем их перекрытием. Это представляется разумным допущением (в лидирующем порядке по σ_{ran}/a) при условии, что $\sigma_{ran} \ll a$, и концентрация случайных центров не слишком велика, $n_{ran} \sim 1/a^2$. Оптимальное положение центра пиннинга, минимизирующее $F_d^{(II)}$, - на оси x в точке $(\sigma_{ran} + r_0, 0)$. Это условие подразумевает выполнение двух критериев: случайная сила не равна 0 в точке $(r_0, 0)$ и направлена вдоль внешней силы, на краю центра пиннинга, $(\sigma_{reg}, 0)$, где сила пиннинга максимальна; обратная случайная сила $f_{ran}(\sigma_{ran} + r_0 - \sigma_{reg})/\sigma_{ran}$ также максимальна при условии, что первый критерий выполняется. Эта сила вместе с внешней силой $F_d^{(eff)}$ должна компенсировать f_{reg} на краю центра пиннинга. Отсюда находим критическую силу $F_d^{(II)}$, требующуюся для депиннинга данного вихря

$$F_d^{(II)} \approx \frac{f_{reg} - f_{ran} \left(1 - \frac{\sigma_{reg}}{\sigma_{ran}}\right)}{1 + \frac{f_{ran} \sigma_{reg}}{f_{reg} \sigma_{ran}}} - F_d^{(h)}. \quad (4.80)$$

Начиная с $F_d = F_d^{(II)}$, всегда можно найти область вблизи любого вихря, куда можно поместить случайный центр пиннинга таким образом, что он сорвет данный вихрь с центра пиннинга, если в соседнем ряду будет распространяться кинк или антикинк. В бесконечной системе концентрация подобных "слабых точек" конечна. Начиная с больших внешних сил, $F_d \approx F_d^{(II)} + F_d^{(h)}$, пары "кинк-антикинк" могут возникать в слабых точках и без помощи распространяющихся в соседних рядах кинков или антикинков, что согласуется с данными численных экспериментов. При выводе (4.80) не принималось во внимание взаимное отталкивание вихрей в цепочке, которое препятствует депиннингу данного вихря. Согласно нашим оценкам,

это взаимодействие слишком мало для того, чтоб заметно изменить $F_d^{(II)}$, т.к. $\sigma_{reg} - r_0 \ll \sigma_{reg}$. Соотношение (4.80) находится в хорошем согласии с результатами численных экспериментов. Например, согласно (4.80), $F_d^{(II)}$, соответствующее кривым 1 и 2 на Рис. 4.17), должно быть примерно равно $0,85f_{reg}$ и $0,71f_{reg}$, соответственно, а в численных экспериментах эти величины составляют $0,89f_{reg}$ и $0,78f_{reg}$.

В пределе очень слабого беспорядка, (4.80) сводится к $F_d^{(II)} \approx f_{reg} - f_{ran} - F_d^{(h)}$. Данное соотношение ясно показывает конкуренцию между периодическим и случайным потенциалами, причем второй фактор дополнительно усиливается слагаемым $F_d^{(h)}$ из-за движения кинков и антикинков. Это условие не зависит от модельных потенциалов центров пиннинга, а потому представляется универсальным. Используя аналогичное геометрическое рассмотрение, было также установлено, что выше $F_d^{(II)}$ концентрация “слабых точек” растет как $\sim (F_d - F_d^{(II)})^{3/2}$, так что частота рождений пар “кинк-антикинк” возрастает.

Режим III: свободное распространение пар “кинк-антикинк”. – Имеется третий динамический режим, который реализуется на последнем участке кривых 1 и 2 Рис. 4.17) при внешних силах, которые уже весьма близки к f_{reg} . В этом случае, потенциала “стиральной доски” движущегося кинка уже достаточно для рождения пар “кинк-антикинк” без помощи беспорядка. Соответствующая внешняя сила определяется простым соотношением

$$F_d^{(III)} \approx f_{reg} - F_d^{(h)}. \quad (4.81)$$

В этом режиме наблюдается бурное распространение пар “кинк-антикинк”, изначально вызванное движением статических дефектов. Согласно (4.81), $F_d^{(III)}$ примерно $0,98f_{reg}$, и это значение снова находится в хорошем согласии с результатами численных экспериментов, отображенными на Рис. 4.17) (примерно $0,96f_{reg}$ для кривой 1 и $0,94f_{reg}$ для кривой 2; с воспроизводи-

мостью в пределах нескольких процентов).

Кратко обсудим динамику системы, когда беспорядок уже не столь слаб. Основная тенденция состоит в размытии переходов между динамическими режимами, как видно из кривой 3 на Рис. 4.17). Численный эксперимент показывает, что кинки и антикинки при движении теперь могут изгибаться и переходить из одного ряда в другой. Однако, что интересно, солитонообразный характер переноса вихрей оказывается чрезвычайно устойчивым по отношению к беспорядку вплоть до режима сильного беспорядка, $f_{ran} \sim f_{reg}$.

Заметим, что солитонообразный характер переноса вихрей в системах со слабым периодическим потенциалом недавно был подтвержден экспериментально [221].

4.6. Краткие выводы

В этой главе диссертационной работы исследовались свойства макроскопических сверхпроводников второго рода в смешанном состоянии. Сначала была построена модель для вычисления обратимой намагниченности сверхпроводника во всем диапазоне внешних магнитных полей от нижнего до верхнего критического поля. Из литературы известны аналитические результаты лишь для окрестностей этих двух полей, получаемые с помощью лондонской модели и подхода Абрикосова, соответственно. Между тем, промежуточные поля также представляют интерес - не в последнюю очередь из-за того, что в случае высокотемпературных сверхпроводников измерения именно в таких полях зачастую используются для определения основных параметров сверхпроводника, поскольку в слабых полях сложнее добиться обратимости, тогда как поля вблизи верхнего критического слишком высоки для изучения в экспериментальных условиях. Ранее в литературе для решения этой задачи уже была предложена так называемая модель Хао и

Клема (Hao-Clem model), которая в свою очередь обобщает более раннюю модель Клема для единичного вихря. В этих подходах используется специальная пробная функция для параметра порядка в сердцевине вихря, которая позволяет аналитически решить второе уравнение Гинзбурга-Ландау (для магнитного поля). Тем не менее, модель Хао и Клема не может рассматриваться в виде вариационной, поскольку предложенные ее авторами зависимости вариационных параметров от поля не следуют из их же выражения для энергии. По сути, эта модель дает лишь подгонку под результат Абрикосова.

В диссертационной работе пробная функция Хао и Клема использовалась для построения самосогласованной вариационной модели. Было предложено с самого начала отказаться от представления локального поля в сверхпроводнике в виде суперпозиции полей отдельных вихрей и работать в рамках приближения круглой ячейки, чья площадь зависит от магнитной индукции. В результате, удастся самосогласовано описать правильным образом известные асимптотики в нижних и верхних полях, а также и переходную область, где хорошая точность подтверждена сравнением с результатами численного расчета по методу Э. Х. Брандта [214]. Предложена формула для обратимой намагниченности.

Далее, была рассмотрена структура вихревой решетки в сверхпроводнике с искусственным периодическим потенциалом пиннинга. Такие потенциалы можно создавать с помощью современных нанотехнологических методов для увеличения критического тока сверхпроводника, что является важной прикладной задачей. Был проанализирован почти не исследованный ранее случай слабого потенциала. Здесь важную роль играет взаимодействие вихрей друг с другом. Решетка вихрей стремится приобрести треугольную форму из-за этого взаимодействия. Однако, если центры пиннинга расположены в квадратной решетке, этот потенциал пытается навязать свою симметрию. Это - двумерная задача типа Френкеля-Конторовой.

Были рассмотрены случаи нескольких соизмеримых концентраций центров пиннинга и вихрей. Для некоторых из них было выявлено существование промежуточной фазы, при которой части вихрей выгодно быть сорванными со своих центров пиннинга, чтоб локально привести симметрию решетки ближе к треугольному виду. Для разных типов модельных потенциалов пиннинга, в рамках лондоновского приближения, построены фазовые диаграммы решетки вихрей. Показано, что в некоторых случаях, когда размеры потенциальных ям центров пиннинга сопоставима с периодами решетки, промежуточная фаза может и не возникать. По-видимому, именно такое поведение было обнаружено в экспериментах с решетками вихрей в конденсатах атомов щелочных металлов в ловушках. В этих системах периодический потенциал пиннинга создавался с помощью лазерных лучей (так называемая оптическая решетка). При ослаблении потенциала решетка переходила сразу из квадратной в треугольную. В диссертационной работе были также вычислены критические токи, вызывающие срыв вихрей с центров пиннинга. Показано, что в промежуточной фазе критический ток является существенно анизотропным.

В реальных сверхпроводниках всегда присутствует беспорядок. В диссертационной работе далее исследовалась всё та же задача, но теперь с учетом дополнительного случайного потенциала, который представляет собой еще один фактор, определяющий поведение системы. Здесь мы имеем дело с двумерной системой типа Френкеля-Конторовой в присутствии беспорядка. Был рассмотрен самый простой случай, когда количество вихрей в системе соответствует количеству центров периодического пиннинга. Сначала были найдены различные типы дефектов вихревой решетки, которые могут существовать в системе (без беспорядка), а затем оценивались параметры случайного пиннинга, которые могут вызывать к жизни те или иные дефекты. Была выявлена богатая фазовая диаграмма и предложены различные сценарии потери порядка. Так, квадратная запиннигованная ре-

щетка теряет порядок в два этапа. На первом этапе, в системе возникают цепочки депиннигованных вихрей, которые могут выстраиваться в причудливые фракталоподобные структуры. На втором этапе, в системе начинают распространяться домены депиннигованных вихрей, которые локально воссоздают треугольную (деформированную) решетку. Два типа дефектов конкурируют за место в пространстве, так что домены разрезают фракталоподобные дефекты, и в конце-концов окончательно разрушают порядок в расположении вихрей. В итоге, была предложена единая картина эволюции дефектов решетки вихрей в зависимости от сил случайного и периодического пиннинга.

Наконец, были рассмотрены динамические режимы движения вихрей в такой системе. Динамика возникает при приложении транспортного тока. Было предложено простое объяснение численных экспериментов по моделированию таких систем, в которых оказывалось, что при слабом беспорядке перенос вихрей происходит в коллективных солитоноподобных структурах. В диссертационной работе показано, что эти структуры представляют собой одномерные кинки и антикинки, то есть дефекты, в которых есть один лишний вихрь в ряду или, наоборот, одна вакансия. Были вычислены типичные длины кинков и антикинков. Продемонстрировано, что переключения между динамическими режимами происходит из-за изменения динамики кинков и антикинков. Сначала статические кинки и антикинки депиннигуются под действием внешней силы. Затем они начинают возбуждать пары “кинк-антикинк” в соседних рядах в особых точках сгущения случайного потенциала. В конце концов, такие пары начинают возбуждаться и без помощи такого потенциала - а лишь под действием возмущения, вызываемого движением кинка или антикинка в соседнем ряду. Были выведены простые выражения для значений внешней силы, вызывающей переключения между динамическими режимами. Результаты находятся в хорошем согласии с данными численных экспериментов. Общий вывод о переносе вихрей солито-

нообразными структурами также подтвержден недавними экспериментами со сверхпроводящими пленками с модулированной поверхностью [221].

ГЛАВА 5

Коммутационная техника для экситонов Френкеля

5.1. Введение

Проблема отклонения от бозонной статистики для составных бозонов является довольно общей. В приложении к экситонам Ванье-Мотта она рассматривалась в ряде классических работ [24–26].

Недавно М. Комбеско с соавторами был предложен новый подход к данной проблеме (см. обзор [90]), в котором используется специальная коммутационная техника. В рамках этого подхода, вводятся операторы рождения и уничтожения экситонов Ванье-Мотта, для которых сохраняются фермионные соотношения коммутации для составляющих экситоны электронов и дырок. В частности, этот метод позволяет с достаточной легкостью воспроизвести результат работы [26] для энергии основного состояния системы с макроскопически большим числом экситонов.

В дальнейшем метод был обобщен на случай произвольных составных частиц, в том числе трионов [268], а затем - и на конечные температуры [269]. Данный подход оказывается весьма полезным для предсказания новых эффектов, поскольку позволяет строить интуитивное понимание процессов с помощью наглядных "обменных" диаграмм. Так, в работах [270] и [271] было предсказано, что конденсация экситонов должна происходить в безызлучательное ("темное") состояние, и были исследованы свойства таких конденсатов. Совсем недавно был поставлен соответствующий эксперимент [272]. В работе [273] предлагалась идея ловушек для экситонов, схожих с оптическими ловушками для атомов щелочных металлов. В ряде работ (см., например, [274–276]) подход применялся к исследованию и предсказанию нелинейных оптических эффектов в полупроводниках.

Известен и другой тип экситонов - экситон Френкеля [30]. От эксито-

на Ванье-Мотта его отличает то, что электрон и дырка сильно локализованы в пространстве, оставаясь практически на одном узле кристаллической решетки. Экситоны Френкеля существуют в молекулярных кристаллах. Молекулярные агрегаты в настоящее время привлекают большой интерес в связи с возможностью их использования в "ограниченной"электронике. Отметим, что проблема учета отклонений статистики экситонов Френкеля от чисто бозевской обсуждается достаточно давно (см., например, [32,36]). Развитие технологий последних лет позволяет исследовать экспериментально ситуации, когда концентрация молекулярных экситонов не является совсем уж малой, что обуславливает возникновение нового интереса к проблеме адекватного учета их квантовой статистики. В этой связи, представляется перспективным приложение коммутационного метода к случаю экситонов Френкеля, поскольку этот метод является достаточно общим и позволяет, вообще говоря, исследовать разные составные квантовые частицы.

5.2. Микроскопическая модель

Выбор базиса. – Рассмотрим N_s электронов с зарядами $-|e|$, расположенных в точках \mathbf{r}_i , а также N_s ионов с зарядами $+|e|$, расположенных в точках \mathbf{R}_n , где индексы i и n пробегает значения от 1 до числа узлов N_s . Спиновые степени свободы рассматривать не будем.

Гамильтониан системы может быть представлен в виде

$$H = H_{kin} + V_{e-ion} + V_{ee} + V_{ion-ion}. \quad (5.1)$$

Одночастичный оператор H_{kin} описывает кинетическую энергию электрона

$$H_{kin} = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{p_i^2}{2m}, \quad (5.2)$$

где m масса свободного электрона. Второе слагаемое в (5.1) описывающее кулоновское притяжение между электроном и ионом, также представлено

одночастичным оператором:

$$V_{e-ion} = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} \frac{-e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_n|}. \quad (5.3)$$

Третий оператор V_{ee} описывает кулоновское отталкивание между электронами и имеет вид

$$V_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \sum \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}. \quad (5.4)$$

Последний оператор, $V_{ion-ion}$, который описывает кулоновское взаимодействие между ионами, не зависит от электронных степеней свободы. Он обеспечивает нейтральность системы.

Экситоны Ванье-Мотта строятся из делокализованных состояний электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне. Физическая картина, лежащая в основе представления об экситонах Френкеля, совершенно иная - они строятся из электронов, привязанных к своим ионам, которые могут переходить из основного состояния в первое возбужденное. Поэтому физически релевантными одноэлектронными состояниями для экситонов Френкеля являются не свободные (делокализованные) электроны, а электроны в локализованных атомных состояниях, соответствующие разным положениям ионов в пространстве.

Для математического оформления данной концепции произведем специальным образом перегруппировку слагаемых в гамильтониане (5.1):

$$H = H_0^{(F)} + V_{e-e} + V_{ion-ion}. \quad (5.5)$$

В нулевом порядке по взаимодействию, гамильтониан для экситонов Френкеля $H_0^{(F)}$ является одноэлектронным оператором, и он содержит кинетическую энергию электрона и электронно-ионное взаимодействие

$$H_0^{(F)} = H_{kin} + V_{e-ion} = \sum_i H_i, \quad (5.6)$$

где H_i

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} - \sum_{n=1}^{N_s} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_n|}. \quad (5.7)$$

Можно заметить, что в одночастичный гамильтониан H_i входят взаимодействия электрона i со *всеми* ионами n , так что H_i отличается от простого атомного гамильтониана. Тем не менее, ясно, что физически релевантные одноэлектронные состояния для экситонов Френкеля - это атомные состояния, т.е. состояния одного электрона в присутствии одного иона. Введем их в рассмотрение.

Атомные состояния $|v\rangle$ для иона, расположенного в $R = 0$, соответствующие гамильтониану

$$H_{atom} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r}, \quad (5.8)$$

удовлетворяют уравнению

$$(H_{atom} - \varepsilon_v) |v\rangle = 0, \quad (5.9)$$

с волновыми функциями $\varphi_v(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | v \rangle$. Поскольку собственные функции гамильтониана образуют ортогональный базис, имеем

$$\langle v' | v \rangle = \int d\mathbf{r} \varphi_{v'}^*(\mathbf{r}) \varphi_v(\mathbf{r}) = \delta_{v'v}. \quad (5.10)$$

Если рассмотреть один ион, расположенный в точке R_n , соответствующий атомный гамильтониан имеет вид

$$H^{(n)} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|}. \quad (5.11)$$

Из-за трансляционной инвариантности системы собственные функции $H^{(n)}$ записываются через состояния $(\varepsilon_v, |v\rangle)$ как

$$(H^{(n)} - \varepsilon_v) |vn\rangle = 0,$$

а для их волновых функций имеем

$$\langle \mathbf{r} | vn \rangle = \varphi_{vn}(\mathbf{r}) = \varphi_v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n). \quad (5.12)$$

Для данного иона R_n связанные и делокализованные состояния гамильтониана $H^{(n)}$ формируют полный базис одноэлектронных состояний:

$$\langle nv'|vn\rangle = \delta_{v'v}, \quad (5.13)$$

$$I = \sum_v |vn\rangle \langle nv|. \quad (5.14)$$

Если теперь проанализировать гамильтониан $H_0^{(F)}$ (5.7), видно, что он отличается от простой суммы атомных гамильтонианов, поскольку каждый электрон чувствует взаимодействие со всеми другими ионами. Поэтому диагонализация одночастичного слагаемого $H_0^{(F)}$ может быть произведена лишь приближенно. Действительно, состояния $|vn\rangle$ для всех v и всех n образуют переполненный базис, поскольку состояния $|vn\rangle$ для данного n уже формируют полный базис. Поэтому состояния $|vn\rangle$ для разных n не вполне ортогональны.

Можно однако видеть, что для состояний v и v' , сильно локализованных по сравнению с межионным расстоянием, перекрытие волновых функций между разными атомами очень мало

$$\varphi_{v'}^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{n'})\varphi_v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \simeq 0 \text{ для } n' \neq n, \quad (5.15)$$

при любой r . Следовательно, для матричного элемента для этих состояний имеем

$$\langle n'v'|vn\rangle = \int d\mathbf{r}\varphi_{v'}^*(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{n'})\varphi_v(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \simeq \delta_{n'n}\delta_{v'v} \quad (5.16)$$

из-за (5.10). Таким образом, состояния $|vn\rangle$ для сильно локализованных v являются квази-ортогональными.

Ясно, что (5.15) не выполняется для делокализованных и сильновозбужденных атомных состояний. Тем не менее состояния $|vn\rangle$ можно рассматривать в качестве приемлемого базиса для одноэлектронных состояний при условии, что рассматриваемая физическая задача определяется сильно-локализованными низколежащими состояниями, для которых перекрытием

волновых функций, относящихся к разным ионам, можно пренебречь. Это и имеет место быть для экситонов Френкеля, для которых такие состояния сводятся к основному ($\nu = 0$) и первому возбужденному ($\nu = 1$). Поэтому в дальнейшем будем заменять суммы по ν суммами по $\nu = (0, 1)$.

Гамильтониан в представлении вторичного квантования. –

Пусть $a_{\nu n}^\dagger$ оператор рождения состояния $|\nu n\rangle$ на узле n на уровне ν .

$$|\nu n\rangle = a_{\nu n}^\dagger |v\rangle. \quad (5.17)$$

Поскольку состояние $|\nu n\rangle$ может быть разложено по базису плоских волн $|\mathbf{k}\rangle$ как $|\nu n\rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\nu n\rangle$, оператор рождения $a_{\nu n}^\dagger$ выражается через оператор рождения свободного электрона $a_{\mathbf{k}}^\dagger$ как

$$a_{\nu n}^\dagger = \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}}^\dagger \langle \mathbf{k}|\nu, n\rangle. \quad (5.18)$$

Электронные операторы антикоммутируют, $[a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger]_+ = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Отсюда легко показать, что антикоммутатор для операторов рождения $a_{\nu n}^\dagger$ в точности равен нулю

$$[a_{\nu' n'}, a_{\nu n}]_+ = 0, \quad (5.19)$$

а для состояний $\nu = (0, 1)$, имеем, ввиду (5.16),

$$[a_{\nu' n'}, a_{\nu n}^\dagger]_+ = \sum_{\mathbf{k}} \langle \nu' n'|\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|\nu n\rangle = \langle \nu' n'|\nu n\rangle \simeq \delta_{\nu' \nu} \delta_{n' n}.$$

Таким образом, в рамках приближения сильной связи, операторы $a_{\nu n}^\dagger$ следуют стандартным соотношениям коммутации для фермионных операторов.

Используем эти операторы и перепишем вклад $H_0^{(F)}$ (5.6) в полный гамильтониан. Поскольку $H_0^{(F)}$ дается суммой одночастичных операторов, его можно представить в виде

$$H_0^{(F)} = \sum_{\substack{\nu' n' \\ \nu n}} \varepsilon(\nu' n', \nu n) a_{\nu' n'}^\dagger a_{\nu n}. \quad (5.20)$$

Для множителя $\varepsilon(v'n', vn)$ имеем

$$\varepsilon(v'n', vn) = \int d\mathbf{r} \varphi_{v'n'}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \sum_{m=1}^{N_s} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_m|} \right] \varphi_{vn}(\mathbf{r}). \quad (5.21)$$

Из (5.12) следует, что множитель также можно представить в виде

$$\varepsilon(v'n', vn) = \int d\mathbf{r} \varphi_{v'n'}^*(\mathbf{r}) \left[\varepsilon_v - \sum_{m \neq n} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_m|} \right] \varphi_{vn}(\mathbf{r}). \quad (5.22)$$

Тогда для сильно локализованных состояний из (5.15) получаем

$$\varepsilon(v'n', vn) \simeq \delta_{nn'} [\varepsilon_v \delta_{v'v} + u(v', v)], \quad (5.23)$$

где $u(v', v)$ происходит из-за взаимодействия со всеми другими ионами. Благодаря трансляционной инвариантности гамильтониана, $u(v', v)$ может быть представлено в виде

$$u(v', v) = \sum_{m \neq n} \int d\mathbf{r} \varphi_{v'}^*(\mathbf{r}) \sum_{m \neq n} \frac{-e^2}{|\mathbf{r} - (\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n)|} \varphi_v(\mathbf{r}) = \left\langle v' \left| \sum_{R \neq 0} \frac{-e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right| v \right\rangle. \quad (5.24)$$

где векторы \mathbf{R} соответствуют всем возможным расстояниям между ионами.

Одночастичный вклад в гамильтониан тогда принимает вид

$$H_0^{(F)} = \sum_{v,n} \tilde{\varepsilon}_v a_{vn}^\dagger a_{vn} + \sum_{n, v' \neq v} u(v', v) a_{v'n}^\dagger a_{vn} \quad (5.25)$$

где $\tilde{\varepsilon}_v = \varepsilon_v + u(v, v)$.

Далее рассмотрим двухчастичный оператор V_{ee} , определяемый (5.4).

В представлении вторичного квантования имеем

$$V_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{\{v,n\}} V \begin{pmatrix} v'_2 n'_2 & v_2 n_2 \\ v'_1 n'_1 & v_1 n_1 \end{pmatrix} a_{v'_1 n'_1}^\dagger a_{v'_2 n'_2}^\dagger a_{v_2 n_2} a_{v_1 n_1} \quad (5.26)$$

где

$$V \begin{pmatrix} v'_2 n'_2 & v_2 n_2 \\ v'_1 n'_1 & v_1 n_1 \end{pmatrix} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_{v'_1 n'_1}^*(\mathbf{r}_1) \varphi_{v'_2 n'_2}^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \varphi_{v_2 n_2}(\mathbf{r}_2) \varphi_{v_1 n_1}(\mathbf{r}_1). \quad (5.27)$$

Для ν и ν' , равных (0, 1), последняя величина не равна нулю только при $n'_1 = n_1$ и $n'_2 = n_2$, благодаря (5.15). Если теперь использовать трансляционную инвариантность волновых функций (5.12), легко видеть, что V_{ee} может быть представлено в виде

$$V_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n_1 \nu'_1 \nu_1 \\ n_2 \nu'_2 \nu_2}} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} \nu'_2 & \nu_2 \\ \nu'_1 & \nu_1 \end{pmatrix} a_{\nu'_1 n_1}^\dagger a_{\nu'_2 n_2}^\dagger a_{\nu_2 n_2} a_{\nu_1 n_1} \quad (5.28)$$

где межэлектронное взаимодействие зависит от расстояния R между ионами:

$$V_R \begin{pmatrix} \nu'_2 & \nu_2 \\ \nu'_1 & \nu_1 \end{pmatrix} = V_{-R} \begin{pmatrix} \nu'_1 & \nu_1 \\ \nu'_2 & \nu_2 \end{pmatrix} = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \varphi_{\nu'_1}^*(\mathbf{r}_1) \varphi_{\nu'_2}^*(\mathbf{r}_2) \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{R}|} \varphi_{\nu_2}(\mathbf{r}_2) \varphi_{\nu_1}(\mathbf{r}_1). \quad (5.29)$$

Атомные состояния ($\nu = 0, n$) и ($\nu = 1, n$) эквивалентны состояниям в валентной зоне и зоне проводимости для экситонов Ванье-Мотта. Замечая, что энергия основного состояния $\varepsilon_{\nu=0}$ сильно отличается от энергии первого возбужденного состояния $\varepsilon_{\nu=1}$, можем считать, что физически релевантная часть гамильтониана соответствует процессам, в которых количества электронов на уровнях $\nu = 0$ и $\nu = 1$ сохраняются по-отдельности. Это эквивалентно процессам, которые сохраняют количества электронов валентной зоны и зоны проводимости для экситонов Ванье-Мотта. Поэтому мы можем отбросить слагаемые с $\nu \neq \nu'$ в $H_0^{(F)}$. Последняя величина тогда сводится к первой сумме в (5.25):

$$H_0^{(F)} \simeq H_0 = \bar{\varepsilon}_0 \sum_n a_{0n}^\dagger a_{0n} + \bar{\varepsilon}_1 \sum_n a_{1n}^\dagger a_{1n}. \quad (3.14)$$

Теперь рассмотрим кулоновское взаимодействие V_{ee} (5.28). Будем учитывать только слагаемые, сохраняющие количества электронов в состояниях $\nu = 0$ и $\nu = 1$ по-отдельности. Можно увидеть, что эти слагаемые распадаются на два типа.

1). V_{ee} описывает внутриатомные процессы, в которых электрон на данном узле остается на том же уровне. Эти процессы соответствуют сла-

гаемым типа $a_{\nu n}^\dagger a_{\nu n'}^\dagger a_{\nu n'} a_{\nu n}$ с ν равным 0 или 1. Оператор V_{ee} также содержит вклады типа $a_{0n}^\dagger a_{1n'}^\dagger a_{1n'} a_{0n}$.

2). V_{ee} описывает межатомные процессы, в которых электрон на одном узле переходит с $\nu = 0$ на $\nu = 1$, а электрон со второго узла переходит с $\nu = 1$ на $\nu = 0$. Это - слагаемые типа $a_{0n}^\dagger a_{1n'}^\dagger a_{0n'} a_{1n}$.

Следовательно, V_{ee} может быть представлено в виде $V_{ee} \simeq V_{00} + V_{11} + V_{01}^{dir} + V_{01}^{exch}$ с

$$\begin{aligned}
 V_{00} &= \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a_{0n_1}^\dagger a_{0n_2}^\dagger a_{0n_2} a_{0n_1}, \\
 V_{11} &= \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} a_{1n_1}^\dagger a_{1n_2}^\dagger a_{1n_2} a_{1n_1}, \\
 V_{01}^{dir} &= \sum_{n_1 n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a_{0n_1}^\dagger a_{1n_2}^\dagger a_{1n_2} a_{0n_1}, \\
 V_{01}^{exch} &= \sum_{n_1 n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a_{1n_1}^\dagger a_{0n_2}^\dagger a_{1n_2} a_{0n_1}. \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

Электроны и дырки. – Как и для экситонов Ванье-Мотта, здесь снова удобно воспользоваться концепцией дырок. Это позволяет оперировать возбуждениями над состоянием $|0\rangle$, в котором электроны на всех узлах находятся в основных состояниях, $\nu = 0$. Под возбуждениями будем понимать состояния, в которых некоторое число электронов на узлах перешло в возбужденное состояние, и это число равно количеству экситонов в системе. Экситоны Френкеля состоят из электронно-дырочных пар на одном узле.

В отсутствие спиновых степеней свободы операторы рождения электронов и дырок связаны с операторами рождения атомных состояний $\nu = 0$ и $\nu = 1$ соотношениями

$$\begin{aligned}
 a_{1n}^\dagger &= a_n^\dagger, \\
 a_{0n} &= b_n^\dagger. \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Используя правила антикоммутиации для электронов в атомных состояниях (5.19), легко показать, что $[a_{n'}, a_n]_+ = 0$ и

$$[a_{n'}, a_n^\dagger]_+ = [a_{1n'}, a_{1n}^\dagger]_+ = \langle 1n' | 1n \rangle \simeq \delta_{nn'} \quad (5.32)$$

для сильно локализованных состояний. Аналогично, имеем $[b_{n'}, b_n]_+ = 0$ и

$$[b_{n'}, b_n^\dagger]_+ = [a_{0n'}, a_{0n}^\dagger]_+ = \langle 0n' | 0n \rangle \simeq \delta_{n'n}. \quad (5.33)$$

Если теперь рассмотреть антикоммутиатор между электронными и дырочными операторами, получим

$$\begin{aligned} [a_{n'}, b_n^\dagger]_+ &= [a_{1n'}, a_{0n}]_+ = 0, \\ [a_{n'}, b_n]_+ &= [a_{1n'}, a_{0n}^\dagger]_+ = \langle 1n' | 0n \rangle \simeq 0, \end{aligned} \quad (5.34)$$

для сильно локализованных состояний, тогда как для $n = n'$ антикоммутиатор обращается в 0 точно, благодаря (5.13).

Для представления H_0 через операторы для электронов и дырок, сначала заметим, что $a_{0n}^\dagger a_{0n} = b_n b_n^\dagger = 1 - b_n^\dagger b_n$; поэтому имеем

$$H_0 = N_s \tilde{\varepsilon}_0 + \sum_n (\tilde{\varepsilon}_1 a_n^\dagger a_n - \tilde{\varepsilon}_0 b_n^\dagger b_n). \quad (5.35)$$

Из-за других вкладов в $a_n^\dagger a_n$ и $b_n^\dagger b_n$, происходящих из межэлектронного взаимодействия, энергия электрона и энергия дырки будут отличаться от $\tilde{\varepsilon}_1$ и $(-\tilde{\varepsilon}_0)$.

Рассмотрим теперь межэлектронные взаимодействия, задаваемые (5.30). Поскольку $a_{1n} = a_n$, второе слагаемое в (5.30) дает кулоновское отталкивание между электронами:

$$V_{11} = \tilde{V}_{ee} = \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} a_{n_1}^\dagger a_{n_2}^\dagger a_{n_2} a_{n_1}. \quad (5.36)$$

Для преобразования третьего слагаемого в (5.30) сначала заметим, что $a_{0n_1}^\dagger a_{1n_2}^\dagger a_{1n_2} a_{0n_1} = b_{n_1} a_{n_2}^\dagger a_{n_2} b_{n_1}^\dagger = a_{n_2}^\dagger a_{n_2} (1 - b_{n_1}^\dagger b_{n_1})$; так что этот третий член

дает два вклада

$$V_{01}^{dir} = V_{eh}^{(dir)} + \sum_{n_2} a_{n_2}^\dagger a_{n_2} \sum_{n_1} V_{R_{n_1}-R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

Второе слагаемое в V_{01}^{dir} , которое происходит от кулоновского взаимодействия между электроном на атомном возбужденном уровне и всеми атомными основными состояниями, “оденет” энергию электрона $\tilde{\epsilon}_1$ в (5.35). Первое слагаемое в V_{01}^{dir} , задаваемое

$$V_{eh}^{(dir)} = - \sum_{n_1 n_2} V_{R_{n_1}-R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b_{n_1}^\dagger a_{n_2}^\dagger a_{n_2} b_{n_1}, \quad (5.38)$$

описывает прямое притяжение между электроном и дыркой, которые находятся на своих узлах.

Аналогичным образом получаем, что четвертое слагаемое в (5.30) дает два вклада, поскольку $a_{1n_1}^\dagger a_{0n_2}^\dagger a_{1n_2} a_{0n_1} = a_{n_1}^\dagger b_{n_2} a_{n_2} b_{n_1}^\dagger = -a_{n_1}^\dagger (\delta_{n_2 n_1} - b_{n_1}^\dagger b_{n_2}) a_{n_2}$; так что имеем

$$V_{01}^{exch} = V_{eh}^{(exch)} - V_{R=0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sum_n a_n^\dagger a_n. \quad (5.39)$$

Второе слагаемое в V_{01}^{exch} также “оденет” энергию электрона $\tilde{\epsilon}_1$, тогда как первое слагаемое, задаваемое

$$V_{eh}^{(exch)} = \sum_{n_1 n_2} V_{R_{n_1}-R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a_{n_1}^\dagger b_{n_1}^\dagger b_{n_2} a_{n_2}, \quad (5.40)$$

соответствует уничтожению электронно-дырочной пары на узле n_2 и ее рождению на узле n_1 .

Теперь рассмотрим первое слагаемое в (5.30) для $\nu = 0$. Сначала заметим, что благодаря (5.19) и (5.20),

$$a_{0n_1}^\dagger a_{0n_2}^\dagger a_{0n_2} a_{0n_1} = b_{n_1} b_{n_2} b_{n_2}^\dagger b_{n_1}^\dagger = 1 - b_{n_1}^\dagger b_{n_1} - b_{n_2}^\dagger b_{n_2} + b_{n_2}^\dagger b_{n_1}^\dagger b_{n_1} b_{n_2}. \quad (5.41)$$

Поэтому, группируя два слагаемых со знаком минус, получим, что V_{00} дает

три вклада

$$V_{00} = \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \sum_n b_n^\dagger b_n \sum_{n' \neq n} V_{R_n - R_{n'}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \tilde{V}_{hh}. \quad (5.42)$$

Последнее слагаемое в V_{00} описывает отталкивание между дырками.

Оно имеет вид:

$$\tilde{V}_{hh} = \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b_{n_1}^\dagger b_{n_2}^\dagger b_{n_2} b_{n_1}. \quad (5.43)$$

Гамильтониан в электронно-дырочном представлении. – Если теперь собрать все три релевантных слагаемых вместе, получим гамильтониан для описания экситонов Френкеля $H_0 + V_{00} + V_{11} + V_{01}^{dir} + V_{01}^{exch} + V_{ion-ion}$:

$$H^{(F)} = \Delta^{(F)} + H_{eh} + V_{intra} + V_{inter}. \quad (5.44)$$

1). $\Delta^{(F)}$ - постоянная, зависящая лишь от вкладов от атомных основных состояний. Она имеет вид

$$\Delta^{(F)} = N_s \varepsilon_0 + N_s \nu(0, 0) + \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} \frac{e^2}{|\mathbf{R}_{n_1} - \mathbf{R}_{n_2}|} = N_s (\varepsilon_0 + \varepsilon_0^{(coul)}) \quad (5.45)$$

где N_s - число узлов (ионов). Используя (5.24) и (5.29), имеем

$$\varepsilon_0^{(coul)} = \sum_{R \neq 0} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\varphi_0(\mathbf{r})|^2 |\varphi_0(\mathbf{r}')|^2 \left[\frac{-e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}' - \mathbf{R}|} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{R} \right] \quad (5.46)$$

где R - все возможные расстояния между ионами.

2). Второе слагаемое в (5.44) - одночастичный оператор, который можно представить как

$$H_{eh} = \varepsilon_e \sum_n a_n^\dagger a_n + \varepsilon_h \sum_n b_n^\dagger b_n. \quad (5.47)$$

Он описывает кинетические энергии электрона и дырки. Эти энергии задаются соотношениями

$$\varepsilon_e = \varepsilon_1 + \nu(1, 1) + \sum_R V_R \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - V_{R=0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.48)$$

$$-\varepsilon_h = \varepsilon_0 + \nu(0, 0) + \sum_{R \neq 0} V_R \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.49)$$

3). Третье слагаемое в (5.44) V_{intra} соответствует $V_{eh}^{(dir)} + V_{eh}^{(exch)}$ при $n_1 = n_2$:

$$V_{intra} = -\delta \sum_n a_n^\dagger b_n^\dagger b_n a_n, \quad (5.50)$$

где $(-\delta)$

$$-\delta = -V_{R=0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + V_{R=0} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.51)$$

Используя матричные элементы (5.29), видим, что эту величину можно также представить в виде

$$\delta = \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \left[\varphi_1^*(\mathbf{r}_2) \varphi_0^*(\mathbf{r}_1) - \varphi_0^*(\mathbf{r}_2) \varphi_1^*(\mathbf{r}_1) \right] \frac{e^2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \varphi_1^*(\mathbf{r}_2) \varphi_0^*(\mathbf{r}_1). \quad (5.52)$$

Таким образом δ положительная постоянная величина, поскольку $\langle \nu | \nu \rangle = 1$ и $\langle 0 | 1 \rangle = 0$. Энергия δ физически соответствует увеличению энергии при занятии узла n электронно-дырочной парой.

4). Последнее слагаемое в (5.44), V_{inter} , содержит все кулоновские взаимодействия между узлами. А именно, это слагаемые \widetilde{V}_{ee} и \widetilde{V}_{hh} , задаваемые (5.36) и (5.43), а также часть потенциала прямого электронно-дырочного взаимодействия $V_{eh}^{(dir)}$ при $n_1 \neq n_2$. Используя (5.38), этот последний вклад можно представить как

$$\widetilde{V}_{eh}^{(dir)} = - \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} b_{n_1}^\dagger a_{n_2}^\dagger a_{n_2} b_{n_1}. \quad (5.53)$$

Он содержит часть обменного электронно-дырочного потенциала $V_{eh}^{(exch)}$, определяемого (5.40) при $n_1 \neq n_2$. Эта часть играет важную роль, поскольку именно она ответственна за перенос возбуждения с узла на узел. Изолируем этот член от других кулоновских слагаемых и будем называть его V_{trans}

$$V_{trans} = \sum_{n_1 \neq n_2} V_{R_{n_1} - R_{n_2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} a_{n_1}^\dagger b_{n_1}^\dagger b_{n_2} a_{n_2}. \quad (5.54)$$

Теперь можно записать V_{inter} в (5.44) как

$$\begin{aligned} V_{inter} &= V_{trans} + V_{coul}, \\ V_{coul} &= \widetilde{V}_{ee} + \widetilde{V}_{hh} + \widetilde{V}_{eh}^{(dir)}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

5.3. Коммутационная техника

Операторы рождения и уничтожения экситонов Френкеля. – Сначала опустим взаимодействие между узлами. Гамильтониан $H^{(F)}$ (5.44) тогда сведется к

$$H_{pair} = H_{eh} + V_{intra}, \quad (5.56)$$

если опустить иррелевантную постоянную Δ .

В основном состоянии H_{pair} отсутствуют электронно-дырочные пары. Обозначим его $|0\rangle$ и будем считать его энергию равной нулю.

Если рассмотреть состояние с одной парой $a_n^\dagger b_{n'}^\dagger |0\rangle$, видно, что основное состояние соответствует $n = n'$. Для таких состояний имеем

$$\begin{aligned} (H_{pair} - E_{pair}) |R_n\rangle &= 0, \\ |R_n\rangle &= a_n^\dagger b_n^\dagger |0\rangle = B_n^\dagger |0\rangle, \end{aligned} \quad (5.57)$$

где $E_{pair} = \varepsilon_e + \varepsilon_h - \delta$. Эти состояния вырождены, поскольку n пробегает значения от 1 до N_s .

Используя правила антикоммутиации для электронных и дырочных операторов, легко получить, что операторы пар B_n^\dagger ведут себя как бозонные операторы по отношению к операции уничтожения, поскольку для их коммутаторов выполнено соотношение

$$[B_n, B_{n'}]_- = 0. \quad (5.58)$$

В то же время, они представляют собой операторы для составных бозонов, так как для другого коммутатора имеем

$$[B_{n'}, B_n^\dagger]_- = \delta_{nn'} - D_{nn'}, \quad (5.59)$$

где оператор

$$D_{nn'} = \delta_{nn'}(a_n^\dagger a_n + b_n^\dagger b_n) \quad (5.60)$$

описывает отклонения от чисто бозонной статистики. Что важно, этот оператор при действии на вакуум пар дает 0.

Если в гамильтониане $H^{(F)}$ теперь сохранить связь между узлами $V_{inter} = V_{trans} + V_{coul}$, задаваемую (5.55), появляются недиагональные вклады между разными узлами, которые снимают вырождение.

Состояния $|R_n\rangle$ содержат только одну электронно-дырочную пару. Поэтому $V_{coul}|R_n\rangle = 0$, так что единственный вклад в V_{inter} , играющий роль в диагонализации $H^{(F)}$, это электронно-дырочный оператор обмена V_{trans} . Поскольку $b_{n_2} a_{n_2} a_n^\dagger b_n^\dagger |0\rangle = \delta_{n_2 n} |0\rangle$, легко получаем

$$V_{trans}|R_n\rangle = \sum_{n_1 \neq n} V_{R_{n_1}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |R_{n_1}\rangle. \quad (5.61)$$

Это показывает, что гамильтониан $H^{(F)}$ при действии на $|R_n\rangle$ сводится к

$$H_X^{(0)} = H_{pair} + V_{trans},$$

$$H_X^{(0)}|R_n\rangle = E_{pair}|R_n\rangle + \sum_{n_1 \neq n} V_{R_{n_1}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |R_{n_1}\rangle. \quad (5.62)$$

Покажем теперь, что следующая линейная комбинация состояний $|R_n\rangle$

$$|X_Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{n=1}^{N_s} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} |R_n\rangle, \quad (5.63)$$

соответствующая состоянию с экситоном Френкеля, является точным собственным состоянием гамильтониана $H_X^{(0)}$. Для этого сначала рассмотрим оператор V_{trans} , действующий на $|X_Q\rangle$

$$V_{trans}|X_Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_n e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} \sum_{n' \neq n} V_{R_{n'}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |R_{n'}\rangle. \quad (5.64)$$

Это соотношение можно переписать:

$$V_{trans} |X_Q\rangle = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{n'} |R_{n'}\rangle \sum_{n \neq n'} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} V_{R_{n'}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.65)$$

Для вычисления последней суммы представим ее в виде

$$\sum_{n \neq n'} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} V_{R_{n'}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_{n'}} \sum_{n \neq n'} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{R}_n-\mathbf{R}_{n'})} V_{R_{n'}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.66)$$

Из-за трансляционной инвариантности системы сумма не может зависеть от n' ; так что имеем

$$\sum_{n \neq n'} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} V_{R_{n'}-R_n} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_{n'}} \sum_{R \neq 0} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} V_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.67)$$

Используя (5.65), получаем

$$V_{trans} |X_Q\rangle = |X_Q\rangle \sum_{R \neq 0} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} V_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.68)$$

Таким образом, окончательно получаем

$$H_X^{(0)} |X_Q\rangle = E_Q |X_Q\rangle, \quad (5.69)$$

где

$$E_Q = E_{pair} + \mathcal{V}_Q, \quad \mathcal{V}_Q = \sum_{\mathbf{R} \neq 0} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}} V_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{V}_Q^* \quad (5.70)$$

Это соотношение показывает, что снятие вырождения происходит исключительно благодаря оператору V_{trans} , который ответственен за перенос возбуждения от узла к узлу.

Из соотношения (5.63) следует, что оператор рождения для экситона Френкеля B_Q^\dagger , определяемый как $|X_Q\rangle = B_Q^\dagger |0\rangle$ через операторы $B_n^\dagger = a_n^\dagger b_n^\dagger$, имеет вид

$$B_Q^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{n=1}^{N_s} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} B_n^\dagger. \quad (5.71)$$

Аналогично можно переписать оператор рождения пары на узле через операторы рождения экситонов Френкеля

$$\frac{1}{\sqrt{N_s}} \sum_{\mathbf{Q}} e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} = \frac{1}{N_s} \sum_{n'=1}^{N_s} B_{n'}^{\dagger} \sum_{\mathbf{Q}} e^{i\mathbf{Q}\cdot(\mathbf{R}_{n'}-\mathbf{R}_n)} = B_n^{\dagger}. \quad (5.72)$$

Коммутаторы для операторов рождения экситонов. – Экситоны Френкеля являются составными бозонами. В этом можно убедиться, рассмотрев правила коммутации для операторов их рождения и уничтожения. Используя (5.58), находим

$$[B_{\mathbf{Q}}, B_{\mathbf{Q}'}]_{-} = 0. \quad (5.73)$$

Если теперь рассмотреть другой релевантный коммутатор, получим

$$[B_{\mathbf{Q}'}, B_{\mathbf{Q}}^{\dagger}]_{-} = \frac{1}{N_s} \sum_{n'=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e^{-i\mathbf{Q}'\cdot\mathbf{R}_{n'}} e^{i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}_n} [B_{n'}^{\dagger}, B_n^{\dagger}]_{-}. \quad (5.74)$$

Используя соотношение (5.59) для коммутатора $[B_{n'}^{\dagger}, B_n^{\dagger}]_{-}$, получим

$$[B_{\mathbf{Q}'}, B_{\mathbf{Q}}^{\dagger}]_{-} = \delta_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'} - D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'}, \quad (5.75)$$

где оператор $D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'}$ описывает отклонение от бозонной статистики в случае экситонов Френкеля:

$$D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'} = \frac{1}{N_s} \sum_{n=1}^{N_s} e^{i(\mathbf{Q}-\mathbf{Q}')\cdot\mathbf{R}_n} (a_n^{\dagger} a_n + b_n^{\dagger} b_n). \quad (5.76)$$

Этот оператор при действии на вакуум электронно-дырочных пар дает 0:

$$D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}'} |0\rangle = 0. \quad (5.77)$$

Полученные результаты свидетельствуют о том, что для адекватного описания систем с экситонами Френкеля необходимо учитывать отклонения от бозонной статистики, которые появляются из-за наличия фермионных степеней свободы у экситонов. Это может быть сделано с использованием подхода, развитого в серии работ М. Комбеско с соавторами (см. обзор

[90]), в рамках которого были развиты соответствующие коммутационная и диаграммная техники (для случая экситонов Ванье-Мотта).

Если в системе имеется более одной электронно-дырочной пары, требуется учесть оператор кулоновского взаимодействия V_{coul} (5.53). Поэтому $H^{(F)}$ разумно переписать в виде $H^{(F)} = H_X$ с

$$H_X = H_X^{(0)} + V_{coul}, \quad (5.78)$$

где $H_X^{(0)}$ определяется (5.62). Оператор V_{coul} (5.55) соответствует всем прямым кулоновским взаимодействиям между фермионами на разных узлах.

Оператор $D_{Q'Q}$ удобно представить в виде

$$D_{Q'Q} = \Delta_{Q-Q'}^{(e)} + \Delta_{Q-Q'}^{(h)}, \quad (5.79)$$

где

$$\Delta_{\mathbf{P}}^{(e)} = \frac{1}{N_s} \sum_n e^{i\mathbf{P}\cdot\mathbf{R}_n} a_n^\dagger a_n, \quad (5.80)$$

и аналогично для $\Delta_{\mathbf{P}}^{(h)}$ с $a_n^\dagger a_n$, замененным на $b_n^\dagger b_n$.

Далее несложно получить:

$$[D_{Q'Q}, B_{\mathbf{P}}^\dagger]_- = \frac{2}{N_s} B_{\mathbf{P}+\mathbf{Q}-\mathbf{Q}'}^\dagger. \quad (5.81)$$

Таким образом, мы снова вернулись к операторам рождения экситонов Френкеля. Если теперь сравнить это соотношение с аналогичным соотношением для экситонов Ванье-Мотта ([90]),

$$[D_{Q'Q}, B_{\mathbf{P}}^\dagger]_- = \sum_{\mathbf{P}'} \left\{ \lambda \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}' & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}' & \mathbf{P} \end{smallmatrix} \right) + \lambda \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{P}' & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}' & \mathbf{P} \end{smallmatrix} \right) \right\} B_{\mathbf{P}'}^\dagger, \quad (5.82)$$

можно произвести следующую идентификацию

$$\lambda \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}' & \mathbf{Q} \\ \mathbf{P}' & \mathbf{P} \end{smallmatrix} \right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{P}' & \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}' & \mathbf{P} \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{N_s} \delta_{\mathbf{P}'+\mathbf{Q}', \mathbf{P}+\mathbf{Q}}. \quad (5.83)$$

Коммутатор гамильтониана и операторов рождения экситонов. –

Для коммутатора гамильтониана системы и оператора рождения экситона Френкеля имеем

$$[H_X, B_{\mathbf{Q}}^\dagger] = E_{\mathbf{Q}} B_{\mathbf{Q}}^\dagger + V_{\mathbf{Q}}^\dagger. \quad (5.84)$$

В (5.84) удобно произвести разделение:

$$\left[H_X^{(0)}, B_Q^\dagger \right] = E_Q B_Q^\dagger + S_Q^\dagger, \quad (5.85)$$

$$\left[V_{coul}, B_Q^\dagger \right] = W_Q^\dagger. \quad (5.86)$$

Таким образом, получаем

$$V_Q^\dagger = S_Q^\dagger + W_Q^\dagger, \quad (5.87)$$

где первое слагаемое происходит из гамильтониана без взаимодействия, а второе обусловлено взаимодействием.

После некоторых расчетов получаем выражение для первого вклада

$$S_Q^\dagger = - \sum_{Q'} \zeta_{Q'} B_{Q'}^\dagger D_{Q'Q} = - \sum_{Q'} B_{Q'}^\dagger \zeta_{Q'} \left(\Delta_{Q-Q'}^{(e)} + \Delta_{Q-Q'}^{(h)} \right), \quad (5.88)$$

где

$$\zeta_Q = \mathcal{V}_Q - \varepsilon_0. \quad (5.89)$$

Перейдем теперь к учету взаимодействия. Несколько более сложный расчет дает

$$W_Q^\dagger = \sum_{Q'} B_{Q'}^\dagger \left(\mathcal{W}_{Q-Q'}^{(e)} \Delta_{Q-Q'}^{(e)} + \mathcal{W}_{Q-Q'}^{(h)} \Delta_{Q-Q'}^{(h)} \right), \quad (5.90)$$

где

$$\mathcal{W}_Q^{(e)} = \sum_{\mathbf{R} \neq 0} e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}} \left[V_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - V_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (5.91)$$

$$\mathcal{W}_Q^{(h)} = \sum_{\mathbf{R} \neq 0} e^{-i\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}} \left[V_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - V_{\mathbf{R}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]. \quad (5.92)$$

Теперь рассмотрим коммутатор оператора V_Q^\dagger и оператора рождения экситона. Результат будет снова выражаться через операторы рождения экситона, что позволит "замыкать" вычисления матричных элементов. Прямой расчет дает

$$\left[V_{Q_1}^\dagger, B_{Q_2}^\dagger \right] = \sum_{Q_1' Q_2'} \xi \begin{pmatrix} Q_2' & Q_2 \\ Q_1' & Q_1 \end{pmatrix} B_{Q_1'}^\dagger B_{Q_2'}^\dagger, \quad (5.93)$$

где

$$\xi \begin{pmatrix} Q_2' & Q_2 \\ Q_1' & Q_1 \end{pmatrix} = \xi_{coul} \begin{pmatrix} Q_2' & Q_2 \\ Q_1' & Q_1 \end{pmatrix} - \xi_{trans} \begin{pmatrix} Q_2' & Q_2 \\ Q_1' & Q_1 \end{pmatrix} + \xi_{neut} \begin{pmatrix} Q_2' & Q_2 \\ Q_1' & Q_1 \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

$$\xi_{coul} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N_s} \mathcal{W}_{\mathbf{Q}_1 - \mathbf{Q}'_1} \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2}, \quad (5.95)$$

$$\xi_{transf} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{N_s} (\mathcal{V}_{\mathbf{Q}'_1} + \mathcal{V}_{\mathbf{Q}'_2}) \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2}, \quad (5.96)$$

$$\xi_{neut} \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} = \frac{2\varepsilon_0}{N_s} \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2, \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2}. \quad (5.97)$$

Итак, мы получили четыре коммутационных соотношения (5.75), (5.81), (5.84), (5.93), которые играют ключевую роль в представленном методе. Во всех них точно учитываются фермионные правила коммутации для электронов и дырок, составляющих экситоны Френкеля.

Более сложные коммутаторы. – Для исследования многочастичных эффектов необходимы коммутаторы, в которых бы фигурировали операторы рождения многих экситонов Френкеля. Такие коммутаторы получаются обобщением полученных ранее четырех коммутационных соотношений. Соотношения (5.81) и (5.75), соответственно, переходят в

$$[D_{mi}, B_0^{\dagger N}] = NB_0^{\dagger N-1} \sum_n \left\{ \lambda \binom{n}{m} \binom{0}{i} + (m \longleftrightarrow n) \right\} B_n^{\dagger}, \quad (5.98)$$

$$\begin{aligned} [B_m, B_0^{\dagger N}] &= NB_0^{\dagger N-1} (\delta_{m0} - D_{m0}) \\ &\quad - N(N-1) B_0^{\dagger N-2} \sum_n \lambda \binom{n}{m} \binom{0}{0} B_n^{\dagger}. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Аналогично, соотношения (5.93) и (5.84) переходят, соответственно,

в

$$[V_i^{\dagger}, B_0^{\dagger N}] = NB_0^{\dagger N-1} \sum \xi \binom{n}{m} \binom{0}{i} B_m^{\dagger} B_n^{\dagger}. \quad (5.100)$$

$$\begin{aligned} [H_X, B_0^{\dagger N}] &= NB_0^{\dagger N-1} (E_0 B_0^{\dagger} + V_0^{\dagger}) \\ &\quad + \frac{N(N-1)}{2} B_0^{\dagger N-2} \sum \xi \binom{n}{m} \binom{0}{0} B_m^{\dagger} B_n^{\dagger}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Индексы в полученных соотношениях нумеруют состояния по значениям импульса экситонов.

Из-за простоты величин λ , задаваемых (5.83), соотношения (5.98) и (5.99) переходят в

$$[D_{\mathbf{Q}'\mathbf{Q}}, B_0^{\dagger N}] = \frac{2N}{N_s} B_0^{\dagger N-1} B_{\mathbf{Q}-\mathbf{Q}'}^{\dagger}, \quad (5.102)$$

$$[B_{\mathbf{Q}}, B_0^{\dagger N}] = NB_0^{\dagger N-1} (\delta_{\mathbf{Q}\mathbf{0}} - D_{\mathbf{Q}\mathbf{0}}) - \frac{N(N-1)}{N_s} B_0^{\dagger N-2} B_{-\mathbf{Q}}^{\dagger}. \quad (5.103)$$

5.4. Вычисление некоторых матричных элементов

Коммутационные соотношения, введенные в предыдущем параграфе, позволяют вычислять различные матричные элементы точно, то есть с полным учетом фермиевских правил коммутации для электронных и дырочных операторов.

Сначала рассмотрим состояния с двумя экситонами. Для таких состояний имеем следующее соотношение, которое несложно получить с использованием двух первых коммутаторов:

$$\langle v | B_{\mathbf{Q}'_1} B_{\mathbf{Q}'_2} B_{\mathbf{Q}_2}^{\dagger} B_{\mathbf{Q}_1}^{\dagger} | v \rangle = \delta_{\mathbf{Q}'_1 \mathbf{Q}_1} \delta_{\mathbf{Q}'_2 \mathbf{Q}_2} + \delta_{\mathbf{Q}'_1 \mathbf{Q}_2} \delta_{\mathbf{Q}'_2 \mathbf{Q}_1} - \frac{2}{N_s} \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2} \quad (5.104)$$

Последнее слагаемое в правой части - ничто иное как $-\lambda \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} \mathbf{Q}'_1 & \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}'_2 & \mathbf{Q}_1 \end{pmatrix}$. Данный результат можно визуализировать с помощью обменных диаграмм, показанных на Рис. 5.1. Правила вычисления таких диаграмм для случая экситонов Ванье-Мотта были представлены в [90].

Аналогично, для состояний с тремя экситонами получаем

$$\begin{aligned} \langle v | B_{\mathbf{Q}'_3} B_{\mathbf{Q}'_2} B_{\mathbf{Q}'_1} B_{\mathbf{Q}_1}^{\dagger} B_{\mathbf{Q}_2}^{\dagger} B_{\mathbf{Q}_3}^{\dagger} | v \rangle = & \left\{ \delta_{\mathbf{Q}'_1 \mathbf{Q}_1} \delta_{\mathbf{Q}'_2 \mathbf{Q}_2} \delta_{\mathbf{Q}'_3 \mathbf{Q}_3} + 5 \text{ перест.} \right\} \\ & - \frac{2}{N_s} \left\{ \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2} \delta_{\mathbf{Q}'_3 \mathbf{Q}_3} + 8 \text{ перест.} \right\} \\ & + \frac{12}{N_s^2} \delta_{\mathbf{Q}'_1 + \mathbf{Q}'_2 + \mathbf{Q}'_3 \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 + \mathbf{Q}_3}. \end{aligned} \quad (5.105)$$

В диаграммном виде этот результат показан на Рис. 5.2.

Теперь вычислим аналогичную величину для N идентичных экситонов. Эта величина нам потребуется впоследствии при вычислении среднего

значения гамильтониана на волновых функциях, соответствующих произвольному количеству экситонов. А именно, рассмотрим матричный элемент

$$\langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^N B_{\mathbf{Q}}^{\dagger N} | \nu \rangle = N! F_N. \quad (5.106)$$

где $N!$ - это та величина, который был бы равен этот матричный элемент, если бы экстоны Френкеля были элементарными бозонами.

Простейший метод вычисления этого матричного элемента основан на использовании коммутатора (5.81). Поскольку $\langle \nu | B_{\mathbf{Q}} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} | \nu \rangle = 1$ и $F_1 = 1$, легко показать, что

$$\begin{aligned} \langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^2 B_{\mathbf{Q}}^{\dagger 2} | \nu \rangle &= 2 \left(1 - \frac{1}{N_s} \right), \\ \langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^3 B_{\mathbf{Q}}^{\dagger 3} | \nu \rangle &= 3! \left(1 - \frac{1}{N_s} \right) \left(1 - \frac{2}{N_s} \right) \end{aligned} \quad (5.107)$$

и так далее... В итоге, для F_N получаем

$$F_N = \left(1 - \frac{1}{N_s} \right) \dots \left(1 - \frac{N-1}{N_s} \right) = \frac{N_s!}{(N_s - N)! N_s^N}. \quad (5.108)$$

Отметим, что F_N не зависит от импульса экситона \mathbf{Q} .

Более технический вывод (5.108) основан на рекурсивном соотношении между $\langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^N B_{\mathbf{Q}}^{\dagger N} | \nu \rangle$, следующем из коммутатора (5.103):

$$\begin{aligned} \langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^N B_{\mathbf{Q}}^{\dagger N} | \nu \rangle &\equiv \langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^{N-1} B_{\mathbf{Q}} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger N} | \nu \rangle \\ &= \left(N - \frac{N(N-1)}{N_s} \right) \langle \nu | B_{\mathbf{Q}}^{N-1} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger N-1} | \nu \rangle. \end{aligned} \quad (5.109)$$

Отсюда имеем:

$$F_N = \left(1 - \frac{N-1}{N_s} \right) F_{N-1}, \quad (5.110)$$

из чего следует выражение (5.108) для F_N .

В следующем параграфе мы вычислим энергию основного состояния системы с произвольным количеством экситонов Френкеля N с нулевым импульсом $\mathbf{Q} = 0$ в борновском приближении:

$$\langle H \rangle_N = \frac{\langle \nu | B_{\mathbf{0}}^N H_X B_{\mathbf{0}}^{\dagger N} | \nu \rangle}{\langle \nu | B_{\mathbf{0}}^N B_{\mathbf{0}}^{\dagger N} | \nu \rangle}. \quad (5.111)$$

Сначала сделаем это для простейшего случая $N = 2$.

Заметим, что из (5.108) следует:

$$\begin{aligned} \langle \nu | B_0^2 B_0^{\dagger 2} | \nu \rangle &= 2! F_2 = 2! \frac{N_s!}{(N_s - 2)! N_s^2} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{N_s} \right), \end{aligned} \quad (5.112)$$

тогда как (5.101) для случая $N = 2$ приводит к соотношению

$$H B_0^{\dagger 2} | \nu \rangle = 2 E_0 B_0^{\dagger 2} | \nu \rangle + \sum_{\mathbf{Q}} \xi \begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & 0 \end{pmatrix} B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} B_{-\mathbf{Q}}^{\dagger} | \nu \rangle. \quad (5.113)$$

Тогда имеем:

$$\langle \nu | B_0^2 (H - 2E_0) B_0^{\dagger 2} | \nu \rangle = \sum_{\mathbf{Q}} \xi \begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & 0 \\ \mathbf{Q} & 0 \end{pmatrix} \langle \nu | B_0^2 B_{\mathbf{Q}}^{\dagger} B_{-\mathbf{Q}}^{\dagger} | \nu \rangle. \quad (5.114)$$

Воспользовавшись соотношением (5.104) для матричного элемента, имеем

$$\langle H \rangle_2 = 2E_0 + \frac{\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{1 - 1/N_s}. \quad (5.115)$$

Из этого результата можно было бы ожидать, что аналогичная величина для N экситонов будет содержать множитель $N(N - 1)/2$ перед членом с взаимодействием $\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, поскольку два экситона, участвующих во взаимодействии, теперь надо выбрать из N экситонов. Кроме того, можно было бы ожидать слагаемых более высоких степеней по $N(N - 1)(N - 2)$ (символы Похгаммера) из-за обменных эффектов. Однако окажется, что это не так, и в разложении выживают лишь слагаемые, пропорциональные $N(N - 1)$ - как и в случае системы с куперовским спариванием в термодинамическом пределе, рассмотренной в Главе 2 диссертационной работы.

5.5. Энергия системы

Итак, вычислим величину, задаваемую (5.115). Знаменатель этого выражения - это $N! F_N$. Для вычисления числителя используем соотношение

(5.101) для $[H, B_0^{\dagger N}]$, после чего получаем:

$$\begin{aligned} \langle H \rangle_N &= NE_0 \\ &+ \frac{N(N-1)}{2} \sum_{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2} \xi \left(\begin{array}{c} \mathbf{Q}_2 \ 0 \\ \mathbf{Q}_1 \ 0 \end{array} \right) \frac{\langle v | B_0^N B_{\mathbf{Q}_1}^\dagger B_{\mathbf{Q}_2}^\dagger B_0^{\dagger N-2} | v \rangle}{N! F_N}. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Алгебраический вывод. – Поскольку взаимодействие сохраняет импульс, $\xi \left(\begin{array}{c} \mathbf{Q}_2 \ 0 \\ \mathbf{Q}_1 \ 0 \end{array} \right)$ отличается от нуля только при $\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = 0$. Поэтому для получения $\langle H \rangle_N$, мы должны вычислить

$$G_N(\mathbf{Q}) = \langle v | B_0^N B_{\mathbf{Q}}^\dagger B_{-\mathbf{Q}}^\dagger B_0^{\dagger N-2} | v \rangle. \quad (5.117)$$

Так как для $\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ эта величина равна $N! F_N$, требуется фактически вычислить $G_N(\mathbf{Q})$ только для $\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}$. Из условия $D_{\mathbf{Q}\mathbf{0}} | v \rangle = 0$ и соотношения (5.103) легко получаем

$$G_N^*(\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}) = -\frac{N(N-1)}{N_s} \langle v | B_0^{N-2} B_{\mathbf{Q}} B_{\mathbf{Q}}^\dagger B_0^{\dagger N-2} | v \rangle. \quad (5.118)$$

Далее, используем коммутационное соотношение $[B_{\mathbf{Q}}, B_{\mathbf{Q}}^\dagger] = 1 - D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} G_N^*(\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}) &= -\frac{N(N-1)}{N_s} \left[\langle v | B_0^{N-2} B_0^{\dagger N-2} | v \rangle \right. \\ &\left. - \langle v | B_0^{N-2} D_{\mathbf{Q}\mathbf{Q}} B_0^{\dagger N-2} | v \rangle + \langle v | B_0^{N-2} B_{\mathbf{Q}}^\dagger B_{\mathbf{Q}} B_0^{\dagger N-2} | v \rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.119)$$

Первое слагаемое равно $(N-2)! F_{N-2}$. Второе слагаемое, рассчитанное с использованием (5.102), дает $[2(N-2)/N_s] (N-2)! F_{N-2}$. Для последнего слагаемого используем (5.103) для $B_{\mathbf{Q}} B_0^{\dagger N-2} | v \rangle$, после чего его можно переписать как $-[(N-2)(N-3)/N_s] G_{N-2}(\mathbf{Q})$. В итоге получаем рекурсивное соотношение между величинами G_N :

$$\begin{aligned} G_N^*(\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}) &= -\frac{N(N-1)}{N_s} \left(1 - 2 \frac{N-2}{N_s} \right) (N-2)! F_{N-2} \\ &+ \frac{N(N-1)(N-2)(N-3)}{N_s^2} G_{N-2}(\mathbf{Q}) \end{aligned} \quad (5.120)$$

Используя (5.108) для F_N , можно легко проверить, что это рекурсивное соотношение выполняется для

$$G_N(\mathbf{Q} \neq \mathbf{0}) = -\frac{1}{N_s - 1} N! F_N \quad (5.121)$$

В итоге, получаем простое выражение для $G_N(\mathbf{Q})$:

$$G_N(\mathbf{Q}) = \frac{N_s \delta_{\mathbf{Q} \mathbf{0}} - 1}{N_s - 1} N! F_N. \quad (5.122)$$

Подставляя его в (5.116), имеем

$$\sum_{\mathbf{Q}} \xi \begin{pmatrix} -\mathbf{Q} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \frac{N_s \delta_{\mathbf{Q} \mathbf{0}} - 1}{N_s - 1} \quad (5.123)$$

После несложных выкладок получаем

$$\langle H \rangle_N = N E_0 + \frac{N(N-1)}{2} \frac{\xi \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}{1 - 1/N_s}. \quad (5.124)$$

Оказывается, что как и в случае куперовских пар в термодинамическом пределе, член с взаимодействием содержит лишь слагаемое, пропорциональное $N(N-1)$.

Вывод с помощью диаграмм – Рассмотрим кулоновское слагаемое в $\langle H \rangle_N$:

$$C_N = -\frac{N(N-1)}{N_s} \sum_{\mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2} \langle \nu | B_0^N B_{\mathbf{Q}_1}^\dagger B_{\mathbf{Q}_2}^\dagger B_0^{\dagger N-2} | \nu \rangle \xi \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_1 & \mathbf{0} \end{pmatrix}. \quad (5.125)$$

Оно соответствует прямому взаимодействию между двумя экситонами с импульсами $\mathbf{0}$, которое переводит их в экситоны с импульсами $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$. Они потом могут взаимодействовать с остальными $(N-2)$ экситонами с нулевыми импульсами - так, что в результате имеются N таких экситонов. Такой процесс соответствует диаграмме на Рис. 5.3 (а).

Простейший из этих обменных процессов - в котором $(N-2)$ этих экситонов не участвуют вовсе. Они дают вклад $\langle \nu | B_0^{N-2} B_0^{\dagger N-2} | \nu \rangle = (N-2)! F_{N-2}$. Два других экситона $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ переходят в $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ - с обменом фермионами

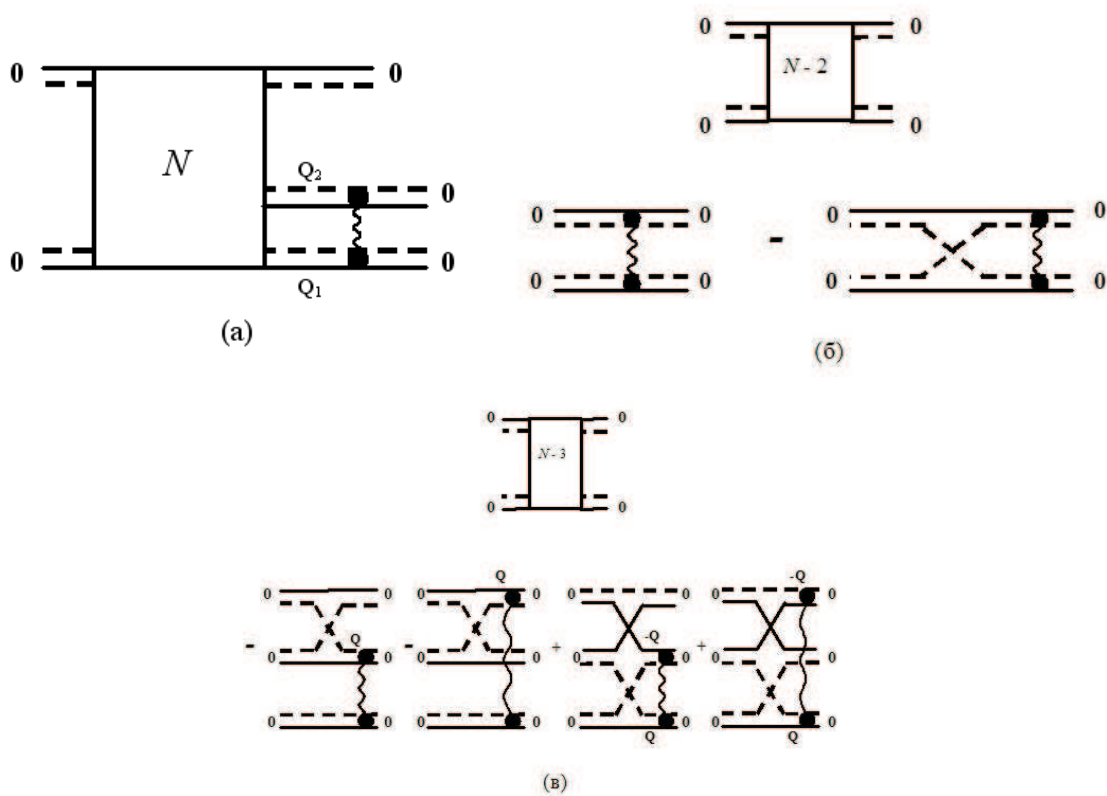


Рис. 5.3. (а) Диаграммное представление кулоновского вклада в среднее значение гамильтониана (5.124). (б) Член первого порядка: $(N - 2)$ экситонов с нулевыми импульсами не принимают участия в процессе. (в) Член второго порядка: $(N - 3)$ экситонов с нулевыми импульсами не принимают участия в процессе.

или без него. Первая возможность, которая соответствует диаграмме на Рис. 5.3 (б), приводит к

$$[(N-2)!F_{N-2}] \left[N(N-1) \left(\xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \xi^{in} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \right] \quad (5.126)$$

множитель $N(N-1)$ перед второй скобкой происходит от числа способов выбрать два экситона с импульсами 0 слева - из N экситонов.

Другая возможность - когда $(N-3)$ экситона не участвуют во взаимодействии. Она соответствует диаграмме на Рис. 5.3 (в), которая дает в C_N вклад

$$- [(N-3)!F_{N-3}] \left[N(N-1)(N-2) \frac{1}{N_s} \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (N-2) \right] 2 \quad (5.127)$$

Множитель $N(N-1)(N-2)$ происходит от числа способов выбрать три экситона слева на диаграмме из N экситонов. Множитель $(N-2)$ соответствует числу способов выбрать экситон с импульсом 0 справа из $(N-2)$ экситонов. Знак минус перед всем слагаемым появляется из-за того, что оно содержит один обменный процесс.

Третья возможность - связать два экситона с импульсами 0 с экситонами $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$. Пример соответствующей кулоновской диаграммы приведен на Рис. 5.4. Она дает вклад

$$+ [(N-4)!F_{N-4}] \left[N(N-1)(N-2)(N-3) \frac{1}{N_s^2} \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (N-2)(N-3) \right] 3 \quad (5.128)$$

и так далее.

Продолжая, получаем следующее разложение величины C_N

$$C_N = S_N \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.129)$$

$$S_N = (N-2)!F_{N-2}(N)_2 - (N-3)!F_{N-3}(N)_3 \frac{2}{N_s}(N-2) + (N-4)!F_{N-4}(N)_4 \frac{3}{N_s^2} \xi \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (N-2)_2 - \dots \quad (5.130)$$

Теперь нам требуется связать друг с другом S_N и F_N . Сначала рассмотрим матричный элемент

$$P_N(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2) = \langle \nu | B_0^N B_{\mathbf{Q}_1}^\dagger B_{\mathbf{Q}_2}^\dagger B_0^{\dagger N-2} | \nu \rangle, \quad (5.131)$$

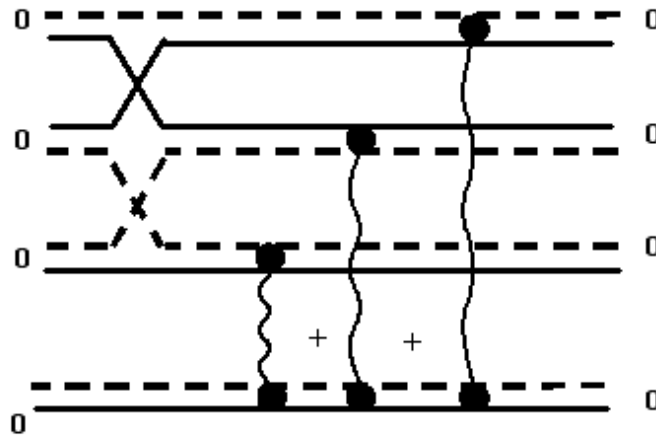


Рис. 5.4. Диаграммное представление вклада (5.128).

показанный в диаграммном виде на Рис. 5.5 (а). Для этого матричного элемента можно сконструировать диаграммное разложение, изолируя $(N - 2)$, $(N - 3)$, ... экситонов с импульсами 0 и выписав все возможные диаграммы, в которых оставшиеся экситоны взаимодействуют непосредственно, либо через обмен фермионами. Так мы, в частности, получаем диаграмму на Рис. 5.5 (в) для второго члена. Для случая, когда $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = 0$ ($P_N(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2)$ сводится к $N!F_N$), в итоге получаем

$$\begin{aligned}
 N!F_N &= (N - 2)!F_{N-2}N(N - 1)\left(1 - \frac{1}{N_s}\right) \\
 &\quad + (N - 3)!F_{N-3}N(N - 1)(N - 2)\left(\frac{2}{N_s} - \frac{2}{N_s^2}\right)(N - 2) + \dots \\
 &= \left(1 - \frac{1}{N_s}\right)S_N
 \end{aligned} \tag{5.132}$$

Подставляя (5.132) в (5.129) и (5.116), вновь приходим к результату (5.124).

Из литературы известны и иные подходы, направленные на учет фермионной статистики для экситонов Френкеля. В работах Аграновича с соавторами [32, 33, 277], на первом этапе, упрощается исходный гамильтониан, который сводится к разложению по степеням операторов рождения и уничтожения возбуждений на узлах так, что в этом разложении присутствуют

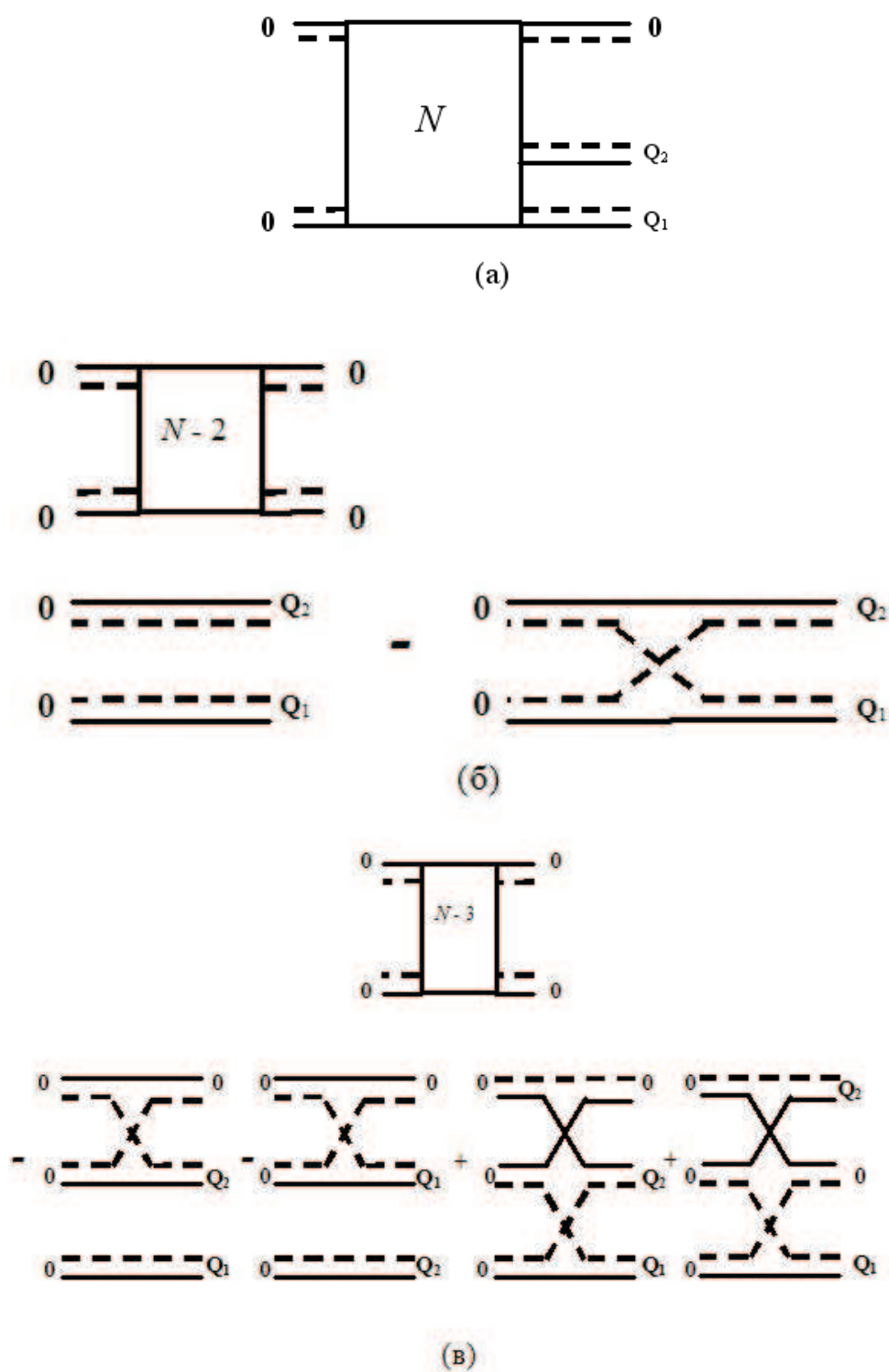


Рис. 5.5. (а) Диаграммное представление матричного элемента (5.131). (б) Слагаемое первого порядка: $(N - 2)$ экситонов не участвуют в процессе. (в) Слагаемое второго порядка: $(N - 3)$ экситонов не участвуют в процессе.

лишь слагаемые вплоть до четвертой степени и отсутствуют слагаемые, зависящие от операторов чисел заполнения состояний молекул. Это достигается путем учета дополнительного условия, заключающегося в том, что сумма операторов чисел заполнения квантовых состояний (основного и возбужденного) для каждого узла равна 1: $\widehat{N}_{0n} + \widehat{N}_{1n} \equiv a_{0n}^\dagger a_{0n} + a_{1n}^\dagger a_{1n} = 1$. Данное условие для операторов верно лишь в том случае, когда они действуют на волновые функции в представлении чисел заполнения, удовлетворяющие соответствующему условию ($N_{0n} + N_{1n} = 1$). При этом исходные правила коммутации для операторов рождения и уничтожения возбуждений на узлах переходят в новые правила - теперь операторы B_n^\dagger и B_m коммутируют для разных m и n , но антикоммутируют для совпадающих m и n . Такие операторы называют паулевскими. Это означает, что непосредственное применение коммутационной техники, развиваемой в данной главе диссертационной работы, к такому гамильтониану с паулевскими операторами более не представляется возможным. Тем не менее, можно разрабатывать альтернативные техники, в которых бы фигурировали операторы Паули, а не операторы составных бозонов. Так, в работе [278] исследовались *невзаимодействующие* экситоны Френкеля (с использованием общей формы гамильтониана Аграновича, но с отбрасыванием ответственных за взаимодействие членов). При этом операторы их рождения и уничтожения считались паулевскими. Была применена коммутационная техника для таких операторов и вычислены матричные элементы, соответствующие (5.106) и (5.124). Подчеркнем однако, что динамические взаимодействия в гамильтониане в [278] не учитывались (то есть можно сказать, что вычислялась энергия основного состояния в нулевом приближении по динамическому взаимодействию экситонов, но с учетом кинематического их взаимодействия). Тем не менее, для матричного элемента (5.124) получена аналогичная нашей зависимость от N , в которой содержатся лишь слагаемые, пропорциональные N и $N(N - 1)$, а выражение для (5.106) идентично нашему, как это и должно быть.

На втором этапе (если не использовать коммутационную технику), полученный гамильтониан исследуют с помощью приближения среднего поля, предварительно бозонизируя паулевские операторы рождения и уничтожения, что вносит неконтролируемые ошибки [277]. Либо же используют более деликатный метод, выражая эти операторы через бозонные операторы таким образом, что гамильтониан в этих бозонных операторах представляется в виде бесконечного ряда [32]. Появляющиеся таким образом дополнительные слагаемые в гамильтониане, призванные описать отклонение от бозонной статистики, принято, вслед за Дайсоном, называть кинематическим взаимодействием [279]. Учет кинематического взаимодействия является известной и технически тяжелой проблемой. Подчеркнем, что это взаимодействие появляется даже в гамильтониане динамически невзаимодействующих экситонов. Поскольку окончательный бозонизированный гамильтониан выражается в виде бесконечного ряда по операторам рождения и уничтожения, представляется затруднительным рассмотрение задач с произвольным N , хотя для задач, в которых фигурирует небольшое число экситонов (например, всего два), подход этот относительно прост и удобен.

Подход, основанный на паулиевских операторах, приложим только к системам с локализованными возбуждениями – такими как экситоны Френкеля. Предложенный же в диссертационной работе метод является развитием теории многих тел для экситонов Ванье-Мотта [90], который характеризуется большей общностью, поскольку его можно применять для различных составных бозонов, а не только к системам, описываемым приближением сильной связи. Таким образом, этот метод перспективен для построения описания с единых позиций достаточно широкого круга физических явлений.

Другая возможная стратегия (в рамках общего подхода, основанного на переходе к паулевским операторам) использовалась в работе [35] (см. также [280] и ссылки в ней), в которой применялось описание с помощью

функций Грина, то есть рассматривалась цепочка уравнений Боголюбова, которая обрывалась, так что дальнейшие манипуляции производились лишь с первым уравнением цепочки. При этом частично учитывались кинематические взаимодействия.

Иной метод применен в работах Черняка, Мукамеля и соавторов [36, 38]. С самого начала, переход к паулевским или бозонным операторам не осуществляется. Исходный гамильтониан выражался в виде бесконечного ряда по степеням операторов рождения и уничтожения возбуждений на узлах, для которых сохранялись правила коммутации составных бозонов. Аналогичный ряд получался для коммутатора $[B_m, B_n^\dagger]$. При рассмотрении системы с N возбуждениями и в гамильтониане, и в этом коммутаторе следует сохранить члены до порядков N и $N - 1$, соответственно. Опять же, в этом методе оказывается технически чрезвычайно сложно рассматривать случай произвольного N , так что вычисления производились лишь для случая двух экситонов (исследовалась восприимчивость третьего порядка).

5.6. Краткие выводы

В этой главе диссертационной работы было развито многочастичное описание экситонов Френкеля, в котором учитывается фермионная статистика для составляющих их электронов. Данный метод является развитием аналогичных идей для экситонов Ванье-Мотта, предложенных недавно М. Комбеско [90].

Сначала был выведен гамильтониан системы в представлении вторичного квантования, а затем - операторы рождения и уничтожения единичных экситонов Френкеля. Из коммутационных соотношений для электрона и дырки были выведены правила коммутации для этих операторов. Вычисляя двойной коммутатор, можно снова вернуться к оператору рождения экситона. Это свойство позволяет отыскивать нормировочные множители

для многочастичных волновых функций, описывающих экситоны Френкеля и выраженные через операторы рождения и уничтожения единичных (невзаимодействующих) экситонов. В диссертационной работе вычислен соответствующий множитель для состояния из произвольного количества невзаимодействующих экситонов в основном состоянии.

Далее аналогичные коммутационные соотношения были выведены для гамильтониана системы и оператора рождения экситона. Снова вычисляя двойной коммутатор, оказывается возможным вернуться к операторам рождения экситонов. Таким образом, получается замкнутая алгебра, позволяющая вычислять средние значения гамильтониана на заданных волновых функциях. Коммутационные правила дополняются специальными обменными диаграммами, которые удобно визуализируют вычисления.

В качестве первого приложения данной техники в диссертационной работе вычислено среднее значение гамильтониана на волновой функции, представляющей собой произвольное число экситонов в состоянии с импульсом 0 (энергия основного состояния системы в первом приближении по взаимодействию экситонов). Было показано, что в разложении этой величины по числу экситонов в термодинамическом пределе присутствуют лишь линейные и квадратичные слагаемые. Предложенная техника может использоваться для исследования различных коллективных свойств экситонов Френкеля, а также и нелинейных оптических эффектов (подобно тому, как это делается в случае экситонов Ванье-Мотта [90]).

Заключение

1. Предложен новый способ решения уравнений Ричардсона в термодинамическом пределе (вероятностный подход). В методе используется известная электростатическая аналогия, существующая для уравнений Ричардсона и некоторых других уравнений Бете. При этом удается избежать использования гипотезы Годена о характере распределения решений уравнений на комплексной плоскости. От рассмотрения энергии зарядов на плоскости впервые предложено перейти к аналогу гиббсовской вероятности при конечной, но низкой температуре. Выражение для вероятности оказывается схожим с волновой функцией Лафлина и оно факторизуется. Далее положение центра масс системы свободных зарядов, которое и равно энергии изначальной квантовой задачи, реконструируется путем вычисления соответствующей статистической суммы. Статистическая сумма задается многомерным интегралом сельберговского типа. Разработаны способы вычисления таких интегралов, основанные на использовании свойств детерминантов Вандермонде. Вычислены интегралы, относящиеся к основному и первым возбужденным состояниям квантовой задачи при произвольном заполнении окна Дебая (и некотором выборе контуров интегрирования). Проведено обобщение среднеполевой теории Бардина-Купера-Шриффера на этот случай.
2. Показано, что обобщенная теория Бардина-Купера-Шриффера точно описывает энергию основного и первого возбужденного состояний системы в термодинамическом пределе и при нуле температур при любом заполнении окна Дебая, то есть вдоль всего перехода от предела локальных пар к плотному пределу. Данный вывод подтверждается и с помощью еще одного метода решения уравнений Ричардсона, предложенного в диссертационной работе, который позволяет находить разложение плотности энергии системы по степеням плотности пар, то есть в виде вириального

разложения. Оба метода могут быть применены и к другим уравнениям анзаца Бете, среди которых уравнения Ричардсона представляют собой лишь один пример.

3. Предложена интерпретация результата теории Бардина-Купера-Шриффера для энергии конденсации не через сверхпроводящую щель, а через энергию связи индивидуальной пары. В режиме Бардина-Купера-Шриффера эта величина обеспечивает дополнительный скрытый масштаб энергии. Этот масштаб проявляется в малоразмерных сверхпроводниках: когда расстояния между соседними одноэлектронными уровнями становятся сопоставимым с энергией связи пары, теория Бардина-Купера-Шриффера перестает давать точные результаты.
4. Выявлено существование скрытой электронно-дырочной системы в уравнениях Ричардсона. Используя эту симметрию и некоторые дополнительные предположения, предложена аналитическая формула для энергии конденсации сверхпроводника в случае модели с эквидистантным распределением одноэлектронных уровней. Формула приложима вдоль всего перехода от режима доминирования флуктуаций в образце ультрамалого размера к термодинамическому пределу.
5. Исследованы топологические дефекты в сверхпроводниках и конденсатах атомов щелочных металлов, чьи размеры сопоставимы с длиной когерентности. Для этого развит метод пробных функций, который применен к различным задачам, начиная от изучения равновесных свойств таких систем и кончая кинетикой термоактивации вихрей через поверхностный барьер.
6. Исследованы равновесные фазовые диаграммы тонких сверхпроводящих цилиндров во внешнем поле с учетом возможного подавления параметра порядка на границе. Прослежена эволюция вихревой фазовой диаграммы системы и ее равновесной намагниченности в зависимости от

значения “длины экстраполяции” де Женна, описывающей подавление параметра порядка на поверхности. Показано, что подавление ведет к сглаживанию дискретного характера зависимости намагниченности от приложенного поля. Предложено теоретическое описание результатов серии экспериментов с малоразмерными структурами “сверхпроводник-ферромагнетик”(диск или кольцо с магнитной точкой), в которых связь между ферромагнетиком и сверхпроводником осуществлялась преимущественно за счет магнитного поля ферромагнетика (магнитной точки). Было получено хорошее согласие между теорией и экспериментом для зависимости критической температуры от приложенного магнитного поля. За счет специального подбора параметров системы можно добиться так называемого π -сдвига в кольце, который может оказаться важным для предложенной ранее конструкции кубита в виде сверхпроводящего кольца с джозефсоновскими контактами. Исследовано влияние неоднородности поля магнитной точки на сверхпроводящее состояние.

7. Исследованы конденсаты атомов щелочных металлов со спином 2 в ловушке. Построена равновесная фазовая диаграмма и предложено простое качественное объяснение серий фазовых переходов между состояниями с различными типами топологических дефектов. Описаны новые типы таких дефектов, отличающиеся экзотической спиновой текстурой. Также рассмотрены температурные флуктуации в спинорных конденсатах, когда атомы населяют три гиперспиновых состояния. Показано, что флуктуации могут вести к потере когерентности между этими состояниями, что приводит к флуктуациям локальной намагниченности. Вычислены соответствующие характерные температуры. Для системы со спином 2 в циклической фазе найдено решение типа “кинк” и предсказано существование перехода с потерей огранки при повышении температуры.
8. Предложено объяснение экспериментов с наноразмерными свинцовыми

островками, в которых наблюдается подавление поверхностного барьера на вход и выход вихря, через термоактивацию вихрей Абрикосова через барьер. Разработан новый подход к проблеме термоактивации вихря для малоразмерного образца, в котором разложение параметра порядка по релевантным уровням Ландау инкорпорируется в кинетическое уравнение Фоккера-Планка. Рассмотрена возможность квантового туннелирования вихря в тонкий островок. Определены критерии перехода от квантового туннелирования к термоактивации. Показано, что на выход вихря наибольшее влияние оказывают квантовые флуктуации, а на вход - температурные.

9. Рассмотрены температурные флуктуации в ультратонком наноструктуре из свинца треугольной формы, которые в настоящее время исследуются экспериментально. Показано, что флуктуации резко усиливаются в углах структуры. Аналогичный вывод можно сделать и для других сверхпроводниковых наноструктур с углами.
10. Рассмотрено проникновение вихря во вращающийся конденсат в ловушке, у которого отсутствует выраженная граница. Показано, что проникновение происходит через формирование пар вихрей и антивихрей на периферии системы. Выявлена роль поверхностных мод в этом процессе.
11. Изучено температурное разупорядочивание вихревых кластеров в конденсатах атомов. Рассмотрены кластеры из двух оболочек. Продемонстрирована сильная зависимость температуры разупорядочивания от симметрии кластера. Эти температуры были оценены. Показано, что данное явление можно наблюдать в реально существующих системах с атомами щелочных металлов. Рассматривались флуктуации вихревых молекул в ловушках со слабой дополнительной квадрупольной деформацией. Такие деформации используются в экспериментах для облегчения процесса формирования вихря. Были выявлены сильные эффекты соизмеримости между симмет-

рией вихревой молекулы и квадрупольной деформацией.

12. Построена самоогласованная вариационная модель для вычисления обратимой намагниченности сверхпроводника во всем диапазоне внешних магнитных полей от нижнего до верхнего критического поля, дающая весьма аккуратные результаты. Предложена аналитическая формула для обратимой намагниченности.
13. Рассмотрена структура вихревой решетки в сверхпроводнике с искусственным периодическим потенциалом пиннинга, образующим квадратную решетку. При этом учитывалось, что вихри стремятся выстроиться в треугольную решетку. Было выявлено существование богатой фазовой диаграммы системы, вызванной конкуренцией между двумя симметриями. Рассмотрена та же система, но с дополнительным беспорядком. Предложены различные сценарии потери порядка и обнаружено существование разнообразных дефектов вихревой решетки. Исследованы динамические режимы переноса вихрей в такой системе при приложении транспортного тока. Выявлена роль кинков и антикинков в установлении динамических режимов.
14. Развито многочастичное описание экситонов Френкеля, в котором учитывается фермионная статистика для составляющих их электронов. Метод основан на коммутационных соотношениях для операторов рождения и уничтожения экситонов, а также - гамильтониана системы. Коммутационные соотношения дополняются специальными обменными диаграммами, которые позволяют визуализировать вычисления. В качестве первого приложения данной техники, вычислено среднее значение гамильтониана на волновой функции, представляющей собой произвольное число невзаимодействующих экситонов в состоянии с импульсом 0. Было показано, что в разложении этой величины по числу экситонов в термодинамическом пределе присутствуют лишь линейные и квадратичные слагаемые.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Вычисление интеграла Норлунда-Райса методом седловой точки

Интересно, что результаты, полученные решением уравнений Ричардсона в разреженном пределе через разложение около решения для изолированной пары, могут быть выведены и с помощью вероятностного подхода, сформулированного ранее.

Основная идея заключается в том, что многомерный интеграл Норлунда-Райса теперь не следует преобразовывать в сумму биномиального типа; вместо этого его надо вычислять с помощью метода седловой точки. Для статсуммы z , определенной ранее, имеем

$$z = \int dr \frac{\prod_{l,j,j<l} (r_l - r_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{m_j=0}^{N_\Omega} (r_j + \frac{2m_j}{\rho})} \exp\left(\frac{\sum_{j=1}^N r_j}{V}\right), \quad (\text{A.1})$$

где

$$\int dr = \int dr_1 \dots \int dr_N.$$

Квантовомеханическая энергия E выражается через логарифмическую производную z по отношению к $1/V$ как

$$E \equiv 2N\varepsilon_{F_0} - \frac{\partial \ln(z)}{\partial (1/V)} = 2N\varepsilon_{F_0} - \frac{1}{z} \int dr \left(\sum_{j=1}^N r_j \right) \frac{\prod_{l,j,j<l} (r_l - r_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{m_j=0}^{N_\Omega} (r_j + \frac{2m_j}{\rho})} \exp\left(\frac{\sum_{j=1}^N r_j}{V}\right) \quad (\text{A.2})$$

Множитель $\prod_{l,j,j<l} (r_l - r_j)^2$ обеспечивает связь между переменными r_j , по которым производится интегрирование. Будем использовать путь интегрирования для каждого r_j , проходящий через известную стационарную точку для единичной пары (линия 1, Рис. (2.2)). Эта точка соответствует энергии связи единичной пары в задаче Купера.

Благодаря симметрии между всеми переменными r_j в (A.2) можно заменить сумму $\sum_{j=1}^N r_j$ на Nr_1 . Тогда E может быть представлена как

$$E = 2N\varepsilon_{F_0} - N \frac{F_1}{F_0}, \quad (\text{A.3})$$

где

$$\begin{aligned}
F_n &\equiv \int dr r_1^n \frac{\prod_{l,j,j<l} (r_l - r_j)^2}{\prod_{j=1}^N \prod_{m_j=0}^{N_\Omega} (r_j + \frac{2m_j}{\rho})} \exp\left(\frac{\sum_{j=1}^N r_j}{V}\right) \\
&= \int dr r_1^n \left[\prod_{j=1}^N \exp\left(\frac{r_j}{V} - \sum_{m_j=0}^{N_\Omega} \ln\left(r_j + \frac{2m_j}{\rho}\right)\right) \right] \prod_{l,j,j<l} (r_l - r_j)^2. \quad (\text{A.4})
\end{aligned}$$

Положение седловой точки задается решением уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial r} f(r) \equiv \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r}{V} - \sum_{m=0}^{N_\Omega} \ln\left(r + \frac{2m}{\rho}\right) \right] = \frac{1}{V} - \sum_{m=0}^{N_\Omega} \frac{1}{r + \frac{2m}{\rho}} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Далее, мы заменяем сумму на интеграл, что допустимо в термодинамическом пределе, и находим решение уравнения (A.5), $r = \epsilon_c$, которое задает энергию связи единичной пары

$$\epsilon_c \simeq 2\Omega \frac{\sigma}{1 - \sigma}, \quad (\text{A.6})$$

и которое фактически ранее было найдено с помощью подхода, основанного на биномиальных суммах. Введем новую переменную t , определяемую как $it = r - \epsilon_c$. Теперь разложим $f(r)$ в ряд Тейлора вокруг $r = \epsilon_c$ и перепишем $f(r)$ как

$$f(\epsilon_c + it) = f(\epsilon_c) + \varphi(t), \quad (\text{A.7})$$

где $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{f^{(m)}(\epsilon_c)}{m!} (it)^m. \quad (\text{A.8})$$

Производные $f^{(m)}(\epsilon_c)$ могут быть легко найдены из (A.5) и (A.6)

$$f^{(m)}(\epsilon_c) \simeq (-1)^m (m-2)! \frac{\rho}{2} \left(\frac{1-\sigma}{2\Omega\sigma} \right)^{m-1} (1 - \sigma^{m-1}). \quad (\text{A.9})$$

Заметим, что при выводе (A.9) мы снова заменили суммы на интегралы.

Из (A.9) видно, что $f^{(2)}(\epsilon_c)$ положительно, поскольку $\sigma < 1$. Таким образом, направление наискорейшего спуска $\exp(f(r))$ перпендикулярно вещественной оси на плоскости комплексных значений r (линия 1 на Рис. 2.2).

Поэтому положим, что t меняется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее вводим нормированную переменную x вместо t

$$x = t \sqrt{f^{(2)}(\epsilon_c)}. \quad (\text{A.10})$$

В новых обозначениях f имеет вид

$$f\left(\epsilon_c + ix / \sqrt{f^{(2)}(\epsilon_c)}\right) = f(\epsilon_c) + \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m x^m, \quad (\text{A.11})$$

где

$$\alpha_m = \frac{(-i)^m}{m(m-1)} \frac{1 - \sigma^{m-1}}{1 - \sigma} \delta^{m-2}, \quad (\text{A.12})$$

где δ - малая безразмерная величина, обратно пропорциональная корню из объема системы

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\rho\Omega\sigma}}. \quad (\text{A.13})$$

Заметим, что $\alpha_2 = -1/2$.

Существование малой безразмерной константы δ играет ключевую роль в дальнейшем выводе, поскольку энергия основного состояния будет рассчитываться в виде асимптотического разложения по степеням δ . При этом однако окажется, что δ увязывается с N , так что выражение для плотности энергии в термодинамическом пределе будет по степеням плотности пар, которая пропорциональна $N\delta^2 \sim N/\rho$ и более не является малой. Это обстоятельство связано с тем, что вычисляется многомерный интеграл, но через седловую точку, соответствующую одной переменной в пренебрежении связью между ними.

Далее перепишем (A.3) в виде

$$E = 2N\epsilon_{F_0} - N\epsilon_c - iN\delta \frac{2\Omega\sigma}{1 - \sigma} \frac{\Phi_1}{\Phi_0}, \quad (\text{A.14})$$

где

$$\Phi_n = \int dx x_1^n \left[\prod_{j=1}^N \exp\left(\sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m x_j^m\right) \right] \prod_{l,j < l} (x_l - x_j)^2, \quad (\text{A.15})$$

где интегрирование по каждой переменной x_j производится от $-\infty$ до $+\infty$.

Рассмотрим Φ_1 . Интеграл по x_1 можно взять по частям:

$$\Phi_1 = \int dx \left[\prod_{j,l,j<l} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m} \right]'_{x_1} e^{\alpha_2 x_1^2} \prod_{j \neq 1} e^{\sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m x_j^m}. \quad (\text{A.16})$$

Производная в подынтегральном выражении имеет вид

$$2 \sum_{j_1 \neq 1} (x_1 - x_{j_1}) \prod_{\substack{l,j,j<l, \\ (j,l) \neq (1,j_1)}} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m} + \delta \sum_{m=2}^{\infty} \alpha_m \delta^{m-2} x_1^m \left[\prod_{l,j,j<l} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m} \right], \quad (\text{A.17})$$

где

$$a_m = \alpha_{m+1} (m+1) \delta^{-(m-1)} = \frac{(-i)^{m+1} (1 - \sigma^m)}{m (1 - \sigma)}. \quad (\text{A.18})$$

Первое слагаемое в (A.17) становится равным в точности нулю после подстановки в (A.16) и интегрировании по всем x_j из-за симметрии, что можно легко проверить, производя взаимную перестановку $x_1 \longleftrightarrow x_{j_1}$. Второе слагаемое после интегрирования дает разложение Φ_1 через Φ_2 , Φ_3 и т.д. с коэффициентами, содержащими все более и более высокие степени δ

$$\Phi_1 = \delta \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta^{m-2} \Phi_m. \quad (\text{A.19})$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в разложении (A.19), которое линейно по δ . Φ_2 может быть преобразовано тем же способом, что и Φ_1 . А именно, производится интегрирование по переменной x_1 по частям. Получается выражение, идентичное с (A.16), в котором однако выражение в квадратных скобках домножается на x_1 . Производная этого выражения может быть записана как

$$\prod_{l,j,j<l} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m} + 2x_1 \sum_{j_1 \neq 1} (x_1 - x_{j_1}) \prod_{\substack{l,j,j<l, \\ (j,l) \neq (1,j_1)}} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m}$$

$$+\delta \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta^{m-2} x_1^{m+1} \prod_{l,j,j<l} (x_l - x_j)^2 e^{\sum_{m=3}^{\infty} \alpha_m x_1^m}. \quad (\text{A.20})$$

После интегрирования первое слагаемое дает Φ_0 . Второе слагаемое представляет собой сумму $N - 1$ членов. Производя перестановку $x_1 \longleftrightarrow x_{j_1}$, убеждаемся, что каждый член дает в точности Φ_0 после интегрирования. Третье слагаемое порождает линейную комбинацию Φ_m с m , начинающегося с 3. В результате, для Φ_2 имеем

$$\Phi_2 = N\Phi_0 + \delta \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta^{m-2} \Phi_{m+1}. \quad (\text{A.21})$$

Теперь подставим (A.21) в выражение (A.19), после чего получим

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \delta N \Phi_0 a_2 + \delta^2 \sum_{m=2}^{\infty} a_{m+1}^{(1)} \delta^{m-2} \Phi_{m+1} \\ &= \delta N \Phi_0 a_2 + O(\delta^2), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

где $a_{m+1}^{(1)}$ - новый коэффициент разложения:

$$a_{m+1}^{(1)} = a_{m+1} + a_2 a_m. \quad (\text{A.23})$$

Выражение (A.22) дает Φ_1/Φ_0 в низшем порядке по δ . Подставим его в выражение для энергии, задаваемое (A.14). Вместе с (A.18) для $m = 2$ и определением δ это приводит к соотношению

$$E = E_N + \frac{N}{\rho} \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma} + O(\rho^{-3/2}), \quad (\text{A.24})$$

где E_N дается (3.25). Второе слагаемое в (A.24) является интенсивным, а не экстенсивным, поэтому его можно опустить. Конечно, следует помнить, что третье слагаемое $O(\rho^{-3/2})$ вовсе не обязано быть интенсивным из-за связи между δ и N .

Таким образом, мы вычислили поправку к энергии N невзаимодействующих пар в низшем порядке по δ , дающем ненулевой вклад, то есть пропорциональную δ^2 . Эта поправка оказывается пропорциональной $N(N\delta^2)$

(из-за зацепления δ и N), то есть экстенсивной. Более того, эта первая поправка уже дает полную энергию системы, что видно из сравнения с результатами метода, основанного на биномиальных суммах. Таким образом, задача на данный момент сводится к тому, чтоб показать, что третье слагаемое в (A.24) дает лишь интенсивный вклад, которым можно пренебречь, то есть что вириальное разложение энергии в термодинамическом пределе обрывается. Эта задача кратко рассмотрена ниже, где с помощью довольно тяжелых вычислений показано, что два следующих слагаемых действительно интенсивны. Подчеркнем, что с помощью данного метода мы не можем доказать подобного утверждения для всех остальных слагаемых, тогда метод, основанный на биномиальных суммах, позволяет это сделать.

Итак, рассмотрим Φ_3 . Преобразуем выражение для Φ_3 , используя интегрирование по частям, как уже было сделано для Φ_1 и Φ_2

$$\Phi_3 = 2N\Phi_1 + \delta \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta^{m-2} \Phi_{m+2}. \quad (\text{A.25})$$

Далее, подставим (A.25) в (A.22) и получим таким образом следующее выражение для Φ_1/Φ_0

$$\frac{\Phi_1}{\Phi_0} = \delta N a_2 \frac{1}{1 - 2\delta^2 N a_3^{(1)}} \left(1 + \frac{\delta^2}{N a_2} \sum_{m=3}^{\infty} a_{m+1}^{(2)} \delta^{m-3} \frac{\Phi_{m+1}}{\Phi_0} \right), \quad (\text{A.26})$$

где

$$a_{m+1}^{(2)} = a_{m+1}^{(1)} + a_3^{(1)} a_{m-1}. \quad (\text{A.27})$$

Теперь рассмотрим первое слагаемое в сумме в (A.26). Снова интегрируя по частям, получаем

$$\Phi_4 \simeq 2N\Phi_2 + N\Phi_{1,1} + \delta \sum_{m=4}^{\infty} a_{m-2} \delta^{m-4} \Phi_{m+1}, \quad (\text{A.28})$$

тогда как $\Phi_{m,n}$ дается (A.15) с x_1^n , измененным на $x_1^m x_2^n$. $\Phi_{1,1}$ сводится к

$$\Phi_{1,1} = -\Phi_0 + \delta \sum_{m=1}^{\infty} a_{m+1} \delta^{m-1} \Phi_{1,m+1}. \quad (\text{A.29})$$

Теперь подставим (A.29) для $\Phi_{1,1}$ и (A.21) для Φ_2 в (A.28) для Φ_4 , а полученное выражение для Φ_4 - в (A.26) для Φ_1 . Полученное выражение для Φ_1 может быть представлено в виде суммы двух вкладов

$$\Phi_1 = G_1 + G_2, \quad (\text{A.30})$$

где

$$G_1 = \delta N \frac{\Phi_0 a_2}{1 - 2a_3^{(1)} \delta^2 N} \left(1 + \frac{2a_4^{(2)}}{a_2} \delta^2 N \right), \quad (\text{A.31})$$

$$G_2 = \frac{\delta^4}{1 - 2a_3^{(1)} \delta^2 N} \left(\sum_{m=4}^{\infty} a_{m+1}^{(3)} \delta^{m-4} \Phi_{m+1} + a_4^{(2)} N \sum_{m=2}^{\infty} a_m \delta^{m-2} (2\Phi_{m+1} + \Phi_{1,m}) \right), \quad (\text{A.32})$$

где

$$a_{m+1}^{(3)} = a_{m+1}^{(2)} + a_4^{(2)} a_{m-2}. \quad (\text{A.33})$$

Можно убедиться, что

$$a_4^{(2)} + a_3^{(1)} a_2 = 0 \quad (\text{A.34})$$

для *любого* σ . Поэтому из-за точного сокращения числителя и знаменателя (A.31) для G_1 сводится к

$$G_1 = (\delta N) \Phi_0 a_2. \quad (\text{A.35})$$

Это означает, что слагаемые, пропорциональные $N\delta(N\delta^2) = N^2\delta^3$, которые присутствуют в G_1 и отсутствуют в G_2 , также отсутствуют в разложении Φ_1/Φ_0 по степеням δ . Как ясно видно из (A.14), именно эти слагаемые дают вклад порядка $N(N/\rho)^2 \sim N(N\delta^2)^2$ в энергию или, что эквивалентно, - слагаемые, пропорциональные квадрату плотности пар ($\sim (N/\rho)^2$) - в плотность энергии.

Сделаем здесь небольшой комментарий. В целом, используемая процедура может быть описана следующим образом. На каждом шаге Φ_m выражается через линейную комбинацию всех возможных слагаемых вида $\Phi_{m_1, m_2, \dots}$ с суммой неотрицательных целых m , равной $m - 2$ и соответствующими множителями, не зависящими от δ , и разложение, содержащее $\delta^n \Phi_{m+n}$,

где n начинается с 1. Далее, через интегрирование по частям, все эти новые члены $\Phi_{m_1, m_2, \dots}$ представляются через аналогичные величины, но с суммой m , меньшей на 2. В конце концов, в зависимости от четности m , мы “опускаемся” до Φ_0 или Φ_1 . Эта рекурсивная, древоподобная процедура становится все более и более сложной по мере роста m . Именно поэтому удалось вычислить лишь несколько первых слагаемых в вириальном разложении.

Кратко опишем, как следует действовать для вычисления следующего слагаемого в энергии, которое пропорционально $N(N/\rho)^3$. Рассматривается Φ_5 . Затем Φ_5 выражается через Φ_3 (см. (A.25)), $\Phi_{1,2}$ и Φ_n при n , начинающихся с 6. $\Phi_{1,2}$ выражается через Φ_1 и $\Phi_{2,n}$, n начинается с 2. Потом подобные действия производятся с Φ_6 . В итоге, все полученные выражения подставляются в (A.30)-(A.32) для Φ_1 , что приводит к появлению более сложной дроби для энергии основного состояния, чем дробь (A.26), которая фигурировала на предыдущем шаге. Новая дробь включает более высокие степени δ .

Раскладывая эту дробь по степеням δ , окончательно убеждаемся, что слагаемые в Φ_1/Φ_0 , пропорциональные $N\delta(N\delta^2)^2 = N^3\delta^5$, равны нулю из-за следующего нетривиального сокращения

$$5a_6^{(4)} + 10a_5^{(3)}a_2 + a_4^{(2)}(4a_3 + 9a_2^2) = 0, \quad (\text{A.36})$$

где

$$a_{m+1}^{(4)} = a_{m+1}^{(3)} + a_5^{(3)}a_{m-3}. \quad (\text{A.37})$$

Опять-таки (A.36) выполняется при любом σ . Поэтому из (A.14) следует, что слагаемые, пропорциональные $N(N/\rho)^3 \sim N(N\delta^2)^3$, отсутствуют в выражении для квантовомеханической энергии.

Итак, предложенный здесь метод может использоваться для вычисления разложения энергии системы в виде разложения по степеням плотности пар, то есть вириального разложения. Вычисление каждого последующего слагаемого требует все больших и больших усилий. Метод аналогичен пред-

ложенному в параграфе 2.3 способу непосредственного решения уравнений Ричардсона через разложение вокруг энергии единичной пары, в котором не используется вероятностный подход. Данный метод может использоваться для других уравнений Бете, а также для вычисления интегралов сельберговского типа, возникающих в разных контекстах.

Отметим, что метод интегрирования через седловую точку для индивидуальной пары имеет явные минусы по сравнению с методом, основанным на работе с биномиальными суммами. Помимо большей технической сложности, вычисление энергии возбужденных состояний в его рамках представляется проблематичным. Кроме того, в методе используется замена сум на интегралы, как это делалось при выводе (А.6). Вообще говоря, суммы такого типа должны быть выражены через Γ -функции. Сохраняя лидирующий порядок в разложении этих Γ -функций по $1/\rho$, получаем приближение, использованное здесь. Пренебрежение всеми оставшимися слагаемыми ведет к погрешностям порядка $\delta^2 \sim 1/\rho$ во многих величинах. К счастью, это не приводит к появлению патологических экстенсивных слагаемых, но порождает искусственные интенсивные вклады (которые мы здесь повсюду отбрасывали). Возможно, что самый большой недостаток метода состоит в том, что эффект уменьшения энергии связи пары в конфигурации со многими парами по сравнению со случаем изолированной пары, имеет явно дискретное происхождение, тогда как в рамках предложенного метода он получается из континуального приближения, то есть не прямым образом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Kamerlingh Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden; No. 120b (1911).
2. F. London, H. London, Proceedings of the Royal Society A **149**, 71 (1935).
3. В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, ЖЭТФ **20**, 1064 (1950).
4. А. А. Абрикосов, *О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы*, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
5. H. Frohlich, Phys. Rev. **79**, 845 (1950).
6. L. N. Cooper, Phys. Rev. **104**, 1189 (1956).
7. J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
8. Л. П. Горьков, ЖЭТФ **36**, 1364 (1959).
9. Н. Н. Боголюбов, УФН **67**, 549 (1959).
10. N. N. Bogoliubov, Physica **26**, S1 (1960).
11. J. Bardeen, G. Rickayzen, Phys. Rev. **118**, 936 (1960).
12. D. Mattis, E. Lieb, J. Math. Phys. **2**, 602 (1961).
13. O. El Araby, D. Baeriswyl, arXiv:1304.0628 (2013).
14. C. A. R. de Melo, M. Randeria, J. R. Engelbrecht, Phys. Rev. Lett. **71**, 3202 (1993).
15. R. Combescot, X. Leyronas, M. Y. Kagan, Phys. Rev. A **73**, 023618 (2006).
16. I. Bloch, J. Dalibard, W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **80**, 885 (2008).
17. S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, S. Stringari, Rev. Mod. Phys. **80**, 1215 (2008).

18. Q. Chen, J. Stajic, S. Tan, K. Levin, *Physics Reports* **412**, 1 (2005).
19. В. Ф. Гантмахер, О. В. Долгополов, *УФН* **53**, 1 (2010).
20. J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, Perseus Books Group, Massachusetts (1999).
21. D. M. Eagles, *Phys. Rev.* **186**, 456 (1969).
22. A. J. Leggett, *J. de Physique. Colloques* **41**, C7 (1980); A. J. Leggett, *Proceedings of the XVIth Karpacz Winter School of Theoretical Physics, Karpacz, Poland*, pp. 13-27, Springer-Verlag (1980).
23. J. Dukelsky, S. Pittel, G. Sierra, *Rev. Mod. Phys.* **76**, 643 (2004).
24. С. А. Москаленко, *ФТТ* **4**, 276 (1962).
25. Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, *ФТТ* **6**, 2791 (1964).
26. Л. В. Келдыш, Ю. В. Козлов, *ЖЭТФ* **54**, 978 (1968).
27. А.В. Горбунов, В.Б. Тимофеев, *Письма в ЖЭТФ* **84**, 390 (2006).
28. M. Alloing, M. Beian, D. Fuster, Y. Gonzalez, L. Gonzalez, R. Combescot, M. Combescot, F. Dubin, arXiv:1304.4101 (2013).
29. A. A. High, J. R. Leonard, M. Remeika, L. V. Butov, M. Hanson, A. C. Gossard, *Nano Letters* **12**, 2605–2609 (2012).
30. J. Frenkel, *Phys. Rev.* **37**, 1276 (1931).
31. D. Abramavicius, B. Palmieri, D. V. Voronine, F. Sanda, S. Mukamel, *Chem Rev.* **109**, 2350 (2009).
32. В. М. Агранович, Б. С. Тошич, *ЖЭТФ* **53**, 149 (1967).

33. V. M. Agranovich, M. D. Galanin, *Electronic Excitation Energy Transfer in Condensed Matter* (North Holland, Amsterdam, 1982).
34. M. Hoffmann, K. Schmidt, T. Fritz, T. Hasche, V.M. Agranovich, K. Leo, *Chem. Phys.* **258**, 73 (2000).
35. А. Ю. Гаевский, И. Г. Каплан, М. А. Рувинский, *ТМФ* **48**, 129 (1981).
36. V. Chernyak, S. Mukamel, *J. Opt. Soc. Am. B* **13**, 1302 (1996).
37. S. Mukamel, *Principles of Nonlinear Optics and Spectroscopy*, Oxford University Press (1995).
38. V. Chernyak, S. Yokojima, T. Meier, S. Mukamel, *Phys. Rev. B* **58**, 4496 (1998).
39. V. M. Axt, S. Mukamel, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 145 (1998).
40. D. S. McLachlan, *Phys. Rev. Lett.* **23**, 1434 (1969).
41. D. S. McLachlan, *Solid St. Comm.* **8**, 1595 (1970).
42. D. S. McLachlan, *Solid St. Comm.* **8**, 1589 (1970).
43. O. Buisson, P. Gandit, R. Rammal, Y. Y. Wang, B. Pannetier, *Phys. Lett. A* **150**, 36 (1990).
44. V. V. Moshchalkov, L. Gielen, C. Strunk, R. Jonckheere, X. Qiu, C. Van Haesendonck, Y. Bruynseraede, *Nature* **373**, 319(1995).
45. M. Poza, E. Bascones, J. G. Rodrigo, N. Agranat, S. Vieira, F. Guinea, *Phys. Rev. B* **58**, 11173 (1998).
46. Y. Terai, T. Yakabe, T. Terashima, T. Takamasu, S. Uji, G. Kido, *Physica B* **298**, 536 (2001).

47. A. K. Geim, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, J. C. Maan, A. E. Filippov, F. M. Peeters, *Nature* **390**, 259 (1997).
48. A. K. Geim, S. V. Dubonos, J. G. S. Lok, M. Henin, J. C. Maan, *Nature* **396**, 144 (1998).
49. David J. Thompson, M. S. M. Minhaj, L. E. Wenger, J. T. Chen, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 529 (1995).
50. P. Kostic, B. Veal, A. P. Paulikas, U. Welp, V. R. Todt, C. Gu, U. Geiser, J. M. Williams, K. D. Carlson, R. A. Klemm, *Phys. Rev. B* **53**, 791 (1996).
51. A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K.S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Shchweigert, *Nature* **407**, 55 (2000).
52. T. Cren, D. Fokin, F. Debontridder, V. Dubost, D. Roditchev, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 127005 (2009).
53. T. Nishio, T. An, A. Nomura, K. Miyachi, T. Eguchi, H. Sakata, S. Lin, N. Hayashi, N. Nakai, M. Machida, Y. Hasegawa, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 167001 (2008).
54. T. Cren, L. Serrier-Garcia, F. Debontridder, D. Roditchev, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 097202 (2011).
55. G. Blatter, M. V. Feigel'man, V. B. Geshkenbein, A. I. Larkin, V. M. Vinokur, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1125 (1994).
56. E. H. Brandt, *Rep. Prog. Phys.* **58**, 1465 (1995).
57. A. T. Fiory, A. F. Hebard, S. Somekh, *Appl. Phys. Lett.* **32**, 73 (1978).
58. M. Baert, V. V. Metlushko, R. Jonckheere, V.V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3269 (1995).

59. C. Reichhardt, C. J. Olson, F. Nori, *Phys. Rev. B* **57**, 7937 (1998); M. J. Van Bael, L. Van Look, K. Temst, M. Lange, J. Bekaert, U. May, G. Guntherodt, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, *Physica C* **332**, 12 (2000).
60. V. V. Moshchalkov, M. Baert, V. V. Metlushko, E. Rossel, M.J. Van Bael, K. Temst, Y. Bruynseraede, R. Jonckheere, *Physica C* **332**, 12 (2000).
61. S. Tung, V. Schweikhard, E.A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 240402 (2006).
62. R. W. Richardson, *Phys. Lett.* **3**, 277 (1963).
63. R. W. Richardson, N. Sherman, *Nucl. Phys.* **52**, 221 (1964).
64. R. W. Richardson, *J. Math. Phys.* **18**, 1802 (1977).
65. J. von Delft, R. Poghossian, *Phys. Rev. B.* **66**, 134502 (2002).
66. M. Gaudin, *J. Phys. (Paris)* **37**, 1087 (1976).
67. S. Staudenmayer, W. Belzig, C. Bruder, *Phys. Rev. A* **77** (2008) 013612.
68. J. Tempere, V. N. Gladilin, I. F. Silvera, J. T. Devreese, *Phys. Rev. B* **72** (2005) 094506.
69. L. Amico, A. Osterloh, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 127003.
70. H.-Q. Zhou, J. Links, R. H. McKenzie, M. D. Gould, *Phys. Rev. B* **56** (2002) 060502(R).
71. G. Gorohovsky, E. Bettelheim, *Phys. Rev. B* **84**, 224503 (2011).
72. I. Snyman, H. B. Geyer, *Phys. Rev. B* **73**, 144516 (2006).
73. E. A. Yuzbashyan, A. A. Baytin, B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **71**, 094505 (2005).

74. N. Sandulescu, B. Errea, J. Dukelsky, Phys. Rev. C **80**, 044335 (2009).
75. А. Г. Ушверидзе, ФЭЧАЯ **20**, 1185 (1989).
76. L. Amico, A. Di Lorenzo, A. Mastellone, A. Osterloh, R. Raimondi, Ann. Phys. **299**, 228 (2002).
77. V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo, JHEP **024**, 0405 (2004).
78. L. D. Faddeev, “*How Algebraic Bethe Ansatz works for integrable model*”, arXiv:hep-th/9605187.
79. F. Marcellan, A. Martinez-Finkelshtein, P. Martinez-Gonzalez, Journal of Computation and Applied Mathematics **207**, 258 (2007).
80. R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
81. А. Д. Миронов, ТМФ **114**, 163 (1998).
82. A. Zabrodin, P. Wiegmann, J. Phys. A **39**, 8933 (2006).
83. P. Flajolet, R. Sedgewick, Theor. Comp. Sci. **144**, 101 (1995).
84. M. A. Bershtein, V. A. Fateev, A. V. Litvinov, Nucl. Phys. B **847**, 413 (2011).
85. F. Dyson, J. Math. Phys. **3**, 140 (1962).
86. Р. Л. Стратонович, ДАН **2**, 416 (1958).
87. J. Hubbard, Phys. Rev. Lett. **3**, 77 (1959).
88. S. Roman, *The Umbral Calculus*, Pure and Applied Mathematics **111**, Academic Press (1984).
89. M. Crouzeix, M. Combescot, Phys. Rev. Lett. **107**, 267001 (2011).

90. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, F. Dubin, *Physics Reports* **463**, 215 (2008).
91. K. Dietrich, H. J. Mang, J. H. Pradal, *Phys. Rev.* **135**, B22 (1964); F. Braun, J. von Delft, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4712 (1998).
92. M. Schechter, Y. Imry, Y. Levinson, J. von Delft, *Phys. Rev. B* **63**, 214518 (2001).
93. Н. А. Славнов, *УМН* **62**, 376 (2007).
94. I. L. Kurland, I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, *Phys. Rev. B* **62**, 14886 (2000).
95. I. L. Aleiner, P. W. Brouwer, L. I. Glazman, *Phys. Rep.* **358**, 309 (2002).
96. J. von Delft, D. C. Ralph, *Phys. Rep.* **345**, 61 (2001).
97. G. Sierra, J. Dukelsky, G. G. Dussel, J. von Delft, F. Braun, *Phys. Rev. B* **61**, R11890 (2000).
98. A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert, *Nature (London)* **407**, 55 (2000).
99. G. N. Gol'tsman, O. Okunev, G. Chulkova, A. Lipatov, A. Semenov, K. Smirnov, B. Voronov, A. Dzardanov, C. Williams, R. Sobolewski, *Appl. Phys. Lett.* **79**, 705 (2001).
100. H. Bartolf, A. Engel, A. Schilling, K. Il'in, M. Siegel, H.-W. Hubers, A. Semenov, *Phys. Rev. B* **81**, 024502 (2010).
101. L. N. Bulaevskii, Matthias J. Graf, V. G. Kogan, *Phys. Rev. B* **85**, 014505 (2012).
102. M. V. Milosevic, A. Kanda, S. Hatsumi, F. M. Peeters, Y. Ootuka, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 217003 (2009).

103. A. S. Mel'nikov, V. M. Vinokur, *Nature (London)* **415**, 60 (2002).
104. V. A. Schweigert, F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **57**, 13817 (1998).
105. G. F. Zharkov, V. G. Zharkov, A. Yu. Zvetkov, *Phys. Rev. B* **61**, 12293 (2000).
106. G. F. Zharkov, *Phys. Rev. B* **63**, 214502 (2001).
107. J. J. Palacios, *Phys. Rev. B* **58**, R5948 (1998).
108. S. V. Yampolskii, F. M. Peeters, *Phys. Rev. B* **62**, 9663 (2000); J. J. Palacios, F. M. Peeters, B. J. Baelus, *Phys. Rev. B* **64**, 134514 (2001).
109. B. J. Baelus, F. M. Peeters, V. A. Schweigert, *Phys. Rev. B* **63**, 144517 (2001).
110. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Phys. Rev. B* **68**, 172503 (2003).
111. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Appl. Phys. Lett.* **83**, 1593 (2003).
112. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Europhys. Lett.* **65**, 546 (2004).
113. D. S. Golubovic, W. V. Pogosov, M. Morelle, V. V. Moshchalkov, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 177904 (2004).
114. P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys* (Addison-Wesley, New York, 1994).
115. P. G. de Gennes, J. Matricon, *Rev. Mod. Phys.* **36**, 45 (1964).
116. Е. А. Андрюшин, В. Л. Гинзбург, А. П. Силин, *УФН* **163**, 105 (1993).

117. P. O. Зайцев, ЖЭТФ **21**, 1178 (1965).
118. V. A. Schweigert, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **57**, 13817 (1998).
119. J. J. Palacios, Phys. Rev. B **52**, R5948 (1998).
120. R. C. Jones, M. K. Keene, P. Nurwantoro, Physica C **298**, 140 (1998).
121. V. V. Moshchalkov *et al.*, *Handbook of Nanostructured Materials and Nanotechnology 3*, ed H. S. Nalwa (Academic Press, San Diego, 2000).
122. J. E. Mooij, T. P. Orlando, L. Levitov, L. Tian, C. H. van der Wal, S. Lloyd, Science **285**, 1036 (1999).
123. A. J. Leggett, Science **296**, 961 (2002).
124. J. Stenger, D. M. Stamper-Kurn, H. J. Miesner, A.P. Chikkatur, W. Ketterle, Nature, **396**, 345 (1999).
125. T. Ohmi, K. Machida, J. Phys. Soc. Jpn., **67**, 1822 (1998).
126. T.-L. Ho, Phys. Rev. Lett., **81**, 742 (1998).
127. H. Schmaljohann, M. Erhard, J. Kronjäger, M. Kottke, S. van Staa, L. Cacciapuoti, J. J. Arlt, K. Bongs, K. Sengstock, Phys. Rev. Lett. **92**, 040402 (2004).
128. M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, M. S. Chapman, Phys. Rev. Lett. **92**, 140403 (2004).
129. A. Görlitz, T. L. Gustavson, A. E. Leanhardt, R. Löw, A. P. Chikkatur, S. Gupta, S. Inouye, D. E. Pritchard, W. Ketterle, Phys. Rev. Lett. **90**, 090401 (2003).
130. C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, Tin-Lun Ho, Phys. Rev. A **61**, 033607 (2000).

131. C. P. Bean, D. J. Livingston, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 14 (1964).
132. Б.В. Петухов, В.Р. Чечеткин, *ЖЭТФ* **38**, 827 (1974).
133. V. N. Kopylov, A. E. Koshelev, I. F. Schegolev, T. G. Togonidze, *Physica C* **170**, 291 (1990).
134. L. Burlachkov, *Phys. Rev. B* **47**, 8056 (1993).
135. J. A. Lewis, V. M. Vinokur, J. Wagner, D. Hinks, *Phys. Rev. B* **52**, R3852 (1995).
136. L. Burlachkov, V. B. Geshkenbein, A. E. Koshelev, A. I. Larkin, V. M. Vinokur, *Phys. Rev. B* **50**, 16770 (1994).
137. M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, Dover Publications, New York (2004).
138. J. Pearl, *Appl. Phys. Lett.* **5**, 65 (1964).
139. A. Larkin, A. Varlamov, *Theory of Fluctuations in Superconductors*, Oxford University Press, Oxford (2004).
140. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, *УФН* **18**, 496 (1976).
141. V. V. Schmidt, *The physics of superconductors. Introduction to fundamentals, applications*, edited by P. Muller and A. V. Ustinov, Springer-Verlag, Berlin (1997).
142. Р. Г. Минц, А. Л. Рахманов, *Нестабильности в сверхпроводниках*, Наука, М. (1984).
143. C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*, Springer-Verlag, Berlin (2004).
144. A. I. Buzdin, J. P. Brison, *Phys. Lett. A* **196**, 267 (1994).

145. A. O. Caldeira, A.J. Leggett, *Annals of Physics* **149**, 374 (1983).
146. B. I. Ivlev, Yu. N. Ovchinnikov, R. S. Thompson, *Phys. Rev. B* **44**, 7023 (1991).
147. А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников, *Письма в ЖЭТФ* **37**, 3821 (1983).
148. H. Suhl, *Phys. Rev. Lett.* **14**, 226 (1965).
149. E. M. Chudnovsky, A. B. Kuklov, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 067004 (2003).
150. Н. Б. Копнин, *Письма в ЖЭТФ* **27**, 390 (1978); N. B. Kopnin, V. M. Vinokur, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 3952 (1998); N. B. Kopnin, *Rep. Prog. Phys.* **65**, 1633 (2002).
151. E. B. Sonin, V. B. Geshkenbein, A. van Otterlo, G. Blatter, *Phys. Rev. B* **57**, 575 (1998).
152. A. van Otterlo, M. Feigel'man, V. Geshkenbein, G. Blatter, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3736 (1995).
153. Л. И. Глазман, Н. Я. Фогель, *ФНТ* **10**, 51 (1984).
154. M. M. Özer, J. R. Thompson, H. H. Weitering, *Nature Physics* **2**, 173 (2006).
155. V. N. Kopylov, A. E. Koshelev, I. F. Schegolov, *Physica C* **170**, 291 (1990).
156. S.-Z. Lin, T. Nishio, L. N. Bulaevskii, M. J. Graf, Y. Hasegawa, *Phys. Rev. B* **85**, 134534 (2012).
157. L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bryndoncx, V. V. Moshchalkov, *Nature (London)* **408**, 833 (2000).

158. V. R. Misko, V. M. Fomin, J. T. Devreese, V. V. Moshchalkov, Phys. Rev. Lett. **90**, 147003 (2003).
159. A. V. Rozhkov, F. Nori, Phys. Rev. B **81**, 155401 (2010).
160. J. R. Abo-Shaer, C. Raman, J. M. Vogels, W. Ketterle, Science, **292**, 476 (2001).
161. K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, J. Dalibard, Phys. Rev. Lett, **84**, 806 (2000).
162. P. C. Haljan, I. Coddington, P. Engels, E. A. Cornell, Phys. Rev. Lett, **87**, 210403 (2001).
163. E. Hodby, G. Hechenblaikner, S. A. Hopkins, O. M. Marago, C. J. Foot, Phys. Rev. Lett, **88**, 010405 (2002).
164. T. Isoshima, K. Machida, Phys. Rev. A **60**, 3313 (1999).
165. D. L. Feder, A. A. Svidzinsky, A. L. Fetter, C. W. Clark, Phys. Rev. Lett. **86**, 564 (2001).
166. M. Kraemer, L. Pitaevskii, S. Stringari, F. Zambelli, Laser Physics **12**, 113 (2002).
167. S. Sinha, Y. Castin, Phys. Rev. Lett. **87**, 190402 (2001).
168. P. O. Fedichev, G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **60**, R1779 (1999).
169. A.E. Muryshev, P. O. Fedichev, cond-mat/0106462.
170. J. R. Anglin, Phys. Rev. A **65**, 063611 (2002).
171. J. R. Anglin, Phys. Rev. Lett. **87**, 240401 (2001).
172. F. Dalfovo, S. Stringari, Phys. Rev. A **63**, 016601 (2001).

173. M. Machida, N. Sasa, H. Matsumoto, *J. Low Temp. Phys.* **138**, 623 (2005).
174. K. Kasamatsu, M. Tsubota, M. Ueda, *Phys. Rev. A* **67**, 033610 (2003).
175. A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, P. P. Vysheslavitsev, *Phys. Rev. B* **65**, 140503(R) (2002).
176. A. S. Mel'nikov, A. V. Samokhvalov, *Письма в ЖЭТФ* **94**, 823 (2012).
177. D. S. Rokhsar, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2164 (1997); D. Butts, D. S. Rokhsar, *Nature (London)* **397**, 327 (1999).
178. G. M. Kavoulakis, B. Mottelson, C. J. Pethick, *Phys. Rev. A* **62**, 063605 (2000).
179. A. Aftalion, I. Danaila, *Phys. Rev. A* **68**, 023603 (2003).
180. A. Trombettoni, A. Smerzi, P. Sodano, *New J. Phys.* **7**, 57 (2005).
181. T. P. Simula, M. D Lee, D. A. W. Hutchinson, *Phil. Mag. Lett.* **85**, 395 (2005).
182. M. Holzmann, G. Baym, J. P. Blaizot, F. Laloe, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **104**, 1476 (2007).
183. Z. Hadzibabic, P. Kruger, M. Cheneau, B. Battelier, J. Dalibard, *Nature* **441**, 1118 (2006).
184. Y. Castin, Z. Hadzibabic, S. Stock, J. Dalibard, S. Stringari, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 040405 (2006).
185. V. M. Bedanov, G. V. Gadiyak, Y. E. Lozovik, *Phys. Lett. A* **109**, 289 (1985).
186. E. B. Sonin, *Phys. Rev. A* **71**, 011603(R) (2005); M. Cozzini, S. Stringari, C. Tozzo, *Phys. Rev. A* **73**, 023615 (2006); G. Baym, *Phys. Rev. Lett.*

- 91**, 110402 (2003); J. R. Anglin, M. Crescimanno, cond-mat/0210063; T. Mizushima, Y. Kawaguchi, K. Machida, T. Ohmi, T. Isoshima, M. M. Salomaa, Phys. Rev. Lett. **92**, 060407 (2004).
187. Yu. E. Lozovik, E. A. Rakoch, Phys. Rev. B **57**, 1214 (1998).
188. A. V. Filinov, M. Bonitz, Y. E. Lozovik, Phys. Rev. Lett. **86**, 3851 (2001).
189. V. M. Bedanov, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **49**, 2667 (1994).
190. V. A. Schweigert, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **51**, 7700 (1995).
191. C. Gies, B. P. van Zyl, S. A. Morgan, D. A. W. Hutchinson, Phys. Rev. A **69**, 023616 (2004).
192. J.-K. Kim, A. L. Fetter, Phys. Rev. A **70**, 043624 (2004).
193. D. Guery-Odelin, S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **83**, 4452 (1999).
194. O. M. Marago, S. A. Hopkins, J. Arlt, E. Hodby, G. Hechenblaikner, C. J. Foot, Phys. Rev. Lett. **84**, 2056 (2000).
195. B. Jackson, E. Zaremba, Phys. Rev. Lett. **87**, 100404 (2001).
196. C. Lobo, Y. Castin, Phys. Rev. A **72**, 043606 (2005).
197. M. H. Wheeler, K. M. Mertes, J. D. Erwin, D. S. Hall, Phys. Rev. Lett. **93**, 170402 (2004).
198. M. Saba, T. A. Pasquini, C. Sanner, Y. Shin, W. Ketterle, D. E. Pritchard, Science, **307**, 1945 (2005).
199. J. M. Higbie, L. E. Sadler, S. Inouye, A. P. Chikkatur, S. R. Leslie, K. L. Moore, V. Savalli, D. M. Stamper-Kurn, Phys. Rev. Lett. **95**, 050401 (2005).

200. T. Mizushima, K. Machida, T. Kita, Phys. Rev. Lett. **89**, 030401 (2002).
201. T. Isoshima, K. Machida, Phys. Rev. A **66**, 023602 (2002).
202. D. S. Petrov, M. Holzmann, G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **84**, 2551 (2000).
203. D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, J. T. M. Walraven, Phys. Rev. Lett. **87**, 050404 (2001).
204. D. S. Petrov, D. M. Gangardt, G. V. Shlyapnikov, J. Phys. IV France **1** (2005).
205. J. P. Martikainen and K. A. Suominen, J. of Phys. B At. Mol. and Opt. Phys. **34**, 4091 (2001).
206. P. M. Chaikin, T. C. Lubensky, *Principles of condensed matter physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1995).
207. M. S. Chang, Q. Qin, W. Zhang, L. You, M. S. Chapman, Nature Physics **1**, 111 (2005).
208. В. П. Минеев, К. В. Самохин, *Введение в теорию необычных сверхпроводников*, М., (1998).
209. А. И. Ларкин, ЖЭТФ **58**, 1466 (1970).
210. А. И. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov, J. Low Temp. Phys. **34**, 409 (1979).
211. L. Civale, A. D. Marwick, T. K. Worthington, M. A. Kirk, J. R. Thompson, L. Krusin-Elbaum, Y. Sun, J. R. Clem, F. Holtzberg, Phys. Rev. Lett. **67**, 648–651 (1991).
212. П. Де Жен, *Сверхпроводимость металлов и сплавов*, Мир, Москва (1968).

213. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, Сверхпроводимость второго рода, Мир, Москва (1970).
214. E. H. Brandt, Phys. Rev. Lett. **78**, 2208 (1997).
215. A. Yaouanc, P. Dalmas de Rotier, E. H. Brandt, Phys. Rev. B **55**, 11107 (1997).
216. G. Lasher, Phys. Rev. **140**, A523 (1963).
217. Isaac G. de Oliveira and A. M. Thompson, Phys. Rev. B **57**, 7477 (1998).
218. J. W. Reijnders, R. A. Duine, Phys. Rev. Lett. **93**, 060401 (2004).
219. J. W. Reijnders, R. A. Duine, Phys. Rev. A **71**, 063607 (2005).
220. H. Pu, L.O. Baksmaty, S. Yi, N.P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **94**, 190401 (2005).
221. J. Facio, A. Abate, J. Guimpel, P. S. Cornaglia, J. Phys.: Condens. Matter **25**, 245701 (2013).
222. K. Mangold, P. Leiderer, C. Bechinger, Phys. Rev. Lett. **90**, 158302 (2003).
223. D. Deb, H.H. von Grunberg, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 245104 (2008).
224. A.A. Zhukov, H. Kupfer, G.K. Perkins, A.D. Caplin, T. Wolf, K.I. Kugel, A.L. Rakhmanov, M.G. Mikheev, V.I. Voronkova, M. Klaser, H. Wuhl, Phys. Rev. B **59**, 11213 (1999).
225. K.I. Kugel, A.L. Rakhmanov, A.A. Zhukov, Physica C **334**, 203 (2000).
226. И. Ф. Волошин, А.В. Калинов, Л.М. Фишер, К.И. Кугель, А.Л. Рахманов, ЖЭТФ **84**, 1177 (1997).
227. G. Coupier, M. Saint Jean, C. Guthmann, Phys. Rev. B **75**, 224103 (2007).

228. E. H. Brandt, U. Essman, *Phys. Status Solidi (b)* **144**, 13 (1987).
229. A. L. Fetter, *Phys. Rev.* **147**, 153 (1966).
230. C. R. Hu, *Phys. Rev. B* **6**, 1756 (1972).
231. Е. А. Шаповал, *Письма в ЖЭТФ* **69**, 532 (1999).
232. D. Ihle, *Phys. Status Solidi (b)* **47**, 423 (1971).
233. J. R. Clem, *J. Low Temp. Phys.* **18**, 427 (1975).
234. Z. Hao, J. R. Clem, M. W. Elfresh, L. Civale, A. P. Malozemoff, F. Holtzberg, *Phys. Rev. B* **43**, 2844 (1991).
235. Z. Hao, J. R. Clem, *Phys. Rev. B* **43**, 7622 (1991).
236. Z. Hao, J. R. Clem, *Phys. Rev. Lett* **67**, 2371 (1991).
237. A. S. Krasilnikov, L. G. Mamsurova, N. G. Trusevich, *Supercond. Sci. Technol.* **8**, 1 (1995).
238. H. Koppe, J. Willebrand, *J. Low Temp. Phys.* **2**, 499 (1970).
239. A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshefskii, P. P. Vysheslavitsev, *Phys. Rev. B* **62** (2000).
240. J. H. Gohng, D. K. Finnemore, *Phys. Rev. B* **46**, 398 (1992).
241. W. Chen, J. Gohng, D. K. Finnemore et al., *Phys. Rev. B* **51**, 6035 (1995).
242. Q. Li, M. Suenaga, D. K. Finnemore et al., *Phys. Rev. B* **46**, 3195 (1992).
243. D. N. Zheng, A. M. Campbell, R. S. Lin, *Phys. Rev. B* **48**, 6519 (1993).
244. V. C. Kim, J. R. Thompson, J. G. Ossandon et al., *Phys. Rev. B* **51**, 11767 (1995).

245. M. S. Kim, M. K. Bae, W. C. Lee et al., Phys. Rev. B **51**, 3261 (1995).
246. Y. Zhuo, J. H. Choi, M. S. Kim et al., Phys. Rev. B **55**, 12719 (1997).
247. A. Nugroho, I.M. Sutjahja, A. Rusidy et al., Phys. Rev. B **60**, 15384 (1999).
248. В. В. Погосов, А. Л. Рахманов, К. И. Кугель, ЖЭТФ **118**, 676 (2000).
249. I. L. Landau, H. R. Ott, Phys. Rev. B **66**, 144506 (2002)
250. P. M. Marcus, research note (Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights), (1965).
251. R. Watts-Tobin, L. Kramer, W. Pesch, J. Low Temp. Phys. **17**, 71 (1974).
252. J. Rammer, W. Pesch, L. Kramer, Zeitschrift fur Physik B **68**, 49 (1987).
253. J. Rammer, J. Low Temp. Phys. **71**, 323 (1988).
254. A. E. Koshelev, Phys. Rev. B **50**, 506 (1994).
255. V. G. Kogan, J. R. Clem, Phys. Rev. B **24**, 2497 (1981).
256. M. M. Doria, J. E. Gubernatis, D. Rainer, Phys. Rev. B **39**, 9573 (1989).
257. A. Castellanos, R. Wordenweber, G. Ockenfuss, A. v.d. Hart, K. Keck, Appl. Phys. Lett. **71**, 962 (1997).
258. K. Harada, O. Kamimura, H. Kasai, T. Matsuda, A. Tonomura, V.V. Moshchalkov, Science **274**, 1167 (1997).
259. J.I. Martin, M. Velez, J. Nogues, I.K. Schuller, Phys. Rev. Lett. **79**, 1929 (1997).
260. D.J. Morgan, J.B. Ketterson, Phys. Rev. Lett. **80**, 3614 (1998).

261. M.J. Van Bael, K. Temst, V.V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, Phys. Rev. B **59**, 14674 (1999).
262. В. Н. Рудько, О. Н. Шевцова, С. В. Шияновский, ФНТ **22**, 1314 (1996).
263. W. V. Pogosov, V. R. Misko, H. J. Zhao, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **79**, 014504 (2009).
264. T. Emig, T. Nattermann, Eur. Phys. J. B **8**, 525 (1999).
265. W. V. Pogosov, H. J. Zhao, V. R. Misko, F. M. Peeters, Phys. Rev. B **81**, 024513 (2010).
266. C. Reichhardt, C.J. Olson, F. Nori, Phys. Rev. Lett. **78**, 2648 (1997); Phys. Rev. B **58**, 6534 (1998).
267. V. V. Konotop, L. Vazquez, *Nonlinear Random Waves*, World Scientific Publishing, Singapore (1994).
268. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, Phys. Rev. Lett. **104**, 206404 (2010).
269. M. Combescot, S.-Y. Shiau, Y.-C. Chang, Phys. Rev. Lett. **106**, 206403 (2011).
270. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, R. Combescot, Phys. Rev. Lett. **99**, 176403 (2007).
271. R. Combescot, M. Combescot, Phys. Rev. Lett. **109**, 026401 (2012).
272. M. Alloing, M. Beian, D. Fuster, Y. Gonzalez, L. Gonzalez, R. Combescot, M. Combescot, F. Dubin, *Evidence for a Bose-Einstein condensate of excitons*, arXiv:1304.4101.
273. M. Combescot, M. G. Moore, C. Piermarocchi, Phys. Rev. Lett. **106**, 206404 (2011).

274. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, Eur. Phys. J. **68**, 33 (2009).
275. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, K. Cho, H. Ajiki, Europhys. Lett. **72**, 618 (2005).
276. M. Combescot, O. Betbeder-Matibet, V. Voliotis, Europhys. Lett. **74**, 868 (2006).
277. В. М. Агранович, ЖЭТФ **37**, 430 (1959).
278. И. Г. Каплан, ТМФ **27**, 254 (1976).
279. F. Dyson, Phys. Rev. **102**, 1217 (1956).
280. В. К. Федянин, Л. В. Якушевич, ТМФ **37**, 371 (1978).