

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР

На правах рукописи

Рыжов Денис Андреевич

**Строение и свойства
связанных вихревых структур
в сверхпроводниках второго рода**

Специальность

01.04.07 – физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А.С. Мельников

Нижний Новгород – 2004

Содержание

Введение	4
1. Структура и свойства сингулярных и несингулярных вихрей в высокотемпературных сверхпроводниках	22
1.1. Симметрия сверхпроводящего состояния в высокотемпературных сверхпроводниках.	22
1.2. Теория Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания.	27
1.3. Структура сингулярного вихря в магнитном поле перпендикулярном плоскости ab . Обзор.	31
1.4. Структура сингулярного вихря в магнитном поле произвольной ориентации.	35
1.4.1. Угловая зависимость нижнего критического поля H_{c1} высокотемпературного сверхпроводника с анизотропным тензором масс ($s \ll \xi_s$).	43
1.4.2. Угловая зависимость нижнего критического поля H_{c1} квазидвумерного сверхпроводника ($s \gg \xi_s$).	43
1.4.3. Угловая зависимость вязкости сингулярного вихря в сверхпроводнике с анизотропным тензором масс ($s \ll \xi_s$).	47
1.5. Структура несингулярного вихря в высокотемпературных сверхпроводниках.	52
1.6. Структура нулей сверхпроводящей щели в корах сингулярного и несингулярного вихрей.	60
1.7. Выводы.	62
2. Вихревые состояния и намагниченность мезоскопических сверхпроводников квадратной формы	64
2.1. Постановка задачи.	64
2.2. Структура смешанного состояния и кривая намагниченности.	66
2.3. Структура и стабильность вихревого состояния с антивихрем.	72

2.4. Выводы.	77
3. Зарождение локализованной сверхпроводимости в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик.	78
3.1. Введение	78
3.2. Появление сверхпроводимости на доменной стенке: изолированный зародыш.	81
3.2.1. Доменная стенка в толстой магнитной пленке: ступенчатый профиль магнитного поля. Обзор.	81
3.2.2. Доменная стенка в тонкой ферромагнитной пленке	85
3.3. Зарождение сверхпроводимости в периодической доменной структуре	87
3.4. Выводы.	96
Заключение	97
Приложение: Используемая численная схема решения нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау.	101
Список публикаций автора по теме диссертации	103
Библиография	105

Введение

Актуальность работы

Существенно возросший в последнее время интерес к исследованию вихревого состояния обусловлен широкими потенциальными возможностями применения сверхпроводников в современной микроэлектронике и энергетике, а также интересом к самой физике процессов происходящих в смешанном состоянии сверхпроводников. Развитие нанотехнологии и открытие новых сверхпроводящих соединений (в частности, высокотемпературных сверхпроводников) стимулировали новые теоретические и экспериментальные исследования смешанного состояния. Изучение строения и свойств вихревых структур необходимо для получения ряда основных характеристик смешанного состояния сверхпроводников, таких как критические магнитные поля, кривые намагничивания, транспортные характеристики.

На протяжении нескольких десятилетий изучение вихревого состояния неизменно привлекает внимание исследователей. Впервые смешанное состояние с неполным эффектом Мейсснера–Оксенфельда (фаза Шубникова) в сверхпроводниках, находящихся во внешнем магнитном поле, было обнаружено группой Л. В. Шубникова в 1937 году [1]. В 1957 году А. А. Абрикосов, основываясь на теории Гинзбурга–Ландау [2], показал, что в массивных сверхпроводниках второго рода внешнее магнитное поле проникает в сверхпроводник в виде нитей магнитного потока (вихрей Абрикосова) [3]. Каждая нить окружена вихревым током и несет один квант магнитного потока $\Phi_0 = hc/2e \simeq 2.07 \cdot 10^{-7} \text{ Гс}\cdot\text{см}^2$. Вихрь представляет собой топологическую особенность сверхпроводящего параметра порядка, вокруг которой циркуляция градиента фазы φ параметра порядка Ψ отлична от нуля и кратна 2π . Важной топологической характеристикой вихря является завихренность N , определяемая циркуляцией градиента фазы φ вдоль контура \mathcal{L} охватывающего особенность:

$$\oint_{\mathcal{L}} \nabla \varphi d\mathbf{l} = 2\pi N. \quad (\text{B.1})$$

Фактически, именно существование ненулевой циркуляции фазы (завихренности) вокруг особой линии и является определением вихря.

Следствием существования такой особенности является обращение в ноль параметра порядка на оси вихря. Модуль параметра порядка в абрикосовском вихре в слабых полях аксиально симметричен. При удалении от центра вихря модуль параметра порядка растёт и выходит на свое равновесное значение $|\Psi|_\infty$ на расстоянии порядка длины когерентности ξ от центра вихря. Область размером порядка ξ , где параметр порядка подавлен, называется кором вихря. Магнитное поле, индуцированное вихрем в массивном сверхпроводнике, максимально в области нормального кора и экспоненциально спадает при удалении от него на расстоянии порядка λ — глубины проникновения магнитного поля в массивном сверхпроводнике. В массивном сверхпроводнике без дефектов энергетически выгодными являются одноквантовые вихри с $N = 1$, которые образуют гексагональную вихревую решетку.

Большое влияние на строение и различные свойства вихревых линий могут оказывать различные анизотропные факторы, присущие конкретной сверхпроводящей системе. В ряде случаев, под действием этих факторов в сверхпроводниках могут образовываться многоквантовые вихри (с $|N| > 1$) и связанные вихревые состояния. Связанные вихревые состояния — это совокупность вихрей, локализованных в малой области порядка размера самого вихря (то есть, несколько длин когерентности), которую можно рассматривать как структурную единицу смешанного состояния.

В частности, к образованию сложных вихревых комплексов может приводить микроскопическая природа сверхпроводимости, когда образуется сверхпроводящее состояние с энергетической щелью $\Delta(\mathbf{k})$ анизотропной в импульсном пространстве, что, по-видимому, реализуется в сверхпроводниках с тяжелыми фермионами (см., например, обзор [4]), рутенатах (см., например, обзор [5]) и высокотемпературных сверхпроводниках (см., например, обзоры [6, 7] и раздел 1.1).

Отличительным свойством экзотической сверхпроводимости является образование сверхпроводящего конденсата из электронных пар с ненулевым орбитальным моментом (см., например, [8, 9]). Обычное сверхпроводящее состояние об-

ладает полной точечной симметрией кристалла, то есть относится к единичному представлению A_{1g} (s -тип спаривания). Экзотическими сверхпроводящими состояниями называют состояния, неотносящиеся к четному единичному представлению A_{1g} , что аналогично спариванию с ненулевым орбитальным моментом для изотропной задачи куперовского спаривания. Часто классификацию экзотических сверхпроводящих состояний проводят в соответствии с классификацией состояний пары электронов по угловому моменту l в изотропной задаче Купера. При этом термин угловой момент куперовской пары может использоваться и для классификации состояний в кристаллах, подразумевая при этом формальное сходство симметричных свойств базисных функций конкретного неприводимого представления группы симметрии кристалла с симметричными свойствами конкретной сферической функции Y_{lm} .

В последние годы большое внимание как экспериментаторов, так и теоретиков привлекает исследование смешанного состояния в высокотемпературных сверхпроводниках. Такой интерес во многом вызван рядом экспериментальных данных, указывающих на смешанную $(d + s)$ -симметрию сверхпроводящего состояния в меднооксидных (купратных) соединениях $YBa_2Cu_3O_7$ и $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$, когда образуются два взаимодействующих сверхпроводящих конденсата с $l = 2$ (d -тип спаривания) и $l = 0$ (обычный s -тип спаривания). Подробно обзор экспериментов приведён в разделе 1.1.

Несмотря на то, что природа высокотемпературной сверхпроводимости до сих пор неясна, и не существует общепризнанной микроскопической теории высокотемпературных сверхпроводников (см. обзоры [10, 11]), множество важных свойств таких соединений могут быть описаны в рамках теории Гинзбурга–Ландау с параметром порядка, состоящим из двух комплексных компонент, соответствующих d - и s -типам спаривания. Очевидно, что присутствие двух взаимодействующих компонент параметра порядка должно существенно изменить структуру вихревых линий. Это, в свою очередь, приведёт к изменению термодинамических и транспортных характеристик сверхпроводника в смешанном состоянии по сравнению со сверхпроводником с обычным s -типом спаривания.

Как было показано в ряде работ (см., например, [12, 13, 14]), вихревая линия

в высокотемпературных сверхпроводниках с $(d + s)$ -типом спаривания состоит из набора элементарных вихрей различных компонент параметра порядка, сосредоточенных в области масштаба ξ . Необходимо отметить, что такое решение аналогично вихревым структурам, предсказанным для сверхпроводников с тяжелыми фермионами, в которых параметр порядка, имеющий две компоненты, соответствует двумерному неприводимому представлению кристаллической группы симметрии D_{6h} [15, 16].

В соответствие со стандартной терминологией, введенной для сверхтекучего ^3He и сверхпроводников с анизотропным типом спаривания [17, 18], можно определить два типа вихревых линий в системах с двумя компонентами параметра порядка:

- сингулярные вихри, у которых имеется хотя бы одна точка, где обе компоненты параметра порядка обращаются в ноль (элементарные вихри различных компонент совпадают);
- несингулярные вихри, у которых нет точки, в которой параметр порядка полностью обращается в нуль (элементарные вихри различных компонент разнесены в пространстве).

Структура сингулярных вихрей в магнитном поле направленном вдоль c -оси высокотемпературного сверхпроводника хорошо известна (подробно обзор работ приведён в разделе 1.3). Такой сингулярный вихрь обладает тетрагональной симметрией и состоит из вихря d -компоненты, четырех вихрей s -компоненты и одного s -антивихря. Необходимо отметить, что высокотемпературным сверхпроводникам присуща сильная пространственная анизотропия [19], безусловно влияющая на свойства смешанного состояния в произвольно ориентированном магнитном поле. Однако, до настоящего времени вопрос о структуре сингулярного вихря в магнитном поле произвольной ориентации рассматривался только численно [20]. Отметим, что получив аналитические выражения для структуры параметра порядка в сингулярном вихре в магнитном поле произвольной ориентации, можно определить угловые зависимости многих важных характеристик смешанного состояния, например, критических магнитных полей и тензора вязкости. Поэтому

актуальным как с физической точки зрения, так и в плане прикладного применения представляется дальнейшее аналитическое исследование структуры и свойств сингулярных вихрей в магнитном поле произвольной ориентации.

В то же время надо отметить, что вихревые решения в виде несингулярного вихря ранее для высокотемпературных сверхпроводников не рассматривались, хотя на существование такого класса решений в системах с анизотропным типом спаривания указывалось в работах [21, 22, 23] для сверхтекучего ^3He и в работах [15, 16] для сверхпроводников с тяжелыми фермионами. В частности, в работах [15, 16] было показано, что при определенных значениях коэффициентов теории Гинзбурга–Ландау сингулярный вихрь оказывается неустойчивым к появлению зародыша второй компоненты параметра порядка с нулевой циркуляцией фазы в коре вихря доминантной компоненты параметра порядка. Нестабильность такого рода, приводящая к появлению несингулярного вихря, есть следствие нелинейного взаимодействия компонент параметра порядка и не является спецификой сверхпроводников с тяжелыми фермионами, но также может существовать и в высокотемпературных сверхпроводниках. Такая задача ранее не рассматривалась в работах, посвященных исследованию вихревых структур в высокотемпературных сверхпроводниках, хотя возможность спонтанного появления второй компоненты параметра порядка возле поверхности сверхпроводника или вблизи границ гранул в таких соединениях исследовался в работе [24]. По видимому, отсутствие решения в виде несингулярного вихря в предыдущих работах объясняется конкретным выбором набора параметров теории Гинзбурга–Ландау, при которых всегда реализовываются только сингулярные вихри.

Очевидно, что образование несингулярных вихрей, не имеющих точек, где параметр порядка обращается в ноль, должно изменять свойства смешанного состояния. В частности, можно ожидать, что энергетическая щель $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в коре вихря будет подавлена слабее, чем в сингулярных вихрях, что должно привести к особенностям температурного поведения термодинамических и транспортных характеристик смешанного состояния. Этот же эффект может привести и к ослаблению пиннинга вихревых нитей в высокотемпературных сверхпроводниках. Таким образом, задача о фазовом переходе от сингулярного вихря к несингулярному и

анализ структуры несингулярного вихревого решения представляется важной и актуальной для исследования смешанного состояния высокотемпературных сверхпроводников.

Другим фактором влияющим на образование связанных вихревых состояний, могут быть экранирующие токи, текущие вдоль границ сверхпроводника. При этом необычные вихревые структуры могут образовываться и в сверхпроводниках с изотропной щелью (s -тип спаривания). Особенно сильным влияние экранирующих токов оказывается в мезоскопических сверхпроводниках (тонких пленках или образцах цилиндрической формы), размеры которых порядка несколько длин когерентности и не превышают глубины проникновения магнитного поля. За счет баланса конкурирующих сил, действующих на вихри со стороны экранирующего тока и сил отталкивания между отдельными вихрями, оказывается возможным существование связанных вихревых состояний (вихревых молекул с размером порядка длины когерентности) [25] и многоквантовых вихрей с $|N| > 1$ [25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34]. Вихревая молекула — это совокупность близко расположенных взаимодействующих одноквантовых вихрей обладающих общим кором, то есть модуль параметра порядка между вихрями существенно меньше модуля параметра порядка вокруг вихревой молекулы. Многоквантовые вихри и вихревые молекулы не могут быть реализованы в обычном чистом объёмном сверхпроводнике, находящемся в однородном магнитном поле, поскольку они обладают большей энергией по сравнению с решёткой одноквантовых вихрей Абрикосова. Существование таких экзотических вихревых структур приводит к нетривиальным зависимостям транспортных и термодинамических характеристик от внешних параметров (например, от температуры, внешнего магнитного поля, транспортного тока).

Экспериментальные и теоретические исследования мезоскопических сверхпроводников указывают на наличие целого ряда фазовых переходов во внешнем магнитном поле H . Как для цилиндрических образцов [35, 36], так и для тонких пленок [25, 30, 31, 37, 38, 39, 40] были отмечены осцилляции критической температуры, аналогичные осцилляциям Литтла–Паркса в полем цилиндре [41]. Появление осцилляций $T_c(H)$ связано со входом (или выходом) вихрей в мезоскопический об-

разец. При изменении внешнего магнитного поля структура вихревого состояния может меняться как за счет изменения числа вихрей в сверхпроводнике, так и за счет внутренней перестройки вихревых состояний (распадом или образованием многоквантовых вихрей и вихревых молекул). В связи с этим, большое внимание исследователей привлекает изучение кривой намагничивания $M(H)$ мезоскопических образцов. Так при входе вихрей в сверхпроводник происходят фазовые переходы первого рода, что приводит к появлению новых веток на кривой намагниченности [25, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 40, 43, 44, 45, 46, 47]. В то же время, на некоторых ветках кривой намагничивания мезоскопических дисков экспериментально были обнаружены особенности в поведении $M(H)$ (в частности, изломы) [32], которые связываются с внутренней перестройкой вихревого состояния (распадом или образованием многоквантовых вихрей и вихревых молекул). В то время как теоретические исследования вихревых состояний в мезоскопических сверхпроводниках смогли объяснить множество экспериментальных фактов наблюдаемых в сверхпроводящих образцах малых размеров, некоторые важные вопросы, среди которых, в частности, находятся вопросы о роли симметричных эффектов в формировании определенных вихревых конфигураций, процессах распада (диссоциации) вихревых молекул, остаются до сих пор открытыми.

Из-за сильного влияния на вихревую структуру экранирующих токов, текущих вдоль границы сверхпроводника, процессы перестройки вихревого состояния должны быть весьма чувствительны к размерам и форме конкретного образца. Такие процессы были исследованы в работах [46, 48] для сверхпроводящих дисков. Безусловный интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения вызывает исследование процессов изменения вихревой структуры в мезоскопических сверхпроводниках квадратной формы, и их влияние на кривую намагничивания таких образцов.

В то же время надо учитывать, что реальные сверхпроводящие образцы, как правило, пространственно неоднородны и содержат дефекты, например, вкрапления областей с пониженной критической температурой, области нормального металла. Присутствие подобных дефектов изменяет пространственное распределение токов и, таким образом, влияет на формирование смешанного состояния в

мезоскопических сверхпроводниках. Необходимо также учитывать важную роль дефектов в понижении симметрии сверхпроводника.

Необходимо отметить, что и в идеальных сверхпроводниках без дефектов с нарушенной аксиальной симметрией (в частности, сверхпроводниках квадратной формы) влияние граничных эффектов увеличивается по сравнению с аксиально симметричными образцами. В частности, в работе [38] было показано, что несовпадение тетрагональной симметрии сверхпроводника с симметрией решения трехквантового вихря (или симметрией трехвихревой молекулы) может привести к появлению в полях близких к критическому магнитному полю появления поверхностной сверхпроводимости H_{c3} сложной тетрагонально симметричной вихревой структуры, состоящей из четырех вихрей и центрально расположенного антивихря. Исследование такой необычной структуры представляет интерес в первую очередь из-за того, что образование изолированного антивихря в сильном магнитном поле энергетически невыгодно и очевидно, что основная роль в стабилизации такого сложного вихревого комплекса принадлежит симметричным свойствам граничных эффектов. Ввиду этого, представляет интерес исследовать стабильность такого вихревого комплекса относительно нарушений идеальной тетрагональной симметрии сверхпроводника, вносимых малыми дефектами.

Мезоскопические эффекты в сверхпроводниках могут наблюдаться и в образцах макроскопического размера, находящихся в мелкомасштабном неоднородном магнитном поле. В качестве источников таких неоднородных полей удобно использовать ферромагнетики. Это могут быть ансамбли магнитных частиц малых размеров или ферромагнитные пленки с доменной структурой, которые размещены на сверхпроводящей пленке. При этом могут образовываться необычные вихревые структуры, в частности, связанные вихревые состояния. Образование вихревых молекул и многоквантовых вихрей в сверхпроводящих пленках, находящихся в неоднородном магнитном поле ферромагнитных частиц изучалось в работах [49, 50, 51, 52].

Задача о сосуществовании сверхпроводящего и магнитного порядков привлекает внимание исследователей на протяжении последних десятилетий. Можно выделить два основных механизма взаимодействия сверхпроводящего параметра по-

рядка с магнитной подсистемой: электромагнитный механизм, когда куперовские пары взаимодействуют с магнитным полем индуцированным ферромагнетиком (впервые такое взаимодействие было рассмотрено В. Л. Гинзбургом в 1956 [53]); и обменное взаимодействие магнитных моментов с куперовскими парами [54, 55]. Если ферромагнетик и сверхпроводник разделены тонкой диэлектрической прослойкой, то эффект близости подавлен и единственным фактором, определяющим взаимодействие подсистем, является магнитное поле, создаваемое неоднородным распределением намагниченности в ферромагнетике.

Исследование сверхпроводящих свойств систем сверхпроводник—ферромагнетик (SF систем) также привлекает большое внимание в связи с большим потенциалом их применения в современной электронике. В частности, такие структуры рассматриваются как кандидаты на создание систем с контролируемым пиннингом вихрей. Увеличение тока депиннинга наблюдалось экспериментально в сверхпроводящих пленках с ансамблем магнитных наночастиц [56, 57, 58, 59, 60], перфорированной магнитной пленкой (antidots) [61] и в двухслойных SF системах с доменной структурой ферромагнитной пленки [62]. Вихревые структуры и специфика пиннинга вихрей в SF структурах в слабых полях были рассмотрены в лондонском приближении в работах [63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75].

Двухслойная SF система, состоящая из сверхпроводящей пленки с нанесенной на нее пленкой ферромагнетика, является весьма перспективным объектом для изучения мезоскопических эффектов в сверхпроводимости как с прикладной, так и с фундаментальной точки зрения. С одной стороны, нанести ферромагнитную пленку на сверхпроводник значительно легче, чем расположить на нем ансамбль ферромагнитных наночастиц. С другой стороны, доменная структура ферромагнитной пленки имеет масштабы, сопоставимые с длиной когерентности сверхпроводника (например, $\xi(T = 0) \approx 1500$ нм для Al [76], характерный размер домена может достигать 300 нм для магнетика Co/Pt [77]). Примером таких систем является гибридная плёночная SF структура, представляющая собой тонкую сверхпроводящую пленку с расположенной на ней пленкой ферромагнитного диэлектрика. Также часто используется металлический ферромагнетик отделенный от сверхпроводника тонкой изолирующей прослойкой.

Экспериментальные данные по изучению кривой фазового перехода таких систем в сверхпроводящее состояние в однородном внешнем магнитном поле свидетельствуют о немонотонной температурной зависимости критического магнитного поля перехода в сверхпроводящее состояние в SF структурах с двумерными доменами в ферромагнитной пленке [77] и для SF структуры с квадратной решеткой магнитных частиц [78]. Поскольку магнитное поле подавляет сверхпроводимость, следует ожидать, что сверхпроводимость будет стремиться сосредоточиться в области локальных минимумов модуля неоднородного магнитного поля. Такая ситуация может реализовываться как под доменом, где поле рассеяния ферромагнетика частично или полностью может быть скомпенсировано внешним магнитным полем, так и на доменной стенке, где магнитное поле меняет направление на противоположное. Первый сценарий может в простейшем случае описываться в рамках теории Гинзбурга–Ландау сдвигом отсчета магнитного поля. При рассмотрении же появления локализованной сверхпроводимости на доменной стенке существенным становится неоднородное распределение магнитного поля вблизи границ доменов. Ранее подобный сценарий появления локализованной сверхпроводимости рассматривался для доменных стенок в ферромагнитных сверхпроводниках, когда оказывается возможным сосуществование магнитного и сверхпроводящего упорядочения. Впервые такая возможность обсуждалась в работе [79]. В работе [80] в полуклассическом приближении исследовались условия появления локализованной сверхпроводимости на доменных стенках различного типа. При этом предполагалось, что магнитная подсистема влияет на сверхпроводящую только благодаря электромагнитному взаимодействию, в то время как обменный механизм не учитывался. Похожая ситуация была рассмотрена в работе [81] для блоховской доменной стенки в предположении, что толщина доменной стенки существенно больше длины когерентности $\xi(T)$. В работе [82] обсуждалось формирование локализованной сверхпроводимости на доменной стенке с учетом обменного взаимодействия. В недавней работе [83] в рамках линеаризованной теории Гинзбурга–Ландау была решена задача о появлении локализованного зародыша вблизи доменной стенки в ферромагнитных сверхпроводниках.

Одной из задач представляемой диссертационной работы является решение

вопроса о возникновении сверхпроводимости в SF системах с доменными структурами различной геометрии в ферромагнитной пленке. Отметим, что решение этой задачи важно не только для объяснения экспериментальных кривых фазового перехода в сверхпроводящее состояние, но и для дальнейшего изучения структуры смешанного состояния в сильных полях в таких SF системах. Также эта задача представляет определенный интерес в связи с возможным управлением локализованными сверхпроводящими каналами магнитным полем.

Цели и задачи работы

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование структуры и свойств связанных вихревых состояний, возникающих в сверхпроводниках с различным типом анизотропии, в частности, в сверхпроводниках с анизотропным $(d + s)$ -типом спаривания, а также в мезоскопических сверхпроводниках квадратной формы с обычным s -типом спаривания и в гибридных планарных системах ферромагнетик–сверхпроводник.

Задачи.

- Исследование структуры сингулярных и несингулярных вихрей в сверхпроводниках с анизотропным $(d + s)$ -типом спаривания.
- Аналитический расчет угловых зависимостей нижнего критического поля и тензора вязкости сингулярного вихря.
- Полуклассический анализ взаимного расположения нулей функции щели в корях сингулярных и несингулярных вихрей.
- Исследование структуры связанных вихревых состояний в мезоскопическом образце квадратной формы.
- Анализ особенностей на кривой намагничивания, связанных с переходами между различными вихревыми состояниями в мезоскопических сверхпроводниках квадратной формы.

- Исследование устойчивости связанной вихревой конфигурации, образованной вихрями и антивихрём по отношению к нарушениям симметрии, вызванными наличием малых дефектов.
- Исследование условия зарождения сверхпроводимости вблизи доменных стенок в двухслойной структуре сверхпроводник — ферромагнетик во внешнем магнитном поле. Расчет температурной зависимости верхнего критического поля для таких систем.
- Анализ пространственной структуры зародышей параметра порядка в гибридных структурах сверхпроводник — ферромагнетик.

Методы исследования

При решении поставленных задач использовалась феноменологическая теория Гинзбурга–Ландау, методы теории групп, методы теории возмущений, а также численные методы решения нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау и уравнений Шредингера.

Достоверность результатов

Достоверность результатов обеспечена оптимальным выбором физических моделей, учитывающих основные свойства исследуемых систем, и адекватным выбором методов численного моделирования.

Научная новизна

- Впервые проанализирована структура сингулярного вихря при произвольной ориентации слабого магнитного поля относительно кристаллографических осей сверхпроводника для различной степени анизотропии и рассчитаны угловые зависимости нижнего критического магнитного поля и тензора вязкости вихревой нити в сверхпроводниках с анизотропным $(d + s)$ -типом спаривания.

- Предсказано существование несингулярного вихря в сверхпроводнике с $(d + s)$ -типом спаривания и исследована его структура.
- Впервые проанализировано положение нулей функции щели $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в корях сингулярных и несингулярных вихрей и показано, что при фазовом переходе от сингулярного к несингулярному вихрю происходит выталкивание нулей щели из центра вихря.
- Впервые показано, что устойчивость связанной вихревой конфигурации, образованной вихрями и антивихрями в мезоскопическом сверхпроводнике, существенным образом зависит от нарушений симметрии, вызванными наличием малых дефектов.
- Впервые получены температурные зависимости верхнего критического поля в двухслойных структурах сверхпроводник — ферромагнетик различной геометрии и исследована пространственная структура зародышей параметра порядка в таких системах.

Положения, выносимые на защиту

- 1) Показано, что при угле отклонения магнитного поля от главной кристаллографической оси тетрагонального сверхпроводника с $(d + s)$ -типом спаривания на угол превышающий критический θ_{max} происходит качественное изменение внутренней структуры вихревой нити: вместо связанного состояния d -вихря, четырех s -вихрей и одного s -антивихря энергетически выгодным становится структура из d -вихря и трёх s -вихрей. Получено, что угловые зависимости нижнего критического поля H_{c1} и тензора вязкости сингулярного вихря в плоскости ab обладают тетрагональной симметрией.
- 2) Предсказано существование несингулярных вихрей в сверхпроводниках с $(d + s)$ -типом спаривания. Найдена область параметров теории Гинзбурга-Ландау, при которых реализуются несингулярные вихревые состояния. Показано, что несингулярные вихри обладают пониженной симметрией по срав-

нению с сингулярными вихрями. В рамках полуклассического подхода показано, что при переходе от сингулярного вихря к несингулярному нули сверхпроводящей щели вытесняются из кора вихря.

- 3) На основе численного моделирования нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау проведено систематическое исследование влияния внутренней перестройки вихревых решений на кривую намагниченности $M(H)$ мезоскопического сверхпроводника квадратной формы с дефектами. Показано, что распад двухквантового вихря и диссоциация трёхквантовой вихревой молекулы приводят к появлению скачка на зависимости dM/dH .
- 4) Найден размер вихревой конфигурации, состоящей из четырех вихрей и одного антивихря, существующей в чистом мезоскопическом сверхпроводнике квадратной формы в сильных полях. Исследована устойчивость такого связанного вихревого состояния и показано, что оно сильно чувствительно к наличию слабых дефектов, вызывающих нарушение тетрагональной симметрии.
- 5) Найдена температурная зависимость верхнего критического поля появления сверхпроводимости в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик.

Научная и практическая ценность

Результаты исследования связанных вихревых состояний (сингулярных и несингулярных вихрей) в высокотемпературных сверхпроводниках могут быть применены для анализа термодинамических и транспортных характеристик смешанного состояния в таких соединениях. Сравнение теоретических предсказаний с результатами эксперимента позволит определить феноменологические константы двухкомпонентной теории Гинзбурга–Ландау, используемой для описания свойств высокотемпературных материалов.

Проведенные исследования влияния геометрии мезоскопических образцов и роли малых дефектов, нарушающих идеальную тетрагональную симметрию образца, на структуру связанных вихревых состояний представляют интерес для

интерпретации фазовой диаграммы реальных мезоскопических систем и в связи с их возможным применением в микроэлектронике.

Результаты анализа фазовой диаграммы двухслойной структуры сверхпроводник–ферромагнетик и структуры параметра порядка в таких системах важны для дальнейшего теоретического и экспериментального исследования термодинамических и транспортных характеристик подобных систем, а также возможного применения их в микроэлектронике.

Апробация работы и научные публикации

Работа выполнена в Институте физики микроструктур РАН (Нижний Новгород). Основные положения и результаты диссертационной работы неоднократно обсуждались на семинарах ИФМ РАН, Нижегородского Государственного Университета, Bordeaux University I (Бордо, Франция), Argonne National Laboratory (Аргон, США) и Helsinki University of Technology (Хельсинки, Финляндия), а также были представлены на Всероссийских совещаниях по физике низких температур (ФНТ-32 (2000 г.) — Казань, ФНТ-33 (2003 г.) — Екатеринбург); на международных совещаниях "Advances in High-Temperature Superconductivity", (2001 г. — Рамат-Ган, Израиль), "Quantum Transport in Mesoscopic Systems" (2002 г. — С.-Петербург), "Theory of Quantum Transport in Metallic and Hybrid Nanostructures" (2003 г. — С.-Петербург) и "Vortex Dynamics and Vortex Matter" (2003 г. — Олерон, Франция); на международной конференции "Modern Problems of Superconductivity" (2002 г. — Ялта, Украина), Нижегородских сессиях молодых ученых, (2000, 2001, 2002 гг., — Нижний Новгород).

По результатам исследований, вошедших в диссертацию, опубликовано 12 научных работ (6 статей и 6 тезисов докладов на российских и международных конференциях).

Объем и структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка публикаций автора и списка цитируемой литературы из 132 наименований. Общий объем —

118 страниц, в диссертации приведен 32 рисунка.

В первой главе приведён обзор экспериментальных данных, подтверждающих образование в высокотемпературных сверхпроводниках сверхпроводящего состояния с доминирующим d -типом спаривания. Также приведены экспериментальные данные, указывающие на возможную примесь сверхпроводящего конденсата с s -типом спаривания. Сделан обзор имеющихся к настоящему времени теоретических результатов, посвященных исследованию структуры сингулярного вихря в высокотемпературном сверхпроводнике с $(d + s)$ -типом спаривания в магнитном поле направленном вдоль c -оси.

Далее в рамках теории Гинзбурга–Ландау анализируются особенности структуры и свойств вихревых состояний в высокотемпературных сверхпроводниках с анизотропным $(d + s)$ -типом спаривания. В диапазоне температур близких к критической исследуется структура сингулярного вихря при произвольной ориентации слабого магнитного поля ($H_{c1} < H \ll H_{c2}$, H_{c1} — нижнее критическое магнитное поле, H_{c2} — верхнее критическое магнитное поле) относительно кристаллографических осей сверхпроводника для различной степени анизотропии. Показывается, что при отклонении магнитного поля от c -оси кристалла происходит смещение вихрей s -компоненты относительно вихря d -компоненты, приводящее к нарушению тетрагональной симметрии. Когда магнитное поле отклоняется от c -оси на угол превышающий критический, происходит качественное изменение структуры s -компоненты: вместо четырех s -вихрей и одного s -антивихря энергетически выгодным является связанное состояние с тремя s -вихрями. Обсуждается также особенности угловой зависимости нижнего критического магнитного поля и тензора вязкости вихря. Показано, что обе эти величины обладают тетрагональной угловой зависимостью в плоскости ab .

Также в данной главе рассматривается структура несингулярного вихря в слабом магнитном поле. Показывается, что при определенных значениях параметров возможен спонтанный сдвиг вихрей s -компоненты в коре d -вихря, что приводит к дополнительному нарушению симметрии вихря даже в случае ориентации магнитного поля вдоль главной кристаллографической оси. Находится область параметров теории Гинзбурга–Ландау, при которых несингулярные вихревые решения

являются энергетически выгодными. Отмечается, что присутствие несингулярных вихрей может привести к особенностям в характеристиках смешанного состояния, в частности к ослаблению эффектов связанных с пиннингом вихрей, к особенностям транспортных и термодинамических характеристик (проводимости, теплопроводности).

На основе полуклассического подхода анализируется положение нулей функции щели $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в центре вихря и показывается, что при фазовом переходе от сингулярного к несингулярному вихрю происходит выталкивание нулей щели из центра вихря.

Во второй главе рассматриваются различные типы связанных вихревых состояний (вихревые молекулы) и многоквантовые вихри в мезоскопическом сверхпроводнике квадратной формы с дефектами. На основе численного моделирования нестационарных уравнений Гинзбурга-Ландау исследуются особенности структуры различных вихревых конфигураций (изолированных вихрей, многоквантовых вихрей и вихревых молекул различной геометрии) в мезоскопических сверхпроводниках квадратной формы. Рассчитывается кривая намагничивания во всем интервале магнитных полей и исследуется влияние переходов между различными вихревыми состояниями на характер особенностей на кривой намагничивания. Показывается, что ряд особенностей на кривой намагничивания связан с распадом вихревых молекул и многоквантовых вихрей. Также показывается, что устойчивость связанной вихревой конфигурации, образованной вихрями и антивихрями существенным образом зависит от нарушений симметрии, вызванными наличием малых дефектов.

В третьей главе анализируются особенности фазового перехода в сверхпроводящее состояние структур сверхпроводник—ферромагнетик во внешнем однородном магнитном поле. Неоднородности магнитного поля, создаваемые доменами ферромагнитной пленки, имеют мезоскопические масштабы, что приводит к локализации зародышей параметра порядка вблизи доменных стенок ферромагнитной пленки. Такую макроскопическую систему можно рассматривать как альтернативную реализацию мезоскопических эффектов в тонких сверхпроводящих пленках больших размеров. Изучение свойств таких зародышей является ключевым

этапом для дальнейшего анализа структуры смешанного состояния в гибридных структурах сверхпроводник–ферромагнетик.

На основе локального аналитического подхода и численного решения линеаризованного уравнения Гинзбурга-Ландау были исследованы условия зарождения сверхпроводимости вблизи доменных стенок в двухслойной гибридной структуре сверхпроводник–ферромагнетик во внешнем магнитном поле. Получены различные виды температурной зависимости верхнего критического поля. Показано, что вид температурной зависимости критического поля определяется структурой неоднородного магнитного поля индуцированного доменами (то есть, определяется структурой доменов ферромагнитной пленки). Исследована пространственная структура зародышей параметра порядка.

В Заключении сформулированы выводы, сделанные по результатам работы.

1 Структура и свойства сингулярных и несингулярных вихрей в высокотемпературных сверхпроводниках

1.1. Симметрия сверхпроводящего состояния в высокотемпературных сверхпроводниках.

В последние годы накоплен огромный экспериментальный материал, свидетельствующий о том, что в высокотемпературных сверхпроводниках меднооксидной группы (например, $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$, $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$) реализуется анизотропный сверхпроводящий параметр порядка. Многие эксперименты позволяют сделать заключение о d -симметрии щелевой функции $\Delta(\mathbf{k})$ с возможной примесью s -компоненты в таких соединениях. Можно выделить три основные группы экспериментов, из которых можно определить симметрию параметра порядка.

Первая группа экспериментов объединяет измерение различных низкотемпературных характеристик сверхпроводников, таких, например, как измерение температурных зависимостей глубины проникновения магнитного поля λ [84, 85, 86, 87, 88, 89], теплоемкости электронной подсистемы C_e [90, 91].

Низкотемпературное поведение термодинамических характеристик определяется поведением плотности состояний квазичастичного спектра сверхпроводника вблизи поверхности Ферми. Как известно, наличие нулей (и их характер) в спектре элементарных возбуждений приводит к специфическим зависимостям термодинамических величин при низких температурах [8, 92]. Так для обычного s -типа спаривания, не имеющего нулей в спектре элементарных возбуждений, температурная зависимость электронной теплоемкости носит активационный характер $C_e(T) \propto \exp(-\Delta/T)$. Для сверхпроводящих состояний, у которых есть нули первого порядка в изолированных точках в \mathbf{k} -пространстве на поверхности Ферми, $C_e \propto T^3$, а для состояний с линиями нулей щели на поверхности Ферми (к ним, в частности, относятся и сверхпроводящее состояние с d -спариванием) — $C_e \propto T^2$. Также радикально отличается и температурная зависимость глубины проникно-

вения магнитного поля: $\lambda(T) - \lambda(0) \propto \exp(-\Delta/T)$ для сверхпроводников с s -типом спаривания (без нулей) и $\lambda(T) - \lambda(0) \propto T$ для сверхпроводников с линиями нулей щели на поверхности Ферми.

Также различается поведение электронной теплоемкости для разных типов спектра и в присутствии магнитного поля H . В частности, в работе [91] исследовано низкотемпературное поведение электронной теплоемкости в $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ при различных значениях внешнего магнитного поля H . В отсутствие магнитного поля при температурах ниже 12 К наблюдался параболический рост теплоемкости, что свидетельствует в пользу d -спаривания. В магнитном поле теплоемкость зависела от магнитного поля как $T\sqrt{H}$ в соответствии с зависимостью предсказанной в работе [93].

Таким образом, низкотемпературные измерения глубины проникновения магнитного поля и теплоемкости указывают на существование сверхпроводящего состояния с линиями нулей щели. Естественно, из всего множества неприводимых представлений, соответствующих данному температурному поведению C_e или λ , необходимо отобрать допустимые по свойствам симметрии сверхпроводящего состояния. При этом необходимо учитывать и тот факт, что возможно анизотропное состояние с s -типом спаривания, которое тоже имеет линии нулей, но фаза щелевой функции положительна для всех направлений импульса. Это означает, что наблюдение степенных температурных зависимостей в сверхпроводящих купратах может свидетельствовать только о наличии нулей в сверхпроводящем параметре порядка, но не позволяет различать сверхпроводящие состояния с d -типом спаривания и с анизотропным s -типом спаривания, у которого также щель обращается в ноль на выделенных линиях на поверхности Ферми. Для этого необходимо измерение других свойств сверхпроводящего состояния.

Вторая группа экспериментов основана на непосредственном измерении фазы сверхпроводящего параметра порядка с помощью изучения интерференционных явлений в джозефсоновских контактах в присутствии магнитного поля. В стандартной прямоугольной геометрии, когда контакт образован плоскими гранями двух сверхпроводников, разделенными несверхпроводящим слоем, критический ток осциллирует с изменением магнитного поля по закону фраунгоферовской

дифракции

$$I_c(\Phi) = j_c S \left| \frac{\sin(\pi\Phi/\Phi_0)}{\pi\Phi/\Phi_0} \right|. \quad (1.1)$$

Здесь Φ — магнитный поток через контакт, j_c — плотность критического джозефсоновского тока в нулевом поле, а S — площадь контакта. Дифракционная картина показана на Рис. 1а. Такая зависимость критического джозефсоновского тока должна наблюдаться в контактах прямоугольной геометрии, независимо от того, какой тип спаривания (s -тип или d -тип) реализуется в каждом сверхпроводнике.

Теперь рассмотрим монокристаллический сверхпроводник с тетрагональной симметрией. Пусть он ориентирован таким образом, что кристаллографические оси a и b перпендикулярны граням образца. В туннельном контакте угловой геометрии второй сверхпроводник с s -типом спаривания прикладывается к обеим граням, перпендикулярным осям a и b , причем ток протекает через обе грани (Рис. 1b и 1c). В этом случае происходит суперпозиция туннельных токов, создаваемых электронами с волновыми векторами k_x и k_y (направленными вдоль кристаллографических осей a и b , соответственно), и результирующая картина дифракции зависит от симметрии параметра порядка исследуемого сверхпроводника. При s -симметрии (включая и анизотропный случай) фаза параметра порядка на обеих гранях одинакова, и дифракционная картина будет такой же, как и в случае стандартного контакта. В случае же $d_{x^2-y^2}$ -симметрии, параметр порядка на гранях углового контакта имеет различные знаки, и это радикально меняет дифракционную картину. Суперпозиция двух туннельных токов приводит к совершенно иной картине (Рис. 1c). В нулевом магнитном поле критический ток оказывается равным нулю из-за взаимной компенсации двух его составляющих. В симметричном контакте (равные по величине контакты на гранях a и b) зависимость от поля определяется формулой [94]

$$I_c(\Phi) = j_c S \left| \frac{\sin^2(\pi\Phi/2\Phi_0)}{\pi\Phi/2\Phi_0} \right|. \quad (1.2)$$

Таким образом, по различию в дифракционных картинах от стандартного и углового контактов можно судить о симметрии параметра порядка. В частности, как следует из выражений (1.1) и (1.2), если в исследуемом сверхпроводнике реализуется s -тип спаривания, критический ток джозефсоновского контакта максимален

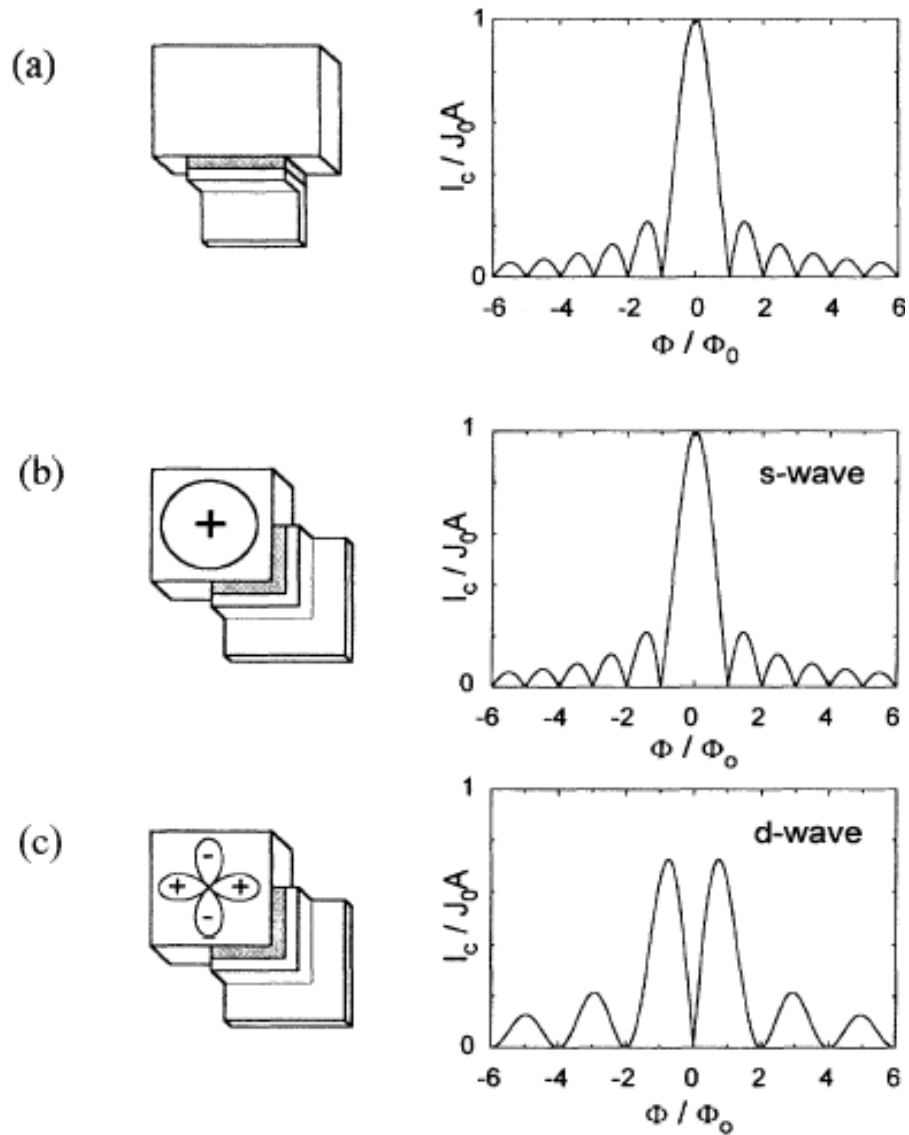


Рис. 1. Зависимость критического тока в джозефсоновском контакте от приложенного магнитного поля: (а) стандартный туннельный контакт, (б) угловой туннельный контакт для сверхпроводника с s -симметрией параметра порядка, (с) угловой туннельный контакт для сверхпроводника с $d_{x^2-y^2}$ -симметрией параметра порядка [94].

в отсутствии магнитного поля, и наоборот, если реализуется d -тип спаривания, то при $H = 0$ критический ток имеет минимум.

В работах [94, 95] был проведен такой эксперимент на туннельном контакте $YBa_2Cu_3O_{6.9}-Au-Pb$. Полученные результаты свидетельствуют о $d_{x^2-y^2}$ -симметрии

параметра порядка в сверхпроводящем соединении $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.9}$. Измерения критического тока на контакте с $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{6.6}$ [96] подтвердили дифракционную картину, показанную на Рис. 1с. Также изучались джозефсоновские контакты между обычным сверхпроводящим Pb и $\text{Y}_{1-x}\text{Pr}_x\text{Ba}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ с ориентацией c -оси последнего перпендикулярно контакту [97, 98]. Возникающий туннельный ток оказался всего лишь на порядок слабее, чем в стандартной геометрии. Если параметр порядка в кристалле имеет $d_{x^2-y^2}$ -симметрию, то туннельного тока вдоль оси c не должно быть. Наблюдение его можно объяснить примесью s -компоненты параметра порядка к основной d -компоненте, которая и обеспечивает конечный туннельный ток [98, 99]. Детальный теоретический анализ экспериментов с джозефсоновскими контактами в различной геометрии дан в обзоре [100].

Другой тип эксперимента по определению симметрии параметра порядка основан на измерении потока в сверхпроводящем кольце со специально устроенными джозефсоновскими контактами. Идея такого эксперимента базируется на том, что в случае $d_{x^2-y^2}$ -симметрии туннельный ток между двумя сверхпроводящими кристаллами, разделенными тонкой границей, зависит от ориентации параметра порядка по отношению к границе раздела. Если имеется сверхпроводящее кольцо с одним джозефсоновским контактом с разностью фаз π (или нечетное число таких контактов), то в нем возникает спонтанная намагниченность соответствующая потоку, равному $\Phi_0/2$. Обнаружение половинного кванта потока через такое кольцо будет свидетельствовать о d -симметрии параметра порядка. Подобный эксперимент был поставлен в работе [101] на сверхпроводящих контактах $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ с 0, 2 и 3 граничными джозефсоновскими контактами. Геометрия эксперимента показана на Рис. 2. Оси a и b кристаллографически ориентированы на разных секторах так, как это показано на рисунке. В центральном кольце с тремя границами имеется π -контакт, и в таком кольце может захватываться полуцелое число квантов магнитного потока, то есть $\Phi = (n + 1/2)\Phi_0$. Оказалось, что разность потоков, захваченных в кольце с тремя межгранульными границами и в кольце с двумя межгранульными границами (или не содержащим границ), всегда составляет полуцелое значение Φ_0 .

Третья группа экспериментов имеет дело с непосредственным измерением ве-

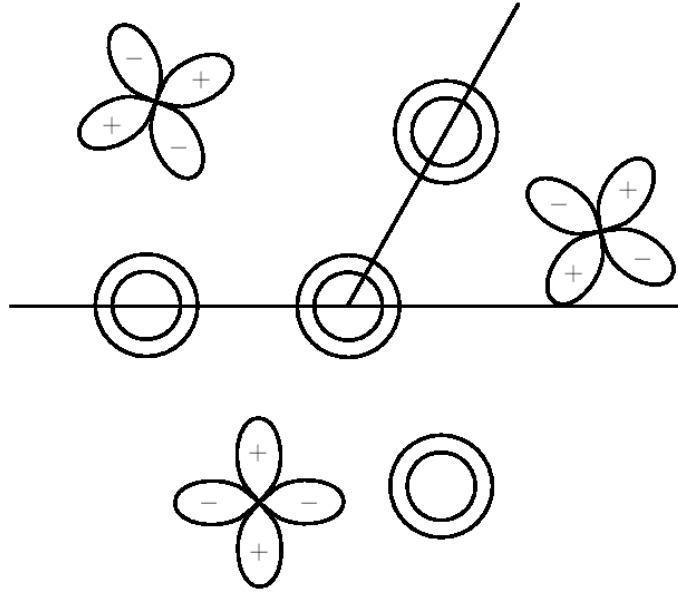


Рис. 2. Схема эксперимента, позволяющего измерять полуцелое число квантов потока, захваченного сверхпроводящим кольцом с тремя джозефсоновскими контактами с d -симметрией параметра порядка [101].

личины щели путем спектроскопического эксперимента и прежде всего фотоэмиссионная спектроскопия с угловым разрешением — ARPES (angle-resolved photoemission spectroscopy), позволяющая измерять величину щели в различных областях поверхности Ферми. Детальные ARPES-эксперименты были проведены на кристалле $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ (BiSCCO2212) [102, 103, 104, 105]. Экспериментальные данные указывают на сильную анизотропию и наличие точек на двумерной поверхности Ферми, где щель обращается в нуль. Поведение щели в \mathbf{k} -пространстве хорошо описывается функцией $\Delta(\mathbf{k}) \propto [\cos(k_x a) - \cos(k_y a)]$, что свидетельствует о $d_{x^2-y^2}$ -симметрии параметра порядка.

1.2. Теория Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников

с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания.

Анизотропия сверхпроводящего параметра порядка в сверхпроводниках с d -симметрией приводит к ряду особенностей смешанного состояния по сравнению к

сверхпроводникам с s -типом спаривания. Известно, что поведение сверхпроводника в магнитном поле может быть описано уравнениями Гинзбурга–Ландау, поэтому нам необходимо записать функционал Гинзбурга–Ландау для сверхпроводника с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания.

Для сверхпроводника с $(d + s)$ -типом спаривания теория фазовых переходов требует введения сложного параметра порядка, состоящего из двух комплексных компонент [14, 106]. В соответствии с данными экспериментов для тетрагональных сверхпроводников с точечной группой симметрии D_{4h} компоненты параметра порядка (Ψ_s и Ψ_d) должны преобразовываться по двум соответствующим одномерным неприводимым представлениям этой группы: A_{1g} (s -тип спаривания — компонента Ψ_s) и B_{1g} ($d_{x^2-y^2}$ -тип спаривания — компонента Ψ_d). Каждой компоненте соответствует своя критическая температура, причем, поскольку согласно экспериментальным данным d -компонента является основной, в дальнейшем всюду предполагается, что $T_{cs} < T_{cd}$.

Простейший подход для обобщения теории Гинзбурга–Ландау на двухкомпонентный случай — включение в функционал свободной энергии сверхпроводника слагаемых, инвариантных относительно соответствующих преобразований данной группы [106]. При этом, симметричные свойства соответствующих неприводимых представлений при преобразованиях координат, входящих в группу симметрии D_{4h} , переносятся на соответствующие компоненты параметра порядка Ψ_s и Ψ_d . Так Ψ_d меняет знак при повороте на $\pi/2$ при повороте в плоскости ab , Ψ_s — неизменна при всех преобразованиях.

В то же время, необходимо учитывать тот факт, что высокотемпературные сверхпроводящие соединения меднооксидной группы (купраты) являются сильно анизотропными слоистыми структурами [19] и, таким образом, модифицированная теория Гинзбурга–Ландау должна учитывать не только анизотропию щели в плоскости ab , но и анизотропию сверхпроводящих свойств вдоль оси c . В зависимости от конкретного соотношения s/ξ_c (s — расстояние между слоями, $\xi_c(T)$ — длина когерентности вдоль кристаллографической оси c) можно выделить два характерных случая.

Случай $s/\xi_c \ll 1$ соответствует трёхмерной сверхпроводимости с анизотроп-

ным тензором масс. В двухкомпонентном случае не составляет труда записать соответствующий функционал Гинзбурга–Ландау, введя два тензора обратных эффективных масс для каждого типа спаривания ($K_{\alpha\beta} = (\hbar^2/4)m_{\alpha\beta}^{-1}$).

Случай $s/\xi_c \gg 1$ соответствует квазидвумерной сверхпроводимости, когда сверхпроводник представляет собой набор сверхпроводящих слоев с джозефсоновским взаимодействием между ними. Такая ситуация описывается функционалом свободной энергии Лоуренса–Дониака (Lawrence–Doniach) (см., например, [107]), который в предельном случае $s/\xi_c \ll 1$ переходит в трехмерную модель Гинзбурга–Ландау с анизотропным тензором масс.

В простом предельном случае трёхмерной сверхпроводимости ($s/\xi_c \ll 1$) функционал свободной энергии тетрагонального экзотического сверхпроводника можно записать в виде:

$$F = \int \left\{ a_d(T) |\Psi_d|^2 + a_s(T) |\Psi_s|^2 + \frac{b_d}{2} |\Psi_d|^4 + \frac{b_s}{2} |\Psi_s|^4 + b_{sd} |\Psi_d|^2 |\Psi_s|^2 + \frac{\beta_{sd}}{2} (\Psi_d^2 \Psi_s^{*2} + \Psi_d^{*2} \Psi_s^2) + K_d |(\Pi_{||} + \gamma_d \Pi_z \mathbf{z}_0) \Psi_d|^2 + K_s |(\Pi_{||} + \gamma_s \Pi_z \mathbf{z}_0) \Psi_s|^2 + K_{sd} [(\Pi_x \Psi_s)^* \Pi_x \Psi_d - (\Pi_y \Psi_s)^* \Pi_y \Psi_d] + \text{к.с.} + \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} \right\} dV. \quad (1.3)$$

Здесь $a_d = \alpha_d(T - T_{cd})$, $a_s = \alpha_s(T - T_{cs})$, ($\alpha_d, \alpha_s > 0$), $\Pi = \Pi_{||} + \Pi_z \mathbf{z}_0 = \nabla - i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}$, \mathbf{A} — векторный потенциал магнитного поля. Коэффициенты анизотропии γ_d и γ_s определяются тензорами эффективных масс куперовских пар d - и s -типов, соответственно ($\gamma = \sqrt{m_{ab}/m_c}$). Координатные оси x , y , z выбраны вдоль кристаллографических осей a , b и c , соответственно.

Чтобы функционал свободной энергии (1.3) был положительно определен, необходимо наложить следующие условия на коэффициенты:

$$b_d > 0, \quad b_s > 0, \quad b_{sd} - |\beta_{sd}| > -\sqrt{b_d b_s} \\ K_d > 0, \quad K_s > 0, \quad \gamma_d > 0, \quad \gamma_s > 0, \quad K_{sd}^2 < K_d K_s. \quad (1.4)$$

Для дальнейшего анализа удобно перейти к безразмерным переменным. Здесь и далее в этой главе используются следующие единицы: $|\Psi_d|_\infty = \sqrt{|a_d|/b_d}$ для компонент параметра порядка, $4e a_d^2 \xi_d / (\hbar b_d)$ для плотности тока \mathbf{j} , $\xi_d = \sqrt{K_d / |a_d|}$ для длины и $\Phi_0 / (2\pi \xi_d)$ для векторного потенциала \mathbf{A} , при этом, градиентно-инвариантный дифференциальный оператор в безразмерном виде записывается как

$\mathbf{\Pi} = \nabla - i\mathbf{A}$. Также введем перенормированные параметры $a(T) = a_s(T)/|a_d(T)|$, $\beta_1 = b_s/b_d$, $\beta_2 = b_{sd}/b_d$, $\beta_3 = \beta_{sd}/b_d$, $k = K_s/K_d$ и $C = K_{sd}/K_d$.

Варьируя функционал (1.3) по Ψ_d^* , Ψ_s^* и \mathbf{A} , получим замкнутую систему уравнений Гинзбурга–Ландау:

$$-\Psi_d + |\Psi_d|^2\Psi_d + \beta_2|\Psi_s|^2\Psi_d + \beta_3\Psi_s^2\Psi_d^* - (\mathbf{\Pi}_{||}^2 + \gamma_d^2\Pi_z^2)\Psi_d - C(\Pi_x^2 - \Pi_y^2)\Psi_s = 0 \quad (1.5)$$

$$a(T)\Psi_s + \beta_1|\Psi_s|^2\Psi_s + \beta_2|\Psi_d|^2\Psi_s + \beta_3\Psi_d^2\Psi_s^* - k(\mathbf{\Pi}_{||}^2 + \gamma_s^2\Pi_z^2)\Psi_s \quad (1.6)$$

$$-C(\Pi_x^2 - \Pi_y^2)\Psi_d = 0$$

$$\mathbf{j}_s = \text{Im}\{\Psi_d^*(\mathbf{\Pi}_{||} + \gamma_d\mathbf{z}_0\Pi_z)\Psi_d + k\Psi_s^*(\mathbf{\Pi}_{||} + \gamma_s\mathbf{z}_0\Pi_z)\Psi_s \quad (1.7)$$

$$+C[\Psi_d^*(\Pi_x\mathbf{x}_0 - \Pi_y\mathbf{y}_0)\Psi_s + \Psi_s^*(\Pi_x\mathbf{x}_0 - \Pi_y\mathbf{y}_0)\Psi_d]\}.$$

Прежде всего, рассчитаем равновесную фазовую диаграмму в пространстве температура–параметры теории Гинзбурга–Ландау для однородного высокотемпературного сверхпроводника в отсутствии внешних полей. В исследуемых системах могут существовать три фазы:

- однородное s -состояние

$$\Psi_s = \sqrt{-a/\beta_1}$$

$$\Psi_d = 0,$$

когда выполнена одна из двух пар неравенств

$$\begin{cases} a(T) < -\sqrt{\beta_1} \\ \sigma > \sqrt{\beta_1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a(T) < -\beta_1/\sigma \\ 0 < \sigma < \sqrt{\beta_1} \end{cases}, \quad (1.8)$$

здесь $\sigma = \beta_2 - |\beta_3|$;

- однородное d -состояние

$$\Psi_s = 0$$

$$\Psi_d = 1,$$

если

$$\begin{cases} a(T) > -\sigma \\ 0 < |\sigma| < \sqrt{\beta_1} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a(T) > -\sqrt{\beta_1} \\ \sigma > \sqrt{\beta_1} \end{cases}; \quad (1.9)$$

- однородное $(d + s)$ -состояние

$$|\Psi_s| = \sqrt{-\frac{a + \sigma}{\beta_1 - \sigma^2}}$$

$$|\Psi_d| = \sqrt{\frac{\beta_1 + a\sigma}{\beta_1 - \sigma^2}},$$

когда выполнено одно из двух пар условий

$$\left\{ \begin{array}{l} a(T) < -\sigma \\ -\sqrt{\beta_1} < \sigma < 0 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} -\beta_1/\sigma < a(T) < -\sigma \\ 0 < \sigma < \sqrt{\beta_1} \end{array} \right. . \quad (1.10)$$

Переходы из s -состояния или d -состояния в однородное $(d + s)$ -состояние смешанной симметрии являются переходами второго рода, в то время как переход из s -состояния в d -состояние есть переход первого рода. Типичные фазовые диаграммы однородного состояния в сверхпроводнике с $(d + s)$ -типом спаривания изображены на Рис. 3. Заметим, что s -состояние никогда не будет реализовываться, если

$$\frac{\alpha_s T_{cs}}{\alpha_d T_{cd}} < \min \left\{ \sqrt{\beta_1}; \frac{\beta_1}{\sigma} \right\} \quad (1.11)$$

(см. Рис. 3b)). Таким образом, тот факт, что в ряде экспериментов s -компонента не была обнаружена, может объясняться конкретным набором параметров теории Гинзбурга–Ландау и выбором температуры, когда выполнялось условие (1.11).

Коэффициент β_3 определяет взаимную фазу ϕ между s - и d - компонентами параметра порядка в однородном $(d + s)$ -состоянии (1.10): если $\beta_3 < 0$, то $\phi = 0$ или π — состояние $(1; \pm 1)$; в противоположном случае: $\phi = \pm\pi/2$ — состояние $(1; \pm i)$. Последний случай соответствует состоянию с нарушенной симметрией относительно обращения времени (см., например, [24]).

В дальнейшем будет рассматриваться случай, когда в отсутствии магнитного поля реализуется чистое d -состояние (1.9).

1.3. Структура сингулярного вихря в магнитном поле перпендикулярном плоскости ab . Обзор.

Несмотря на то, что для заданной температуры при определенных значениях параметров теории Гинзбурга–Ландау в однородном состоянии отлична от нуля

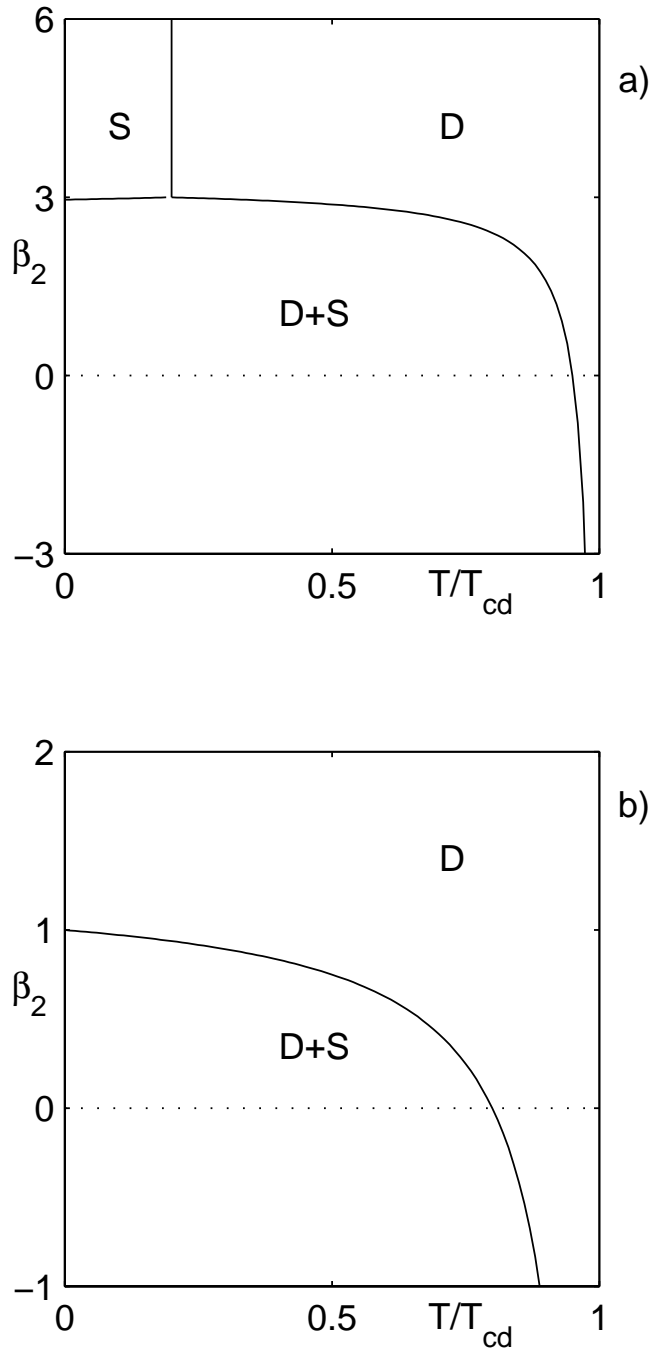


Рис. 3. Фазовая диаграмма однородных состояний в отсутствии внешнего магнитного поля на плоскости β_2 - T для параметров: а) $\alpha_s/\alpha_d = 3.2$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.95$, $\beta_1 = 9$, $\beta_3 = 0$ и б) $\alpha_s/\alpha_d = 1.25$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.8$, $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 0$.

только d -компонента параметра порядка, во внешнем магнитном поле s -компонента может появиться вблизи кора вихря двумя способами:

- **индуцированным**, когда обтекающие вихрь сверхпроводящие токи, связанные с d -компонентой, индуцируют s -компоненту параметра порядка (за что ответственно слагаемое с $C \neq 0$ в уравнении (1.6)) [12, 13, 14]; или
- **спонтанным**, когда нелинейное взаимодействие компонент (слагаемые с β_2 или β_3 в уравнении (1.6)) приводит к спонтанному появлению зародыша s -компоненты в области, где d -компонента сильно подавлена. Такой механизм нелинейного взаимодействия двух компонент параметра порядка рассматривался в работах [15, 16] при изучении структуры вихрей в сверхпроводниках с тяжелыми фермионами и в работе [24], посвященной изучению структуры $(d_{x^2-y^2} + d_{xy})$ -параметра порядка вблизи границ сверхпроводника.

Первый механизм приводит к образованию сингулярных вихрей, которые имеют по крайней мере одну точку, где обе компоненты параметра порядка обращаются в ноль. Такие вихри широко исследовались как аналитически, так и с помощью численных методов для частного случая ориентации магнитного поля вдоль оси c (см. например, [12, 13, 14, 108]), когда структура вихревой линии не зависит от соотношения s/ξ_c .

Структура кора вихря для произвольной ориентации магнитного поля исследовалась численно в работе [20], где было показано, что при отклонении магнитного поля от оси c тетрагональная симметрия вихревой линии нарушается, и вихревая линия имеет симметрию только относительно поворота на π вокруг оси, сонаправленной с магнитным полем. По мере роста угла между магнитным полем и осью c два элементарных вихря s -компоненты удаляются от центра вихревой линии, в то время как два других s -вихря, напротив, приближаются к нему.

Ранее подобная перестройка структуры вихревой линии при наклоне магнитного поля, сопровождающаяся изменением взаимного расположения вихрей различных компонент, исследовалась для сверхпроводников с тяжелыми фермионами [16]. Необходимо отметить, что вихревые линии с симметрией относительно поворота на π , исследовались в высокотемпературных сверхпроводниках для ориентации магнитного поля вдоль оси c , для частного случая набора параметров теории Гинзбурга–Ландау, соответствующих однородному $(d + s)$ -состоянию (1.10) в ра-

боте [109].

Рассмотрим простейший случай ориентации магнитного поля вдоль оси c . Для температур близких к точке сверхпроводящего перехода ($T_{cd} - T \ll T - T_{cs}$, когда $a(T) \gg 1$), s -компонента параметра порядка индуцируется неоднородно распределенной в пространстве d -компонентой. При этом амплитуда s -компоненты мала и можно пренебречь её влиянием на d -компоненту. Таким образом, можно считать, что в нулевом порядке теории возмущений по параметру $C/a(T)$ решением для Ψ_d является обычное вихревое решение Абрикосова для однокомпонентной теории Гинзбурга–Ландау: $\Psi_d = D_1(r)e^{i\theta}$ (здесь r, θ — полярные координаты). Следуя работе [110], запишем выражение для s -компоненты в первом порядке теории возмущений

$$\Psi_s = \frac{C}{a(T)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_d. \quad (1.12)$$

Другими слагаемыми в уравнении (1.6) можно пренебречь в меру малости следующих величин:

$$\beta_1 \frac{C^2}{a} \ll 1; \quad \beta_2 \ll 1; \quad \beta_3 \ll 1; \quad \frac{k}{a} \ll 1,$$

что очевидным образом справедливо в интересующем нас интервале температур $T_{cd} - T \ll T - T_{cs}$. Так как высокотемпературные сверхпроводники являются сверхпроводниками второго рода с параметром Гинзбурга–Ландау $\varkappa = \lambda/\xi \gg 1$, можно пренебречь векторным потенциалом \mathbf{A} при изучении структуры кора вихревой нити. Разложим Ψ_s по угловым гармоникам

$$\Psi_s = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} S_n(r)e^{in\theta}, \quad (1.13)$$

где S_n — комплексные функции. Как известно, существуют несколько достаточно точных аналитических аппроксимаций пространственного распределения параметра порядка для абрикосовского вихря. Используя одну из них, предложенную в работе [111]

$$D_1(r) = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}} \quad (1.14)$$

(где $R = \sqrt{2}$ в пределе $\varkappa \rightarrow \infty$), получим выражения для отличных от нуля угловых гармоник s -компоненты:

$$S_{-1} = -\frac{C}{2a(T)} \frac{r(r^2 + 4R^2)}{(r^2 + R^2)^{5/2}}$$

$$S_3 = \frac{3C}{2a(T)} \frac{r^3}{(r^2 + R^2)^{5/2}}. \quad (1.15)$$

Эти выражения, строго говоря, справедливы в пределе больших значений \varkappa и $a(T)$ (то есть, когда температура близка к T_{cd}), но, как подтверждают численные расчёты, правильным образом описывают качественную картину пространственного распределения индуцированной s -компоненты и когда $a(T) \sim 1$ [12, 13, 14, 112]. В работе [14] получена зависимость координат s -вихрей от \varkappa и показано, что при $\varkappa > 20$ координат s -вихрей от \varkappa не зависят.

Выражения (1.13) и (1.15) отражают тетрагональную симметрию вихревой линии и описывают набор из пяти s -вихрей, расположенных в области кора d -вихря. Четыре s -вихря расположены на кристаллографических осях a и b на равном удалении от d -вихря и имеют ту же завихренность, что и d -вихрь. Один элементарный s -вихрь с противоположным знаком завихренности расположен в центре d -вихря. Именно эта точка и является точкой, где сверхпроводящая щель обращается в ноль. Вне кора вихря на расстояниях $r \gg R$ s -компонента быстро спадает как $1/r^2$. Типичное распределение s -компоненты параметра порядка приведено на Рис. 4.

1.4. Структура сингулярного вихря в магнитном поле произвольной ориентации.

Рассмотрим структуру сингулярного вихря при произвольной ориентации магнитного поля в случае, когда расстояние между сверхпроводящими слоями существенно меньше длины когерентности вдоль оси c ($s \ll \xi_c$). В этом случае можно воспользоваться функционалом Гинзбурга–Ландау, записанным в форме (1.3), и соответствующими уравнениями для компонент параметра порядка (1.5) и (1.6).

Введем единичный вектор \mathbf{n} направленный вдоль вихревой линии:

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \alpha, \sin \theta \sin \alpha, \cos \theta).$$

Угол θ определяет угол отклонения оси вихревой нити от оси c , угол α — угол поворот оси вихревой нити в плоскости ab (см. Рис.5). Снова ограничимся слу-

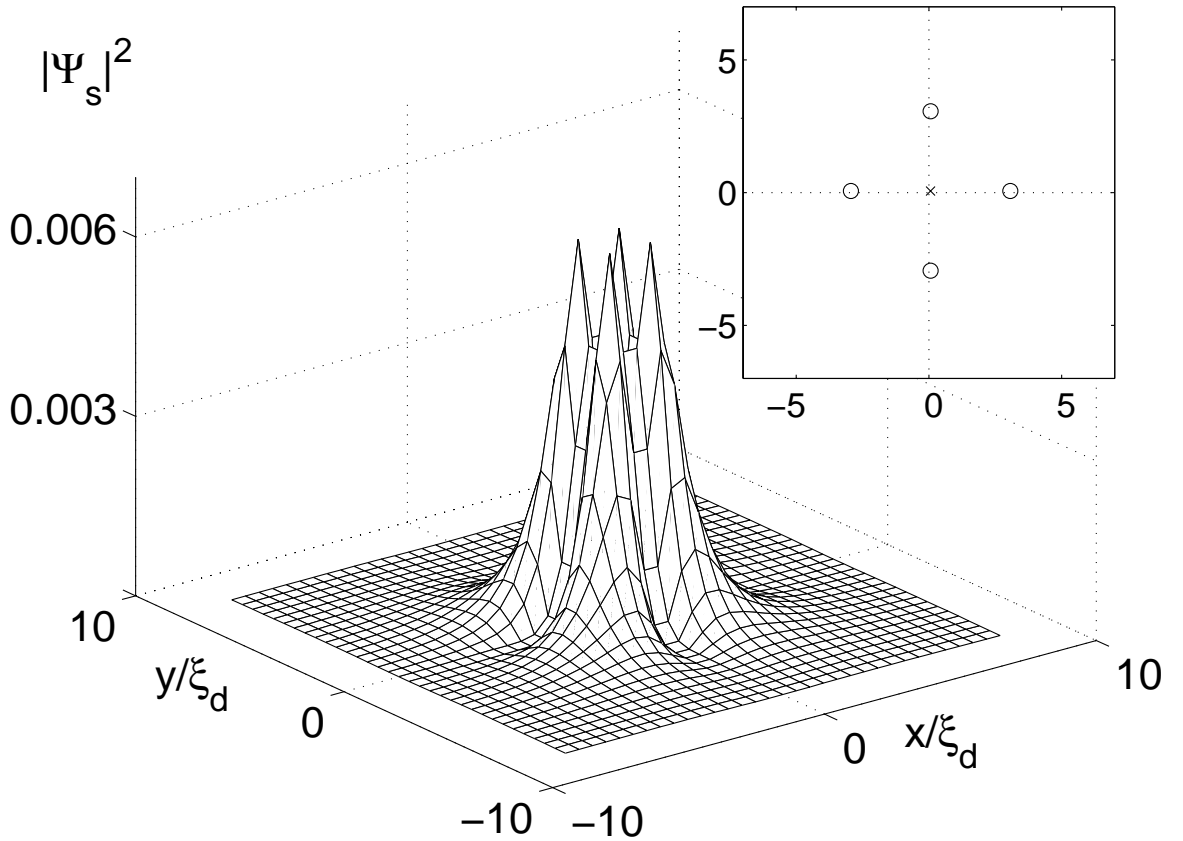


Рис. 4. Структура s -компоненты параметра порядка для сингулярного вихря (результат численных вычислений). Параметры: $\alpha_s/\alpha_d = 3.2$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.9$, $T/T_{cd} = 0.9$, $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 0$, $k = 0.5$, $C = 0.6$. На вставке показано расположение элементарных s -вихрей с $N = +1$ (\circ) и с $N = -1$ (\times). Положение вихря d -компоненты, имеющего $N = +1$, совпадает с положением antivихря s -компоненты.

чаем $|a_s| \ll |a_d|$ (температура T близка к T_{cd}). Как было сказано выше, в этом случае основная d -компонента индуцирует малую примесь s -компоненты в коре вихревой линии, что позволяет вновь воспользоваться теорией возмущений по малому параметру $a_s/|a_d|$. Произведем масштабирование и поворот координат таким образом, чтобы тензор масс стал изотропным, а вихревая линия была направлена

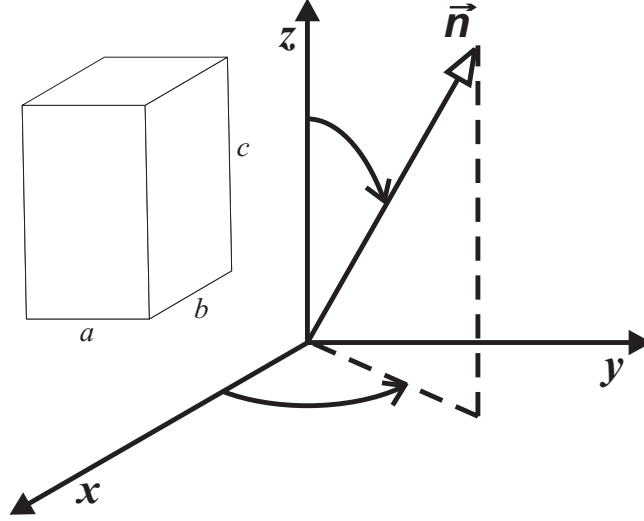


Рис. 5. Ориентация вихревой линии относительно осей координат. Схематически показана элементарная ячейка сверхпроводника.

вдоль новой оси \tilde{z} :

$$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \tilde{\theta} & \sin \alpha \cos \tilde{\theta} & -\gamma_d^{-1} \sin \tilde{\theta} \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \tilde{\theta} & \sin \alpha \sin \tilde{\theta} & \gamma_d^{-1} \cos \tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

Здесь $\tilde{\theta} = \arctg(\gamma_d^{-1} \operatorname{tg} \theta)$. При этом обе компоненты параметра порядка уже не зависят от координаты \tilde{z} . В новых координатах выражение для s -компоненты в первом порядке теории возмущений по малому параметру $a_s/|a_d|$ запишется в виде:

$$\Psi_s = \frac{C}{a(T)} \left[\cos 2\alpha \left(\cos^2 \tilde{\theta} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \right) - \sin 2\alpha \cos \tilde{\theta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{y}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{y} \partial \tilde{x}} \right) \right] \Psi_d. \quad (1.17)$$

Здесь $\Psi_d = D(r) \exp(i\varphi)$ — обычное решение для вихревой линии в однокомпонентной теории Гинзбурга–Ландау, ($r = \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}$, $\varphi = \arctg(\tilde{y}/\tilde{x})$). Для дальнейшего исследования структуры s -компоненты вновь воспользуемся аппроксимацией (1.14) для $D(r)$. Распределение s -компоненты в плоскости перпендикулярной магнитному полю имеет следующий вид:

$$\Psi_s = S_3(r)e^{3i\varphi} + S_1(r)e^{i\varphi} + S_{-1}(r)e^{-i\varphi}, \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned}
S_3(r) &= \frac{3}{4} \frac{C}{a(T)} \frac{r^3}{(r^2 + R^2)^{5/2}} \left[(1 + \cos^2 \tilde{\theta}) \cos 2\alpha + 2i \cos \tilde{\theta} \sin 2\alpha \right], \\
S_1(r) &= \frac{1}{2} \frac{C}{a(T)} \frac{r(r^2 + 4R^2)}{(r^2 + R^2)^{5/2}} \sin^2 \tilde{\theta} \cos 2\alpha, \\
S_{-1}(r) &= -\frac{1}{4} \frac{C}{a(T)} \frac{r(r^2 + 4R^2)}{(r^2 + R^2)^{5/2}} \left[(1 + \cos^2 \tilde{\theta}) \cos 2\alpha - 2i \cos \tilde{\theta} \sin 2\alpha \right].
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Выражения (1.18), (1.19) описывают эволюцию структуры вихревой линии при изменении ориентации магнитного поля относительно кристаллографических осей. Легко видеть, что вихревая структура обладает тетрагональной симметрией только в случае $\theta = 0$ (когда магнитное поле параллельно оси c), в противном случае сохраняется симметрия только относительно поворота на π (Рис. 6). На Рис. 6 линиями уровня показано распределение модуля s -компоненты параметра порядка в коре вихревой линии для $\alpha = 15^\circ$ и различных углах отклонения поля от оси c (θ). Распределение s -компоненты представлено в повернутых (ось Z направлена вдоль вихревой нити), но немасштабированных координатах (X, Y):

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \theta & \sin \alpha \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \\
R &= \sqrt{X^2 + Y^2}.
\end{aligned} \tag{1.20}$$

Характерные конфигурации s -вихрей в плоскости перпендикулярной магнитному полю в коре d -вихря показаны для различных углов θ на Рис. 7 в координатах (1.20). По мере увеличения угла θ между направлением магнитного поля и осью c два s -вихря (A и C) с той же завихренностью, что и d -вихрь ($N = +1$) удаляются от центра вихревой линии (Рис. 7 (a), (b) и (c)). В то же время, два других s -вихря (B и D) смещаются к s -антивихрю (O), находящемуся в центре d -вихря. Когда θ достигает критического значения θ_{max} , последние два вихря сливаются с s -антивихрем (O) и образуют один вихрь (O') с положительной завихренностью $N = +1$, расположенный в центре вихревой линии. Наконец, когда магнитное поле лежит в плоскости ab ($\theta = \pi/2$), в коре d -вихря остается только один s -вихрь с положительным обходом фазы (Рис. 7(d)).

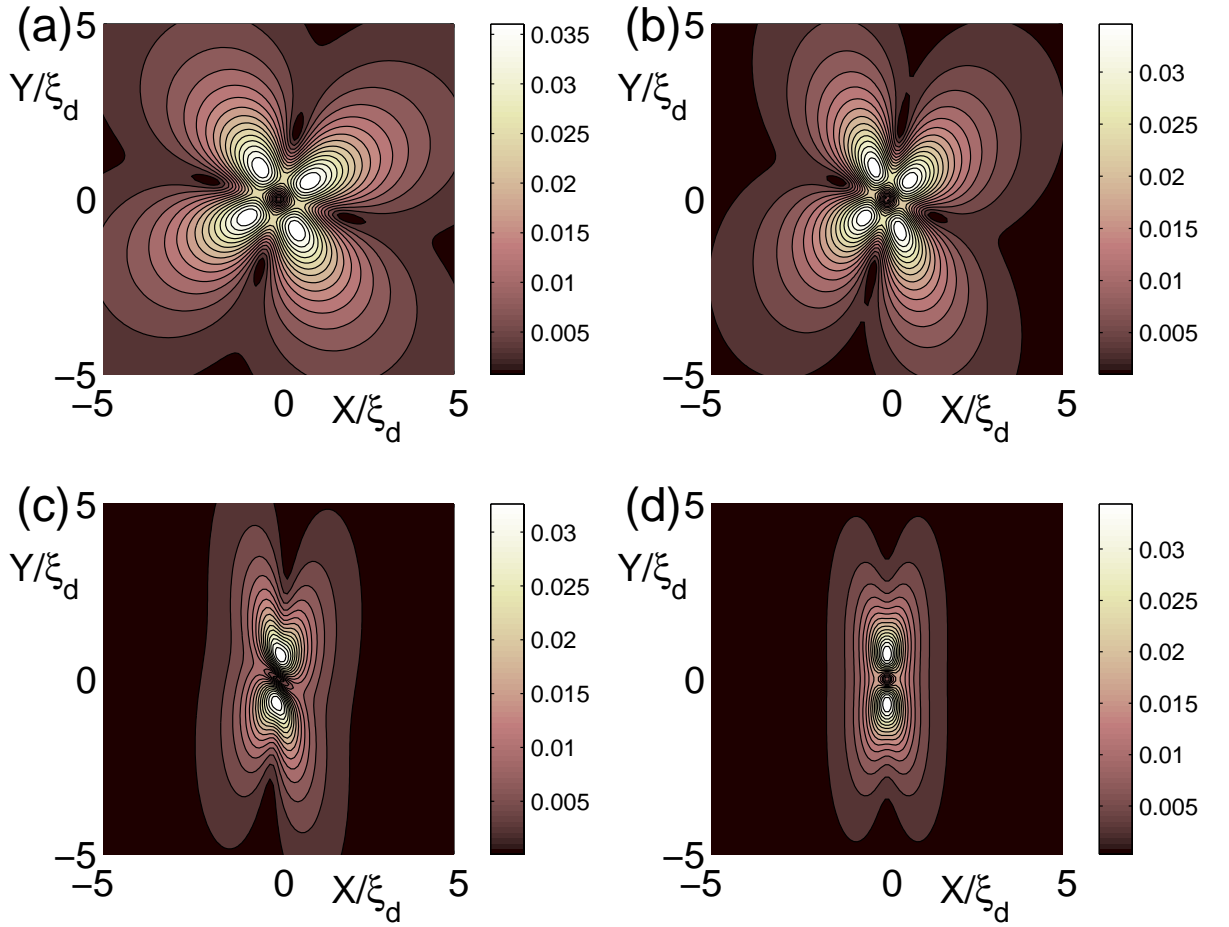


Рис. 6. Линии уровня модуля s -компоненты параметра порядка в коре сингулярного вихря для $\alpha = 15^\circ$ и различных θ : $\theta = 0^\circ$ (a), $\theta = 45^\circ$ (b), $\theta = 80^\circ$ (c), $\theta = 90^\circ$ (d).

Для углов $\theta < \theta_{max}$ распределение s -компоненты (1.19) совпадает с полученным в ходе численного моделирования в работе [20]. С другой стороны, для диапазона углов $\theta > \theta_{max}$ поведение решения (1.18)-(1.19) качественно отличается от полученного на основе численного анализа в работе [20]. Вместо пяти s -вихрей полученное решение в этом интервале углов содержит три s -вихря.

Координаты s -вихрей A и C зависят от направления магнитного поля следующим образом:

$$r_{A,C} = 2\sqrt{\frac{\sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \operatorname{tg}^2(2\alpha) \cos^2 \theta} + 2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \operatorname{tg}^2(2\alpha) \cos^2 \theta} - \sin^2 \theta}} \quad (1.21)$$

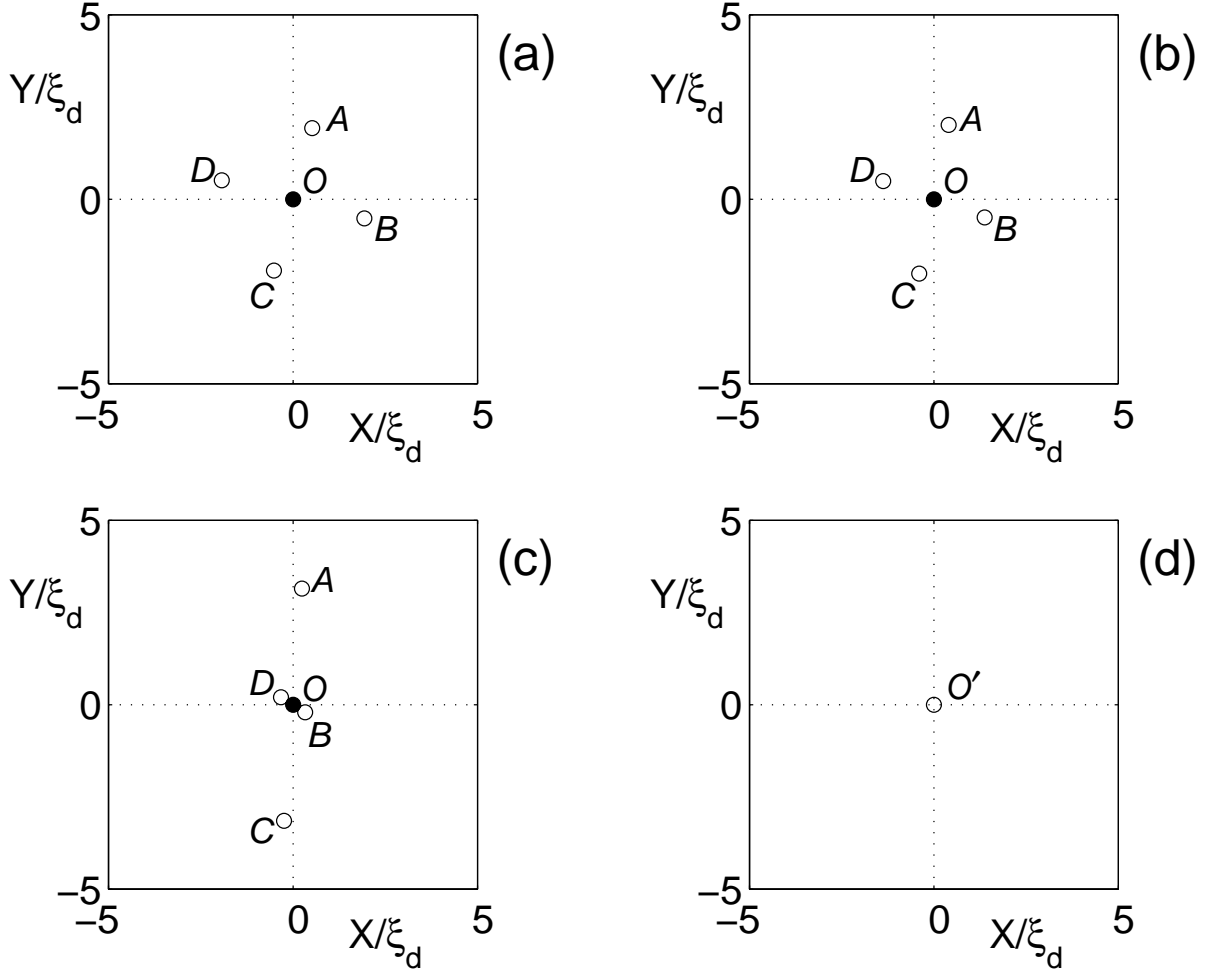


Рис. 7. Характерные расположения s -вихрей в коре сингулярного вихря для тех же углов, что и на Рис. 6. Вихри s -компоненты с той же завихренностью, что и d -вихрь ($N = +1$) обозначены \circ , s -антивихрь с $N = -1$ обозначен \bullet .

$$\varphi_A = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg}(2\alpha) \frac{\cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} \right), \quad \varphi_C = \pi + \varphi_A,$$

координаты вихрей B и D определяются следующими выражениями:

$$r_{B,D} = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \operatorname{tg}^2(2\alpha) \cos^2 \theta} - 2 \sin^2 \theta}{\sqrt{(1 + \cos^2 \theta)^2 + 4 \operatorname{tg}^2(2\alpha) \cos^2 \theta} + \sin^2 \theta}} \quad (1.22)$$

$$\varphi_B = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(2 \operatorname{tg}(2\alpha) \frac{\cos \theta}{1 + \cos^2 \theta} \right), \quad \varphi_D = \pi + \varphi_B.$$

Для углов θ близких к $\pi/2$ расстояние между уходящими s -вихрями и центром

вихревой линии OA (OC) увеличивается по закону $1/|\cos\theta|$:

$$r_{A,C} \simeq \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2(2\alpha)}} \frac{1}{|\cos\theta|}. \quad (1.23)$$

Во избежание путаницы отметим, что формулы (1.21)-(1.23) записаны в системе координат (1.16). Зависимости $r_{A,C}$ и $r_{B,D}$ от угла θ изображены на Рис. 8 для различных значений угла α .

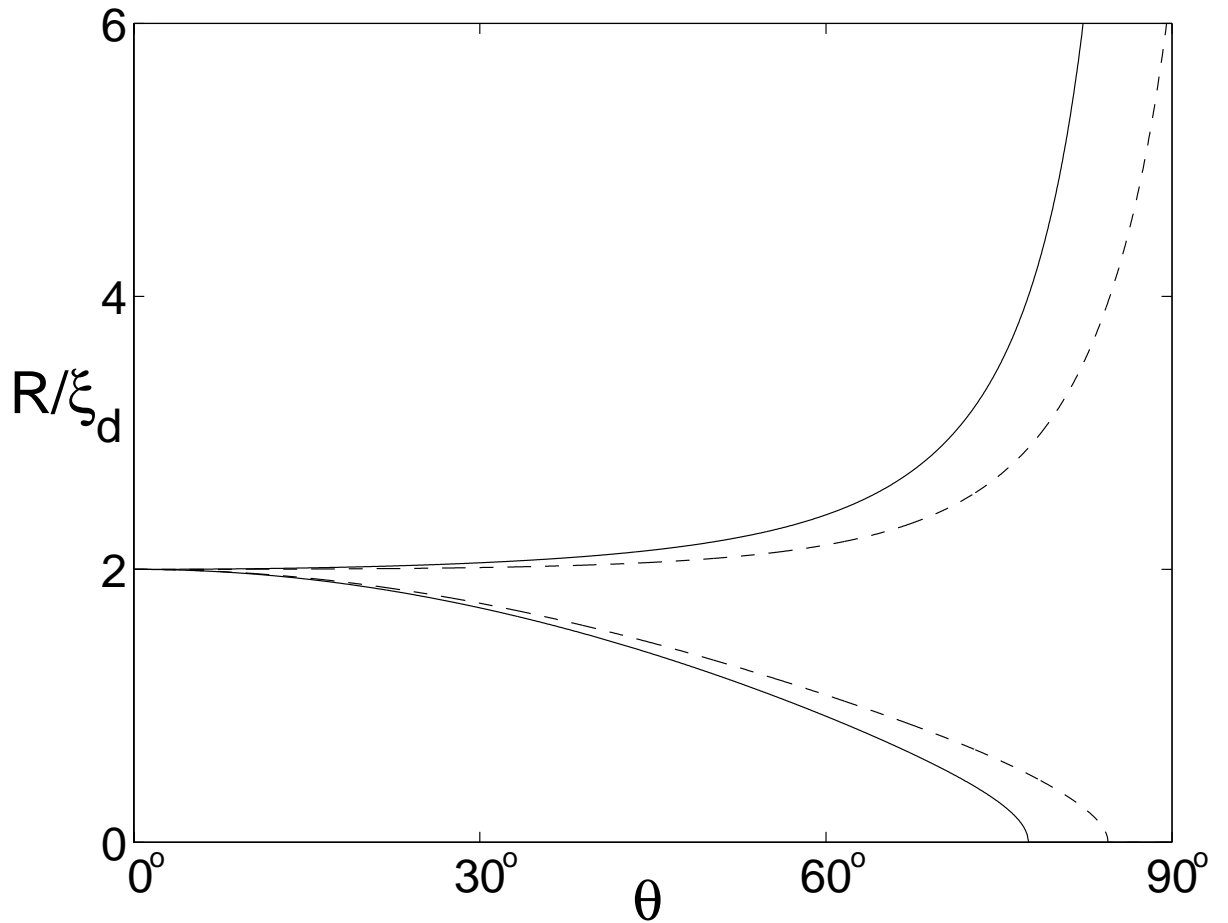


Рис. 8. Расстояние между d -вихрем и s -вихрями как функция угла θ для различных значений угла α : $\alpha = 0^\circ$ (сплошные линии) и $\alpha = 15^\circ$ (штриховые линии).

Зависимость критического угла θ_{max} (когда качественно меняется вихревая конфигурация) от угла α для различных значений параметра анизотропии γ_d име-

ет вид (см. Рис. 9):

$$\theta_{max} = \arctg \left(\gamma_d \sqrt{\frac{\sqrt{(2 \operatorname{tg}^2(2\alpha) + 5)^2 - 9} - 2(1 - \operatorname{tg}^2(2\alpha))}{2 \operatorname{tg}^2(2\alpha) + 5 - \sqrt{(2 \operatorname{tg}^2(2\alpha) + 5)^2 - 9}}} \right) \quad (1.24)$$

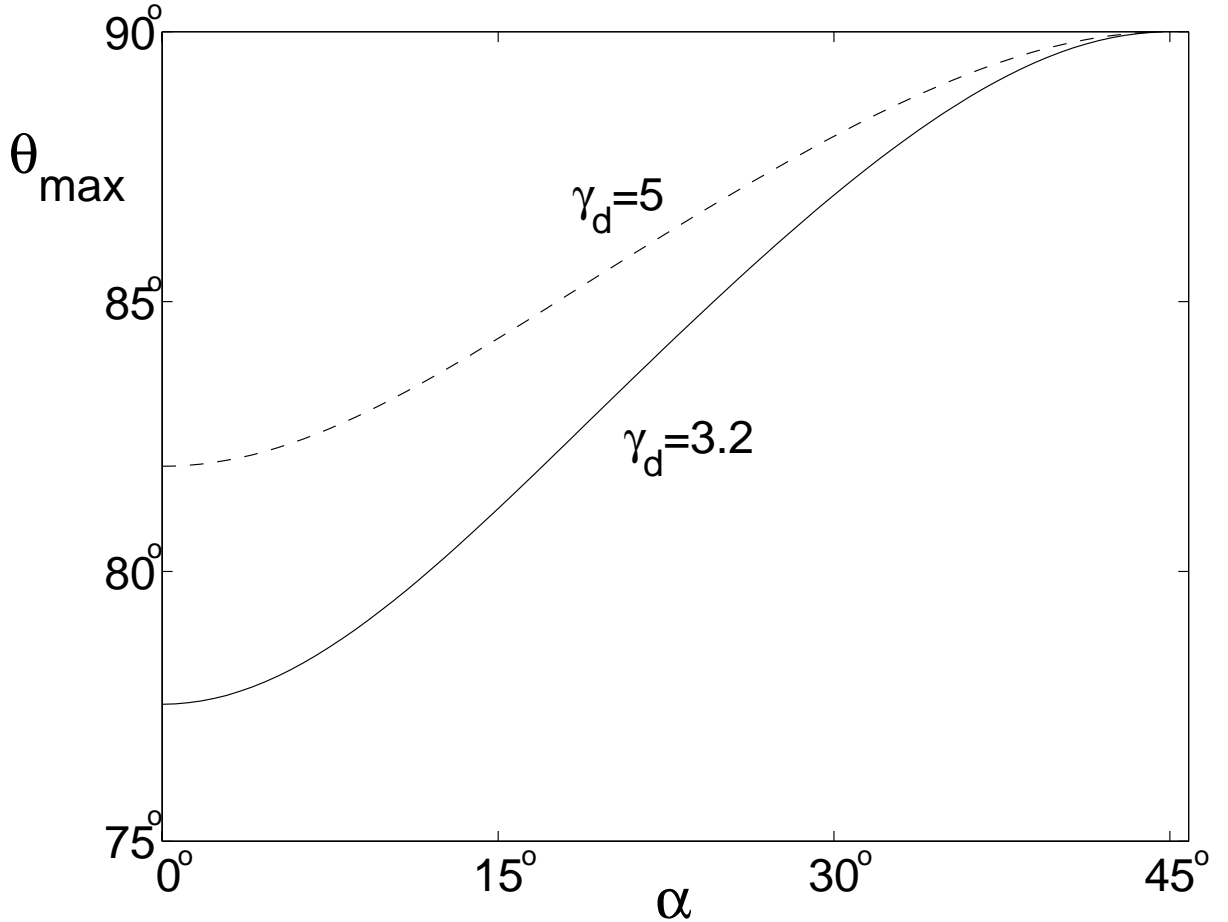


Рис. 9. Зависимость критического угла θ^* от ориентации магнитного поля в плоскости ab для различных значений параметра анизотропии γ_d .

Следует выделить особый случай ориентации вихревой линии, когда $\alpha = \pi/4$, так как в этом случае угловая гармоника $S_{-1}(r) \equiv 0$ и s -компонента параметра порядка обладает тетрагональной симметрией для всех углов наклона θ . При этом амплитуда s -компоненты уменьшается как $\cos \theta$ с увеличением θ и обращается в ноль, когда θ достигает значения $\pi/2$.

1.4.1. Угловая зависимость нижнего критического поля H_{c1} высокотемпературного сверхпроводника с анизотропным тензором масс ($s \ll \xi_s$).

Очевидно, что внутренняя структура вихря влияет на зависимость нижнего критического поля H_{c1} от направления магнитного поля. Дополнительный вклад в H_{c1} , зависящий от α и θ , пропорционален дополнительному вкладу в функционал свободной энергии, связанному с присутствием индуцированной s -компоненты. В рамках первого порядка теории возмущений найдём поправку к нижнему критическому полю H_{c1}

$$\begin{aligned} \Delta H_{c1}(\theta, \alpha) &= \frac{4\pi}{\Phi_0} \Delta F(\theta, \alpha) = \frac{4\pi}{\Phi_0} a_s \xi_d \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty |\Psi_s(r, \varphi)|^2 r dr \\ &\cong \frac{\Phi_0}{\lambda_{ab}^2 \gamma_d} \frac{K_{sd}^2 |a_d|}{K_d^2 a_s} \sqrt{\gamma_d^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \\ &\times \left\{ \cos^2 2\alpha \left[\left(1 + \cos^2 \tilde{\theta}\right)^2 + 2 \sin^4 \tilde{\theta} \right] + 4 \sin^2 2\alpha \cos^2 \tilde{\theta} - 4 \right\}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Эта поправка связана с наличием индуцированной s -компонентой и обладает тетрагональной симметрией в плоскости ab .

1.4.2. Угловая зависимость нижнего критического поля H_{c1} квазидвумерного сверхпроводника ($s \gg \xi_s$).

Как было показано для обычных однокомпонентных слоистых сверхпроводников с сильной анизотропией ($s \gg \xi_s$), структура вихревой линии существенным образом зависит от направления магнитного поля (детальный анализ можно посмотреть в работе [107]). Если магнитное поле почти перпендикулярно слоям, структура вихря очень похожа на структуру вихря в объемном (трехмерном) сверхпроводнике. Отклонения от трехмерного описания увеличиваются по мере того, как магнитное поле все больше ориентируется вдоль слоев. Для достаточно больших углов ($\lambda_J \ll s \operatorname{tg} \theta \ll \lambda_c$) вихревая линия представляет собой набор двумерных вихрей (панкейков) в каждом сверхпроводящем слое, которые связаны друг с другом джозефсоновскими струнами (см., например, работы [107, 113]).

Здесь мы рассмотрим структуру s -компоненты параметра порядка в коре наклонного вихря в слоистых квазидвумерных сверхпроводниках с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания. Функционал свободной энергии Лоуренса–Дониака для сверхпроводников с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
F = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \left\{ a_d(T) |\Psi_{dn}|^2 + a_s(T) |\Psi_{sn}|^2 + \frac{b_d}{2} |\Psi_{dn}|^4 + \frac{b_s}{2} |\Psi_{sn}|^4 + \beta_1 |\Psi_{dn}|^2 |\Psi_{sn}|^2 \right. \\
+ \frac{\beta_2}{2} (\Psi_{dn}^2 \Psi_{sn}^{*2} + \Psi_{dn}^{*2} \Psi_{sn}^2) + K_s |\mathbf{\Pi}_n \Psi_{sn}|^2 + K_d |\mathbf{\Pi}_n \Psi_{dn}|^2 \\
+ K_{sd} [(\Pi_{nx}^* \Psi_{sn}^* \Pi_{nx} \Psi_{dn} - \Pi_{ny}^* \Psi_{sn}^* \Pi_{ny} \Psi_{dn}) + \text{к.с.}] \\
\left. + \frac{\rho_s}{2} |\Psi_{sn} - \Psi_{s,n+1} e^{-i\chi_{n,n+1}}|^2 + \frac{\rho_d}{2} |\Psi_{dn} - \Psi_{d,n+1} e^{-i\chi_{n,n+1}}|^2 \right\} d\mathbf{r} \quad (1.26)
\end{aligned}$$

где $\mathbf{\Pi}_n = \nabla - i \frac{2\pi}{\Phi_0} \mathbf{A}_n$, $\mathbf{r} = (x, y)$, $\nabla = \partial/\partial \mathbf{r}$, $\mathbf{A}_n = (A_x(\mathbf{r}, z = ns), A_y(\mathbf{r}, z = ns))$, $\Psi_{dn}(\mathbf{r})$ и $\Psi_{sn}(\mathbf{r})$ — соответственно d - и s -компоненты параметра порядка в n -ом слое ($z = ns$), s — период слоистой структуры, фазовый фактор

$$\chi_{n,n+1} = \frac{2\pi}{\Phi_0} \int_{ns}^{(n+1)s} A_z dz.$$

Соответствующие уравнения для Ψ_{dn} и Ψ_{sn} примут вид:

$$\begin{aligned}
-a_d \Psi_{dn} + b_d |\Psi_{dn}|^2 \Psi_{dn} + \beta_1 |\Psi_{sn}|^2 \Psi_{dn} + \beta_2 \Psi_{sn}^2 \Psi_{dn}^* - K_d \mathbf{\Pi}_n^2 \Psi_{dn} \\
+ K_{sd} (\Pi_{ny}^2 - \Pi_{nx}^2) \Psi_{sn} + \frac{\rho_d}{2} (2\Psi_{dn} - \Psi_{d,n+1} e^{-i\chi_{n,n+1}} - \Psi_{d,n-1} e^{i\chi_{n-1,n}}) = 0 \quad (1.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_s \Psi_{sn} + b_s |\Psi_{sn}|^2 \Psi_{sn} + \beta_1 |\Psi_{dn}|^2 \Psi_{sn} + \beta_2 \Psi_{dn}^2 \Psi_{sn}^* - K_s \mathbf{\Pi}_n^2 \Psi_{sn} \\
+ K_{sd} (\Pi_{ny}^2 - \Pi_{nx}^2) \Psi_{dn} + \frac{\rho_s}{2} (2\Psi_{sn} - \Psi_{s,n+1} e^{-i\chi_{n,n+1}} - \Psi_{s,n-1} e^{i\chi_{n-1,n}}) = 0. \quad (1.28)
\end{aligned}$$

В этом разделе мы ограничимся наиболее интересным случаем области углов $\lambda_J/s \ll \text{tg } \theta \ll \lambda_c/s$ ($\lambda_J = \sqrt{2K_d/(\rho_d |a_d|)}$ — джозефсоновская длина, λ_c — глубина проникновения магнитного поля [107]), поскольку в этом диапазоне углов различие между квазидвумерной теорией Лоуренса–Дониака и трехмерной анизотропной теорией Гинзбурга–Ландау наиболее существенно. Индуцированная s -компонента локализована в области кора вихря и, следовательно, для углов $\text{tg } \theta \ll \lambda_c/s$ мы можем пренебречь эффектами экранировки и положить $\mathbf{A} = 0$. Развернем систему координат вокруг оси c таким образом, чтобы вихревая линия лежала в плоскости xz . Выражение для s -компоненты в первом порядке теории

возмущений (см. раздел 1.4) запишется в новых координатах следующим образом:

$$\Psi_{sn} = \frac{K_{sd}}{a_s} \left[\cos 2\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \Psi_{dn} - \sin 2\alpha \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \right) \Psi_{dn} \right]. \quad (1.29)$$

Вне области нормального кора можно пренебречь зависимостью $|\Psi_{dn}|$ от координат и положить $\Psi_{dn} = \exp(i\varphi_n)$, где φ_n — фаза d -компоненты параметра порядка в n -ом слое. Фазу φ_n можно определить из уравнения (1.27) для d -компоненты параметра, в котором s -компонента параметра порядка считается пренебрежимо малой. Таким образом, φ_n есть решение для вихря в обычном однокомпонентном слоистом сверхпроводнике в наклонном магнитном поле (см., например, работу [107]).

Как уже говорилось выше, в слоистых сверхпроводниках вихревая линия представляет собой набор двумерных вихрей (панкейков), связанных джозефсоновскими струнами. Существует несколько областей пространства в каждом слое с качественно разным поведением фазы φ_n [107] (см. Рис. 10). Нормальный кор ($r < \xi_{ab}$)

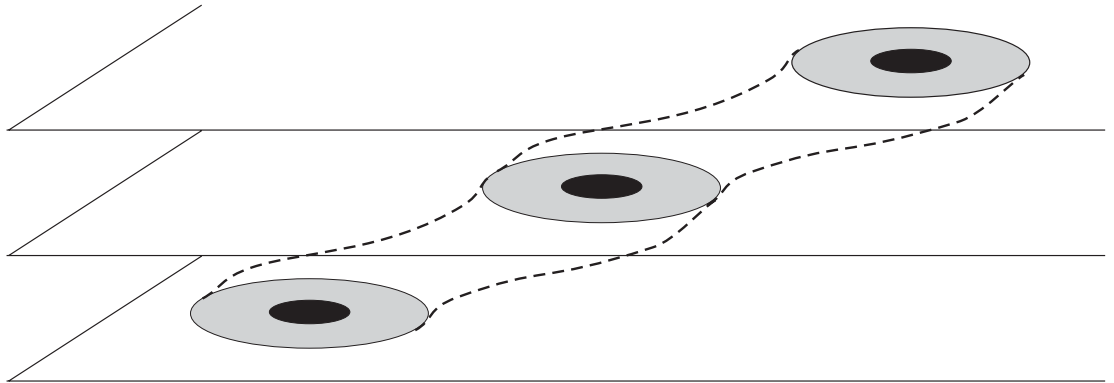


Рис. 10. Схематическое изображение нормальных коров (закрашены черным цветом), двумерных сердцевин (2D core) (закрашены серым цветом), джозефсоновских струн (ограничены штриховыми линиями) для вихря, угол наклона которого к оси c лежит в диапазоне $\lambda_J/s \ll \text{tg } \theta \ll \lambda_c/s$.

— область, где параметр порядка подавлен, двумерная сердцевина (2D core) — область, в которой $|\Psi_{dn}| = \text{const}$, в то время как фаза зависит от координат как у обычного двумерного вихря (панкейка). Внутри двумерной лондоновской области

($r < \lambda_J$) фаза определяется стандартным соотношением $\varphi_n = \arctg(x/y)$. В джозефсоновской струне ($\lambda_J \ll |x| \ll s \operatorname{tg} \theta$, $|y| < \lambda_J$) мы имеем $|\partial\varphi_n/\partial x| \ll |\partial\varphi_n/\partial y|$, следовательно, мы можем пренебречь производной $\partial\varphi_n/\partial x$ и воспользоваться линейной аппроксимацией для фазы:

$$\frac{\partial\varphi_n(x, y)}{\partial y} \simeq \frac{\varphi_n(x, \lambda_J) - \varphi_n(x, -\lambda_J)}{2\lambda_J} \simeq \frac{\pi}{2\lambda_J}. \quad (1.30)$$

Для трехмерной лондоновской области ($|x| \gg s \operatorname{tg} \theta$ и $|y| \gg \lambda_J$) мы имеем стандартное решение для вихря в анизотропном сверхпроводнике:

$$\varphi_n = \arctg\left(\frac{\gamma x}{\operatorname{tg} \theta y}\right), \quad (1.31)$$

где $\gamma = \lambda_J/s$ — параметр анизотропии.

Дополнительный вклад в функционал свободной энергии F , связанный с s -компонентой, равен

$$\begin{aligned} \Delta F(\theta, \alpha) = & -\frac{\Phi_0^2 s \xi_d^2 K_{sd}^2 |a_d|}{32\pi^3 \lambda_{ab}^2 K_d^2 a_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \\ & \times \int \left\{ \left(\left[\left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial y} \right)^2 \right] \cos 2\alpha - 2 \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x \partial y} \sin 2\alpha \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\left[\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2} \right] \cos 2\alpha - \left[\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y \partial x} \right] \sin 2\alpha \right)^2 \right\} d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

где $\xi_d = \sqrt{K_d/|a_d|}$ — длина когерентности d -компоненты параметра порядка в плоскости ab .

В рамках используемого приближения можно вычислить энергию единицы длины вихревой линии в интересующем интервале углов θ , когда $\lambda_J/s \ll \operatorname{tg} \theta$. Этот интервал выбран потому, что основной вклад в интеграл (1.32) вносят области джозефсоновских струн, и для других диапазонов углов поправка к H_{c1} , зависящая от угла α , пренебрежимо мала.

Поправка к H_{c1} , зависящая от угла α , своим существованием обязана индуцированной s -компоненте, определяется выражением:

$$\Delta H_{c1}(\theta, \alpha) = \frac{4\pi \cos \theta}{\Phi_0 s N} \{ \Delta F(\theta, \alpha) - \Delta F(\theta = 0, \alpha) \} \cong \frac{\pi \Phi_0 \xi_d^2 s K_{sd}^2 |a_d|}{\lambda_{ab}^2 \lambda_J^3 K_d^2 a_s} \sin \theta \cos^2 2\alpha, \quad (1.33)$$

где N — число сверхпроводящих слоев.

1.4.3. Угловая зависимость вязкости сингулярного вихря в сверхпроводнике с анизотропным тензором масс ($s \ll \xi_s$).

Очевидно, что взаимодействие между компонентами параметра порядка различной симметрии будет влиять не только на термодинамические, но и на динамические свойства смешанного состояния высокотемпературных сверхпроводников. В частности, дополнительные потери, связанные с релаксацией второй компоненты параметра порядка, могут привести к увеличению вязкости вихря. Здесь мы рассмотрим в рамках нестационарной теории Гинзбурга–Ландау, как меняется вязкость сингулярного вихря, благодаря появлению индуцированной s -компоненты при произвольной ориентации магнитного поля. Вязкое движение вихря в анизотропных сверхпроводниках с однокомпонентным параметром порядка рассматривалось в работах [115, 116].

Будем считать, что вихрь движется как целое в плоскости, перпендикулярной направлению магнитного поля, с постоянной скоростью \mathbf{V}_L , направленной под углом χ к оси x . Такое движение соответствует режиму вязкого течения вихря, когда сила Лоренца, действующая на вихрь, компенсируется силой вязкого трения, феноменологически учитывающей диссипацию $\mathbf{F}_{vis} = \eta \mathbf{V}_L$.

Стандартный способ, позволяющий описать медленную релаксацию некой величины ψ , состоит в том, чтобы связать между собой скорость изменения ψ с энергией системы соотношением:

$$\eta \frac{\partial \psi}{\partial t} = - \frac{\delta F}{\delta \psi^*}. \quad (1.34)$$

Такой подход справедлив, если характерное время изменения параметра порядка много больше времен, характерных для внутренних диссипативных процессов [114]. Необходимо учесть, что производная по времени должна быть градиентно-инвариантна и входить в (1.34) вместе со скалярным электрическим потенциалом Φ [9, 114]:

$$\eta_q \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_q = - \frac{\delta F}{\delta \Psi_q^*}, \quad (1.35)$$

где $q = s, d$.

В итоге, варьируя функционал (1.3), получаем систему нестационарных урав-

нений для Ψ_d и Ψ_s :

$$\begin{aligned}
-\eta_d \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_d &= a_d \Psi_d + b_d |\Psi_d|^2 \Psi_d + \alpha |\Psi_s|^2 \Psi_d + \beta \Psi_s^2 \Psi_d^* - K_d \mathbf{\Pi}^2 \Psi_d \\
&\quad - K_{sd} [\Pi_x^2 - \Pi_y^2] \Psi_s, \\
-\eta_s \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_s &= a_s \Psi_s + b_s |\Psi_s|^2 \Psi_s + \alpha |\Psi_d|^2 \Psi_s + \beta \Psi_d^2 \Psi_s^* - K_s \mathbf{\Pi}^2 \Psi_s \\
&\quad - K_{sd} [\Pi_x^2 - \Pi_y^2] \Psi_d,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

где η_d и η_s — релаксационные параметры для d - и s - компонент соответственно. Для полного описания динамических процессов необходимо уравнение для скалярного потенциала. Для этого запишем условия электронейтральности

$$\operatorname{div}(\mathbf{j}_s - \sigma_n \nabla \Phi) = \operatorname{div} \mathbf{j}_s - \sigma_n \nabla^2 \Phi = 0. \tag{1.37}$$

Здесь выбрана калибровка векторного потенциала $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, σ_n — проводимость нормальных электронов.

Используя уравнения (1.36) и выражения для сверхпроводящего тока (1.7), можно показать, что

$$\left[\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_d^*} \Psi_d^* + \frac{\delta F}{\delta \Psi_s^*} \Psi_s^* \right) - \text{к.с.} \right] = \frac{2ie}{\hbar} \operatorname{div} \mathbf{j}_s. \tag{1.38}$$

Таким образом, уравнение для электрического потенциала имеет вид

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{2ie}{\hbar \sigma_n} \left[\left(\eta_d \Psi_d^* \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_d + \eta_s \Psi_s^* \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_s \right) - c.c. \right]. \tag{1.39}$$

и вместе с уравнениями (1.36) образует замкнутую систему уравнений нестационарной теории Гинзбурга–Ландау для сверхпроводника с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типа спаривания.

Чтобы найти вязкость вихря, воспользуемся диссипативной функцией W (функцией потерь) [114]. Запишем изменение энергии сверхпроводника:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dt} &= - \int_V W dV - \oint_S \mathbf{j}_E d\mathbf{S} \\
&= \int_V \left\{ \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_d^*} \frac{\partial \Psi_d^*}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \Psi_s^*} \frac{\partial \Psi_s^*}{\partial t} \right) + c.c. \right] + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} \\
&\quad - \int_V \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} dV - \oint_S \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}] d\mathbf{S},
\end{aligned} \tag{1.40}$$

где \mathbf{J}_E — плотность потока энергии. Для массивного сверхпроводника поверхностным вкладом в потери можно пренебречь. Используя уравнения (1.36) можно показать, что стоящее под интегралом в уравнении (1.40) выражение

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_d^*} \frac{\partial \Psi_d^*}{\partial t} + \frac{\delta F}{\delta \Psi_s^*} \frac{\partial \Psi_s^*}{\partial t} \right) + c.c. \right] + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{2\eta_d}{\hbar} \left| \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_d \right|^2 \\ & + \frac{2\eta_s}{\hbar} \left| \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_s \right|^2 + \frac{2ie}{\hbar} \Phi \left[\left(\frac{\delta F}{\delta \Psi_d^*} \Psi_d^* + \frac{\delta F}{\delta \Psi_s^*} \Psi_s^* \right) - c.c. \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot \mathbf{j}_s. \end{aligned}$$

Используя выражение (1.38), получаем для функции потерь окончательное выражение:

$$W = \frac{2\eta_d}{\hbar} \left| \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_d \right|^2 + \frac{2\eta_s}{\hbar} \left| \left(\hbar \frac{\partial}{\partial t} + 2ie\Phi \right) \Psi_s \right|^2 + \sigma_n \left(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2. \quad (1.41)$$

Таким образом, потери системы состоят из джоулевых потерь (последнее слагаемое в (1.41)) и потерь, связанных с релаксацией двух компонент параметра порядка. С другой стороны, поскольку эти потери связаны с вязким стационарным движением вихря, то $\int_V W dV = \eta V_L^2$, где η — вязкость вихря, а \mathbf{V}_L — скорость вихря. Следовательно, зная функцию потерь W , можно найти вязкость вихря.

Далее для удобства вновь перейдем к безразмерным переменным, введенным на стр. 29, и запишем в безразмерном виде нестационарные уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$\begin{aligned} u_d \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_d &= \Psi_d - |\Psi_d|^2 \Psi_d - \beta_2 |\Psi_s| \Psi_d - \beta_3 \Psi_s^2 \Psi_d^* + \Pi^2 \Psi_d \\ &\quad + C (\Pi_x^2 - \Pi_y^2) \Psi_s, \\ u_s \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_s &= -a(T) \Psi_s - \beta_1 |\Psi_s|^2 \Psi_s - \beta_2 |\Psi_d| \Psi_s - \beta_3 \Psi_d^2 \Psi_s^* + k \Pi^2 \Psi_s \\ &\quad + C (\Pi_x^2 - \Pi_y^2) \Psi_d, \\ \nabla^2 \Phi &= -\frac{i}{2} \left[\left(u_d \Psi_d^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_d + \Psi_s^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_s \right) + \text{к.с.} \right]. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Здесь также введены единицы: $\hbar^2 \sigma_n b_d / (8e^2 a_d^2 \xi_d^2)$ для времени и $4ea_d^2 \xi_d^2 / (\hbar \sigma_n b_d)$ для электрического потенциала. Безразмерное выражение для функции потерь измеряемой в единицах $8e^2 K_d |a_d|^3 / (\sigma_n \hbar^2 b_d^2)$ записывается следующим образом:

$$W = 2 \left[u_d \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_d \right|^2 + u_s \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi_s \right|^2 + \left(\nabla \Phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (1.43)$$

Рассматривая случай, когда температура близка к T_{cd} , вновь можно воспользоваться теорией возмущения по малому температурному параметру $1/a(T)$. Также будем считать, что скорость движения вихря мала, то есть внешний транспортный ток существенно меньше тока распаривания. В этом случае все величины, характеризующие сингулярный вихрь, могут быть разложены в ряд по малой величине скорости

$$f(\mathbf{r} - \mathbf{V}_L t) = f^{(0)}(\mathbf{r} - \mathbf{V}_L t) + f^{(1)}(\mathbf{r} - \mathbf{V}_L t),$$

где $f^{(0)}$ – решение статической задачи, а поправки $f^{(1)}$ к распределениям Ψ_s , Ψ_d в движущейся системе отсчета малы линейно по V_L . Фигурирующие в уравнениях (1.36), (1.39), (1.41) производные по времени могут быть записаны в движущейся системе отсчета как

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -(\mathbf{V}_L \nabla) \Psi,$$

то есть, определены решением статической задачи. Учтем, что электрическое поле генерируется движением вихрей и поэтому потенциал Φ пропорционален скорости и должен определяться из соответствующего неоднородного линейного уравнения. В уравнении для потенциала члены, связанные с s -компонентой, имеют второй порядок малости по температуре, поэтому ими можно пренебречь и тогда:

$$\nabla^2 \Phi = u_d \left| \Psi_d^{(0)} \right|^2 \Phi + \frac{i}{2} u_d \left[\Psi_d^{(0)*} (\mathbf{V}_L \nabla) \Psi_d^{(0)} - c.c. \right]. \quad (1.44)$$

Полученное уравнение есть уравнение Гельмгольца для неоднородной среды с источником. Как видно из полученного уравнения величина $1/\sqrt{u_d}$ определяет глубину экранировки электрического поля λ_E ($1/\sqrt{u_d} = \lambda_E/\xi_d$). Вновь преобразуем систему координат согласно (1.16). Воспользовавшись простейшей моделью прямоугольного (жесткого) кора

$$\Psi_d(r) = \begin{cases} 0, & r < 1 \\ e^{i\theta}, & r > 1 \end{cases}, \quad (1.45)$$

получим решение уравнения (1.44) в пределе малых λ_E ($u_d \gg 1$):

$$\Phi(r, \varphi) = V_L r \left[\sin \chi \cos \varphi - \cos \chi \sin \varphi \left(\cos^2 \tilde{\theta} + \gamma_d^2 \sin^2 \tilde{\theta} \right) \right], \quad r < 1 \quad (1.46)$$

$$\Phi(r, \varphi) = \frac{V_L}{r} \left[\sin \chi \cos \varphi - \cos \chi \sin \varphi \left(\cos^2 \tilde{\theta} + \gamma_d^2 \sin^2 \tilde{\theta} \right) \right], \quad r > 1. \quad (1.47)$$

Теперь вычислим функцию потерь W и найдем тензор вязкости. Из формулы (1.17) видно, что второе слагаемое в выражении для диссипативной функции (1.41) имеет второй порядок малости по температуре и этим вкладом можно пренебречь. Поскольку для нахождения вязкости нам нужно взять интеграл по площади от функции потерь, в первую поправку к вязкости по температуре дает вклад только гармоника d_1 , так как остальные гармоники ортогональны по углу к D_1 и при интегрировании по углу дадут нулевой вклад. Подставляя d -компоненту в виде $\Psi_d = (D_1(r) + d_1(r)) \exp(i\varphi)$ получим для функции потерь в нулевом и первом порядке теории возмущений следующие соотношения:

$$W_0 = 2u_d \left[V_L^2 \left(\frac{dD_1}{dr} \right)^2 + D_1^2 \frac{V_L^2}{r^2} \left(\left(\cos^2 \tilde{\theta} + \gamma_d^2 \sin^2 \tilde{\theta} \right) \cos \chi \sin \varphi - \sin \chi \cos \varphi \right)^2 \right. \\ \left. + D_1^2 \Phi(r, \varphi) \frac{V_L}{r} \left(\left(\cos^2 \tilde{\theta} + \gamma_d^2 \sin^2 \tilde{\theta} \right) \cos \chi \sin \varphi - \sin \chi \cos \varphi \right) \right] \quad (1.48)$$

$$W_1 = 4u_d \Phi(r, \varphi) D_1 d_1 \frac{V_L}{r} \left(\left(\cos^2 \tilde{\theta} + \gamma_d^2 \sin^2 \tilde{\theta} \right) \cos \chi \sin \varphi - \sin \chi \cos \varphi \right) \quad (1.49)$$

Проинтегрировав полученные выражения, получаем, что первая поправка к вязкости имеет следующий диагональный вид в системе координат (1.16):

$$\hat{\eta}_1 = \frac{9\pi \hbar \eta_d}{2b_d} \frac{|a_d(T)| K_{sd}^2}{a_s(T) K_d} g(\alpha, \theta, \chi) \begin{pmatrix} \cos \theta \sqrt{1 + \gamma_d^2 \operatorname{tg}^2 \theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.50)$$

$$g = \left[\cos^2 2\alpha \left(\sin^4 \tilde{\theta} + \frac{7}{2} (1 + \cos^2 \tilde{\theta})^2 \right) + 14 \sin^2 2\alpha \cos^2 \tilde{\theta} \right] \\ \times \left(\left(\frac{1 - \gamma_d^2 \operatorname{tg}^2 \theta}{1 + \gamma_d^2 \operatorname{tg}^2 \theta} \right)^2 \cos^2 \chi + \sin^2 \chi \right).$$

В отличие от обычных сверхпроводников, у которых кривизна температурной зависимости вязкости имеет отрицательный знак, у сверхпроводников с нетривиальным спариванием она может быть положительной, что объясняется появлением дополнительных потерь, связанных с присутствием второй компоненты параметра порядка. Причем знак кривизны температурной зависимости вязкости не зависит от модели кора вихря. Такая температурная зависимость вязкости может служить одним из критериев экспериментального обнаружения сверхпроводимости с двухкомпонентным параметром порядка. Также дополнительный вклад в вязкость, связанный с появлением индуцированной s -компоненты в коре вихря обла-

дает тетрагональной симметрией при изменении направления магнитного поля в плоскости ab .

1.5. Структура несингулярного вихря в высокотемпературных сверхпроводниках.

Как упоминалось во Введении, нелинейное взаимодействие в высокотемпературных сверхпроводниках может приводить к спонтанному появлению s -компоненты в области, где d -компонента подавлена. Появление второй компоненты параметра порядка вблизи межгранульных границ в высокотемпературных сверхпроводниках, где основная компонента параметра порядка подавлена, исследовалась аналитически для сверхпроводников с $d_{x^2-y^2} + d_{xy}$ -типом спаривания в работе [24]. В этой статье было показано, что образующиеся свойства нарушают симметрию относительно обращения времени и могут иметь отношение к вихрям с дробным числом квантов магнитного потока, наблюдавшихся на трикристаллических границах [117].

Для изучения спонтанного появления s -компоненты параметра порядка в коре d -вихря (где Ψ_d сильно подавлена) запишем уравнение Гинзбурга–Ландау, линеаризованное по Ψ_s , в простейшем случае $C = 0$, $\beta_3 = 0$:

$$-k\nabla^2\Psi_s + \beta_2|\Psi_d|^2\Psi_s = -a(T)\Psi_s, \quad (1.51)$$

где Ψ_d описывает вихревое решение в рамках обычной однокомпонентной теории Гинзбурга–Ландау.

Необходимо отметить, что анализ случая, когда отсутствует градиентное смешивание различных компонент параметра порядка ($C = 0$), представляет интерес с точки зрения выяснения механизма образования несингулярных вихрей и может рассматриваться как стартовая позиция для дальнейшего изучения вихревых структур в реальных системах, по-видимому, обладающих градиентным смешиванием разных компонент параметра порядка ($C \neq 0$), рассматриваемых далее.

Основное состояние уравнения Шредингера (1.51) будет определять форму и критическую температуру появления зародыша s -компоненты в коре вихря d -

компоненты, определяющим вид "потенциальной ямы". Очевидно, что локализованная в коре вихря s -компонента параметра порядка может появиться в коре d -вихре если $\beta_2 > 0$. Представляя Ψ_s в виде суперпозиции угловых гармоник (1.13) можно заключить, что низшему значению "энергии" должна соответствовать гармоника S_0 с нулевым угловым моментом, поскольку все остальные гармоники S_n добавляют центробежное слагаемое kn^2/r^2 в потенциальную энергию, и тем самым, обладают большей энергией.

Для определения температуры T^* фазового перехода в состояние, где энергетически выгодными являются несингулярные вихри, снова воспользуемся аппроксимацией (1.14). Рассмотрим два предельных случая — мелкой и глубокой потенциальной ямы.

Если характерный масштаб L волновой функции Ψ_s много меньше размера кора d -вихря R , можно воспользоваться более простым приближением для "потенциальной ямы": $|\Psi_d|^2 \simeq r^2/R^2$, и тогда уравнение (1.51) будет соответствовать уравнению Шредингера для двумерного квантового осциллятора, следовательно,

$$-a(T^*) = 2\sqrt{k\beta_2}/R, \quad (1.52)$$

$$\Psi_s \propto \exp\{-r^2/(2L^2)\}, \quad (1.53)$$

где $L = \sqrt[4]{kR^2/\beta_2}$. Этот результат справедлив до тех пор, пока $L \ll R$ (то есть, для случая $\beta_2 \gg k/R^2$).

В противоположном случае, когда $\beta_2 \ll k/R^2$, мы получаем уравнение для частицы в двумерной потенциальной яме малой глубины [118], что дает для "уровня энергии" выражение

$$-a(T^*) \simeq \beta_2. \quad (1.54)$$

Такие простые соображения находятся в хорошем согласовании с результатами численного моделирования, проведенных на основе нестационарной теории Гинзбурга–Ландау. Структура зародыша s -компоненты в коре элементарного вихря d -компоненты, описываемая функцией (1.53), хорошо совпадает с результатами численного моделирования уравнений (1.36) и (1.39) для случая $C = 0$ (Рис. 11).

Основываясь на полученных выше выражениях (1.52), (1.54) и на результатах численного моделирования, предлагается следующая интерполяционная формула

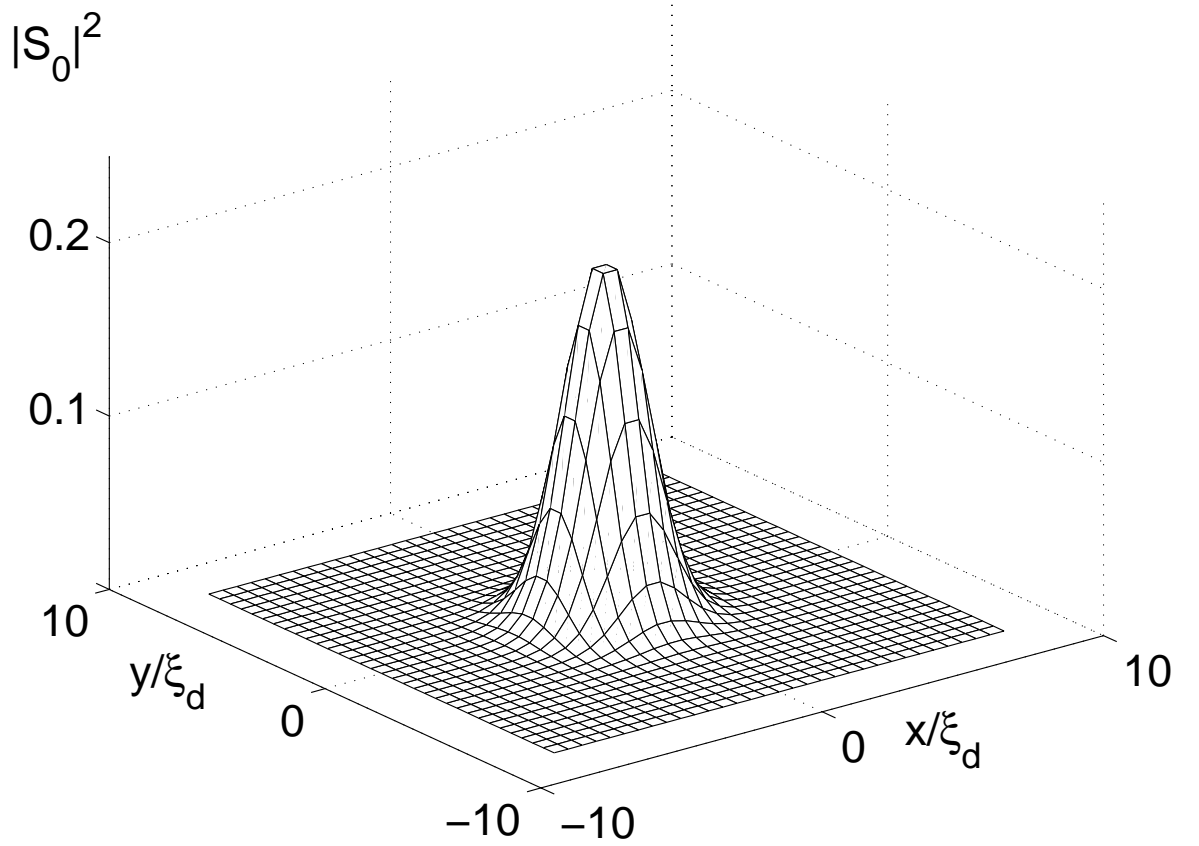


Рис. 11. Характерный вид зародыша s -компоненты (S_0) в коре вихревой линии (результат численного моделирования). Параметры: $\alpha_s/\alpha_d = 3.2$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.9$, $T/T_{cd} = 0.68$, $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 0$, $k = 0.5$, $C = 0$.

для линии фазового перехода на всей плоскости β_2-T (Рис. 12), которая разделяет области существования сингулярных и несингулярных вихрей:

$$\beta_2 \simeq -a(T^*) \left(1 - \frac{a(T^*)R^2}{4k} \right). \quad (1.55)$$

Это выражение справедливо для двух предельных случаев рассмотренных выше, а также в частном случае параметров ($a = -1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 0$, $k = 1$, $C = 0$), рассмотренном в работе [15]. Также такая форма кривой фазового перехода хорошо согласуется с данными численного моделирования, которое проводилось для следующего набора параметров $\alpha_s/\alpha_d = 1.25$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.8$, $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 0$, $k = 1$,

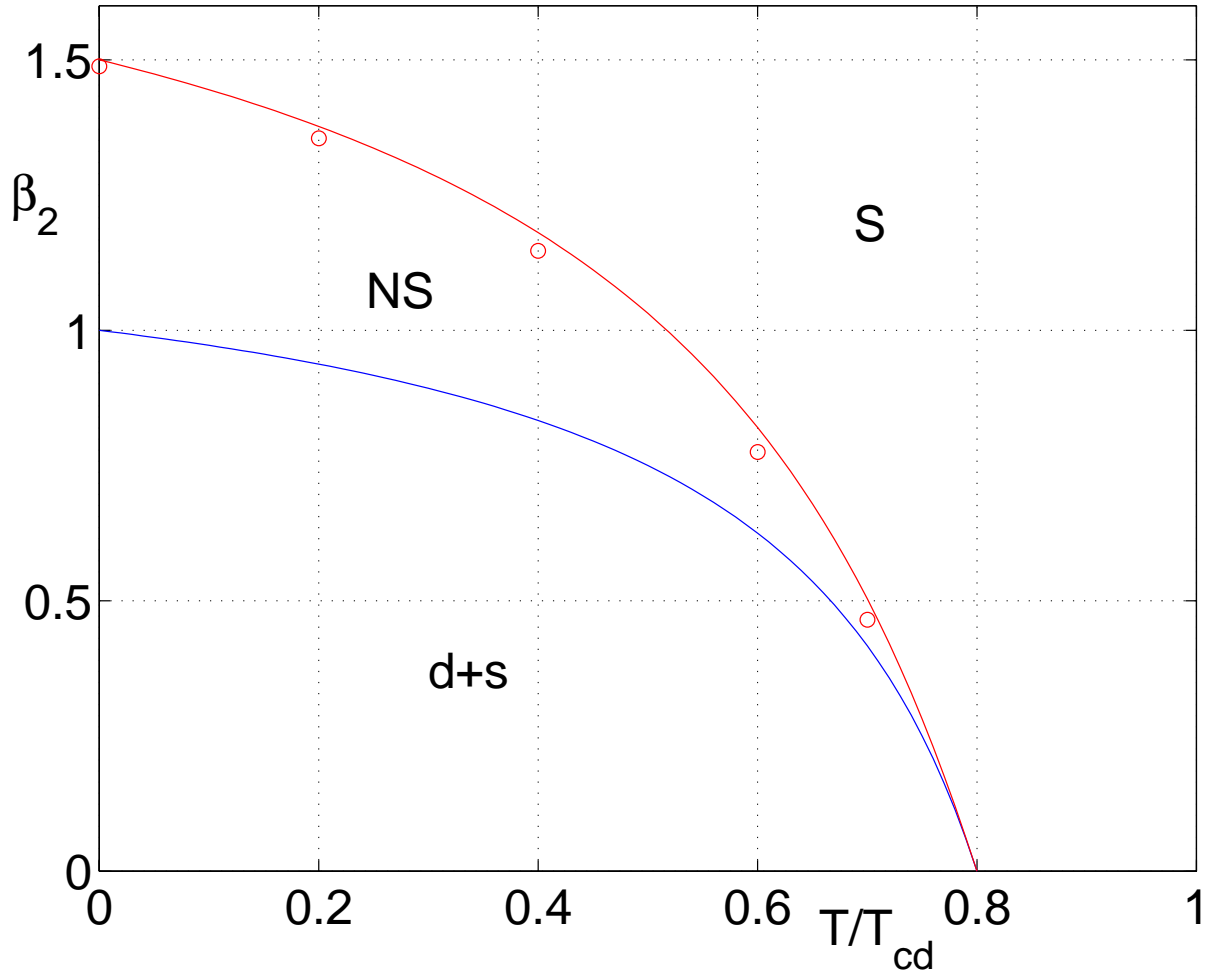


Рис. 12. Фазовая диаграмма смешанного состояния на плоскости β_2 – T для параметров: $\alpha_s/\alpha_d = 1.25$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.8$, $\beta_1 = 1$, $\beta_3 = 0$, $k = 1$, $C = 0$. Несингулярные вихри являются энергетически выгодными в области NS, сингулярные — в области S. Линия фазового перехода, их разделяющая, получена из формулы (1.55), кругами показаны значения, полученные для линии фазового перехода из численных расчетов. Область $d + s$ соответствует области параметров, где реализуется $(d + s)$ -однородные состояния (см. Рис. 3b)) с вихревыми состояниями, описанными в [109].

$C = 0$ при различных температурах T .

Более детальный анализ структуры зародыша s -компоненты может быть проведен, используя метод пробных функций. Вновь, предполагая $\Psi_s(\mathbf{r}) = S_0(r)$, вы-

делим часть свободной энергии, зависящей от гармоник S_0 :

$$\Delta F = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ a(T)|S_0|^2 + \frac{\beta_1}{2}|S_0|^4 + \beta_2|\Psi_d|^2|S_0|^2 + k|\nabla S_0|^2 \right\} r dr d\theta, \quad (1.56)$$

где свободная энергия F записана в единицах $a_d^2 \xi_d^2 / b_d$. Подставляя пробную функцию вида

$$S_0 = A \exp(-r^2/2L^2), \quad (1.57)$$

найдем минимум функционала (1.56), вновь используя аппроксимацию (1.14) для $\Psi_d(\mathbf{r})$. Минимизируя энергию по вариационным параметрам A и L , получаем:

$$\begin{aligned} \beta_2^* &\simeq -a(T) \\ A &\simeq 2\sqrt{\frac{\beta_2^* - \beta_2}{\beta_1}} \\ L &\simeq \sqrt{\frac{k}{\beta_2^* - \beta_2}} \end{aligned}$$

для случая $L/R \gg 1$ ($\beta_2 \ll k/R^2$) и

$$\begin{aligned} \beta_2^* &\simeq \frac{a^2(T)R^2}{4k} \\ A &\simeq \sqrt{\frac{2\sqrt{k}(\beta_2^* - \beta_2)}{\beta_1 R \sqrt{\beta_2^*}}} \\ L &\simeq \sqrt[4]{\frac{kR^2}{\beta_2^*}}, \end{aligned}$$

когда $L/R \ll 1$ ($\beta_2 \gg k/R^2$). Для всей области параметров β_2 можно использовать следующие интерполяционные выражения:

$$\begin{aligned} A &\simeq 2\sqrt{\frac{\sqrt{k}(\beta_2^* - \beta_2)}{\beta_1(\sqrt{k} + 2R\sqrt{\beta_2^*})}} \\ L &\simeq R\sqrt{\sqrt{\frac{k}{\beta_2^* R^2}} + \frac{k}{(\beta_2^* - \beta_2)R^2}}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Для линии фазового перехода из процедуры минимизации снова получается выражение (1.55).

В случае $C \neq 0$, s -компонента также появляется в коре вихря благодаря механизму рассмотренному в разделе 1.3. Как было ранее продемонстрировано, это приводит к появлению пяти дополнительных вихрей s -компоненты, чье

расположение является тетрагонально симметричным. Если параметры теории Гинзбурга–Ландау (в частности, температура) таковы, что в центре вихря спонтанным образом появляется зародыш s -компоненты с нулевой циркуляцией фазы, это приводит к сдвигу пяти s -вихрей относительно d -вихря. Такие смещения нарушают тетрагональную симметрию вихревой линии, что было проверено, в частности, с помощью численного моделирования структуры вихревого кора (см. Рис. 13 и Рис. 14), проведенных в соответствии с подходом изложенном в Приложении.

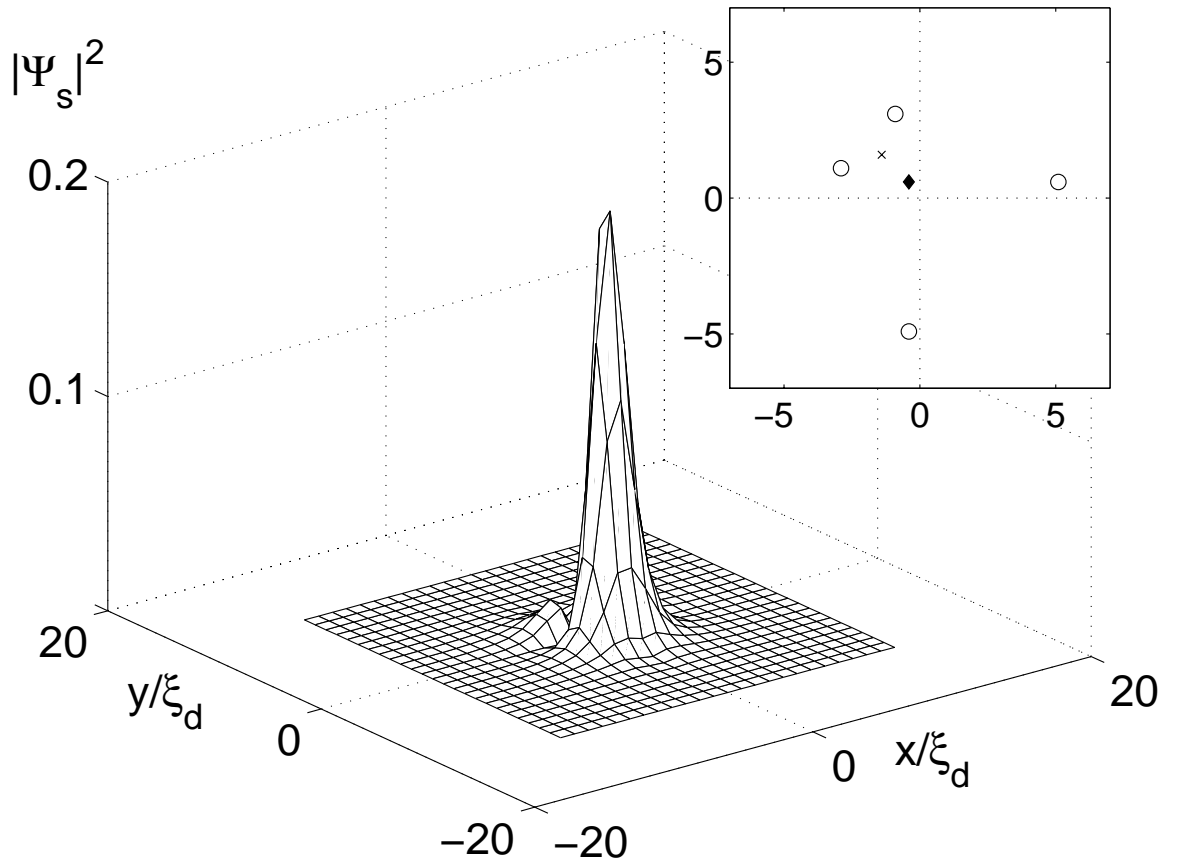


Рис. 13. Типичная структура s -компоненты параметра порядка в коре несингулярного вихря (результаты численного моделирования). Параметры: $\alpha_s/\alpha_d = 3.2$, $T_{cs}/T_{cd} = 0.9$, $T/T_{cd} = 0.68$, $\beta_1 = 9$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 0$, $k = 0.5$, $C = 0.6$. На вставке показаны положения d -вихря с циркуляцией фазы $N = +1$ (черный квадрат), s -вихрей с $N = +1$ (круги) и с $N = -1$ (крест).

Даже в случае $C \neq 0$ несингулярные вихри с нарушенной тетрагональной сим-

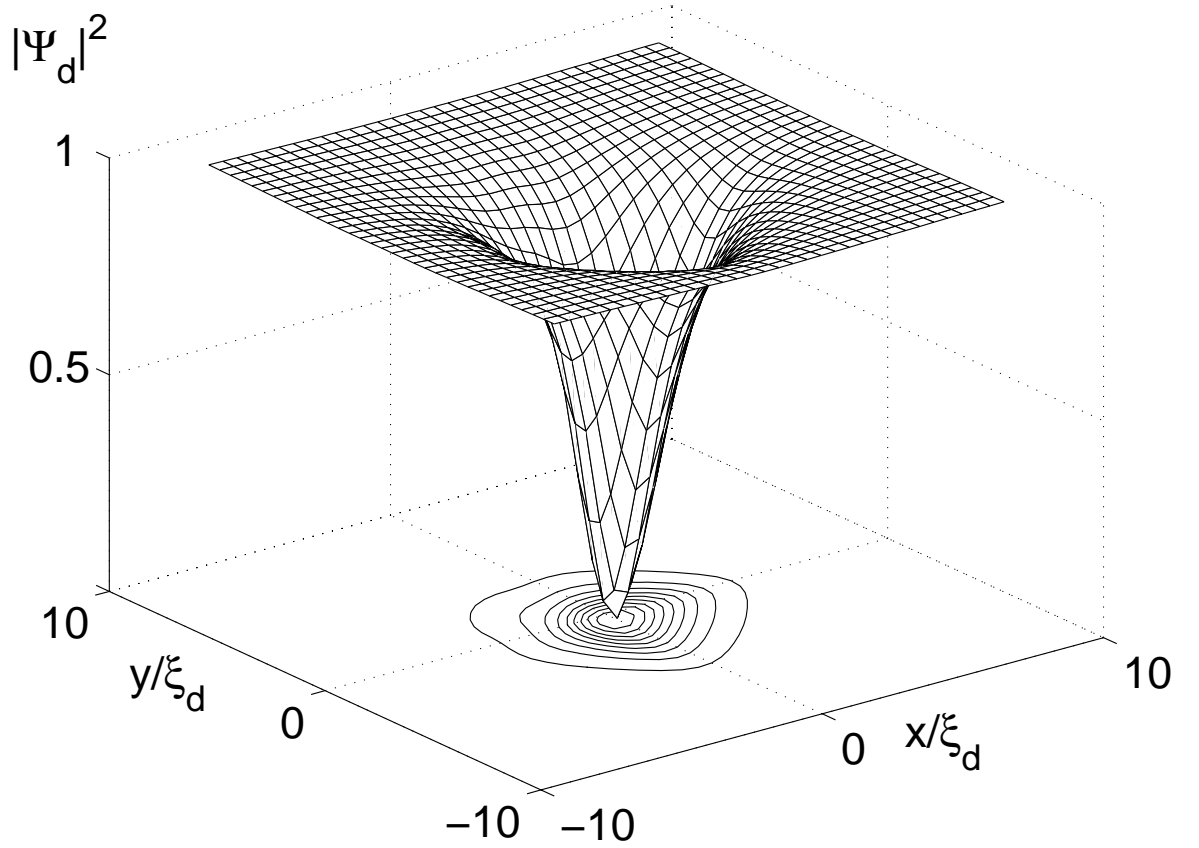


Рис. 14. Структура d -компоненты параметра порядка в несингулярном вихре (результаты численного моделирования). Параметры те же, что и на Рис. 13.

метрией остаются энергетически выгодными в определенной области параметров, хотя в этом случае область их существования на плоскости β_2-T становится уже, и кривая фазового перехода (сплошная линия на Рис. 12) сдвигается вниз.

Для описания структуры несингулярного вихря, показанной на Рис. 13 в случае $C \neq 0$, использовалось следующее выражение, скомбинированное из решения для сингулярного вихря (1.15) и пробной функции зародыша (1.57):

$$\Psi_s = Ae^{i\varphi}e^{-r^2/2\lambda^2} + S_3(r)e^{3i\theta} + S_{-1}(r)e^{-i\theta}, \quad (1.59)$$

где A , λ берутся из выражения (1.58). В рамках предположенного вида решения для Ψ_s (1.59) нельзя получить значение фазы φ , которое определяет направление сдвига s -вихрей. В то же время из результатов численного моделирования

(см. Рис. 13) следует, что $\varphi = \pi/4$, поскольку именно при этом значении форма s -компоненты, основанная на выражении (1.59), совпадает качественно с результатами численного моделирования (см. Рис. 13).

Очевидно, что взаимодействие различных компонент параметра порядка меняет структуру как и s -компоненты, так и d -компоненты. Компонента параметра порядка d -типа также теряет тетрагональную симметрию. Пространственное распределение d -компоненты в несингулярном вихре приведено на Рис. 14. Заметим, что дальнейший рост зародыша s -компоненты может привести к взаимному уничтожению двух s -вихрей (с завихренностями $N = +1$ и $N = -1$), которое приведет к расположению оставшихся трех s -вихрей в виде равнобедренного треугольника.

Таким образом, можно заключить что несингулярные вихри в сверхпроводниках с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания не обладают тетрагональной симметрией, присущей сингулярным вихрям, что должно привести к ряду интересных эффектов, связанных с анизотропией динамических характеристик в ab -плоскости.

Повсюду в коре вихря сверхпроводящая щель отлична от нуля, что указывает на нетривиальный спектр квазичастиц внутри несингулярных вихревых линий. Также следует ожидать, что появление зародыша s -компоненты в коре вихря должно приводить к образованию расщепленного кора, то есть двух локальных минимумов щелевой функции $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в реальном пространстве \mathbf{r} . Заметим, что ранее вихри с расщепленным кором исследовались для ^3He [21, 22] и в сверхпроводниках с тяжелыми фермионами [15, 16].

В заключении отметим, что несингулярные вихри, аналогичные рассмотренным в этом разделе, могут также быть получены и для сверхпроводников с $(d_{xy} + s)$ - или $(d_{x^2-y^2} + d_{xy})$ - типом спаривания, ввиду того, что характер нелинейного взаимодействия не зависит от конкретной симметрии компонент параметра порядка. Изменится лишь характер взаимного расположения элементарных вихрей различных компонент.

Результаты этого раздела были проверены с помощью численного моделирования описанного в Приложении.

1.6. Структура нулей сверхпроводящей щели в корах сингулярного и несингулярного вихрей.

В соответствии с общей теорией [23], фазовый переход между сингулярными и несингулярными вихрями может вызывать сдвиг нулей локальной функции сверхпроводящей щели $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в расширенном (\mathbf{k}, \mathbf{r}) пространстве. В терминах задачи Купера волновой вектор \mathbf{k} связан с относительным движением двух электронов в куперовской паре, а координата \mathbf{r} есть координата центра масс самой куперовской пары. В этом разделе будут исследованы положения этих нулей в корах вихрей для сверхпроводников с $(d + s)$ -типом спаривания. Для этого воспользуемся полуклассическим выражением для квазичастичного спектра:

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \sqrt{(E(\mathbf{k}) - E_F)^2 + |\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})|^2} = 0, \quad (1.60)$$

где $E(\mathbf{k})$ — спектр нормального металла, E_F — уровень Ферми. Энергия квазичастиц будет равна нулю, если $E(\mathbf{k}) = E_F$, что для цилиндрической поверхности Ферми соответствует $|\mathbf{k}| = k_F$ (k_F — импульс Ферми), и одновременно $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0$. Таким образом положение нулей задается неявной параметрической функцией, где параметром является импульс квазичастицы на поверхности Ферми. Чтобы найти положение нулей, надо решить уравнение $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0$ с условием $|\mathbf{k}| = k_F$ для каждого направления квазиимпульса. При изменении квазиимпульса в реальном пространстве траектория решения этого уравнения $\mathbf{r}(\mathbf{k})$ описывает линию нулей щелевой функции.

Если сверхпроводящая щель меняется слабо на масштабе размера куперовской пары, можно записать сверхпроводящую щель в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) &= \Delta_0 [\Psi_s(\mathbf{r})g_s(\mathbf{k}) + \Psi_d(\mathbf{r})g_d(\mathbf{k})], \\ g_s(\mathbf{k}) &= \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_F^2} \quad \text{и} \quad g_d(\mathbf{k}) = \frac{k_x^2 - k_y^2}{k_F^2}. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Рассмотрим обычный s -вихрь ($\Psi_d(\mathbf{r}) \equiv 0$), в этом случае существует единственная точка $\mathbf{r} = 0$ в центре вихря (Рис. 15(a)), где $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = 0$ для всех направлений импульса квазичастицы. В случае d -вихря ($\Psi_s(\mathbf{r}) \equiv 0$), присутствует та же самая точка $\mathbf{r} = 0$, где функция $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \Psi_d(\mathbf{r})g_d(\mathbf{k}) = 0$ для всех направлений импульса

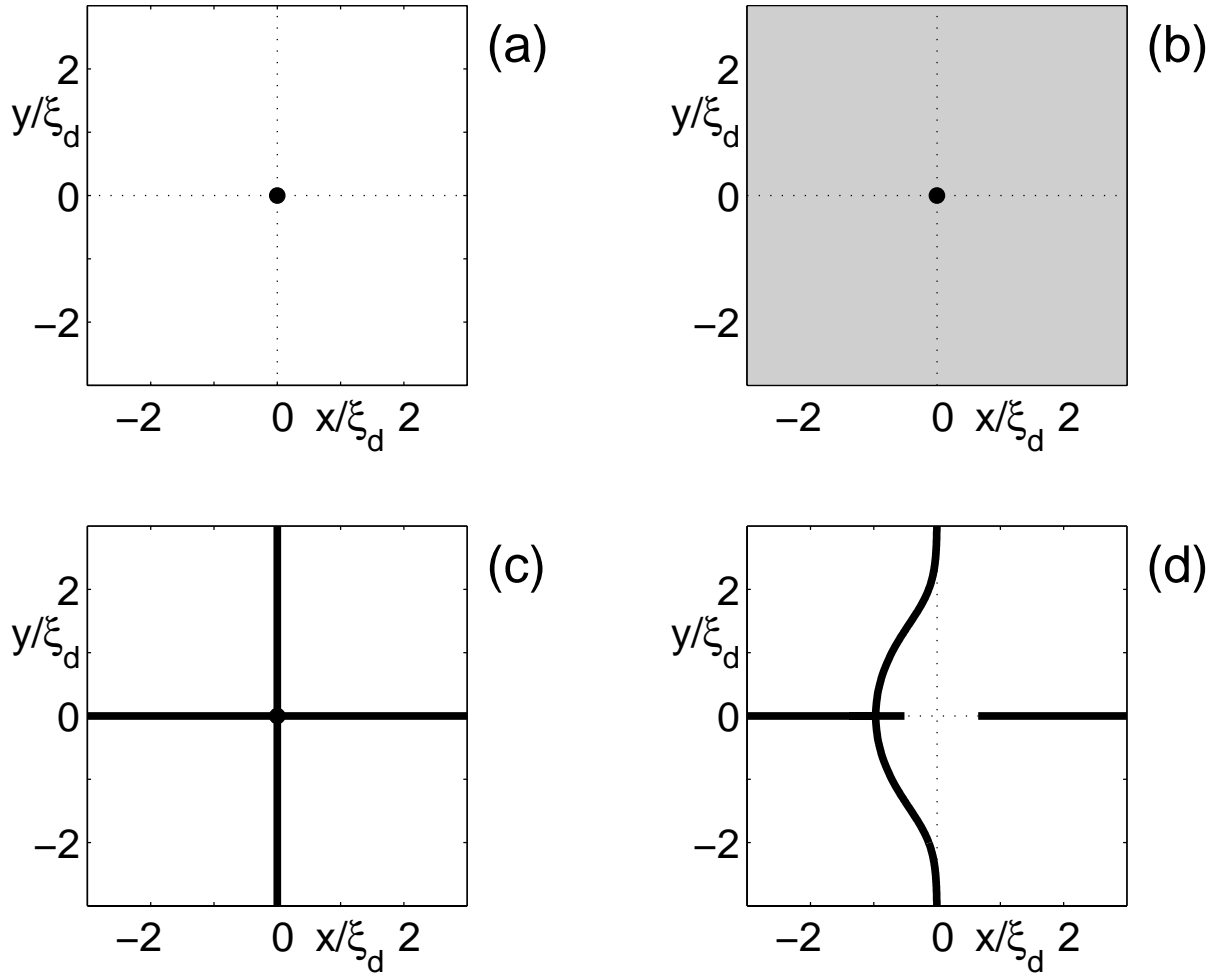


Рис. 15. Положение нулей щелевой функции $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в коре вихря: а) обычный s -вихрь, б) вихрь в сверхпроводнике с $d_{x^2-y^2}$ -типом спаривания, в) сингулярный вихрь в сверхпроводнике с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания и д) несингулярный вихрь в сверхпроводнике с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания.

\mathbf{k} . Однако, в отличие от s -вихря, энергия квазичастиц $\varepsilon(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ обращается в ноль также и для выделенных направлений импульса $|k_x| = |k_y|$ во всем пространстве \mathbf{r} , (изображено серым фоном на Рис. 15(b)), что, по-видимому, отражает формирование квазичастицами с направлением импульса близкому к направлению на линию нулей (где $g_d(\mathbf{k}) = 0$) конечной плотности состояний при энергии Ферми E_F вдали от кора вихря [93].

Рассмотрим как меняется положение нулей щелевой функции $\Delta(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ в корах

сингулярного и несингулярного вихрей в сверхпроводниках с $(d_{x^2-y^2} + s)$ -типом спаривания, когда в центре вихревой линии сосуществуют две компоненты параметра порядка с различной симметрией спаривания в импульсном пространстве, в простейшем случае, когда магнитное поле направлено вдоль кристаллографической оси c . Индуцированная в коре сингулярного вихря s -компонента параметра порядка подавляет конечную плотность состояний при энергии Ферми E_F , созданную d -компонентой и формирует (в полуклассическом приближении) четыре линии нулей щели (Fig.15(c)), проходящие через элементарные s -вихри. Появление зародыша s -компоненты в центре несингулярного вихря приводит к выталкиванию линий нулей из кора вихря (Fig.15(d)) и, соответственно, должно приводить к формированию асимметричной плотности состояний в коре вихря. Такая асимметричная структура плотности состояний может иметь отношение к вихрям с расщепленным вихревым кором, которые наблюдались в экспериментах по сканирующей туннельной микроскопии смешанного состояния в $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_{8+\delta}$ [119]. Расстояние между двумя наблюдаемыми максимумами плотности состояний составляло величину порядка 1 нм. Таким образом, можно предположить, что наблюдаемые в работе [119] вихревые состояния с нарушенной тетрагональной симметрией и асимметричной двухпиковой структурой вихревого кора могут быть несингулярными вихрями.

1.7. Выводы.

Приведем основные результаты, полученные в данной главе:

- В рамках теории Гинзбурга–Ландау для сверхпроводников с $(d + s)$ -типом спаривания решена задача о структуре сингулярного вихря при произвольной ориентации магнитного поля относительно кристаллографических осей. Показано, что симметрия вихревого решения при отклонении магнитного поля от оси c на угол θ снижается с C_4 до C_2 . При отклонении магнитного поля на угол больший θ_{max} , находящийся в центре сингулярного вихря s -антивихрь аннигилирует с s -вихрем.
- Найдены угловые зависимости нижнего критического магнитного поля H_{c1}

и тензора вязкости. Показано, что в плоскости ab эти зависимости обладают тетрагональной симметрией.

- Предсказано существование несингулярных вихрей в высокотемпературных сверхпроводниках и исследована их структура. Показано, что даже в случае ориентации магнитного поля вдоль оси c , такое вихревое решение не обладает тетрагональной симметрией. Найдена критическая температура фазового перехода второго рода от сингулярных вихрей к несингулярным.
- В рамках полуклассического приближения исследована структура нулей спектра квазичастиц и показано, что при переходе от сингулярных вихрей к несингулярным происходит выталкивание нулей щели из кода несингулярного вихря.

Приведенные в этой главе результаты также опубликованы автором в работах (i)–(v) и (viii)–(ix).

2 Вихревые состояния и намагниченность мезоскопических сверхпроводников квадратной формы

2.1. Постановка задачи.

В этой главе рассматривается задача о структуре смешанного состояния в квадратном мезоскопическом сверхпроводнике с дефектами во всем интервале магнитных полей и изучается влияние процессов перестройки вихревого состояния при изменении внешнего однородного поля на кривую намагничивания $M(H)$. Рассмотрим тонкую пленку сверхпроводника с толщиной $d_s < \xi, \lambda$, помещенную в перпендикулярное к ее поверхности однородное магнитное поле H . Предполагается, что $d_s \ll \lambda_{eff}$ ($\lambda_{eff} = \lambda^2/d_s$ — эффективная глубина проникновения магнитного поля в тонкую пленку, то есть характерный масштаб изменения магнитного поля). Рассмотрим как меняется смешанное состояние при изотермическом намагничивании образца, последовательно изменяя внешнее однородное магнитное поля от $H = 0$ до поля соответствующего полному подавлению сверхпроводимости, и проходя по кривой намагничивания все состояния: как термодинамически устойчивые (отвечающие условию глобального минимума энергии), так и метастабильные состояния. При этом будем учитывать, что реальные сверхпроводники содержат дефекты и тем самым понижают тетрагональную симметрию задачи.

Как правило, при экспериментальных исследованиях мезоскопических эффектов в сверхпроводниках с размерами порядка несколько длин когерентности ξ используются низкотемпературные сверхпроводники с большой длиной когерентности, например, Al с $\xi(T = 0) \approx 1500$ нм [76]. Поэтому для теоретического описания свойств смешанного состояния в мезоскопических сверхпроводниках можно использовать однокомпонентную теорию Гинзбурга–Ландау для s -типа спаривания с функционалом вида:

$$F = \int_S \left[a(T)|\Psi|^2 + \frac{b}{2}|\Psi|^4 + \frac{\hbar^2}{4m^*} \left| \left(\nabla - \frac{2\pi i}{\Phi_0} \mathbf{A} \right) \Psi \right|^2 \right] dx dy,$$

где Ψ — параметр порядка, $a(T) = \alpha(T - T_c)$, T_c — критическая температура, m^* — эффективная масса электрона. Далее в этой главе будут использоваться следующие безразмерные единицы: $|\Psi|_\infty = \sqrt{|a(T)|/b}$ для параметра порядка (таким образом, $|\Psi| = 1$ при $H = 0$), $\xi(T) = \sqrt{\hbar^2/(4m^*|a(T)|)}$ — для длины, $4ea^2(T)\xi/(\hbar b)$ — для плотности тока (таким образом, безразмерная плотность тока распаривания $j_c = 2/(3\sqrt{3})$), $\Phi_0/(2\pi\xi)$ — для векторного потенциала \mathbf{A} (таким образом, единица магнитного поля и намагниченности есть $H_{c2} = \Phi_0/(2\pi\xi^2)$).

Для исследования динамических процессов изменения структуры смешанного состояния запишем нестационарные уравнения Гинзбурга–Ландау:

$$u \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi = \Psi - |\Psi|^2\Psi + (\nabla - i\mathbf{A})^2\Psi, \quad (2.1)$$

$$\nabla^2\Phi = -\frac{i}{2}u \left[\Psi^* \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\Phi \right) \Psi - \text{к.с.} \right] \quad (2.2)$$

с граничным условием

$$(\nabla - i\mathbf{A})\mathbf{n} = 0, \quad (2.3)$$

где \mathbf{n} — нормаль к поверхности сверхпроводника. Здесь и далее в этой главе используются следующие единицы: $\hbar^2\sigma_n b/(8e^2 a^2 \xi^2)$ для времени и $4ea^2\xi^2/(\hbar\sigma_n b)$ для электрического потенциала (σ_n — нормальная проводимость), u — безразмерный релаксационный параметр нестационарной теории Гинзбурга–Ландау, определяемый из конкретной микроскопической модели.

Уравнение Лапласа (2.2) для электрического потенциала Φ получается из уравнения непрерывности электрического тока, записанного в безразмерном виде как: $\text{div}(\mathbf{j} - \nabla\Phi) = 0$. В безразмерных единицах сверхпроводящая плотность тока записывается следующим образом:

$$\mathbf{j} = \text{Im} [\Psi^*(\nabla - i\mathbf{A})\Psi]. \quad (2.4)$$

Предполагая, что длина стороны сверхпроводника $L \ll \lambda_{eff}$, можно пренебречь уравнением экранировки магнитного поля и предполагать, что магнитное поле по всей поверхности однородно и равно внешнему полю H . Также, считая пленку достаточно тонкой $d_s \ll \xi(T)$, можно пренебречь зависимостью Ψ от координаты перпендикулярной поверхности образца.

Аналитическое решение уравнений (2.1)-(2.2) представляется затруднительным, поэтому воспользуемся численным моделированием этих уравнений, описанным в Приложении. Отметим здесь, что выбранная нами численная схема позволяет наблюдать процессы изменения вихревого состояния при изменении магнитного поля, получать стационарные вихревые конфигурации (в том числе, и метастабильные) в сверхпроводнике прямоугольной формы и идентифицировать особенности на кривой намагниченности с конкретными изменениями структуры смешанного состояния.

Для изучения поведения кривой намагничивания $M(H)$ вычислим среднее по площади образца значение намагниченности:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{S} \int_S \frac{[\mathbf{r} \times \mathbf{j}]}{8\pi\kappa^2} dx dy, \quad (2.5)$$

где $\kappa = \lambda/\xi$ — параметр Гинзбурга–Ландау, S — площадь образца.

При проведении численных расчётов мы включили в сверхпроводник (со стороны квадрата $L = 4\xi$) малый дефект (вкрапление нормального металла), асимметрично расположенный на границе образца, с размерами $\xi/16 \times \xi/8$. Шаг пространственной сетки равен $\xi/16$.

2.2. Структура смешанного состояния и кривая намагниченности.

Исходным состоянием при проведении численного эксперимента по исследованию структуры смешанного состояния и кривой намагничивания являлось состояние в отсутствие внешнего поля. Последовательно изменяя магнитное поле с шагом $\Delta H = 0.01H_{c2}$, мы наблюдали на кривой намагничивания различные ветки, соответствующие различным значениям общей завихренности сверхпроводника

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \nabla\varphi d\mathbf{l}, \quad (2.6)$$

где Γ — периметр сверхпроводника. В отсутствие многоквантовых вихрей \mathcal{N} соответствует числу вихрей, находящихся в сверхпроводнике. Изменение общей завихренности сверхпроводника происходит при входе или выходе вихря.

При проведении численных расчетов мы наблюдали ветку мейсснеровского состояния с общей завихренностью $\mathcal{N} = 0$ и последовательный вход вихрей, что приводило к появлению новых веток с различными \mathcal{N} на кривой намагниченности (Рис. 16). Отклонение мейсснеровской ветки с $\mathcal{N} = 0$ от стандартной линейной

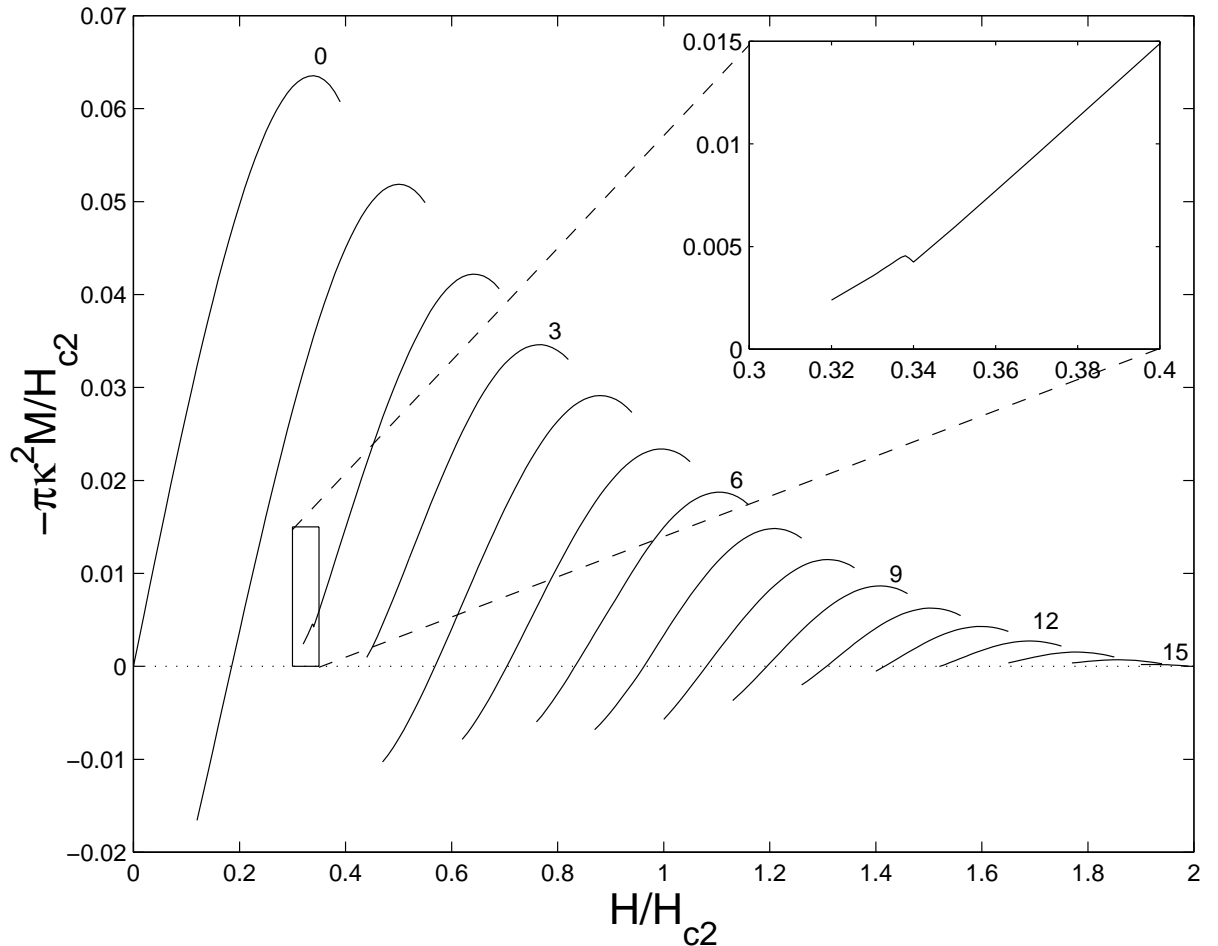


Рис. 16. Кривая намагниченности $M(H)$ для квадратного сверхпроводника со стороной $L = 8\xi$. Числа около различных ветвей на кривой намагниченности обозначают общую завихренность \mathcal{N} в образце для данной ветви. На вставке в увеличенном масштабе показана особенность на ветке $M(H)$ с $\mathcal{N} = 2$, связанная с переориентацией двух вихрей относительно сторон сверхпроводника (см. стр. 70).

зависимости $-4\pi M = H$ для массивного сверхпроводника связано с подавлением параметра порядка вблизи границ образца, приводящего к уменьшению плотности экранирующих токов по сравнению со случаем массивных сверхпроводников. При

увеличении магнитного поля параметр порядка вблизи границ сверхпроводника продавливается и, когда область, где экранирующие токи превышают критический ток распаривания, достигает размеров сравнимых с ξ , происходит вход вихря по центру грани. Естественно, вихрь входит со стороны той грани, где находится дефект. Такой же сценарий входа вихря действует и при $\mathcal{N} \neq 0$. При дальнейшем увеличении поля вихри под действием экранирующих токов, текущих вдоль границы, смещаются в центр. В результате баланса сил отталкивания между вихрями и сил, действующих со стороны экранирующих токов, могут образовываться многоквантовые вихри (двухквантовые вихри для $\mathcal{N} = 2, 6$ — см. Рис. 17) и вихревые

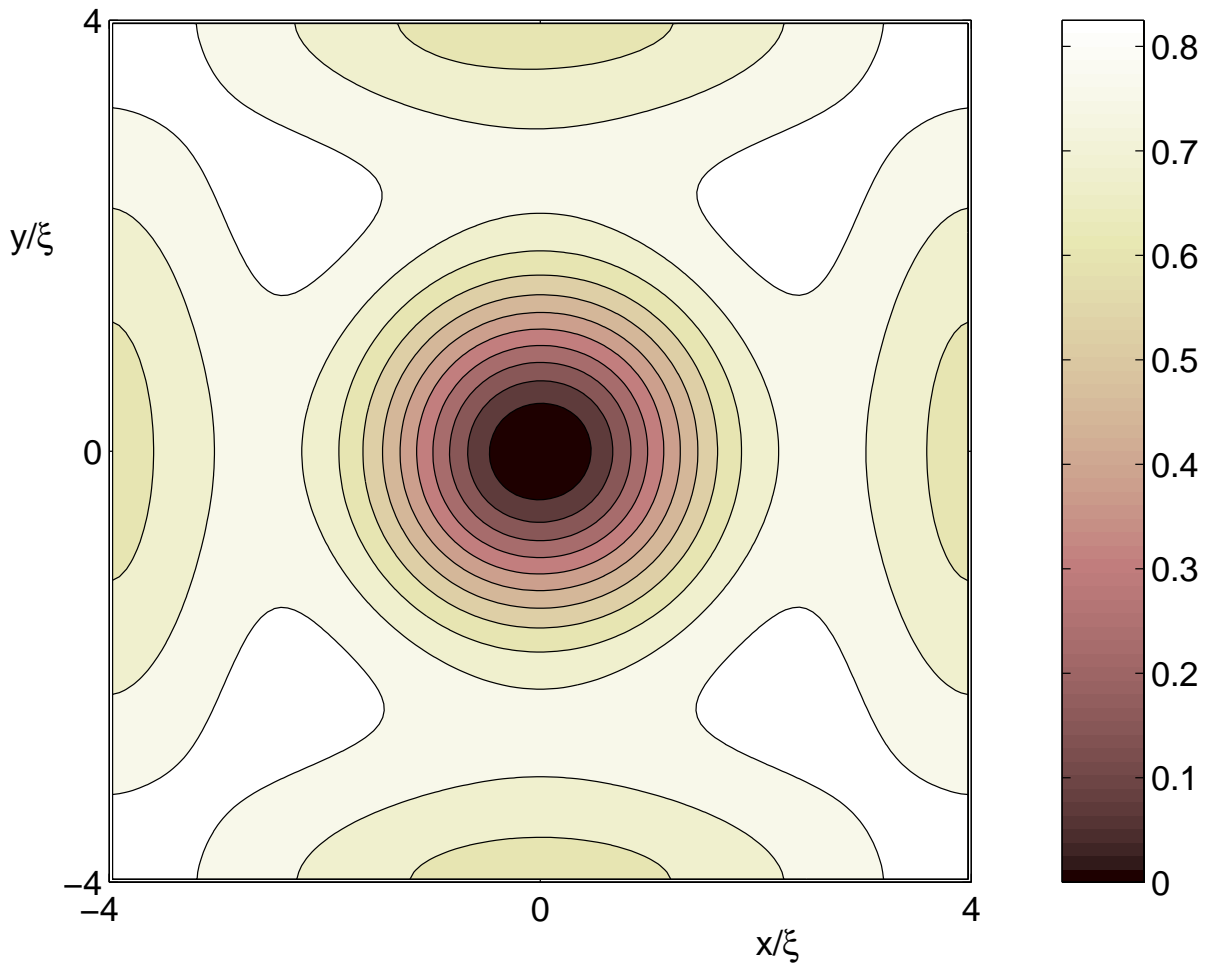


Рис. 17. Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ для двухквантового вихря ($H = 0.65H_{c2}$).

молекулы (трехквантовая молекула для $\mathcal{N} = 7$ — см. Рис. 18).

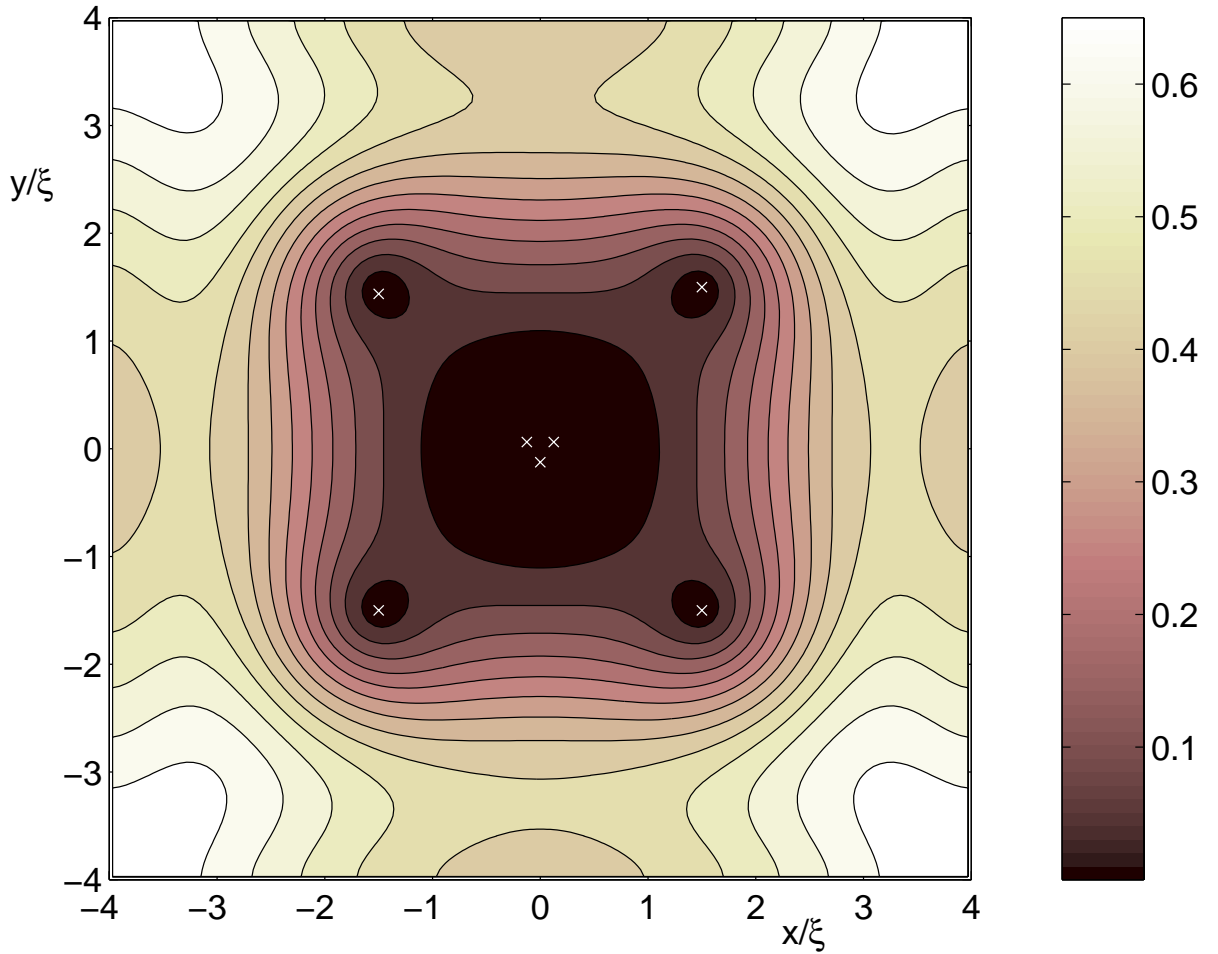


Рис. 18. Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ для трехквантовой вихревой молекулы ($H = 1.26H_{c2}$, $\mathcal{N} = 7$), расположенной в центре образца. Белыми крестиками обозначены одноквантовые вихри.

Хотя вихревые молекулы представляют собой сильно сближенные вихри и, казалось бы, нет необходимости выделять их в особый класс вихревых решений, тем не менее, тот факт, что между вихрями существует область с сильно продавленным параметром порядка, по-видимому, должно существенно менять свойства электронного спектра в таких образованиях. Также причиной для выделения вихревых молекул в особый класс вихревых решений может служить то, что при распаде (диссоциации) такой молекулы наблюдаются особенности на кривой намагничивания, особо четко наблюдаемые на зависимостях dM/dH и d^2M/dH^2 для ветки с $\mathcal{N} = 7$ (Рис. 19 и Рис. 20, соответственно).

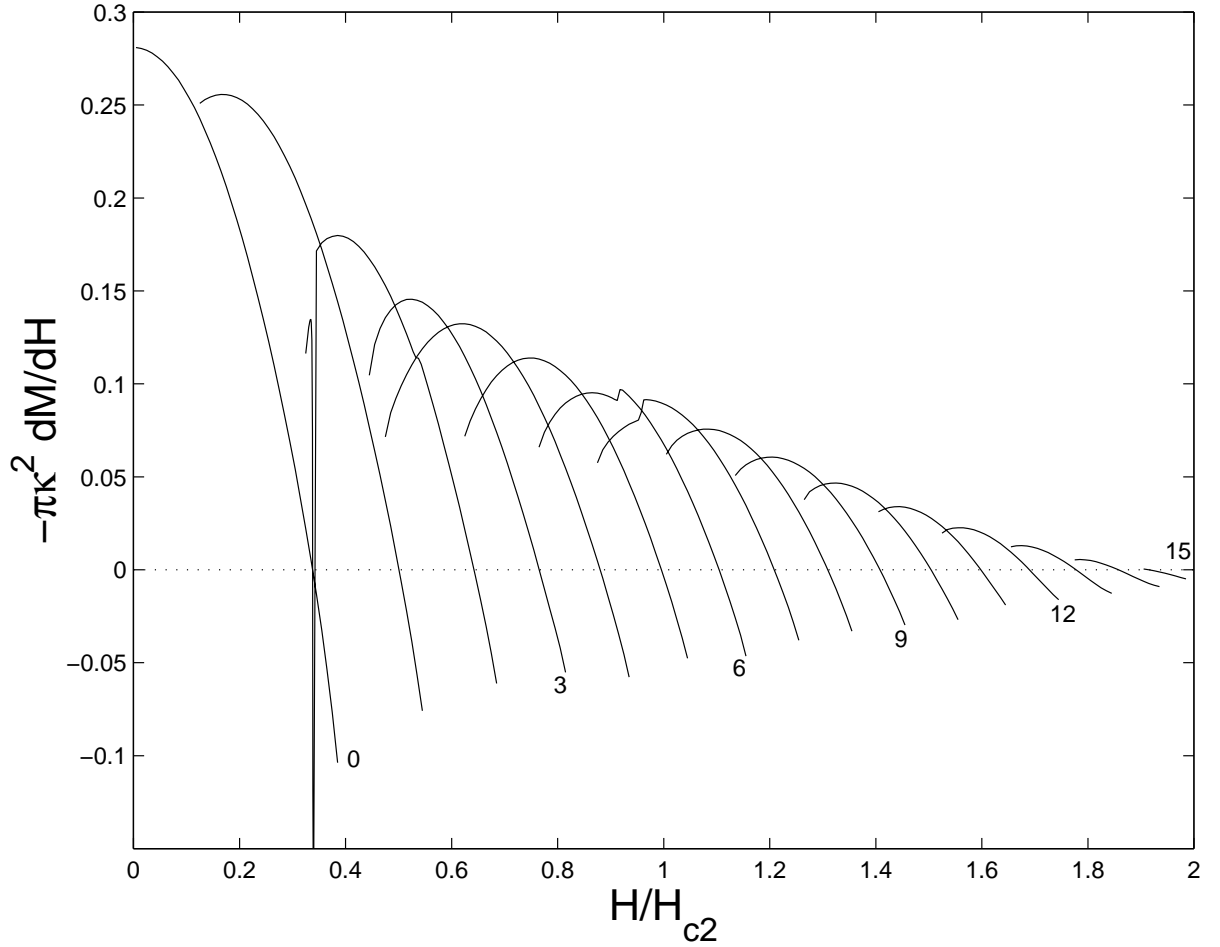


Рис. 19. Зависимость dM/dH от внешнего магнитного поля H . Числа около различных ветвей на кривой намагниченности обозначают общую завихренность \mathcal{N} в образце для данной ветви.

Пики на ветках с $\mathcal{N} = 2, 6$ связаны с распадом двухквантовых вихрей, который происходит, по-видимому, фазовым переходом второго рода. Такой фазовый переход можно описать в рамках разложения по угловым гармоникам как появление слагаемого с нулевой циркуляцией фазы. Другим возможным параметром порядка, появляющимся при подобном фазовом переходе, может быть выбран вектор \mathbf{d} , соединяющий два вихря: в сильных полях $\mathbf{d} = 0$ — двухквантовый вихрь устойчив, ниже поля перехода $\mathbf{d} \neq 0$ — произошел распад двухквантового вихря на два одноквантовых.

Заметим, что с помощью такого вектора можно охарактеризовать и другой

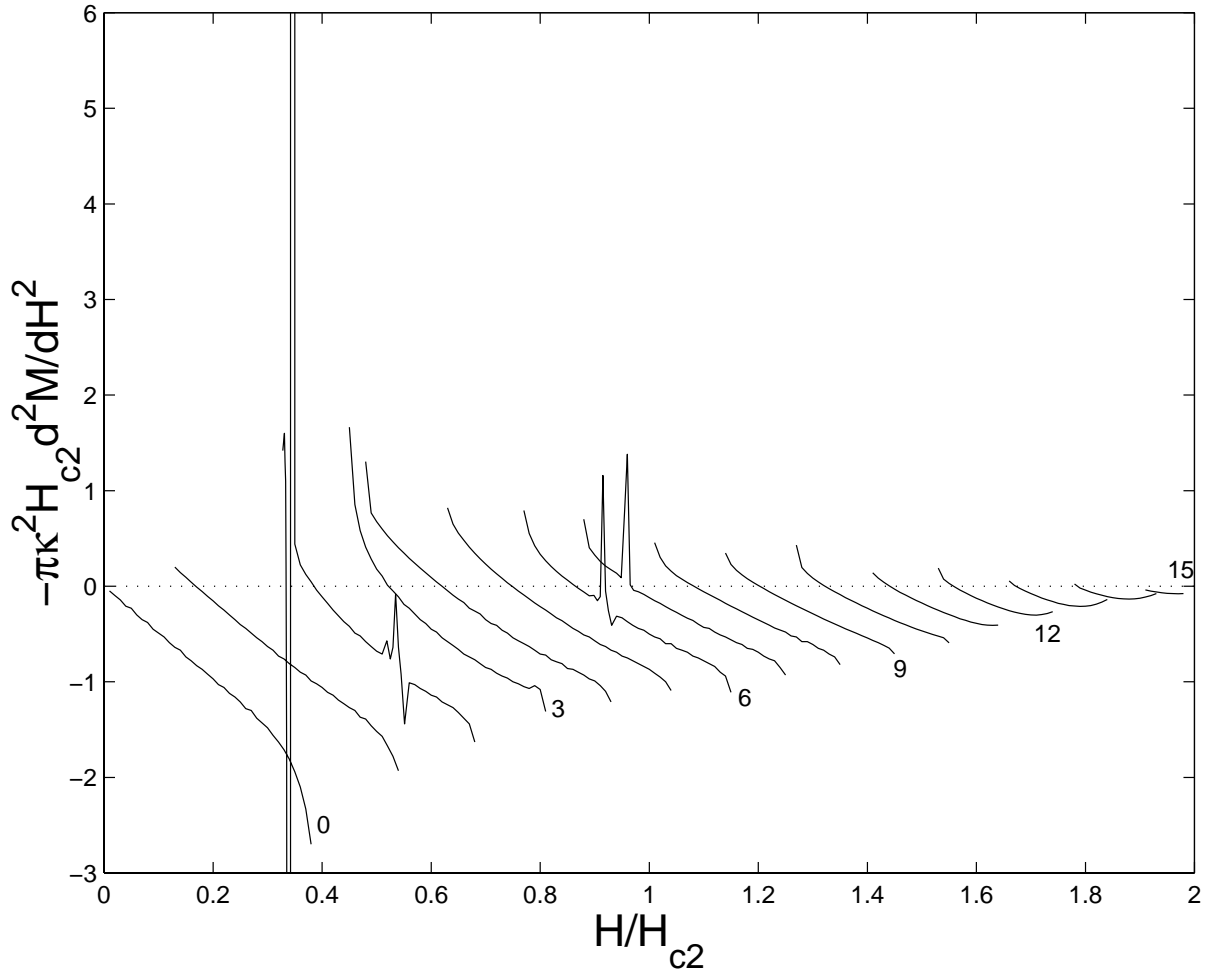


Рис. 20. Зависимость $d^2 M/dH^2$ от внешнего магнитного поля H . Числа около различных ветвей на кривой намагниченности обозначают общую завихренность \mathcal{N} в образце для данной ветви.

процесс изменения вихревого состояния, наблюдаемый в слабых полях на ветке с $\mathcal{N} = 2$ на зависимости $M(H)$, вызванный перестройкой метастабильной вихревой структуры, состоящей из двух вихрей. При полях $H \geq 0.34H_{c2}$ два вихря выстроены вдоль диагонали образца (Рис. 21(a)), при более низких полях вихри ориентируются вдоль границ образца (Рис. 21(b)). При этом вектор \mathbf{d} меняется скачком, что соответствует фазовому переходу первого рода.

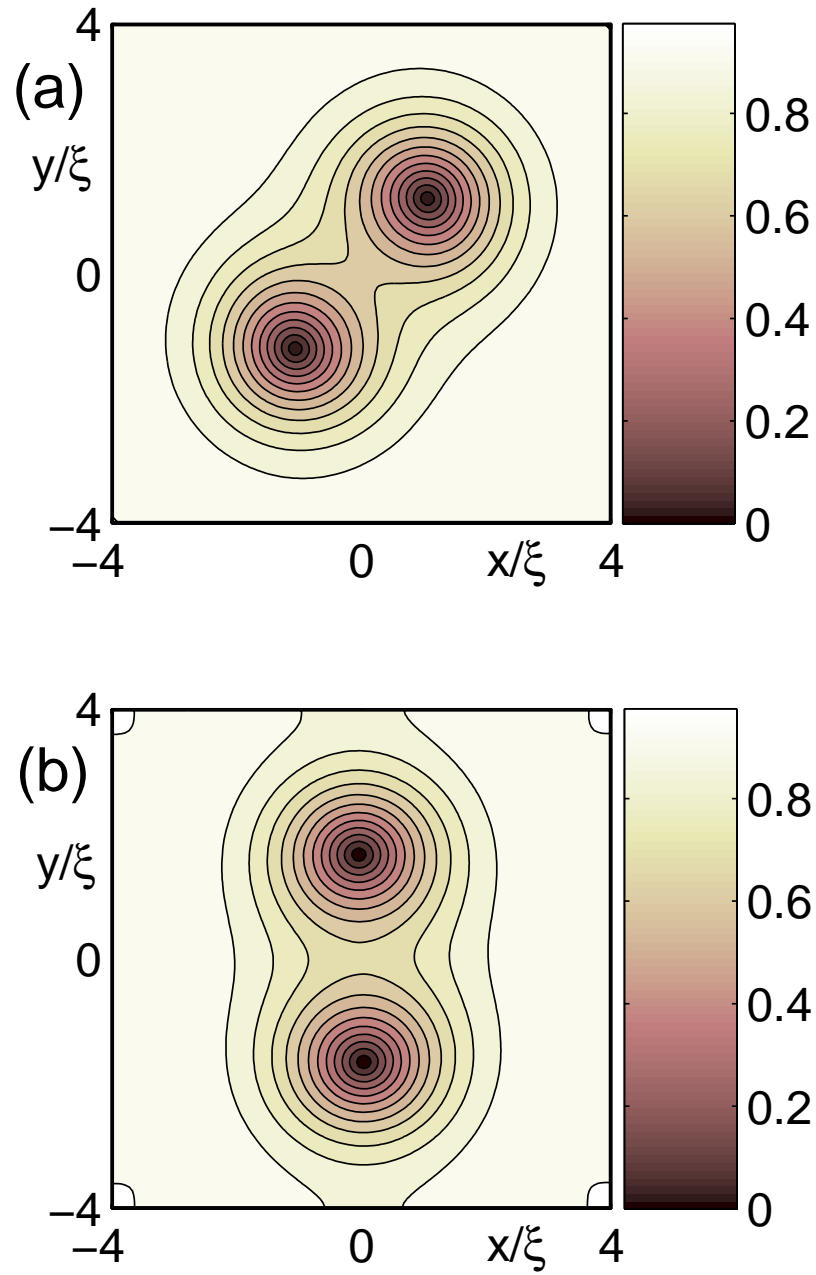


Рис. 21. Переориентация вихрей для $\mathcal{N} = 2$. Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ при $H = 0.34H_{c2}$ (a) и $H = 0.33H_{c2}$ (b).

2.3. Структура и стабильность вихревого состояния с антивихрем.

В недавней работе [38] сообщалось о возможности существования в мезоскопическом сверхпроводнике квадратной формы вихревого комплекса, состоящего

из четырех вихрей и одного антивихря, соответствующего полной завихренности $\mathcal{N} = 3$ при поле равном критическому полю появления поверхностной сверхпроводимости H_{c3} . В определенном диапазоне длин стороны образца ($3.8 < L/\xi(T) < 4.5$) было обнаружено вихревое состояние с антивихрем в центре сверхпроводника и четырьмя вихрями на диагоналях квадрата. Мы также получили подобное вихревое состояние (Рис. 22) для сверхпроводника со стороной $L = 4\xi$ вблизи критического поля H_{c3} ($H = 2.15H_{c2}$, $H_{c3} \simeq 2.18H_{c2}$).

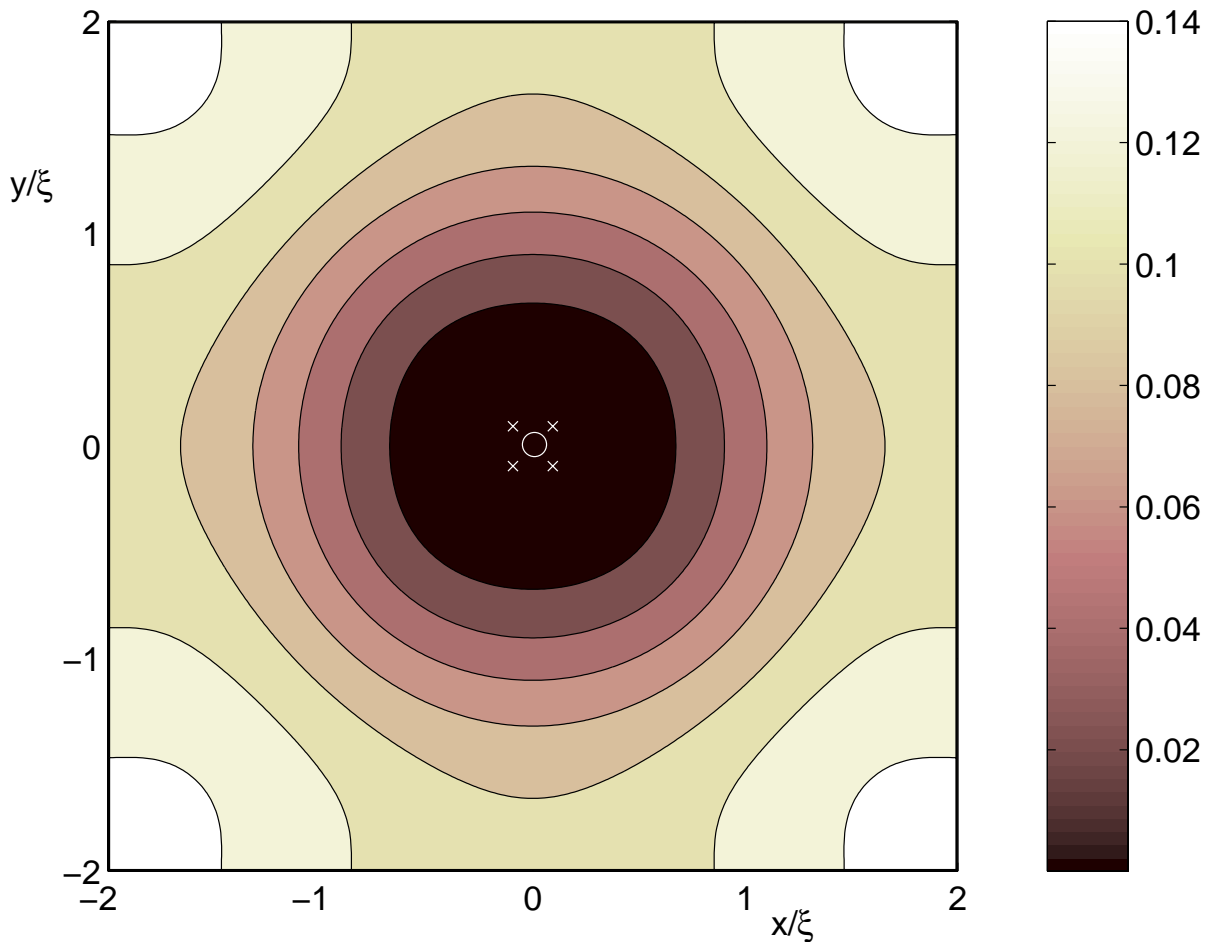


Рис. 22. Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ для $H = 2.15H_{c2}$, $L = 4\xi$ в идеальном квадратном сверхпроводнике. Белыми крестиками обозначены одноквантовые вихри, белым кругом обозначен антивихрь в центре образца.

Такая компактная вихревая конфигурация малого размера: $0.19\xi \times 0.19\xi$ пред-

ставляет собой реализацию аналога трехквантового вихря в квадратном сверхпроводнике. Представим структуру трехквантового вихря в виде разложения по угловым гармоникам

$$\Psi = \sum_{-\infty}^{\infty} R_n(r) e^{in\theta}.$$

Тетрагональная симметрия образца существенно влияет на структуру вихревого решения вихрей и, следовательно, может рассматриваться как некий возмущающий источник, порождающий дополнительные гармоники.

В соответствии с тетрагональной симметрией граничных условий основная гармоника трехквантового вихря $R_3(r)e^{3i\theta}$ генерирует дополнительные члены разложения вида $R_{3+4m}(r)e^{(3+4m)i\theta}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ — целые числа). Поскольку на малых расстояниях ($r \ll \xi$) $R_n \propto r^{|n|}$, можно представить параметр порядка в центре образца в виде

$$\Psi \propto (r/L_H)^3 e^{3i\theta} + \alpha (r/L_H) e^{-i\theta}, \quad (2.7)$$

где $L_H = \sqrt{\hbar c / (eH)} \xi$ — магнитная длина, причем вблизи верхнего критического поля $L_H \lesssim \xi$. Такое разложение обеспечивает существование антивихря в центре образца и четырех вихрей симметрично расположенных на диагоналях образца.

В то же время, при полях близких к критическому полю H_{c3} параметр порядка может быть представлен как суперпозиция четырех гауссовых зародышей расположенных в вершинах сверхпроводника, с определенной фазой $\varphi_n = -3\pi n/2$ ($n = 0, 1, 2, 3$), определяемой общей завихренностью образца: $\sum \varphi_n = 2\pi \mathcal{N}$ (в данном случае $\mathcal{N} = 3$). Вблизи центра вихря такая суперпозиция дает выражение для гармоники R_{-1} с коэффициентом $\alpha \sim L/L_H \exp(-(L/L_H)^2/4)$. Теперь из выражения (2.7) можно найти координаты четырех вихрей и таким образом определить размер r_0 вихревого состояния с антивихрем:

$$r_0/L_H \sim \sqrt{L/L_H} \exp(-(L/L_H)^2/8). \quad (2.8)$$

Как указано в работе [120], при уменьшении поля относительно поля H_{c2} большую роль начинают играть нелинейные процессы, приводящие в результате к разрушению такого экзотического состояния в идеальном сверхпроводнике квадратной

формы. Это значит, что вопрос о существовании такого вихревого состояния актуален для полей близких к H_{c3} , а значит $L_H \sim \xi$. Таким образом, во всем диапазоне значений $L/\xi(T)$, при которых в мезоскопическом сверхпроводнике существует вихревой комплекс с антивихрем ($3.8 < L/\xi < 4.5$ [38]), его размер будет существенно меньше длины когерентности, что безусловно затрудняет его экспериментальное обнаружение.

Другим существенным фактором, приводящим к распаду подобного экзотического вихревого решения, являются нарушения идеальной тетрагональной симметрии, например, за счет внутренних дефектов сверхпроводника, шероховатости границ и термических флуктуаций параметра порядка. Для исследования условий стабильности конфигурации вихрь-антивихрь к нарушениям тетрагональной симметрии мы разместили асимметрично расположенный на границе сверхпроводника малый дефект (вкрапление нормального металла) прямоугольной формы. Наличие такого дефекта, понижающего тетрагональную симметрию, приведет к появлению гармоники R_0 в разложение (2.7), приводящей к смещению антивихря из центра образца. Действительно, последовательно увеличивая размер дефекта, начиная с $0.01\xi \times 0.02\xi$, мы наблюдали искажение вышеописанной вихревой конфигурации: антивихрь смещается в направлении одного из вихрей и, когда размер дефекта достигает $0.16\xi \times 0.08\xi$, эта пара вихрь-антивихрь аннигилирует (Рис. 23).

Отметим, что эти вычисления проводились с очень большим пространственным разрешением: шаг сетки составлял $\Delta x = \Delta y = \xi/64$. Таким образом, мы приходим к заключению, что вихревая структура, состоящая из четырех вихрей и антивихря, очень чувствительна к нарушениям тетрагональной симметрии.

Необходимо отметить, что, аналогично образованию нетривиальной структуры трехквантового вихря в квадратном сверхпроводнике, двухквантовый вихрь в треугольном сверхпроводнике также содержит антивихрь в окружении трех вихрей, как это было показано в работе [121]. Такая вихревая конфигурация может быть представлена вблизи центра вихря следующим образом:

$$\Psi \simeq \alpha_2 r^2 e^{2i\theta} + \alpha_{-1} r e^{-i\theta},$$

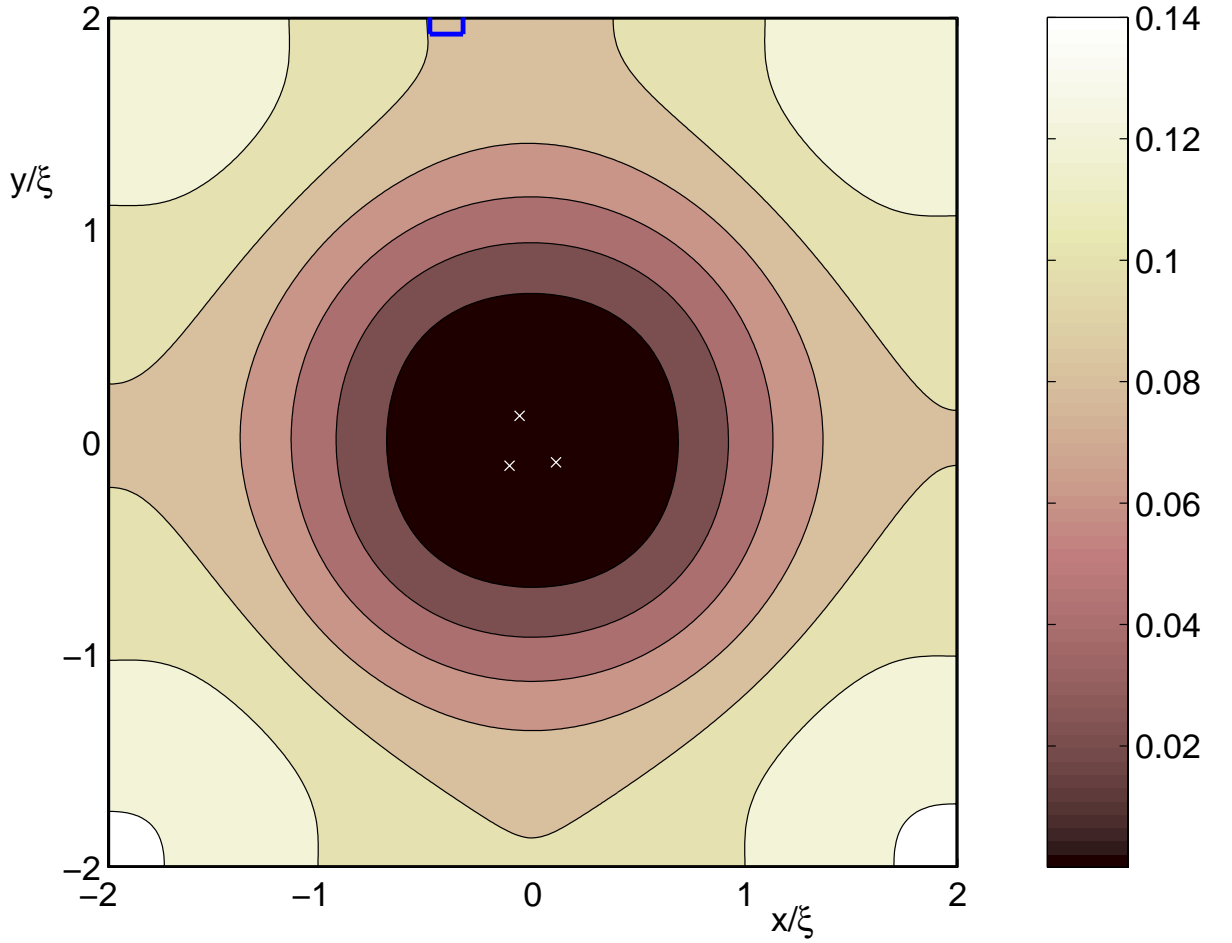


Рис. 23. Линиями уровня показаны распределения модуля параметра порядка $|\Psi|$ для $H = 2.15H_{c2}$, $L = 4\xi$ в квадратном сверхпроводнике с малым дефектом размером $0.16\xi \times 0.08\xi$, показанным прямоугольником на верхней грани образца. Белыми крестиками обозначены одноквантовые вихри.

так как в соответствии с граничными условиями основная гармоника $R_2(r)e^{2i\theta}$ генерирует дополнительные угловые гармоники $R_{2+3m}(r)e^{(2+3m)i\theta}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Далее, рассуждая аналогичным образом, можно оценить размер такого вихревого комплекса, который тоже должен быть экспоненциально малым в меру малости $L/L_h \sim L/\xi$.

2.4. Выводы.

Приведем основные результаты, полученные в данной главе и опубликованные в работах (vi)–(vii):

- На основе численного моделирования нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау было проведено систематическое исследование структуры вихревых состояний в мезоскопическом сверхпроводнике квадратной формы и проанализировано влияние внутренней перестройки вихревых решений на кривую намагниченности сверхпроводника с дефектами. Показано, что распад двухквантового вихря и диссоциация трехвихревой молекулы приводят к появлению скачка на зависимости dM/dH .
- Также в главе развит симметричный подход к аналитическому описанию экзотических вихревых комплексов, содержащих антивихрь, и найден размер такого образования. На основе численного моделирования продемонстрировано, что наличие малых дефектов, нарушающих идеальную тетрагональную симметрию образца, приводит к исчезновению антивихря и установлению состояния с тремя одноквантовыми вихрями.

3 Зарождение локализованной сверхпроводимости в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик.

3.1. Введение

В этой главе рассматриваются условия появления сверхпроводящего параметра порядка в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик (SF системах), находящихся во внешнем однородном магнитном поле H . Рассматриваемая система представляет собой слоистую структуру, состоящую из тонкой пленки сверхпроводника с нанесенным на нее слоем ферромагнетика, разделенных тонким изолирующим слоем. Ферромагнетик обладает доменной структурой, создающей неоднородное магнитное поле в сверхпроводнике (Рис. 24). В дальнейшем предполагается, что обменное взаимодействие пренебрежимо мало, ввиду того, что сверхпроводник и ферромагнетик разделены изолирующей прослойкой и достаточно учитывать только электромагнитное взаимодействие. Предположим, что доменные границы хорошо запиннингованы, то есть доменная структура в ферромагнетике не меняется при изменении внешнего магнитного поля, что может быть реализовано в ферромагнитных пленках с высокой коэрцитивностью, например, в магнитных материалах для магнитооптической записи с перпендикулярной намагниченностью, в которых поле коэрцитивности составляет порядка 1 кГс (например, многослойные системы Co/Pt [122]). Магнитное поле, индуцированное в сверхпроводнике, ослабляется изолирующей прослойкой и может быть существенно меньше поля коэрцитивности ферромагнетика, что позволяет пренебречь эффектами перемагничивания доменов. Тем не менее, характерные значения магнитного поля остаются достаточно большими для наблюдения эффектов рассматриваемых в этой главе.

Распределение магнитного поля, индуцированного ферромагнетиком, определяется геометрическими размерами: толщиной ферромагнитной пленки d_F , шириной домена w и толщиной изолирующей прослойки. Конечной толщиной доменной

стенки мы пренебрегаем, предполагая, что она много меньше характерного размера зародыша ℓ (которая по порядку величины совпадает с длиной когерентности) и толщины ферромагнитной пленки. Предполагая, что длина доменов много больше их толщины и ширины, можно считать, что магнитное поле зависит только от координаты x (Рис.24).

Если толщина ферромагнитной пленки достаточно велика ($D \gg w$), то магнитное поле в сверхпроводнике под доменом практически однородно, что приводит к подавлению сверхпроводимости. В этом случае следует ожидать, что при понижении температуры сверхпроводимость будет появляться под доменной границей [54, 83], где магнитное поле меняет знак, аналогично зарождению поверхностной сверхпроводимости вблизи поля H_{c3} [123]. Таким образом, доменные стенки толстой ферромагнитной пленки стимулируют появление сверхпроводящего параметра порядка. Следует отметить, что эффект появления сверхпроводимости в области, где магнитное поле меняет знак, должен присутствовать и в двумерной задаче, когда магнитное поле создается, например, системой магнитных точек [49, 50, 124].

Магнитное поле тонкой ферромагнитной пленки ($D \ll w$) быстро спадает при удалении от доменной границы и практически исчезает внутри домена. В отсутствие внешнего магнитного поля такая доменная стенка локально подавляет сверхпроводимость [63], и сверхпроводящий зародыш в этом случае должен появиться вдали от доменной стенки. Во внешнем магнитном поле зародыш будет смещаться следом за линией нулей магнитного поля. Таким образом, включая внешнее магнитное поле, можно контролировать положение зародыша, подавляя параметр порядок внутри домена.

Таким образом, фазовая диаграмма двухслойной SF структуры определяется конкуренцией между сверхпроводящими зародышами, возникающими на доменных стенках, и зародышами, возникающими вдали от стенок. Для ферромагнетиков с малой шириной доменов (когда $w \sim \ell$) необходимо принимать во внимание взаимодействие зародышей расположенных на различных доменных стенках.

Для описания зарождения сверхпроводимости мы используем стационарное

линеаризованное уравнение Гинзбурга–Ландау:

$$-\left(\nabla + \frac{2\pi i}{\Phi_0} \mathbf{A}\right)^2 \Psi = \frac{1}{\xi^2(T)} \Psi. \quad (3.1)$$

Здесь $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — векторный потенциал, $\xi(T) = \xi_0 / \sqrt{1 - T/T_{c0}}$ — длина когерентности, T_{c0} критическая температура массивного сверхпроводника в нулевом магнитном поле.

Поскольку нас интересует вопрос о *зарождении* сверхпроводимости, можно в силу малости параметра порядка пренебречь экранирующими токами и считать векторный потенциал заданным исключительно доменной структурой ферромагнетика и внешним магнитным полем. Рассматривая сверхпроводящую пленку толщиной d много меньше длины когерентности, можно пренебречь компонентами магнитного поля параллельными пленке, а также зависимостью параметра порядка от координаты z , перпендикулярной поверхности пленки. Для простоты ограничимся рассмотрением одномерного случая $B_z(x) = H + b(x)$, где H — однородное внешнее магнитное поле и $b(x)$ — z -компонента поля индуцированного намагниченностью ферромагнетика $\mathbf{M} = M(x)\mathbf{z}_0$ (Рис. 24).

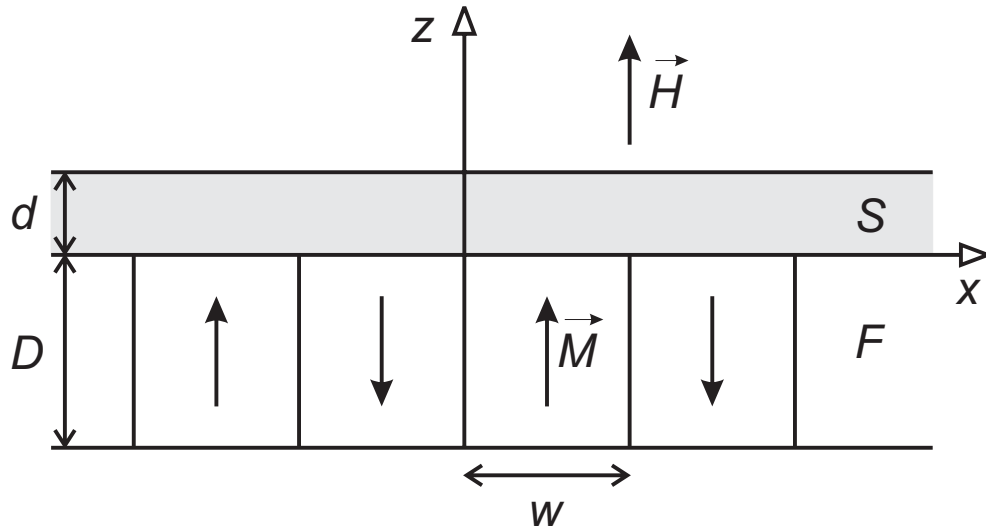


Рис. 24. Двухслойная структура сверхпроводник–ферромагнетик.

Выбирая калибровку $\mathbf{A} = A(x)\mathbf{y}_0$, и замечая, что импульс вдоль доменов (оси y) сохраняется, можем искать решение уравнения Шредингера (3.1) в виде $\Psi(\mathbf{r}) =$

$f_k(x) \exp(-iky)$, где функция $f_k(x)$ должна быть найдена из одномерной задачи:

$$-\frac{d^2 f_k}{dx^2} + \left(\frac{2\pi}{\Phi_0} A(x) - k \right)^2 f_k = \frac{1}{\xi^2(T)} f_k. \quad (3.2)$$

Собственные числа этого уравнения определяют дискретный набор температур $T_n(k)$. Критическая температура сверхпроводящего перехода T_c должна быть определена как максимальное значение $\max\{T_n(k)\}$, соответствующее низшему значению "уровня энергии" $1/\xi^2(T)$ одномерного уравнения Шредингера (3.2). Следует отметить, что похожие задачи о спектре энергии $E(k)$ двумерного бесспинового электронного газа в периодическом магнитном поле ранее были решены для случаев отсутствия внешнего магнитного поля $H = 0$ [125], для очень сильного магнитного поля H [126] и для магнитного поля с профилем в виде меандра [127]. Принципиальным отличием задачи о появлении сверхпроводящего зародыша от задачи о спектре двумерного электронного газа является то, что необходимо найти минимум спектра $E(k)$, соответствующий температуре появления зародыша.

3.2. Появление сверхпроводимости на доменной стенке: изолированный зародыш.

Начнем анализ появления сверхпроводимости в SF системах с простейшего случая уединенной доменной стенки, предполагая, что намагниченность \mathbf{M} в ферромагнетике имеет вид: $\mathbf{M} = M \text{sign}(x) \mathbf{z}_0$. Такой подход справедлив до тех пор, пока ширина сверхпроводящего зародыша много меньше ширины домена ($w \gg \ell$) (здесь и далее пренебрегается толщиной доменной стенки по сравнению со всеми характерными масштабами задачи: $\xi(T)$, w , d_F , ℓ).

3.2.1. Доменная стенка в толстой магнитной пленке: ступенчатый профиль магнитного поля. Обзор.

Для достаточно толстой магнитной пленки ($D \gg w$) распределение магнитного поля вблизи поверхности пленки имеет вид: $B_z = 4\pi M \text{sign}(x) + H$. Запишем векторный потенциал в виде: $\mathbf{A} = (4\pi M|x| + Hx) \mathbf{y}_0$. При высоких температурах в отсутствие внешнего магнитного поля сверхпроводящий параметр порядка вдали от

доменной будет подавлен благодаря орбитальному эффекту. В то же время, энергетически более выгодным окажется появление сверхпроводящего зародыша вблизи доменной стенки, когда магнитное поле имеет противоположный знак по разные стороны доменной стенки. Такая ситуация аналогична процессу появления поверхностной сверхпроводимости вблизи границы сверхпроводник–диэлектрик при поле H_{c3} [123]. Таким образом, смена знака намагниченности на доменной стенке ведет к частичному уменьшению орбитального эффекта и обеспечивает условия зарождения сверхпроводимости под доменной стенкой при температурах более высоких по сравнению с температурами появления параметра порядка вдали от доменной границы. Появление зародыша локализованного на доменной стенке возможно только благодаря эффекту близости, когда мы рассматриваем куперовские пары существующие по обе стороны от доменной границы. Прикладывая внешнее магнитное поле перпендикулярное пленке, мы частично компенсируем магнитное поле в одном из доменов, что улучшает условия появления сверхпроводимости внутри домена. Как следствие, можно ожидать немонотонную зависимость критической температуры появления локализованной сверхпроводимости от внешнего магнитного поля. Как критическая температура появления сверхпроводимости вдали от доменной стенки, так и критическая температура зарождения сверхпроводящего параметра порядка локализованного на доменной границе при увеличении внешнего магнитного поля должны возрастать, пока внешнее поле не скомпенсирует магнитное поле индуцированное ферромагнетиком в одном из доменов [83].

Для удобства запишем уравнение (3.2) в безразмерном виде:

$$-\frac{\partial^2 f_k}{\partial t^2} + (|t| + ht - t_0)^2 f_k = E f_k, \quad (3.3)$$

где $t = x/L$, $t_0 = kL$, $L = \sqrt{\Phi_0/(2\pi B_0)}$, $h = H/B_0$, $E = (T_{c0} - T)/\Delta T_c^{orb}$. Характерная температура $\Delta T_c^{orb} = T_{c0}\xi_0^2/L^2$ определяет сдвиг критической температуры вследствие вышеописанного орбитального эффекта, а поле B_0 — максимальное значение модуля магнитного поля b индуцированного ферромагнитной пленкой (в этом разделе $B_0 = 4\pi M$).

Случай $|t_0| \rightarrow \infty$ соответствует появлению зародыша вдали от доменной границы ($x \rightarrow \infty$) при некоторой определенной температуре T_c^∞ . В этом предельном

случае низшее собственное значение энергии уравнения (3.3) есть $E = |1 - |h||$, и, следовательно, критическая температура не возмущена наличием доменной границы и отражает только факт локальной компенсации магнитного поля. В случае конечных значений t_0 условия появления сверхпроводящих зародышей справа и слева от доменной стенки должны быть рассмотрены с учетом эффекта близости. Определяя низший уровень энергии в потенциальной яме заданной в уравнении (3.3) как минимальное значение по параметру t_0 , мы получим сверхпроводящий зародыш локализованный вблизи доменной границы при температуре превышающей T_c^∞ . Сценарий образования такого локализованного зародыша аналогичен сценарию появления поверхностной сверхпроводимости на границе сверхпроводник–диэлектрик при полях $H_{c2} < H < H_{c3}$. Действительно, в случае $h = 0$, потенциальная яма $V(t) = (|t| + ht - t_0)^2$ уравнения Шредингера (3.3) симметрична ($V(t) = V(-t)$), и задача об основном состоянии (3.3) может быть сведена к полупространству $t > 0$ с граничным условием $f'_k(t = 0) = 0$. В таком частном случае минимальная энергия соответствует [123]

$$E_{min} = t_{0_{min}}^2 = 0.59010. \quad (3.4)$$

Увеличение внешнего магнитного поля h очевидным образом приводит к росту асимметрии потенциальной ямы $V(t)$ и, следовательно, к подавлению сверхпроводимости локализованной на доменной стенке.

Уравнение (3.3) может быть решено точно через функции Вебера [123, 128]:

$$f_k = C_1 W \left(\sqrt{1+ht} - \frac{t_0}{\sqrt{1+h}}, \frac{E}{1+h} \right), \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$f_k = C_2 W \left(-\sqrt{1-ht} - \frac{t_0}{\sqrt{1-h}}, \frac{E}{1-h} \right), \quad t < 0. \quad (3.6)$$

Здесь C_1 и C_2 — константы, функция Вебера $W(s, \varepsilon)$ есть решение следующего уравнения:

$$-\frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + s^2 W = \varepsilon W \quad (3.7)$$

с граничным условием $W(s \rightarrow +\infty, \varepsilon) \rightarrow 0$. Сшивая решения (3.5) и (3.6) при $t = 0$, получаем неявное выражение для энергии основного состояния:

$$\frac{\sqrt{1+h}W_s' \left(-\frac{t_0}{\sqrt{1+h}}, \frac{E}{1+h} \right)}{W \left(-\frac{t_0}{\sqrt{1+h}}, \frac{E}{1+h} \right)} = -\frac{\sqrt{1-h}W_s' \left(-\frac{t_0}{\sqrt{1-h}}, \frac{E}{1-h} \right)}{W \left(-\frac{t_0}{\sqrt{1-h}}, \frac{E}{1-h} \right)}. \quad (3.8)$$

Решая это уравнение численно, мы получим зависимость $E(t_0, h)$, которую необходимо минимизировать по параметру t_0 . Полученная таким образом зависимость критической температуры появления локализованной сверхпроводимости от внешнего магнитного поля изображена на Рис. 25.

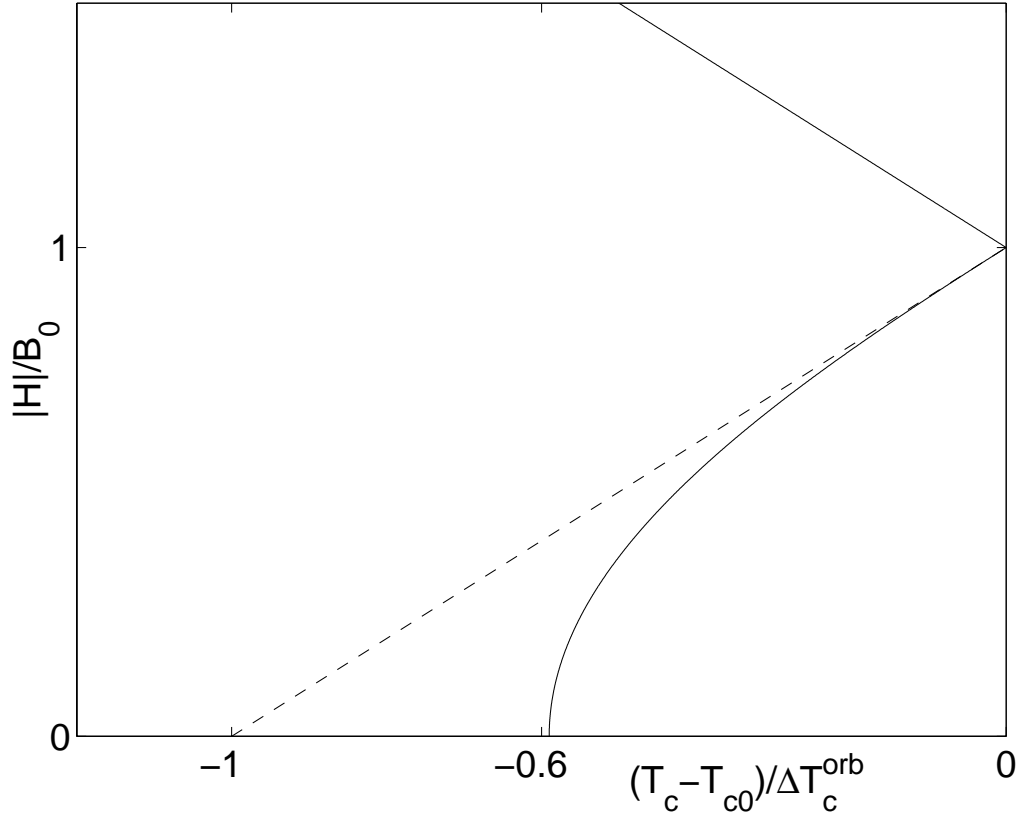


Рис. 25. Температурная зависимость верхнего критического магнитного поля SF системы с толстым ферромагнитным слоем (сплошная линия). Штриховая линия относится к появлению сверхпроводящего зародыша вдали от доменной стенки. При $|H| > B_0$ обе зависимости совпадают.

Видно, что внешнее магнитное поле подавляет сверхпроводимость локализованную на доменной стенке, и поэтому она существует только в относительно слабых полях $|h| \ll 1$. При увеличении магнитного поля сверхпроводящий зародыш

смещается от доменной границы в область минимального по модулю магнитного поля. В сильных магнитных полях $|h| \geq 1$ сверхпроводящий параметр порядок появляется внутри домена, где частично компенсированное магнитное поле минимально, что аналогично зарождению параметра порядка при поле H_{c2} [3].

В области $0 \leq |h| \leq 1$ зависимость $E(h)$, вычисленная аналитически, может быть аппроксимирована следующей простой функцией:

$$E(h) \simeq \left(E_{min} - \frac{1}{2}\right) h^4 + \left(\frac{1}{2} - 2E_{min}\right) h^2 + E_{min}. \quad (3.9)$$

3.2.2. Доменная стенка в тонкой ферромагнитной пленке

В этом разделе мы исследуем другой предельный случай: $w \gg d_F$ и рассмотрим задачу о появлении сверхпроводимости в поле уединенной доменной границы в тонкой ферромагнитной пленке, которая индуцирует магнитное поле $B_z(x, z = 0) = 4M \arctg(d_F/x) + H$ [63]. Очевидно, что в случае достаточно слабых магнитных полей $H < B_0$ (в этом разделе максимальное значение магнитного поля индуцированного доменной стенкой на поверхности ферромагнетика при $z = 0$ есть $B_0 = 2\pi M$) сверхпроводящий зародыш появляется вблизи линии $x = x_0$, на которой $B_z(x_0) = 0$. Предполагая масштаб локализации зародыша много меньше характерного масштаба изменения магнитного поля $\ell \ll d_F$, можно разложить векторный потенциал в ряд и ограничиться первыми двумя ненулевыми слагаемыми:

$$A(x) \simeq A(x_0) + \frac{1}{2} B'_z(x_0) (x - x_0)^2.$$

Такая локальная аппроксимация справедлива, если:

$$\left| \frac{B''_z(x_0)}{B'_z(x_0)} \right| \ell \ll 1 \quad \text{и} \quad \ell \ll x_0. \quad (3.10)$$

Вводя новую безразмерную координату $t = (x - x_0)/\ell$, мы приходим к безразмерному модельному уравнению

$$-\frac{d^2 f}{dt^2} + (t^2 - Q)^2 f = \varepsilon f, \quad (3.11)$$

где

$$\ell = \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{\pi |B'_z(x_0)|}} = D \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{4\pi M d_F^2 \sin^2(H/4M)}}, \quad (3.12)$$

$$\varepsilon = \frac{\ell^2}{\xi_0^2} \left(1 - \frac{T}{T_{c0}} \right), \quad (3.13)$$

$$Q = \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{\pi B'_z(x_0)}} \left(k - \frac{2\pi}{\Phi_0} A(x_0) \right). \quad (3.14)$$

Минимальное значение энергии для уравнения (3.11) $\varepsilon_0 \simeq 0.904$ достигается при $Q \simeq 0.437$. Таким образом, получаем приближенное выражение для зависимости критической температуры появления локализованной сверхпроводимости T_c от внешнего магнитного поля:

$$\frac{T_{c0} - T_c}{\Delta T_c^{orb}} = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \left(\frac{\Phi_0}{2B_0 d_F^2} \right)^{1/3} \sin^{4/3} \left(\frac{\pi |H|}{2B_0} \right). \quad (3.15)$$

Эта зависимость справедлива при условии

$$\left| \frac{\sqrt[3]{\sin(H/4M)}}{\cos(H/4M)} \right| \ll \frac{4\pi M d_F^2}{\Phi_0}. \quad (3.16)$$

Отметим, что вблизи T_c зависимость верхнего критического магнитного поля от температуры имеет неаналитический характер: $(T_c - T)^{3/4}$.

При увеличении магнитного поля H зародыш сдвигается из бесконечности в сторону доменной стенки ($x = 0$) вслед за движением линии нулей магнитного поля $B_z(x_0) = 0$, и при достаточно сильных магнитных полях зародыш локализуется на доменной границе. Таким образом, поведение зародыша во внешнем магнитном поле оказывается противоположным рассмотренному в разделе 3.2.1. Критическая температура в пределе сильных полей ($|H| \gg B_0$) определяется следующим выражением:

$$\frac{T_c - T_{c0}}{\Delta T_c^{orb}} = 1 - |H|/B_0, \quad (3.17)$$

что соответствует образованию локализованной сверхпроводимости в области минимального значения полного магнитного поля. Простые приближенные формулы (3.15) и (3.17) находятся в хорошем соответствии с результатами, проведенных нами численных вычислений (Рис. 26).

Для численного анализа свойств локализованных решений уравнения Шредингера (3.2) во внешнем магнитном поле был применен стандартный метод диагонализации трехточечной разностной схемы на эквидистантной сетке и получены

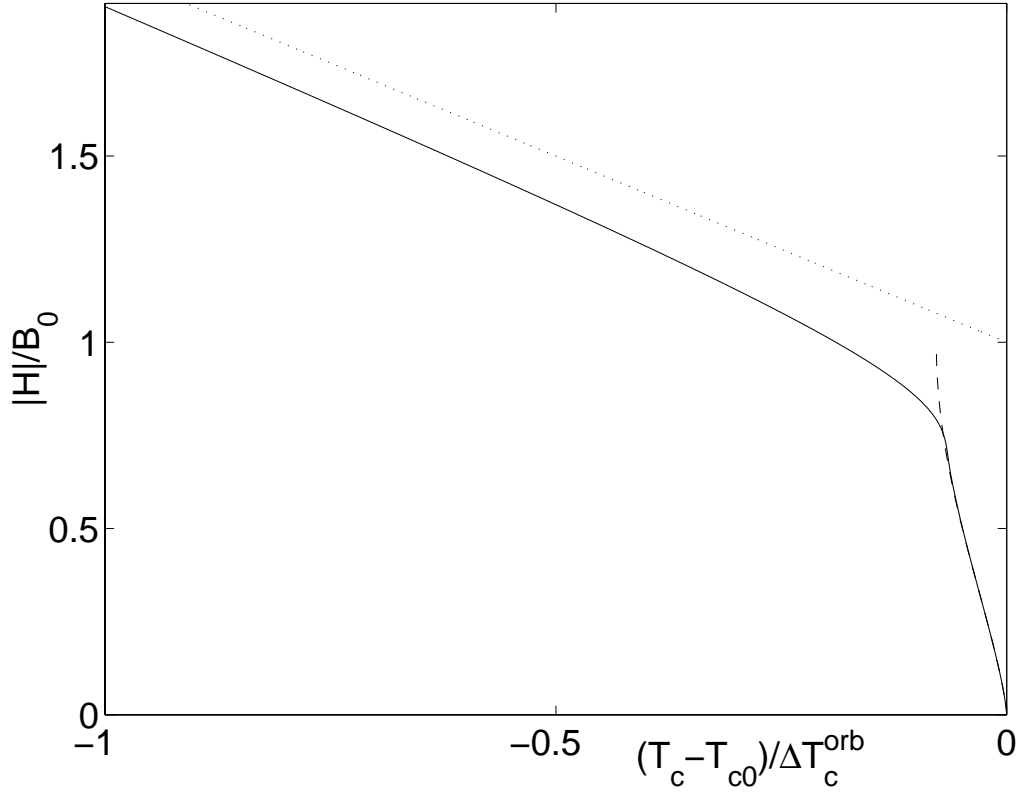


Рис. 26. Температурная зависимость верхнего критического поля для случая уединенной доменной стенки в тонкой ферромагнитной пленке при $B_0 d_F^2 / \Phi_0 = 25$ (сплошная линия). Штриховая линия соответствует аналитическому выражению (3.15) при слабых полях, пунктирная — асимптотическому выражению для сильных полей (3.17).

зависимости собственных функций основного состояния $f_k(x)$ и зависимость энергии $1/\xi^2(T)$ от внешнего магнитного поля. Характерный вид пространственного распределения сверхпроводящего параметра порядка приведен на Рис. 27.

3.3. Зарождение сверхпроводимости в периодической доменной структуре

В этом разделе будет рассмотрен вопрос о взаимодействии между зародышами, локализованными на различных доменных границах. Очевидно, что учёт такого взаимодействия важен при температурах близких к T_{c0} (когда $\xi(T) \geq w$). Отме-

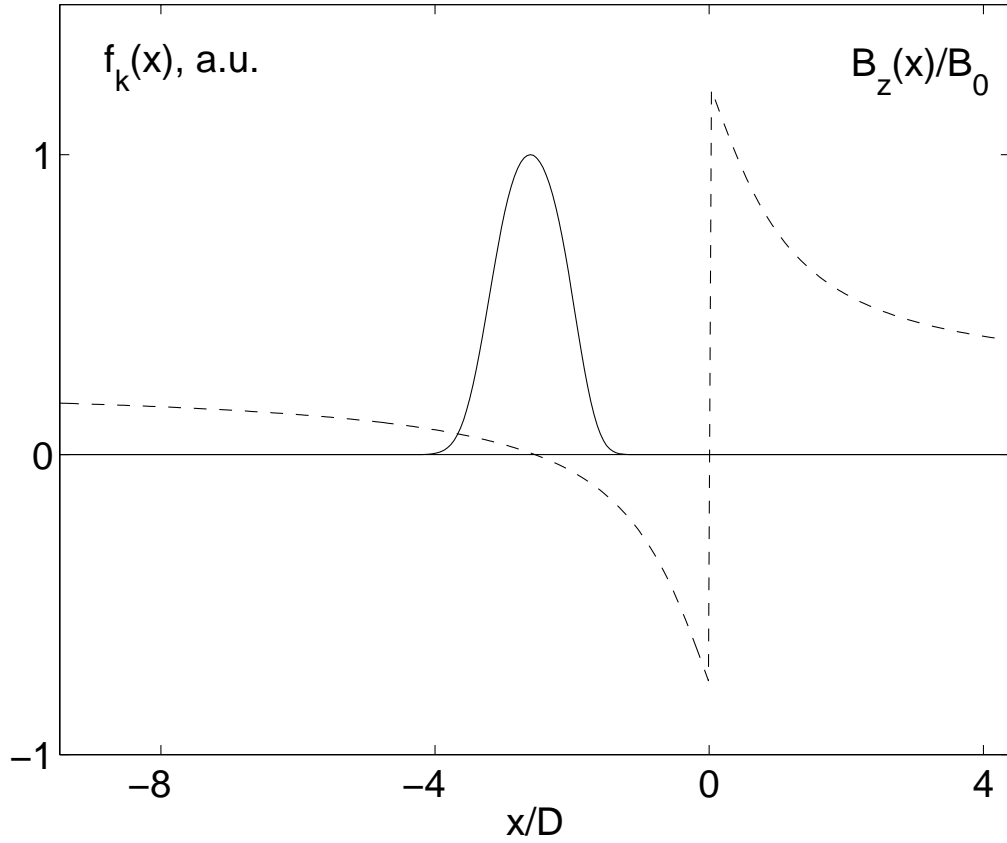


Рис. 27. Характерный вид волновой функции основного состояния для случая уединенной доменной стенки в тонкой ферромагнитной пленке при $B_0 D^2 / \Phi_0 = 25$ и $H/B_0 = 0.24$ (сплошная линия). Пространственное распределение магнитного поля показано штриховой линией.

тим, что в достаточно широком интервале температур, где $w \gg \xi(T)$, перекрытие волновых функций, локализованных на различных доменных стенках, является экспоненциально малым. Для простоты рассмотрим случай $w \ll d_F$, что позволяет задать пространственное распределение магнитного поля индуцированного доменами в виде меандра с периодом $a = 2w$: $b(x) = B_0 \text{sign}(x)$, для $|x| < w$ и $b(x + na) = b(x)$, где n — целые числа. Соответственно векторный потенциал может быть выбран в виде: $A(x) = B_0|x|$ для $|x| < w$ для $A(x + na) = A(x)$.

В отсутствии внешнего магнитного поля общее решение уравнения (3.2) удовлетворяет теореме Блоха:

$$f_{kq}(x + a) = f_{kq}(x)e^{iqa} , \quad (3.18)$$

где q — квазиимпульс. Волновая функция основного состояния в соответствии с осцилляционной теоремой не имеет нулей, соответствует квазиимпульсу $q = 0$ и является четной функцией по x . Таким образом, мы имеем $f'_k(0) = f'_k(w) = 0$. Следовательно, решение задачи с периодическим магнитным полем при $H = 0$ совпадает с решением, описывающим сверхпроводящий зародыш в сверхпроводящей пленке толщиной w , находящейся в однородном магнитном поле B_0 . В соответствии с работой [123] можно найти вид волновой функции и энергию основного состояния $E = (T_{c0} - T_c)/\Delta T_c^{orb}$ как функцию импульса k . Поведение получающейся зависимости $E(k)$ существенным образом зависит от параметра w/L .

Можно выделить два различных режима: для малых значений $w/L < 2.5$ существует единственный минимум $E(k)$ при $k = w/(2L^2)$, который соответствует зарождению сверхпроводимости над центром домена. Для больших значений w/L имеется два минимума с равной энергией при k_1^{min} и k_2^{min} ($k_1^{min} + k_2^{min} = w/L^2$). Для $w/L \gg 1$ координаты этих минимумов k_1^{min} и k_2^{min} , как и значение соответствующей минимальной энергии E , достигают значений, соответствующих случаю изолированной доменной стенки (раздел 3.2.1). Сверхпроводящие зародыши, структура которых зависит от значений импульса k , могут появиться как на доменных стенках при $x = na$ (для k_1^{min}), так и на доменных стенках противоположного знака при $x = w + na$ (для k_2^{min}). Таким образом, зародыши, расположенные на соседних доменных стенках, не взаимодействуют между собой в рамках линеаризованной теории Гинзбурга-Ландау. Зависимость критической температуры от амплитуды поля индуцированного периодической доменной структурой B_0 описывается формулой:

$$1 - T_c/T_{c0} = \frac{4\xi_0^2}{w^2} F\left(\frac{\pi B_0 w^2}{2\Phi_0}\right),$$

где $F(z)$ — есть функция, описывающая критическую температуру сверхпроводящей пленки в однородном магнитном поле B_0 [123] (см. Рис. 28).

С учетом конечной ширины доменов w критическая температура $T_c(B_0)$ оказывается большей, чем в случае изолированной доменной границы ($T_c(H = 0) = T_{c0} - E_{min}\Delta T_c^{orb}$ — см. стр.83). Такая разница между температурами T_c становится более значительной для малых значений параметра $z = \pi B_0 w^2/(2\Phi_0)$, когда зародыш уже нельзя считать локализованным на доменной границе (см. Рис. 28).

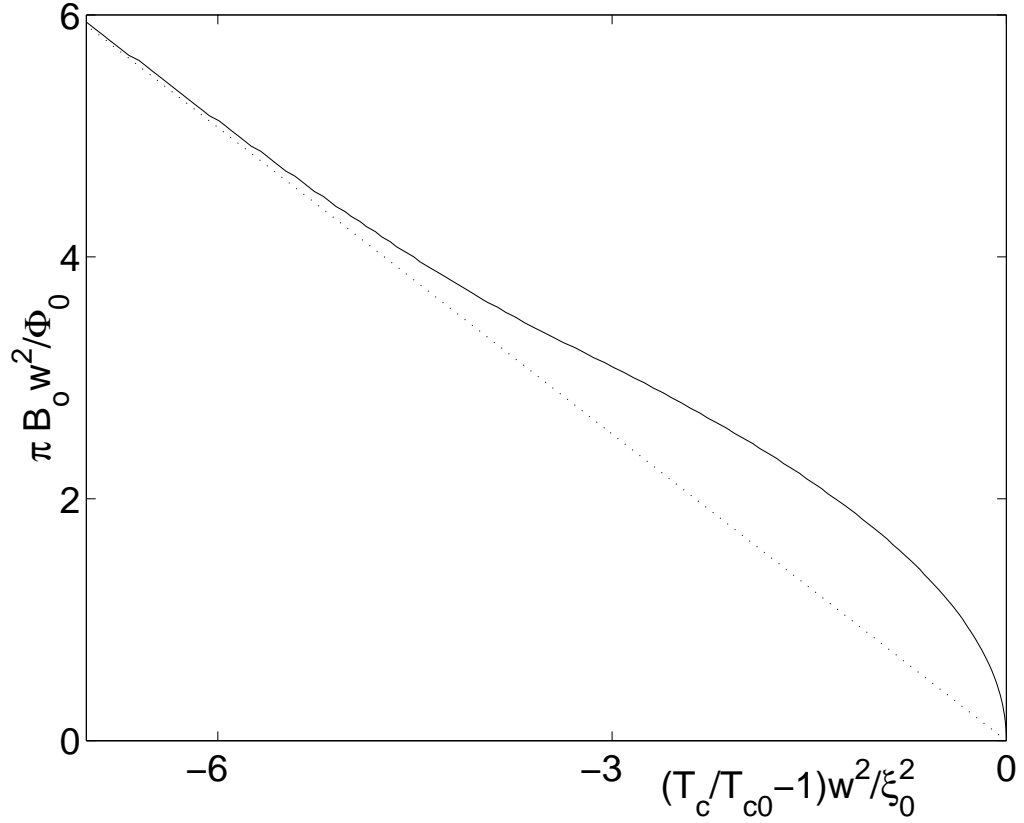


Рис. 28. Зависимость критической температуры появления локализованной сверхпроводимости в периодической доменной структуре от параметров доменной структуры в отсутствии внешнего поля.

Для больших значений параметра z (предел изолированной доменной границы) функция $F(z) \rightarrow z/1.69$, что соответствует зависимости $T_c(B_0)$ для зародыша локализованного на доменной границе.

Прикладывая внешнее магнитное поле H , мы более не можем пользоваться теоремой Блоха, и решение $f_k(x)$ становится локализованным. Энергия основного состояния $E(k)$ становится периодической функцией импульса k : $E(k + 4\pi H w / \Phi_0) = E(k)$. Поведение верхнего критического и структура сверхпроводящих зародышей определяется параметром w/L . Результаты вычислений проведенных по той же численной схеме, что и вычисления в разделе 3.2.2, представлены на Рис. 29.

Для больших значений w/L линия фазового перехода близка к полученной в разделе 3.2.1 (Рис. 25), за исключением малой области температур близкой к T_{c0} :

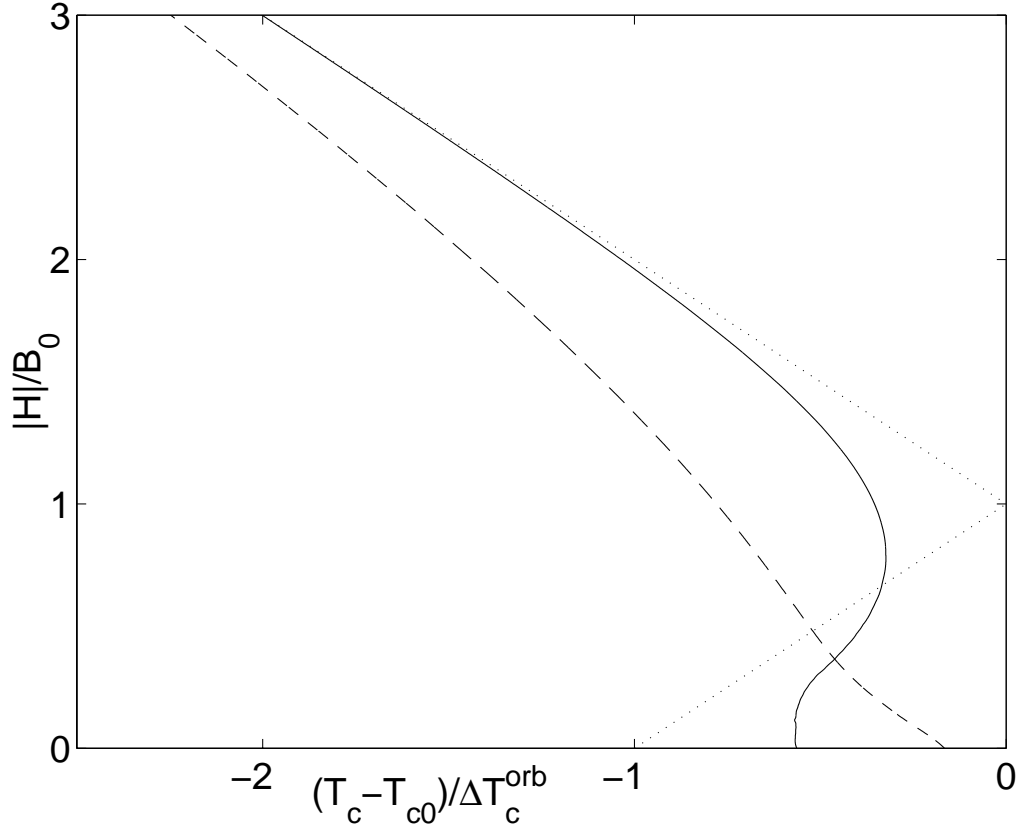


Рис. 29. Температурная зависимость верхнего критического поля для периодической доменной структуры в SF системе с толстым ферромагнитным слоем для $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 5$ (сплошная линия) и $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 1$ (штриховая линия).

$\Delta T \sim 4T_{c0}\xi_0^2/w^2$. Вне этой узкой области температур в слабых полях ($H < B_0$) волновые функции локализованы на доменных границах (Рис. 30).

Координаты локализованных зародышей сдвигаются на ma при сдвиге импульса на величину $4\pi Hwm/\Phi_0$ (m — целое). Надо отметить, что в относительно слабых полях $H < B_0$ мы наблюдали нетривиальное распределение параметра порядка для выделенного дискретного набора значений внешнего магнитного поля, удовлетворяющего условию $k_2^{min} - k_1^{min} = 4\pi Hwm/\Phi_0$: волновая функция основного состояния $f_k(x)$ имела два ярко выраженных пика (см. Рис. 31). Такая ситуация есть естественное следствие эквивалентности импульсов k и $k' = k + 4\pi Hwm/\Phi_0$ и получающегося резонансного взаимодействия зародышей локализованных на доменных стенках на расстоянии $w(2m - 1)$.

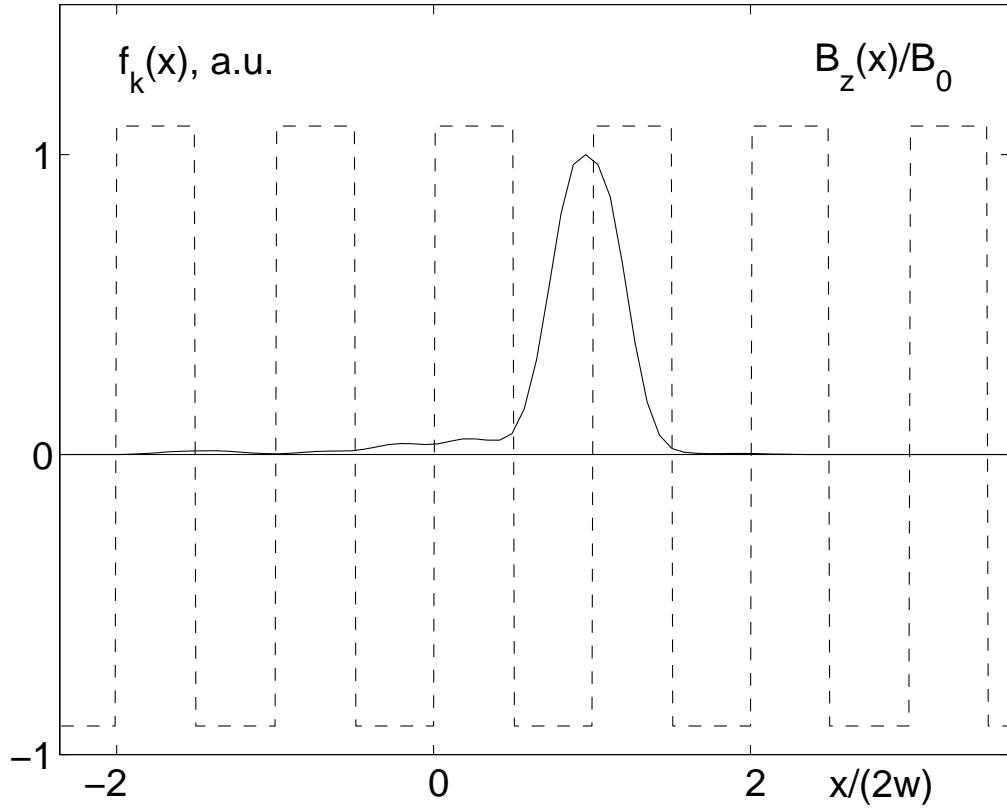


Рис. 30. Пространственное распределение параметра порядка (сплошная линия) локализованного на доменной стенке в SF системе с периодической доменной структурой при значении параметра $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 5$. Распределение магнитного поля показано штриховой линией.

Для не очень больших значений $w/L < 2.0$ критическая температура является монотонной функцией внешнего магнитного поля из-за сильного перекрытия волновых функций соответствующих различным доменам. Таким образом, волновую функцию нельзя более считать локализованной на отдельном домене (Рис. 32). Тем не менее, даже в этом случае можно наблюдать изменение наклона линии фазового перехода на плоскости $H-T$ (штриховая линия на Рис. 29).

Зависимость верхнего критического поля от температуры, обсуждаемая выше, не является спецификой пространственного распределения магнитного поля в виде меандра. Мы также исследовали зарождение сверхпроводимости в периодическом гармоническом поле $B_z(x) = B_0 \cos(2\pi x/a) + H$, что соответствует большей

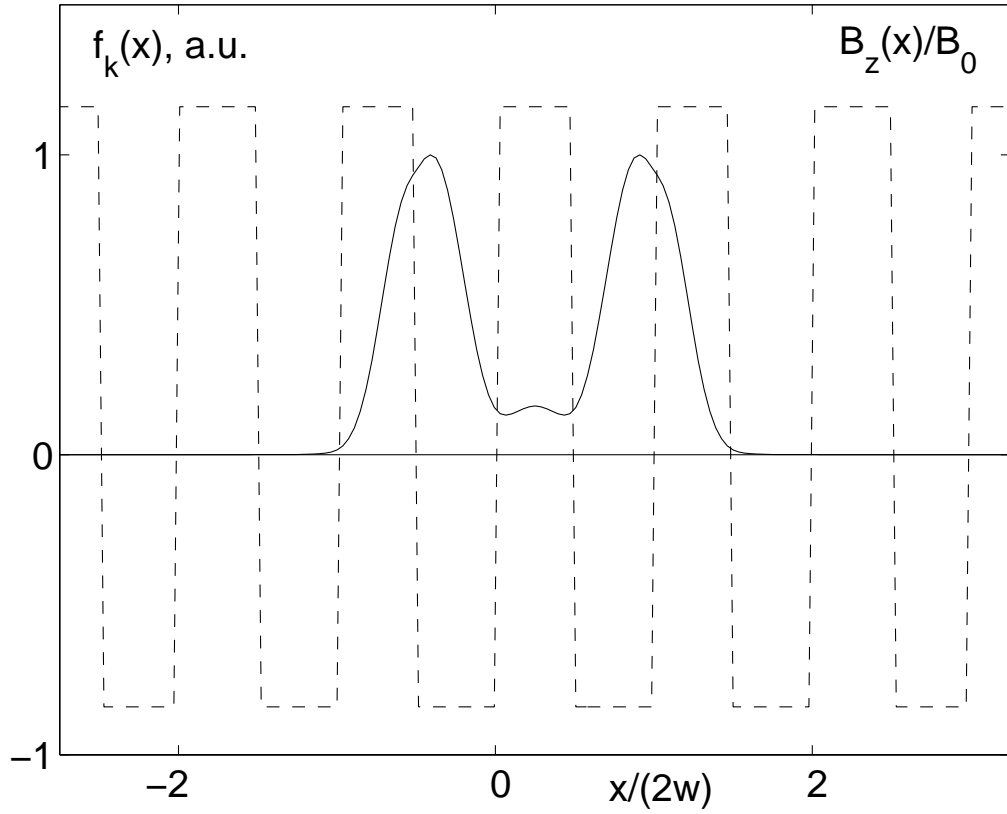


Рис. 31. Двухпиковая структура волновой функции основного состояния (сплошная линия) для периодической доменной структуры при параметрах $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 5$ и $H / B_0 = 0.16$. Распределение магнитного поля показано штриховой линией.

толщине диэлектрической прослойки. Фазовая диаграмма такой системы практически совпадает с ранее исследованной при одинаковых значениях параметра $\pi B_0 w^2 / \Phi_0$ (Рис. 29). Критическая температура является монотонной функцией внешнего магнитного поля когда $a/L < 4.5$. При больших значениях параметра $a/L \gg 1$ для $H < B_0$ зависимость критической температуры от внешнего поля может быть проанализирована, используя локальное описание развитое в разделе 3.2.2. Характерный размер сверхпроводящего зародыша и критическая температура появления сверхпроводящего параметра порядка определяются следующими выражениями:

$$\ell = a \sqrt[3]{\frac{\Phi_0}{2\pi^2 B_0 a^2}} \left(1 - \frac{H^2}{B_0^2}\right)^{-1/6},$$

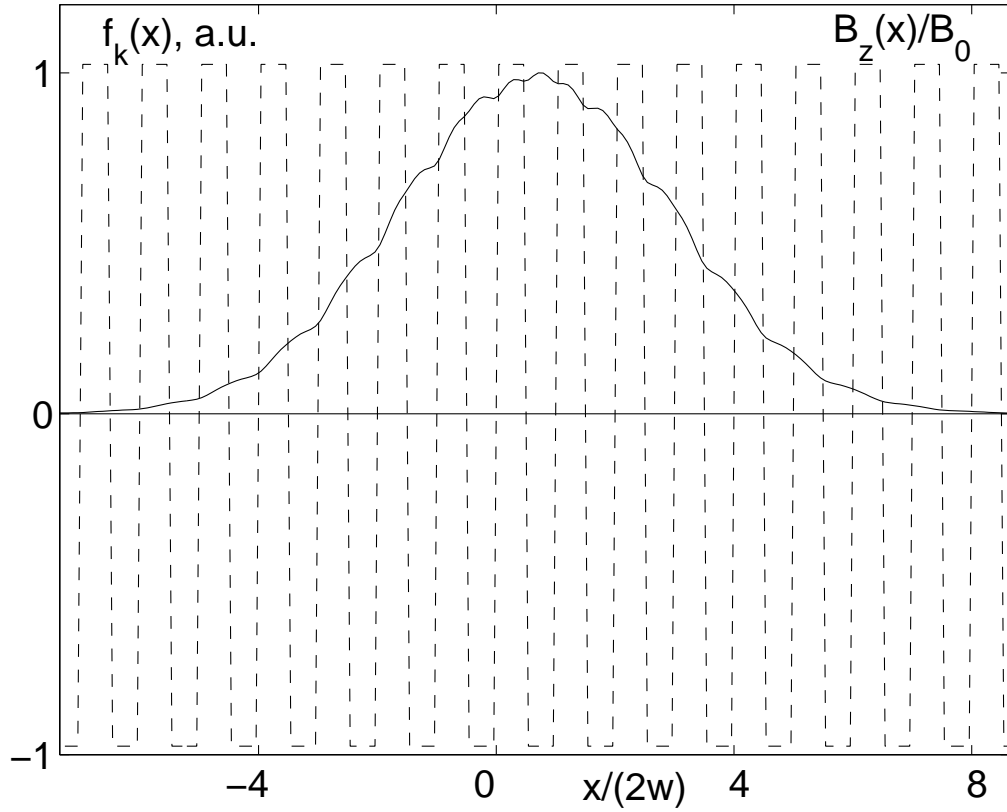


Рис. 32. Пространственное распределение волновой функции основного состояния для периодической структуры при параметрах $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 1$ и $H/B_0 = 0.025$ (сплошная линия). Распределение магнитного поля показано штриховой линией.

$$\left(1 - \frac{T_c}{T_{c0}}\right) = \varepsilon_0 \frac{\xi_0^2}{a^2} \sqrt[3]{\frac{2\pi^2 B_0 a^2}{\Phi_0} \left(1 - \frac{H^2}{B_0^2}\right)}. \quad (3.19)$$

Область применимости такого описания определяется условиями:

$$\left(\frac{H/B_0}{1 - H^2/B_0^2}\right)^{2/3} \ll \left(\frac{2\pi^2 B_0 a^2}{\Phi_0}\right)^{1/3}$$

и

$$\sqrt[3]{\frac{2\pi^2 B_0 a^2}{\Phi_0}} \gg 1.$$

Приведем некоторые оценки физических параметров систем, где можно было бы наблюдать появление сверхпроводимости локализованной на доменных стенках. Возьмем параметры широко известного низкотемпературного сверхпроводника Nb: $T_c \sim 9$ К и $dH_{c2}/dT \sim 0.5$ кГс/К) и типичные значения намагниченности

для магнитных диэлектриков $4\pi M \sim 1 - 10$ кЭ. Соответствующее изменение критической температуры возникновения сверхпроводимости над доменной стенкой составит вполне заметную величину: $\delta T_c \sim 1 - 3$ К. Толщина сверхпроводящей пленки должна быть существенно меньше ширины доменов и составлять величину порядка несколько длин когерентности. Таким образом, мы приходим к выводу, что предсказанные в этой главе эффекты могут быть наблюдаемы и представляют значительный интерес.

Следует отметить, что немонотонная зависимость $T_c(H)$ для SF структур с двумерными доменами (bubble domains) в ферромагнитной пленке Co/Pt, нанесенной на пленку Pb, представленная в работе [77], качественно совпадает с результатами полученными в данной главе. Хотя двумерные домены, наблюдаемые в цитированной работе, и плохо описываются одномерным распределением намагниченности, однако, и в этой ситуации можно выделить два сценария появления локализованной сверхпроводимости: на доменных стенках и вдали от них. В частности, в сильных магнитных полях ($H > 150$ Э) наблюдалась линейная зависимость верхнего критического поля от температуры, что, по-видимому, соответствует зарождению сверхпроводимости при полях $H > B_0$, рассмотренному выше. При полях $H < 150$ Э наблюдалась нелинейная температурная зависимость верхнего критического поля, похожая на температурную зависимость для периодической доменной структуры при $\pi B_0 w^2 / \Phi_0 = 2.5$ (переходный режим от монотонной температурной зависимости верхнего критического поля к немонотонной зависимости, изображенных на рисунке Рис. 29).

В общем случае температурные зависимости критического магнитного поля могут иметь разный характер (Рис. 25, 26, 29), который определяется конкретным видом доменной структуры и методом определения критического магнитного поля. Аккуратные измерения резистивного и магнитного переходов (включая измерения величины уширения перехода) на образцах с контролируемой доменной структурой могли бы быть весьма полезными для интерпретации фазовых диаграмм и предоставить важную информацию о свойствах сверхпроводимости, локализованной на доменных границах.

В заключении необходимо отметить, что наличие локализованных сверхпрово-

дящих каналов вдоль доменных границ в SF структуре предоставляет уникальную возможность для создания систем, в которых можно управлять количеством, величиной и местоположением сверхпроводящих каналов путем изменения доменной структуры. Сверхпроводящий канал в этом случае следует за доменной стенкой, что предполагает возможность управления проводимостью в SF системе, помещенной между двумя неподвижными электродами.

3.4. Выводы.

Основные результаты, полученные в данной главе могут быть сформулированы следующим образом:

На основе решения линеаризованного уравнения Гинзбурга–Ландау было проведено изучение формирования сверхпроводимости в одномерном неоднородном магнитном поле, источником которого может служить ферромагнитная пленка с доменной структурой. Показано, что линия фазового перехода в сверхпроводящее состояние на плоскости $H-T$ определяется конкуренцией между образованием локализованной сверхпроводимости под доменной стенкой и зарождением сверхпроводимости между ними. Найдены температурные зависимости критического поля появления локализованной сверхпроводимости для различных распределений неоднородного магнитного поля.

По результатам, полученным в этой главе, опубликованы работы (x)–(xii).

Заклучение

В представленной работе рассмотрен ряд задач о структуре и свойствах связанных вихревых комплексов в сверхпроводниках с анизотропным спариванием и мезоскопических системах.

В рамках теории Гинзбурга–Ландау была проанализирована структура сингулярного вихря в высокотемпературных сверхпроводниках с анизотропным $(d + s)$ -типом спаривания для магнитного поля произвольной ориентации относительно осей кристалла. В частности, такое описание может быть применимо для соединений $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_7$ и $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$. Рассмотрены случаи как сильной, так и слабой пространственной анизотропии. Обнаружено качественное изменение вихревой структуры при отклонении магнитного поля от оси c на угол, превышающий критическое значение θ_{max} : при отклонении магнитного поля на угол $\theta < \theta_{max}$ в коре d -вихря находятся четыре вихря s -компоненты и один s -антивихрь, при $\theta > \theta_{max}$ аннигилирует с одним из s -вихрей и в результате в коре d -вихря остаются три вихря s -компоненты.

Найденное в работе пространственное распределение компонент параметра порядка позволило найти угловые зависимости нижнего критического поля H_{c1} и тензора вязкости вихря, обладающие тетрагональной симметрией в базовой кристаллографической плоскости ab . Показано, что дополнительные потери, связанные с релаксацией s -компоненты сверхпроводящего параметра порядка индуцированной в коре d -вихря, приводят к увеличению вязкости вихря по сравнению с однокомпонентными сверхпроводниками.

В работе предсказано существование в высокотемпературных сверхпроводниках с $(d + s)$ -типом спаривания несингулярного вихревого решения, появляющегося за счет спонтанного формирования зародыша s -компоненты в центре вихревой линии. Найдена критическая температура фазового перехода второго рода от сингулярных вихрей к несингулярным. Даже в случае ориентации магнитного поля вдоль оси c несингулярные вихри в таких соединениях не обладают тетрагональной симметрией, присущей сингулярным вихрям. Также в рамках полуклассического описания продемонстрировано, что формирование зародыша s -компоненты в центре несингулярной вихревой линии должно приводить к выталкиванию ну-

лей спектра энергии квазичастиц из кора вихря. Таким образом, повсюду в коре несингулярного вихря сверхпроводящая щель отлична от нуля, что указывает на нетривиальный спектр квазичастиц внутри несингулярных вихревых линий. Такие специфические особенности должны приводить к ряду интересных эффектов, таких как нетривиальные транспортные и термодинамические свойства вихревого состояния, анизотропия динамических характеристик в ab -плоскости, уменьшение эффекта пиннинга и т.п.

В работе рассмотрена структура различных типов вихревых решений в мезоскопическом сверхпроводнике квадратной формы, содержащем дефекты, и построена кривая намагничивания такой системы. Исследован характер особенностей на кривой намагничивания $M(H)$, появляющихся при распаде связанных вихревых состояний (вихревых молекул) и многоквантовых вихрей. Также продемонстрировано, что на кривой $M(H)$ присутствует скачок, не связанный с изменением числа вихрей в образце, а вызванный переориентацией двух вихрей относительно сторон квадрата. Эти результаты представляют интерес как в связи с интерпретацией экспериментальных данных, так и в связи с возможным применением мезоскопических сверхпроводников в микроэлектронике.

Также в работе исследована структура экзотического связанного вихревого состояния, состоящего из четырех вихрей и одного антивихря, являющегося аналогом трехквантового вихря в сверхпроводнике. Найден размер такого вихревого комплекса, существующего в сильных магнитных полях ($H_{c2} < H < H_{c3}$) и показано, что он существенно меньше длины когерентности. Продemonстрировано, что существование связанного вихревого состояния с антивихрем крайне чувствительно к наличию дефектов малого размера, нарушающих идеальную тетрагональную симметрию сверхпроводника. Таким образом показано, что наблюдение такого вихревого образования в мезоскопических сверхпроводниках будет крайне затруднительным.

Также в работе исследовались условия зарождения локализованной сверхпроводимости на доменных границах в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик. Было продемонстрировано, что образование локализованных зародышей должно приводить к уширению линии сверхпроводящего перехода по темпе-

ратуре, что может быть наблюдаемо, например, в измерениях зависимости сопротивления от температуры. Возможны два типа температурной зависимости верхнего критического поля вблизи T_c , один из которых соответствует появлению так называемой "возвратной" сверхпроводимости. Сделанные в работе оценки показывают, что переход между этими двумя режимами вполне может быть обнаружен экспериментально. Решение задачи о критическом зародыше в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик позволяет не только объяснить экспериментально наблюдаемые линии фазового перехода на плоскости $H-T$, но и позволит в дальнейшем найти структуру вихревого состояния в таких системах.

Полученные в ходе выполнения диссертационной работы результаты ставят ряд новых задач, решение которых представляет интерес в связи с дальнейшим развитием теории смешанного состояния. В частности, можно выделить следующие задачи:

Провести анализ спектра квазичастиц в сингулярных и несингулярных вихрях. В диссертации подобный анализ был выполнен на основе простейшего полуклассического описания, которое лишь качественно описывает особенности квазичастичного спектра в коре вихревой линии. В связи с этим, представляется необходимым решить квантовомеханическую задачу о спектре квазичастиц в корах сингулярного и несингулярного вихрей. Решение этой задачи должно послужить отправной точкой для описания различных транспортных свойств смешанного состояния в высокотемпературных сверхпроводниках.

Также представляет интерес и задача о структуре смешанного состояния в высокотемпературных сверхпроводниках в сильных полях, а именно вопрос о формировании решетки вихрей из несингулярных вихрей. Такая задача может быть решена в рамках используемой в работе теории Гинзбурга—Ландау, что позволит найти линию фазового перехода от сингулярных вихрей к несингулярным во всем диапазоне магнитных полей.

Для дальнейшего исследования смешанного состояния в мезоскопических сверхпроводниках, не обладающих аксиальной симметрией, представляет интерес развитие аналитического описания структуры различных вихревых решений с учетом

эффектов экранировки. В настоящей работе этот эффект не рассматривался, но очевидно, что для достаточно толстых пленок ($d_s \sim \lambda$) сверхпроводников с малым значением параметра $\kappa = \lambda/\xi$ (в частности, к таким относится Al) важно учитывать эффекты экранирования магнитного поля.

Значительный интерес как с фундаментальной, так и практической точки зрения представляет дальнейшее исследование структуры сверхпроводящего параметра порядка в планарных системах сверхпроводник—ферромагнетик. Здесь можно выделить следующие задачи, тесно связанные с результатами полученными в работе. Во-первых, это вопрос о структуре и свойствах вихревой решетки в таких гибридных системах, что является естественным продолжением решенной в работе задачи о критическом зародыше. Также, в связи с возможностью управления положением и формой локализованных зародышей внешним магнитным полем, значительный интерес представляет и решение задачи о протекании тока вдоль локализованных сверхпроводящих каналов.

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность своему научному руководителю А. С. Мельникову за искренний интерес и постоянную помощь на всех этапах работы над диссертацией; и поблагодарить всех сотрудников ИФМ РАН, совместная работа и общение с которыми сделали возможным появление настоящей диссертации, особенно И. А. Шерешевского — за помощь и постоянный интерес к работе; а также А. А. Андропова, А. А. Фраермана, И. М. Нефёдова, П. П. Вышеславцева, Ю. Н. Ноздрина, А. Ю. Аладышкина, А. С. Быстрова, В. В. Курина, И. Д. Токмана, А. В. Самохвалова и А. В. Соколова — за критические замечания и ценные советы при обсуждении результатов диссертации.

Автор выражает свою признательность И. Л. Максимова, Г. М. Максимовой и Д. Ю. Водолазову (Нижегородский государственный университет) за полезные замечания.

Приложение: Используемая численная схема решения нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау.

Использованный в работе метод численных расчетов позволяет детально исследовать нелинейный режим нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау во всем диапазоне изменения магнитного поля. В то же время, исследование мезоскопических сверхпроводников численными методами в значительной мере усложняется тем, что в таких системах могут реализовываться различные метастабильные вихревые состояния, и, следовательно, результаты численного моделирования будут в существенной мере определяться начальными условиями. В этом случае эволюция системы при изменении магнитного поля будет очень чувствительна к конкретному виду динамической модели, применяемой для вычислений.

Для численного моделирования смешанного состояния в мезоскопических сверхпроводниках использовалась градиентно-инвариантная разностная схема нестационарных уравнений Гинзбурга–Ландау, позволяющая контролировать динамику фазовых переходов между различными вихревыми состояниями, что является важным при анализе кривых намагниченности, полученных экспериментально.

Уравнения (2.1)-(2.2) аппроксимировались на квадратной сетке в плоскости (x, y) . Оси выбирались параллельно граням образца. Для сохранения градиентной инвариантности сеточного аналога дифференциального оператора $(\nabla - i\mathbf{A})$ использовался подход, развитый в работе [131]. Уравнение (2.1) решалось явным методом Эйлера, при решении уравнения (2.2) использовался метод, описанный в работе [132], допускающий быстрое решение задачи Неймана с использованием преобразования Фурье. Заметим, что как дифференциальные уравнения (2.1)-(2.2), так и их разностные аналоги обеспечивают равенство нулю электрического потенциала в стационарном состоянии. Это позволяет с большой точностью определить, достиг ли текущий численный счет стационарного состояния или нет.

Детектирование вихря в ячейке (x_i, y_j) осуществлялось по сеточному аналогу

критерия (В.1):

$$\arg(\Psi_{i,j}^* \Psi_{i,j+1}) + \arg(\Psi_{i,j+1}^* \Psi_{i+1,j+1}) + \arg(\Psi_{i+1,j+1}^* \Psi_{i+1,j}) + \arg(\Psi_{i+1,j}^* \Psi_{i,j}) = 2\pi N. \quad (\text{П.1})$$

Здесь $\Psi_{i,j} = \Psi(x_i, y_j)$ — комплексная функция параметра порядка определенная на сетке, $\arg(\Psi)$ — аргумент комплексного числа $\Psi_{i,j}$, определенный в интервале $(-\pi, \pi]$. Если $N = \pm 1$, значит в ячейке с координатами (x_i, y_j) находится вихрь с завихренностью N . Если $N = 0$, вихря в ячейке нет. Необходимо заметить, что на прямоугольной сетке невозможно существование многоквантовых вихрей, то есть, $\max |N| = 1$ для любой ячейки сетки. Тем не менее, многоквантовые вихри с $N \neq \pm 1$ проявляются в сеточной аппроксимации как ансамбль близко расположенных $|N|$ одноквантовых вихрей. Проверить, что такой набор ”сеточных” вихрей есть многоквантовый вихрь, можно лишь уменьшая шаг сетки — при этом расстояние между ”сеточными” вихрями, измеренное в шагах сетки, будет оставаться минимальным.

Большинство расчетов во второй главе были проведены на квадратной сетке с шагом $\Delta x = \Delta y = \xi/16$ для стороны квадрата $L = 8\xi$ и с шагом $\Delta x = \Delta y = \xi/64$ для $L = 4\xi$.

Характерное время релаксации нестационарной теории Гинзбурга–Ландау u определяется механизмами распаривания. В случае сильной электрон–фононной релаксации $u = 5.79$ [129]. Для сверхпроводников с высокой концентрацией магнитных примесей $u = 12$ [130]. В проведенных численных расчетах использовалось $u = 10$, при этом было проверено, что изменение этой константы не влияет на структуру устанавливающегося стационарного состояния.

Численный анализ структуры несингулярных вихрей был проведен, основываясь на уравнениях (1.42), в рамках метода описанного выше, обобщенного на случай двух компонент. Оси x, y выбирались вдоль кристаллографических осей a и b , соответственно. Для определения местоположения вихря какой-либо компоненты параметра порядка также использовался критерий (П.1). Большинство численных расчетов проводилось на сетках, содержащих 128×128 ячеек с шагом $\Delta x = \Delta y = \xi_d/4$.

Список публикаций автора по теме диссертации

- (i) A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, P. P. Vysheslavtsev, *Nonsingular vortices in $(d+s)$ -wave superconductors*, Physical Review B, Vol. 62, N. 17, 11820–11825 (2000).
- (ii) П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефёдов, Д. А. Рыжов, И. А. Шерешевский, *Несингулярные вихри в высокотемпературных сверхпроводниках*, Тезисы докладов 32-го Всероссийского совещания по физике низких температур (ФНТ32), стр. 88-89, Казань, (2000).
- (iii) П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефёдов, Д. А. Рыжов, И. А. Шерешевский, *Несингулярные вихри в высокотемпературных сверхпроводниках*, Сборник тезисов докладов 5-ой Нижегородской сессии молодых ученых, стр. 13-14, Нижний Новгород (2000).
- (iv) A. S. Bystrov, A. S. Mel'nikov, and D. A. Ryzhov, *Structure of tilted vortices and angular dependence of lower critical field in anisotropic $(d+s)$ -wave superconductors*, Journal of Physics: Condensed Matter, Vol. 13, N. 26, 6005–6013 (2001).
- (v) А. С. Быстров, П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефёдов, Д. А. Рыжов, И. А. Шерешевский, *Вихри в анизотропных сверхпроводниках с нетривиальным спариванием*, Сборник тезисов докладов 6-ой Нижегородской сессии молодых ученых, стр. 15-16, Нижний Новгород (2001).
- (vi) A. S. Mel'nikov, I. M. Nefedov, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, V. M. Vinokur, P. P. Vysheslavtsev, *Vortex states and magnetization curve of square mesoscopic superconductors*, Physical Review B, Vol. 65, N. 14, 140503-1(R)–140503-4(R) (2002).
- (vii) В. М. Винокур, П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефёдов, Д. А. Рыжов, И. А. Шерешевский, *Смешанное состояние и кривая намагниченности мезоскопических сверхпроводников*, Тезисы докладов 7-ой Нижегородской сессии молодых ученых, стр. 94-95, Нижний Новгород (2002).

- (viii) A. S. Bystrov, A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, I. M. Nefedov, I. A. Shereshevskii, P. P. Vysheslavtsev, *Singular and nonsingular vortices in high-temperature superconductors*, Physica C, Vol. 388–389, 657–658 (2003).
- (ix) A. S. Bystrov, A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, I. M. Nefedov, I. A. Shereshevskii, P. P. Vysheslavtsev, *Singular and nonsingular vortex structures in high-temperature superconductors*, Modern Physics Letters B, Vol. 17, N. 10–12, 621–626 (2003).
- (x) A. Yu. Aladyshkin, A. I. Buzdin, A. A. Fraerman, A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, A. V. Sokolov, *Domain wall superconductivity in hybrid superconductor–ferromagnetic structures*, Physical Review B, Vol. 68, N. 18, 184508-1–184508-7 (2003).
- (xi) А. Ю. Аладышкин, П. П. Вышеславцев, А. С. Мельников, И. М. Нефёдов, Д. А. Рыжов, А. В. Соколов, А. А. Фраерман, И. А. Шерешевский, *Влияние периодического магнитного поля на критическую температуру тонкой сверхпроводящей пленки*, Тезисы докладов 33-го Всероссийского совещание по физике низких температур (ФНТ33), стр. 132-133, Екатеринбург, (2003).
- (xii) A. S. Mel'nikov, A. Yu. Aladyshkin, A. I. Buzdin, A. A. Fraerman, D. A. Ryzhov, A. V. Sokolov, *Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors and hybrid S/F structures*, 9th Joint Vortex Dynamics and Vortex Matter Workshop, Oleron, France — Book of abstract, p. 51 (2003).

Библиография

Список литературы

- [1] Л. В. Шубников, В. И. Хоткевич, Ю. Д. Шепелев, Ю. Н. Рябинин, *Магнитные свойства сверхпроводящих металлов и сплавов*, ЖЭТФ, Т. 7, Вып. 2, 221–237 (1937).
- [2] В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау, *К теории сверхпроводимости*, ЖЭТФ, Т. 20, 1064 (1950).
- [3] А. А. Абрикосов, *О магнитных свойствах сверхпроводников второй группы*, ЖЭТФ, Т. 32, Вып. 6, 1442–1452 (1957).
- [4] M. Sigrist and K. Ueda, *Phenomenological theory of unconventional superconductivity*, Rev. Mod. Phys., Vol. 63, N. 2, 239–311 (1991).
- [5] С. Г. Овчинников, *Экзотическая сверхпроводимость и магнетизм в рутенатах*, УФН, Т. 173, Вып. 1, 27–50 (2003).
- [6] C. C. Tsuei and J. R. Kirtley, *Pairing symmetry in cuprate superconductors*, Rev. Mod. Phys. 72, N. 4, 969–1016 (2000).
- [7] D. J. Van Harlingen, *Phase-sensitive tests of the symmetry of the pairing state in the high-temperature superconductors — Evidence for $d_{x^2-y^2}$ symmetry*, Rev. Mod. Phys. 67, N. 2, 515–535 (1995).
- [8] В. П. Минеев, К. В. Самохин, *Введение в теорию необычной сверхпроводимости*, М.: Издательство МФТИ, (1998).
- [9] Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика, часть II. Теория конденсированного состояния*, М.: Наука, 2002.
- [10] Е. Г. Максимов, *Проблема высокотемпературной сверхпроводимости. Современное состояние*, УФН, Т. 170, Вып. 10, 1033–1061 (2000).

- [11] В. Л. Гинзбург, *Сверхпроводимость: позавчера, вчера, сегодня, завтра*, УФН, Т. 170, Вып. 6, 620–630 (2000).
- [12] A. J. Berlinsky, A. L. Fetter, M. Franz, C. Kallin, and P. I. Soininen, *Ginzburg-Landau Theory of Vortices in d -Wave Superconductors*, Phys. Rev. Lett., Vol. 75, N. 11, 2200–2203 (1995).
- [13] M. Franz, C. Kallin, P. I. Soininen, A. J. Berlinsky, and A. L. Fetter, *Vortex state in a d -wave superconductor*, Phys. Rev. B, Vol. 53, N. 9, 5795–5814 (1996).
- [14] R. Heeb, A. van Otterlo, M. Sigrist, and G. Blatter, *Vortices in d -wave superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 54, N. 13, 9385–9398 (1996).
- [15] T. A. Tokuyasu, D. W. Hess, and J. A. Sauls, *Vortex states in an unconventional superconductor and the mixed phases of UPt_3* , Phys. Rev. B Vol. 41, N. 13, 8891–8903 (1990).
- [16] Ю. С. Бараш, А. С. Мельников, *Структура вихрей в экзотических сверхпроводниках вблизи нижнего критического поля*, ЖЭТФ, Т. 100, 307–322 (1991).
- [17] Г. Е. Воловик, *Сверхтекучие свойства A -фазы He^3* , УФН, Т. 143, Вып. 1, 73–109 (1984).
- [18] I. A. Luk'yanchuk and M. E. Zhitomirsky, *Magnetic properties of unconventional superconductors*, Superconductivity Review, Vol. 1, 207 (1995).
- [19] Н. М. Плакида, *Высокотемпературные сверхпроводники*, М.: Международная программа образования (1996).
- [20] J. J. Vicente Alvarez, C. A. Balseiro, and G. C. Buscaglia, *Vortex structure in d -wave superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 58, N. 17, 11181–11184 (1998).
- [21] E. V. Thuneberg, *Identification of vortices in superfluid 3B* , Phys. Rev. Lett., Vol. 56, N. 4, 359–362 (1986);
- [22] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, *Vortices with spontaneously broken axisymmetry in ^3He-B* , Phys. Rev. Lett., Vol. 56, N. 4, 363–366 (1986).

- [23] M. M. Salomaa and G. E. Volovik, *Exotic states in the cores of quantised vortices for superfluids and superconductors*, J. Phys.: Cond. Matt., Vol. 1, N. 1, 277–288 (1989).
- [24] M. Sigrist, D. B. Bailey, and R. B. Laughlin, *Fractional Vortices as Evidence of Time-Reversal Symmetry Breaking in High-Temperature Superconductors*, Phys. Rev. Lett., Vol. 74, N. 16, 3249–3252 (1995).
- [25] B. J. Baelus and F. M. Peeters, *Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples*, Phys. Rev. B, Vol. 65, N. 10, 104515-1–104515-12 (2002).
- [26] H. J. Fink and A. G. Presson, *Magnetic Irreversible Solution of the Ginzburg-Landau Equations*, Phys. Rev., Vol. 151, N. 2, 219–228 (1966).
- [27] H. J. Fink and A. G. Presson, *Superheating of the Meissner State and the Giant Vortex State of a Cylinder of Finite Extent*, Phys. Rev., Vol. 168, N. 2, 399–402 (1968).
- [28] A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert, *Phase transitions in individual sub-micrometre superconductors*, Nature, Vol. 390, 259–262 (1997).
- [29] P. Singha Deo, V. A. Schweigert, F. M. Peeters, A. K. Geim, *Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks*, Phys. Rev. Lett., Vol. 79, N. 23, 4653–4656 (1997).
- [30] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, *Phase transitions in thin mesoscopic superconducting disks*, Phys. Rev. B, Vol. 57, N. 21, 13817–13832 (1998).
- [31] V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. Singha Deo, *Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks*, Phys. Rev. Lett., Vol. 81, N. 13, 2783–2786 (1998).
- [32] A. K. Geim, S. V. Dubonos, J. J. Palacios, I. V. Grigorieva, M. Henini, J. J. Schermer, *Fine Structure in Magnetization of Individual Fluxoid States*, Phys. Rev. Lett., Vol. 85, N. 7, 1528–1531 (2000).

- [33] S. V. Yampolskii and F. M. Peeters, *Vortex structure of thin mesoscopic disks with enhanced surface superconductivity*, Phys. Rev. B, Vol. 62, N. 14, 9663–9674 (2000).
- [34] V. Hakim, A. Lemaitre, and K. Mallick, *Giant vortices in the Ginzburg-Landau description of superconductivity*, Phys. Rev. B, Vol. 64, N. 13, 134512-1–134512-15 (2001).
- [35] D. Saint-James, P. G. Gennes, *Onset of superconductivity in decreasing fields*, Physics Letters, Vol. 7, N. 5, 306–308 (1963).
- [36] D. Saint-James, *Etude du champ critique H_{c3} dans une geometrie cylindrique*, Physics Letters, Vol. 15, N. 1, 13–15 (1965).
- [37] V. Bruyndoncx, J. G. Rodrigo, T. Puig, L. Van Look, V. V. Moshchalkov, R. Jonckheere, *Giant vortex state in perforated aluminum microsquares*, Phys. Rev. B, Vol. 60, N. 6, 4285–4292 (1999).
- [38] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, A. V. Bruyndoncx, V. V. Moshchalkov, *Symmetry-induced formation of antivortices in mesoscopic superconductors*, Nature, Vol. 408, 833–835, (2000).
- [39] M. Morelle, V. Bruyndoncx, R. Jonckheere, and V. V. Moshchalkov, *Critical temperature oscillations in magnetically coupled superconducting mesoscopic loops*, Phys. Rev. B, Vol. 64, N. 6, 064516-1–064516-7 (2001).
- [40] J. J. Palacios, F. M. Peeters, and B. J. Baelus, *Effective lowest Landau level treatment of demagnetization in superconducting mesoscopic disks*, Phys. Rev. B, Vol. 64, N. 13, 134514-1–134514-6 (2001).
- [41] W. A. Little and R. D. Parks, *Observation of quantum periodicity in the transition temperature of a superconducting cylinder*, Phys. Rev. Lett., Vol. 9, N. 1, 9–12 (1962).
- [42] A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert, *Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors: "fractional" and "negative" vortices*, Nature, Vol. 407, 55–57 (2000).

- [43] D. S. McLachlan, *Quantum Oscillations in the Susceptibility of a Superconducting Tin Microcylinder*, Phys. Rev. Lett., Vol. 23, N. 25, 1434–1437 (1969).
- [44] J. J. Palacios, *Vortex matter in superconducting mesoscopic disks: Structure, magnetization, and phase transitions*, Phys. Rev. B, Vol. 58, N. 10, 5948–5951 (1998).
- [45] J. J. Palacios, *Metastability and paramagnetism in superconducting mesoscopic disks*, Phys. Rev. Lett., Vol. 84, N. 8, 1796–1799 (2000).
- [46] E. Akkermans, D. M. Gangardt, and K. Mallick, *Mesoscopic superconductors in the London limit: Equilibrium properties and metastability*, Phys. Rev. B, Vol. 63, N. 6, 064523-1–064523-15 (2001).
- [47] G. F. Zharkov, *Paramagnetic Meissner effect in superconductors from self-consistent solution of Ginzburg–Landau equations*, Phys. Rev. B, Vol. 63, N. 21, 214502-1–214502-7 (2001).
- [48] B. J. Baelus, F. M. Peeters, and V. A. Schweigert, *Saddle-point and energy barriers for vortex entrance and exit in superconducting disks and rings*, Phys. Rev. B, Vol. 63, N. 14, 144517-1–144517-12 (2001).
- [49] I. K. Marmoros, A. Matulis, and F. M. Peeters, *Vortex structure around a magnetic dot in planar superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 53, N. 5, 2677–2685 (1996).
- [50] M. V. Milošević, S. V. Yampolskii, and F. M. Peeters, *Vortex structure of thin mesoscopic disks in the presence of an inhomogeneous magnetic field*, Phys. Rev. B, Vol. 66, N. 2, 024515-1–024515-19 (2002).
- [51] M. V. Milošević and F. M. Peeters, *Superconducting Wigner vortex molecule near a magnetic disk*, Phys. Rev. B, Vol. 68, N. 2, 024509-1–024509-4 (2003).
- [52] A. Yu. Aladyshkin, A. S. Mel’nikov and D. A. Ryzhov, *The Little-Parks effect and multiquanta vortices in a hybrid superconductor-ferromagnet system*, J. Phys.: Condens. Matter, Vol. 15, N. 38, 6591–6597 (2003).

- [53] В. Л. Гинзбург, "Ферромагнитные сверхпроводники", ЖЭТФ, Т. 31, 202–210 (1956).
- [54] А. И. Буздин, Л. Н. Булаевский, С. В. Панюков, "Существование сверхпроводящих стенок в ферромагнетике", ЖЭТФ, Т. 87, 299–309 (1984).
- [55] L. N. Bulaevskii, A. I. Buzdin, M. L. Kucic, S. V. Panyukov, *Coexistence of superconductivity and magnetism. Theoretical predictions and numerical results*, Advances in Physics, Vol. 34, N. 2, 175-261 (1985).
- [56] J. I. Martin, M. Vélez, J. Nogués, and I. K. Schuller, *Flux Pinning in a Superconductor by an Array of Submicrometer Magnetic Dots*, Phys. Rev. Lett., Vol 79, N. 10, 1929–1932 (1997);
- [57] J. I. Martin, M. Vélez, A. Hoffmann, I. K. Schuller, and J. L. Vicent, *Artificially Induced Reconfiguration of the Vortex Lattice by Arrays of Magnetic Dots*, Phys. Rev. Lett., Vol. 83, N. 5, 1022-1025 (1999).
- [58] D. J. Morgan, and J. B. Ketterson, *Asymmetric Flux Pinning in a Regular Array of Magnetic Dipoles*, Phys. Rev. Lett., Vol. 80, 3614–3617 (1998).
- [59] M. J. Van Bael, K. Temst, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede, *Magnetic properties of submicron Co islands and their use as artificial pinning centers*, Phys. Rev. B, Vol. 59, 14674–14679 (1999).
- [60] M. J. Van Bael, L. Van Look, M. Lange, J. Bekaert, S. J. Bending, A. N. Grigorenko, V. V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede, *Ferromagnetic pinning arrays*, Physica C, Vol. 369, 97–105 (2002).
- [61] M. J. Van Bael, S. Raedts, K. Temst, J. Swerts, V. V. Moshchalkov, and Y. Bruynseraede, *Magnetic domains and flux pinning properties of a nanostructured ferromagnet/superconductor bilayer*, J. Appl. Phys., Vol, 92, N. 8, 4531–4537 (2002).
- [62] A. Garsia-Santiago, F. Sánchez, V. Varela, J. Tejada, *Enhanced pinning in a magnetic-superconducting bilayer*, J. Appl. Phys., Vol. 77, N. 18, 2900–2902 (2000).

- [63] Э. Б. Сонин, *Подавление сверхпроводимости (слабая связь) доменной стенкой в двухслойной пленке сверхпроводник–ферромагнетик*, Письма в ЖТФ, Т. 14, Вып. 18, 1640–1644 (1988).
- [64] I. D. Tokman, *Pinning of a vortex lattice on magnetic inhomogeneities in a thin superconducting film (type-II superconductor)*, Phys. Lett. A, Vol. 166, Ns. 5/6, 412–415 (1992).
- [65] I. F. Lyuksyutov and V. L. Pokrovsky, *Magnetization Controlled Superconductivity in a Film with Magnetic Dots*, Phys. Rev. Lett., Vol. 81, N. 11, 2344–2347 (1998).
- [66] R. Šašik, T. Hwa, *Enhanced pinning of vortices in thin film superconductors by magnetic dot arrays*, cond-mat/0003462 (2000) (препринт).
- [67] L. N. Bulaevsky, E. M. Chudnovsky, and M. P. Maley, *Magnetic pinning in superconductor-ferromagnet multilayers*, Appl. Phys. Lett., Vol. 76, 2594 (2000).
- [68] Ю. И. Беспярых, В. Василевский, *Возникновение спонтанной структуры вихрей в двухслойной системе ферромагнетик–сверхпроводник второго рода*, Физика Твёрдого Тела, Т. 43, Вып. 2, 215–221 (2001).
- [69] Ю. И. Беспярых, В. Василевский, М. Гайдек, И. П. Никитин, С. А. Никитов, *Закрепление вихрей на доменной структуре в двухслойной системе ферромагнетик–сверхпроводник второго рода*, Физика Твёрдого Тела, Т. 43, Вып. 10, 1754–1760 (2001).
- [70] S. Erdin, I. F. Lyuksyutov, V. L. Pokrovsky, and V. M. Vinokur, *Topological Textures in a Ferromagnet-Superconductor Bilayer*, Phys. Rev. Lett., Vol. 88, N. 1, 017001-1–017001-4 (2002);
- [71] S. Erdin, A. F. Kayali, I. F. Lyuksyutov and V. L. Pokrovsky, *Interaction of mesoscopic magnetic textures with superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 66, N. 1, 014414-1–014414-7 (2002).
- [72] L. E. Helseth, *Interaction between superconducting films and magnetic nanostructures*, Phys. Rev. B, Vol. 66, N. 10, 104508-1–104508-6 (2002).

- [73] M. V. Milošević, S. V. Yampolskii, and F. M. Peeters, *Magnetic pinning of vortices in a superconducting film: The (anti)vortex-magnetic dipole interaction energy in the London approximation*, Phys. Rev. B, Vol. 66, N. 17, 174519-1–174519-13 (2002);
- [74] M. V. Milošević, S. V. Yampolskii, and F. M. Peeters, *The Vortex-Magnetic Dipole Interaction in the London Approximation*, J. Low Temp. Phys., Vol. 130, Ns. 3–4, 321–331 (2003).
- [75] R. Laiho, E. Lähderanta, E. B. Sonin, and K. B. Traito, *Penetration of vortices into the ferromagnet/type-II superconductor bilayer*, Phys. Rev. B, Vol. 67, N. 14, 144522-1–144522-7 (2003).
- [76] *Физические величины. Справочник*, под ред. И. С. Григорьева и Е. З. Мейлихова, М.: Энергоатомиздат, 1991.
- [77] M. Lange, M. J. Van Bael, and V. V. Moshchalkov, *Phase diagram of a superconductor/ferromagnet bilayer*, Phys. Rev. B, Vol. 68, N. 17, 174522-1–174522-6 (2003).
- [78] M. Lange, M. J. Van Bael, Y. Bruynseraede, and V. V. Moshchalkov, *Nanoengineered Magnetic-Field-Induced Superconductivity*, Phys. Rev. Lett., Vol. 90, N. 19, 197006-1–197006-4 (2003).
- [79] B. T. Matthias and H. Suhl, *Possible Explanation of the "Coexistence" of Ferromagnetism and Superconductivity*, Phys. Rev. Lett., Vol. 4, N. 2, 51-52 (1960).
- [80] Ю. В. Копаев, *Возможность существования сверхпроводимости в ферромагнитных материалах, обладающих доменной структурой*, Физика Твёрдого Тела, Т. 7, Вып. 10, 2907-2911 (1965).
- [81] M. Tachiki, A. Kotani, H. Matsumoto, H. Umezawa, *Superconducting bloch-wall in ferromagnetic superconductors*, Solid St. Commun., Vol. 32, N. 8, 599–602 (1979).
- [82] M. L. Kubic, Phys. Lett. A, Vol. 83, 46 (1981).
- [83] A. I. Buzdin and A. S. Mel'nikov, *Domain wall superconductivity in ferromagnetic superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 67, N. 2, 020503-1–020503-4 (2003).

- [84] W. N. Hardy, D. A. Bonn, D. C. Morgan, Ruixing Liang, and Kuan Zhang, *Precision measurements of the temperature dependence of λ in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$: Strong evidence for nodes in the gap function*, Phys. Rev. Lett., Vol. 70, N. 25, 3999–4002 (1993)
- [85] Zhengxiang Ma, R. C. Taber, L. W. Lombardo, A. Kapitulnik, M. R. Beasley, P. Merchant, C. B. Eom, S. Y. Hou, and Julia M. Phillips, *Microwave penetration depth measurements on $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ single crystals and $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ thin films*, Phys. Rev. Lett., Vol. 71, N. 5, 781–784 (1993).
- [86] D. Achkir, M. Poirier, D. A. Bonn, Ruixing Liang, and W. N. Hardy, *Temperature dependence of the in-plane penetration depth of $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ and $YBa_2(Cu_{0.9985}Zn_{0.0015})_3O_{6.95}$ crystals from T to T^2* , Phys. Rev. B, Vol. 48, N. 17, 13184–13187 (1993).
- [87] Kuan Zhang, D. A. Bonn, S. Kamal, Ruixing Liang, D. J. Baar, W. N. Hardy, D. Basov, and T. Timusk, *Measurement of the ab Plane Anisotropy of Microwave Surface Impedance of Untwinned $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ Single Crystals*, Phys. Rev. Lett., Vol. 73, N. 18, 2484–2487 (1994).
- [88] H. Walter, W. Prusseit, R. Semerad, H. Kinder, W. Assmann, H. Huber, H. Burkhardt, D. Rainer, and J. A. Sauls, *Low-Temperature Anomaly in the Penetration Depth of $YBa_2Cu_3O_7$ Films: Evidence for Andreev Bound States at Surfaces*, Phys. Rev. Lett., Vol. 80, N. 16, 3598–3601 (1998).
- [89] C. P. Bidinosti, W. N. Hardy, D. A. Bonn, and Ruixing Liang, *Magnetic Field Dependence of λ in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$: Results as a Function of Temperature and Field Orientation*, Phys. Rev. Lett., Vol. 83, N. 16, 3277–3280 (1999).
- [90] K. A. Moler, D. J. Baar, J. S. Urbach, Ruixing Liang, W. N. Hardy, and A. Kapitulnik, *Magnetic Field Dependence of the Density of States of $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ as Determined from the Specific Heat*, Phys. Rev. Lett., Vol. 73, N. 20, 2744–2747 (1994).

- [91] D. A. Wright, J. P. Emerson, B. F. Woodfield, J. E. Gordon, R. A. Fisher, and N. E. Phillips, *Low temperature specific heat of $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$, $0 < \delta < 0.2$: evidence for d -wave pairing*, Phys. Rev. Lett., Vol. 82, N. 7, 1550–1553 (1999).
- [92] Г. Е. Воловик, Л. П. Горьков, *Сверхпроводящие классы в системах с тяжелыми фермионами*, ЖЭТФ, Т. 88, Вып. 4, 1412–1428 (1985).
- [93] G. E. Volovik, *Superconductivity with lines of gap nodes: density of states in the vortex*, Письма в ЖЭТФ, Т. 58, Вып. 6, 457–461 (1993).
- [94] D. A. Wollman, D. J. Van Harlingen, J. Giapintzakis, and D. M. Ginsberg, *Evidence for $d_{x^2-y^2}$ Pairing from the Magnetic Field Modulation of $YBa_2Cu_3O_7$ -Pb Josephson Junctions*, Phys. Rev. Lett., Vol. 74, N. 5, 797–800 (1995).
- [95] D. A. Wollman, D. J. Van Harlingen, W. C. Lee, D. M. Ginsberg, A. J. Leggett, *Experimental determination of the superconducting pairing state in YBCO from the phase coherence of YBCO-Pb dc SQUIDS*, Phys. Rev. Lett., Vol. 71, N. 13, 2134–2137 (1993)
- [96] D. A. Brawner, H. R. Ott, *Evidence for a non- s -wave superconducting order parameter in $YBa_2Cu_3O_{6.6}$ with $T_c=60$ K*, Phys. Rev. B, Vol. 53, N. 13, 8249–8252 (1996).
- [97] A. G. Sun, D. A. Gajewski, M. B. Maple, R. C. Dynes, *Observation of Josephson pair tunneling between a high- T_c cuprate ($YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$) and a conventional superconductor (Pb)*, Phys. Rev. Lett., Vol. 72, N. 14, 2267–2270 (1994).
- [98] R. Kleiner, A. S. Katz, A. G. Sun, R. Summer, D. A. Gajewski, S. H. Han, S. I. Woods, E. Dantsker, B. Chen, K. Char, M. B. Maple, R. C. Dynes, J. Clarke, *Pair Tunneling from c -Axis $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ to Pb: Evidence for s -Wave Component from Microwave Induced Steps*, Phys. Rev. Lett., Vol. 76, N. 12, 2161–2164 (1996).
- [99] K. A. Kouznetsov, A. G. Sun, B. Chen, A. S. Katz, S. R. Bahcall, John Clarke, R. C. Dynes, D. A. Gajewski, S. H. Han, M. B. Maple, J. Giapintzakis, J.-T. Kim, and D. M. Ginsberg, *c -axis Josephson Tunneling between $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ and Pb:*

- Direct Evidence for Mixed Order Parameter Symmetry in a High- T_c Superconductor*, Phys. Rev. Lett., Vol. 79, N. 16, 3050–3053 (1997).
- [100] Satoshi Kashiwaya and Yukio Tanaka, *Tunnelling effects on surface bound states in unconventional superconductors*, Reports on Progress in Physics, Vol. 63, N. 10, 1641–1724 (2000).
- [101] C. C. Tsuei, J. R. Kirtley, C. C. Chi, Lock See Yu-Jahnes, A. Gupta, T. Shaw, J. Z. Sun, and M. B. Ketchen, *Pairing Symmetry and Flux Quantization in a Tricrystal Superconducting Ring of $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$* , Phys. Rev. Lett., Vol. 73, N. 4, 593–596 (1994).
- [102] Z.-X. Shen, D. S. Dessau, B. O. Wells, D. M. King, W. E. Spicer, A. J. Arko, D. Marshall, L. W. Lombardo, A. Kapitulnik, P. Dickinson, S. Doniach, J. DiCarlo, T. Loeser, and C. H. Park, *Anomalously large gap anisotropy in the $a - b$ plane of $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$* , Phys. Rev. Lett., Vol. 70, N. 10, 1553–1556 (1993).
- [103] R. J. Kelley, Jian Ma, C. Quitmann, G. Margaritondo, M. Onellion, *Superconducting gap and order parameter in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$* , Phys. Rev. B, Vol. 50, N. 1 590–593 (1994).
- [104] H. Ding, J. C. Campuzano, A. F. Bellman, T. Yokoya, M. R. Norman, M. Randeria, T. Takahashi, H. Katayama-Yoshida, T. Mochiku, K. Kadowaki, and G. Jennings, *Momentum Dependence of the Superconducting Gap in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$* , Phys. Rev. Lett., Vol. 74, N. 14, 2784–2787 (1995).
- [105] H. Ding, M. R. Norman, J. C. Campuzano, M. Randeria, A. F. Bellman, T. Yokoya, T. Takahashi, T. Mochiku and K. Kadowaki, *Angle-resolved photoemission spectroscopy study of the superconducting gap anisotropy in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+x}$* , Phys. Rev. B, Vol. 54, N. 14, 9678–9681 (1996).
- [106] Ю. А. Изюмов, В. Н. Сыромятников, *Фазовые переходы и симметрия кристаллов*, М.: Наука 1984.
- [107] L. N. Bulaevskii, M. Ledvij, and V. G. Kogan, *Vortices in layered superconductors with Josephson coupling*, Phys. Rev. B, Vol. 46, N. 1, 366–380 (1992).

- [108] D. Chang, C.-Y. Mou, B. Rosenstein, and C. L. Wu, *Static and dynamical anisotropy effects in the mixed state of d -wave superconductors*, Phys. Rev. B, Vol. 57, 7955–7969 (1998).
- [109] Q. Li, Z. D. Wang, and Q.-H. Wang, *Vortex structure for a $d+is$ -wave superconductor*, Phys. Rev. B, Vol. 59, N. 1, 613–618 (1999).
- [110] I. Afleck, M. Franz, and M. H. S. Amin, *Generalized London free energy for high- T_c vortex lattices*, Phys. Rev. B, Vol. 55, N. 2, 704–707 (1997).
- [111] J. R. Clem, *Simple Model for the vortex core in a type II superconductor*, J. Low Temp. Phys., Vol. 18, N. 5/6, 427–434 (1975).
- [112] Q. Wang, Z. D. Wang, *Simulating the time-dependent $d_{x^2-y^2}$ Ginzburg-Landau equations using the finite-element method*, Phys. Rev. B, Vol. 54, N. 22, 15645–15648 (1996).
- [113] D. Feinberg, *Theory of tilted vortex lattice in Josephson-coupled layered superconductors*, Physica C, Vol. 46, 126–140 (1992).
- [114] Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, *Движение вихрей и электросопротивление сверхпроводников второго рода в магнитном поле*, УФН, Т. 116, Вып. 3, 413 (1975).
- [115] Г. М. Генкин, А. С. Мельников, *Движение абрикосовских вихрей в анизотропных сверхпроводниках*, ЖЭТФ, Т. 95, 2170–2174 (1989).
- [116] B. I. Ivlev, N. B. Kopnin, *Flux-flow conductivity in anisotropic and layered high- T_c superconductors*, Europhys. Lett., Vol. 15, N. 3, 349–354 (1991).
- [117] J. R. Kirtley, P. Chaudhari, M. B. Ketchen, N. Khare, Shawn-Yu Lin, T. Shaw, *Distribution of magnetic flux in high- T_c grain-boundary junctions enclosing hexagonal and triangular areas*, Phys. Rev. B, Vol. 51, N. 17, 12057–12060 (1995).
- [118] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, М.: Наука, 2002.

- [119] B. W. Hoogenboom, M. Kugler, B. Revaz, I. Maggio-Aprile, and O. Fischer, *Shape and motion of vortex cores in $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$* , Phys. Rev. B, Vol. 62, N. 13, 9179–9185 (2000).
- [120] J. Bonca and V. V. Kabanov, *Phase transitions in the mesoscopic superconducting square*, Phys. Rev. B, Vol. 65, N. 1, 012509-1–012509-4 (2002).
- [121] L. F. Chibotaru, A. Ceulemans, V. Bruyndoncx, and V. V. Moshchalkov, *Vortex Entry and Nucleation of Antivortices in a Mesoscopic Superconducting Triangle*, Phys. Rev. Lett., Vol. 86, N. 7, 1323–1326 (2001).
- [122] W. B. Zeper, F. J. A. Greidanus, P. F. Garcia, and C. R. Fisher, *Perpendicular magnetic anisotropy and magneto-optical Kerr effect of vapor-deposited Co/Pt-layered structures*, J. Appl. Phys., Vol. 65, N. 12, 4971–4975 (1989).
- [123] Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, *Сверхпроводимость II рода*, М.: Мир, 1970.
- [124] S.-L. Cheng and H. A. Fertig, Upper critical field H_{c3} for a thin-film superconductor with a ferromagnetic dot, Phys. Rev. B, Vol. 60, N. 18, 13107–13111 (1999).
- [125] I. S. Ibrahim and F. M. Peeters, *Two-dimensional electrons in lateral magnetic superlattices*, Phys. Rev. B, Vol. 52, N. 24, 17321–17334 (1995).
- [126] F. M. Peeters and P. Vasilopoulos, *Quantum transport of a two-dimensional electron gas in a spatially modulated magnetic field*, Phys. Rev. B, Vol. 47, N. 3, 1466–1473 (1993).
- [127] J. Reijniers and F. M. Peeters, *Snake orbits and related magnetic edge states*, J. Phys.: Cond. Matt., Vol. 12, N. 47, 9771–9786 (2000).
- [128] *Справочник по специальным функциям*, под ред. М. Абрамовица и И. Стиган, М.: Наука 1979.
- [129] R. J. Watts-Tobin, Y. Krahenbuhl, and L. Kramer, *Nonequilibrium theory of dirty, current-carrying superconductors: Phase-slip oscillators in narrow filaments near T_c* , J. Low. Temp. Phys., Vol. 42, N. 5, 459–501 (1981).

- [130] Л. П. Горьков, Г. М. Элиашберг, *ЖЭТФ*, Т. 54, 612 (1968).
- [131] K. H. Lee and D. Stroud, *Quantized voltage plateaus in Josephson-junction arrays: A numerical study*, *Phys. Rev. B*, Vol. 43, N. 7, 5280–5286 (1991).
- [132] I. A. Shereshevskii, *A Finite dimensional analog of the Krein formula*, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, Vol. 8, N. 4, 446–457 (2001).