

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ МИКРОСТРУКТУР

На правах рукописи

Силаев Михаил Андреевич

**ЭЛЕКТРОННАЯ СТРУКТУРА И ТРАНСПОРТНЫЕ  
СВОЙСТВА  
СМЕШАННОГО СОСТОЯНИЯ  
МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ**

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико – математических наук

Специальность 01. 04. 07 – физика конденсированного состояния

**Научный руководитель:**  
доктор физико – математических наук  
А. С. Мельников

Нижний Новгород — 2008

# Оглавление

<b>1. Электронная структура многовихревых конфигураций и тепловой транспорт в мезоскопических сверхпроводниках.</b>	<b>16</b>
1. Введение . . . . .	16
2. Метод . . . . .	18
2.1. Квазиклассическое приближение в уравнениях Боголюбова-де Жена: уравнения Андреева . . . . .	18
2.2. Пример: аномальные ветки спектра в многоквантовом вихре. . . . .	20
3. Трансформация аномальных веток спектра: качественное рассмотрение	27
3.1. Влияние межвихревого тунелирования квазичастиц на спектр . . . . .	27
3.2. Нормальное рассеяние квазичастиц на границе образца . . . . .	31
4. Переход от многоквантового вихря к вихревой молекуле . . . . .	34
4.1. Квазиклассическое рассмотрение . . . . .	34
4.2. Учет тунелирования между квазиклассическими орбитами. . . . .	37
5. Спектр вихря вблизи границы образца . . . . .	42
6. Плотность состояний . . . . .	47
7. Тепловой кондактанс . . . . .	50
8. Зависимость теплового кондактанса от магнитного поля: качественная картина. . . . .	56
9. Заключение. . . . .	57
<b>2. Кондактанс контакта нормальный металл/сверхпроводник в магнит-</b>	

<b>ном поле: резонансное андреевское туннелирование через вихри Аб-рикосова.</b>	<b>60</b>
1. Введение . . . . .	60
2. Модель . . . . .	64
3. Задача рассеяния: вероятности нормального и андреевского отражения.	67
4. Расчет кондактанса . . . . .	68
5. Обсуждение результатов . . . . .	70
<b>3. Электронная структура поверхностных и вихревых мод в киральном мезоскопическом сверхпроводнике.</b>	<b>75</b>
1. Введение. . . . .	75
2. Спектр краевых состояний . . . . .	79
3. Взаимодействие поверхностных и вихревых состояний . . . . .	82
4. Влияние шероховатости границы. . . . .	84

# Введение.

## **Актуальность темы.**

Феномен сверхпроводимости в течении долгого времени привлекает внимание исследователей, как теоретиков так и экспериментаторов. Интерес к изучению сверхпроводящих материалов связан не только с разнообразными физическими явлениями, многие из которых еще не получили объяснения, но также и с широкими возможностями практического применения сверхпроводников. Одним из важнейших разделов физики сверхпроводимости является исследование поведения сверхпроводников в магнитном поле. Как известно, в большинстве случаев, магнитное поле приводит к разрушению сверхпроводимости [1]. При постепенном увеличении магнитного поля, сначала в сверхпроводниках наблюдается эффект Мейсснера, состоящий в том, что внешнее магнитное поле проникает в сверхпроводящий образец лишь на достаточно малое расстояние. Затем, при достижении критического значения поля, сверхпроводник переходит в состояние, характеризующееся одновременным наличием нормальных и сверхпроводящих областей. В сверхпроводниках первого рода фазовый переход в такое состояние при увеличении поля происходит скачкообразно, с образованием конечных зародышей нормальной фазы. В этом случае сверхпроводник расслаивается на нормальные и сверхпроводящие домены, конфигурация которых зависит от геометрии образца. В отличие от сверхпроводников первого рода, сверхпроводники второго рода в достаточно сильных магнитных полях ведут себя принципиально другим образом. Когда внешнее поле становится больше некоторого значения, называемого нижним критическим  $H_{c1}$ , в сверхпроводнике появляются области нормальной фазы, имеющие вид квантованных вихревых нитей, получивших название вихрей Абрикосова [2]. Вихревое состояние сверхпроводников второго рода существует в интервале полей от  $H_{c1}$  до верхнего критического поля  $H_{c2}$ . При этом происходит постепенное увеличение концентрации вихрей с ростом магнитного поля и плавное подавление сверхпроводящего параметра порядка. При достижении поля  $H_{c2}$  сверхпроводимость исчезает и происходит фазовый переход второго рода в нормальное состояние. Далее в настоящей работе мы будем иметь в виду только лишь сверхпроводники второго рода.

Свойства смешанного состояния сверхпроводников активно исследуются на протяжении нескольких десятилетий. Одной из фундаментальных задач в этой области является изучение электронной структуры вихревого состояния. Как следует из теории Бардина, Купера, Шриффера [3] природа сверхпроводимости тесно связана с наличием энергетической щели в спектре квазичастичных возбуждений вблизи по-

верхности Ферми. В однородном сверхпроводнике энергия квазичастиц имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \Delta^2(\mathbf{k})},$$

где  $\epsilon_{\mathbf{k}} = \hbar V_F(k - k_F)$ ,  $\hbar\mathbf{k}$ -импульс квазичастицы,  $\hbar k_F$ - импульс Ферми,  $\Delta(\mathbf{k})$  - энергетическая щель, которая вообще говоря зависит от направления импульса  $\hbar\mathbf{k}$ . Симметрия сверхпроводящего состояния определяет структуру щели в импульсном пространстве, в частности, наличие нулей в спектре возбуждений [4]. Большинство обычных сверхпроводников, обладающих  $s$ - типом симметрии параметра порядка, характеризуются конечным значением щели на всей поверхности Ферми  $\Delta(\mathbf{k}) = \Delta_0$ . Однако, если к сверхпроводнику приложено магнитное поле, подобное описание спектра квазичастиц хорошо работает, только когда сверхпроводник находится в мейснеровском состоянии. Переход в вихревое состояние в достаточно сильном магнитном поле  $H > H_{c1}$  сопровождается существенным подавлением щели, что связано с появлением состояний, локализованных вблизи вихревых центров. Особенный интерес, который вызывает исследование таких состояний, обусловлен тем, что именно они определяют низкотемпературное поведение термодинамических и транспортных характеристик сверхпроводников в магнитном поле. Как было впервые показано в классической работе Caroli, de Gennes, Matricon (CdGM) [5], с каждым отдельным вихрем связана так называемая аномальная ветка в спектре квазичастиц. Энергия подщелевых уровней  $\varepsilon(\mu)$ , соответствующих этой ветке, меняется в пределах  $-\Delta_0$  до  $+\Delta_0$  при изменении углового момента  $\mu$ , определенного относительно вихревой оси. В области низких энергий  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$  спектр является линейной функцией  $\mu$ :  $\varepsilon(\mu) \simeq -\mu\omega$ , где  $\omega \approx \Delta_0/(k_{\perp}\xi)$ ,  $\Delta_0$  щель в спектре возбуждений сверхпроводника вдали от оси вихря,  $k_{\perp} = \sqrt{k_F^2 - k_z^2}$ ,  $k_F$ - импульс Ферми,  $k_z$ - проекция импульса на ось вихря,  $\xi = \hbar V_F/\Delta_0$  - длина когерентности,  $V_F$ - скорость Ферми и  $\mu$  принимает полуцелые значения. Заметим, что в большинстве сверхпроводников длина когерентности значительно превышает атомные масштабы: как правило  $k_F\xi \sim 10^2 - 10^3 \gg 1$ . Таким образом, минимальная энергия возбуждений в вихревом состоянии сверхпроводника намного меньше, чем в отсутствии магнитного поля:  $\omega_0 \sim \Delta_0/(k_F\xi) \ll \Delta_0$ . Как нетрудно видеть, энергия состояний, принадлежащих аномальной ветке зависит только от двух квантовых чисел: импульса вдоль оси вихря  $k_z$  и углового момента  $\mu$ . Что же касается радиального квантового числа  $n$ , то оно равно нулю для спектра CdGM. Существуют также подщелевые спектральные ветки, соответствующие  $n \neq 0$ , найденные, например, в работе Минца и Рахманова в рамках полуклассического подхода [6]. Эти ветки сосредоточены вблизи края щели  $\pm\Delta_0$  и практически сливаются с непрерывным спектром делокализованных состояний [7].

Наличие локализованных состояний является прямым следствием нетривиальной угловой зависимости параметра порядка в окрестности кора вихря:  $\Delta \sim e^{i\theta}$ , где  $\theta$ - полярный угол в системе отсчета с началом координат в центре вихря [см. Рис.1(a)]. Нагляднее всего это можно продемонстрировать используя квазиклассическое описание движения квазичастиц вдоль прямолинейных траекторий [8]). Применимость квазиклассического приближения определяется условием  $k_F\xi \gg 1$ , означающим, что

длина волны электронов в металле  $\lambda_F = 2\pi/k_F$  намного меньше длины когерентности  $\xi$ , определяющей характерные масштабы изменения параметров сверхпроводника. Каждая траектория характеризуется двумя параметрами: направлением, которое определяется импульсом квазичастиц  $\mathbf{k}_\perp = k_\perp(\cos\theta_p, \sin\theta_p)$ , и прицельным параметром (расстоянием до центра вихря), который связан с угловым моментом  $\mu$  относительно оси вихря следующим образом:  $b = -\mu/k_\perp$  (см. Рис.1b). Дискретность спектра CdGM в квазиклассическом приближении не учитывается, и аномальная ветка спектра в этом случае является функцией  $\varepsilon_v(b) = \Delta_0(b/\xi)$  [8, 9]. Спектральная задача вдоль траекторий, проходящих через центр вихря полностью аналогична задаче о квазичастичном спектре короткого джозефсоновского контакта (длина которого меньше  $\xi$ ) с разностью фаз сверхпроводящих берегов  $\varphi_J = \pi$ . Положение андреевских уровней в таком контакте зависит от разности фаз  $\varphi_J$  как  $\varepsilon_J = -\Delta_0 \cos(\varphi_J/2)$  (где  $0 < \varphi_J < 2\pi$ ). Таким образом, при  $\varphi_J = \pi$  спектральные ветки пересекают уровень Ферми. Аналогию с вихревыми состояниями нетрудно проследить, если заметить, что вдоль траектории, проходящей точно через центр вихря скачок фазы параметра порядка равен  $\varphi_J = \pi$ , поэтому  $\varepsilon_v(b=0) = \varepsilon_J(\varphi_J = \pi) = 0$ . Для траекторий, проходящих на некотором расстоянии  $b \neq 0$  от центра вихря, скачок фазы  $\varphi_J$  размывается, что приводит к отстройке уровней энергии от нуля.

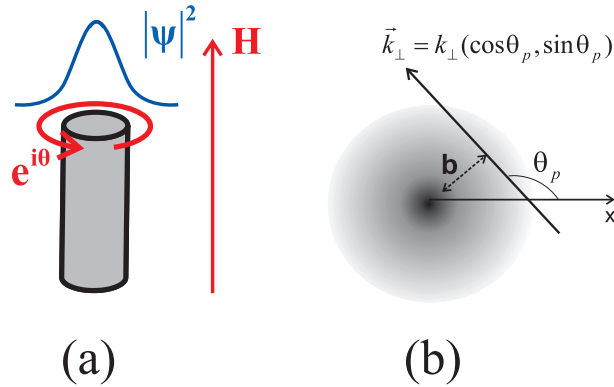


Рис. 1. (a) Вихревая линия, ориентированная вдоль магнитного поля и волновая функция локализованного состояния Caroli-de Gennes- Matricon; (b) квазиклассическая картина движения квазичастиц вдоль прямолинейных траекторий. Направление траекторий определяется вектором  $\mathbf{k}_\perp$ , прицельный параметр траектории (расстояние до центра вихря)- угловым моментом:  $b = -\mu/k_\perp$ .

Перекрывание волновых функций, локализованных на соседних вихрях приводит к искажению спектра Caroli-de Gennes- Matricon, которое выражается, например, в появлении энергетических зон в периодической вихревой решетке [10] и угловой модуляции профиля локальной плотности состояний [11, 12]. Заметим, что расстоя-

ние между уровнями Caroli-de Gennes- Matricon можно оценить следующим образом:  $\omega_0 \sim \hbar\omega_H(H_{c2}/H)$ , где  $\omega_H = |e|H/mc$  -циклотронная частота,  $e$  и  $m$ - заряд и масса электрона. С увеличением концентрации вихрей в высоких магнитных полях, близких к верхнему критическому  $H_{c2}$ , расстояние между уровнями Caroli-de Gennes- Matricon сравнивается с расстоянием между уровнями Ландау. В этом случае должен происходить переход к движению квазичастиц по замкнутым циклотронным орбитам, что в конечном итоге приводит к полному подавлению сверхпроводимости и формированию спектра Ландау нормального металла в магнитном поле [13].

В области больших магнитных полей  $H \gg H_{c1}$  на сегодняшний день спектр хорошо исследован в предельном случае плотной вихревой решетки [14], когда магнитное поле близко к верхнему критическому  $H_{c2}$ . В то же время, представляется интересным изучить, как при увеличении магнитного поля происходит переход от изолированных квазичастичных уровней CdGM к делокализованным состояниям в вихревой решетке, характеризующихся бесщелевым спектром. Понимание механизма этого перехода позволило бы объяснить результаты экспериментов в которых наблюдались осцилляции де Гааза-ван Альфена даже в области достаточно низких магнитных полей  $H \sim (0.3 - 0.4)H_{c2}$  [15]. В качестве первого шага при расчете квазичастичного спектра в вихревой решетке необходимо рассмотреть задачу о трансформации спектра за счет интерференции состояний, локализованных в корах соседних вихрей при образовании конечных вихревых конфигураций. Заметим, что эта задача имеет также и самостоятельный интерес, поскольку конечные вихревые кластеры могут образовываться за счет влияния случайного потенциала пиннинга [16] или в мезоскопических сверхпроводящих структурах [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26].

Вопрос о свойствах смешанного состояния в мезоскопических сверхпроводниках привлекает в последнее время внимание многих исследователей. Современная технология позволяет изучать сверхпроводящие образцы с размерами порядка нескольких длин когерентности. Вихревые конфигурации в таких системах испытывают сильное влияние граничных эффектов. За счет баланса конкурирующих сил, действующих на вихри со стороны экранирующего тока, текущего вдоль границы образца, и сил отталкивания между отдельными вихрями оказывается возможным существование экзотических вихревых состояний - вихревых молекул с размером меньшим длины когерентности [17] и многоквантовых (гигантских) вихрей [17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Расстояние между вихрями, образующими вихревую молекулу может быть намного меньше длины когерентности  $\xi$ , в отличии от бесконечного сверхпроводника, где вихри образуют треугольную решетку. Расстояние между ближайшими вихрями в решетке Абрикосова составляет порядка  $\sqrt{\phi_0/H}$ , где  $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ - квант магнитного потока [27]. Таким образом, даже в поле, полностью подавляющем сверхпроводимость  $H = H_{c2}$ , расстояние между вихрями не может быть меньше  $\sqrt{\phi_0/H_{c2}} \sim \xi$ .

В силу наличия барьера Бина-Ливингстона [28], препятствующего входу (выходу) вихрей в образец через границу, в мезоскопических сверхпроводниках при одних и тех же параметрах могут существовать несколько метастабильных вихревых конфигураций. При изменении внешнего магнитного поля происходят фазовые переходы между различными вихревыми конфигурациями как за счет изменения

полного числа вихрей в сверхпроводнике, так и в результате изменения относительного расположения вихрей в образце (например, распад многоквантового вихря на несколько одноквантовых). Экспериментально такие переходы наблюдаются при измерении зависимости магнитного момента сверхпроводника от внешнего магнитного поля. Например, при входе вихрей в образец (или выходе вихрей из образца) происходят фазовые переходы первого рода, что приводит к скачкообразному изменению магнитного момента и появлению новых веток на кривой намагничивания [17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35]. Фазовые переходы второго рода, проявляющиеся в виде изломов на кривой намагничивания, соответствуют распаду (появлению) многоквантовых вихрей [24].

Наряду с детальным исследованием структуры параметра порядка в новых вихревых конфигурациях представляет интерес также и развитие теории электронных состояний в таких системах. При этом представляется необходимым выполнить обобщение теории CdGM на случай многовихревых конфигураций, с учетом как межвихревого туннелирования квазичастиц, так и образования многоквантовых вихрей. Также, для корректного описания электронной структуры мезоскопического сверхпроводника надо учесть эффекты, связанные с нормальным рассеянием квазичастиц. Волновые функции соответствующие подщелевым уровням энергии локализованы в окрестности кора вихря благодаря андреевскому отражению квазичастиц от неоднородного профиля параметра порядка. Любое дополнительное нормальное рассеяние квазичастиц должно приводить к модификации аномальной ветки. Как было показано в работе Ларкина и Овчинникова [36], существенная модификация может быть вызвана даже малым количеством примесей атомарных размеров. В случае, когда вихрь расположен около плоской границы, искажение локальной плотности состояний исследовалось в работе [37] на основе численного решения уравнений Эйленберга в случае как  $s$ , так и  $d$  симметрии параметра порядка. Естественно ожидать, что роль нормального рассеяния на границах образца должна быть особенно важной при рассмотрении спектра вихрей в мезоскопическом сверхпроводнике малых размеров. В случае, когда в центре сверхпроводящего диска расположен одноквантовый вихрь, трансформация спектра была проанализирована в работах [39, 38], где было показано, что когда радиус диска  $R$  меньше некоторого критического значения  $R_c \sim \xi \ln(k_F \xi)$ , спектр квазичастиц становится бесщелевым.

Экспериментальное исследование особенностей электронной структуры может быть осуществлено, например, с использованием сканирующей туннельной спектроскопии (СТМ) [12, 40]. Как нетрудно видеть, подавление щели в спектре возбуждений при возникновении вихрей приводит к появлению плотности состояний на уровне Ферми, соответствующей плотности состояний в нормальном металле. Действительно, если пренебречь дискретностью спектра CdGM, то легко найти, что плотность состояний (в расчете на единицу длины и проекцию спина) равна  $\nu_0 = k_F/(4\omega_0) \sim \xi^2(m/\hbar^2)$ , где  $m/\hbar^2$ - плотность состояний в нормальном металле, а  $\xi^2$ - характерная площадь локализации вихревых состояний. Поскольку в однородном сверхпроводнике плотность состояний на уровне Ферми равна нулю, наличие в корах вихрей состояний CdGM проявляется в виде пиков локальной плотности состояний, наблюдаемых в



местах расположения вихревых особенностей. Также, особенности спектра возбуждений можно исследовать при измерениях теплового транспорта вдоль направления магнитного поля [39, 41, 42]. Поэтому представляются актуальными расчеты плотности электронных состояний и обобщение теоретического анализа теплового транспорта вдоль вихрей с учетом граничных эффектов.

Недавно в серии работ [43] был разработан метод диагностики вихревого состояния мезоскопических сверхпроводников с помощью измерения туннельного электрического кондактанса в разных точках образца: "Multiple-Small-Tunnel-Junction method". Этот метод позволяет определить магнитное поле входа вихря в образец, а также переход вихревая молекула- гигантский вихрь, ассоциируя переходы между различными вихревыми конфигурациями со скачкообразными изменениями проводимости (сопротивления) контактов. Заметим, что в отличие от СТМ методики, в данном случае измеряется кондактанс достаточно широкого туннельного контакта, причем направление протекания тока перпендикулярно внешнему магнитному полю и линиям вихрей. В работах [43] интерпретация экспериментов основывалась фактически на предположении, что чем ближе вихрь к контакту, тем больше будет плотность состояний, а следовательно и туннельный ток. Хотя такие рассуждения и позволяют качественно объяснить результаты экспериментов, представляется интересным провести теоретический анализ влияния вихрей Абрикосова на транспортные характеристики контактов нормальный металл/сверхпроводник (N/S). Заметим, что влияние вихрей Абрикосова на транспортные свойства туннельных сверхпроводящих контактов исследовались теоретически для различных ориентаций магнитного поля: как перпендикулярно плоскости контакта [44], так и параллельно [45]. При этом, рассматривался случай "грязного" сверхпроводника, когда длина свободного пробега в сверхпроводнике мала по сравнению с длиной когерентности  $l \ll \xi$  и было показано, что наличие вихрей Абрикосова в области контакта приводит к подавлению критического тока в результате усреднения по неоднородному распределению фазы параметра порядка в берегах контакта. Одновременно, подавление сверхпроводящей щели в корах вихрей приводит к увеличению квазичастичного вклада в ток [44]. В противоположном предельном случае, когда сверхпроводник является "чистым" ( $l \gg \xi$ ) необходимо разработать другой подход для расчета транспортных характеристик. Например, рассматривая задачу о кондактансе баллистического контакта N/S в магнитном поле необходимо по сути, обобщить теорию зарядового транспорта в баллистических контактах N/S, разработанную в работе Блондера, Тинкхама и Клапвайка [46] на случай, когда в области контакта присутствуют вихри Абрикосова. Основной физический эффект, который предполагается исследовать состоит в том, что наличие подщелевых квазичастичных состояний, локализованных на вихрях должно приводить к резонансному увеличению туннельного кондактанса контакта. Заметим, что аналогичный эффект имеет место в туннельных контактах с высокотемпературными сверхпроводниками (ВТСП), обладающими d - симметрией параметра порядка. В этом случае, увеличение кондактанса происходит за счет резонансного туннелирования электронов из (N) в (S) область через поверхностные андреевские состояния, локализованные на границе сверхпроводник/изолятор [47, 48, 49].

Наличие поверхностных андреевских состояний является одной из важных особенностей сверхпроводников с необычным типом спаривания (в частности, ВТСП). В результате появления связанных андреевских состояний электронная структура и транспортные свойства необычных сверхпроводников существенно изменяются вблизи границ, примесей и других центров нормального рассеяния квазичастиц [50, 52, 53, 54, 55]. Поверхностные состояния формируются в сверхпроводниках с анизотропной щелью  $\Delta(\mathbf{k})$  в импульсном пространстве [4, 56], принимающей различные значения для падающих и отраженных квазичастиц, имеющих разные направления импульса. Известным примером необычных сверхпроводников являются ВТСП, например, соединения  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ . Сверхпроводящее состояние в таких веществах описывается анизотропным параметром порядка [4, 56]:

$$\Delta(\mathbf{k}) \propto k_x^2 - k_y^2.$$

Рассеяние квазичастиц на границе сверхпроводника связывает квазичастичные волны с разными направлениями импульса  $\mathbf{k}_i$  и  $\mathbf{k}_r$  (см. Рис.2(а) для случая плоской поверхности). Таким образом, падающие и отраженные квазичастицы "видят" разные значения сверхпроводящей щели  $\Delta(\mathbf{k}_i)$  и  $\Delta(\mathbf{k}_r)$ . Рассматривая движение квазичастиц вдоль "развернутой" траектории, где в точке отражения  $O$  имеется скачок щели (см. Рис.2(а) для случая плоской поверхности) нетрудно показать [48], что связанное андреевское состояние на уровне Ферми возникает если  $\Delta(\mathbf{k}_i)\Delta(\mathbf{k}_r) < 0$ . Существенной особенностью поверхностных состояний в d- сверхпроводниках является их бездисперсионность, т.е. то, что положение уровней не зависит от величины проекции импульса квазичастиц на плоскость границы сверхпроводник/изолятор. В этом случае появление локализованных андреевских состояний приводит к возникновению конечной плотности состояний на уровне Ферми. В СТМ экспериментах этот эффект объясняет наличие пика дифференциального кондактанса при малых напряжениях, наблюдаемого в высокотемпературных купратах с d-симметрией параметра порядка [57].

Еще один тип необычной сверхпроводимости реализуется в соединении  $Sr_2RuO_4$ . Волновая функция конденсата в сверхпроводящей фазе  $Sr_2RuO_4$  обладает нетривиальной спиновой и орбитальной структурой [58]. В общем случае, в соответствии с принципом запрета Паули, волновая функция куперовских пар должна быть нечетной по отношению к перестановке частиц:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{k}) = -\hat{\Psi}^T(-\mathbf{k}),$$

где  $\hat{\Psi}$ - матрица в спиновом пространстве,  $\mathbf{k}$ - относительный импульс электронов в паре,  $T$ - операция транспонирования спиновой матрицы. Здесь мы используем матричные обозначения для спиновой части двухчастичной волновой функции:

$$a_{11}|\uparrow\uparrow\rangle + a_{12}|\uparrow\downarrow\rangle + a_{21}|\downarrow\uparrow\rangle + a_{22}|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

В случае синглетного спаривания (полный спин пары  $S = 0$ ),  $\hat{\Psi}(\mathbf{k})$  должна быть

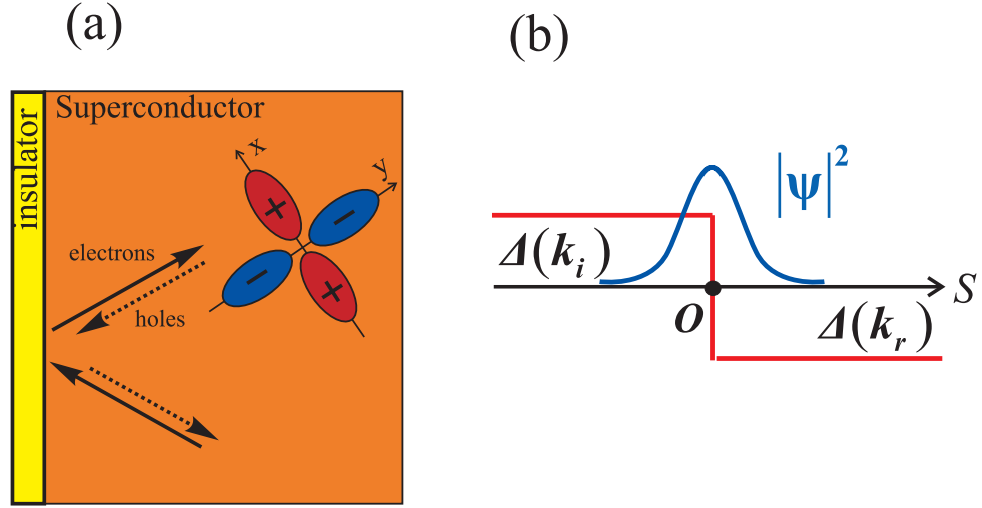


Рис. 2. (a) Ориентация кристаллических осей  $(x, y)$  в d - сверхпроводнике по отношению к границе с изолятором и схематичное изображение электронных и дырочных волн, формирующих связанное андреевское состояние. (b) Распределение щели вдоль развернутой траектории (в точке  $O$  происходит отражение от границы). Импульсы  $\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_r$  соответствуют падающей и отраженной волне. Связанное состояние на уровне Ферми возникает при условии  $\Delta(\mathbf{k}_i)\Delta(\mathbf{k}_r) < 0$ .

четной функцией  $\mathbf{k}$ , и поэтому может быть описана одной скалярной функцией  $g(\mathbf{k})$ :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{k}) = i\hat{\sigma}_y g(\mathbf{k}),$$

где  $g(\mathbf{k}) = g(-\mathbf{k})$ . С другой стороны, триплетное спаривание ( $S = 1$ ) накладывает условие нечетности на орбитальную часть щели. Волновая функция триплетного состояния является суперпозицией трех компонент с разными значениями проекции спина  $S_z = 0, \pm 1$ . В этом случае, удобно использовать параметризацию с помощью нечетной векторной функции  $\mathbf{d}(\mathbf{k}) = -\mathbf{d}(-\mathbf{k})$ :

$$\hat{\Psi}(\mathbf{k}) = (i\mathbf{d}(\mathbf{k}) \cdot \hat{\sigma})i\hat{\sigma}_y,$$

где  $\sigma = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ - вектор, состоящий из матриц Паули. Хорошо изученным примером триплетного спаривания являются сверхтекучие фазы  $^3\text{He}$  [59]. В силу пространственной изотропии, различные фазы могут быть классифицированы по неприводимым представлениям группы трехмерных вращений. Другими словами, волновая функция куперовских пар может быть представлена в виде суперпозиции сферических гармоник  $Y_{lm}(\mathbf{k})$ , соответствующих определенному значению полного момента

импульса  $l$  и его проекции на ось  $z$  (в данном случае имеет место р-спаривание с  $l = 1$ ):

$$d_\alpha(\mathbf{k}) = A_{\alpha,m} Y_{1m}(\mathbf{k}),$$

где  $m = -1, 0, 1$  и  $\alpha = (x, y, z)$ . Заметим, что некоторые из сверхтекучих фаз нарушают симметрию обращения времени. Например, А-фаза с определенной проекцией момента импульса  $m = \pm 1$  соответствует спиновому вектору  $\mathbf{d}(\mathbf{k}) = (k_x + ik_y, 0, 0)$ . При обращении времени меняется знак проекции  $m$ , что может быть скомпенсировано инверсией одной из осей и калибровочным преобразованием. В соответствии с установившейся терминологией, фазы, соответствующие определенной отличной от нуля проекции орбитального момента куперовских пар  $m$  называют киральными [60]. Киральные фазы могут реализовываться как в триплетном ( $S = 1$ ,  $l$ - нечетно), так и в синглетном случае ( $S = 0$ ,  $l$ - четно). Совокупность экспериментальных данных указывает на то, что в сверхпроводнике  $Sr_2RuO_4$  куперовские пары находятся в триплетном спиновом состоянии, а орбитальная часть волновой функции соответствует р-симметрии параметра порядка ( $l = 1$ ,  $m = \pm 1$ ) [58]. Структура параметра порядка в этом случае аналогична киральной А-фазе сверхтекучего  ${}^3He$ . Необходимо заметить, что в сверхпроводниках наличие кристаллической решетки не позволяет провести классификацию сверхпроводящих состояний по значениям углового момента  $l$ . Однако, часто подобную терминологию используют имея в виду схожие симметричные свойства базисных функций неприводимого представления точечной кристаллической группы и сферических гармоник  $Y_{lm}(\mathbf{k})$ .

Таким образом, в киральном сверхпроводнике сверхпроводящая щель в общем случае имеет следующий вид:  $\Delta = \Delta_0 e^{i\chi\theta_p}$ , где угол  $\theta_p$  характеризует направление импульса квазичастиц, а значение киральности  $\chi$  определяется проекцией орбитального момента куперовских пар на ось  $z$ . В сверхпроводниках с ненулевой киральностью  $\chi \neq 0$  фаза функции щели зависит от направления импульса электрона в плоскости  $xy$ :  $\mathbf{p} = p(\cos \theta_p, \sin \theta_p)$ . Такая нетривиальная структура щели в импульсном пространстве также приводит к появлению поверхностных состояний [50, 52, 53, 54, 55]. Однако, в отличие от d-сверхпроводников, где поверхностные состояния являются бездисперсионными, в данном случае их спектр состоит из набора аномальных веток, зависящих от квантового числа  $k_y$  - проекции импульса на плоскость границы. Число веток равно  $|\chi|$  и каждая из них пересекает уровень Ферми при некотором значении  $k_y^*$  [60, 54]. С появлением таких веток также как и в d-сверхпроводниках увеличивается плотность состояний на уровне Ферми, что наблюдается в экспериментах как пик дифференциального кондактанса [50].

Характерная длина локализации поверхностных состояний определяется длиной когерентности  $\xi$ . Поэтому естественно ожидать, что электронная структура мезоскопических сверхпроводников с необычной симметрией параметра порядка будет существенно зависеть от геометрии границы и размеров образца. Например в случае d-симметрии влияние конечности образца на спектр и плотность состояний было недавно исследовано в работе [61]. Очевидно, что в мезоскопическом киральном сверхпроводнике электронная структура поверхностных состояний также будет отличаться от случая полуограниченного образца, который исследовался ранее во многих

работах [50, 52, 55]. Также представляет интерес исследование влияния магнитного поля на спектр поверхностных уровней. При этом, помимо эффекта доплеровского сдвига уровней энергии из-за мейсснеровских и вихревых токов [51, 52], необходимо учитывать также и гибридизацию поверхностных и вихревых уровней. Проще всего исследовать этот эффект в цилиндрической геометрии мезоскопического сверхпроводника с вихрем Абрикосова в центре. В этом случае, поверхностные и вихревые уровни энергии зависят от углового момента  $\mu$  относительно оси сверхпроводящего цилиндра. В результате перекрытия волновых функций поверхностных  $\psi_s$  и вихревых состояний  $\psi_v$  будет происходить расщепление аномальных веток, соответствующих поверхностным и вихревым состояниям (см. Рис. 3). В результате, трансформация спектра должна определяться значением завихренности  $\eta$ , характеризующим ориентацию вихря ( $\Delta \sim e^{i\eta\theta}$ ) и значением киральности  $\chi$  ( $\Delta \sim e^{i\chi\theta_p}$ ), от которого зависит число и наклон аномальных веток поверхностных состояний.

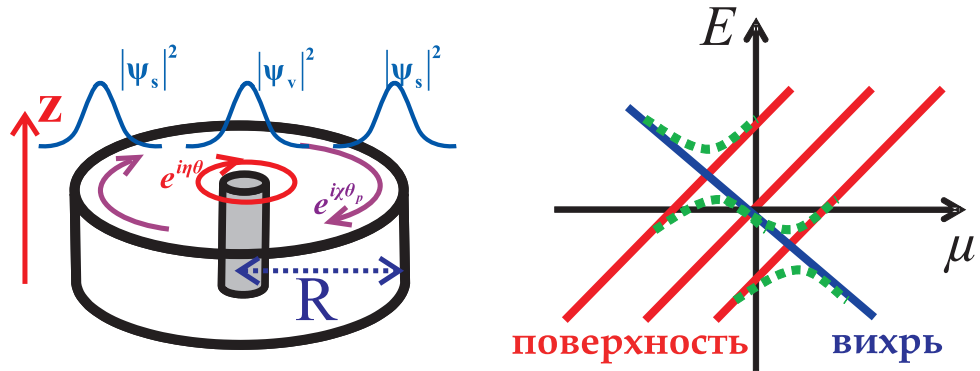


Рис. 3. (а) квазичастичные состояния в мезоскопическом диске, локализованные вблизи вихря и на краю диска. (б) Гибридизация поверхностных и вихревых состояний в киральном мезоскопическом сверхпроводнике в местах пересечения аномальных веток спектра поверхностных и вихревых состояний.

**Целью работы** являлось:

1. Разработка аналитического метода расчета квазичастичного спектра в смешанном состоянии сверхпроводников второго рода в области достаточно низких магнитных полей. Изучение трансформации спектра при формировании вихревого кластера, связанного межвихревым квазичастичным туннелированием.

2. Исследование электронной структуры смешанного состояния в мезоскопических сверхпроводниках с учетом влияния нормального рассеяния на границах образца на спектр андреевских уровней. Расчет спектра квазичастиц и анализ измеримых характеристик, таких как тепловой кондактанс и плотность состояний.

3. Изучение зарядового транспорта в баллистических контактах N/S в магнитном поле. Вычисление кондактанса контакта N/S с учетом резонансного андреев-

ского туннелирования электронов из нормального металла в сверхпроводник через состояния CdGM, локализованные в корах вихрей.

4. Исследование сценария трансформации электронного спектра вихря в мезоскопическом сверхпроводящем диске с киральной симметрией параметра порядка. Расчет спектра с учетом гибридизации поверхностных квазичастичных состояний, локализованных на границе диска и состояний, локализованных в коре вихря.

**Научная новизна работы** заключается в следующих оригинальных результатах, которые выносятся на защиту:

1. Рассчитаны квазичастичные спектры и вычислен тепловой кондактанс вдоль магнитного поля для различных вихревых структур в мезоскопических сверхпроводниках. Исследован переход от квазичастичного спектра многоквантового вихря к спектру отдельных вихрей, происходящий при уменьшении внешнего магнитного поля. Предложен сценарий исчезновения аномальной ветки в квазичастичном спектре при выходе вихря через границу сверхпроводника. Показано, что тепловой кондактанс растёт при сближении вихрей, когда расстояние между вихрями становится меньше некоторого критического значения, составляющего несколько длин когерентности. Также показано, что нормальное рассеяние квазичастиц на границах мезоскопического образца приводит к существенной стимуляции теплового транспорта вдоль вихревых линий.

2. Показано, что рост концентрации вихрей Абрикосова в баллистическом контакте нормальный металл/изолятор/сверхпроводник приводит к значительному увеличению кондактанса с ростом магнитного поля. Такое поведение кондактанса вызвано резонансными переходами электронов из нормального контакта в квазичастичные состояния, локализованные на вихрях. При этом конверсия нормального тока в сверхпроводящий становится более эффективной, чем в отсутствие вихрей.

3. Исследовано влияние внешнего магнитного поля на квазичастичный спектр в мезоскопическом киральном сверхпроводнике. Рассмотрен случай цилиндрической геометрии образца. Найдено точное выражение для спектра поверхностных состояний, состоящего из набора аномальных веток, пересекающих уровень Ферми. Показано, что наличие в образце вихря Абрикосова приводит к существенной трансформации спектра вблизи пересечения аномальных веток спектра поверхностных и вихревых состояний. В зависимости от ориентации вихря, расщепление веток может приводить к возникновению минищелей в спектре. Ширина минищелей и положение соответствующих особенностей плотности состояний определяется величиной магнитного поля.

**Структура диссертации** такова:

В главе 1: В рамках теории Боголюбова- де Жена проанализирована низкоэнергетическая часть квазичастичного спектра смешанного состояния мезоскопического сверхпроводника. Рассмотрено влияние магнитного поля на аномальные ветки спектра, пересекающие уровень Ферми. На примере системы состоящей из двух вихрей изучена трансформация квазичастичного спектра при расщеплении многоквантового вихря на отдельные вихри, происходящая при уменьшении магнитного поля. Для случая, когда вихри расположены близко к поверхности сверхпроводника, исследо-

вано влияние нормального отражения квазичастиц от границы образца (как плоской, так и конечной кривизны) на спектр и плотность состояний. Предложен сценарий исчезновения аномальной ветки в квазичастичном спектре при выходе вихря из сверхпроводника. Показано, что модификация вихревой структуры при изменении магнитного поля оказывает существенное влияние на тепловой кондактанс вдоль поля. В частности, при сближении вихрей в растущем магнитном поле происходит значительное увеличение теплового кондактанса.

Глава 2 посвящена исследованию проводимости баллистического N/S контакта в магнитном поле, порождающем вихри Абрикосова вблизи границы сверхпроводника с нормальным металлом. Магнитное поле направлено параллельно плоскости контакта. На основе квазиклассического приближения в теории Боголюбова - де Женна решена задача рассеяния плоской электронной волны на границе нормальный металл/изолятор/сверхпроводник с учетом туннелирования в низколежащие квазичастичные уровни, локализованные на вихрях Абрикосова. Показано, что при резонансе падающей волны с вихревыми состояниями вероятность андреевского отражения может быть существенно больше, чем в случае мейснеровского состояния сверхпроводника. Это, в свою очередь, приводит к увеличению эффективности конверсии нормального тока в сверхток. Поскольку концентрация и расположение вихрей относительно границы сверхпроводника определяются магнитным полем, кондактанс контакта сильно увеличивается с ростом магнитного поля.

В главе 3 исследуется электронный спектр в мезоскопическом сверхпроводящем диске с киральной симметрией параметра порядка. Найдено точное выражение для спектра поверхностных состояний, локализованных на краю диска во внешнем магнитном поле. На основе метода сильной связи проанализирована трансформация спектра в образце с захваченным вихрем Абрикосова. Показано, что расщепление аномальных спектральных веток в результате гибридизации поверхностных и вихревых состояний приводит к образованию минищели в спектре возбуждений. Также, показано, что минищель сохраняется даже в случае достаточно сильной неидеальности границы образца.

# Глава 1.

## Электронная структура многовихревых конфигураций и тепловой транспорт в мезоскопических сверхпроводниках.

### 1. Введение

Как известно, при достаточно низких температурах термодинамические и транспортные свойства сверхпроводника определяются уровнями квазичастичного спектра, лежащими вблизи поверхности Ферми. Структура спектра в области энергий ниже сверхпроводящей щели существенным образом зависит от параметров вихревой конфигурации. Механизм трансформации спектра при изменении вихревого состояния образца связан с перестройкой аномальных спектральных веток, пересекающих уровень Ферми. В случае, когда расстояние между вихрями велико, аномальные ветки спектра описываются в рамках теории Caroli- de Gennes- Matricon для изолированного вихря [5]. С уменьшением расстояния между вихрями, становятся существенными эффекты связанные с перекрытием волновых функций квазичастиц, локализованных на разных вихрях. Это приводит, в частности, к модификации аномальных веток спектра [62]. Затем, когда вихри сближаются настолько, что их коры перекрываются, образуется многоквантовый (гигантский) вихрь с завихренностью  $M > 1$ . Число аномальных веток спектра при переходе от  $M$  отдельных вихревых линий к  $M$ - квантовому вихрю не изменяется [63] и все время остается равным общему значению завихренности  $M$  (в расчете на одну проекцию спина). Ранее, поведение аномальных веток спектра в многоквантовом вихре исследовалось численно [66] и аналитически для определенной модели вихревого кора (с кусочно-постоянным профилем параметра порядка) [67]. Для вихрей с четной завихренностью все аномальные ветки пересекают уровень Ферми при конечном значении



прицельного параметра  $b = -\mu/k_{\perp}$ :

$$\varepsilon(\mu) \sim -(\mu \pm \mu_j)\Delta_0/(k_{\perp}\xi) \quad (1.1)$$

где  $j = 1 \dots M/2$ ,  $\mu_{M/2} \sim k_{\perp}\xi$ . В случае нечетного значения завихренности, появляется спектральная ветка, пересекающая уровень Ферми при  $b = 0$ .

С экспериментальной точки зрения, поведение аномальных веток может быть исследовано например, с использованием СТМ или с помощью измерений теплового транспорта. Современные методы СТМ позволяют исследовать локальный профиль плотности состояний на уровне Ферми, который определяется как раз аномальными ветками спектра [67]. Что касается измерений характеристик теплового транспорта вдоль вихревых линий, то важным преимуществом этой методики является чувствительность к дисперсии квазичастичного спектра как функции  $k_z$  (проекции импульса на направление вихревых линий). В частности, малая величина групповой скорости квазичастичных мод ( $V_g = \hbar^{-1}\partial\varepsilon/\partial k_z$ ), распространяющихся вдоль оси вихря [39, 42] является причиной существенного подавления теплового кондактанса  $\kappa_v \sim T^2 k_F \xi / (\hbar \Delta_0)$  по сравнению с Шарвиновским значением  $\kappa_{Sh} \sim T(k_F \xi)^2 / \hbar$ , характеризующем тепловой транспорт в нормальном канале с поперечными размерами порядка длины когерентности  $\xi$  при некотором значении температуры  $T$ :

$$\frac{\kappa_v}{\kappa_{Sh}} \sim \frac{1}{k_F \xi} \frac{T}{\Delta_0} \ll 1. \quad (1.2)$$

В рамках подхода Ландауэра [68], подобное подавление эффективности теплового транспорта может быть интерпретировано как следствие сильного уменьшения эффективного числа проводящих мод  $N_v = \kappa_v / \kappa_0$ , где  $\kappa_0 = \pi T / (3\hbar)$ - квант теплового кондактанса, приходящийся на одну проводящую моду [69]. Заметим, что квантование теплопроводности, связанное с изменением числа проводящих мод в канале, является экспериментально подтвержденным фактом [70], наряду с хорошо известным эффектом квантования проводимости [68]. квантованием  $S$  учетом того, что минимальное расстояние между квазичастичными уровнями в коре вихря есть  $\omega_0 \approx \Delta_0 / (k_F \xi)$  при  $k_z = 0$ , легко получить оценку  $N_v \sim T / \omega_0$ , которая согласуется с формулой (1.2). Как мы видим, эффективное число проводящих мод определяется характеристиками квазичастичного спектра, и таким образом определяется как эффектами нормального рассеяния квазичастиц на границах образца, так и интерференцией состояний, локализованных в корах близко расположенных вихрей. Поэтому, тепловой кондактанс мезоскопического сверхпроводника вдоль вихревых линий должен зависеть от общего числа и относительного расположения вихрей в образце. В случае, когда одноквантовый вихрь расположен в центре сверхпроводящего цилиндра, рассеяние на границах образца приводит к существенному увеличению теплового кондактанса [39].

## 2. Метод

### 2.1. Квазиклассическое приближение в уравнениях Боголюбова-де Жена: уравнения Андреева

Наше дальнейшее рассмотрение, как в этой так и в следующих главах диссертации будет проводиться в рамках теории Боголюбова-де Жена, описывающей квантовую механику квазичастичных возбуждений в сверхпроводнике:

$$\left[ \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right] u + V(\mathbf{r})u + \Delta(\mathbf{r})v = \varepsilon u \quad (1.3)$$

$$- \left[ \frac{1}{2m} \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \varepsilon_{\perp} \right] v - V(\mathbf{r})v + \Delta^*(\mathbf{r})u = \varepsilon v \quad (1.4)$$

Здесь  $u$  и  $v$ - амплитуды электронной и дырочной компонент,  $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$ ,  $\Delta(\mathbf{r})$ - параметр порядка,  $V(\mathbf{r})$  - потенциальная энергия,  $\mathbf{A}$ - векторный потенциал электромагнитного поля. Мы предполагаем, что система однородна вдоль оси  $z$ , поэтому в уравнениях (1.3) рассматривается движение квазичастиц в плоскости, перпендикулярной вихревым линиям:  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial x)$ . Также, введена эффективная энергия Ферми, характеризующая движение частиц в плоскости  $xy$ :  $\varepsilon_{\perp} = \varepsilon_F - \hbar^2 k_z^2 / (2m) = \hbar^2 k_{\perp}^2 / (2m)$ . Далее, чтобы корректно построить квазиклассическое приближение мы будем рассматривать уравнения 1.3 в области, где потенциальная энергия равна нулю:  $V(\mathbf{r}) = 0$ . Сначала перейдем к импульсному представлению:

$$\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar} \hat{\psi}(\mathbf{p}) d^2 p \quad (1.5)$$

$\mathbf{p} = p(\cos \theta_p, \sin \theta_p) = p\mathbf{p}_0$ . Оператор пространственной координаты может быть записан следующим образом:

$$\hat{\mathbf{r}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = i\hbar \left( \mathbf{p}_0 \frac{\partial}{\partial p} + \frac{i}{p} \{[\mathbf{z}_0, \mathbf{p}_0], \hat{\mu}\} \right),$$

или покомпонентно:

$$\hat{x} = i\hbar \cos \theta_p \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} - \frac{i\hbar}{2p} \left\{ \sin \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\} \quad (1.6)$$

$$\hat{y} = i\hbar \sin \theta_p \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{\partial}{\partial p} \sqrt{p} + \frac{i\hbar}{2p} \left\{ \cos \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}, \quad (1.7)$$

где  $\{A, B\} = AB + BA$  - антикоммутатор операторов  $A$  и  $B$ . Заметим, что каждое слагаемое в уравнениях (1.6, 1.7) является эрмитовым оператором. Далее мы будем предполагать, что волновые функции квазичастиц представляют собой узкие волновые пакеты локализованные вблизи значения импульса  $\hbar k_{\perp}$ :  $p = \hbar k_{\perp} + q$  ( $|q| \ll \hbar k_{\perp}$ ).

По сути, такое предположение означает переход к квазиклассике. Квазиклассические аппроксимации операторов пространственных координат имеют следующий вид:

$$\hat{x} \simeq i\hbar \cos \theta_p \frac{\partial}{\partial q} - \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \sin \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\} \quad (1.8)$$

$$\hat{y} \simeq i\hbar \sin \theta_p \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \cos \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\} \quad (1.9)$$

Далее, переходя к Фурье образу по отстройке  $q$  импульса от значения  $\hbar k_{\perp}$

$$\hat{\psi}(\mathbf{p}) = \frac{1}{k_{\perp}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iqs/\hbar} \hat{\psi}(s, \theta_p) ds \quad (1.10)$$

мы получаем:

$$\hat{q} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial s}$$

$$\hat{x} \simeq s \cos \theta_p - \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \sin \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\} \quad (1.11)$$

$$\hat{y} \simeq s \sin \theta_p + \frac{i}{2k_{\perp}} \left\{ \cos \theta_p, \frac{\partial}{\partial \theta_p} \right\}. \quad (1.12)$$

Заметим, что переменная  $s$  имеет смысл координаты вдоль квазиклассической траектории, то есть прямой линии, ориентированной вдоль направления импульса квазичастицы. Предполагая, что магнитное поле направлено вдоль оси  $z$  и однородно на масштабах рассматриваемой системы  $\mathbf{H} = -H\mathbf{z}_0$ , линейное по  $H$  слагаемое в уравнениях (1.3) может быть записано в виде:

$$\frac{e}{2mc} \{\hat{\mathbf{p}}, \mathbf{A}\} \simeq \frac{\hbar e H}{2mc} \hat{\mu}, \quad (1.13)$$

где мы использовали радиальную калибровку векторного потенциала  $\mathbf{A} = [\mathbf{H}, \mathbf{r}]/2$  и оператор  $z$ - проекции углового момента

$$\hat{\mu} = \frac{1}{\hbar} [\mathbf{r}, \mathbf{p}] \mathbf{z}_0 = -i \frac{\partial}{\partial \theta_p}. \quad (1.14)$$

В итоге, уравнение (1.3) вдоль квазиклассической траектории в координатах  $(s, \theta_p)$  выглядит следующим образом:

$$-i\tilde{\tau}_3 \hbar V_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \hat{\psi} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \hat{\psi} = \left( \varepsilon + \hat{\mu} \frac{\hbar \omega_H}{2} \right) \hat{\psi}, \quad (1.15)$$

где  $\omega_H = |e|H/mc$ - циклотронная частота, а  $V_{\perp} = \hbar k_{\perp}/m$ . Заметим, что в уравнении (1.15) опущены члены, квадратичные по  $H$ , которые являются пренебрежимо

малыми в силу предполагаемой малости размеров системы по сравнению с циклотронным радиусом электронов в металле  $r_H = V_F/\omega_H$ . Волновая функция в реальном пространстве может быть записана следующим образом [39, 62]:

$$\hat{\Psi}(r, \theta) = \int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp}r \cos(\theta - \theta_p)} \hat{\psi}(r \cos(\theta - \theta_p), \theta_p) \frac{d\theta_p}{2\pi}, \quad (1.16)$$

где введена цилиндрическая система координат  $(r, \theta, z)$ . Квазиклассические траектории в двумерном пространстве характеризуются двумя независимыми параметрами: например, углом  $\theta_p$  и прицельным параметром  $b = -\mu/k_{\perp}$ . Поэтому, для того, чтобы получить из (1.15) уравнения Андреева вдоль определенной траектории надо еще раз использовать квазиклассическое приближение, на этот раз для угловой зависимости волновой функции:

$$\hat{\psi}(s, \theta_p) = e^{iS_e(\theta_p)} \hat{g}(s, \theta_p),$$

где  $S_e(\theta_p)$  - угловой эйконал, а прицельный параметр траектории равен

$$-\frac{1}{k_{\perp}} \frac{\partial S_e}{\partial \theta_p} = b(\theta_p).$$

В результате, система квазиклассических уравнений принимает следующий вид:

$$-i\hat{\tau}_3 \hbar V_{\perp} \frac{\partial \hat{g}}{\partial s} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \Delta^* & 0 \end{pmatrix} \hat{g} = \left( \varepsilon + k_{\perp} b \frac{\hbar \omega_H}{2} \right) \hat{g}, \quad (1.17)$$

где  $\Delta = \Delta(x, y)$ ,  $\hat{\tau}_i$  - матрицы Паули в пространстве электрон-дырка ( $i = 1, 2, 3$ ) и

$$\begin{aligned} x &= s \cos \theta_p - b \sin \theta_p, \\ y &= s \sin \theta_p + b \cos \theta_p. \end{aligned} \quad (1.18)$$

## 2.2. Пример: аномальные ветки спектра в многоквантовом вихре.

Для демонстрации квазиклассического подхода мы исследуем спектр многоквантового вихря на основе андреевских уравнений (1.17). В спектре многоквантового вихря присутствуют аномальные ветки, пересекающие уровень Ферми, число которых определяется значением завихренности, то есть изменением фазы параметра порядка при обходе вокруг вихревой особенности в единицах  $2\pi$ . Как было показано в работе [63], этот факт не зависит от поведения профиля параметра порядка в окрестности вихря и является следствием наличия циркуляции фазы. Число аномальных веток можно найти используя общие свойства уравнений (1.17), с помощью метода, основанного на использовании градиентного разложения гриновских функций для уравнений Боголюбова- де Жена [71]. Для полноты изложения, здесь мы приведем

подробный вывод для многоквантового вихря в обыкновенном сверхпроводнике с  $s$ -симметрией параметра порядка.

Итак, рассмотрим уравнение (1.17) с параметром порядка, определяемым следующим выражением в случае многоквантового вихря:

$$\Delta = D_M(r) e^{iM\theta}, \quad (1.19)$$

или в переменных  $(s, \theta_p)$ :

$$\Delta = D_M \left( \sqrt{s^2 + b^2} \right) e^{iM\theta_p} \left[ \frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^M. \quad (1.20)$$

В силу цилиндрической симметрии зависимость функции  $\hat{g}$  от переменной  $\theta_p$  можно исключить с помощью калибровочного преобразования:

$$\hat{g} = \exp(iM\hat{\sigma}_z\theta_p/2) \hat{f}. \quad (1.21)$$

Тогда квазиклассические уравнения принимают вид:

$$-i\hat{\sigma}_z \hbar V_\perp \frac{\partial \hat{f}}{\partial s} + \begin{pmatrix} 0 & \Delta_M \\ \Delta_M^* & 0 \end{pmatrix} \hat{f} = \varepsilon \hat{f}, \quad (1.22)$$

где

$$\Delta_M = D_M \left( \sqrt{s^2 + b^2} \right) \left[ \frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^M.$$

Пусть  $\varepsilon_\lambda$ - набор всех собственных чисел уравнения (1.22), а  $\hat{f}_\lambda = (u_\lambda, v_\lambda)^T$  соответствующие собственные функции ( $T$ - операция транспонирования). Условие нормировки собственных функций имеет вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|u_\lambda|^2 + |v_\lambda|^2) ds = 1, \quad (1.23)$$

а условие полноты гласит:

$$\sum_\lambda \hat{f}_\lambda^{*T}(s) \hat{f}_\lambda(s') = \delta(s - s'). \quad (1.24)$$

Поскольку

$$\hat{f}_\lambda^{*T}(s) \hat{f}_\lambda(s') = \begin{pmatrix} u_\lambda^*(s') u_\lambda(s) & v_\lambda^*(s') u_\lambda(s) \\ u_\lambda^*(s') v_\lambda(s) & v_\lambda^*(s') v_\lambda(s) \end{pmatrix},$$

условие полноты (1.24) может быть записано следующим образом:

$$\sum_\lambda u_\lambda^*(s') u_\lambda(s) = \delta(s - s'), \quad (1.25)$$

$$\sum_\lambda u_\lambda(s) v_\lambda^*(s') = 0.$$

Определим далее нормальную  $G(s, s')$  и аномальную  $F(s, s')$  функции Грина следующим образом:

$$G(s, s') = \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}(s)u_{\lambda}^*(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}},$$

$$F(s, s') = \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}(s)u_{\lambda}^*(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}.$$

Из уравнения (1.22) и условий полноты (1.25) следуют уравнения на гриновские функции:

$$\left( \varepsilon + i\hbar V_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \right) G(s, s') - \Delta_M(s, b)F(s, s') = \delta(s - s'), \quad (1.26)$$

$$\left( \varepsilon - i\hbar V_{\perp} \frac{\partial}{\partial s} \right) F(s, s') - \Delta_M^*(s, b)G(s, s') = 0,$$

Заметим, что уравнение (1.22) обладает следующей симметрией:  $u_{\lambda} \rightarrow v_{\lambda}^*$ ,  $v_{\lambda} \rightarrow u_{\lambda}^*$ . Поэтому, гриновские функции должны обладать следующим свойством:  $G, F(s, s') = \tilde{G}, \tilde{F}(s, s')$ , где

$$\tilde{G}(s, s') = \sum_{\lambda} \frac{v_{\lambda}^*(s)v_{\lambda}(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}},$$

$$\tilde{F}(s, s') = \sum_{\lambda} \frac{u_{\lambda}^*(s)v_{\lambda}(s')}{\varepsilon - \varepsilon_{\lambda}}.$$

Затем, используя условие нормировки (1.23), мы получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( G(s, s) + \tilde{G}(s, s) \right) ds = 2 \int_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds = \sum_{\lambda} (\varepsilon - \varepsilon_{\lambda})^{-1}.$$

Делая замену  $\varepsilon \rightarrow i\omega$  проинтегрируем предыдущее соотношение по  $\omega$ :

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds d\omega = -\frac{1}{4} N_a, \quad (1.27)$$

где

$$N_a = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\lambda} (i\omega - \varepsilon_{\lambda})^{-1} d\omega = \sum_{\lambda} \text{sign}(\varepsilon_{\lambda})$$

- индекс асимметрии спектра, определяющий разницу между числом положительных и отрицательных собственных значений энергии. Для того, чтобы вычислить  $N_a$  удобно перейти в смешанное представление:

$$G_q, F_q(S, q) = \int_{-\infty}^{\infty} G, F(S, s_r) e^{-iqs_r} ds_r,$$

где  $S = (s + s')/2$ ,  $s_r = s - s'$ . Таким образом, мы получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(s, s) ds d\omega = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} G(S, 0) dS d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS dq d\omega. \quad (1.28)$$

Далее удобно ввести безразмерные величины:

$$s \rightarrow s(\hbar V_{\perp}/\Delta_0), \quad q \rightarrow q(\Delta_0/\hbar V_{\perp}), \quad \Delta_M \rightarrow \Delta_0 \Delta_M.$$

Поскольку

$$s = S + \frac{s_r}{2} \rightarrow S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}; \quad \frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial S} + iq,$$

мы получаем следующие уравнения для  $G_q, F_q(S, q)$ :

$$\left[ i\omega - \left( q - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial S} \right) \right] G_q + \Delta_M \left( S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) F_q = 1 \quad (1.29)$$

$$\left[ i\omega + \left( q - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial S} \right) \right] F_q + \Delta_M^* \left( S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) G_q = 0. \quad (1.30)$$

Предполагая, что функция  $\Delta_M(s)$  достаточно медленная, можно использовать разложение в ряд Тейлора:

$$\Delta_M \left( S + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q} \right) = \Delta_M(S) + \Delta'_M(S) \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Предполагая, что пространственная неоднородность мала, можно пренебречь градиентными слагаемыми  $\partial_S, \partial_q$ . Тогда, в первом приближении уравнения для функций  $G_q, F_q$  мы находим, что

$$G_{q0} = -\frac{i\omega + q}{\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2} \quad (1.31)$$

$$F_{q0} = -\frac{\Delta_M^*}{\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2}. \quad (1.32)$$

Однако, подставив функцию  $G_{q0}$  в выражение (1.28), мы получим что интеграл в левой части (1.27) обращается в 0 из-за нечетности  $G_{q0}$  по  $\omega$ . Таким образом, чтобы найти правильное выражение для индекса асимметрии  $N_a$ , необходимо найти функции Грина в следующем порядке малости по градиентам. Из уравнений (1.29,1.30) легко получить:

$$(i\omega - q) G_{q1} - \Delta_M F_{q1} = -\frac{i}{2} \frac{\partial G_{q0}}{\partial S} + \Delta'_M \frac{i}{2} \frac{\partial F_{q0}}{\partial q}$$

$$(i\omega + q) F_{q1} - \Delta_M^* G_{q1} = \frac{i}{2} \frac{\partial F_{q0}}{\partial S} + \Delta_M'^* \frac{i}{2} \frac{\partial G_{q0}}{\partial q}.$$

После несложных преобразований легко получить:

$$\begin{aligned} & (\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2) G_{q1} = \\ & -\frac{i}{2} \left( \Delta_M \frac{\partial}{\partial S} + (i\omega + q) \frac{\partial \Delta_M}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} \right) F_{q0} - \frac{i}{2} \left( \Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} - (i\omega + q) \frac{\partial}{\partial S} \right) G_{q0}. \end{aligned}$$

Правая часть этого уравнения может быть переписана в следующем виде:

$$r.h.s. = -\frac{i}{2} \left[ \frac{|\Delta_M|^2}{i\omega + q} - (i\omega + q) \right] \frac{\partial G_{q0}}{\partial S} - \frac{i}{2} \left[ \Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} \left( \frac{G_{q0}}{i\omega + q} + \frac{\partial G_{q0}}{\partial q} \right) + (i\omega + q) \Delta_M^* \frac{\partial \Delta_M}{\partial S} \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{G_{q0}}{i\omega + q} \right) \right].$$

Слагаемое в первых скобках дает 0 при интегрировании по переменной  $S$ . Выражение во вторых скобках может быть записано как:

$$\frac{i}{4} \frac{\partial |\Delta_M|^2}{\partial S} \frac{\partial G_{q0}}{\partial q} + \frac{i}{2} \frac{G_{q0}}{i\omega + q} \left( \Delta_M \frac{\partial \Delta_M^*}{\partial S} - c.c. \right).$$

Первый член также дает 0 при интегрировании по переменной  $S$  в выражении (1.28). В итоге, мы получаем, что ненулевой вклад в интеграл (1.28) дает следующая часть функции  $G_g$ :

$$\tilde{G}_{q1} = -\frac{|\Delta_M^2|}{(\omega^2 + q^2 + |\Delta_M|^2)^2} \frac{\partial \varphi}{\partial S},$$

где  $\varphi(S) = -M \arctan(s/b)$ - фаза параметра порядка  $\Delta_M(s, b)$  (напомним, что  $M$ - значение завихренности). Теперь мы можем вычислить интеграл

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS d\omega dq.$$

Интегрирование по переменным  $\omega$  и  $q$  удобнее провести в полярных координатах:  $d\omega dq = 2\pi r dr$ :

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G(S, q) dS d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} G_{1q}(S, q) dS d\omega dq = M \frac{\text{sgn}(b)}{4}.$$

Таким образом, индекс асимметрии равен:  $N_a = -M \text{sgn}(b)$ . Этот результат означает, что в  $M$ -квантовом вихре имеется  $M$  так называемых аномальных спектральных веток, которые пересекают уровень Ферми при некоторых значениях прицельного параметра  $b$ . Заметим, что изложенная теория позволяет лишь сделать вывод о количестве аномальных веток. Для того, чтобы более точно найти вид спектра необходимо учесть все члены градиентного разложения функций Грина  $G, F(S, q)$ , или, что то же самое, строго решить спектральную задачу для уравнения (1.22). В общем случае, спектральная задача может быть решена только численно. Однако, в случае малых энергий  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$  оказывается возможным найти аналитическое выражение для аномальных веток, которое очень хорошо совпадает с численными результатами.

Процедура нахождения спектра для уравнения (1.22) была разработана в работе [63] для случая одноквантового вихря ( $M = 1$ ) и фактически основана на использовании теории возмущений. С помощью следующих функций  $G_R = \text{Re}\Delta_M$ ,  $G_I = \text{Im}\Delta_M$ , уравнение (1.22) может быть переписано в следующем виде:

$$-i\hat{\sigma}_z \frac{\hbar^2 k_{\perp}}{m} \frac{\partial \hat{f}}{\partial S} + \hat{\sigma}_x G_R \hat{f} - \hat{\sigma}_y G_I \hat{f} = \varepsilon \hat{f}. \quad (1.33)$$



Заметим, что уравнение 1.33 имеет точное решение при  $\varepsilon = 0$  и  $G_I \equiv 0$ :

$$\hat{f}_{\pm} = (1, \pm i) \exp \left( \pm \frac{m}{\hbar^2 k_{\perp}} \int_0^s G_R ds \right). \quad (1.34)$$

При условии, что  $G_R$  является нечетной функцией  $s$ , стремящейся к конечному значению при  $|s| \rightarrow \infty$  одно из этих решений затухает как при положительных, так и при отрицательных значениях  $s$ . Используя это локализованное решение как нулевое приближение, спектр может быть найден в первом порядке теории возмущений предполагая  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ .

Для произвольного значения завихренности функция  $G_R$  не обязательно является нечетной. Для того, чтобы воспользоваться теорией возмущений необходимо проделать калибровочное преобразование [64, 65]

$$\hat{f} = \left( \frac{s + i\hat{\sigma}_z b}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right)^{\alpha} \hat{w}, \quad (1.35)$$

где новая волновая функция  $\hat{w}$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$\left[ -i\hat{\sigma}_z \frac{\hbar^2 k_{\perp}}{m} \frac{\partial}{\partial s} + \hat{\sigma}_x G_R^{(\alpha)} - \hat{\sigma}_y G_I^{(\alpha)} + \varepsilon_d \right] \hat{w} = \varepsilon \hat{w}. \quad (1.36)$$

Здесь

$$\varepsilon_d = -\frac{\hbar^2 k_{\perp}}{m} \frac{\alpha b}{s^2 + b^2} \quad (1.37)$$

это доплеровский сдвиг, и

$$\begin{aligned} G_R^{(\alpha)} &= D_M \left( \sqrt{s^2 + b^2} \right) \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2\alpha} \right\}, \\ G_I^{(\alpha)} &= D_M \left( \sqrt{s^2 + b^2} \right) \operatorname{Im} \left\{ \left[ \frac{s + ib}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right]^{M-2\alpha} \right\}, \end{aligned} \quad (1.38)$$

это действительная и мнимая части недиагонального потенциала соответственно. Выбирая значение  $M - 2\alpha$  нечетным можно добиться того, чтобы  $G_R^{(\alpha)}(s)$  была нечетной функцией. Сравнивая (1.36) и (1.33) нетрудно видеть, что в результате такого калибровочного преобразования в уравнении появляется доплеровский сдвиг уровней энергии. В принципе, слагаемые  $\varepsilon_d$  и  $\hat{\sigma}_y G_I^{(\alpha)}$  по отдельности не обязательно малы по сравнению с  $\Delta_0$ . Поэтому, теория возмущений работает только тогда, когда поправки для энергии уровней от членов  $\hat{\sigma}_y G_I^{(\alpha)}$  и  $\varepsilon_d$  почти компенсируют друг друга. Аномальные ветки спектра, которые мы изучаем пересекают уровень Ферми при некоторых значениях прицельного параметра  $-\mu_j/k_{\perp}$ , поэтому теория возмущений должна работать вблизи этих точек.

Итак, в качестве функции нулевого приближения мы используем

$$\hat{w}_{\alpha} = (1, -i) \exp \left( -\frac{m}{\hbar^2 k_{\perp}} \int_0^s G_R^{(\alpha)} ds \right).$$

Подставляя  $\hat{w}_\alpha$  в уравнение (1.36), умножая слева на  $\hat{w}_\alpha^*$  мы получаем выражение для спектра

$$\varepsilon_M^{(\alpha)} = \frac{\int_0^\infty [\varepsilon_d + G_I^{(\alpha)}(s)] e^{-K(s)} ds}{\int_0^\infty e^{-K(s)} ds}, \quad (1.39)$$

где

$$K(s) = \frac{2m}{\hbar^2 k_\perp} \int_0^s G_R^{(\alpha)}(t) dt. \quad (1.40)$$

Для одноквантового вихря ( $M = 1$ ) надо положить  $\alpha = 0$ , тогда выражение (1.39) дает спектр Caroli- de Gennes- Matricon [5]. Чтобы получить спектр двухквантового

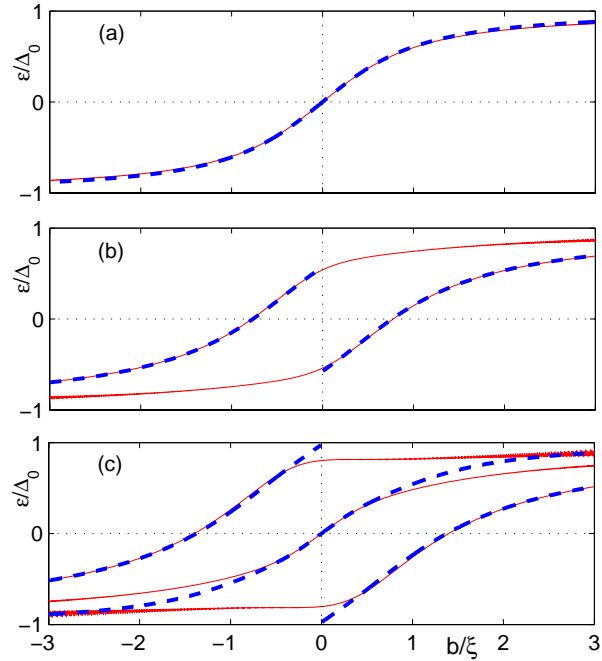


Рис. 1.1. Аномальные ветки спектра как функции прицельного параметра  $b$  для  $k_z = 0$ , полученные из уравнения (1.39) (пунктирные линии) для  $M = 1$  (a),  $M = 2$  (b),  $M = 3$  (c). Аномальные ветки, полученные с помощью численного решения уравнений (1.22) показаны сплошными линиями. Профиль щели был выбран в следующем виде  $D_M(r) = \Delta_0(r/\sqrt{r^2 + \xi^2})^M$ , значение параметра  $k_F \xi = 200$ .

вихря ( $M = 2$ ), необходимо выбрать значение параметра  $\alpha = 1/2$ , спектр трехквантового вихря ( $M = 3$ ) получается при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , и т.д.

Типичное поведение аномальных веток для случаев  $M = 1, 2, 3$  показано на Рис. 1.1. Сравнивая спектры  $\varepsilon_M^{(\alpha)}$  с результатами численного решения спектральной задачи для уравнения (1.33) нетрудно видеть, что аналитический метод, основанный на теории возмущений дает очень точное выражение для аномальных веток спектра в области малых энергий.

Квантование углового момента  $\mu = -k_{\perp}b$  в выражении для спектра может быть учтено с помощью правила Бора-Зоммерфельда, примененного к паре канонических переменных  $(\mu, \theta_p)$  [73]:

$$\int_0^{2\pi} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \beta), \quad (1.41)$$

где  $n$ - целое число, а  $\beta = \{M/2\}$ , где  $\{\dots\}$ - взятие дробной части. В случае нечетного(четного) значения завихренности  $M$  получаем  $\mu = n + 1/2$  ( $\mu = n$ ).

### 3. Трансформация аномальных веток спектра: качественное рассмотрение

Как уже обсуждалось выше, существуют два механизма трансформации аномальных веток спектра в многовихревых конфигурациях: (i) туннелирование квазичастиц между состояниями, локализованными на близко расположенных вихрях; (ii) нормальное рассеяние квазичастиц, которое начинает играть существенную роль, когда вихри расположены достаточно близко к границе образца. Для того, чтобы изучить оба этих механизма мы рассмотрим две модельные задачи: (i) электронная структура многовихревой конфигурации, расположенной достаточно далеко от поверхности образца, так, что можно пренебречь граничными эффектами; (ii) изменение электронной структуры вихря при приближении к границе сверхпроводника.

#### 3.1. Влияние межвихревого туннелирования квазичастиц на спектр

В этом разделе мы постараемся описать качественную картину поведения аномальных веток спектра. Рассмотрим некоторое конечное количество вихревых линий, параллельных оси  $z$ . Для промежуточных значений магнитного поля, расстояние между вихрями составляет несколько длин когерентности. Пусть в плоскости  $(xy)$  точкам расположения вихрей соответствуют координаты  $\mathbf{r}_i$ . Квазиклассические траектории, направленные вдоль импульса квазичастиц  $\mathbf{k}_{\perp} = k_{\perp}(\cos \theta_p, \sin \theta_p)$  характеризуются значением углового момента  $\mu = [\mathbf{r}, \mathbf{k}_{\perp}] \cdot \mathbf{z}_0 = k_{\perp}r \sin(\theta_p - \theta)$  относительно оси  $z$ . Также, можно ввести угловой момент  $\tilde{\mu}_i = \mu - [\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_{\perp}] \cdot \mathbf{z}_0$  относительно оси  $i$ -го вихря, проходящей через точку  $\mathbf{r}_i$  [( $r, \theta, z$ ) - цилиндрическая система координат]. Пренебрегая взаимодействием квазичастичных состояний, локализованных на соседних вихрях, мы получаем вырожденный спектр CdGM, соответствующий изолированному вихрю:  $\varepsilon_i = -\omega \tilde{\mu}_i$  (рассматривается случай  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ ). Для определенного значения энергии можно определить набор пересекающихся квазиклассических орбит на плоскости  $(\mu, \theta_p)$ :  $\mu_i(\theta_p) = -\varepsilon/\omega + [\mathbf{r}_i, \mathbf{k}_{\perp}] \cdot \mathbf{z}_0$ . Эти орбиты показаны пунктирными линиями на Рис.1.2(a) для системы из двух вихрей, расположенных в точках  $\mathbf{r}_1 = (-a/2, 0)$  и  $\mathbf{r}_2 = (a/2, 0)$ .

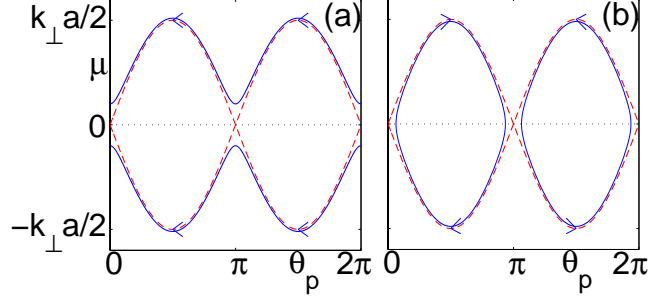


Рис. 1.2. Схематичное изображение квазиклассических орбит для случая  $\varepsilon = 0$  на плоскости  $(\mu, \theta_p)$  (сплошные линии) для (а) системы двух вихрей на расстоянии  $a$  и (б) вихря около плоской границы ( $a/2$ - расстояние о вихря до границы). Орбиты, соответствующие невзаимодействующим вихрям показаны пунктиром.

Каждая точка на квазиклассической орбите в плоскости  $(\mu, \theta_p)$  соответствует траектории, проходящей через центр какого-то из вихрей. Прецессия квазиклассической траектории соответствует движению изображающей точки по орбите и описывается уравнением Гамильтона  $\hbar \partial \theta_p / \partial t = \partial \varepsilon / \partial \mu = -\omega$ . На Рис.1.2 направление прецессии показано стрелками. Каждая точка пересечения квазиклассических орбит  $\mu_i(\theta_p)$  и  $\mu_j(\theta_p)$  соответствует траектории, проходящей одновременно через центры  $i$ -го и  $j$ -го вихрей. Естественно ожидать, что вырождение спектра в этих точках должно быть снято, если учесть конечную вероятность туннелирования квазичастиц между состояниями, локализованными на разных вихрях. Вероятность туннелирования определяется перекрытием волновых функций квазичастиц, поэтому величина расщепления уровней может оценена следующим образом  $\delta \varepsilon \sim \Delta_0 \exp(-k_F a_{ij} / (k_\perp \xi))$ , где  $a_{ij} = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  - кратчайшее расстояние между вихревыми линиями, а  $k_F a_{ij} / k_\perp$  - расстояние между вихрями вдоль траектории. Оценка расщепления  $\delta \mu$  изоэнергетических линий на плоскости  $(\mu, \theta_p)$  [см. Рис. 1.2(а)] выглядит следующим образом:

$$\delta \mu(a_{ij}) \simeq \frac{\delta \varepsilon}{\omega} \sim k_\perp \xi \exp\left(-\frac{k_F a_{ij}}{k_\perp \xi}\right). \quad (1.42)$$

В результате, мы получаем качественно новые квазиклассические орбиты  $\mu_i^*(\theta_p)$ : каждая из них состоит из частей, соответствующих состояниям, локализованным на **разных** вихрях. Туннелирование квазичастиц между вихревыми коронами становится существенным, когда расщепление  $\delta \varepsilon$  сравнимо с расстоянием между уровнями  $\omega_0$ , т.е. когда  $\delta \mu \gtrsim 1$  в уравнении (1.42). В соответствии с этим критерием на  $\delta \mu(a_{ij})$ , туннелирование наиболее эффективно, когда  $k_\perp = k_F$  и  $a_{ij} < a_c$ , где  $a_c \simeq \xi \ln(k_F \xi)$  - критическое значение расстояния между вихрями  $i$  и  $j$ .

Используя терминологию перколяционной теории можно сказать, что вихри  $i$  и  $j$  связаны туннелированием если  $a_{ij} < a_c$  и определить вихревой кластер как набор  $M$  вихрей, связанных как напрямую, так и опосредовано через другие вихри. Естественно, в мезоскопических сверхпроводниках размеры кластера  $L_v$  не могут превышать

размеры образца. Кластер характеризуется набором гибридизованных квазичастичных состояний, состоящих из суперпозиции волновых функций, локализованных на каждом из вихрей, входящих в кластер. Например, рассматривая квазиклассическую орбиту в верхней полуплоскости на Рис.1.2(а) мы получаем, что волновая функция сосредоточена вблизи правого и левого вихря в угловых интервалах  $0 < \theta_p < \pi$  и  $\pi < \theta_p < 2\pi$ , соответственно. Дальнейшее уменьшение расстояния между вихрями приводит к увеличению расщепления  $\delta\mu(a_{ij})$ . В итоге, когда  $a_{ij} \rightarrow 0$  мы получаем набор из  $M$  прямых линий  $\mu = \text{const}$ , параллельных оси  $\theta_p$ , т.е.,  $M$  аномальных веток, пересекающих уровень Ферми, что и означает переход к спектру  $M$ - квантового вихря.

В рамках квазиклассического подхода, эффективность взаимодействия состояний, локализованных на разных вихрях можно оценить с помощью теории Ландау-Зинера, определяющей вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами. Рассмотрим окрестность точки вырождения спектра, например,  $\theta_p = 0$  [см. Рис. 1.2(а)]. Траектория с углом ориентации  $|\theta_p| \ll \xi/a$  проходит через оба вихря, и поэтому волновая функция на такой траектории представляет собой суперпозицию состояний, локализованных на разных вихрях и обладающих близкими энергиями:  $\varepsilon_{v1} = -\omega[\mu - (k_{\perp}a/2) \sin \theta_p]$  и  $\varepsilon_{v2} = -\omega[\mu + (k_{\perp}a/2) \sin \theta_p]$ . Трансформация спектра за счет перекрытия волновых функций может быть найдена в рамках стандартной теории возмущений для почти вырожденной двухуровневой системы [72]:

$$(\varepsilon - \varepsilon_{v1})(\varepsilon - \varepsilon_{v2}) = (\delta\varepsilon)^2. \quad (1.43)$$

Отсюда легко найти расщепление изоэнергетических линий в точке вырождения:

$$\varepsilon = -\omega\mu \pm \sqrt{\omega^2(k_{\perp}a/2)^2\theta_p^2 + (\delta\varepsilon)^2}. \quad (1.44)$$

Вероятность туннелирования Ландау-Зинера определяется следующим образом [72]:

$$W = \exp\left(-4\text{Im} \int_0^{i\theta_p^*} \mu(\theta_p) d\theta_p\right), \quad (1.45)$$

где  $\theta_p^* = 2\delta\varepsilon/(\omega k_{\perp}a)$  и  $\mu(\theta_p)$  находится из уравнения (1.44) с нижним знаком. В результате, получаем следующее выражение для вероятности туннелирования между квазиклассическими орбитами:

$$W = \exp(-2\pi(\delta\mu/\Delta\mu)^2), \quad (1.46)$$

где  $\Delta\mu = \sqrt{k_{\perp}a}$ - квантово-механическая неопределенность углового момента. Таким образом, туннелированием между квазиклассическими орбитами можно пренебречь если  $\delta\mu \gtrsim \Delta\mu$ .

Следуя работе [73], дискретные уровни энергии могут быть получены с помощью правила квантования Бора-Зоммерфельда для канонически сопряженных переменных  $\mu$  и  $\theta_p$ :

$$\int_0^{2\pi n_{\theta}} \mu(\theta_p) d\theta_p = 2\pi(n + \beta), \quad (1.47)$$

где  $n$  и  $n_\theta$  - целые числа,  $2\pi n_\theta$  - период функции  $\mu(\theta_p)$  ( $1 \leq n_\theta \leq M$ ), а  $\beta$ - некоторое число порядка 1. Заметим, что период  $\mu(\theta_p)$  может быть больше, чем  $2\pi$  ( $n_\theta > 1$ ), если нельзя пренебречь переходами Ландау-Зинера между некоторыми орбитами. В зависимости от отношения  $\delta\mu(a_{ij})/\Delta\mu$ , правило квантования (1.47) должно применяться к орбитам  $\mu_i(\theta_p)$  или  $\mu_i^*(\theta_p)$ . В интервале импульсов

$$k_F \sqrt{1 - [\min(a_{ij})/a_c]^2} \ll |k_z| < k_F \quad (1.48)$$

расщепление изоэнергетических линий несущественно, поскольку  $\delta\mu(a_{ij}) \ll \Delta\mu$ . Поэтому, уравнение (1.47), примененное к орбитам  $\mu_i(\theta_p)$  определяет спектр CdGM, характеризующийся минищелью на уровне Ферми  $\omega_0/2 = \omega(k_z = 0)/2$ . В случае  $\min(a_{ij}) > a_c$  ответ CdGM справедлив во всем интервале импульсов квазичастиц. Если же вихри образуют кластер, появляется некоторый интервал импульсов  $|k_z| < k_z^*$ ,

$$k_z^* = k_F \sqrt{1 - [\min(a_{ij})/a_c]^2}, \quad (1.49)$$

где квазичастичное туннелирование между вихрями приводит к качественной перестройке спектра. В этом случае, спектр может быть получен применением правила квантования (1.47) к модифицированным орбитам  $\mu_i^*(\theta_p)$ :

$$\varepsilon_{ni}(k_z) \approx \frac{\Delta_0}{\xi} \left[ \frac{n + \beta}{k_\perp} + b_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M) \right], \quad (1.50)$$

где  $i = 1..M$ . Легко видеть, что спектр (1.50) переходит в спектр многоквантового вихря [63, 66, 67] в пределе  $a_{ij} \rightarrow 0$  когда  $|b_i| \lesssim \xi$ . Значения эффективных прицельных параметров  $b_i(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_M)$  определяются геометрией и размерами вихревого кластера. Рассматривая в качестве примера двух (трех)-вихревую конфигурацию мы получаем, что  $b_{1,2} \sim \pm a$  ( $b_{1,3} \sim \pm a$ ,  $b_2 = 0$ ).

В отличие от спектра CdGM, спектральные ветки, определяемые выражением (1.50), могут пересекать уровень Ферми при некоторых значениях импульса  $k_z$  при уменьшении расстояния между вихрями. Поэтому, туннелирование квазичастиц между вихрями приводит к подавлению минищели в спектре. Плотность состояний имеет особенности ван- Хофа, соответствующие экстремумам веток спектра  $\varepsilon_{ni}(k_z)$ . На фиксированном уровне энергии (например, на уровне Ферми  $\varepsilon = 0$ ) плотность состояний как функция расстояния между вихрями  $a$  осциллирует с периодом порядка Фермиевской длины волны. В эксперименте, расстояние между вихрями может контролироваться внешним магнитным полем. Для типичной зависимости  $a \sim \sqrt{\phi_0/H}$ , масштаб осцилляций плотности состояний по полю равен  $\delta H/H \sim \sqrt{\hbar\omega_H/\varepsilon_F}$ , где  $\omega_H = |e|H/mc$ - циклотронная частота. Такое осцилляторное поведение плотности состояний должно сказаться как на термодинамических, так и транспортных свойствах смешанного состояния сверхпроводников при низких температурах. Заметим, что для типичных значений параметра  $k_F \xi = 10^2 - 10^3$ , критическое расстояние составляет  $a_c/\xi \sim 4 - 6$ , что намного превосходит размер кора вихря. Таким образом, перестройка спектра начинается при магнитных полях  $H \sim \phi_0/a_c^2 \sim H_{c2}[\ln(k_F \xi)]^{-2} \ll H_{c2}$ , когда вихри хорошо разделены.

### 3.2. Нормальное рассеяние квазичастиц на границе образца

Напомним, что обсуждая в предыдущей секции поведение аномальных веток спектра, мы пренебрегали эффектами, связанными с нормальным рассеянием квазичастиц, предполагая, что вихри находятся достаточно далеко от границ сверхпроводника. Это предположение естественно нарушается в случае, когда расстояние между вихрями становится сравнимым с размерами сверхпроводящего образца. С ростом размера вихревого кластера  $L_v$  некоторые из вихрей могут приблизиться к поверхности настолько, что их спектр будет определяться как андреевским, так и нормальным отражением от границы. Если размеры сверхпроводника достаточно малы, влияние нормального отражения квазичастиц от границы будет существенным даже в случае, когда вихрь расположен в центре образца [38, 39]. Для того, чтобы разделить эффекты, связанные с межвихревым туннелированием и нормальным отражением, мы рассмотрим модельную задачу, когда расстояние между вихрями настолько велико (т.е.  $a_{ij} > a_c$ ), что вихревые квазичастичные состояния практически не взаимодействуют. Таким образом, мы будем исследовать модификацию аномальной ветки спектра в случае, когда один вихрь расположен вблизи границы сверхпроводник/изолятор (вакуум). Предполагается, что граница является гладкой и зеркально отражающей, и характеризуется некоторым значением кривизны в плоскости  $xy$ , перпендикулярной вихревой линии (см. Рис. 1.3). Очевидно, что квазиклассический спектр будет испытывать наиболее сильное влияние поверхности в когда траектория квазичастицы, проходящая через кор вихря после отражения опять проходит близко к центру вихря. Подобные траектории отражаются от достаточно малого участка поверхности в окрестности точки, ближайшей к центру вихря. В этой области, форма поверхности может быть аппроксимирована уравнением, описывающим сечение параболоида:  $r(\theta) = d\{1 + [1/2 + d/(4F)]\theta^2\}$ , где использована полярная система координат  $(r, \theta)$  с центром в точке расположения вихря в плоскости  $xy$ . Здесь  $d$  - это расстояние от вихря до поверхности, а  $F$  - фокальное расстояние. Как показано на Рис. 1.3, центр вихря расположен на оптической оси параболического зеркала. Траектории, которые после отражения от зеркала возвращаются в кор вихря могут быть рассмотрены в рамках параксиального приближения.

В этом случае, правила отражения траекторий могут быть получены используя аналогию с геометрической оптикой. Например, для частного случая вогнутого параболического зеркала ( $F < 0$ ) система лучей и изображений показана на Рис. 1.3(a), (b). Исходный объект (белая стрелка) расположен на расстоянии  $d$  от зеркала, а изображение (белая пунктирная стрелка) формируется отраженными лучами (или их продолжениями) в точке с координатой  $f = -d/h$ , где  $h = -(1 + d/F)$ . Тип изображения определяется знаком коэффициента  $h$ : для  $h > 0$  изображение является действительным, в обратном случае - мнимым. На основе этих соображений, параметры отраженной траектории могут быть найдены из простых геометрических построений.

Рассмотрим траекторию, идущую под малым углом  $|\theta_p| \ll 1$  к оптической оси и характеризующуюся малым прицельным параметром  $|b| \ll d$ . Тогда, отраженная

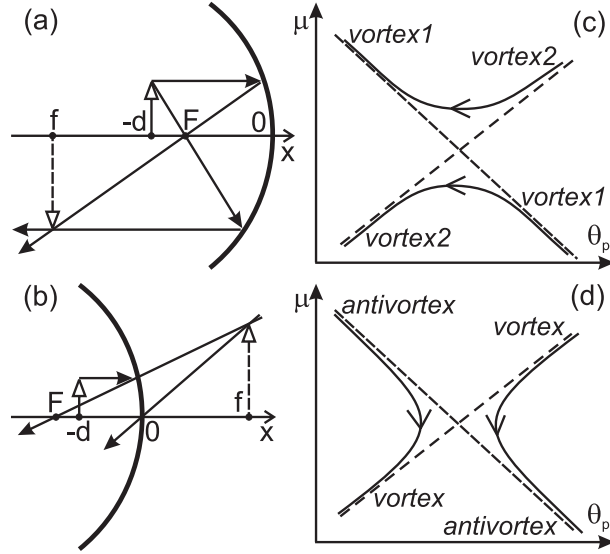


Рис. 1.3. Геометро–оптическая аналогия отражения квазиклассических траекторий в случае вогнутого параболического зеркала ( $F < 0$ ) и соответствующая модификация изоэнергетических линий для  $d > -F$  (а), (с), и для  $d < -F$  (б), (д).

траектория будет иметь угол  $\tilde{\theta}_p = \pi + h\theta_p$  и прицельный параметр  $|b| \ll d$ . Здесь, прицельные параметры падающей и отраженной траекторий определены относительно точки на поверхности с координатами  $\theta = 0$ ,  $r = d$ , т.е., расположенной на минимальном расстоянии от центра вихря.

На плоскости  $(\mu, \theta_p)$  мы можем определить изоэнергетические линии, соответствующие падающей и отраженной траекториям. Пересечение этих линий в области углов  $|\theta_p| \ll 1$  соответствует ситуации, когда обе траектории проходят через кор вихря. Вырождение в точке пересечения должно быть снято за счет расщепления уровней из-за взаимодействия состояний на падающей и отраженной траекториях. В данном случае, можно выделить два качественно разных сценария трансформации спектра в зависимости от соотношения фокального расстояния  $F$  и расстояния  $d$ . Напомним, что скорость движения изображающей точки по квазиклассической орбите определяется уравнением Гамильтона:  $\Omega = \partial\theta_p/\partial t$  и  $\tilde{\Omega} = \partial\tilde{\theta}_p/\partial t = h\Omega$  для падающей и отраженной траектории соответственно. Таким образом, если  $\Omega$  и  $\tilde{\Omega}$  имеют одинаковый знак ( $h > 0$ ), то направления прецессии падающей и отраженной траектории совпадают. Тогда, трансформация квазиклассических орбит будет происходить аналогично рассмотренному выше случаю двух-вихревой конфигурации. [Рис. 1.3(с) и 1.2(а)]. Если же  $h < 0$ , направления прецессии падающей и отраженной траекторий противоположны, что приводит к расщеплению орбит показанному на Рис. 1.3(д) и 1.2(б). Заметим, что в точности такие же квазиклассические орбиты получаются при рассмотрении квазичастичного спектра системы вихрь-антивихрь.

Для того, чтобы обрисовать качественную картину трансформации вихревого спектра в данном разделе мы рассмотрим более детально простейшую ситуацию,



когда вихрь расположен в точке  $(-a/2, 0)$  вблизи плоской границы сверхпроводника, занимающего полуплоскость  $x < 0$ . Если пренебречь отражением квазичастиц от границы, изоэнергетическая линия на плоскости  $(\mu, \theta_p)$  определяется уравнением  $\mu_v(\theta_p) = -\varepsilon/\omega - (k_\perp a/2) \sin \theta_p$ , и показана для частного случая  $\varepsilon = 0$  пунктирной линией на Рис. 1.2(b). Плоская поверхность характеризуется бесконечным фокусным расстоянием  $F = \infty$ , поэтому  $h = -1$  и соответствие параметров падающих и отраженных траекторий устроено следующим образом:  $\tilde{b} = -b$  и  $\tilde{\theta}_p = \pi - \theta_p$ . В результате, мы получаем еще одну изоэнергетическую линию:  $\mu_{av}(\theta_p) = -\mu_v(\pi - \theta_p) = \varepsilon/\omega + (k_\perp a/2) \sin \theta_p$ , которая соответствует отраженным траекториям и показана на Рис. 1.2(b) с помощью другой пунктирной линии. Заметим, что  $\mu_{av}(\theta_p)$  совпадает с изоэнергетической линией, соответствующей мнимому антивихрю, расположенному в точке  $(0, a/2)$  вне сверхпроводящей области. Это означает, что спектр вихря около плоской поверхности может быть получен из рассмотрения спектра системы вихрь-антивихрь. В самом деле, параметр порядка, соответствующий системе вихрь-антивихрь не изменяется при операции отражения в плоскости  $x = 0$ :  $\Delta(x, y) = \Delta(-x, y)$ , что означает соответствующую симметрию волновых функций:  $\hat{\Psi}(x, y) = \pm \hat{\Psi}(-x, y)$ . Нечетные волновые функции удовлетворяют граничным условиям на плоской поверхности  $\hat{\Psi}(0, y) = 0$ . Что касается четных волновых функций, то они удовлетворяют другому условию  $\partial \hat{\Psi}(0, y)/\partial x = 0$  и соответствующие уровни энергии должны быть исключены для того, чтобы получить спектр вихря около плоской границы.

Изоэнергетические линии  $\mu_{v,av}(\theta_p) = \pm[\varepsilon/\omega + (k_\perp a/2) \sin \theta_p]$  пересекаются в некоторых точках, в частности при  $\theta_p = \pi n$  в случае  $\varepsilon = 0$ , где  $n$ -целое число. Вырождение в точках пересечения снимается за счет расщепления, показанного на Рис. 1.2(b) сплошными линиями. Рассматривая взаимодействие двух состояний с близкими энергиями  $\varepsilon_v = -\omega[\mu + (k_\perp a/2) \sin \theta_p]$  и  $\varepsilon_{av} = \omega[\mu - (k_\perp a/2) \sin \theta_p]$ , мы снова получаем секулярное уравнение (1.43) с  $\varepsilon_{v1} = \varepsilon_v$  и  $\varepsilon_{v2} = \varepsilon_{av}$ . Таким образом, квазиклассические орбиты в окрестности точки вырождения  $\theta_p = 0$  определяются следующим выражением:

$$\varepsilon = \pm \sqrt{(\omega\mu)^2 + (\delta\varepsilon)^2} - \omega(k_\perp a/2)\theta_p. \quad (1.51)$$

Классически запрещенная область углов при  $\varepsilon = 0$  имеет ширину  $\delta\theta_p = 4\delta\varepsilon/(\omega k_\perp a)$ . Можно предположить, что появление такой запрещенной области углов объясняет провал в профиле локальной плотности состояний, который наблюдался при численном исследовании спектра вихря вблизи плоской границы [37]. Как будет показано ниже, появление запрещенной области углов действительно приводит к подавлению плотности состояний на уровне Ферми. Мы предполагаем, что этом механизм объясняет сценарий исчезновения аномальной ветки спектра при выходе вихря из сверхпроводника через поверхность.

Для того, чтобы оценить вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами, используем теорию переходов Ландау-Зинера. В данном случае, веро-

ятность туннелирования равна:

$$W = \exp \left( -4 \operatorname{Im} \int_0^{i\mu^*} \theta_p(\mu) d\mu \right), \quad (1.52)$$

где  $\mu^* = \delta\varepsilon/\omega$  и  $\theta_p(\mu)$  определяется уравнением (1.51) с верхним знаком. В итоге, мы получаем оценку для вероятности туннелирования  $W \sim \exp(-2\pi(\delta\theta_p/\Delta\theta_p)^2)$ , где  $\Delta\theta_p \sim (k_\perp a)^{-1/2}$ -квантово-механическая неопределенность угла ориентации траектории. Таким образом, туннелирование между квазиклассическими орбитами несущественно пока  $\delta\theta_p \gtrsim \Delta\theta_p$ , т.е., при  $d < d_c$ , где  $d_c \sim (\xi/2) \ln(k_\perp \xi)$ - критическое расстояние вихря от поверхности.

## 4. Переход от многоквантового вихря к вихревой молекуле

В этом разделе мы рассмотрим модификацию квазичастичного спектра многовихревой конфигурации при изменении расстояния между вихрями от 0 (что соответствует многоквантовому вихрю) до значений, намного превышающих размер вихревого кора, когда вихри могут считаться практически изолированными. Чтобы избежать излишней сложности рассмотрения, мы сосредоточимся на случае, когда вихревая конфигурация состоит из двух вихрей, расположенных на расстоянии  $a$ , которое контролируется внешним магнитным полем. Напомним, что в этом разделе мы не учитываем эффектов, связанных с нормальным отражением квазичастиц.

### 4.1. Квазиклассическое рассмотрение

Мы начнем анализ трансформации электронной структуры системы из двух вихрей с рассмотрения в рамках квазиклассического подхода, аналогичного тому, который был развит в разделе (2.2) для случая многоквантового вихря. Естественно предполагать, что область применимости этого подхода ограничена интервалом расстояний  $a < a_c$ , когда можно пренебречь туннелированием Ландау-Зинера между квазиклассическими орбитами  $\mu(\theta_p)$  (см. раздел 3). Чтобы описать систему двух одноквантовых вихрей, расположенных в точках  $\mathbf{r} = \pm \mathbf{a}/2 = \pm(a/2, 0)$  мы используем следующую аппроксимацию функции щели:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 f_1(\mathbf{r} - \mathbf{a}/2) f_1(\mathbf{r} + \mathbf{a}/2) \quad (1.53)$$

где  $f_1(\mathbf{r}) = e^{i\theta} |f_1(\mathbf{r})|$ - нормированное распределение параметра порядка, соответствующее изолированному одноквантовому вихрю. Для наглядности полезно переписать выражение (1.53) в виде суперпозиции компонент с разным значением завихренности:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 [f_2(\mathbf{r}) e^{2i\theta} + f_0(\mathbf{r})] . \quad (1.54)$$

Для простейшей модели вихревого кора

$$|f_1(\mathbf{r})| = \frac{r}{\sqrt{r^2 + \xi_v^2}}, \quad (1.55)$$

где  $\xi_v \sim \xi$  мы получаем:

$$f_2(\mathbf{r}) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + \xi_v^2 + a^2/4)^2 - a^2 x^2}},$$

$$f_0(\mathbf{r}) = -\frac{a^2/4}{\sqrt{(x^2 + y^2 + \xi_v^2 + a^2/4)^2 - a^2 x^2}}.$$

Для решения уравнений (1.17) с функцией щели определяемой (1.54) мы используем калибровочное преобразование (1.35) с  $\alpha = 1/2$ . Тогда, выражение для квазиклассического спектра принимает вид (1.39) где

$$G_R = \Delta_0 \left[ f_2(x, y) \frac{s}{\sqrt{s^2 + b^2}} + f_0(x, y) \frac{s \cos(2\theta_p) - b \sin(2\theta_p)}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right], \quad (1.56)$$

$$G_I = \Delta_0 \left[ f_2(x, y) \frac{b}{\sqrt{s^2 + b^2}} + f_0(x, y) \frac{s \sin(2\theta_p) + b \cos(2\theta_p)}{\sqrt{s^2 + b^2}} \right], \quad (1.57)$$

а переменные  $(x, y)$  определены уравнениями (1.18).

Соответствующие зависимости прицельного параметра траекторий от угла  $\theta_p$  для нулевой энергии показаны на Рис. 1.4. Результаты вычислений квазиклассического спектра находятся в хорошем соответствии с двухуровневой моделью (1.44), и поэтому угловая зависимость прицельного параметра траектории может быть аппроксимирована следующей формулой:

$$b(\theta_p) = \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}(k_z, a) k_\perp} \pm \sqrt{\tilde{b}^2(k_z, a) + \left(\frac{a}{2} \sin \theta_p\right)^2}, \quad (1.58)$$

где  $\tilde{\omega}(k_z, a) \sim \Delta_0/k_\perp \xi$ , и  $\tilde{b} = \delta\varepsilon/(k_\perp \omega)$  - расщепление квазиклассических орбит. В пределе  $a = 0$  мы получаем спектр двухквантового вихря:  $\varepsilon = \tilde{\omega}(k_z, 0)[b \pm \tilde{b}(k_z, 0)]$ , где  $\tilde{b}(k_z, 0)$ - величина порядка  $\xi$  в области малых  $k_z$ . Для больших межвихревых расстояний величина  $\tilde{b}$  экспоненциально мала:  $\tilde{b} \sim \xi \exp(-k_F a/(k_\perp \xi))$  [см. уравнение (1.42)]. В общем случае, расщепление квазиклассических орбит определяется перекрытием волновых функций квазичастиц, локализованных на соседних вихрях и содержит фактор  $\exp(-K_0(s))$ , описывающий затухание волновой функции при удалении от центра вихря [5]):

$$K_0(s) = \frac{2m}{\hbar^2 k_\perp} \int_0^s \Delta(t) dt. \quad (1.59)$$

Таким образом, спектр (1.39) может быть аппроксимирован формулой (1.58) если мы зададим зависимость  $\tilde{b}(a)$  следующим образом  $\tilde{b} = \tilde{b}(k_z, 0) \exp(-K_0(a/2))$ . Используя выражение (1.55) для профиля параметра порядка, получаем:

$$\tilde{b} = \tilde{b}(k_z, 0) \exp \left( -2 \frac{k_F \xi_v}{k_\perp \xi} \left[ \sqrt{\frac{a^2}{4\xi_v^2} + 1} - 1 \right] \right). \quad (1.60)$$

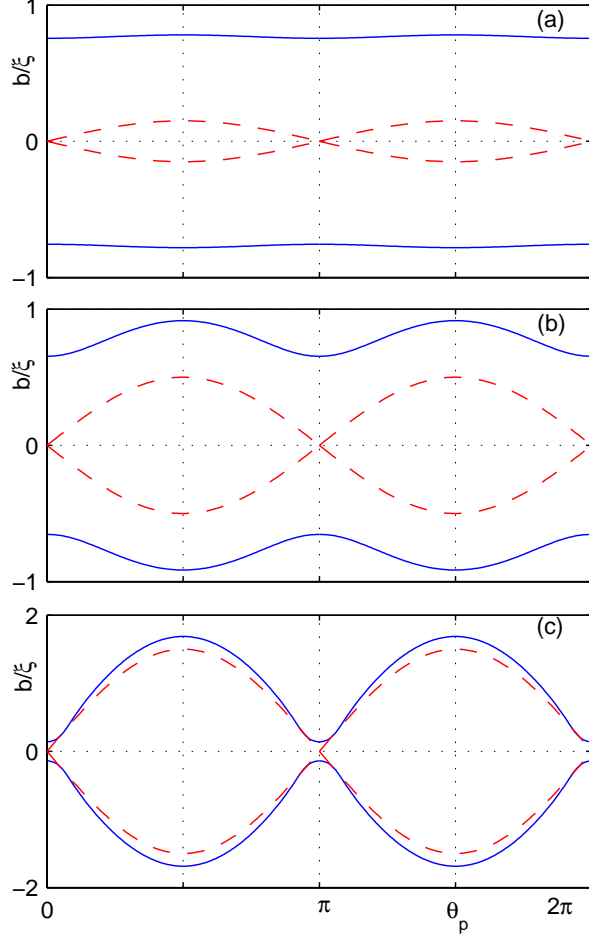


Рис. 1.4. Изоэнергетические линии  $b(\theta_p)$  для системы из двух вихрей. Использованы значения параметров  $\varepsilon = 0$ ,  $k_z = 0$ ,  $a = 0.3\xi$  (а),  $a = \xi$  (б),  $a = 3\xi$  (в). Штриховые линии соответствуют невзаимодействующим вихрям. Функция щели определяется уравнениями (1.53), (1.55) с  $\xi_v = \xi$ .

Сравнивая это приближенное выражение с найденным при помощи спектра (1.39) (см. Рис. 1.5 для  $k_z = 0$ ) можно найти нужное значение параметра  $\tilde{b}(k_z, 0)$ .

Для нахождения дискретных уровней энергии мы можем применить правило квантования Бора- Зоммерфельда (1.47), в виде  $S(\varepsilon, k_z) = 2\pi(n + \beta)$ , где

$$S(\varepsilon, k_z) = \int_0^{2\pi} \mu(\theta_p) d\theta_p = -k_{\perp} \int_0^{2\pi} b(\theta_p) d\theta_p \quad (1.61)$$

это площадь под изоэнергетической линией  $\mu(\varepsilon, k_z)$  на плоскости  $(\mu, \theta_p)$ . Вычисляя интеграл (1.61) для приближенного спектра (1.58) мы находим:

$$S(\varepsilon, k_z) = -2\pi \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}} \pm 2k_{\perp} \sqrt{a^2 + 4\tilde{b}^2} E \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\tilde{b}^2}} \right), \quad (1.62)$$

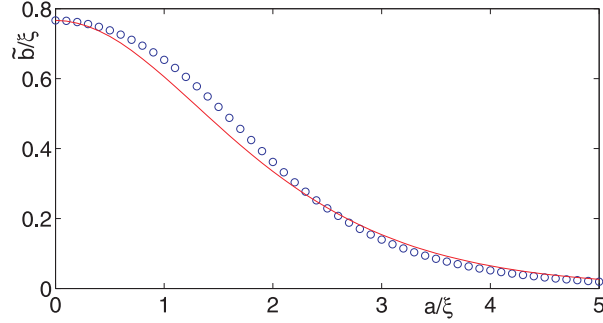


Рис. 1.5. Расщепление квазиклассических орбит  $\tilde{b}$ , полученное из уравнения (1.60) (сплошная кривая) и найденное с помощью выражения (1.39) (кружки) для  $k_z = 0$ . профиль щели определяется выражением (1.54) где  $\xi_v = \xi$ .

где  $E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$  - полный эллиптический интеграл второго рода. В результате, квазичастичный спектр системы из двух вихрей принимает вид

$$\varepsilon_n = \tilde{\omega} \left[ -n - \beta \pm \frac{k_{\perp} \sqrt{a^2 + 4\tilde{b}^2}}{\pi} E \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + 4\tilde{b}^2}} \right) \right]. \quad (1.63)$$

Выражение для спектра (1.63) аналогично спектру двухквантового вихря (1.1) и кардинально отличается от спектра CdGM. В пределе  $a = 0$  выражение (1.63) переходит в спектр двухквантового вихря (1.1). Рассматривая противоположный предел  $a \gg \tilde{b}$ , с логарифмической точностью получаем:

$$S(\varepsilon, k_z) = -2\pi \frac{\varepsilon}{\tilde{\omega}} \pm 2k_{\perp} a \left[ 1 + 2 \left( \frac{\tilde{b}}{a} \right)^2 \ln \left( \frac{a}{\tilde{b}} \right) \right], \quad (1.64)$$

и

$$\varepsilon_n = \tilde{\omega} \left\{ -n \pm \frac{k_{\perp} a}{\pi} \left[ 1 + 2 \left( \frac{\tilde{b}}{a} \right)^2 \ln \left( \frac{a}{\tilde{b}} \right) \right] \right\}. \quad (1.65)$$

#### 4.2. Учет туннелирования между квазиклассическими орбитами.

Примененная в предыдущем разделе методика для расчета спектра является адекватной для не очень больших расстояний между вихрями ( $a < a_c$ ), когда расщепление  $\delta\mu$  изоэнергетических линий  $\mu(\theta_p)$  велико по сравнению с квантовой неопределенностью углового момента квазичастиц  $\Delta\mu$ , т.е. когда вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами достаточно мала [см. уравнение (1.46)]. Следующим шагом анализа трансформации спектра является рассмотрение предела больших расстояний  $a \gtrsim a_c$ , когда расщепление орбит на плоскости  $(\mu, \theta_p)$  мало.

В этом случае, для корректного расчета спектра с учетом туннелирования Ландау-Зинера нам необходимо выйти за рамки квазиклассического описания угловой прецессии траекторий. Это означает, что теперь мы не можем пренебрегать некоммутативностью канонически сопряженных величин  $[\hat{\mu}, \theta_p] = -i$ , где  $\theta_p$  - угол ориентации траектории, а  $\hat{\mu} = -i\partial/\partial\theta_p$  - угловой момент.

Используя симметрию распределения параметра порядка, соответствующего системе двух вихрей, мы можем свести задачу к рассмотрению волновых функций, локализованных в коре лишь одного из вихрей с некоторым граничным условием на плоскости  $x = 0$ , проходящей посередине между вихрями. В самом деле, функция щели в случае системы двух вихрей обладает следующей симметрией:  $\Delta(x, y) = \Delta^*(-x, y)$ . В результате, собственные функции уравнения Боголюбова-де Жена (1.3) должны удовлетворять условию:

$$\hat{\Psi}(x, y) = e^{i\chi}\hat{\Psi}^*(-x, y), \quad (1.66)$$

где  $\chi$  - некоторая постоянная величина. Легко видеть, что спектр не зависит от  $\chi$ , поэтому мы можем выбрать  $\chi = 0$ . Тогда, граничные условия на плоскости  $x = 0$  выглядят следующим образом:

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}^*; \quad \frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial x} = -\frac{\partial\hat{\Psi}^*}{\partial x}. \quad (1.67)$$

Для простоты мы не будем учитывать угловую анизотропию параметра порядка вокруг вихря, расположенного в полуплоскости  $x < 0$ . Тем не менее, состояния в коре вихря не могут быть классифицированы по значениям углового момента, поскольку граничное условие 1.67 запутывает различные угловые гармоники. Поэтому, следуя работе [39] мы используем разложение в ряд по собственным функциям углового момента:

$$\hat{\psi}(s, \theta_p) = \sum_{\mu} e^{i\mu\theta_p + i\hat{\sigma}_z\theta_p/2} \hat{g}_{\mu}(s), \quad (1.68)$$

где  $\mu = n + 1/2$ , и  $n$ -целое число. Функция  $\hat{g}_{\mu}$  удовлетворяет андреевскому уравнению (1.17) вдоль квазиклассической траектории с прицельным параметром  $b = -\mu/k_{\perp}$ . Для малых значений прицельного параметра  $b \ll \xi$  общее решение уравнения (1.17) может быть найдено аналитически в виде суммы фундаментальных решений с произвольными коэффициентами  $c_{\mu}, d_{\mu}$ :

$$\hat{g}_{\mu}(s) = c_{\mu}\hat{G}_{1\mu}(s) + d_{\mu}\hat{G}_{2\mu}(s).$$

Выберем систему фундаментальных решений таким образом, что  $G_{1\mu}(-\infty) = 0$  тогда как  $G_{2\mu}(+\infty) = 0$  (см. [39]):

$$\begin{aligned} \hat{G}_{1\mu} &= \left[ e^{-|K_0(s)|/2} - i\frac{\gamma}{2}(\text{sgn}s + 1)\hat{\sigma}_z e^{|K_0(s)|/2} \right] \hat{\lambda}, \\ \hat{G}_{2\mu} &= \left[ e^{-|K_0(s)|/2} - i\frac{\gamma}{2}(\text{sgn}s - 1)\hat{\sigma}_z e^{|K_0(s)|/2} \right] \hat{\lambda}. \end{aligned}$$

Здесь  $\hat{\lambda} = (\exp(i\pi/4), \exp(-i\pi/4))$ ,

$$\gamma(\mu) = \frac{\Lambda}{\Delta_0} [\varepsilon(\mu) - \varepsilon] , \quad (1.69)$$

$$\Lambda = \frac{2k_F}{k_{\perp}\xi} \int_0^{\infty} e^{-K_0(s)} ds . \quad (1.70)$$

Здесь спектр CdGM является линейной функцией углового момента  $\mu$ :  $\varepsilon(\mu) = -\mu\omega$ , а расстояние между уровнями определяется выражением:

$$\omega = \frac{1}{\Lambda} \frac{2k_F}{k_{\perp}^2 \xi} \int_0^{\infty} \frac{\Delta(s)}{s} e^{-K_0(s)} ds .$$

Удобно ввести следующие функции:

$$C(\theta_p) = \sum_{\mu} e^{i\mu\theta_p} c_{\mu} , \quad D(\theta_p) = \sum_{\mu} e^{i\mu(\theta_p+\pi)} d_{\mu} .$$

Эти функции могут быть отличны от нуля только в угловом интервале  $-\pi/2 < \theta_p < \pi/2$ , чтобы обеспечить затухание полной волновой функции  $\hat{\Psi}(x, y)$  в левой полуплоскости вдалеке от вихря. На границах углового интервала  $-\pi/2 < \theta_p < \pi/2$  необходимо наложить условия

$$C(\pm\pi/2) = \pm D(\mp\pi/2) , \quad (1.71)$$

которые следуют из непрерывности волновой функции  $\psi(s, \theta_p)$  в  $(s, \theta_p)$  представлении

Заметим, что граничное условие (1.67) соответствует связи квазиклассических траекторий с параметрами  $(b, \theta_p)$  и  $(b + a \sin \theta_p, -\theta_p)$ . При больших значениях угла  $|\theta_p| \gg \xi/a$  только одна из этих траекторий проходит через кор вихря, поэтому угловые функции должны с хорошей точностью соответствовать изолированному вихрю

$$C(\theta_p), D(\theta_p - \pi) \sim e^{-i\varepsilon\theta_p/\omega} . \quad (1.72)$$

Отклонения функций  $C(\theta_p), D(\theta_p)$  от зависимости (1.72) из-за граничного условия (1.67) появляются в узком интервале углов  $|\theta_p| \ll \xi/a$ . При таких значениях угла интеграл в уравнении (1.16) может быть вычислен с помощью метода стационарной фазы. Для заданного значения углового момента точки стационарности определяются выражением  $\sin(\theta_p - \theta) = \mu/[k_{\perp}R(\theta)]$ , где  $R(\theta) = a/(2 \cos \theta)$  - это уравнение плоскости  $x = 0$  в полярных координатах. Предполагая, что  $|\mu| \ll k_{\perp}a$  и  $|\theta| \ll \pi$ , мы находим точки стационарности:  $\theta_{p1} \approx \theta + 2\mu/(k_{\perp}a)$  и  $\theta_{p2} = \pi + \theta - 2\mu/(k_{\perp}a)$ . Затем, выражение для волновой функции в полярных координатах при  $r = R(\theta)$  и  $|\theta| \ll \pi$  принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(R(\theta), \theta) &= e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu^2/k_{\perp}a} (e^{-K_0(a/2)} - i\gamma\hat{\sigma}_z) \hat{\lambda} e^{i\mu\theta} c_{\mu} d\mu \\ &- \hat{\sigma}_z e^{-i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu^2/k_{\perp}a} (e^{-K_0(a/2)} + i\gamma\hat{\sigma}_z) \hat{\lambda} e^{i\mu(\theta+\pi)} d_{\mu} d\mu , \end{aligned}$$

где  $\varphi = k_{\perp}a(1 + \theta^2/2)/2$ , а  $\mu$  рассматривается как непрерывная переменная. Тогда, из уравнений (1.67) находим:

$$\text{Im} \left[ e^{i\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu^2/k_{\perp}a} (e^{-K_0(a/2)} - i\gamma\hat{\sigma}_z) \hat{\lambda} e^{i\mu\theta} c_{\mu} d\mu \right] = 0, \quad (1.73)$$

откуда следует (см. Приложение 1):

$$(e^{-K_0(a/2)} - i\hat{\sigma}_z\hat{\gamma}) \hat{\lambda} C_2(\theta) = e^{-2i\tilde{\varphi}} (e^{-K_0(a/2)} + i\hat{\sigma}_z\hat{\gamma}) \hat{\lambda}^* C_1(\theta), \quad (1.74)$$

где  $\tilde{\varphi} = k_{\perp}a(1 - \theta^2/2)/2$ ,  $C_2(\theta) = iC(\theta)$  и  $C_1(\theta) = C^*(-\theta)$ . Тогда, уравнение (1.74) может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \right) C_2(\theta) &= e^{-2i\tilde{\varphi}} J C_1(\theta), \\ \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \right) C_1(\theta) &= e^{2i\tilde{\varphi}} J C_2(\theta), \end{aligned} \quad (1.75)$$

где параметр  $J$  имеет смысл интеграла перекрытия

$$J = \frac{\Delta_0}{\Lambda} e^{-K_0(a/2)}. \quad (1.76)$$

Повторяя аналогичную процедуру для функций  $D_2(\theta) = iD(\theta)$  и  $D_1(\theta) = D^*(-\theta)$  легко получить:

$$\begin{aligned} \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \right) D_2(\theta) &= e^{2i\tilde{\varphi}} J D_1(\theta), \\ \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \right) D_1(\theta) &= e^{-2i\tilde{\varphi}} J D_2(\theta). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Рассматривая уравнения (1.75), (1.77) в угловом интервале  $(\xi/a)J/\Delta_0 \ll |\theta| \ll (\xi/a)$  мы можем пренебречь быстро осциллирующей правой частью. Тогда, асимптотики функций  $\mathbf{C}$  и  $\mathbf{D}$  соответствуют невзаимодействующим вихрям:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= (C_1, C_2) = e^{-i\varepsilon\theta/\omega} (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2), \\ \mathbf{D} &= (D_1, D_2) = e^{-i\varepsilon\theta/\omega} (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2), \end{aligned} \quad (1.78)$$

где  $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2$  - произвольные коэффициенты. Решая уравнения (1.75), (1.77) мы можем найти матрицу перехода  $\hat{X}$ , которая сшивает асимптотические решения в области больших углов:

$$\mathbf{C}(\theta_{th}) = \hat{X} \mathbf{C}(-\theta_{th}),$$

где  $\theta_{th} \sim \xi/a$  - угол шивки. Вводя следующие функции

$$B_2(\theta) = C_2(\theta) e^{i\tilde{\varphi} - i\varepsilon\theta/\omega}, \quad B_1(\theta) = C_1(\theta) e^{-i\tilde{\varphi} - i\varepsilon\theta/\omega},$$



мы получаем уравнения:

$$\begin{aligned} \left(i\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} + \tilde{\theta}\right) B_1 &= pB_2, \\ \left(i\frac{\partial}{\partial\tilde{\theta}} - \tilde{\theta}\right) B_2 &= pB_1, \end{aligned} \quad (1.79)$$

где

$$p = \frac{J}{\omega\sqrt{k_{\perp}a/2}} \quad (1.80)$$

и  $\tilde{\theta} = \theta\sqrt{k_{\perp}a/2}$ . Как известно, уравнения вида (1.79) описывают межзонное тунеллирование в полупроводниках [74] или одномерное движение дираковского фермиона в однородном электрическом поле [75]. Решение этих уравнений может быть записано с помощью функций параболического цилиндра (см. Приложение 2). Сшивая асимптотики этих функций, мы находим матрицу перехода в виде:

$$\hat{X} = e^{-\pi p^2/2} \hat{I} + i(\hat{\sigma}_y \text{Re}\tau + \hat{\sigma}_x \text{Im}\tau). \quad (1.81)$$

Здесь  $\hat{I}$  - единичная матрица,

$$\tau = \sqrt{2 \sinh(\pi p^2/2)} e^{-\pi p^2/4} e^{i\chi} \quad (1.82)$$

$$\chi = k_{\perp}a + p^2 \ln\left(\theta_{th} \sqrt{k_{\perp}a}\right) + \arg\left(\Gamma\left(1 - i\frac{p^2}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{4}, \quad (1.83)$$

и  $\Gamma$  - гамма функция. Аналогично, для функций  $\mathbf{D}(\theta)$  находим:

$$\mathbf{D}(\theta_{th}) = \hat{\sigma}_x \hat{X} \hat{\sigma}_x \mathbf{D}(-\theta_{th}).$$

Далее, используя граничные условия (1.71) можно найти спектр квазичастичных уровней:

$$\cos(\pi\varepsilon/\omega) = \pm e^{-\pi p^2/4} \sqrt{2 \sinh(\pi p^2/2)} \sin\chi. \quad (1.84)$$

Заметим, что в рамках нашего подхода мы не можем точно найти значение угла сшивки  $\theta_{th}$ . Однако, из выражения (1.83) нетрудно видеть, что слагаемое, содержащее  $\theta_{th}$  относительно мало, и кроме того, зависимость  $\chi$  от  $\theta_{th}$  логарифмическая. Таким образом, это слагаемое можно рассматривать как некоторую постоянную добавку к фазе осцилляций уровней энергии. Спектр найденный из выражения (1.84) представлен на Рис. 1.6 для малых ( $a < a_c$ ) и больших ( $a > a_c$ ) расстояний между вихрями. Как легко видеть, трансформация спектра  $\varepsilon(k_z)$  происходит в соответствии со сценарием, предложенным в Разделе 3: по мере уменьшения расстояния  $a$  при переходе через  $a_c$  происходит переход к спектру двухквантового вихря в области малых значений  $k_z$  (удовлетворяющих условию  $p > 1$ ). В случае  $p \ll 1$  мы получаем спектр CdGM с малыми поправками:

$$\varepsilon \simeq \omega[n + 1/2 \mp (-1)^n (p/\sqrt{\pi}) \sin(k_{\perp}a + \pi/4)]. \quad (1.85)$$

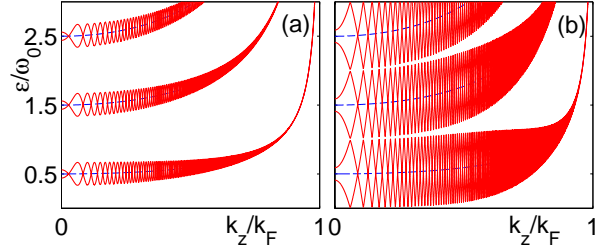


Рис. 1.6. Квазичастичный спектр системы из двух вихрей, рассчитанный с помощью выражения (1.84) для  $a = 5\xi$  (a) и  $a = 3.5\xi$  (b). Спектр CdGM показан пунктирными линиями. Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F\xi = 200$ .

Заметим, что минищель в спектре  $\varepsilon_{min} = [1 - 2p/\sqrt{\pi}]\omega_0/2$  исчезает при  $a = a_c$ .

В противоположном случае  $p \gg 1$  уравнение (1.84) определяет спектр в виде:

$$\varepsilon = \omega \left[ n \pm \frac{k_{\perp}a + p^2 \ln \left( \theta_{th} \sqrt{k_{\perp}a/p^2} \right)}{\pi} \right]. \quad (1.86)$$

Здесь мы использовали асимптотическую формулу для аргумента гамма- функции в пределе  $p \gg 1$ :  $\arg(\Gamma(1 - ip^2/2)) \approx -(p^2/2)[\ln(p^2/2) - 1]$ . Выражение (1.86) может быть переписано в виде  $S(\varepsilon, k_z) = 2\pi n$ , где

$$S(\varepsilon, k_z) = 2\pi \frac{\varepsilon}{\omega} \pm \left[ 2k_{\perp}a + 2p^2 \ln \left( \theta_{th} \sqrt{\frac{k_{\perp}a}{|p|^2}} \right) \right]. \quad (1.87)$$

Нетрудно видеть, что этот результат совпадает с выражением (1.64), которое получено применением правила квантования Бора-Зоммерфельда к квазиклассическим орбитам  $\mu(\theta_p)$  показанным на Рис. 1.2(b).

## 5. Спектр вихря вблизи границы образца

Данный раздел посвящен более детальному исследованию влияния нормального отражения квазичастиц от поверхности образца на спектр вихря. Итак, рассмотрим вихрь, расположенных вблизи гладкой зеркально отражающей поверхности, которую можно аппроксимировать параболической зависимостью (см. Раздел 3.2). Квазиклассические траектории, проходящие через кор вихря под большим углом к оптической оси, после отражения от поверхности проходят далеко от центра вихря. В этом случае, квазиклассический спектр имеет вид, соответствующий вихрю в безграничном сверхпроводнике:

$$\varepsilon(b, \theta_p, k_z) = -\omega k_{\perp}(b - d \sin \theta_p). \quad (1.88)$$

Выражение для спектра должно сильно измениться для траекторий, идущих близко к оптической оси, когда и падающая и отраженная траектории проходят через кор вихря. Для этого, углы ориентации траекторий должны лежать в интервалах углов  $|\theta_p| < \xi/d$  или  $|\pi - \theta_p| < \xi/d$ , а прицельные параметры, определенные относительно точки с координатами  $r = d$  и  $\theta = 0$  (см. Раздел 3.2) должны быть достаточно малы:  $|b| \ll d$ . Решая уравнение (1.17) вдоль падающей и отраженной траектории и сшивая решения таким образом, чтобы обеспечить ноль волновой функции на границе, мы получаем квазиклассический спектр для  $|b| \ll d$  и  $|\theta_p| \ll 1$

$$\varepsilon(b, \theta_p, k_z) = -\frac{\omega k_{\perp}[(1+h)b + 2\theta_p d]}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega k_{\perp})^2(1-h)^2 b^2}{4} + J^2}. \quad (1.89)$$

Это выражение работает также и в интервале углов  $|\theta_p - \pi| \ll 1$  с заменой  $\theta_p \rightarrow \pi - \theta_p$ .

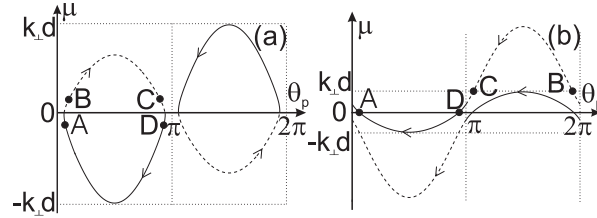


Рис. 1.7. Схематичное изображение изоэнергетических линий  $\mu(\theta_p)$  соответствующих нулевой энергии  $\varepsilon = 0$  для вихря около параболической границы, расположенного на расстоянии  $d > |F|$ :  $F < 0$ ,  $h < 0$  (а),  $F > 0$ ,  $h > 0$  (б). Сплошные линии соответствуют траекториям, проходящим через кор вихря. Точки на сплошной и пунктирной кривой связаны нормальным отражением на границе сверхпроводника.

Уравнения (1.88), (1.89) позволяют определить форму изоэнергетических линий  $\mu(\theta_p) = -k_{\perp}b(\theta_p)$ . В общем случае, можно выделить два типа поведения линий  $\mu(\theta_p)$  вблизи точек  $\theta_p = \pi n$  в соответствии со знаком параметра  $h = -(1 + d/F)$ . Если  $h < 0$  (т.е.,  $F > 0$  или  $F < 0$  и  $d < |F|$ ), появляется классически запрещенная область углов с шириной  $\delta\theta_p = \tilde{p}/\sqrt{|\rho|}$  [Рис. 1.7(а)], где

$$\tilde{p} = \frac{J}{\omega \sqrt{|h\rho|}}, \quad (1.90)$$

где  $\rho = k_{\perp}d(F + d/2)/(F + d)$ . В противном случае, для  $h > 0$  ( $F < 0$  и  $d > |F|$ ) появляется щель между квазиклассическими орбитами но запрещенная область углов отсутствует [Рис. 1.7(б)].

Сплошные линии на Рис. 1.7 соответствуют траекториям, которые всегда проходят через кор вихря. Отражение траекторий от границы сверхпроводника определяет отображение сплошной кривой на пунктирную. Чтобы определить спектр, мы должны применить правило квантования Бора-Зоммерфельда к замкнутой орбите на плоскости  $(\mu, \theta_p)$ , соответствующей прецессии квазиклассической траектории вокруг вихря. Рассмотрим, как образуется такая замкнутая орбита. Начиная из точки

$D$  на Рис.1.7 изображающая точка движется вдоль сплошной кривой по направлению к точке  $A$ , в то время как изображающая точка на пунктирной линии движется из точки  $B$  в  $C$ . В момент, когда точка, соответствующая падающей траектории переходит из т. $A$  на сплошной кривой в т. $B$  на пунктирной кривой, точка, соответствующая отраженной траектории движется из т. $C$  в т. $D$ . Таким образом, происходит отражение от границы, и изображающая точка опять появляется в т. $D$ , что соответствует формированию замкнутой орбиты. Теперь, мы можем применить правило квантования Бора-Зоммерфельда к замкнутым орбитам, которые соответствуют сплошным линиям на Рис. 1.7:  $S(\varepsilon, k_z) = 2\pi n$ , где  $n$  -целое, а  $S(\varepsilon, k_z)$  - площадь под орбитами  $\mu(\theta_p)$ . Вычисляя интегралы, мы находим:

$$S(\varepsilon, k_z) = -\pi \frac{\varepsilon}{\omega_s} \pm \left[ 2k_{\perp}d + \text{sgn}(h)\tilde{p}^2 \ln \left( \theta_{th} \sqrt{\frac{|\rho|}{\tilde{p}^2}} \right) \right], \quad (1.91)$$

где расстояние между уровнями определяется как

$$\omega_s = \omega \left( 1 + \text{sgn}(h) \frac{1}{\pi \theta_{th}} \frac{\tilde{p}^2}{k_{\perp}d} \right)^{-1}. \quad (1.92)$$

Значение угла сшивки  $\theta_{th}$  -порядка  $\xi/(2d)$ .

С увеличением расстояния от вихря до поверхности, расщепление изоэнергетических линий стремится к нулю. В соответствии с аргументами, изложенными в Разделе 3, вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами может быть оценена следующим образом [см. уравнение (1.52)]:  $W \sim \exp(-2\pi(\delta\theta_p/\Delta\theta_p)^2)$ , где  $\delta\theta_p = \tilde{p}/\sqrt{|\rho|}$  и  $\Delta\theta_p \sim 1/\sqrt{|\rho|}$ . Когда расщепление настолько мало, что  $W \sim 1$  (если  $\tilde{p} \ll 1$ ), вышеизложенный квазиклассический подход не работает, поскольку становится необходимо учитывать туннелирование Ландау-Зинера между квазиклассическими орбитами.

Чтобы исследовать спектр в этом случае, мы снова применим подход развитый в Разделе 4.2. Волновая функция должна обращаться в ноль на поверхности сверхпроводника:

$$\int_0^{2\pi} e^{ik_{\perp}R(\theta) \cos(\theta_p - \theta)} \hat{\psi}(R(\theta) \cos(\theta_p - \theta), \theta_p) d\theta_p = 0. \quad (1.93)$$

Используя технику, аналогичную использованной в Разделе 4.2 мы получаем уравнения вблизи точки вырождения  $\theta = 0$ :

$$\begin{aligned} \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \varepsilon \right) C_1(\theta) &= e^{i\rho\theta^2 - 2ik_{\perp}d} \frac{J}{\sqrt{h}} C_2(\theta), \\ \left( i\omega \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\varepsilon}{h} \right) C_2(\theta) &= e^{-i\rho\theta^2 + 2ik_{\perp}d} \frac{J}{\sqrt{h}} C_1(\theta), \end{aligned} \quad (1.94)$$

где  $C_1(\theta) = C(\theta)$  и  $C_2(\theta) = iD(\theta/h)$ . Граничные условия для функций  $C_{1,2}(\theta)$  имеют

вид:

$$\begin{aligned} iC_2(h\pi/2) &= C_1(-\pi/2). \\ iC_1(\pi/2) &= C_2(-h\pi/2). \end{aligned} \quad (1.95)$$

Важно отметить, что уравнения (1.94) справедливы, пока  $k_{\perp}d|h| \gg 1$ . Поскольку  $h = 0$  соответствует случаю, когда вихрь расположен в фокальной точке вогнутой поверхности, условие  $k_{\perp}d|h| \gg 1$  означает, что расстояние от вихря до фокальной точки должно быть намного больше фермиевской длины волны  $\lambda_F = 2\pi/k_F$ . Также, далее мы будем предполагать, что расстояние от вихря до центра кривизны поверхности намного больше  $\lambda_F$ , поэтому  $|\rho| \gg 1$ . Это позволяет нам при достаточно больших углах  $|\theta| \gg J/(\omega\sqrt{|h|\rho})$  пренебречь быстро осциллирующими правыми частями в уравнениях (1.94). В этом случае, мы получаем решения уравнений (1.94), соответствующие изолированному вихрю в безграничном сверхпроводнике:

$$\mathbf{C} = (C_1, C_2) = (a_1 e^{-i\varepsilon\theta/\omega}, a_2 e^{-i\varepsilon\theta/\omega h}), \quad (1.96)$$

где  $a_1, a_2$  - произвольные коэффициенты. Чтобы найти матрицу перехода  $\hat{X}$  связывающую асимптотики на больших углах  $\mathbf{C}(\theta_{th}) = \hat{X}\mathbf{C}(-\theta_{th})$  нам необходимо рассмотреть область малых углов. Удобно ввести новые функции

$$\begin{aligned} B_1(\theta) &= C_1(\theta) e^{ik_{\perp}d} e^{-i\rho\theta^2/2 - i\varepsilon_1\theta/\omega}, \\ B_2(\theta) &= -\text{sgn}(\rho) C_2(\theta) e^{-ik_{\perp}d} e^{i\rho\theta^2/2 - i\varepsilon_1\theta/\omega}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_1 = \varepsilon(h+1)/(2h)$ , а новая координата определена следующим образом  $\tilde{\theta} = \sqrt{-\rho}(\theta + \theta_0)$ , где  $\theta_0 = \varepsilon(h-1)/(2\rho h\omega)$ . Тогда, мы получаем новую систему уравнений для  $B_1(\tilde{\theta}), B_2(\tilde{\theta})$ . Эта система совпадает с уравнениями (1.79), хотя для  $h < 0$  координата  $\tilde{\theta}$  является мнимой и уравнения (1.79) надо рассматривать вдоль мнимой оси. Используя решение уравнений (1.79) (см. Приложение 4), находим матрицу перехода ( $h > 0$ ):

$$\hat{X} = e^{-\pi\tilde{p}^2/2} \hat{I} - i(\hat{\sigma}_x \text{Im}\tau_1 + \hat{\sigma}_y \text{Re}\tau_1), \quad (1.97)$$

где  $\hat{I}$  - единичная матрица, а

$$\tau_1 = \sqrt{2 \sinh(\pi\tilde{p}^2/2)} e^{-\pi\tilde{p}^2/4} e^{i\chi_1},$$

где  $\chi_1 = 2k_{\perp}d + \tilde{p}^2 \ln |\tilde{\theta}^*| + \arg(\Gamma(1 - i\tilde{p}^2/2)) + \pi/4$ . Аналогично, для  $h < 0$  получаем:

$$\hat{X} = e^{\pi\tilde{p}^2/2} \hat{I} - (\hat{\sigma}_y \text{Re}\tau_2 + \hat{\sigma}_x \text{Im}\tau_2) \quad (1.98)$$

где

$$\tau_2 = \sqrt{2 \sinh(\pi\tilde{p}^2/2)} e^{\pi\tilde{p}^2/4} e^{i\chi_2}$$

и  $\chi_2 = 2k_{\perp}d - \tilde{p}^2 \ln |\tilde{\theta}^*| - \arg(\Gamma(1 - i\tilde{p}^2/2)) + \pi/4$ . Здесь введено обозначение  $\tilde{\theta}^* = \sqrt{|\rho|}(\theta_{th} + \theta_0)$ .

Квазичастичный спектр получается с помощью граничных условий (1.95):

$$\cos\left(\frac{\pi\varepsilon}{\omega}\right) = -\text{sgn}(h)\sqrt{2\sinh\left(\frac{\pi\tilde{p}^2}{2}\right)}e^{-\pi\tilde{p}^2/4}\sin\chi, \quad (1.99)$$

где

$$\chi = 2k_{\perp}d + \text{sgn}(h)\left[\tilde{p}^2\ln\left|\sqrt{|\rho|}(\theta_{th} + \theta_0)\right| + \arg\left(\Gamma\left(1 - \frac{i\tilde{p}^2}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (1.100)$$

Энергия  $\varepsilon$  входит в обе части уравнения (1.99) [через  $\theta_0 = \varepsilon(h-1)/(2\rho h\omega)$ ]. Для малых значений  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$  выполняется неравенство  $\theta_{th} \gg \theta_0$ , и логарифм в уравнении (1.100) может быть разложен в ряд:  $\ln(|\theta_{th} + \theta_0|\sqrt{|\rho|}) \approx \ln(\theta_{th}\sqrt{|\rho|}) - \theta_0/\theta_{th}$ . Переходы Ландау-Зинера между квазиклассическими орбитами становятся важными при условии  $\tilde{p} \lesssim 1$ , когда зависимость от энергии в правой части уравнения (1.99) несущественна:  $\tilde{p}^2\theta_0/\theta_{th} \ll 1$ . В противоположном случае вероятность туннелирования Ландау-Зинера исчезающе мала, и из уравнения (1.99) можно получить явное выражение для спектра:

$$\varepsilon = \omega \left[ 2n \pm \frac{2k_{\perp}d + \text{sgn}(h)\tilde{p}^2\ln\left(\theta_{th}\sqrt{|\rho|/\tilde{p}^2}\right)}{\pi} \right]. \quad (1.101)$$

Здесь  $n$  — целое число и мы воспользовались асимптотической формулой при  $\tilde{p} \gg 1$ :  $\arg(\Gamma(1 - i\tilde{p}^2/2)) \approx -(\tilde{p}^2/2)[\ln(\tilde{p}^2/2) - 1]$ . Этот результат совпадает с тем, который получается из правила квантования Бора-Зоммерфельда  $S(\varepsilon, k_z) = 2\pi n$ , где  $S(\varepsilon, k_z)$  определяется уравнением (1.91). Общий сценарий трансформации спектра при приближении вихря к поверхности показан на Рис. 1.8.

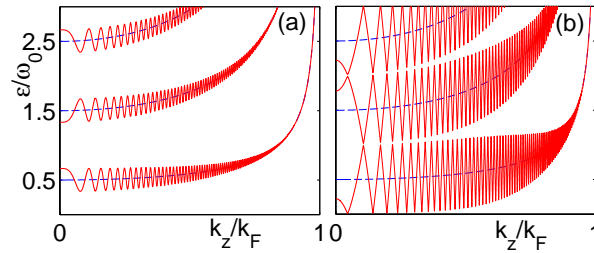


Рис. 1.8. Квазичастичный спектр для вихря около плоской границы на расстоянии  $d = 2.5\xi$  (a),  $d = 1.75\xi$  (b). Спектр CdGM показан пунктирными кривыми. Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F\xi = 200$ .

Сравнивая Рис. 1.8 и 1.6 нетрудно видеть, что спектр вихря около поверхности аналогичен спектру системы из двух вихрей, где часть веток энергии [соответствующих верхнему или нижнему знаку в уравнении (1.84)] отсутствует. Для того, чтобы

пояснить этот результат заметим, что трансформация спектра в любом случае вызвана связью квазиклассических траекторий, соответствующих различным направлениям импульса квазичастиц. Для системы из двух вихрей или вихрь-антивихрь, связь траекторий происходит в силу межвихревого туннелирования квазичастиц и прецессией траекторий вокруг вихревого кора. Как было замечено выше, в частном случае плоской поверхности спектр квазичастиц в точности совпадает со спектром системы вихрь-антивихрь, если мы не будем рассматривать четные волновые функции, удовлетворяющие  $\partial\hat{\Psi}(0, y)/\partial x = 0$ .

## 6. Плотность состояний

Используя результаты анализа квазичастичного спектра мы теперь можем исследовать измеряемые характеристики, например, плотность состояний. Расчет плотности состояний может быть проделан аналитически в рамках квазиклассического приближения, когда энергия может быть выражена как функция прицельного параметра траектории  $b = -\mu/k_{\perp}$ , угла ориентации  $\theta_p$  и проекции импульса квазичастицы  $k_z$ :  $\varepsilon = \varepsilon(\mu/k_{\perp}, \theta_p, k_z)$ . Разрешая это уравнение относительно  $b$ , можно найти изоэнергетические линии  $\mu = \mu_i(\theta_p, \varepsilon, k_z)$ . Далее мы будем рассматривать состояния связанные только с одной изоэнергетической линией, подразумевая, что там где это надо производится суммирование по индексу  $i$ , нумерующему различные кривые.

Каждой квазиклассической орбите соответствует набор спектральных веток  $\varepsilon_n(k_z)$ , определяемых с помощью правила квантования Бора-Зоммерфельда:

$$S(\varepsilon_n, k_z) = 2\pi n, \quad (1.102)$$

где  $S(\varepsilon, k_z)$  - площадь под кривой  $\mu(\theta_p, \varepsilon, k_z)$ . Плотность состояний (в расчете на единицу длины и одну проекцию спина) определяется стандартным образом:

$$\nu(\varepsilon) = \sum_n \int_{-k_F}^{+k_F} \frac{dk_z}{2\pi} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n(k_z)) = \frac{1}{\pi} \sum_n \left| \frac{\partial \varepsilon_n(k_z = q_n(\varepsilon))}{\partial k_z} \right|^{-1}, \quad (1.103)$$

где спектральные ветки  $\varepsilon_n(k_z)$  являются четными функциями  $k_z$  в силу симметрии уравнений Боголюбова-де Жена по отношению к инверсии оси  $z$ , а  $q_n(\varepsilon)$  - набор положительных значений проекции импульса, удовлетворяющих уравнению  $\varepsilon_n(q_n) = \varepsilon$ . Также, мы предполагаем что  $|S(\varepsilon, k_z)|$  является монотонной функцией  $k_z > 0$ , достигающей максимума при  $k_z = 0$ . Это условие обеспечивает единственность корня  $q_n > 0$  для каждой из веток спектра. Заметим, что оно выполняется во всех случаях, которые будут исследоваться далее.

Рассмотрим дифференциал функции  $S(\varepsilon, k_z)$  при фиксированном значении индекса  $n$ . Легко получить следующее соотношение

$$\frac{\partial \varepsilon_n(k_z)}{\partial k_z} = - \frac{\partial S / \partial k_z}{\partial S / \partial \varepsilon},$$

с помощью которого можно преобразовать производные в уравнении (1.103). В качестве первого шага мы пренебрежем дискретностью спектра, и заменим суммирование по  $n$  в уравнении (1.103) на соответствующий интеграл. Для фиксированного значения энергии в уравнении (1.102) дифференциал  $dn$  может быть записан в следующем виде:

$$dn = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial k_z} dk_z .$$

В итоге, мы получаем формулу для плотности состояний :

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-k_F}^{k_F} \left| \frac{\partial S}{\partial \varepsilon} \right| dk_z . \quad (1.104)$$

В качестве примера, рассмотрим спектр CdGM одноквантового вихря в безграничном сверхпроводнике. Тогда,  $\mu = -\varepsilon/\omega$  и  $|S(\varepsilon)| = 2\pi\varepsilon/\omega$  (для  $\varepsilon = 0$ ). Таким образом

$$\nu(\varepsilon) = \nu_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} \frac{dk_z}{\omega} = \frac{k_F}{4\omega_0} . \quad (1.105)$$

Для двухквантового вихря из (1.1) мы получаем  $\mu_{1,2} = -\varepsilon/\omega \pm \mu^*$ , поэтому  $\nu(\varepsilon) = k_F/(2\omega_0) = 2\nu_0$ .

Далее, нашей целью является расчет плотности состояний для системы из двух вихрей и вихря около поверхности. В первом случае выражение для площади под квазиклассическими орбитами имеет вид (1.64). Поэтому,  $|\partial S_{1,2}/\partial \varepsilon| = 2\pi/\omega$  и плотность состояний не зависит от расстояния между вихрями:  $\nu(\varepsilon) = k_F/2\omega_0 = 2\nu_0$ . Для расчета плотности состояний в случае вихря около поверхности мы используем уравнение (1.91) и получаем:  $|\partial S_{1,2}/\partial \varepsilon| = 2\pi/\omega_s$ . Важным обстоятельством является то, что  $\omega_s$  зависит от расстояния до границы, а также от свойств поверхности (т.е., от фокального расстояния  $F$ ). В результате, плотность состояний на уровне Ферми может быть записана следующим образом:  $\nu = \nu_0 + \text{sgn}(h)\delta\nu$ , где

$$\delta\nu/\nu_0 = \frac{2\omega_0}{\pi^2\theta_{th}k_F d} \int_{-k_F}^{k_F} \frac{\tilde{p}^2}{\omega k_\perp} dk_z . \quad (1.106)$$

Отношение  $\delta\nu/\nu_0$  является монотонно убывающей функцией расстояния  $d$  и при  $d \gg \xi$  выходит на асимптотику:  $\delta\nu/\nu_0 \sim (\xi/d) \exp(-4d/\xi)$ . Поэтому, в случае  $h < 0$  ( $h > 0$ ), плотность состояний уменьшается (возрастает) при приближении вихря к поверхности. В случае, если вихрь находится достаточно близко к границе, так, что  $d < |F|$ , коэффициент  $h$  всегда является отрицательным, поэтому плотность состояний уменьшается. Для примера, в случае плоской поверхности, при  $d = \xi$ , подавление плотности состояний  $\delta\nu$  составляет порядка  $0.1\nu_0$ . Этот эффект может быть интерпретирован как исчезновение аномальной ветки спектра при выходе вихря и сверхпроводящего образца. Подавление плотности состояний является прямым следствием увеличений расстояния между уровнями  $\omega_s$  (1.92), соответствующими аномальной



ветке, за счет появления запрещенной области углов ориентации траекторий, как показано на Рис.1.7(a). Уменьшение расстояния  $d$  должно приводить к дальнейшему сжатию квазиклассических орбит на плоскости  $(\mu, \theta_p)$  вплоть до полного исчезновения аномальной спектральной ветки при выходе вихря из сверхпроводника.

Если по каким-нибудь причинам становится необходимым учитывать дискретность спектра, квазиклассический подход к вычислению плотности состояний становится неприменимым. В этом случае, плотность состояний может быть найдена численно из выражений для спектра (1.84,1.99). Результаты этих вычислений показаны на Рис. 1.9 и 1.10. Чтобы сгладить особенности ван Хова мы усреднили плотность состояний по малому интервалу энергии  $0.1\omega_0$ . В эксперименте такое усреднение может быть связано например, конечностью температуры или рассеянием квазичастиц на примесях.

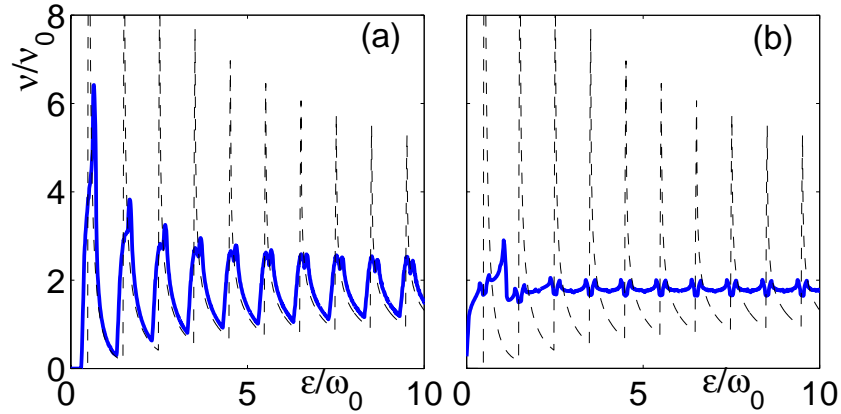


Рис. 1.9. Плотность состояний для системы из двух вихрей в случае  $a = 5\xi$  (a),  $a = 3.5\xi$  (b). Удвоенная плотность состояний для спектра CdGM показана пунктирными линиями. Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F\xi = 200$ .

Плотность состояний системы из двух вихрей (Рис. 1.9) в случае  $a < a_c$  состоит из фона на уровне  $2\nu_0$  [Рис. 1.9(b)] и двух серий пиков, сдвинутых относительно друг друга по энергии на расстояние  $\omega_0(2\chi - [2\chi])$ , где квадратные скобки обозначают взятие целой части. Пики являются усредненными особенностям ван Хова, соответствующими экстремумам спектральных веток при  $k_z = 0$  [Рис. 1.6(b)]. По мере увеличения расстояния между вихрями, плотность состояний приближается к удвоенной плотности состояний CdGM для изолированного вихря, показанной на рисунке пунктирными линиями [Рис. 1.9(a)]. Из выражения для спектра (1.84) нетрудно видеть, что положение особенностей ван Хова зависит от расстояния между вихрями. Поэтому, плотность состояний на фиксированном уровне энергии (например, на уровне Ферми  $\varepsilon = 0$ ) как функция расстояния между вихрями состоит из серии особенностей, следующих с периодом порядка  $\lambda_F$  по  $a$  [см. Рис.(1.11)].

Выражение для спектра вихря около границы (1.99) похоже на спектр системы

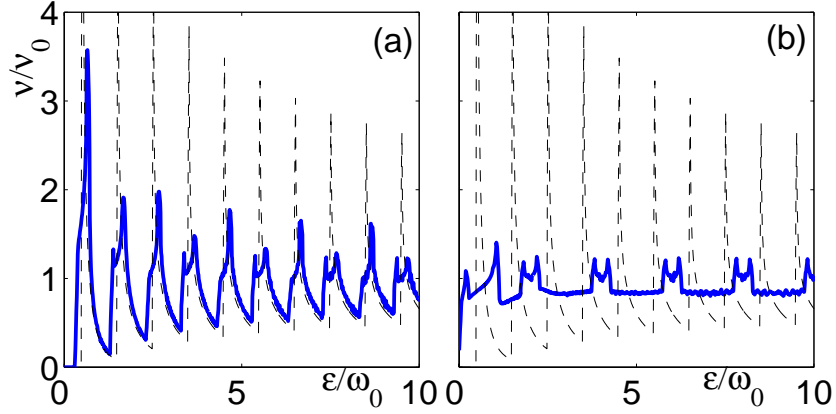


Рис. 1.10. Плотность состояний для вихря около плоской границы в случае  $d = 2.5\xi$  (a),  $d = 1.75\xi$  (b). Плотность состояний для спектра CdGM показана пунктирными линиями. Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F\xi = 200$ .

из двух вихрей, в котором отсутствует часть веток, соответствующих нижнему или верхнему знаку в уравнении (1.84). Плотность состояний в случае вихря около плоской границы показана на Рис. 1.10. Нетрудно видеть, что плотность состояний также состоит из фона и двух серий пиков, расстояние между которыми теперь составляет примерно  $2\omega_0$ .

## 7. Тепловой кондактанс

Этот раздел посвящен анализу характеристик теплового транспорта в мезоскопических сверхпроводниках в пределе низких температур  $T \ll \Delta_0$ , когда определяющим является вклад подщелевых квазичастиц. Мы будем рассматривать баллистический транспорт, пренебрегая рассеянием на примесях, а также в контактах между нормальными электродами и сверхпроводником. Выражение для потока энергии вдоль оси  $z$  (направление вдоль вихревых линий) может быть записано в виде [39, 42]:

$$I_\varepsilon = \int d^2r \sum_\mu \int \frac{dk_z}{\pi m} \varepsilon_n(k_z) \left[ u_{nk_z}^* \left( \hbar k_z - \frac{e}{c} A_z \right) u_{nk_z}^* n(\varepsilon_\mu) - v_{nk_z}^* \left( \hbar k_z + \frac{e}{c} A_z \right) v_{nk_z}^* [1 - n(-\varepsilon_\mu)] \right], \quad (1.107)$$

где индекс  $n$  принимает целые значения,  $u_{nk_z}$  и  $v_{nk_z}$  - электронная и дырочная части волновой функции, соответствующей уровню энергии  $\varepsilon = \varepsilon_n(k_z)$ ,  $A_z$  - проекция векторного потенциала на ось  $z$  (в нашем случае  $A_z = 0$ ). Суммирование в уравнении (1.107) идет только по положительным уровням энергии  $\varepsilon_n > 0$ . Как видно из выражения (1.107), электроны с функцией распределения  $n(\varepsilon)$  переносят энергию  $\varepsilon$ , а

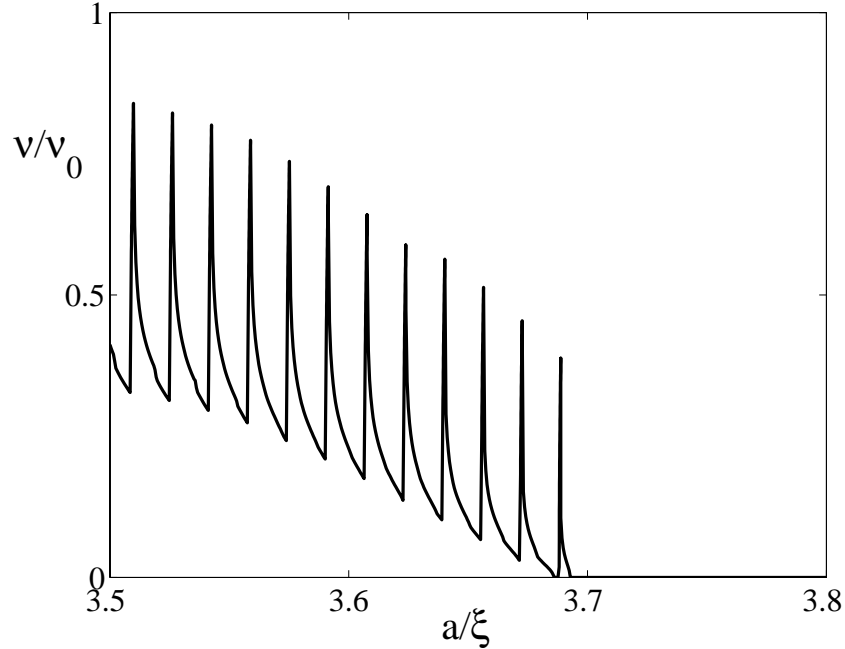


Рис. 1.11. Плотность состояний для системы из двух вихрей как функция расстояния  $a$ . Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F \xi = 200$ .

дырки с функцией распределения  $1 - n(-\varepsilon)$  переносят энергию  $-\varepsilon$ . В равновесии, во всей системе функция распределения удовлетворяет условию  $n(\varepsilon) = 1 - n(-\varepsilon)$ . Используя уравнения Боголюбова-де Жена (1.3), можно получить важное интегральное соотношение для квазичастичной волновой функции  $(u_{n,k_z}, v_{n,k_z})$ :

$$\int d^2 r \left[ u_{nk_z}^* \left( \hbar k_z - \frac{e}{c} A_z \right) u_{nk_z}^* n(\varepsilon_\mu) - v_{nk_z}^* \left( \hbar k_z + \frac{e}{c} A_z \right) v_{nk_z}^* [1 - n(-\varepsilon_\mu)] \right] = \frac{m}{\hbar^2} \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k_z}. \quad (1.108)$$

Из этого соотношения видно, что электронный и дырочный вклады в значительной степени компенсируют друг друга: каждое слагаемое в левой части (1.108) примерно в  $k_F \xi$  раз больше результата в правой части. Используя (1.108), выражение (1.107) может быть записано в виде:

$$I_\varepsilon = \sum_n \int_{-k_F}^{k_F} \varepsilon_n n(\varepsilon_n) \frac{\partial \varepsilon_n}{\partial k_z} \frac{dk_z}{\pi \hbar}. \quad (1.109)$$

Таким образом, в отличие от электрического тока, поток тепла определяется групповой скоростью квазичастиц вдоль оси вихря. Малая величина групповой скорости  $|\partial \varepsilon_n / \hbar \partial k_z| \sim V_F / (k_F \xi)^2$  по сравнению со скоростью Ферми  $V_F$  приводит к тому, что тепловой кондактанс вдоль оси одноквантового вихря намного меньше, чем кондактанс нормального канала такой же ширины.

Для описания теплового транспорта через вихревые состояния мы будем использовать обобщение подхода Ландауэра для расчета электрического кондактанса в

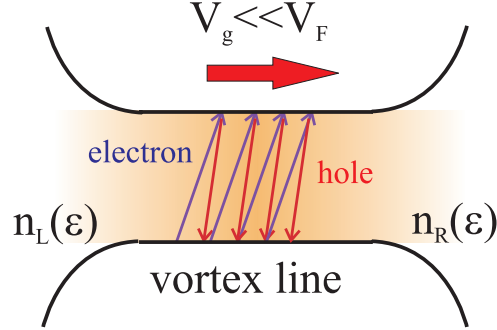


Рис. 1.12. Схематичное изображение баллистического квантового транспорта через кор вихря. Нормальные берега контакта находятся в равновесии и функции распределения  $n_{L,R}(\varepsilon)$  являются равновесными функциями Ферми с температурами  $T_{L,R}$  соответственно.

квантовых каналах [68]. Следуя работам [39, 42], мы предполагаем, что при отклонении от равновесия, функция распределения квазичастиц в вихре, летящих слева направо (см. Рис.1.12) с групповой скоростью  $V_g = \partial\varepsilon_n/\hbar\partial k_z > 0$ , совпадает с равновесной функцией распределения в левом нормальном электроде  $n_L(\varepsilon)$ . Аналогично, квазичастицы летящие справа налево с групповой скоростью  $V_g = \partial\varepsilon_n/\hbar\partial k_z < 0$  обладают функцией распределения правого нормального электрода  $n_R(\varepsilon)$ . Тогда, используя четность спектральных веток  $\varepsilon_n(k_z)$  по  $k_z$ , можно представить выражение для потока тепла в следующем виде:

$$I_\varepsilon = \sum_\mu \int_0^{k_z} \varepsilon_n [n_L(\varepsilon) - n_R(\varepsilon)] \left| \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial k_z} \right| \frac{dk_z}{\pi\hbar}. \quad (1.110)$$

Тепловой кондактанс определяется следующим образом:

$$I_\varepsilon = \kappa (T_L - T_R), \quad (1.111)$$

где  $T_L$  и  $T_R$ - температуры левого и правого электродов соответственно. Используя (1.110) нетрудно найти, что

$$\kappa = -\frac{1}{\pi\hbar T} \sum_n \int_0^{k_F} \varepsilon_n^2 \frac{dn(\varepsilon_n)}{d\varepsilon} \left| \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial k_z} \right| dk_z,$$

или [39]:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\hbar T^2} \sum_n \int_0^{k_F} \frac{\varepsilon_n^2}{\cosh^2(\varepsilon_n/2T)} \left| \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial k_z} \right| dk_z. \quad (1.112)$$

Введем функцию  $N(\varepsilon)$ , которая определяет число спектральных веток, пересекающих заданный уровень энергии  $\varepsilon$ :

$$N(\varepsilon) = \sum_n \int_0^{k_F} \delta(\varepsilon - \varepsilon_n(k_z)) \left| \frac{\partial\varepsilon_n}{\partial k_z} \right| dk_z. \quad (1.113)$$

Тогда, выражение для теплового кондактанса (1.112) может быть записано в следующем виде:

$$\kappa = \frac{1}{4\pi\hbar T^2} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^2 N(\varepsilon)}{\cosh^2(\varepsilon/2T)} d\varepsilon. \quad (1.114)$$

В интервале температур  $\omega_0 \lesssim T \ll \Delta_0$  с хорошей точностью можно пренебречь дискретностью спектра. Для того, чтобы найти число состояний  $N(\varepsilon)$  мы будем использовать квазиклассический подход, предполагая, что вероятность туннелирования между квазиклассическими орбитами  $\mu_i(\theta_p)$  мала. В общем случае это предположение верно только в интервале импульсов  $k_z < k_z^*$ . В результате, в выражении (1.113) верхний предел интегрирования должен быть  $k_z^*$  вместо  $k_F$ . Пороговое значение импульса  $k_z^*$  можно оценить из условия равенства вероятности туннелирования Ландау-Зинера  $W$  [см. уравнение (1.46)] некоторому значению  $W_{th} < 1$ . Используя правило квантования Бора-Зоммерфельда 1.102) мы находим:

$$N(\varepsilon) = \left| \int_0^{k_z^*} \frac{dS(\varepsilon, k_z)}{dk_z} \frac{dk_z}{2\pi} \right| = \frac{|S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)|}{2\pi}. \quad (1.115)$$

Чтобы оценить интеграл (1.114), рассмотрим разложение в ряд Тейлора  $|S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)| = \sum_{n=0}^\infty S^{(n)} \varepsilon^n / n!$ , где

$$S^{(n)} = \frac{d^n}{d\varepsilon^n} |S(\varepsilon, 0) - S(\varepsilon, k_z^*)| \Big|_{\varepsilon=0}.$$

В результате, разложение теплового кондактанса в ряд по степеням температуры  $T$  принимает вид:

$$\kappa = \frac{T}{4\pi\hbar} \sum_{n=0}^\infty A_n S^{(n)} T^n, \quad (1.116)$$

где  $A_n$  - безразмерные коэффициенты:

$$A_n = \frac{2(n+2)(n+1)}{\pi} [1 - 2^{-(n+1)}] \zeta(n+2),$$

а  $\zeta(n)$ - функция Римана. Соответственно, выражение для эффективного числа мод  $N_v = \kappa/\kappa_0$  (напомним, что  $\kappa_0 = \pi T/3\hbar$ - квант теплового кондактанса) принимает вид:

$$N_v = \frac{3}{4\pi^2} \sum_{n=0}^\infty A_n S^{(n)} T^n, \quad (1.117)$$

Применяя эту формулу для одноквантового вихря, получаем:

$$N_v = \frac{27\zeta(3)}{2\pi^2} \frac{T}{\omega_0}.$$

Для двухквантового вихря  $N(\varepsilon) = 2\mu^*$ , где  $\mu^* \sim k_F \xi$  и поэтому  $N_v = \mu^*$  не зависит от температуры. Далее мы рассмотрим менее тривиальные примеры: систему из двух вихрей и вихрь около поверхности.

Начнем с первого случая. Результаты численных расчетов эффективного числа проводящих мод как функции температуры на основе выражения для спектра (1.84) показаны на Рис. 1.13. Подавление числа мод  $N_v$  при очень низких температурах

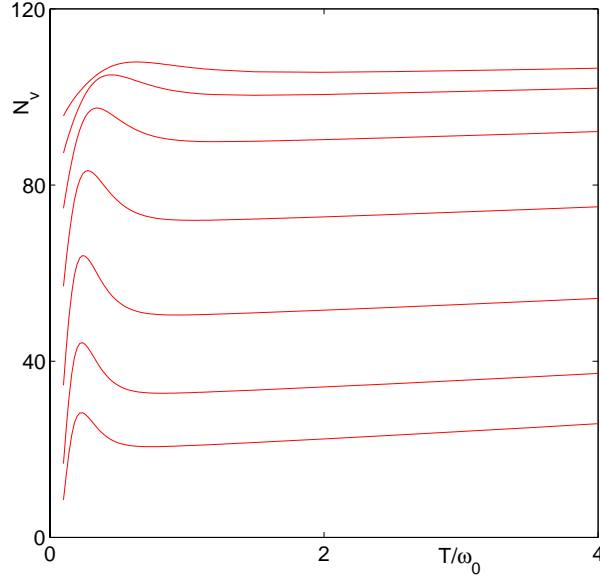


Рис. 1.13. Зависимость эффективного числа проводящих мод  $N_v$  от температуры для системы из двух вихрей. Кривые, начиная с верхней, построены для расстояний от  $a = 2\xi$  до  $a = 5\xi$  с шагом  $0.5\xi$ . Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55) где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F\xi = 200$ .

$T \ll \omega_0$  является проявлением наличия минищели в спектре квазичастиц. Нетрудно видеть, что при температурах  $T \gtrsim \omega_0$  функция  $N_v(T)$  растет линейно по  $T$ . Экстраполируя линейную зависимость до  $T = 0$  мы можем найти остаточное число мод  $N_0$ , которое показано сплошной кривой на Рис. 1.14 как функция расстояния между вихрями  $a$ .

На основе квазиклассического подхода, развитого в начале этого раздела, мы можем получить достаточно хорошую аппроксимацию для остаточного числа мод при  $a < a_c$ . Для этого нам надо вычислить не зависящий от температуры первый член разложения в (1.117), который является определяющим при  $a < a_c$ . Используя выражения (1.115) для числа состояний  $N(\varepsilon)$  и (1.62) для площади под квазиклассическими орбитами, мы получаем зависимость эффективного числа мод  $N_v$  от расстояния  $a$ , показанную на Рис.1.14 пунктирной линией. Здесь мы использовали пороговое значение вероятности туннелирования  $W_{th} = 0.54$ , чтобы обеспечить наилучшее совпадение с результатами численных расчетов (сплошная кривая) в области  $a \sim 2\xi$ . Критическое расстояние  $a_c$  может быть определено из условия  $N_0(a_c) = 0$ . Использованное значение пороговой вероятности соответствует критическому расстоянию  $a_c \simeq 4.5\xi$ .

Для сильно разделенных вихрей, когда  $a > 2\xi$  расщепление квазиклассических

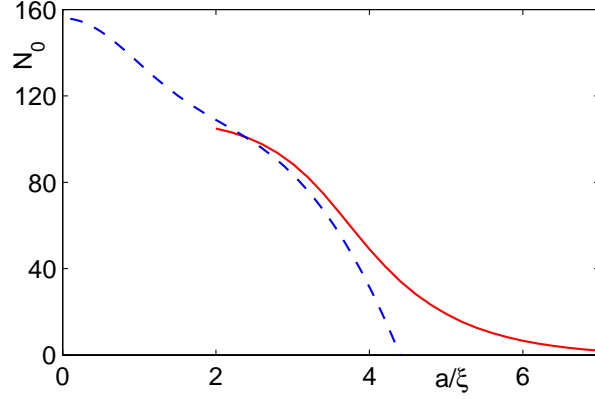


Рис. 1.14. Остаточное число проводящих мод  $N_0$  как функция расстояния между двумя вихрями  $a$ . Сплошная линия соответствует расчету на основе выражения (1.112), тогда как пунктирные линии получены с помощью приближенных аналитических выражений (1.117) и (1.62).

орбит мало, поэтому можно воспользоваться приближенной формулой (1.87) для площади под орбитами  $S(\varepsilon, k_z)$ . В результате мы получаем:

$$N_0 = \frac{a}{\pi} (k_F - k_{\perp}^*) + \frac{p^2}{\pi} \ln \left( \theta_{th} \sqrt{k_F a / p^2} \right), \quad (1.118)$$

где  $k_{\perp}^* = \sqrt{k_F^2 - k_z^{*2}}$ :

$$k_{\perp}^* = k_F \frac{\sqrt{(a/\xi_v)^2 + 4} - 2}{\sqrt{(a_c/\xi_v)^2 + 4} - 2}. \quad (1.119)$$

Это выражение совпадает с оценкой (1.49) в пределе  $a \gg \xi$ .

Расчет числа проводящих мод для вихря около границы может быть проделан аналогично рассмотренному выше случаю системы из двух вихрей. Здесь наше рассмотрение ограничено условием, что вихрь находится не слишком близко к поверхности:  $d \gtrsim \xi$ . Это позволяет не учитывать искажение кора вихря за счет граничных эффектов. Рассматривая в качестве примера случай плоской поверхности ( $h = -1$ ,  $F = \infty$ ), мы используем выражения (1.112), (1.99) для расчета остаточного числа проводящих мод  $N_0$ . На Рис. 1.15 сплошной кривой показана зависимость  $N_0(d)$ . Оценка остаточного числа мод на основе квазиклассической теории приводит к следующему результату:

$$N_0 = \frac{d}{\pi} (k_F - k_{\perp}^*) + \text{sgn}(\kappa) \frac{\tilde{p}^2}{2\pi} \ln \left( \theta_{th} \sqrt{|\rho|/\tilde{p}^2} \right), \quad (1.120)$$

где

$$k_{\perp}^* = k_F \frac{\sqrt{(d/\xi_v)^2 + 1} - 1}{\sqrt{(d_c/\xi_v)^2 + 1} - 1} \quad (1.121)$$

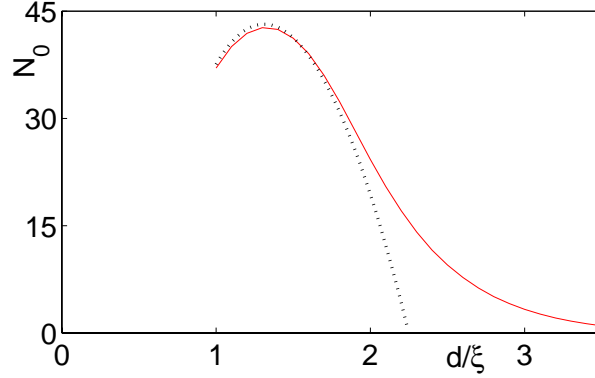


Рис. 1.15. Остаточное число проводящих мод  $N_0$  как функция расстояния от вихря до поверхности  $d$ . Сплошные линии соответствуют результатам численных расчетов на основе выражения (1.112), пунктирные линии получены с помощью приближенного аналитического выражения (1.120). Профиль вихревого кора определяется выражением (1.55), где  $\xi_v = \xi$ ,  $k_F \xi = 200$ .

для модели кора (1.55). Полагая  $d_c \simeq 2.25\xi$  мы получаем достаточно хорошее совпадение численных результатов и аппроксимации (1.120), показанной на Рис. 1.15 пунктирной линией.

Как видно из Рис. 1.15, нормальное рассеяние квазичастиц приводит к существенному росту числа проводящих мод при уменьшении расстояния  $d$ . Этот эффект есть следствие подавления минищели в спектре. Немонотонное поведение  $N_0(d)$  на расстояниях  $d \sim \xi$  имеет ту же причину, что и подавление плотности состояний на уровне Ферми: остаточное число мод  $N_0(d) = N_v(d, T \rightarrow 0)$  определяется числом состояний  $N(0)$  на уровне Ферми [см. уравнение (1.116)], которое пропорционально площади под квазиклассическими орбитами на плоскости  $(\mu, \theta_p)$ . Поэтому сжатие орбит при  $d \sim \xi$  приводит к уменьшению числа мод  $N_0(d)$ . При дальнейшем уменьшении расстояния  $d < \xi_v$  наш подход перестает работать. Естественно предположить, что в этой области будет происходить подавление теплового кондактанса вплоть до нуля при выходе вихря из сверхпроводника.

## 8. Зависимость теплового кондактанса от магнитного поля: качественная картина.

Чтобы пояснить результаты анализа теплового транспорта, полученные в предыдущем разделе полезно описать качественную зависимость теплового кондактанса от внешнего магнитного поля, вызванную изменением вихревой конфигурации. Для этой цели, на Рис. 1.16(a) схематично построена зависимость эффективного числа проводящих мод  $N_v$  от магнитного поля  $H$  при некоторой температуре  $T \gtrsim \omega_0$ . Различные ветки кривой намагничивания, показанной на Рис. 1.16(a), соответствуют



состояниям мезоскопического сверхпроводника с 0,1, и 2-мя захваченными вихрями. При низких значениях магнитного поля  $H \ll H_{c2}$  сверхпроводник находится в ме́йснеровском состоянии, т.е. число вихрей равно 0. Число проводящих мод  $N_v = \kappa/\kappa_0$  [см Рис.1.16(b)] при этом определяется квазичастичными уровнями над щелью  $\Delta_0$  и поэтому экспоненциально мало  $N_v = N^{(0)} \sim (k_F L)^2 e^{-\Delta_0/T}$  если  $T \ll T_c$ , где  $L$ -характерный поперечный размер образца. С увеличением магнитного поля сверхпроводящая щель частично подавляется, что приводит к незначительному росту  $N_v$ . Затем, когда магнитное поле становится достаточно большим, чтобы подавить поверхностный барьер на вход вихря в сверхпроводник, число проводящих мод скачком возрастает до значения  $N^{(1)} \sim T/\omega_0$  одновременно со входом вихря. Это увеличение  $N_v$  вызвано появлением подщелевых квазичастичных состояний, локализованных в коре вихря [39]. Следующий скачок числа проводящих мод происходит одновременно со входом второго вихря. В случае, если сила Лоренца, действующая на вихри со стороны ме́йснеровского тока достаточно велика для формирования двухквантового вихря, число  $N_v$  увеличивается до значения  $N_{MQ}^{(2)} \sim (k_F \xi)$ . В интервале магнитных полей, где многоквантовый вихрь является стабильной конфигурацией,  $N_v$  почти постоянно. Распад гигантского вихря на отдельные одноквантовые вихри при уменьшении магнитного поля сопровождается уменьшением  $N_v$  до значения  $N_{min}^{(2)} \gtrsim 2N^{(1)}$  (подробности см. в разделе 4). С ростом размера вихревой конфигурации вихри приближаются к границе сверхпроводника и число проводящих мод начинает снова расти, как показано в Разделе 5. Этот рост прекращается при достижении некоторого значения  $N_{exit}^{(2)}$ , когда вихрь выходит из сверхпроводника.

## 9. Заключение.

Итак, мы построили описание электронной структуры смешанного состояния мезоскопического сверхпроводника. Рассмотрев простейший пример двухквантового вихря, мы исследовали эволюцию аномальных спектральных веток при расщеплении гигантского вихря на одноквантовые. В пределе, когда расстояние между вихрями больше, чем размер кора, найден спектр вихревого кластера, связанного квазичастичным туннелированием между вихрями и проанализирован переход к вырожденному Caroli–de Gennes–Matricon спектру изолированных вихрей. Мы показали, что минищель в спектре квазичастиц отсутствует, когда расстояние между вихрями меньше критического  $a < a_c \approx \xi \ln(k_F \xi)$ . Также, было исследовано влияние нормального рассеяния квазичастиц на границе сверхпроводника на спектр возбуждений. В частности, рассчитан спектр вихря, расположенного вблизи параболической поверхности, и показано что в нормальное рассеяние также приводит к подавлению минищели, когда расстояние от вихря до поверхности меньше критического :  $d < d_c \approx (\xi/2) \ln(k_F \xi)$ . Когда  $d$  становится порядка размера вихревого кора, расстояние между квазичастичными уровнями в коре вихря увеличивается. Этот эффект приводит к исчезновению аномальной ветки спектра при выходе вихря из сверхпроводника.

Также мы проанализировали плотность состояний и тепловой кондактанс вдоль направления магнитного поля, поскольку эти характеристики определяются квази-частичными состояниями на аномальных ветках спектра. При низких температурах  $T_c, \Delta_0 \gg T \gg \omega_0$ , пренебрегая дискретностью спектра, мы вывели общие выражения для плотности состояний и теплового кондактанса через характеристики квазиклассических орбит на плоскости  $(\mu, \theta_p)$ . Применяя эти формулы для случая системы двух вихрей, мы нашли, что расщепление двухквантового вихря приводит к существенному уменьшению теплового кондактанса при увеличении расстояния между вихрями. Тем не менее, даже в случае двухквантового вихря число проводящих мод  $N_v \sim k_F \xi$  намного меньше, чем в случае нормального канала с поперечными размерами порядка радиуса кора, когда  $N_v \sim (k_F \xi)^2$ . При конечном расстоянии между вихрями в интервале температур  $\omega_0 < T \ll \Delta_0$  эффективное число мод является линейной функцией температуры:  $N_v = N_0 + \alpha T$ . Расщепление двухквантового вихря сопровождается уменьшением остаточного числа мод, и при достаточно большом расстоянии между вихрями, мы получаем удвоенный кондактанс одноквантового вихря:  $N_v \sim T/\omega_0 \ll k_F \xi$ .

Было показано, что нормальное рассеяние квазичастиц на границе образца приводит к увеличению числа проводящих мод и теплового кондактанса в направлении, когда вихрь находится достаточно близко к поверхности:  $\xi \lesssim d < d_c$ . Выход вихря из сверхпроводника сопровождается исчезновением аномальной ветки спектра, что приводит к подавлению как теплового транспорта, так и плотности состояний при  $d \lesssim \xi$ .

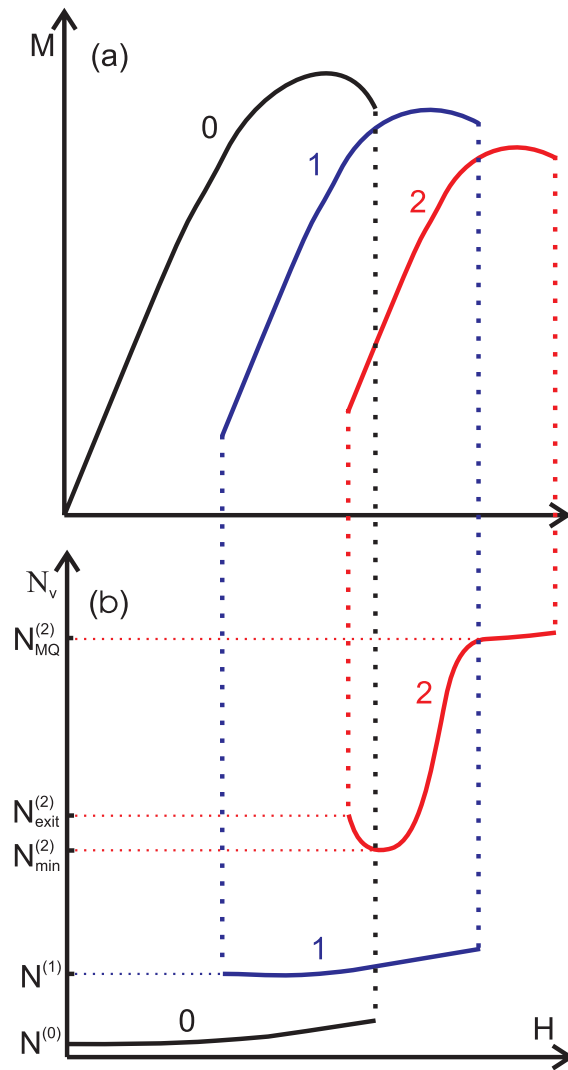


Рис. 1.16. Схематичные изображения намагниченности  $M$  (a) и эффективного числа проводящих мод  $N_v$ , дающих вклад в тепловой кондактанс (b) в мезоскопическом сверхпроводнике во внешнем магнитном поле. Различным веткам зависимостей соответствует различное число вихрей в образце.

## Глава 2.

# Кондактанс контакта нормальный металл/сверхпроводник в магнитном поле: резонансное андреевское туннелирование через вихри Абрикосова.

### 1. Введение

Исследование транспортных свойств гибридных структур нормальный металл/сверхпроводник (N/S) уже в течение длительного времени вызывает большой интерес теоретиков и экспериментаторов. В классической работе Blonder, Tinkham, Klarwijk [46] было показано, что при энергиях меньше сверхпроводящей щели  $\Delta_0$  транспорт заряда через границу N/S может осуществляться только благодаря эффекту андреевского отражения [77]. Андреевское отражение является двухчастичным процессом, при котором электроны, падающие на из области нормального металла (N), отражаются от N/S границы как дырки с противоположным зарядом и групповой скоростью. В соответствии с законом сохранения заряда, в сверхпроводящей области (S) появляются куперовские пары. Таким образом, нормальный электрический ток в области (N), переносимый электронами и дырками, преобразуется в сверхток, переносимый в области (S) куперовскими парами. В случае идеальной N/S границы удвоение заряда при андреевском отражении приводит к удвоению кондактанса по сравнению с кондактансом контакта в нормальном состоянии. В то же время, являясь двухчастичным процессом, андреевское отражение может быть сильно подавлено в результате нормального отражения квазичастиц от поверхностного барьера в случае неидеальной N/S границы. В самом деле, в случае малой прозрачности поверхностного барьера  $T_s \ll 1$ , вероятность андреевского отражения, а следовательно, и кондактанс контакта пропорциональны  $T_s^2$ , что в  $T_s^{-1}$  раз меньше, чем в случае одночастичного транспорта

через барьер.

Феномен подавления подщелевого кондактанса за счет поверхностного барьера приводит ко многим интересным эффектам, связанным с зависимостью транспортных свойств контактов N/S от пространственного распределения и свойств симметрии параметра порядка в сверхпроводнике. Например, недавно с помощью измерения проводимости туннельных контактов (метод "Multiple-Small-Tunnel-Junction") были исследованы переходы между различными вихревыми конфигурациями в мезоскопических сверхпроводниках [43]. В экспериментах [43] измерялась проводимость латеральных туннельных контактов, подведенных к мезоскопическому сверхпроводнику во внешнем магнитном поле. Наблюдаемые скачки напряжения при заданном значении тока ассоциировались со входом (выходом) вихрей или изменением их расположения относительно контактов. При этом интерпретация экспериментов в работах [43] основывается на соображении, что туннельная проводимость контактов должна определяться локальным значением плотности сверхтока в точке подключения и поэтому зависит от расположения вихрей.

В общем случае, когда в сверхпроводнике есть равномерное распределение сверхтока, спектр квазичастичных возбуждений модифицируется благодаря появлению доплеровского сдвига энергии на величину  $\mathbf{v}_s \mathbf{p}_F$ , где  $\mathbf{v}_s$  - распределение сверхскорости, а  $\mathbf{p}_F$  - импульс Ферми. В этом случае минимальная энергия возбуждений равна  $E_{min} = \Delta_0 - \mathbf{v}_s \mathbf{p}_F$ . На больших расстояниях от кора вихря ( $r \gg \xi$ , где  $\xi$  - длина когерентности) модель локального доплеровского сдвига дает хорошее описание квазичастичного спектра, если подставить  $v_s = \hbar/2mr$  [78]. Пока значение сверхскорости мало по сравнению с критическим  $\Delta_0/p_F$ , доплеровский сдвиг края щели приводит к уширению пика плотности состояний [79].

Близко к центру вихря ( $r \sim \xi$ ), где  $v_s \sim \Delta_0/p_F$ , край щели  $E_{min}$  уменьшается до 0. В этом случае подход к вычислению спектра на основе модели локального доплеровского сдвига перестает работать, поскольку не описывает формирование квазичастичных состояний, локализованных в коре вихря, найденных впервые в работе [5] в рамках более строгого подхода, основанного на решении уравнений Боголюбова- де Жена (1.3) в квазиклассическом приближении (см. Раздел 2.1).

Данная глава посвящена расчету подщелевого кондактанса контакта N/S в магнитном поле. Предполагается, что магнитное поле создает вихри Абрикосова в (S) области контакта. Мы будем рассматривать транспорт заряда в плоскости, перпендикулярной направлению приложенного поля. Предполагается, что области (N) и (S) разделены поверхностным барьером, подавляющим андреевское отражение и электронный транспорт. Как будет показано далее, наличие вихрей вблизи границы N/S приводит к сильному увеличению вероятности андреевское отражение благодаря резонансному туннелированию электронов через состояния CdGM, локализованные в корах вихрей.

По сути здесь возникает эффект аналогичный явлению резонансного прохождения в двухбарьерном резонансно-туннельном диоде [80]. Резонансное туннелирование в таких структурах возникает, когда энергия падающей частицы совпадает с положением квазистационарного уровня в квантовой яме с высокими барьерами. В этом

случае вероятность отражения частицы эффективно подавляется благодаря интерференции волн в квантовой яме. В нашем случае квантовой ямой является вихрь, а связанное квазистационарное состояние состоит из суперпозиции электронной и дырочной волн. Поэтому когда падающий электрон обладает резонансной энергией, отражение электронной волны подавляется, а дырочная волна, вытекающая из вихря, дает вклад в вероятность андреевское отражение. Важное отличие нашей задачи от случая резонансно- туннельного диода состоит в том, что спектр вихревых состояний CdGM характеризуется очень малым расстоянием между дискретными уровнями:  $\omega_0 \sim \Delta_0/(k_F\xi)$ , которое намного меньше, чем щель в спектре однородного сверхпроводника  $\Delta_0$ , поскольку как правило  $k_F\xi \sim 10^2 - 10^3$ . В то же время, уширение уровней за счет конечной прозрачности барьера может быть оценено следующим образом  $\delta E \sim \Delta_0 T_s e^{-2a/\xi}$ , где  $T_s$ - прозрачность поверхностного барьера, а фактор  $e^{-2a/\xi}$  отражает затухание волновых функций квазичастиц в сверхпроводящем слое толщиной  $a$ , (где  $a$ - расстояние от вихря до границы N/S), а  $\xi$ - длина когерентности в сверхпроводнике. Далее в этой главе мы будем пренебрегать дискретностью спектра CdGM, предполагая, что  $T_s e^{-2a/\xi} \gg (k_F\xi)^{-1}$ . На самом деле, это условие не является очень обременительным, поскольку как уже упоминалось, параметр  $k_F\xi$  обычно очень велик.

В рамках оговоренных предположений мы можем использовать квазиклассическое описание квантовой механики квазичастичных возбуждений (см. раздел 2.1). Напомним, что в квазиклассическом приближении рассматривается одномерное движение квазичастиц вдоль прямолинейных траекторий, направление которых задается вектором импульса квазичастиц  $\mathbf{n} = \mathbf{k}_F k_F^{-1} = (\cos\theta_p, \sin\theta_p)$ . В случае когда размеры контакта N/S порядка атомных, необходимо учитывать расхождение электронных и дырочных траекторий [81]. Здесь мы будем исследовать транспортные свойства широких контактов, таких, что поперечные размеры  $L_y$  намного превышают длину волны электронов  $L_y \gg \lambda_F = 2\pi/k_F$ , поэтому расхождение траекторий можно не учитывать. Также мы предполагаем, что размер  $L_y$  больше, чем характерное расстояние между вихрями  $L_v$ .

Важным обстоятельством является то, что задачу рассеяния квазичастичных волн можно рассматривать независимо для каждого из вихрей, находящихся вблизи плоскости контакта. В самом деле, расстояние между вихрями намного превышает электронную длину волны, поскольку  $L_v \geq \xi$  и  $k_F\xi \gg 1$ . Поэтому квазиклассические траектории, пересекающие плоскость контакта, могут проходить только через один вихрь. Для некоторых направлений импульса квазичастиц две резонансные траектории (т.е. те, которые проходят через коры вихрей) оказываются связанными за счет нормального отражения на границе N/S. Предполагая, что барьер на границе зеркально отражающий, а вихри образуют регулярную цепочку, легко найти, что такая связь возникает в узких интервалах углов вблизи значений  $\theta_p = \arctan(nL_v/2a)$ , где  $n$ -целое. Ширина этих областей определяется уширением квазистационарных уровней в коре вихря и составляет величину порядка  $\delta\theta \sim T_s e^{-2a/\xi} \ll \pi$ , поэтому вкладом от этих областей в полную вероятность отражения можно пренебречь. Таким образом, решая задачу рассеяния квазичастичных волн, мы можем выделить резонансные

траектории, связанные с квазичастичными состояниями, локализованными в одном из вихрей. Поскольку состояния на разных траекториях не интерферируют, вклады разных вихрей в вероятности нормального отражения и андреевское отражение можно складывать независимо.

Безразмерный кондактанс (далее в этой главе мы будем измерять кондактанс в единицах  $e^2/\pi\hbar$ ), индуцированный одним вихрем, можно оценить следующим образом:  $G_v \sim N_r e^{-2a/\xi} T_s$ . Здесь  $N_r \sim k_F \xi$  - число поперечных мод в контакте, попадающих в резонанс с вихревыми состояниями ( $\xi$ - поперечный размер вихревого кора). Фактор  $e^{-2a/\xi} T_s$  представляет собой вероятность одночастичного туннелирования через комбинированный барьер, состоящий из поверхностного барьера и слоя сверхпроводника толщиной  $a$ . Полный вихревой вклад в кондактанс может быть найден как сумма вкладов от отдельных вихрей  $G_{vt} = n_v G_v$ , где  $n_v = L_y/L_v$  полное число вихрей вблизи границы N/S,  $L_v$  - расстояние между вихрями, а  $L_y$ - поперечный размер контакта. Кроме резонансного механизма андреевское отражение необходимо учитывать также и нерезонансную схему, включающую двухкратное прохождение через поверхностный барьер с вероятностью  $T_s^2$ . Соответствующий вклад в кондактанс составляет порядка  $G_0 \sim N_0 T_s^2$ , где  $N_0 = k_F L_y/\pi$  - полное число поперечных мод в контакте. Таким образом, полный кондактанс может быть записан в виде:

$$G = \alpha N_0 T_s^2 + n_v \beta N_r e^{-2a/\xi} T_s, \quad (2.1)$$

где  $\alpha, \beta \sim 1$ . Основываясь на этой формуле, можно заключить, что в случае достаточно сильных поверхностных барьеров  $T_s \ll 1$  вклад в кондактанс, индуцированный вихревой цепочкой, становится доминирующим, когда  $a < a_c$ , где пороговое расстояние  $a_c \sim (\xi/2) \ln(\xi/TL_v)$  может намного превышать длину когерентности и размер кора вихря.

Параметры вихревой решетки зависят от внешнего магнитного поля следующим образом:  $a, L_v \sim \sqrt{\phi_0/B}$ , где  $B$ - среднее магнитное поле в сверхпроводнике, а  $\phi_0 = \pi\hbar c/e$  - квант магнитного потока. Тогда зависимость вихревого вклада в кондактанс от магнитного поля [второе слагаемое в уравнении (2.1)] такова:

$$G_{vt} \sim N_0 \sqrt{\frac{B}{H_{c2}}} e^{-2\sqrt{H_{c2}/B} T_s}, \quad (2.2)$$

где  $H_{c2} \sim \phi_0/\xi^2$ - верхнее критическое поле в сверхпроводнике. Заметим, что при  $B = H_{c2}$  кондактанс намного больше  $G \sim N_0 T_s$  чем в отсутствие поля  $G \sim N_0 T_s^2$ . Таким образом, можно предположить, что если поверхностный барьер достаточно сильный  $T_s \ll 1$ , в эксперименте можно наблюдать сильное увеличение кондактанса с ростом магнитного поля, в соответствии с формулой (2.2).

Заметим, что в настоящей работе мы не принимаем во внимание подщелевые квазичастичные состояния, возникающие благодаря неоднородному распределению мейсснеровского тока вблизи границы N/S [82]. Эти уровни расположены намного выше, чем уровни CdGM, если плотность мейсснеровского тока меньше плотности тока распаривания. Таким образом, исследуя транспортные свойства контакта при

малых значениях напряжения смещения (много меньше  $\Delta_0/e$ ) мы можем не учитывать формирование поверхностных квазичастичных уровней.

## 2. Модель

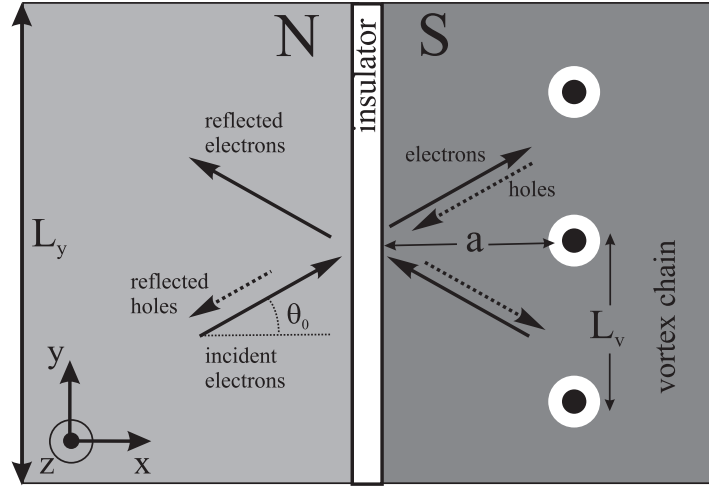


Рис. 2.1. Геометрия контакта N/S и схематичное изображение траекторий квазичастиц. Ширина контакта  $L_y$ . Внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси  $z$  создает вихри в сверхпроводящей области. Расстояние от первой вихревой цепочки до границы N/S –  $a$ , а расстояние между вихрями  $L_v$ . Электроны из нормального металла падают под углом  $\theta_0$  и испытывают нормальное и андреевское отражение от границы N/S.

На Рис.(2.1) показана схема контакта N/S с вихревыми линиями в (S) области, параллельными границе N/S. Для простоты рассмотрения мы предполагаем, что дисперсия по оси  $z$  отсутствует и будем рассматривать движения квазичастиц в плоскости  $xy$ . Пренебрегая подавлением сверхпроводимости вблизи границы мы предполагаем, что при  $x > -a$  может быть записан в форме:

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 D_v(\mathbf{r}) e^{i\Phi(\mathbf{r})}, \quad (2.3)$$

где  $D_v(\mathbf{r})$  - безразмерный профиль параметра порядка, а  $\Phi(\mathbf{r})$  - распределение фазы. Конкретная форма распределения  $D_v(\mathbf{r})$  несущественна для нашего рассмотрения, поэтому может быть выбрана в виде, соответствующем изолированному вихрю



[83]:  $D_v(\mathbf{r}) = r/\sqrt{r^2 + \xi^2}$ . Распределение фазы  $\Phi(\mathbf{r})$  состоит из сингулярной части  $\Phi_v(\mathbf{r}) = \text{arg}(\mathbf{r})$  и регулярной части  $\Phi_r(\mathbf{r})$ , которая определяется исходя из конфигурации вихревой решетки около границы.

В принципе, метод расчета, который будет развит в этой главе применим для произвольного расположения вихрей. Сначала рассматривается задача о влиянии одного вихря на кондактанс контакта. Следующим шагом является суммирование вкладов в кондактанс по всем вихрям, находящимся вблизи границы. Для этого, надо задать расположение вихрей, которое зависит от множества факторов, таких как потенциал пиннинга, геометрия границы, предыстория намагничивания образца. Чтобы оценить зависимость кондактанса от магнитного поля, мы будем рассматривать модельную ситуацию, предполагая, что вихри, ближайšie к поверхности сверхпроводника образуют периодическую цепочку с интервалом  $L_v$  на расстоянии  $a$  от границы N/S. Параметры  $a$  и  $L_v$  являются заданными величинами, а их зависимость от магнитного поля определяется следующим образом  $a, L_v \sim \sqrt{\phi_0/B}$ . Влиянием следующих вихревых цепочек на кондактанс мы будем пренебрегать в силу того, что вероятность туннелирования квазичастиц экспоненциально спадает при удалении вихрей от поверхности сверхпроводника.

Выражение для безразмерного кондактанса N/S контакта может быть записано в виде [46]:

$$G = \frac{N_0}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [1 - R_n(\theta_0) + R_a(\theta_0)] \cos \theta_0 d\theta_0, \quad (2.4)$$

где  $R_n(\theta_0)$  и  $R_a(\theta_0)$  - вероятности нормального отражения и андреевское отражение соответственно,  $\theta_0$  - угол падения квазичастичной волны:  $\mathbf{k}_F = k_F(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ . Полное число распространяющихся мод  $N_0$  определяется шириной контакта:  $N_0 = k_F L_y / \pi$ . Задача рассеяния квазичастиц на границе N/S рассматривается в рамках теории Боголюбова- де Жена с помощью уравнения (1.3), описывающего распространение электронной и дырочной волны в поле недиагонального потенциала  $\Delta(\mathbf{r})$ .

Поверхностный барьер, разделяющий (N) и (S) области моделируется рассеивающим дельта-потенциалом  $V(x) = H\delta(x + a)$  и параметризуется безразмерным параметром, характеризующим высоту барьера  $Z = H/\hbar V_F$  [46]. Граничные условия на границе N/S имеют вид:

$$\left[ \hat{\Psi}(-a) \right] = 0, \quad (2.5)$$

$$\left[ \partial_x \hat{\Psi}(-a) \right] = (2k_F Z) \hat{\Psi}(-a), \quad (2.6)$$

где  $[f(x)] = f(x + 0) - f(x - 0)$ .

Сложность решения задачи рассеяния квазичастичной волны состоит в том, что из-за наличия вихрей в (S) области, система не обладает трансляционной инвариантностью вдоль плоскости контакта. Чтобы преодолеть эту трудность, мы будем использовать квазиклассическое приближение в уравнении (1.3) (см. Раздел 2.1). Напомним, что в рамках квазиклассического приближения волновая функция выглядит следующим образом:  $\hat{\Psi}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_F \cdot \mathbf{r}} \hat{\psi}(\mathbf{r})$ , где  $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = (U(\mathbf{r}), V(\mathbf{r}))$  - медленная огибающая изменяющаяся вдоль прямолинейных траекторий (см. уравнение (1.22)),

параметризуемых углом  $\theta_p$  и прицельным параметром  $b = r \sin(\theta - \theta_p)$ , в соответствии с соотношениями 1.18. Здесь мы используем полярную систему координат:  $\mathbf{r} = (x, y) = -r(\cos \theta, \sin \theta)$ . Соответственно, координата вдоль траектории в уравнении (1.22) определяется следующим образом:  $s = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) = -r \cos(\theta_p - \theta)$ .

Поскольку мы собираемся рассматривать кондактанс контакта при бесконечно малом напряжении смещения, в уравнении (1.22) можно положить  $E = 0$ . Пренебрегая влиянием магнитного поля на движение квазичастиц, в (N) области  $x < -a$  мы получаем тривиальное уравнение:  $\partial_s \hat{\psi}(s, b) = 0$ , которое означает, что огибающая волновых функций квазичастиц является постоянной вдоль траекторий. В сверхпроводящей области  $x > -a$  это, очевидно, не так. Для подщелевых квазичастиц удобно использовать следующую параметризацию [9]:  $\hat{\psi} = e^\zeta (e^{i(\eta+\Phi)/2}, e^{-i(\eta+\Phi)/2})$ , где  $\zeta = \zeta(s, b)$  и  $\eta = \eta(s, b)$  являются действительными величинами. Тогда, уравнения Андреева (1.22) могут быть записаны в виде:

$$\xi \frac{\partial}{\partial s} \eta + 2D_v \cos \eta + \epsilon_d = 0, \quad (2.7)$$

$$\xi \frac{\partial}{\partial s} \zeta + 2D_v \sin \eta = 0. \quad (2.8)$$

где  $\epsilon_d(\mathbf{r}) = \hbar \mathbf{k}_F \mathbf{v}_s / \Delta_0$  - безразмерная энергия доплеровского сдвига. Для волновой функции  $\hat{\psi}_\pm$  затухающей на разных концах траектории  $\hat{\psi}_\pm(s = \pm\infty) = 0$  из уравнения (2.8) мы получаем:

$$\eta_\pm(s = \pm\infty) = \pm\pi/2. \quad (2.9)$$

Как будет показано ниже, главный вклад в вероятность андреевское отражение вносят траектории, проходящие через кор вихря, т.е. имеющие малое значение прицельного параметра  $|b| \ll \xi$ . Для таких траекторий можно получить аналитическое решение уравнения (2.7) следуя работе [42]:

$$\tan \eta_\pm = 0.5 (A_\pm^{-1} e^{-2K(s)} - A_\pm e^{2K(s)}), \quad (2.10)$$

$A_\pm = \gamma(b)(\text{sgn}(s) \mp 1)$ , где  $\gamma(b) = -\omega b$ ,

$$K(s) = \frac{1}{\xi} \int_0^s D_v(s') ds' = \sqrt{(s/\xi)^2 + 1} - 1,$$

$$\omega = \frac{1}{\xi} \int_0^\infty \frac{D_v(s)}{s} e^{-2K(s)} ds.$$

### 3. Задача рассеяния: вероятности нормального и андреевского отражения.

Граничные условия (2.5, 2.6) связывают траектории, зеркально отраженные в плоскости  $x = -a$ , соответствующие квазичастицам с импульсами  $\mathbf{k}_F = k_F(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$ , и  $\mathbf{k}'_F = k_F(\cos(\pi - \theta_0), \sin(\pi - \theta_0))$ , где  $\theta_0$  - угол падения. Таким образом, если падающая электронная волна имеет вид  $u_i = e^{i\mathbf{k}_F \mathbf{r}}$ , тогда отраженные электронная  $u_r$  и дырочная  $v_r$  волны имеют вид

$$u_r = U_r e^{i\mathbf{k}'_F \mathbf{r}}, \quad v_r = V_r e^{i\mathbf{k}_F \mathbf{r}},$$

где  $U_r(b, s)$  и  $V_r(s, b)$  - огибающие волновых функций. Каждая точка  $(-a, y)$  на границе N/S лежит на пересечении двух траекторий характеризующихся углами  $\theta_p = \theta_0$  (траектория 1) и  $\theta_p = \pi - \theta_0$  (траектория 2). С помощью несложных геометрических построений нетрудно видеть, что эти траектории обладают прицельными параметрами  $b_+ = -a \sin(\theta_0 - \theta) / \cos \theta$  и  $b_- = -a \sin(\theta_0 + \theta) / \cos \theta$  соответственно, где  $\theta = -\arctan(y/a)$  - полярный угол в точке  $(-a, y)$ . Точке пересечения соответствуют координаты вдоль траекторий  $s_+ = -a \cos(\theta - \theta_0) / \cos \theta$  (траектория 1) и  $s_- = a \cos(\theta + \theta_0) / \cos \theta$  (траектория 2). Тогда, вероятности отражения определяются следующим образом:

$$R_n(\theta_0) = \frac{a}{L_y} \int_{-\alpha}^{\alpha} |U_r(\theta, \theta_0)|^2 (\cos \theta)^{-2} d\theta \quad (2.11)$$

$$R_a(\theta_0) = \frac{a}{L_y} \int_{-\alpha}^{\alpha} |V_r(\theta, \theta_0)|^2 (\cos \theta)^{-2} d\theta, \quad (2.12)$$

где интегрирование производится по плоскости контакта  $x = -a$ ,  $\alpha = \arctan(L_y/2a)$ ,  $U_r(\theta, \theta_0) = U_r(b_-, s_-)$  и  $V_r(\theta, \theta_0) = V_r(b_+, s_+)$ .

Следуя обычной процедуре, для того чтобы найти амплитуды отраженных волн  $U_r(\theta, \theta_0)$  и  $V_r(\theta, \theta_0)$ , необходимо сшить решения в областях (N) и (S) на границе  $x = -a$ . Для огибающих функций граничные условия (2.5, 2.6) принимают вид:

$$\begin{aligned} 1 + U_r &= e^{i\eta_+/2} C^+ + e^{i\eta_-/2} C^-, \\ V_r &= e^{-i\eta_+/2} C^+ + e^{-i\eta_-/2} C^-, \\ (1 - U_r) + 2iZ(1 + U_r) &= e^{i\eta_+/2} C^+ - e^{i\eta_-/2} C^-, \\ V_r(1 + 2iZ) &= e^{-i\eta_+/2} C^+ - e^{-i\eta_-/2} C^-, \end{aligned}$$

$C^+, C^-$  - произвольные коэффициенты и  $\eta_{\pm} = \eta_{\pm}(s_{\pm}, b_{\pm})$ , где  $\eta_{\pm}(s, b)$  - решения уравнения (2.7) с граничными условиями (2.9) (верхний знак соответствует траектории 1, нижний- траектории 2).

Разрешая эту систему линейных уравнений, мы находим:

$$U_r(\theta, \theta_0) = -\frac{(1 - e^{i\chi})(\tilde{Z}^2 - i\tilde{Z})}{1 + \tilde{Z}^2(1 - e^{i\chi})}, \quad (2.13)$$

$$V_r(\theta, \theta_0) = \frac{e^{-i\eta_+}}{1 + \tilde{Z}^2(1 - e^{i\chi})}, \quad (2.14)$$

где  $\chi(\theta, \theta_0) = \eta_- - \eta_+$  и  $\tilde{Z} = Z/\cos\theta_0$ .

Заметим, что для малых значений прицельного параметра  $|b_{\pm}| \ll \xi$  величины  $e^{i\eta_{\pm}}$  в соотношениях (2.13, 2.14) могут быть найдены аналитически с помощью уравнения (2.10):

$$e^{i\eta_+} = i \frac{J - i(\theta - \theta_0)}{J + i(\theta - \theta_0)}, \quad (2.15)$$

$$e^{i\eta_-} = -i \frac{J - i(\theta + \theta_0)}{J + i(\theta + \theta_0)}, \quad (2.16)$$

где  $J = e^{-2K(a/\cos\theta)} \cos\theta/(2\omega a)$ . Для малых значений углов  $|\theta|, |\theta_0| \ll \xi/a$  соотношения (2.15, 2.16) приводят к следующему результату:

$$e^{i\chi} = -\frac{J^2 + \theta^2 - \theta_0^2 - 2i\theta_0 J}{J^2 + \theta^2 - \theta_0^2 + 2i\theta_0 J}. \quad (2.17)$$

## 4. Расчет кондактанса

Теперь, используя выражения (2.13, 2.14) для амплитуд отраженных волн и вероятностей отражения (2.11, 2.12), можно рассчитать кондактанс. Удобно ввести функцию  $g(\theta, \theta_0) = 1 - |U_r(\theta_0, \theta)|^2 + |V_r(\theta_0, \theta)|^2$ , с помощью которой выражение для кондактанса (2.4) можно переписать в следующем виде:

$$G = \frac{k_F a}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos\theta)^{-2} d\theta \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\theta, \theta_0) \cos\theta_0 d\theta_0, \quad (2.18)$$

где  $\alpha = \arctan(L_y/2a)$ . Удобно также использовать понятие локальной проводимости, т.е. удельного кондактанса на единицу длины границы N/S:

$$\sigma(\theta) = \frac{k_F}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(\theta, \theta_0) \cos\theta_0 d\theta_0.$$

С помощью выражений (2.13, 2.14) мы получаем:

$$g(\theta, \theta_0) = \frac{2}{(\tilde{Z}^4 + \tilde{Z}^2)|1 - e^{i\chi}|^2 + 1}. \quad (2.19)$$

Если магнитное поле отсутствует и в сверхпроводнике нет вихрей, то  $\chi = \pi$ , и тогда  $g(\theta, \theta_0) = g_0(\theta_0)$ , где  $g_0(\theta_0) = (1/2)(\tilde{Z}^2 + 1/2)^{-2}$ . Поэтому, вклад в кондактанс, индуцированный вихрями можно определить следующим образом

$$\sigma_v(\theta) = \frac{k_F}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_v(\theta, \theta_0) \cos \theta_0 d\theta_0,$$

где  $g_v = g - g_0$  :

$$g_v = \frac{(\tilde{Z}^4 + \tilde{Z}^2)(4 - |1 - e^{i\chi}|^2)}{2(\tilde{Z}^2 + 1/2)^2 \left( (\tilde{Z}^4 + \tilde{Z}^2)|1 - e^{i\chi}|^2 + 1 \right)}.$$

Нетрудно видеть, что в случае низких поверхностных барьеров  $\tilde{Z} \rightarrow 0$ , что  $g_v(\theta, \theta_0) = 0$ . Это означает, что все падающие квазичастицы испытывают андреевское отражение, и кондактанс в этом случае не отличается от кондактанса контакта с однородным сверхпроводником в отсутствии поля:  $G = 2N_0$ . По мере того, как барьер увеличивается, андреевское отражение подавляется и кондактанс уменьшается. Функция  $g_v(\theta, \theta_0)$  достигает максимума

$$g_{vm} = 2 \frac{\tilde{Z}^4 + \tilde{Z}^2}{(\tilde{Z}^2 + 1/2)^2}$$

если  $|1 - e^{i\chi}| = 0$ . Смысл этого условия в том, что оно определяет резонансные траектории, соответствующие локализованным состояниям в коре вихря, модифицированные вследствие отражения траекторий от поверхностного барьера. Очевидно, что резонансные траектории должны проходить через кор вихря, поэтому функция  $g_v(\theta, \theta_0)$  имеет острый пик при  $\theta_0 \approx \pm\theta$ . Ширина этого пика определяется высотой барьера и расстоянием от вихря до границы сверхпроводника. Для углов  $|\theta|, |\theta_0| \ll \xi/a$  с помощью уравнения (2.17) мы получаем:

$$g_v(\theta_0, \theta) = \frac{g_{vm} J_0^2 \theta_0^2}{(\tilde{Z}^2 + 1/2)^2 (\theta_0^2 - \theta^2 - J_0^2)^2 + J_0^2 \theta_0^2}, \quad (2.20)$$

где  $J_0 = e^{-2K(a)}/(2\omega a) \sim (\xi/a)e^{-2a/\xi}$  является малым параметром ( $J_0 \ll 1$  когда  $a \geq \xi$ ). Максимум функции  $g_v(\theta, \theta_0)$  определяемый условием (2.20) достигается при  $\theta_0^2 = \theta^2 + J_0^2$ .

Применяя формулу (2.20) нетрудно сосчитать вихревую часть проводимости  $\sigma_v(\theta)$  в интервале малых углов  $|\theta| \ll \xi/a$  (что соответствует точкам на поверхности почти напротив вихря). Главный вклад в интеграл по  $\theta_0$  дает область в окрестности точки  $\theta_0 = \theta$ . Тогда, с хорошей точностью мы получаем:  $\sigma_v = \sigma_{v0}$ , где

$$\sigma_{v0} = k_F J_0 \frac{Z^4 + Z^2}{(Z^2 + 1/2)^3}. \quad (2.21)$$

При больших углах функция  $\sigma_v(\theta)$  может быть найдена только численно. Численные расчеты, описанные ниже показывают, что функция  $\sigma_v(\theta)$  максимальна при  $\theta = 0$

и монотонно убывает с ростом угла  $|\theta| \rightarrow \pi/2$ . (см. вставку на Рис.2.2). Поэтому, полный вклад в кондактанс от одного вихря  $G_v = a \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos \theta)^{-2} \sigma_v(\theta) d\theta$  равен:

$$G_v = \beta(k_F \xi) e^{-2K(a)} \frac{Z^4 + Z^2}{(Z^2 + 1/2)^3}, \quad (2.22)$$

где  $\beta = (2\omega\xi)^{-1} \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos \theta)^{-2} \sigma_v(\theta) / \sigma_{v0} d\theta \sim 1$ .

Функция  $\sigma_v(\theta)$  во всем интервале улов может быть получена, если будет найдена фаза  $\chi$  в выражении (2.19), поскольку все остальные коэффициенты являются заданными. Для этого, необходимо решить численно уравнение (2.7) с граничными условиями (2.9). Будем предполагать, что регулярная часть фазы параметра порядка соответствует антивихрю-изображению, расположенному за границей в точке  $\mathbf{r}_{av} = (-2a, 0, 0)$ :  $\Phi_r(\mathbf{r}) = -arg(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{av})$ . Векторный потенциал тогда может быть выбран в виде  $\mathbf{A} = B[\mathbf{z}_0 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)]/2$ , где  $\mathbf{r}_0 = (-a, 0, 0)$ - точка на границе (S) области напротив вихря, а  $\mathbf{z}_0$ - единичный вектор в направлении оси  $z$ . Заметим, что распределение фазы и векторный потенциал должны обеспечивать условие стабильности вихря, т.е. плотность сверхтока должна обращаться в ноль в точке, где расположен вихрь. В рассматриваемой модели условие стабильности означает, что расстояние от вихря до поверхности должно зависеть от поля следующим образом:  $a = \sqrt{\phi_0/B}$ . Заметим, что условие непротекания сверхтока через границу N/S:  $(\partial_x \Phi - (2\pi/\phi_0)\mathbf{A}_x) = 0$  выполняется автоматически.

Результаты численных расчетов функции  $\sigma_v(\theta)/\sigma_{v0}$  при разных значениях расстояния  $a$  показаны на вставке к Рис.(2.2). Максимальное значение  $\sigma_v(\theta = 0)$  с хорошей точностью совпадает с аналитическим выражением (2.21). Коэффициент  $\beta$  в выражении (2.22) имеет почти постоянное значение при разных  $a$ , монотонно уменьшаясь от  $\beta \simeq 0.6$  при  $a = 2\xi$  до  $\beta \simeq 0.4$  при  $a = 5\xi$ . На Рис.(2.2) для разных значений параметра высоты барьера  $Z$  построено отношение  $\bar{\sigma}_v/\sigma_0$  среднего вклада вихрей в проводимость  $\bar{\sigma}_v = G_v/\xi$  к проводимости контакта N/S в отсутствии вихрей

$$\sigma_0 = \frac{k_F}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g_0(\theta, \theta_0) \cos \theta_0 d\theta_0.$$

Как и ожидалось, это отношение экспоненциально убывает при удалении вихрей от границы сверхпроводника.

## 5. Обсуждение результатов

В случае высоких барьеров  $Z \gg 1$  выражение (2.22) принимает вид  $G_v = \beta(k_F \xi) e^{-2K(a)} T_s$ , где использовано значение прозрачности барьера  $T_s = (1 + Z^2)^{-1} \approx Z^{-2}$ . Этот результат может быть интерпретирован в рамках модели туннельного гамильтониана [84]. Стандартное выражение для туннельной проводимости контакта N/S при нуле температур имеет вид :

$$\sigma = \sigma_n \nu / \nu_0, \quad (2.23)$$

где  $\nu$ - локальное значение плотности состояний на уровне Ферми, а  $\sigma_n$ - туннельная проводимость в нормальном состоянии. Для сверхпроводника s-типа искажение профиля локальной плотности состояний для вихря около поверхности не очень значительно [85]. Поэтому, для оценки плотности состояний на уровне Ферми  $\nu_v(\mathbf{r})$  может быть использовано выражение, справедливое, строго говоря, для изолированного вихря в безграничном сверхпроводнике [86, 73]:

$$\nu_v(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\hat{\psi}(\mathbf{r}, \theta_p)|^2 \delta(\epsilon_0 k_F r \sin(\theta - \theta_p)) d\theta_p, \quad (2.24)$$

где  $\hat{\psi}(\mathbf{r}, \theta_p)$ - квазиклассическая огибающая волновой функции:  $|\hat{\psi}(\mathbf{r}, \theta_p)|^2 \sim e^{-2K(r)} k_F / \xi$ . Таким образом,  $\nu_v(\mathbf{r}) \sim \nu_0(\xi/r) e^{-2K(r)}$ , где  $\nu_0 = m/\hbar^2$  - плотность состояний в двумерном нормальном металле. Подставляя  $\nu = \nu_v(r = a/\cos\theta)$  и  $\sigma_n \sim T_s k_F$  мы получаем проводимость:  $\sigma \sim k_F T_s J(\theta)$ , которая совпадает по порядку величины с выражением (2.21) в случае  $Z \gg 1$  и  $|\theta| \ll 1$ . Интегрируя локальную проводимость  $\sigma(\theta)$  по плоскости границы N/S мы получаем выражение (2.22) для кондактанса, где фактор  $\beta$  равен:  $\beta \sim \int_{-\alpha}^{\alpha} \exp(2K(a) - 2K(a/\cos\theta)) (\cos\theta)^{-1} d\theta$ . Заметим, что хотя мы и получили качественно верный результат для кондактанса контакта N/S с вихрем, подход, основанный на модели туннельного гамильтониана не учитывает вклад, связанный с нерезонансным андреевское отражение, вероятность которого определяется фактором  $T_s^2$ . Как будет показано ниже, вклады резонансного и нерезонансного андреевское отражение могут быть сравнимы даже в случае достаточно сильного рассеяния на границе. К тому же, туннельный гамильтониан заведомо не описывает случай низких поверхностных барьеров, когда влияние вихрей на кондактанс не является определяющим и вкладом от нерезонансного андреевское отражение нельзя пренебрегать.

На Рис.2.3(а) показан в логарифмическом масштабе вклад вихрей в проводимость  $\bar{\sigma}_v$  как функция высоты барьера  $Z$  для нескольких значений расстояния  $a$ . При малых значениях  $Z$  функция  $\bar{\sigma}_v(Z)$  растет  $\bar{\sigma}_v \sim Z^2$  в соответствие с оценкой (2.21). Когда барьер становится сильнее  $Z \gg 1$ , поведение  $\bar{\sigma}_v(Z)$  изменяется на убывающее  $\bar{\sigma}_v \sim Z^{-2}$ . Однако, в тоже время, проводимость в отсутствие вихрей при  $Z \gg 1$  убывает как  $\sigma_0 \sim Z^{-4}$ , поэтому отношение  $\bar{\sigma}_v/\sigma_0$  является монотонно растущей функцией высоты барьера  $Z$ , возрастая как  $Z^2$  (см. Рис.2.3b).

Рассмотрим теперь выражение для полного кондактанса контакта N/S, имеющее достаточно простую форму при  $Z \gg 1$ . Производя суммирование вкладов в кондактанс от всех вихрей, мы получаем:

$$G = (8/15) N_0 T_s^2 + n_v \beta (k_F \xi) e^{-2K(a)} T_s, \quad (2.25)$$

где  $n_v = L_y/L_v$ - полное число вихрей около границы N/S. Полученное выражение для полного кондактанса (2.25) состоит из двух слагаемых. Первый член  $G_0 \sim N_0 T_s^2$  совпадает с кондактансом контакта N/S в отсутствие магнитного поля. Фактор  $T_s^2$  определяет вероятность последовательного туннелирования падающей и отраженной квазичастиц через поверхностный барьер. Второе слагаемое представляет собой увеличение кондактанса, связанное с наличием вихрей в контакте  $G_{vt} = n_v G_v \sim$

$n_v(k_F\xi)e^{-2K(a)T_s}$ . Фактор  $e^{-2K(a)T_s}$  определяет вероятность туннелирования падающей квазичастицы через барьер и слой сверхпроводника в вихревой кор.

Параметры вихревой конфигурации, такие как расстояние между вихрями  $L_v$  и расстояние  $a$  от цепочки вихрей до границы определяются магнитным полем. Используя зависимость кондактанса от поля (2.2) мы можем найти критическое значение магнитного поля  $H_c$  когда  $G_{vt} \sim G_0$ , определяемое следующим трансцендентным уравнением  $\ln(x/T_s) = 2/x$ , где  $x = \sqrt{B/H_{c2}}$ . Используя в качестве примера значение параметра  $Z = 5$ , мы получаем значение критического магнитного поля  $B_c \sim 0.5H_{c2}$ , и критическое расстояние  $a_c \sim 1.5\xi$ . Таким образом, влияние вихревых состояний на кондактанс может быть существенным когда магнитное поле ниже верхнего критического и вихри находятся достаточно далеко от границы N/S.

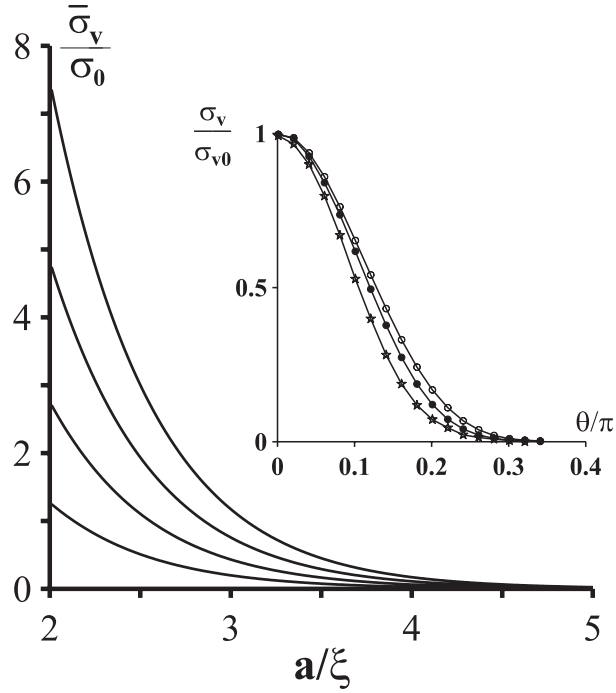


Рис. 2.2. Отношение  $\bar{\sigma}_v/\sigma_0$  среднего вихревого вклада в проводимость и проводимости однородного контакта как функция расстояния  $a$ . Кривые, начиная с верхней, соответствуют значениям  $Z = 5, 4, 3, 2$ . Вставка: функция  $\sigma_v(\theta)/\sigma_{v0}$  для  $a/\xi = 2$  (белые точки),  $a/\xi = 3$  (черные точки)  $a/\xi = 5$  (звездочки);  $Z = 2$ .

Необходимо отметить, что в реальных экспериментальных условиях, существенную роль играет примесное рассеяние квазичастиц. Влиянием рассеяния на движение квазичастиц можно пренебречь в случае, если время жизни квазичастиц в коре вихря много меньше времени релаксации импульса:  $\hbar/\delta E \ll \tau$ , или

$$l_e \gg (T_s e^{-2a/\xi})^{-1} \xi, \quad (2.26)$$



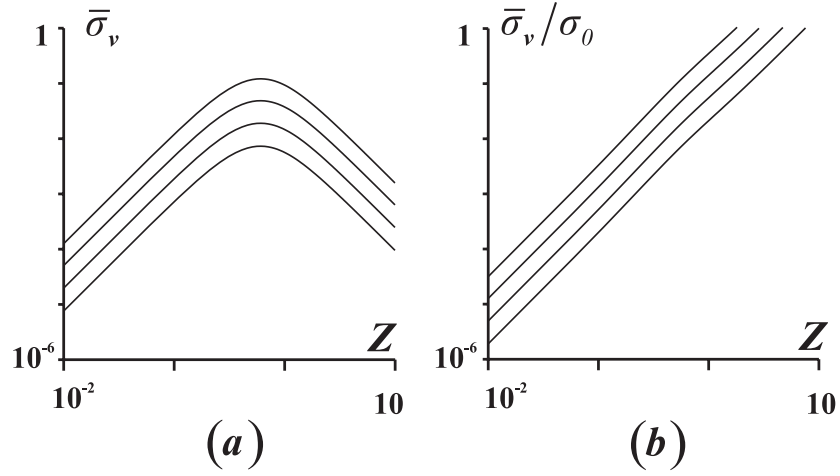


Рис. 2.3. (а): Зависимость среднего вихревого вклада в проводимость  $\bar{\sigma}_v$  от высоты барьера  $Z$ . (б): зависимость отношения  $\bar{\sigma}_v/\sigma_0$  как функция  $Z$ . Графики построены в логарифмическом масштабе. Кривые с верхней по нижнюю соответствуют  $a/\xi = 2, 2.5, 3, 3.5$ .

где  $l_e = V_{FT}$ - длина свободного пробега в (S) области. Это условие может быть выполнено если барьер не очень высокий, т.е.  $T_s \sim 1$  и вихри расположены не очень далеко от границы N/S т.е. вероятность туннелирования  $T_s e^{-2a/\xi}$  не очень мала. В противном случае, условие (2.26) не выполняется и рассеяние на примесях будет влиять на кондактанс. Простейшая оценка в этой ситуации может быть сделана в модели туннельного гамильтониана, когда проводимость определяется выражением (2.23). Из-за рассеяния на примесях, профиль локальной плотности состояний отличается от выражения (2.24), справедливого в чистом пределе  $l_e \gg \xi$ . В частности, сингулярный пик в центре вихря  $r = 0$  будет размыт и плотность состояний в коре вихря меньше чем в чистом случае. Но на расстояниях  $r > \xi$  например, на границе N/S плотность состояний сохраняется даже в случае сильного рассеяния  $l_e \sim \xi$ . Более того, она даже больше, чем в чистом случае [87]. Таким образом, при наличии примесей в (S) области, кондактанс контакта N/S также определяется уравнением (2.2).

Также, наличие примесей может влиять на нерезонансный вклад в кондактанс, т.е. первый член в выражении (2.1). В частности, интерференция квазичастичных волн, отраженных от поверхностного барьера и примесей в (N) области также может привести к увеличению кондактанса [88]. Это явление известно также под названием безотражательного туннелирования квазичастиц (reflectionless tunneling). Заметим, что в экспериментах, где этот эффект наблюдался [90] было выполнено условие  $l_e > \xi$ . В этом случае, величина магнитного поля, подавляющего интерференцию квазичастиц [89]  $H_s \sim \phi_0/(12l_e^2)$  намного меньше верхнего критического поля в сверхпровод-

нике. В нашем случае, поле должно быть намного сильнее, чтобы создать достаточно плотную вихревую решетку в сверхпроводнике:  $B \sim H_{c2} \gg H_s$ . Таким образом, в таких же экспериментальных условиях, как в работе [90] эффект безотражательного тунеллирования отсутствует в интересующем нас диапазоне магнитных полей.

Итак, мы изучили низкоэнергетический квантовый транспорт в баллистическом контакте нормальный металл/изолятор/сверхпроводник во внешнем магнитном поле. Предполагалось, что магнитное поле создает в сверхпроводнике вихри Абрикосова вблизи границы с нормальным металлом. В рамках теории Боголюбова- де Жена рассчитаны вероятности андреевского и нормального отражения и показано, что наличие в контакте вихрей приводит к сильному увеличению кондактанса благодаря резонансному андреевскому туннелированию через подщелевые квазичастичные состояния, локализованные на вихрях. Найдена зависимость кондактанса контакта от внешнего магнитного поля, которое определяет концентрацию и расположение вихрей относительно границы нормальный металл/ сверхпроводник.

## Глава 3.

# Электронная структура

## поверхностных и вихревых мод в

## киральном мезоскопическом

## сверхпроводнике.

### 1. Введение.

В последнее время ведутся активные исследования необычной сверхпроводимости в недавно открытом соединении  $Sr_2RuO_4$  [58]. Сверхпроводимость в этом материале имеет нетривиальную спиновую структуру- куперовские пары находятся в триплетном состоянии. Таким образом, в силу принципа Паули, орбитальное состояние куперовских пар должно быть пространственно нечетным, т.е. соответствовать нечетному значению орбитального момента относительного движения электронов в паре. В сверхпроводящей фазе с ненулевым значением проекции орбитального момента куперовских пар на некоторую ось  $z$  нарушена симметрия по отношению к обращению времени и зеркальному отражению кристаллических осей. Такое состояние называется киральным, а значение киральности  $\chi$  определяется проекцией орбитального момента. Параметр порядка является триплетным (синглетным) в случае нечетного (четного) значения киральности:  $\hat{\Delta} = \Delta_0 e^{i\chi\theta_p} \check{\sigma}_z$  и  $\hat{\Delta} = \Delta_0 e^{i\chi\theta_p}$  соответственно [60], где  $\check{\sigma}_z$ - матрица Паули в спиновом пространстве. В сверхпроводниках с ненулевой киральностью  $\chi \neq 0$  фаза функции щели зависит от направления импуль-

са электрона в плоскости  $xy$ :  $\mathbf{p} = p(\cos \theta_p, \sin \theta_p)$ . Такая нетривиальная структура щели в импульсном пространстве приводит к появлению поверхностных состояний на границе сверхпроводник/изолятор [47, 48, 49].

Под действием магнитного поля, создающего экранирующие токи и вихри в сверхпроводнике, уровни поверхностных состояний модифицируются из-за эффекта доплеровского сдвига энергии [78], что приводит к расщеплению пика кондактанса [51]. Недавно в работе [52] было исследовано влияние доплеровского сдвига на спектр поверхностных состояний в  $Sr_2RuO_4$  ( $|\chi| = 1$ ). Было показано, что локальная плотность состояний вблизи плоской поверхности сверхпроводника зависит от направления магнитного поля, а также от завихренности в случае, когда в сверхпроводнике вблизи границы расположен вихрь Абрикосова.

Если в киральном сверхпроводнике появляется вихрь Абрикосова, то кроме эффекта доплеровского сдвига [52], необходимо также учитывать гибридизацию поверхностных и вихревых состояний [5]. В этом случае, модификация спектра определяется перекрытием волновых функций квазичастиц, локализованных вблизи поверхности сверхпроводника и в коре вихря. Характерный масштаб локализации волновых функций определяется длиной когерентности  $\xi$ . Поэтому, такая гибридизация состояний должна быть особенно важной в мезоскопических сверхпроводниках с размерами несколько  $\xi$ .

Рассмотрим модельную ситуацию, когда сверхпроводящий образец представляет собой идеальный диск в плоскости  $xy$ . Поскольку система обладает аксиальной симметрией, спектр поверхностных состояний может быть выражен как функция углового момента  $\mu$ . Как и в предыдущих главах, мы предполагаем справедливость квазиклассического приближения, рассматривая движение квазичастиц вдоль прямолинейных траекторий, направление которых определяется импульсом квазичастиц  $\mathbf{p} = p(\cos \theta_p, \sin \theta_p)$ . Используя аналогию с точечным контактом Джозефсона, мы можем записать энергию поверхностных состояний в виде:  $\varepsilon_s = -\Delta_0 \cos(\Delta\varphi/2)$ , где  $0 < \Delta\varphi < 2\pi$ - разность фаз параметра порядка для падающей и отраженной квазичастицы. При отражении траектории от границы диска угол  $\theta_p$  преобразуется как  $\theta_p \rightarrow \theta_p + \pi + 2 \arcsin(b/R)$ , где  $b = -\mu/k_F$ - прицельный параметр, т.е. расстояние от траектории до центра диска,  $R$ -радиус диска. В случае, когда параметр порядка является пространственно-однородным (отсутствуют сверхпроводящие токи), нетрудно получить, что  $\Delta\varphi = [\chi(\pi + 2 \arcsin(b/R))] \bmod (2\pi)$ , а спектр состоит из набора аномальных веток [53, 54]:

$$\varepsilon_{sj}(\mu) \approx -(\mu - \mu_j)\omega_{sj}, \quad (3.1)$$

где  $j = 1 \dots |\chi|$  и  $\mu_j = (k_F R) \sin(\pi n_j / 2\chi)$ . Целочисленный индекс  $n_j$  из интервала  $-|\chi| < n_j < |\chi|$  выбирается таким образом, чтобы комбинация  $\chi - n_j$  была нечетной. Как было показано в работе [53], спектр поверхностных состояний (3.1) похож на спектр квазичастиц, локализованных в коре многоквантового вихря [66]. Расстояние между дискретными уровнями, принадлежащими аномальным веткам  $\omega_{sj} = \chi\Delta_0 / (k_F R \cos(\pi n_j / 2\chi))$  намного меньше, чем щель в спектре безграничного сверхпроводника  $\Delta_0$ , поскольку  $k_F R \gg 1$ . Поэтому аномальные ветки могут рассматриваться как непрерывные функции прицельного параметра  $b = -\mu/k_F$ . Для

четного значения киральности  $\chi$  все спектральные ветки пересекают уровень Ферми при конечном значении прицельного параметра  $b = -\mu_j/k_F$ , а для нечетного  $\chi$  существует центральная ветка, для которой  $\mu_j = 0$ , пересекающая уровень Ферми при  $b = 0$ .

Если в центре диска расположен вихрь Абрикосова, в спектре квазичастиц появляется еще одна аномальная ветка энергии, соответствующая вихревым состояниям [5]:

$$\varepsilon_v(\mu) = -\mu\omega_v. \quad (3.2)$$

Здесь  $\omega_v \sim \eta\Delta_0/(k_F\xi)$ , где  $\xi = \hbar V_F/\Delta_0$  - длина когерентности,  $V_F = \hbar k_F/m$  - скорость Ферми. Значение завихренности  $\eta = \pm 1$  определяется знаком циркуляции сверхскорости вокруг центра вихря в направлении, против часовой стрелки. Значения углового момента в выражении (3.2) являются целыми (полу-целыми) для нечетного (четного) значения киральности [60].

Рассматривая спектральные ветки  $\varepsilon_v(b)$  и  $\varepsilon_{sj}(b)$  как функции непрерывного прицельного параметра  $b = -\mu/k_F$ , нетрудно видеть, что они пересекаются в некоторых точках  $b = b_j$ . Расщепление уровней энергии в точке вырождения возникает благодаря гибридизации вихревых и поверхностных состояний и может быть оценено с помощью теории возмущений для почти вырожденной двухуровневой системы [72]:

$$[\varepsilon - \varepsilon_{sj}(b)][\varepsilon - \varepsilon_v(b)] = J^2, \quad (3.3)$$

где фактор  $J$  определяется перекрытием волновых функций. Используя разложение в ряд Тейлора  $\varepsilon_v(b) = \varepsilon_v(b_j) + \varepsilon'_v(b_j)(b - b_j)$  и  $\varepsilon_{sj}(b) = \varepsilon_{sj}(b_j) + \varepsilon'_{sj}(b_j)(b - b_j)$  легко видеть, что расщепление веток зависит от их относительного наклона  $\varepsilon'_v = d\varepsilon_v/db$  и  $\varepsilon'_{sj} = d\varepsilon_{sj}/db$  в  $b = b_j$ . В случае, если знаки производных различны, в спектре появляется минищель. Ширина минищели, т.е. минимальное расстояние между уровнями, принадлежащими различным веткам энергии может быть найдено из уравнения (3.3) в следующем виде:

$$\delta\varepsilon = 2|J| \sqrt{|\varepsilon'_v\varepsilon'_{sj}| / (|\varepsilon'_v| + |\varepsilon'_{sj}|)}. \quad (3.4)$$

В другом случае, когда  $\varepsilon'_v$  и  $\varepsilon'_{sj}$  имеют одинаковый знак, ширина минищели равна нулю. В общем случае, спектральные ветки  $\varepsilon_v(b)$  и  $\varepsilon_{sj}(b)$  пересекаются при  $|b_j| \sim \xi$  и  $|\varepsilon| \sim \Delta_0$ , где спектр квазичастиц не описывается уравнениями (3.1, 3.2). Для простоты, исследуя взаимодействие вихревых и поверхностных состояний, далее мы будем рассматривать случай сверхпроводника р-типа ( $|\chi| = 1$ ). В этом случае существует одна аномальная ветка поверхностных состояний  $\varepsilon_s(b)$ , пересекающая уровень Ферми при  $b = 0$  одновременно с аномальной веткой вихревых состояний  $\varepsilon_v(b)$ . Поэтому трансформация спектра происходит в области малых энергий  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ , когда поверхностные и вихревые состояния хорошо локализованы и интеграл перекрытия может быть оценен следующим образом  $|J| \sim \Delta_0 e^{-R/\xi}$ . В этом случае, расщепление веток энергии показано на Рис.(3.1) для разных знаков киральности  $\chi$  и завихренности  $\eta$ .

Наличие в сверхпроводнике вихря приводит к возникновению сверхпроводящего тока, текущего вдоль границы образца. Поэтому можно было бы ожидать, что

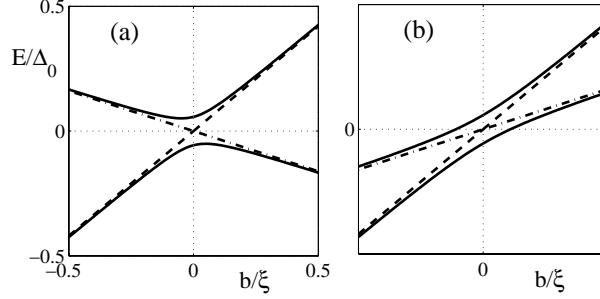


Рис. 3.1. Сплошными линиями показана трансформация спектра при взаимодействии вихревых и поверхностных состояний в сверхпроводящем диске: (а) киральность и завихренность имеют разные знаки ( $\eta = 1, \chi = -1$ ); (б) киральность и завихренность имеют одинаковые знаки ( $\eta = 1, \chi = 1$ ). Пунктирная и штрих-пунктирная линии соответствуют невзаимодействующим спектральным веткам вихревых и поверхностных состояний.

спектральная ветка, соответствующая поверхностным состояниям  $\varepsilon_s(b)$  будет модифицирована за счет эффекта доплеровского сдвига [52]. Однако, в случае  $|\chi| = 1$  это не так, поскольку доплеровский сдвиг компенсируется дополнительным скачком фазы параметра порядка для падающих и отраженных квазичастиц. В самом деле, в присутствии индуцированного вихрем поля сверхскорости  $\mathbf{v}_s$ , спектр поверхностных состояний определяется следующим образом:  $\varepsilon_s = -\Delta_0 \cos(\Delta\varphi/2) + \mathbf{p}_F \cdot \mathbf{v}_s$ , где  $\mathbf{p}_F \cdot \mathbf{v}_s = -\eta\Delta_0(b/R)$  - доплеровский сдвиг на краю диска, а разница фаз равна  $\Delta\varphi \approx \pi + 2(\chi + \eta)b/R$ . Легко видеть, что в случае  $|\chi| = 1$  это выражение опять сводится к (3.1) где  $n_j = 0$ .

Для того, чтобы изучить более детально описанные выше эффекты, мы используем подход, основанный на уравнении Боголюбова-де Жена (1.3). В данном случае, щель является дифференциальным оператором  $\hat{\Delta}$ , действующим на волновые функции квазичастиц

$$\hat{\Delta} = \{\Delta(\hat{\mathbf{r}}), e^{i\chi\theta_p}\}, \quad (3.5)$$

где  $\hat{\mathbf{r}}$  - оператор координаты,  $\Delta(\mathbf{r})$  - пространственное распределение щели, а  $\{A, B\} = AB + BA$  - антикоммутатор, обеспечивающий калибровочную инвариантность оператора  $\hat{\Delta}$ . Здесь мы опустили спиновую часть оператора щели  $\hat{\Delta}$ , предполагая, что спин-орбитальное взаимодействие отсутствует. Также мы пренебрегаем дисперсией энергии квазичастиц по оси  $z$ , предполагая, что поверхность Ферми является цилиндрической. Магнитное поле приложено вдоль оси  $z$ :  $\mathbf{H} = -H\mathbf{z}_0$ . Рассматривая случай идеального сверхпроводника II рода мы можем считать магнитное поле практически однородным на масштабах  $R$  и использовать калибровку  $\mathbf{A} = [\mathbf{H}, \mathbf{r}]/2$ . Как уже упоминалось, в этой главе мы будем использовать квазиклассический подход к решению

уравнений Боголюбова- де Жена, развитый в Разделе 2.1. В нашем случае, удобно будет использовать полярную систему координат  $(r, \theta)$ , начало которой совпадает с центром сверхпроводящего диска. Тогда, граничное условие для волновой функции квазичастиц может быть записано как

$$\Psi(R, \theta) = 0. \quad (3.6)$$

## 2. Спектр краевых состояний

Сначала необходимо найти спектр краевых состояний в сверхпроводнике без вихрей, решая уравнение (1.22) с пространственно- однородным распределением параметра порядка:  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0$  с учетом граничных условий (3.6). Благодаря аксиальной симметрии системы, переменные  $\theta_p$  и  $s$  в уравнении (1.22) разделяются:

$$\psi(s, \theta_p) = e^{i\mu\theta_p + i\chi\tilde{\tau}_3\theta_p/2} G_\mu(s), \quad (3.7)$$

где  $\mu = n + \chi/2$  - угловой момент,  $n$ - целое число. Функция  $G_\mu$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$-i\tilde{\tau}_3\hbar V_F \frac{\partial}{\partial s} G_\mu + \Delta_0 \tilde{\tau}_1 G_\mu = \tilde{\varepsilon} G_\mu, \quad (3.8)$$

где  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \mu(\hbar\omega_H/2)$ . Для того, чтобы применить граничные условия (3.6) необходимо вычислить интеграл (1.16) используя метод стационарной фазы. Для заданного значения  $\mu$  мы получаем:

$$\Psi(R, \theta) = e^{i(k_F s^* - \pi/4)} \psi(s^*, \theta_1) + e^{i(\pi/4 - k_F s^*)} \psi(-s^*, \theta_2),$$

где  $s^* = \sqrt{R^2 - (\mu/k_F)^2}$ , а точками стационарности являются  $\theta_1 = \theta + \arcsin(\mu/k_F R)$  и  $\theta_2 = \theta + \pi - \arcsin(\mu/k_F R)$ . Таким образом, граничные условия для функции  $G_\mu(s)$  принимают вид:

$$G_\mu(s^*) = e^{i\alpha - i\tilde{\tau}_3\varphi} G_\mu(-s^*), \quad (3.9)$$

где  $\alpha = \mu[\pi - 2\arcsin(\mu/k_F R)] - 2k_F s^* - \pi/2$  и  $\varphi = \chi[\arcsin(\mu/k_F R) - \pi/2]$ .

Общее решение уравнения (3.8) может быть записано в следующем виде:

$$G_\mu = c \begin{pmatrix} 1 \\ e^{i\gamma} \end{pmatrix} e^{qs/\xi} + d \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-i\gamma} \end{pmatrix} e^{-qs/\xi}, \quad (3.10)$$

где  $c, d$  - произвольные коэффициенты,  $\gamma = \arccos(\tilde{\varepsilon}/\Delta_0)$  и  $q = \sqrt{\Delta_0^2 - \tilde{\varepsilon}^2}/\Delta_0$ . Затем, с помощью условий (3.9) легко получить выражение для энергии поверхностных уровней:

$$\varepsilon = \Delta_0 M / \sqrt{1 + M^2} - \mu(\hbar\omega_H/2), \quad (3.11)$$

где  $M = \coth(2qs^*/\xi) \cot \varphi - \cos \alpha / \sinh(2qs^*/\xi)$ . Выражение (3.11) может быть упрощено, если ограничить рассмотрение областью малых энергий  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ . Предполагая для простоты, что магнитное поле отсутствует, легко получить, что спектр состоит из набора веток, число которых определяется значением киральности  $|\chi|$ :

$$\varepsilon_{sj}(\mu) = -(\mu - \mu_j)\omega_{sj} + \Delta_0 \frac{(-1)^{k_j} \cos \alpha}{\sinh(2s^*/\xi)}, \quad (3.12)$$

где  $\omega_{sj} = \chi \Delta_0 \coth(2s^*/\xi) / (k_F R \cos(\pi n_j / 2\chi))$  и  $\mu_j = (k_F R) \sin(\pi n_j / 2\chi)$ . Целочисленный индекс  $n_j$  из интервала  $-|\chi| < n_j < |\chi|$  должен удовлетворять условию нечетности величины  $\chi - n_j = 2k_j + 1$ . Как видно из уравнения (3.12), уровни энергии являются осциллирующими функциями радиуса диска с периодом  $\delta R = \pi / k_F$ . Амплитуда осцилляций может намного превышать расстояние между уровнями в случае, если радиус диска меньше критического значения  $R_c$ , определяемого условием  $\omega_{sj} \sim \Delta_0 / \sinh(2s^*/\xi)$ . Для типичных значений параметра  $k_F \xi \sim 10^2 - 10^3$  мы получаем  $R_c / \xi \sim 3 - 5$ . Заметим, что при  $|\chi| = 1$  уравнение (3.12) полностью аналогично выражению для спектра вихревых состояний, модифицированных за счет рассеяния на границе мезоскопического сверхпроводника [38]. При больших значениях радиуса  $R \gg R_c$  амплитуда осцилляций в выражении (3.12) экспоненциально мала. В этом случае, спектр поверхностных состояний состоит из набора аномальных веток (3.1), аналогично спектру многоквантового вихря с завихренностью равной  $\chi$  [66]. Поэтому, выражение (3.12) описывает формирование энергетических зон за счет взаимодействия поверхностных состояний, локализованных на разных концах траектории  $s = \pm s^*$ . Ширина зоны  $\Delta_0 / \sinh(2s^*/\xi)$  пропорциональна перекрытию соответствующих волновых функций, затухающих на масштабе  $\xi$ .

Магнитное поле  $H$ , приложенное вдоль оси  $z$  приводит к сдвигу поверхностных уровней энергии на величину  $\mu(\hbar\omega_H/2)$  в спектре (3.12). На самом деле, появление этого слагаемого есть следствие возникновения доплеровского сдвига за счет мейсснеровского тока, текущего вдоль поверхности сверхпроводника. Подобный эффект был исследован в работе [52] в случае плоской геометрии границы сверхпроводник/изолятор. Рассмотрим выражение для спектра (3.12) более детально в случае  $|\chi| = 1$ . С учетом магнитного поля, мы получаем, что  $\omega_{s1} = \omega_s = \chi \Delta_0 / (k_F R) + \hbar\omega_H/2$  и  $\alpha(\mu) = \mu\pi - 2k_F R - \pi/2$ . Заметим, что фаза осцилляций уровней энергии обладает свойством  $\alpha(\mu + 2) = \alpha(\mu) + 2\pi$ , поэтому расстояние между уровнями, соответствующими  $\mu$  и  $\mu + 2$  равно  $2\omega_s$ . Величина  $\omega_s$  является наименьшим масштабом энергии, и поэтому дискретность уровней, определяемую  $\omega_s$  можно не учитывать. С другой стороны, расстояние между уровнями, соответствующими  $\mu$  и  $\mu + 1$  равно  $\Delta_0 e^{-2R/\xi} \cos(2k_F R)$ , и может намного превышать  $\omega_s$  если  $R < R_c$ . Таким образом, спектр (3.12) можно рассматривать как набор из двух непрерывных веток, каждая из которых состоит из уровней с одинаковой четностью коэффициента  $n = \mu - 1/2$ :

$$\varepsilon_s(b) = \omega_s k_F b \pm 2\chi \Delta_0 e^{-2R/\xi} \cos(2k_F R), \quad (3.13)$$

где  $b = -\mu/k_F$ - прицельный параметр. При  $R > \xi$ , энергия доплеровского сдвига  $k_F b (\hbar\omega_H/2)$  в уравнении (3.13) может существенно изменить наклон спектральных



веток  $\varepsilon_s(b)$ . В самом деле,  $\hbar\omega_H \sim (H/H_{c2})\Delta_0/(k_F\xi)$ , где  $H_{c2} \sim \phi_0/\xi^2$ - верхнее критическое поле и  $\phi_0 = \pi\hbar c/e$ - квант магнитного потока. Поэтому, когда величина магнитного поля становится достаточно большой  $|H| > (\xi/R)H_{c2}$ , знак наклона ветки  $E_s(b)$  изменяется на противоположный. В частности, при  $H = -2\chi\phi_0/(\xi R)$  мы получаем бездисперсионный спектр  $\varepsilon_s = \pm 2\Delta_0 e^{-2R/\xi} \cos(2k_F R)$ . На Рис.(3.2) показано поведение одной из спектральных веток (для  $\mu = 2n + 1/2$ ), определяемая уравнением (3.11) для различных значений магнитного поля. Изменяя величину магнитного поля можно эффективно влиять на такую экспериментально измеримую характеристику спектра квазичастиц как плотность состояний на уровне Ферми, которая определяется наклоном аномальных веток спектра  $\nu(0) = 1/|\omega_s|$ .

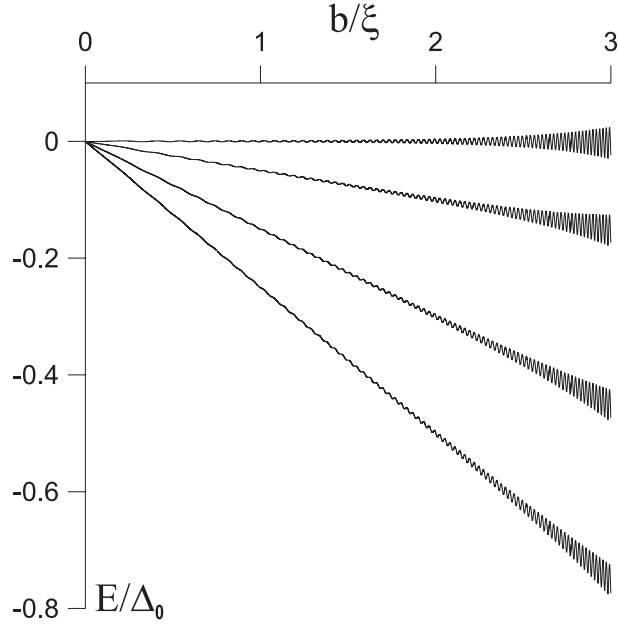


Рис. 3.2. Спектр поверхностных состояний для  $\chi = -1$  и  $\mu = 2n + 1/2$ . Кривые начиная с верхней соответствуют различным значениям магнитного поля от  $H = 0$  до  $H = 2\phi_0/(\xi R)$  (и соответственно  $\omega_s = 0$ ). Использованы следующие значения параметров:  $R = 4\xi$  и  $k_F\xi = 200$ .

Анализируя влияние внешнего магнитного поля на спектр и плотность состояний мы пренебрегли наличием собственного магнитного поля  $H_s$ , возникающего за счет тока, переносимого краевыми квазичастичными состояниями. Плотность этого тока, текущего в области шириной порядка  $\xi$  вдоль границы сверхпроводника, составляет порядка плотности тока распаривания [53, 54]. Соответствующее магнитное поле можно оценить следующим образом  $H_s \sim (\xi/\lambda)^2 H_{c2}$ , где  $\lambda$  - лондоновская длина проникновения. Рассматривая случай идеального сверхпроводника II рода ( $\xi/\lambda \ll 1$ ), мы можем пренебречь полем  $H_s$ .

Рассмотренная модель с однородным распределением щели  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0$  является адекватной только в слабых магнитных полях. В общем случае, однородность сверхпроводника нарушается, когда величина магнитного поля достаточна для того, чтобы преодолеть поверхностный барьер на вход вихря  $H_c \sim H_{c2}(\xi/R)$  [91]. Строго говоря, в случае кирального сверхпроводника критерий на формирование вихря должен зависеть от ориентации магнитного поля по отношению к оси  $z$ . В следующем разделе будет исследована трансформация спектра квазичастиц на стадии, когда вихрь уже вошел в образец и расположен в центре сверхпроводящего диска.

### 3. Взаимодействие поверхностных и вихревых состояний

В окрестности кора вихря параметр порядка имеет следующий вид:  $\Delta(\mathbf{r}) = \Delta_0 D_v(r) e^{i\eta\theta}$ , где  $\eta = \pm 1$  - завихренность и  $D_v(r)$  - безразмерный профиль вихревого кора. Оператор щели  $\hat{\Delta}$  в переменных  $(s, \theta_p)$  выглядит так:

$$\hat{\Delta} = \Delta_0 \frac{D_v(s)}{2|s|} \left\{ (s + \eta \hat{\mu}/k_F), e^{i(\chi+\eta)\theta_p} \right\}. \quad (3.14)$$

Для определенности, мы будем предполагать заданный профиль кора  $D_v(r) = r/\sqrt{r^2 + \xi^2}$ . Наличие вихря в центре диска не нарушает аксиальной симметрии системы, поэтому переменные  $s$  и  $\theta_p$  в уравнении (1.22) опять разделяются:

$$\psi(s, \theta_p) = e^{i\mu\theta_p + i(\chi+\eta)\tilde{\tau}_3\theta_p/2} G_\mu(s), \quad (3.15)$$

где  $\mu$  - целое. Как уже упоминалось во Введении, трансформация спектра происходит в области малых энергий и прицельных параметров  $|b| \ll \xi$ , что соответствует  $|\mu| \ll k_F \xi$ . Тогда граничное условие (3.6) приводит к уравнению (3.9) где  $s^* = R$ ,  $\alpha = \mu\pi - 2k_F R - \pi/2$  и  $\varphi = (\chi + \eta)[\mu/(k_F R) - \pi/2]$ . Функция  $G_\mu(s)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$-i\hbar V_F \tilde{\tau}_3 \frac{\partial}{\partial s} G_\mu + \mathbf{U}(s) G_\mu = \left( \tilde{\varepsilon} - \frac{\mu}{k_F \xi} \mathbf{W}(s) \right) G_\mu. \quad (3.16)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}(s)$  определены при  $-R < s < R$  следующим образом:

$$\mathbf{U}(s) = \Delta_0 D_v(s) \frac{s}{|s|} \tilde{\tau}_1$$

$$\mathbf{W}(s) = \Delta_0 D_v(s) \frac{\xi}{|s|} \tilde{\tau}_2$$

Предполагая, что радиус диска достаточно велик:  $R > \xi$  уравнение (3.16) вместе с граничными условиями (3.9) описывает взаимодействие состояний CdGM, локализованных в коре вихря ( т.е. при  $s = 0$ ) и краевых состояний, локализованных при

$s = \pm R$ . В этом случае, наиболее естественно использовать приближение сильной связи для нахождения спектра с помощью теории возмущений по взаимодействию локализованных мод. Для этого необходимо произвести продолжение функции  $G_\mu(s)$  и коэффициентов уравнения (3.16)  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{W}(s)$  на всю ось  $-\infty < s < \infty$ , используя следующие условия периодичности:

$$\begin{aligned} G_\mu(s + 2R) &= e^{i\alpha - i\tilde{\tau}_3\varphi} G_\mu(s), \\ \mathbf{U}(s + 2R) &= e^{-2i\tilde{\tau}_3\varphi} \mathbf{U}(s), \\ \mathbf{W}(s + 2R) &= e^{-2i\tilde{\tau}_3\varphi} \mathbf{W}(s). \end{aligned}$$

Будем искать решение (3.16) в виде суперпозиции функций, локализованных в окрестности точек  $s_n = 2nR$ , соответствующих вихревым состояниям, и  $d_n = (2n + 1)R$ , соответствующих поверхностным модам:

$$G_\mu = C_1 \sum_n V_n + C_2 \sum_n S_n, \quad (3.17)$$

где  $C_1, C_2$ - произвольные коэффициенты, а общие члены рядов (3.17) равны:

$$V_n(s) = e^{in(\alpha - \tilde{\tau}_3\varphi)} e^{-K_v(s - s_n)} e^{i\tilde{\tau}_3\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K_v(s - s_n) = \int_{s_n}^s D_v(s - s_n) \vartheta(s - s_n) \frac{ds}{\xi}$$

и

$$S_n(s) = e^{in(\alpha - \tilde{\tau}_3\varphi)} e^{-K_s(s - d_n)} e^{-i\tilde{\tau}_3\pi/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$K_s(s - s_n) = \int_{d_n}^s D_v(s - d_n) \vartheta(s - d_n) \frac{ds}{\xi},$$

где использовано обозначение для функции Хевисайда  $\vartheta(s) = s/|s|$ .

Следуя стандартному методу сильной связи мы подставляем решение в виде (3.17) в уравнение (3.16), умножаем его слева на  $V_n^*$  и  $S_n^*$  и интегрируем по переменной  $s$ , учитывая перекрытие только ближайших соседей. Вычисляя интегралы перекрытия (см. Приложение 3), мы получаем систему линейных уравнений для коэффициентов  $C_1, C_2$ :

$$\begin{aligned} [\varepsilon - \varepsilon_v(\mu)] C_1 &= -(i/2) e^{-R/\xi} (1 - e^{-i\alpha}) C_2 \\ [\varepsilon - \varepsilon_s(\mu)] C_2 &= i e^{-R/\xi} (1 - e^{i\alpha}) C_1. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Условие разрешимости этой системы приводит к секулярному уравнению (3.3) где  $J = \sqrt{2}\Delta_0 e^{-R/\xi} \sin(\alpha/2)$ . Спектральные ветки вихревых  $\varepsilon_v(\mu)$  и поверхностных  $\varepsilon_s(\mu)$  состояний определяются выражениями (3.2) и (3.1) с параметрами  $\omega_v \approx 0.84\eta\Delta_0/(k_F\xi) + \hbar\omega_H/2$  и  $n_j = 0$ ,  $\omega_s \approx \chi\Delta_0/(k_FR) + \hbar\omega_H/2$  соответственно.

Таким образом, в случае, когда завихренность  $\eta$  и киральность  $\chi$  имеют разные знаки [Рис.3.1(a)], на уровне Ферми появляется минищель, а плотность состояний имеет особенности ван Хофа на краях минищели  $\varepsilon = \pm\delta E$ . Наклон пересекающихся спектральных веток  $\varepsilon_v(b)$  и  $\varepsilon_s(b)$  зависит от магнитного поля  $H$ , приложенного вдоль оси  $z$ . Поэтому, изменяя величину поля можно управлять положением особенностей плотности состояний [см. уравнение (3.4)]. При достаточно сильном магнитном поле  $|H| > 2\phi_0/(\xi R)$ , наклон ветки  $\varepsilon_s(b)$  может быть изменен на противоположный. В этом случае, также как и при одинаковых знаках завихренности  $\eta$  и киральности  $\chi$ , спектр становится бесщелевым, как показано на Рис.3.1(b).

## 4. Влияние шероховатости границы.

В заключение, следует отметить, что анализ спектра квазичастиц был проделан нами в предположении идеально гладкой границы сверхпроводника. Можно было бы ожидать, что наличие неровностей на границе образца разрушит интерференцию квазичастичных волн, что приведет к подавлению минищели и особенностей плотности состояний. Однако, этого не должно происходить в случае, если шероховатости границы достаточно плавные. В частности, предположим, что поверхность сверхпроводника определяется уравнением  $r = R(\theta)$ , где  $R(\theta)$ - гладкая функция, флуктуирующая около среднего значения  $r = R_0$  таким образом, что  $|R(\theta) - R_0| \ll \xi$  и  $|dR/d\theta| \ll \xi$ . Тогда, следуя методу, развитому в работе [39] мы можем искать решение уравнения (1.22) в виде разложения сильной связи (3.17) с коэффициентами, зависящими от угла  $C_1, C_2(\theta)$ . Дальнейшие вычисления ничем не отличаются от проделанных выше, приводя в итоге к уравнениям (3.18) для функций  $C_1, C_2(\theta)$ , где  $\hat{\mu} = -i\partial/\partial\theta$  и  $e^{i\alpha} = -ie^{-ik_F(R(\theta)+R(\theta+\pi))}e^{i\pi\hat{\mu}}$ . Исследуя низкоэнергетический спектр  $|\varepsilon| \ll \Delta_0$ , естественно предположить, что функции  $C_{1,2}(\theta)$  состоят из ограниченного набора низших угловых гармоник с  $|\mu| \ll k_F\xi$ . Это означает, что коэффициенты в уравнении (3.18) могут быть усреднены по малому угловому интервалу, чтобы исключить быстрые гармоники коэффициентов типа  $e^{-ik_F(R(\theta)+R(\theta+\pi))}$ . При этом важно, что правые части уравнений (3.18) не могут усредниться в ноль, в отличие от аналогичных уравнений, полученных в работе [39] для спектра вихря в мезоскопическом сверхпроводнике s-типа. В результате, спектр должен иметь вид (3.3) где  $J = \beta\Delta_0e^{-R_0/\xi}$ , а фактор  $\beta \sim 1$  зависит от конкретного вида поверхности.

Итак, мы исследовали влияние внешнего магнитного поля на квазичастичный спектр в мезоскопическом киральном сверхпроводнике. Рассмотрен случай цилиндрической геометрии образца. Показано, что наличие в образце вихря Абрикосова приводит к различной трансформации спектра в зависимости от ориентации магнитного поля. Если киральности вихря и сверхпроводника совпадают, плотность состояний на уровне Ферми увеличивается. В обратном случае, возникает минищель на уровне Ферми. Изучено влияние неровности границы сверхпроводника на спектр и найдено, что минищель сохраняется даже в случае достаточно сильной неидеально-

сти границы образца.

## Заключение.

**Основные результаты** диссертации состоят в следующем:

1. Развита теория электронной структуры смешанного состояния мезоскопических сверхпроводников. В рамках теории Боголюбова - де Жена проанализирована низкоэнергетическая часть квазичастичного спектра смешанного состояния мезоскопического сверхпроводника. Рассмотрено влияние магнитного поля на аномальные ветки спектра, пересекающие уровень Ферми. На примере системы состоящей из двух вихрей мы изучили трансформацию квазичастичного спектра при расщеплении многоквантового вихря на отдельные вихри. Для случая, когда вихри расположены близко к поверхности сверхпроводника, изучено влияние нормального отражения квазичастиц от границы образца на спектр и плотность состояний. Показано, что модификация вихревой структуры при изменении магнитного поля оказывает существенное влияние на тепловой контактанс вдоль магнитного поля. В частности, при сближении вихрей в растущем магнитном поле происходит увеличение теплового контактанса.

2. Изучены особенности подщелевого электронного транспорта в контакте нормальный металл/сверхпроводник в направлении поперек магнитного поля. Было найдено сильное увеличение контактанса в связи с резонансным туннелированием падающих электронов в сверхпроводник через состояния, локализованные на вихрях, расположенных вблизи плоскости контакта. Этот эффект наиболее заметен в случае если нерезонансное андреевское отражение подавлено из-за сильного нормального рассеяния квазичастиц на границе нормальный металл/сверхпроводник. Вихревой вклад в контактанс, который мы исследовали, определяется концентрацией вихрей в области контакта, и таким образом, может эффективно управляться внешним магнитным полем. На основе наших расчетов можно предложить интерпретацию экспериментов[43]. Очевидно, что поскольку вихревой вклад в контактанс пропорционален числу вихрей, полный контактанс туннельных контактов должен испытывать скачки при изменении числа вихрей в мезоскопическом сверхпроводнике.

3. Исследовано поведение аномальных веток спектра в мезоскопическом киральном сверхпроводнике в магнитном поле и найдена зависимость плотности состояний на уровне Ферми от направления и величины приложенного магнитного поля. Проанализирована электронная структура вихря в мезоскопическом сверхпроводящем цилиндре с киральной симметрией параметра порядка  $p$  - типа. Показано, что если радиус цилиндра меньше критического, происходит гибридизация поверхностных

квазичастичных состояний, локализованных на границе цилиндра и состояний, локализованных в коре вихря. Результат соответствующей перестройки квазичастичного спектра зависит от направления внешнего магнитного поля, определяющего знак завихренности. В случае если завихренность и киральность сверхпроводника имеют разные знаки, появление вихря приводит к образованию минищели в спектре квазичастиц и подавлению плотности состояний на уровне Ферми. В случае если завихренность и киральность имеют одинаковые знаки, минищель в спектре не возникает и плотность состояний на уровне Ферми увеличивается.

Полученные результаты позволяют предложить способ определения киральности сверхпроводников на основе хорошо разработанных методов туннельной спектроскопии. Например, в области слабых магнитных полей, когда сверхпроводник находится в мейсснеровском состоянии, плотность состояний на уровне Ферми зависит не только от величины, но также и от направления поля. В зависимости от знака киральности, магнитное поле, направленное вдоль оси  $z$  может приводить к увеличению или подавлению плотности состояний. В сильных полях (когда в сверхпроводящий образец входит вихрь Абрикосова) в плотности состояний появляются особенности ван Хофа, связанные образованием минищелей в местах пересечения спектральных веток. Подобные особенности можно наблюдать экспериментально как пики дифференциального кондактанса.

# Приложение

## 1. Вывод уравнения (1.74)

Сначала мы докажем следующую формулу:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik^2/2+ikx} F(k) dk = \sqrt{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2} f(y) dy, \quad (3.19)$$

где  $f(x)$  - достаточно гладкая функция определенная на всей числовой оси  $-\infty < x < \infty$  и  $F(k) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$ . В самом деле, интеграл в правой части уравнения (3.19) может быть записан в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2} f(y) dy = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2+iky} F(k) dk dy.$$

Замечая, что  $(x-y)^2/2+ky = (y+k-x)^2/2+kx-k^2/2$  мы интегрируем по переменной  $y$ , используя известную формулу  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = \sqrt{\pi i}$  и получаем

$$\iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2+iky} F(k) dk dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik^2/2+ikx} F(k) dk.$$

Переписывая выражение (1.73) в виде

$$e^{-2i\varphi} \left[ \int_{\infty}^{\infty} e^{i\mu^2/k_{\perp} a} (e^{-K_0(a/2)} - i\hat{\gamma}\hat{\sigma}_z) \hat{\lambda} e^{i\mu\theta_1} c_{\mu} d\mu \right] = \left[ \int_{\infty}^{\infty} e^{-i\mu^2/k_{\perp} a} (e^{-K_0(a/2)} + i\hat{\gamma}\hat{\sigma}_z) \hat{\lambda}^* e^{-i\mu\theta_1} c_{\mu}^* d\mu \right], \quad (3.20)$$



мы умножаем его на  $e^{ik_{\perp}a(\theta-\theta_1)^2/4}$  и интегрируем по  $\theta_1$ . С помощью формулы (3.19) интегралы в выражении 3.20 могут быть преобразованы:

$$\begin{aligned}
& \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}a(\theta-\theta_1)^2/4} e^{i\mu^2/k_{\perp}a} e^{i\mu\theta_1} c_{\mu} d\mu d\theta_1 = \\
& = \sqrt{\frac{2\pi}{i}} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_{\perp}a/4)[(\theta-\theta_1)^2-(\theta_1-\theta_2)^2]} C(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 = \frac{\sqrt{2/i\pi}}{k_{\perp}a} C(\theta), \\
& \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}a[(\theta-\theta_1)^2/4-\theta_2^2/2]} e^{-i\mu^2/k_{\perp}a} e^{-i\mu\theta_1} c_{\mu}^* d\mu = \\
\sqrt{2\pi i} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{ik_{\perp}a[(\theta-\theta_1)^2/4+(\theta_1-\theta_2)^2/4-\theta_1^2/2]} C(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 & = \frac{\sqrt{2i/\pi}}{k_{\perp}a} e^{ik_{\perp}a\theta^2/2} C^*(-\theta)
\end{aligned}$$

С помощью этих выражений, вывод уравнения (1.74) из (3.20) представляется очевидным.

## 2. Матрицы перехода

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial x} B_1 + x B_1 &= p B_2, \\
i \frac{\partial}{\partial x} B_2 - x B_2 &= p B_1,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где  $p > 0$  и  $x$  - координата вдоль действительной и мнимой оси. Начнем со случая действительной переменной  $x$ . Решения уравнений (3.21) могут быть записаны в терминах функций параболического цилиндра  $D$  [76] с произвольными постоянными  $d_1$  и  $d_2$ :

$$\begin{aligned}
B_1 &= d_1 D_{ip^2/2} \left( x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) + d_2 D_{ip^2/2} \left( -x \sqrt{\frac{2}{i}} \right), \\
B_2 &= \frac{p}{\sqrt{2i}} \left[ d_1 D_{ip^2/2-1} \left( x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) - d_2 D_{ip^2/2-1} \left( -x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Асимптотические выражения для этих выражений  $x \gg \max(1, p)$  определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{ip^2/2} \left( x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) &\simeq e^{ix^2/2 + i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}x) + \pi p^2/8}, \\
D_{ip^2/2-1} \left( x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) &\simeq 0, \\
D_{ip^2/2} \left( -x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) &\simeq e^{ix^2/2 + i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}x) - 3\pi p^2/8}, \\
D_{ip^2/2-1} \left( -x \sqrt{\frac{2}{i}} \right) &\simeq \sqrt{2\pi} \frac{e^{-ix^2/2 - i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}x) - \pi p^2/8}}{\Gamma(1 - ip^2/2)},
\end{aligned}$$

где  $\Gamma$  - гамма-функция. Поэтому, матрица перехода  $\hat{X}_1$  связывающая асимптотики  $\hat{B} = (B_1, B_2)$  при  $x > 0$  и  $x < 0$ :

$$\hat{B}(x > 0) = \hat{X}_1 \hat{B}(x < 0)$$

имеет вид:

$$\hat{X}_1 = e^{-\pi p^2/2} \hat{I} + i(\hat{\sigma}_y \text{Re}\tau_1 + \hat{\sigma}_x \text{Im}\tau_1), \quad (3.23)$$

где  $\hat{I}$  - единичная матрица,

$$\tau_1 = \sqrt{2 \sinh(\pi p^2/2)} e^{-\pi p^2/4} e^{i\chi_1},$$

и  $\chi_1 = x^2 + p^2 \ln |\sqrt{2}x| + \arg \Gamma(1 - p^2/2) + \pi/4$ .

Далее, рассмотрим случай мнимой координаты  $x$ . Вводя новую переменную  $y = -ix$  и используя аналитическое продолжение решений (3.22) получаем :

$$\begin{aligned}
B_1 &= d_1 D_{ip^2/2}(y\sqrt{2i}) + d_2 D_{ip^2/2}(-y\sqrt{2i}), \\
B_2 &= \frac{p}{\sqrt{2i}} \left[ d_1 D_{ip^2/2-1}(y\sqrt{2i}) - d_2 D_{ip^2/2-1}(-y\sqrt{2i}) \right].
\end{aligned}$$

Асимптотики этих решений при  $y \gg \max(1, p)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}
D_{ip^2/2}(y\sqrt{2i}) &\simeq e^{-iy^2/2 + i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}y) - \pi p^2/8}, \\
D_{ip^2/2-1}(y\sqrt{2i}) &\simeq 0, \\
D_{ip^2/2}(-y\sqrt{2i}) &\simeq e^{-iy^2/2 + i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}y) + 3\pi p^2/8}, \\
D_{ip^2/2-1}(-y\sqrt{2i}) &\simeq \sqrt{2\pi} \frac{e^{iy^2/2 - i(p^2/2) \ln(\sqrt{2}y) + \pi p^2/8}}{\Gamma(1 - ip^2/2)}.
\end{aligned}$$

Аналогично предыдущему случаю можно получить матрицу перехода:

$$\hat{X}_2 = e^{\pi p^2/2} \hat{I} + (\hat{\sigma}_y \text{Re}\tau_2 + \hat{\sigma}_x \text{Im}\tau_2), \quad (3.24)$$

где

$$\tau_2 = \sqrt{2 \sinh(\pi p^2/2)} e^{\pi p^2/4} e^{i\chi_2},$$

и  $\chi_2 = y^2 - p^2 \ln |\sqrt{2}y| - \arg \Gamma(1 - p^2/2) + \pi/4$ .

### 3. Вычисление интегралов перекрытия

Следуя стандартному методу сильной связи мы подставляем решение в виде (3.17) в уравнение (3.16):

$$C_1 \sum_n [\mathbf{U}(s) - e^{-2i\hat{\tau}_3 n \varphi} \Delta_0 D_v(s - s_n) \vartheta(s - s_n) \hat{\tau}_1] V_n + \\ + C_2 \sum_n [\mathbf{U}(s) + e^{-2i\hat{\tau}_3 n \varphi} \Delta_0 \vartheta(s - d_n) \hat{\tau}_1] S_n = \left( \tilde{E} - \frac{\mu}{k_F \xi} \mathbf{W}(s) \right) G_\mu \quad (3.25)$$

Умножая уравнение (3.25) слева на  $\hat{V}_n^*$  и  $\hat{S}_n^*$ , интегрируя по  $s$  получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_n^* \left( \varepsilon + \epsilon_H \frac{(\mu + \hat{\tau}_3/2)}{k_F \xi} - \frac{\mu}{k_F \xi} \hat{W}(s) \hat{\tau}_2 \right) \hat{V}_n ds \approx 4\xi \left[ \varepsilon + \frac{\mu}{k_F \xi} (\epsilon_H + \epsilon_v) \right], \quad (3.26)$$

where

$$\epsilon_v = \frac{\int_0^{\infty} (|D_v(s)|/s) e^{-2K_v(s)} ds}{\int_0^{\infty} e^{-2K_v(s)} ds} \approx 0.84.$$

Аналогично:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_n^* \left( \varepsilon + \epsilon_H \frac{(\mu + \hat{\tau}_3/2)}{k_F \xi} - \frac{\mu}{k_F \xi} \hat{W}(s) \hat{\tau}_2 \right) \hat{S}_n ds = 2 \left[ \varepsilon + \frac{\mu}{k_F \xi} (\epsilon_H - \tilde{\epsilon}_s) \right], \quad (3.27)$$

где

$$\tilde{\epsilon}_s = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-2s}}{\sqrt{(s-R)^2 + \xi^2}} ds \approx \frac{\xi}{R}.$$

В окрестности точки  $s = d_n$  функция  $\hat{U}(s)$  определена следующим образом:

$$\hat{U}(s) = -\text{Step}(s - d_n) e^{(2n+1)i\hat{\tau}_3 \varphi} e^{i\hat{\tau}_3 \varphi \text{Step}(s - d_n)},$$

и предполагая  $\kappa = \mu/(k_F R) \ll 1$  мы получаем:

$$\hat{U}(s) = -e^{2ni\hat{\tau}_3 \varphi} (\text{Step}(s - d_n) + i(\chi + 1)\hat{\tau}_3 \kappa).$$

Таким образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_n^* \hat{\tau}_1 [U(s) + e^{2in\varphi \hat{\tau}_3} \text{Step}(s - d_n)] \hat{S}_n ds = -(\chi + 1)\kappa \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_n^* e^{-2ni\hat{\tau}_3 \varphi} \hat{\tau}_2 \hat{S}_n ds = -2\kappa(\chi + 1). \quad (3.28)$$

Вычисление интегралов перекрытия дает:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_n^* \hat{\tau}_1 [\hat{U}(s) - e^{2in\hat{\tau}_3 \varphi} |D_v(s - s_n)| \text{Step}(s - s_n)] \hat{V}_n ds \approx 2ie^{-R}, \quad (3.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}_n^* \hat{\tau}_1 [\hat{U}(s) - e^{2i(n+1)\hat{\tau}_3 \varphi} |D_v(s - s_{n+1})| \text{Step}(s - s_{n+1})] \hat{V}_{n+1} ds \approx -2ie^{i\alpha} e^{-R}, \quad (3.30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_n^* \hat{\tau}_1 [U(s) + e^{2i(n+1)\hat{\tau}_3 \varphi} \text{Step}(s - d_n)] \hat{S}_n ds \approx -2ie^{-R} \quad (3.31)$$

где

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{V}_n^* \hat{\tau}_1 [U(s) + e^{2i(n-1)\hat{\tau}_3 \varphi} \text{Step}(s - d_{n-1})] \hat{S}_{n-1} ds \approx 2ie^{-i\alpha} e^{-R}. \quad (3.32)$$

Собирая вместе уравнения (3.26,3.27,3.28,3.29) мы получаем систему уравнений (3.18) для коэффициентов  $C_1, C_2$ .

## Публикации автора по теме диссертации.

- 1) Mel'nikov, A.S. *Intervortex quasiparticle tunneling and electronic structure of multi-vortex configurations in type-II superconductors*/ A. S. Mel'nikov and M. A. Silaev// Письма в ЖЭТФ.-2006.-Т. 83. Вып. 11-12, - С. 675-680.
- 2) Винокур, В. М. *Вихревые состояния в мезоскопических сверхпроводниках*/ В. М. Винокур, Н. Б. Копнин, А. С. Мельников, И. М. Нефедов, В. И. Позднякова, Д. А. Рыжов, М. А. Силаев, И. А. Шерешевский// Известия РАН. Серия физическая.- 2007. - Т. 71. Вып. 1.- С. 12-15.
- 3) Silaev, M. A. *Conductance enhancement due to the resonant tunneling into the subgap vortex core states in normal metal/superconductor ballistic junctions*/ M. A. Silaev// Physical Review B.- 2008.- Vol. 77.- P. 014504-1 - 014504-8.
- 4) Silaev, M. A. *Electronic structure of edge and vortex states in chiral mesoscopic superconductor*/ M.A. Silaev// Письма в ЖЭТФ.-2008.-Т. 87. Вып. 7-8, - С. 511-516.
- 5) Mel'nikov, A.S. *Multi-vortex configurations in mesoscopic superconductors: electronic structure and heat transport*/ A.S. Mel'nikov, D.A. Ryzhov, M.A. Silaev// cond-mat:0804.0685
- 6) Мельников, А.С. *Электронные состояния в вихревых кластерах в сверхпроводниках второго рода*/ А. С. Мельников, М.А. Силаев// Международная конференция "Фундаментальные проблемы высокотемпературной сверхпроводимости": сборник тезисов докладов, Звенигород, Россия, 2006.- С.365.
- 7) Мельников, А.С. *Электронные состояния в вихревых молекулах в сверхпроводниках второго рода*/ А.С. Мельников, М.А. Силаев // Нанозлектроника: Материалы международного симпозиума, Нижний Новгород, Россия, 2006. - Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2006. - С. 161.
- 8) Мельников, А.С. *Спектр вихревых электронных состояний в сверхпроводнике вблизи плоской границы*/ А.С. Мельников, М.А. Силаев// Нанозлектроника: Материалы международного симпозиума, Нижний Новгород, Россия, 2007. - Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2007. - С. 269.

- 9) Силаев, М.А. *Кондактанс баллистического контакта нормальный металл/сверхпроводник: резонансное андреевское туннелирование через вихри Абрикосова/ М.А. Силаев// Нано-физика и наноэлектроника: Материалы международного симпозиума, Нижний Новгород, Россия, 2008.- Нижний Новгород: ИФМ РАН, 2008. -С.126.*
- 10) Silaev, M. A. *Conductance enhancement due to the resonant tunneling into the subgap vortex core states in normal metal/superconductor ballistic junctions/ М. А. Silaev// International conference on theoretical physics "Dubna-Nano 2008": book of abstracts, Dubna, Russia, 2008.-Joint institute for nuclear re-search, 2008.-P. 122.*
- 11) Mel'nikov, A. S. *Multi-vortex configurations in mesoscopic superconductors: electronic structure and heat transport/ A. S. Mel'nikov, D. A. Ryzhov, and M. A. Silaev// International conference on theoretical physics "Dubna-Nano 2008": book of abstracts, Dubna, Russia, 2008.-Joint institute for nuclear research, 2008.-P. 110.*

## Литература

- [1] Шмидт В.В. *Введение в физику сверхпроводников*, Москва: МЦНМО, 2000.
- [2] Абрикосов А.А., ЖЭТФ, **32**, 1442, 1957.
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper and J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [4] Минеев В.П., Самохин К.В. *Введение в теорию необычной сверхпроводимости*, Москва: издательство МФТИ, 1998.
- [5] C. Caroli, P. G. de Gennes, J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- [6] R.G. Mints and A.L. Rachmanov, Solid St. Commun. **16**, 747, (1975).
- [7] F. Gygi and M. Schluter, Phys. Rev. B **43**, 7609 (1991).
- [8] N. В. Kopnin, *Theory of nonequilibrium superconductivity* (Cambridge University Press, 2001).
- [9] J. Bardeen, R. Kummel, A. E. Jacobs and L. Tewordt, Phys. Rev. **187**, 556 (1969).
- [10] E. Canel, Phys. Lett. **16**, 101 (1965).
- [11] M. Ichioka, N. Hayashi, and K. Machida, Phys. Rev. B **55**, 6565 (1996);
- [12] H. F. Hess, R. B. Robinson, and J. V. Waszczak, Phys. Rev. Lett. **64**, 2711 (1990);
- [13] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая физика: Часть 2*, Москва: Наука, 1978.
- [14] T. Maniv et al., Rev. Mod. Phys. **73**, 867 (2001).
- [15] T. Terashima et al., Phys. Rev. B **56**, 5120 (1997)
- [16] S. Behler et al., Phys. Rev. Lett. **72**, 1750 (1993)
- [17] Baelus B. J. *Dependence of the vortex configuration on the geometry of mesoscopic flat samples* / B. J. Baelus and F. M. Peeters // Phys. Rev. B – 2002. – Vol. 65. – P. 104515-1–104515-12.
- [18] Fink H. J. *Magnetic Irreversible Solution of the Ginzburg-Landau Equations* / H. J. Fink and A. G. Presson // Phys. Rev. – 1966. – Vol. 151. – P. 219–228.

- [19] Fink H. J. *Superheating of the Meissner State and the Giant Vortex State of a Cylinder of Finite Extent* / H. J. Fink and A. G. Presson // Phys. Rev. – 1968. – Vol. 168. – P. 399–402.
- [20] Geim A. K. *Phase transitions in individual sub-micrometre superconductors* / A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert // Nature – 1997. – Vol. 390. – P. 259–262.
- [21] Singha Deo P. *Magnetization of Mesoscopic Superconducting Disks* / P. Singha Deo, V. A. Schweigert, F. M. Peeters, A. K. Geim // Phys. Rev. Lett. – 1997. – Vol. 79. – P. 4653–4656.
- [22] Schweigert V. A. *Phase transitions in thin mesoscopic superconducting disks* / V. A. Schweigert and F. M. Peeters // Phys. Rev. B – 1998. – Vol. 57. – P. 13817–13832.
- [23] Schweigert V. A. *Vortex Phase Diagram for Mesoscopic Superconducting Disks* / V. A. Schweigert, F. M. Peeters, and P. Singha Deo // Phys. Rev. Lett. – 1998. – Vol. 81. – P. 2783–2786.
- [24] Geim A. K. *Fine Structure in Magnetization of Individual Fluxoid States* / A. K. Geim, S. V. Dubonos, J. J. Palacios, I. V. Grigorieva, M. Henini, J. J. Schermer // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 85. – P. 1528–1531.
- [25] Yampolskii S. V. *Vortex structure of thin mesoscopic disks with enhanced surface superconductivity* / S. V. Yampolskii and F. M. Peeters // Phys. Rev. B – 2000. – Vol. 62. – P. 9663–9674.
- [26] Hakim V. *Giant vortices in the Ginzburg-Landau description of superconductivity* / V. Hakim, A. Lemaitre, and K. Mallick // Phys. Rev. B – 2001. – Vol. 64. – P. 134512-1–134512-15.
- [27] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*, 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1996); P. G. de Gennes, *Superconducting of Metals and Alloys* (Benjamin, New York, 1966); A. A. Abrikosov, *Fundamentals of the Theory of Metals* (North- Holland, Amsterdam, 1986).
- [28] C. P. Bean and J. D. Livingston, Phys. Rev. Lett. **12**, 14 (1964).
- [29] Geim A. K. *Non-quantized penetration of magnetic field in the vortex state of superconductors: "fractional" and "negative" vortices* / A. K. Geim, S. V. Dubonos, I. V. Grigorieva, K. S. Novoselov, F. M. Peeters, V. A. Schweigert // Nature – 2000. – Vol. 407. – P. 55–57.
- [30] Palacios J. J. *Effective lowest Landau level treatment of demagnetization in superconducting mesoscopic disks* / J. J. Palacios, F. M. Peeters, and B. J. Baelus // Phys. Rev. B – 2001. – Vol. 64. – P. 134514-1–134514-6.
- [31] McLachlan D. S. *Quantum Oscillations in the Susceptibility of a Superconducting Tin Microcylinder* // Phys. Rev. Lett. – 1969. – Vol. 23. – P. 1434–1437.



- [32] Palacios J. J. *Vortex matter in superconducting mesoscopic disks: Structure, magnetization, and phase transitions* // Phys. Rev. B – 1998. – Vol. 58. – P. 5948–5951.
- [33] Palacios J. J. *Metastability and paramagnetism in superconducting mesoscopic disks* // Phys. Rev. Lett. – 2000. – Vol. 84. – P. 1796–1799.
- [34] Akkermans E. *Mesoscopic superconductors in the London limit: Equilibrium properties and metastability* / E. Akkermans, D. M. Gangardt, and K. Mallick // Phys. Rev. B – 2001. – Vol. 63. – P. 064523-1–064523-15.
- [35] Zharkov G. F. *Paramagnetic Meissner effect in superconductors from self-consistent solution of Ginzburg–Landau equations* // Phys. Rev. B – 2001. – Vol. 63. – P. 214502-1–214502-7.
- [36] A. I. Larkin and Yu. N. Ovchinnikov, Phys. Rev. B **57**, 5457 (1998).
- [37] S. Graser, C. Iniotakis, T. Dahm, N. Schopohl, Phys. Rev. Lett. **93**, 247001, (2004).
- [38] N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, V. I. Pozdnyakova, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. Lett. **95**, 197002 (2005).
- [39] N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov, V. I. Pozdnyakova, D. A. Ryzhov, I. A. Shereshevskii, and V. M. Vinokur, Phys. Rev. B **75**, 024514 (2007).
- [40] H. F. Hess, R. B. Robinson, R. C. Dynes, J. M. Valles, Jr., and J. V. Waszczak, Phys. Rev. Lett. **62**, 214 (1989); A. Kohen, Th. Proslie, T. Cren, Y. Noat, W. Sacks, H. Berger, and D. Roditchev, Phys. Rev. Lett. **97**, 027001 (2006).
- [41] J. Lowell and J. B. Sousa, J. Low Temp. Phys. **3**, 65 (1970); W. F. Vinen, E. M. Forgan, C. E. Gough, and M. J. Hood, Physica (Amsterdam) **55**, 94 (1971);
- [42] N. B. Kopnin, A. S. Mel'nikov and V. M. Vinokur, Phys. Rev. B **68**, 054528 (2003);
- [43] A. Kanda, B. J. Baelus, F. M. Peeters, K. Kadowaki, and Y. Ootuka, Phys. Rev. Lett. **93**, 257002 (2004); B. J. Baelus, A. Kanda, F. M. Peeters, Y. Ootuka and K. Kadowaki, Phys. Rev. B **71**, 140502(R) (2005); B. J. Baelus, A. Kanda, N. Shimizu, K. Tadano, Y. Ootuka, K. Kadowaki, and F. M. Peeters, Phys. Rev. B **73**, 024514 (2006).
- [44] A.A. Golubov and M. Yu. Kupriyanov, Fiz. Nizk. Temp. **12**, 373 (1986);
- [45] M.В. Фистуль, Письма в ЖЭТФ, **52**, 823, (1990); M.В. Фистуль, Письма в ЖЭТФ, **49**, 95, (1989); M.В. Фистуль, Письма в ЖЭТФ, **57**, 468, (1993);
- [46] G. E. Blonder, M. Tinkham and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. B **25**, 4515 (1982).
- [47] C. R. Hu, Phys. Rev. Lett. **72**, 1526 (1994).
- [48] J. Yang, C. R. Hu, Phys. Rev. B **50**, 16766.

- [49] Y. Tanaka, S. Kashiwaya, Phys. Rev. Lett. **74**, 3451 (1995); S. Kashiwaya, Y. Tanaka, M. Koyanagi, H. Takashima and K. Kajimura, Phys. Rev. B **51**, 1350 (1995).
- [50] F. Laube, G. Goll, H. V. Lohneysen, M. Fogelstrom, and F. Lichtenberg, Phys. Rev. Lett. **84**, 1595 (2000); Z.Q. Mao, K.D. Nelson, R. Jin, Y. Liu, and Y. Maeno, Phys. Rev. Lett. **87**, 037003 (2001).
- [51] S. Graser, C. Iniotakis, T. Dahm and N. Schopohl, Phys. Rev. Lett., **93**, 247001 (2004);
- [52] T. Yokoyama, C. Iniotakis, Y. Tanaka, and M. Sigrist, cond-mat:0710.4204v1 (2007);
- [53] G. E. Volovik, JETP Lett., **66**, 522 (1997);
- [54] M. Stone and R. Roy, Phys. Rev. B **69**, 184511 (2004);
- [55] Yu. S. Barash, A. M. Bobkov, and M. Fogelstrom, Phys. Rev. B **14**, 214503 (2001);
- [56] A.P. Mackenzie, Y. Maeno, Rev. Mod. Phys. **75**, 657 (2003);
- [57] G. Deutscher, Rev. Mod. Phys., **77**, 109 (2005);
- [58] A. P. Mackenzie and Y. Maeno, Rev. Mod. Phys. **75**, 657 (2003);
- [59] A. Leggett, Rev. Mod. Phys. **47**, 331 (1975); J.C. Wheatly, Rev. Mod. Phys. **47**, 415 (1975); В.П. Минеев, Усп. Физ. Наук **139**, 303 (1983);
- [60] G. E. Volovik, JETP Lett., **70**, 609 (1999);
- [61] Ya. V. Fominov and A. A. Golubov, Phys. Rev. B **70**, 212513 (2004);
- [62] A. S. Melnikov, M. A. Silaev, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **83**, 675 (2006) [JETP Lett. **83**, 578 (2006)].
- [63] G. E. Volovik, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **57**, 233 (1993) [JETP Lett. **57**, 244 (1993)].
- [64] А.С.Мельников, В.И.Позднякова, Д.А.Рыжов, И.А.Шерешевский, Нанофизика и нанoeлектроника, Нижний Новгород, сборник тезисов докладов.-2006.-С.159
- [65] A.S. Mel'nikov, D.A. Ryzhov, M.A. Silaev, cond-mat:0804.0685.
- [66] Y. Tanaka, A. Hasegawa, and H. Takayanagi, Solid St. Commun. **85**, 321 (1993); Y. Tanaka, S. Kashiwaya, and H. Takayanagi, Jpn. J. Appl. Phys. **34**, 4566 (1995); D. Rainer, J. A. Sauls, and D. Waxman, Phys. Rev. B **54**, 10094 (1996); S. M. M. Virtanen and M. M. Salomaa, Phys. Rev. B **60**, 14581 (1999); K. Tanaka, I. Robel, and B. Janko, Proc. Nat. Acad. Sci. (USA) **99**, 5233 (2002).
- [67] A. S. Mel'nikov and V. M. Vinokur, Nature, **415**, 60 (2002); Phys. Rev. B **65**, 224514 (2002).

- [68] S. Datta, *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, 1995).
- [69] L. G. C. Rego and G. Kirczenow, Phys. Rev. B **59**, 13080 (1999).
- [70] H. van Houten, L. W. Molenkamp, C. W. J. Beenakker, and C. T. Foxon, Semicond. Sci. Technol. **7**, B215 (1992); Chiatti, J. T. Nicholls, Y. Y. Proskuryakov, N. Lumpkin, I. Farrer, and D. A. Ritchie, Phys. Rev. Lett. **97**, 056601 (2006).
- [71] G.E. Volovik, *Localized fermions on quantized vortices in super uid  $^3\text{He-B}$* , J. Phys.: Condens. Matter **3**, 357 (1991).
- [72] L. D. Landau, E. M. Lifshitz "Quantum mechanics. Non-relativistic theory", Pergamon Press, 1991.
- [73] N.B. Kopnin and G.E. Volovik, Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **64**, 641 (1996) [JETP Lett. **64**, 690 (1996)]; N.B. Kopnin, Phys. Rev. B **57**, 11775 (1998).
- [74] E.O. Kane and E.I. Blount, in *Tunneling Phenomena in Solids*, Eds. E. Burstein and S. Lundqvist, New York, Plenum Press, 1969.
- [75] А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий *Квантовая электродинамика*, Москва: Наука, 1981.
- [76] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Modern Analysis* (Cambridge University Press, 1947), Chap. 16.
- [77] А.Ф. Андреев, ЖЭТФ **46**, 1823 (1964); **49**, 655 (1965).
- [78] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity* (McGraw-Hill, New York, 1996), 2nd ed., Chap. 10.
- [79] A. Anthore, H. Pothier, and D. Esteve, Phys. Rev. Lett. **90**, 127001 (2003).
- [80] B. Ricco and M. Ya.Azbel, Phys. Rev. B **29**, 1970 (1984)
- [81] N. B. Kopnin, A. S. Melnikov and V. M. Vinokur, Phys. Rev. B **71**, 052505 (2005);
- [82] P. Pincus, Phys. Rev. **158**, 346 (1967);
- [83] J. R. Clem, J. Low Temp. Phys. **18**, 427 (1975)
- [84] G. D. Mahan, *Many-particle physics* (Plenum Press, New York, 1993), 2nd ed., Chap. 9.
- [85] S. Graser, C. Iniotakis, T. Dahm and N. Schopohl, Phys. Rev. Lett. **93**, 247001 (2004);
- [86] N. Schopohl and K. Maki, Phys. Rev. B **52**, 490 (1995);
- [87] P. Miranovic, M. Ichioka and K. Machida, Phys. Rev. B **70**, 104510 (2004);
- [88] C.W.J. Beenakker, Rev. Mod. Phys **69**, 731 (1997);
- [89] B. J. van Wees, P. de Vries, P. Magnee, and T. M. Klapwijk, Phys. Rev. Lett. **69**, 510 (1992);

- [90] A. Kastalsky, A. W. Kleinsasser, L. H. Greene, R. Bhat, F. P. Milliken, and J. P. Harbison, Phys. Rev. Lett. **67**, 3026 (1991)
- [91] A. I. Buzdin, J. P. Brison, Phys. Lett. A **196**, 267 (1994).