

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ
ИНСТИТУТ СПЕКТРОСКОПИИ РАН

На правах рукописи

Соколик Алексей Алексеевич

Коллективные электронные явления в графене

Специальность 01.04.02 — «Теоретическая физика»

диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
зав. лаб. спектроскопии наноструктур,
Ю.Е. Лозовик

Оглавление

Введение	4
Графен и его особенности	4
Экспериментальное изучение графена	6
Особенности коллективных явлений в графене	9
Краткий обзор содержания глав	12
1 Магнитоэкситоны в графене	18
1.1 Введение	18
1.2 Двухчастичная задача о магнитоэкситоне	21
1.2.1 Состояния электрона и дырки	21
1.2.2 Выделение движения центра масс	23
1.2.3 Дисперсионные зависимости	26
1.3 Многочастичная формулировка задачи	34
1.3.1 Функции Грина	34
1.3.2 Уравнение для электрон-дырочной вершинной части	39
1.3.3 Разделение каналов уравнения для вершины	44
1.3.4 Энергии рекомбинационных фотонов	48
1.4 Выводы	51
2 Электрон-дырочное спаривание в бислое графена	53
2.1 Введение	53
2.2 Режим слабой связи	56
2.2.1 Модель спаривания	56
2.2.2 Управляющие параметры системы	59
2.2.3 Результаты и обсуждение	61

Оглавление	3
2.3 Отсутствие кроссовера БКШ-БЭК	64
2.4 Многозонное спаривание при сильной связи	71
2.4.1 Введение	71
2.4.2 Описание основного состояния	73
2.4.3 Величина щели при нулевой температуре	78
2.4.4 Неустойчивость нормального состояния	88
2.4.5 Переход Костерлица-Таулеса	93
2.5 Учет динамических эффектов	95
2.6 Выводы	104
3 Фононный механизм сверхпроводимости в графене	108
3.1 Многозонные уравнения Элиашберга	108
3.1.1 Введение	108
3.1.2 Уравнения Элиашберга для графена	110
3.1.3 Случай сильного допирования	112
3.1.4 Окрестность квантовой критической точки	116
3.2 Система взаимодействующих электронов и фононов в графене	119
3.2.1 Электроны	119
3.2.2 Плоские фононы	122
3.2.3 Изгибные фононы	125
3.3 Описание электронного спаривания	129
3.3.1 Уравнения Горькова	129
3.3.2 Структура параметра порядка	132
3.3.3 Спаривание под действием плоских фононов	134
3.3.4 Спаривание под действием изгибных фононов	138
3.3.5 Симметрия параметра порядка с учетом спина электронов	142
3.4 Выводы	144
Заключение	148
Основные результаты	148
Значение полученных результатов	149
Благодарности	150
Литература	151

Введение

Графен и его особенности

Графен представляет собой двумерную структуру, составленную из атомов углерода, которые расположены в узлах кристаллической решетки типа «пчелиные соты» и соединены друг с другом ковалентными связями (Рис. 1(а)). Наиболее распространенная форма углерода — графит — может рассматриваться как стопка листов графена, относительно слабо связанных между собой силами Ван-дер-Ваальса. Широко известные углеродные наноструктуры — нанотрубки и фуллерены [1, 2] — можно рассматривать как свернутый в трубку лист графена или, соответственно, как замощение сферы решеткой графена. Таким образом, графен, как ключевая квазидвумерная углеродная наноструктура, с точки зрения классификации является основой трехмерного графита, квазиодномерных нанотрубок и квазиульмерных фуллеренов.

Изучение свойств графита и углеродных наноструктур всегда отправлялось от рассмотрения их элементарного блока — изолированного листа графена. Каждый атом углерода в графене окружен тремя ближайшими соседями и обладает четырьмя валентными электронами, три из которых образуют sp^2 -гибридизованные орбитали, расположенные в одной плоскости под углами 120° и формирующие ковалентные связи с соседними атомами (Рис. 1(б)). Четвертый электрон, представленный ориентированной перпендикулярно этой плоскости $2p_z$ -орбиталью, отвечает за низкоэнергетические электронные свойства графена. Квазиимпульс электрона, находящегося в поле кристаллической решетки графена, заключен в пределах первой зоны Бриллюэна, которая имеет форму шестиугольника.

Первым к теоретическому изучению электронных свойств графена и графита обратился П.Р. Уоллес в 1947 г. [3]. В простом приближении сильной связи с учетом взаимодействия ближайших соседей он показал, что углы первой зоны Бриллюэна графена являются точками, в которых происходит касание валентной зоны и зоны проводимости

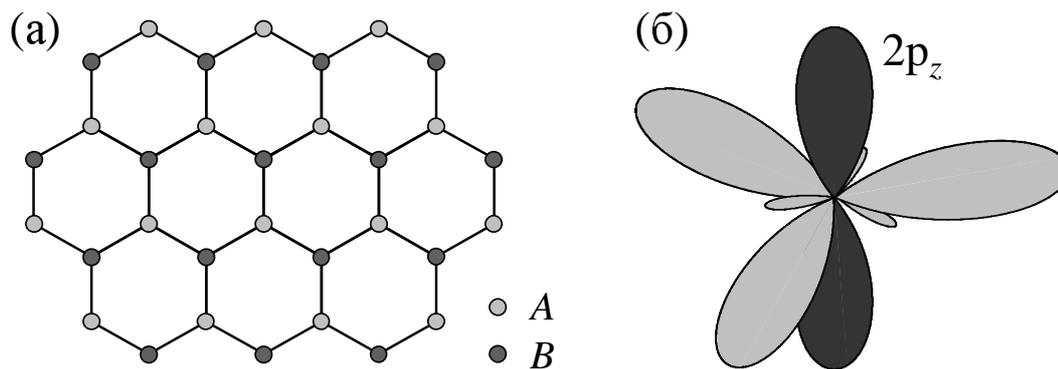


Рис. 1. (а) Кристаллическая решетка графена типа «пчелиные соты» как совокупность треугольных подрешеток A и B . (б) Три sp^2 -гибридизованные орбитали атома углерода, формирующие направленные под углами 120° ковалентные связи с соседними атомами, и перпендикулярная им $2p_z$ -орбиталь.

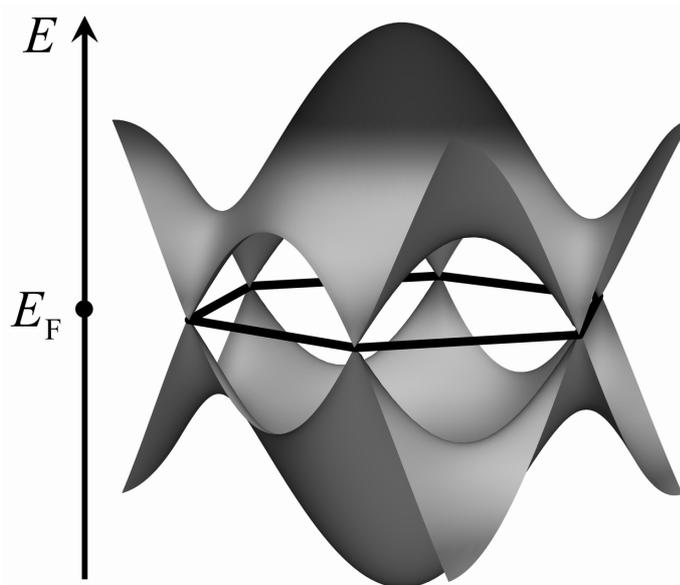


Рис. 2. Зонная структура графена: валентная зона и зона проводимости касаются в углах первой зоны Бриллюэна, имеющей форму шестиугольника. Уровень Ферми E_F химически чистого графена находится в точках касания зон.

$2p_z$ -электрона и вблизи которых дисперсия электронов является линейной (Рис. 2). Уровень Ферми химически чистого графена находится в точке касания зон, в связи с чем графен может быть назван квазидвумерным полупроводником с нулевой щелью.

Поскольку кристаллическая решетка графена не является решеткой Бравэ, но может рассматриваться как совокупность двух взаимопроникающих треугольных подрешеток

(см. Рис. 1(а)), то эффективная волновая функция электрона в графене может быть представлена двумя огибающими блоховских волн, построенных на этих подрешетках. Низкоэнергетическая динамика $2p_z$ -электронов определяется их поведением вблизи двух неэквивалентных точек касания зон в импульсном пространстве \mathbf{K} и \mathbf{K}' (в окрестности *дираковских точек*, или в двух *долинах* зоны проводимости), входящих в первую зону Бриллюэна [4]. Особенность зонной структуры графена, кардинально отличающая его от обычных металлов и полупроводников, заключается в том, что эффективное уравнение для огибающих вблизи \mathbf{K} и \mathbf{K}' имеет вид двумерного аналога релятивистского уравнения Дирака-Вейля для частиц с нулевой массой [5], в котором роль скорости света играет фермиевская скорость $v_F \approx 10^6$ м/с [6]:

$$v_F(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = E\psi,$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, ψ — двухкомпонентная эффективная волновая функция электрона.

Было показано, что вышеописанное поведение электронов вытекает из характера группы симметрии кристаллической решетки графена вне зависимости от используемого приближения [4]. Впоследствии не только развивалась и уточнялась зонная теория графена и графита [7, 8], но и, в связи с экспериментальным изучением интеркалированного графита [9], появился интерес к некоторым многочастичным аспектам электронных свойств графена (например, были рассмотрены экранирование примесей [10], свойства плазмонов [11], времена жизни квазичастиц [12]).

Экспериментальное изучение графена

Слабое сцепление и относительная независимость слоев графена в кристалле графита уже давно наталкивали исследователей на мысль о том, что графен может быть получен как изолированный объект, двумерная мембрана толщиной в один атом [13]. Но, помимо связанных с этим технических сложностей, существовали сомнения в том, что графен будет механически стабильным. Из аргументов Ландау и Пайерлса [14] следовало, что в чисто двумерной системе не может быть дальнего кристаллического порядка вследствие логарифмической расходимости длинноволновых флуктуаций двумерных смещений атомов из узлов решетки (хотя после классических работ Березинского [15], Костерлица и Таулесса [16] стало ясно, что дальний кристаллический порядок в двумерной системе отсутствует,

однако в низкотемпературной фазе существует квазидальний степенной порядок, сохраняющий основное свойство кристалла — наличие длинноволнового модуля сдвига [17]). Кроме того, существовало сомнение в том, устойчив ли графен как двумерная мембрана, помещенная в трехмерное пространство — иными словами, не приводят ли флуктуации смещений атомов *перпендикулярно* листу к превращению его в смятый комок.

Новая эпоха для графена началась в 2004 году, когда он был получен группой К.С. Новоселова и А.К. Гейма при помощи метода микромеханического расщепления графита [18, 19]. В этом методе поверхность графита плотно трется о ровную поверхность кремния, покрытого слоем оксида, и оставляет множество чешуек различной толщины. На поверхности двуокиси кремния фрагменты даже атомарной толщины можно было увидеть в оптический микроскоп. В первых экспериментах были получены образцы однослойного, а также двух- и многослойного графена и исследованы их транспортные свойства [18, 20]. Графен оказался устойчивым в воздухе при комнатной температуре. Находясь на подложке, он механически стабилен, но на нем образуются небольшие локальные искривления нанометровых размеров — «рипплы» [21]. Оказалось, что ангармоническая связь между колебаниями атомов в плоскости графена и изгибными колебаниями смягчает дисперсию последних и, тем самым, в каком-то смысле стабилизирует графеновую мембрану [22].

Первые же экспериментальные исследования графена дали подтверждение того, что его электроны действительно ведут себя как безмассовые дираковские частицы [20]. Линейность дисперсии электронов подтвердилась в результате изучения осцилляций Шубникова-де Гааза, однако гораздо более яркой особенностью графена явился аномальный целочисленный квантовый эффект Холла. Энергии релятивистских уровней Ландау графена в сильном магнитном поле H равны $E_{\pm n} = \pm v_F \sqrt{2neH/c}$ (см. напр. [23, 24, 25, 26]). Из-за наличия уровня нулевой энергии $n = 0$, находящегося ровно в дираковской точке, удельная холловская проводимость листа графена в сильном магнитном поле принимает полуцелые значения в единицах кванта удельной проводимости [24, 25, 26] $\sigma_{xy} = (4e^2/h)(n + 1/2)$, где n — целое число, а множитель 4 отвечает вырождению по спину и долинам. Такая последовательность холловских плато, обнаруженная в эксперименте [20], явилась убедительным подтверждением «ультрарелятивистского» поведения электронов в графене.

При изучении графена очень удобной оказалась возможность управления концентрацией носителей заряда при помощи электрического поля [18]. Графен, полученный механическим расщеплением графита, находится на кремниевой подложке, покрытой слоем

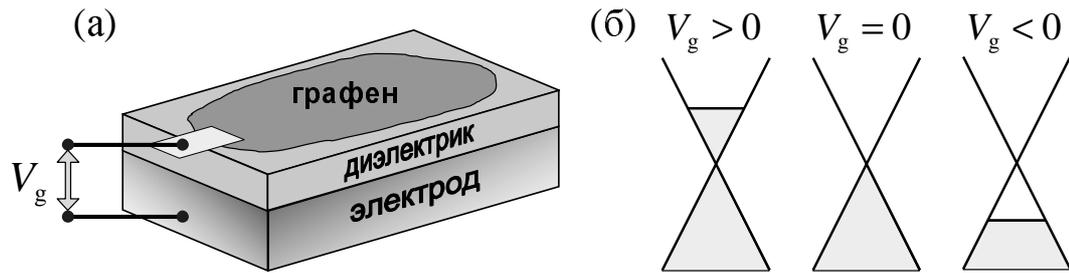


Рис. 3. (а) Схема управления концентрацией носителей в графене посредством электрического допирования. (б) Допирование графена электронами ($V_g > 0$) или дырками ($V_g < 0$) позволяет превращать его в аналог электронного или дырочного полупроводника.

SiO_2 толщиной 300 нм. Прикладывая затворное напряжение между листом графена и подложкой, можно создать плоский конденсатор (Рис. 3(а)), причем поверхностная плотность заряда на одной из его обкладок — листе графена — будет пропорциональна затворному напряжению. В недопированном химически чистом графене химический потенциал находится в дираковской точке, а прикладывание напряжения различной полярности позволяет сдвигать его в зону проводимости или валентную зону, тем самым допируя графен электронами или дырками (Рис. 3(б)). Концентрация носителей заряда может регулироваться таким способом от нуля до максимальных значений порядка 10^{13} см^{-2} , ограниченных электрическим пробоем слоя SiO_2 .

Изготовление графена микромеханическим методом оказалось довольно трудоемким, поэтому большую популярность в последнее время приобретает альтернативный способ получения графена — эпитаксиальное выращивание [27], при котором слои графена образуются на поверхности кристалла SiC , нагреваемого до высокой температуры в вакууме.

С точки зрения приложений графен перспективен в первую очередь как материал для создания принципиально новых нанoeлектронных, наномеханических и нанохимических устройств. Будучи системой атомарной толщины, графен обеспечивает абсолютный предел миниатюризации, по крайней мере в одном измерении, и хорошо подходит к современным планарным технологиям создания интегральных схем. При помощи нанолитографии из графена можно вырезать куски произвольной формы и устанавливать на них контактные и бесконтактные электроды [28]. Подвижность носителей заряда в чистых образцах графена достигает рекордных значений (см. напр. [29, 30]) и почти не зависит от их концентрации, что также является очень ценным для возможных приложений (в частности, для баллистической электроники, принципиально отличающейся от традиционной транзи-

сторной). Отметим также, что щель между уровнями Ландау графена в типичных лабораторных магнитных полях 10 – 20 Тл достигает тысяч градусов, а это позволяет наблюдать квантовый эффект Холла и использовать его для создания эталонов сопротивления даже при комнатной температуре [31].

Интерес к исследованию графена с фундаментальной точки зрения вызван возможностью изучать в такой системе поведение безмассовых заряженных частиц, и особенно их коллективное поведение, в двумерной твердотельной системе («на лабораторном столе») [32]. Эффективно ультрарелятивистская динамика электронов в графене приводит к ряду явлений, не имеющих аналогов в других физических системах (например, полуполному квантовому эффекту Холла, абсолютной прозрачности потенциальных барьеров при нормальном падении, слабой антилокализации и т.п.) и позволяют надеяться на возможность достижения новых режимов поведения квантовых многочастичных систем в наноструктурах на его основе (см. обзорные статьи [33, 34, 35, 36]). Ряд электронных явлений, возможных в графене, имеет аналоги в релятивистской физике элементарных частиц и кварковой материи. Таким образом, можно сказать, что исследования графена находятся на стыке физики конденсированных сред и физики высоких энергий.

Особенности коллективных явлений в графене

Коллективными электронными явлениями называют явления, в которых согласованно участвует макроскопическая доля электронов и которые несводимы к поведению отдельных частиц. В качестве примеров таких явлений можно назвать сверхпроводимость, образование экситонного диэлектрика, бозе-конденсацию экситонов и магнитоэкситонов, плазменные колебания, вигнеровскую кристаллизацию, ферромагнетизм. Особенности коллективных электронных явлений в графене непосредственно вытекают из особенностей эффективно релятивистской динамики электронов, таких как: а) двумерность системы; б) линейная дисперсия энергии электронов; в) близкое расположение и взаимное влияние валентной зоны и зоны проводимости; г) спинорный характер эффективной волновой функции; д) заселение электронами двух долин в окрестностях дираковских точек.

Двумерность графена делает некоторые свойства электронного газа в нем похожими на свойства квазидвумерных электронных систем на основе полупроводниковых квантовых ям [37]. Проявлением двумерности является, в частности, то, что фазовые переходы

графена в сверхпроводящее и сверхтекучее состояния (в том числе, рассмотренные в данной диссертационной работе) будут иметь характер перехода Костерлица-Таулеса [16, 17].

Линейная дисперсия электронов приводит к ряду последствий, самым ярким из которых является маргинальность кулоновского взаимодействия. Безразмерный параметр r_s , определяющий отношение характерных величин кулоновской и кинетической энергий квантовой системы, в случае графена равен

$$r_s = \frac{e^2}{\epsilon \hbar v_F} \approx \frac{2.19}{\epsilon},$$

где ϵ — диэлектрическая проницаемость окружающей графен среды. Как видно, этот параметр не зависит от концентрации электронного газа, и может быть изменен только в довольно ограниченных пределах помещением графена в различные среды (максимальное значение r_s составляет около 2.19, если графен подвешен в вакууме). Это резко контрастирует с обычным (трехмерным или квазидвумерным) электронным газом, в котором r_s растет с уменьшением концентрации [38, стр. 380]. Недостижимость больших значений r_s в графене приводит, в частности, к невозможности существования сильнокоррелированных фаз, таких как вигнеровский кристалл [39].

Похожим проявлением линейной дисперсии является то, что отношение характерного расстояния между уровнями Ландау в графене, помещенном во внешнее магнитное поле, к характерной величине кулоновского взаимодействия между электронами не зависит от напряженности поля. Магнитное поле напряженностью H задает «магнитную длину» $l_H = \sqrt{c/eH}$ — параметр размерности длины, соответствующий радиусу циклотронных орбит электронов. Расстояние между уровнями Ландау имеет порядок v_F/l_H [24, 25], а характерная величина кулоновской энергии есть $e^2/\epsilon l_H$. Отношение этих величин не зависит от H и сводится к параметру r_s , который, как было сказано, может регулироваться только путем изменения ϵ . В обычном квазидвумерном электронном газе ситуация иная: в сильных магнитных полях расстояние между уровнями Ландау всегда доминирует над кулоновской энергией.

Аномальные электронные свойства недопированного графена, в котором химический потенциал, отсчитываемый от дираковской точки, равен нулю (Рис. 3(б)), также являются следствием линейной дисперсии. Из-за нее плотность состояний электронов ведет себя как $\mathcal{N} \propto |E|$ и обращается в нуль в дираковской точке $E = 0$, что приводит, в частности, к отсутствию существенного экранирования кулоновского взаимодействия на больших расстояниях в недопированном графене; экранирование при этом является нелинейным

[10, 40]. В недопированном графене отсутствуют характерные параметры размерности длины (за исключением периода решетки, играющего роль только в высокоэнергетической динамике), поэтому сила кулоновского взаимодействия, не меняясь при масштабных преобразованиях, является маргинальной переменной [41, 42]. Более того, в недопированном графене отсутствуют хорошо определенные квазичастицы, поскольку скорости распада квазичастиц растут линейно с ростом их энергии [43].

Близкое расположение валентной зоны и зоны проводимости проявляется в свойствах квазичастичных возбуждений электронного газа в графене. В частности, обменное кулоновское взаимодействие приводит к логарифмической перенормировке скорости Ферми в области малых импульсов [41], а межзонные электронные переходы открывают соответствующий канал затухания плазменных колебаний [12, 44, 45].

Кроме того, отсутствие щели между валентной зоной и зоной проводимости наводит многих исследователей на мысль о возможности перестройки основного состояния графена в результате спонтанного образования конденсата электрон-дырочных пар, сходной с образованием экситонного диэлектрика [46, 47, 48]. В [49] и множестве последующих работ было показано, что недопированный графен весьма близок к такому переходу. Недавние результаты численного моделирования (см., напр., [50, 51]) указывают на то, что переход в состояние экситонного диэлектрика, по-видимому, может произойти в графене, помещенном в вакуум.

Спинорный характер эффективной волновой функции неразрывно связан с сосуществованием валентной зоны и зоны проводимости, поскольку состояния электрона в этих зонах отличаются только различными соотношениями амплитуд спинорных компонент [3, 36]. Следствием спинорного характера волновой функции является наличие у электронов фазы Берри, равной π : при адиабатическом обходе электрона по замкнутому контуру в импульсном пространстве вокруг любой из дираковских точек его волновая функция меняет знак [52].

Заселение электронами двух долин является аналогом киральности безмассовых частиц [53] — состояниям электронов в двух долинах соответствуют значения киральности $+1$ и -1 . Дополнительная долинная степень свободы электронов может проявляться в ряде эффектов [54]; в контексте данной работы наибольший интерес среди них представляет возможность образования параметров порядка с различными долинными структурами при спаривании в графене [55].

Краткий обзор содержания глав

Данная диссертационная работа посвящена теоретическому исследованию ряда коллективных электронных явлений в графене. При этом особое внимание уделяется их специфическим чертам, связанным с эффективно ультрарелятивистской динамикой электронов. Все особенности поведения электронов, перечисленные в предыдущем разделе, находят свое отражение в полученных в работе результатах, опубликованных в статьях [36, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63].

Большое внимание в диссертационной работе уделено коллективным явлениям в *бислое графена* — системе, состоящей из двух параллельных слоев графена, разделенных диэлектриком (следует отличать его от *двухслойного графена* [64], зонная структура которого существенно модифицируется за счет межслойных электронных перескоков). Пространственное разделение слоев графена допускает существование долгоживущих пар, состоящих из электронов и дырок, находящихся в разных слоях. Благодаря кулоновскому притяжению электронов и дырок в такой системе можно ожидать появления различных сильно коррелированных фаз. Бислой графена может оказаться более подходящей системой для изучения коллективных явлений, чем связанные полупроводниковые квантовые ямы, благодаря атомарной толщине слоев графена, позволяющей сблизить электроны и дырки на очень малые расстояния. В образцах бислоя графена, которые были изготовлены и изучены в недавних экспериментах [65, 66], расстояние между слоями составляет несколько ангстрем.

В первой главе рассматриваются свойства магнитоэкситонов в графене и пространственно непрямых магнитоэкситонов в бислое графена в сильном магнитном поле. *Магнитоэкситон* — это связанное состояние электрона и дырки в магнитном поле, которое может быть описано при помощи выделения *магнитного импульса* электрон-дырочной пары, играющего в магнитном поле роль импульса центра масс [67, 68]. При этом связь между движением магнитоэкситона как целого и его внутренней структурой проявляется в существовании *дисперсионной зависимости* энергии магнитоэкситона от его магнитного импульса. Магнитоэкситоны в полупроводниковых системах [69, 70] и бислое графена [71] могут образовывать разреженный слабонеидеальный бозе-газ, в котором при низких температурах происходят бозе-конденсация и переход в сверхтекучее состояние.

Как известно, дисперсионные зависимости магнитоэкситонов и магнитоплазмонов могут быть найдены из полюсов электрон-дырочной вершинной части, вычисляемой в обоб-

щенном приближении хаотических фаз [72]. В диссертации этот подход распространен на случай графена, где функции Грина электронов и вершинные части являются многокомпонентными, а также на случай бислоя графена. Показано, что при целочисленном заполнении уровней Ландау уравнение для вершинной части в бислое графена разделяются на три канала, соответствующие: 1) прямым магнитоэкситонам, электрон и дырка которых находятся в одном слое графена, 2) пространственно непрямым магнитоэкситонам, электрон и дырка которых расположены в разных слоях, 3) магнитоплазмонам, охватывающим сразу оба слоя.

Хотя, как говорилось выше, отношение характерной величины кулоновской энергии к расстоянию между уровнями Ландау в графене не зависит от напряженности магнитного поля и может быть довольно большим, при рассмотрении пространственно непрямого магнитоэкситона ситуация иная. Кулоновское взаимодействие составляющих его электрона и дырки является межслойным, и его характерная величина есть $e^2/\epsilon D$, где D — расстояние между слоями графена. В сильном магнитном поле, когда $l_H \ll D$, взаимодействие будет являться слабым возмущением по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау. На основе этого соображения проведены дальнейшие расчеты.

В симметричной калибровке векторного потенциала найдены многокомпонентные волновые функции магнитоэкситонов, дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов и параметры их разложения при малых импульсах — энергии связи и зависящие от магнитного поля эффективные массы. При этом кулоновское взаимодействие было учтено в первом порядке теории возмущений. В приближении Хартри-Фока вычислены энергии фотонов, испускаемых при рекомбинации пространственно не прямых магнитоэкситонов, которые складываются из прямых и обменных собственных энергий электрона и дырки, и энергии их взаимодействия. При этом обменное кулоновское взаимодействие электрона и дырки с заполненной валентной зоной дает существенный вклад в энергию магнитоэкситона. Соответствующие результаты опубликованы в статьях [36, 57, 58].

Во второй главе представлены результаты исследования электрон-дырочного спаривания в бислое графена в режиме слабой и сильной связи. При помощи затворных электродов можно независимо управлять типом и концентрацией носителей в каждом из двух слоев графена, и если установить в них равные концентрации электронов и дырок, то из-за совпадения их поверхностей Ферми и кулоновского притяжения между ни-

ми система окажется неустойчивой по отношению к спариванию электронов и дырок с противоположными импульсами (аналоги — спаривание электронов в сверхпроводниках [73] и электронов с дырками в экситонном диэлектрике [46, 47, 48] и связанных полупроводниковых квантовых ямах [74, 75]). Такое спаривание сопровождается появлением параметра порядка в системе и щели в спектре ее одночастичных возбуждений, а также сверхтекучими свойствами, связанными с появлением незатухающих токов, движущихся в противоположных направлениях по разным листам графена, и эффектами, подобными эффекту Джозефсона.

В диссертационной работе определена зависимость от параметров системы безразмерной величины, характеризующей относительную силу экранированного электрон-дырочного притяжения — *силу связи*. Показано, что при достаточно малых межслойных расстояниях сила связи не зависит от концентрации электронов и дырок и определяется параметром r_s , который зависит только от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Это резко контрастирует с экситонным спариванием в связанных квантовых ямах, при котором сила связи возрастает по мере снижения концентрации [74].

Показано, что в режиме слабой связи основное состояние электрон-дырочного бислоя графена практически аналогично обычному состоянию куперовского спаривания, описываемому теорией Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) [73] (небольшие отличия возникают из-за киральности электронов, приводящей к эффективному ослаблению взаимодействия спаривания). Для этого случая получены выражения для щели при нулевой температуре и оценено влияние примесей и беспорядка. При увеличении силы связи в обычных системах спаривающихся фермионов происходит плавный переход от состояния типа БКШ к бозе-эйнштейновской конденсации (БЭК) в газе локальных пар, носящий название *кроссовера БКШ-БЭК* [76]. В графене же, как показано в работе, невозможно образование локализованных пар, что приводит к отсутствию кроссовера БКШ-БЭК. Вместо него по мере увеличения силы связи состояние типа БКШ переходит в *ультрарелятивистское состояние типа БКШ*, при котором существуют парные корреляции электронов и дырок с противоположными импульсами, но вместе с тем существенную роль играет эффективно ультрарелятивистская динамика спаривающихся частиц. В то время как при слабой связи спаривание охватывает лишь небольшие окрестности поверхностей Ферми электронов и дырок, находящиеся в зоне проводимости электронного слоя и валентной зоне дырочного слоя, при сильной связи спаривание захватывает и удаленные от поверх-

ностей Ферми зоны: валентную зону электронного слоя и зону проводимости дырочного слоя. Похожие состояния могут возникать при «цветной» сверхпроводимости в плотной кварковой материи [77].

При помощи сформулированной в работе многозонной диаграммной техники рассмотрено ультрарелятивистское БКШ-состояние в бислое графена, описываемое системой уравнений самосогласования для двух щелей: в зоне проводимости и в валентной зоне. Путем решения этих уравнений получены оценки величины щели в спектре возбуждений системы и критической температуры перехода в сверхтекучее состояние в режиме сильной связи. Показано, что многозонный характер спаривания существенно влияет на величину щели, которая при большой ширине области спаривания в импульсном пространстве может на несколько порядков превышать оценки, даваемые однозонной теорией БКШ.

Спаривание в бислое графена в режиме сильной связи рассмотрено также с учетом динамических эффектов в духе подхода Элиашберга [78, 79], т.е. с учетом частотной зависимости собственно-энергетических частей и динамически экранированного потенциала электрон-дырочного взаимодействия. Последнее в таком подходе может быть разделено на прямое кулоновское притяжение и серьезно конкурирующий с ним отталкивающий вклад виртуальных плазмонов и одночастичных возбуждений. Оценки величины щели, полученные при таком рассмотрении, составляют несколько градусов Кельвина при максимальном значении r_s . Также отмечены необычные сверхтекучие свойства системы при ультрарелятивистском спаривании, в частности, диссоциация пар противоположно ориентированных четверть-вихрей в параметре порядка вида $U(1) \times SU(4)$ при фазовом переходе Кострелица-Таулеса в сверхтекучее состояние. Соответствующие результаты опубликованы в статьях [36, 56, 57, 58, 59, 60, 63].

В третьей главе рассмотрено сверхпроводящее спаривание электронов в графене, вызванное обменом фононами. В качестве возможных источников собственной сверхпроводимости графена различными авторами были предложены фононный механизм [80, 81], плазмонный механизм в графене, покрытом слоем металла [80], электронные корреляции [82, 83] и существенно анизотропное электрон-электронное взаимодействие вблизи сингулярностей Ван-Хова электронной подсистемы [84]. В данной работе в качестве возможных источников эффективного межэлектронного притяжения рассмотрены *плоские* фононы, соответствующие колебаниям атомов в плоскости графена, и *изгибные* фононы, соответствующие изгибу листа графена (если графен свободно подвешен). Среди плоских

фононов наиболее сильное взаимодействие с электронами демонстрируют 4 оптические моды, наблюдающиеся в спектрах комбинационного рассеяния [85, 86]. Взаимодействие электронов с изгибными фононами, представленными двумя модами, имеет необычный вид — оно квадратично по операторам фононов [87, 88, 81].

Спаривание электронов в графене посредством вышеперечисленных 6 фононных мод описано в диссертационной работе при помощи диаграммной техники, имеющей дело с матричными функциями Грина, строки и столбцы которых соответствуют состояниям электронов на двух подрешетках кристаллической решетки графена и в двух долинах \mathbf{K} и \mathbf{K}' . Выражения для гамильтониана электрон-фононного взаимодействия в графене отражают тот факт, что волновые функции электронов распределены по двум подрешеткам, в то время как разные фононные моды соответствуют различным совместным и относительным колебаниям двух подрешеток. Как следствие, аппарат матричных функций Грина необходим для корректного описания электрон-фононного взаимодействия в графене, разрешенного по подрешеткам и долинам электронов.

Полученные в работе матричные уравнения Горькова, описывающие спаривание в графене, допускают, в принципе, различные виды параметра порядка. В данном случае исследовалось такое спаривание, которое диагонально по зонам (и, как в случае электрон-дырочного спаривания в бислое графена, характеризуется двумя щелями — в зоне проводимости и в валентной зоне), но при этом может иметь произвольную структуру вида $SU(2)$ в пространстве долин \mathbf{K} и \mathbf{K}' . Решение уравнений Горькова и усреднение по импульсам приводит к системе двух уравнений самосогласования для щелей, похожих на уравнения Элиашберга [78, 79]. Были найдены аналитические решения такой системы в приближении эйнштейновского спектра фононов как в пределе сильного допирования графена, когда спаривание, фактически, является однозонным, так и при малом допировании — в квантовой критической точке недопированного графена по константе связи и в ее окрестности.

Важным результатом является то, что вклад каждой фононной моды в эффективное взаимодействие, входящее в уравнения Элиашберга, может быть как притягивающим, так и отталкивающим — в зависимости от характера симметрии фононной моды и от структуры параметра порядка в пространстве долин. При образования конденсата куперовских пар структура параметра порядка будет подстраиваться таким образом, чтобы обеспечить наибольшее значение суммарной по всем модам эффективной константы связи. Оценки

константы связи, отвечающей плоским оптическим фононам, показывают, что при сильном химическом допировании графена температура перехода в сверхпроводящее состояние может достигать долей градуса Кельвина.

Квадратичное взаимодействие электронов в графене с изгибными фононами было подробно исследовано в диссертационной работе. Были приняты во внимание два механизма электрон-фононного взаимодействия: 1) через деформационный потенциал, 2) посредством растяжения валентных связей, приводящего к модуляции интегралов перескока электронов между соседними атомами. Квадратичность электрон-фононного взаимодействия ведет к тому, что при вычислении соответствующего эффективного взаимодействия, входящего в многозонные уравнения Элиашберга, необходимо проводить интегрирование внутри фононной петли по частотам и по импульсам в пределах всей первой зоны Бриллюэна. Вклад изгибных фононов в эффективное электрон-электронное взаимодействие также зависит от долиной структуры параметра порядка, однако получающаяся константа связи слишком мала, чтобы обеспечить возможность спаривания в рассмотренных условиях.

Обнаружено также, что сверхпроводящий параметр порядка в графене при диагональном по зонам спаривании обладает необычными свойствами симметрии: куперовские пары должны обладать совместной орбитально-спиново-долиной *симметрией* (в противоположность орбитально-спиновой *антисимметрии* при обычной сверхпроводимости). Этот факт связан с существованием «скрытой» антисимметрии параметра порядка по подрешеткам. Следовательно, если спаривание антисимметрично по долинам, то параметр порядка должен обладать совместной орбитально-спиновой *антисимметрией*, как и при обычной сверхпроводимости, однако, при симметричном по долинам спаривании параметр порядка должен обладать орбитально-спиновой *антисимметрией*; в таком случае возможно, например, *s*-волновое триплетное спаривание. Соответствующие результаты опубликованы в статьях [61, 62, 63].

Все выкладки в диссертационной работе представлены в гауссовой системе единиц и в соглашении $\hbar = 1$.

Глава 1

Магнитоэкситоны в графене

1.1 Введение

Двумерные электронные системы в сильных магнитных полях являются объектом интенсивных исследований с тех пор, как в таких системах были обнаружены целочисленный и дробный квантовые эффекты Холла [89]. До недавних пор такого рода системы были представлены, в основном, гетероструктурами GaAs – Al_xGa_{1-x}As, в которых движение электрона в пределах каждой подзоны носит квазидвумерный характер [37]. Если же система помещена во внешнее перпендикулярное ее плоскости магнитное поле, то движение электронов по циклотронным орбитам приобретает эффективно квазиульмерный характер, в результате чего их энергия квантуется. Так, электроны с эффективной массой m в магнитном поле напряженностью H заселяют эквидистантные уровни с энергией $E_n = \omega_c(n + 1/2)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, называемые *уровнями Ландау*, где $\omega_c = eH/mc$ — циклотронная частота [90, стр. 534]. Каждый уровень Ландау обладает макроскопическим вырождением, равным $N_\phi = S/2\pi l_H^2$ (для каждой проекции спина), где S — площадь системы, $l_H = \sqrt{c/eH}$ — *магнитная длина*, задающая характерный масштаб длины в квантовой системе электронов, помещенной в магнитное поле.

Если некоторое число уровней Ландау заполнены электронами, а все вышележащие уровни являются пустыми, то одночастичные возбуждения в системе будут возникать в результате перехода электрона с одного из заполненных уровней на один из пустых. В нулевом по кулоновскому взаимодействию приближении энергия возникающей при этом

электрон-дырочной пары равна разности энергий уровней Ландау электрона и дырки. Характерный энергетический масштаб кулоновского взаимодействия в системе будет составлять $e^2/\epsilon l_H$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость окружающей среды. В достаточно сильных магнитных полях выполняется соотношение $\omega_c \gg e^2/\epsilon l_H$, вследствие чего кулоновское взаимодействие можно считать слабым возмущением, не вызывающим сколь-нибудь заметного смешивания различных уровней Ландау [68, 69].

Электрон и дырка, находящиеся на заданных уровнях Ландау, могут образовать связанное состояние, называемое *магнитоэкситоном*. Рассмотрение магнитоэкситона основывается на том, что в магнитном поле сохраняется *магнитный импульс* электрон-дырочной пары \mathbf{P} , играющий роль импульса центра масс и позволяющий выделить движение пары как целого [67]. Внутренняя структура магнитоэкситона при этом зависит от величины его магнитного импульса — магнитоэкситон приобретает дипольный момент, пропорциональный \mathbf{P} (что может трактоваться как появление электрического поля в движущейся системе отсчета, «раздвигающего» электрон и дырку). При учете электрон-дырочного кулоновского взаимодействия по теории возмущений его среднее значение, таким образом, будет зависеть от \mathbf{P} , формируя *закон дисперсии* магнитоэкситона [68, 69, 72]. Эффективная масса магнитоэкситона при этом определяется только его квантовыми числами и величиной магнитного поля, и не зависит от эффективных масс электрона и дырки.

Следует отметить, что учет обменного кулоновского взаимодействия между электроном и дыркой наряду с прямым взаимодействием эквивалентен обобщенному приближению хаотических фаз для электрон-дырочного двухчастичного пропагатора [72] (учет только прямого взаимодействия приводит к лестничному приближению, учет только обменного — к приближению хаотических фаз [91]). В таком приближении будут возникать ветви дисперсионной зависимости, соответствующие не только магнитоэкситонам, но и магнитоплазмонам.

В связанных квантовых ямах могут образовываться пространственно не прямые магнитоэкситоны, составленные из электрона и дырки, находящихся в различных квантовых ямах, разделенных барьером (см. [92, 93] и цит. лит.). Приложение дополнительного магнитного поля в плоскости квантовых ям позволяет «сканировать» дисперсионную зависимость магнитоэкситона в экспериментах по регистрации спектров фотолуминесценции [94, 95, 96]. Параллельные электрические дипольные моменты пространственно не прямых магнитоэкситонов приводят к существованию потенциального барьера, подавляющего пе-

рекрытие их волновых функций. В результате магнитоэкситоны могут образовывать разреженный слабонеидеальный бозе-газ отталкивающихся частиц, в котором при низких температурах происходит бозе-конденсация [69, 70, 97, 98, 99, 100].

В графене, помещенном в перпендикулярное магнитное поле, электроны заселяют релятивистские уровни Ландау с энергиями $E_n^L = (v_F/l_H) \operatorname{sgn}(n) \sqrt{2|n|}$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ [23, 24, 25, 26]. Заметим, что энергии этих уровней простираются от $-\infty$ до $+\infty$, а сами уровни неэквидистантны и сгущаются с увеличением $|n|$. Особенность уровня $n = 0$, располагающегося ровно в дираковской точке, приводит к полужелтому квантовому эффекту Холла, при котором холловская удельная проводимость принимает значения $\sigma_{xy} = 4e^2/h(n + 1/2)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (множитель 4 отвечает за вырождение электронов по спинам и долинам) [20, 24, 25, 26].

Электрон-дырочные возбуждения с уровнями Ландау в графене могут образовывать магнитоэкситоны, свойства которых были, в частности, рассмотрены в работах [101, 102, 103]. Из-за многокомпонентного характера волновых функций электрона и дырки в графене волновая функция магнитоэкситона также является многокомпонентной. Кроме того, обмен электрона и дырки с заполненной валентной зоной (уровни Ландау с отрицательными n) может давать существенный вклад в энергию магнитоэкситона [101]. Оценки температуры бозе-конденсации пространственно непрямых магнитоэкситонов в бислое графена были представлены в работах [71, 104].

Расстояние между уровнями Ландау в графене имеет порядок v_F/l_H , а энергетический масштаб кулоновского взаимодействия составляет $e^2/\epsilon l_H$. В результате отношение кулоновской энергии к кинетической $e^2/\epsilon v_F \approx 2.19/\epsilon$ не зависит от напряженности магнитного поля и определяется только величиной ϵ . При $\epsilon \sim 1$ оно может быть весьма большим, что ставит под вопрос применимость теории возмущений по кулоновскому взаимодействию (хотя оценки, сделанные в работах [101, 105] при $\epsilon \approx 3$, показали, что смешивание уровней Ландау достаточно мало). В случае же пространственно непрямых магнитоэкситонов кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой имеет масштаб $e^2/\epsilon D$, где D — межслойное расстояние. Вследствие этого при $l_H \ll D$ в сильном магнитном поле применимость теории возмущений восстанавливается, что будет более детально показано ниже.

В данной главе будут рассмотрены главным образом пространственно непрямые магнитоэкситоны в бислое графена. Сначала будет решена двухчастичная задача о магнито-

экситоне в графене в симметричной калибровке векторного потенциала (работы других авторов [101, 102, 103] основывались на калибровке Ландау) и будут вычислены дисперсионные зависимости магнитоэкситонов с различными квантовыми числами. Далее будет рассмотрена многочастичная задача и будет обоснована применимость теории возмущений для кулоновского взаимодействия в случае пространственно непрямых магнитоэкситонов в сильном магнитном поле. Затем в приближении Хартри-Фока будут вычислены энергии фотонов, испускаемых при рекомбинации магнитоэкситонов. Соответствующие результаты опубликованы в работах [36, 57, 58].

1.2 Двухчастичная задача о магнитоэкситоне

1.2.1 Состояния электрона и дырки

Опишем сначала одночастичные состояния электрона и дырки в графене в магнитном поле. Предположим, что лист графена находится в плоскости (x, y) , а магнитное поле направлено вдоль оси z , т.е. $\mathbf{H} = \mathbf{e}_z H$. Будем игнорировать поначалу вырождение электронов по проекциям спина и по долинам. В базисе подрешеток $\{A, B\}$ гамильтониан электрона в долине \mathbf{K} в отсутствие магнитного поля равен [6, 10]

$$H_1 = v_F \begin{pmatrix} 0 & p_{1x} - ip_{1y} \\ p_{1x} + ip_{1y} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

где \mathbf{p}_1 — импульс электрона. Введение векторного потенциала в симметричной калибровке $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{H} \times \mathbf{r}]$, сопровождающееся «удлинением» импульса $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + (e/c)\mathbf{A}$ (заряд электрона полагаем равным $-e$) приведет гамильтониан (1.1) к виду:

$$H_1 = \frac{v_F \sqrt{2}}{l_H} \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ a_1^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Здесь безразмерный оператор $a_1 = l_H(p_{1-} - ir_{1-}/2l_H^2)$ выражен через циклические компоненты координаты $r_{1\pm} = (r_{1x} \pm ir_{1y})/\sqrt{2}$ и импульса $p_{1\pm} = (p_{1x} \pm ip_{1y})/\sqrt{2}$ электрона, и удовлетворяет коммутационному соотношению $[a_1, a_1^\dagger] = 1$.

Путь к построению системы собственных векторов гамильтониана (1.2) может быть подсказан рассмотрением оператора $J_1 = L_{1z} + \frac{1}{2}\sigma_{1z}$, являющегося проекцией на ось z суммы оператора углового момента электрона $\mathbf{L}_1 = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1]$ и оператора «квасиспина» $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_1$, действующего в пространстве подрешеток. Для более наглядного представления J_1

заметим, что, наряду с введенным выше оператором a_1 , можно ввести коммутирующий с ним оператор $b_1 = l_H(p_{1+} - ir_{1+}/2l_H^2)$, удовлетворяющий соотношению $[b_1, b_1^\dagger] = 1$. Легко показать, что $J_1 = (a_1^\dagger a_1 - b_1^\dagger b_1 + \frac{1}{2}\sigma_z)$ и $[J_1, H_1] = 0$, в результате чего собственные векторы гамильтониана (1.2) можно искать как собственные векторы оператора J_1 , образующиеся при помощи последовательного действия повышающих операторов a_1^\dagger и b_1^\dagger . Будем задавать состояние электрона двумя квантовыми числами: индексом уровня Ландау $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и индексом ведущего центра $k = 0, 1, 2, \dots$. Волновая функция электрона в этом состоянии будет двухкомпонентной, что может быть представлено как зависимость ее от дискретной координаты — подрешетки $w = A, B$:

$$\psi_{nk}(\mathbf{r}) \equiv \begin{pmatrix} \psi_{nk}(\mathbf{r}, A) \\ \psi_{nk}(\mathbf{r}, B) \end{pmatrix} = (\sqrt{2})^{\delta_{n0}-1} \begin{pmatrix} \text{sgn}(n)\phi_{|n|-1,k}(\mathbf{r}) \\ \phi_{|n|k}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Здесь $\phi_{nk}(\mathbf{r})$ — волновая функция нерелятивистского электрона в магнитном поле, которая может быть представлена как

$$\phi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{(a^+)^n (b^+)^k}{\sqrt{n!} \sqrt{k!}} \phi_{00}(\mathbf{r}), \quad \phi_{00}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_H} e^{-r^2/4l_H^2}$$

(для краткости будем считать, что $\phi_{-1k} = 0$). В явном виде [68, 90, стр. 534]

$$\phi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{i^{|n-k|}}{\sqrt{2\pi}l_H} \sqrt{\frac{\min(n, k)!}{\max(n, k)!}} e^{-r^2/4l_H^2} \left(\frac{r}{\sqrt{2}l_H}\right)^{|n-k|} e^{i(n-k)\varphi} L_{\min(n, k)}^{|n-k|} \left(\frac{r^2}{2l_H^2}\right), \quad (1.4)$$

где $L_n^m(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра. В дальнейшем нам неоднократно понадобится полезная формула [101]

$$\phi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{i^{n-k}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{ity} \varphi_n\left(\frac{t+x/2}{l_H}\right) \varphi_k\left(\frac{t-x/2}{l_H}\right), \quad (1.5)$$

где

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!} \sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} H_n(x),$$

— безразмерная собственная функция гармонического осциллятора, $H_n(x)$ — полиномы Эрмита.

Энергия электрона в состоянии (1.3) определяется действием гамильтониана (1.2) на это состояние и равна

$$E_n^L = \frac{v_F}{l_H} \text{sgn}(n) \sqrt{2|n|}, \quad (1.6)$$

а значение оператора J_1 в этом состоянии равно $|n| - k - 1/2$. Таким образом, каждый уровень Ландау n может быть заселен множеством электронов с различными индексами ведущего центра k . Однако, при рассмотрении степени вырождения уровня Ландау, равной $N_\phi = S/2\pi l_H^2$ (для одной проекции спина и одной долины) удобно считать, что k пробегает значения от 0 до ∞ , однако интегрирование по \mathbf{r} производится только по площади системы S . Используя представление (1.5), можно показать, что при таких допущениях число электронных состояний на одном уровне Ландау есть

$$\int_S d\mathbf{r} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{nk}^+(\mathbf{r})\psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{S}{2\pi l_H^2} = N_\phi. \quad (1.7)$$

Рассмотрим теперь состояния дырки. Полагая, как обычно принято [106], что операторы уничтожения электрона и дырки связаны между собой эрмитовым сопряжением, получим, что волновая функция дырки на n -м уровне Ландау с ведущим центром k есть $\psi_{nk}^*(\mathbf{r})$. Для дырки с координатой \mathbf{r}_2 и импульсом \mathbf{p}_2 можно ввести аналоги операторов a_1 и b_1 , введенных для электронов, а именно, $a_2 = l_H(p_{2+} - ir_{2+}/2l_H^2)$, $b_2 = l_H(p_{2-} - ir_{2-}/2l_H^2)$, которые коммутируют с a_1 и b_1 и подчиняются коммутационным соотношениям $[a_2, a_2^+] = 1$, $[b_2, b_2^+] = 1$. Чтобы восстановить первично-квантованный гамильтониан для дырки H_2 , аналогичный (1.1), заметим, что должно выполняться соотношение $H_2\psi_{nk}^* = -E_n^L\psi_{nk}^*$ (т.е. энергия дырки в каком-либо состоянии равна энергии электрона в этом состоянии, взятой со знаком «минус»). Производя комплексное сопряжение соответствующего выражения для электрона $H_1\psi_{nk} = E_n^L\psi_{nk}$, можно показать, что H_2 должен иметь вид

$$H_2 = \frac{v_F\sqrt{2}}{l_H} \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_2^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Итак, гамильтонианы невзаимодействующих электрона и дырки в графене в магнитном поле равны (1.2) и (1.8), волновые функции электрона и дырки на уровне Ландау n с ведущим центром k равны $\psi_{nk}(\mathbf{r})$ (1.3) и $\psi_{nk}^*(\mathbf{r})$ соответственно, а их энергии равны E_n^L (1.6) и $-E_n^L$.

1.2.2 Выделение движения центра масс

Рассмотрим теперь гамильтониан пары электрона и дырки, представляющий собой сумму их кинетических энергий (1.2), (1.8) и кулоновского взаимодействия между ними $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Без учета взаимодействия гамильтониан в совместном базисе подрешеток электрона и

дырки $w_1 w_2 = \{AA, AB, BA, BB\}$ равен

$$H_0 = H_1 + H_2 = \frac{v_F \sqrt{2}}{l_H} \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_1 & 0 \\ a_2^+ & 0 & 0 & a_1 \\ a_1^+ & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & a_1^+ & a_2^+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Для учета кулоновского взаимодействия удобно выделить движение центра масс и относительное движение электрона и дырки. В силу инвариантности гамильтониана системы относительно преобразования, заключающегося с одновременном проведении трансляции и калибровочного преобразования вектор-потенциала, генератор этого преобразования — вектор магнитного импульса [67, 92]

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) - \frac{e}{c} [\mathbf{H} \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \quad (1.10)$$

— сохраняется. Его x - и y -компоненты коммутируют с гамильтонианом $H = H_0 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ и между собой. Следовательно, четырехкомпонентная волновая функция магнитоэкситона Ψ может быть найдена в виде собственной функции оператора магнитного импульса [68]:

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ i \mathbf{R} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{2l_H^2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] \right) \right\} \Phi(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1.11)$$

где $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_0 = l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}]$.

Переход (1.11) от Ψ к Φ может трактоваться как зависящее от параметра \mathbf{P} преобразование векторов гильбертова пространства вида $\Phi = S\Psi$, превращающее волновую функцию электрона и дырки $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ в волновую функцию их относительного движения $\Phi(\mathbf{r})$. Одновременно с ним нужно провести соответствующие преобразования операторов: $A \rightarrow SAS^+$. Понижающие операторы, входящие в (1.9), преобразуются как $a_1 \rightarrow a$, $a_2 \rightarrow -b$, где $a = l_H(p_- - ir_-/2l_H^2)$, $b = l_H(p_+ - ir_+/2l_H^2)$, а $\mathbf{p} = -i\hbar(\partial/\partial\mathbf{r}) = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$ — импульс относительного движения. Новые операторы a и b содержат только координату и импульс относительного движения и удовлетворяют коммутационным соотношениям $[a, a^+] = 1$, $[b, b^+] = 1$. Оператор кулоновского взаимодействия электрона и дырки преобразуется как $V(\mathbf{r}) \rightarrow V(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)$. Сдвиг радиус-вектора относительного движения \mathbf{r} на величину \mathbf{r}_0 в ходе преобразования S выражает собой связь между движением центра масс и внутренней структурой магнитоэкситона. Как говорилось выше, эту связь можно трактовать как появление в движущейся системе отсчета электрического поля, разводящего электрон и дырку на расстояние $r_0 \propto P$.

Гамильтониан (1.9) после перехода в систему центра масс принимает вид

$$H_0 = \frac{v_F \sqrt{2}}{l_H} \begin{pmatrix} 0 & -b & a & 0 \\ -b^+ & 0 & 0 & a \\ a^+ & 0 & 0 & -b \\ 0 & a^+ & -b^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Четырехкомпонентная волновая функция относительного движения Φ , соответствующая этому гамильтониану, может быть найдена последовательным действием повышающих операторов a^+ и b^+ . Она имеет вид

$$\Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}) = (\sqrt{2})^{\delta_{n_1 0} + \delta_{n_2 0} - 2} \begin{pmatrix} \text{sgn}(n_1) \text{sgn}(n_2) \phi_{|n_1|-1, |n_2|-1}(\mathbf{r}) \\ \text{sgn}(n_1) \phi_{|n_1|-1, |n_2|}(\mathbf{r}) \\ \text{sgn}(n_2) \phi_{|n_1|, |n_2|-1}(\mathbf{r}) \\ \phi_{|n_1|, |n_2|}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь n_1 и n_2 — уровни Ландау, на которых находятся электрон и дырка соответственно. Кинетическая энергия магнитоэкситона в состоянии (1.12), очевидно, равна энергии $E_{n_1}^L - E_{n_2}^L$ одноэлектронного перехода $n_2 \rightarrow n_1$.

Таким образом, состояние магнитоэкситона в нулевом порядке по кулоновскому взаимодействию можно задавать вектором магнитного импульса \mathbf{P} , характеризующим движение его центра масс, и квантовыми числами n_1 и n_2 , определяющими уровни Ландау электрона и дырки. Соответствующая нормированная на единицу волновая функция (1.11) есть

$$\Psi_{\mathbf{P} n_1 n_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ i \mathbf{R} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{2l_H^2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] \right) \right\} \Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (1.13)$$

Состояния со всевозможными \mathbf{P} , n_1 и n_2 образуют полный набор двухчастичных электрон-дырочных состояний в графене. Альтернативный полный набор состояний характеризуется уровнями Ландау n_1 , n_2 и ведущими центрами электрона и дырки k_1 , k_2 (как было рассмотрено в подразделе 1.2.1). При помощи выражения (1.5) можно получить соотношение

$$\begin{aligned} \phi_{n_1 k_1}(\mathbf{r}_1) \phi_{n_2 k_2}^*(\mathbf{r}_2) &= \int d\mathbf{P} \phi_{k_1 k_2}^* \left(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}] \right) \times \\ &\times \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ i \mathbf{R} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{2l_H^2} [\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}] \right) \right\} \phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}]), \end{aligned}$$

позволяющее связать между собой два этих набора, представив, например, волновую функцию $\psi_{n_1 k_1}(\mathbf{r}_1, w_1) \psi_{n_2 k_2}^*(\mathbf{r}_2, w_2)$ из второго набора в виде разложения по волновым

функциям (1.13) первого набора:

$$\psi_{n_1 k_1}(\mathbf{r}_1, w_1) \psi_{n_2 k_2}^+(\mathbf{r}_2, w_2) = \int d\mathbf{P} \phi_{k_1 k_2}^* \left(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}] \right) \Psi_{\mathbf{P} n_1 n_2}(\mathbf{r}_1, w_1, \mathbf{r}_2, w_2). \quad (1.14)$$

Итак, в рамках двухчастичной электрон-дырочной задачи в графене мы выделили движение центра масс и нашли волновые функции внутреннего движения магнитоэкситона (1.12). Поскольку \mathbf{P} коммутирует не только с H_0 , но и с оператором взаимодействия $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, то базис найденных магнитоэкситонных состояний является наиболее удобным для вычисления дисперсионных зависимостей. Если кулоновское взаимодействие является слабым, то сдвиг энергии магнитоэкситона в «замороженном» состоянии с определенными \mathbf{P} , n_1 и n_2 под его влиянием может быть найден в первом порядке теории возмущений (по аналогии с [68]):

$$\Delta E_{n_1 n_2}(P) = \int d\mathbf{r} \Phi_{n_1 n_2}^+(\mathbf{r}) V(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) \Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}) \quad (1.15)$$

(заметим, что невозмущенное состояние с фиксированным \mathbf{P} , по которому возмущение диагонально, является невырожденным). Обсуждению получающихся дисперсионных зависимостей для пространственно непрямых магнитоэкситонов, где кулоновское взаимодействие действительно можно считать малым в сильном магнитном поле, мы обратимся в следующем подразделе.

1.2.3 Дисперсионные зависимости

Рассмотрим связанные состояния электрона и дырки, находящиеся в двух параллельно расположенных листах графена, расстояние между которыми равно D (Рис. 1.1). При помощи напряжений V_1 и V_2 , прикладываемых между каждым листом графена и соответствующим затворным электродом, можно независимо регулировать уровень химических потенциалов в каждом из двух листов графена (подобно тому, как это делается в одном слое графена на кремниевой подложке [18]). Можно предложить два способа формирования магнитоэкситонов в такой системе. Первый способ заключается в установлении таких значений химических потенциалов, при которых в первом листе все уровни Ландау с номерами $n < n_1$ заполнены, а на уровне n_1 находится только небольшое количество электронов; во втором листе графена все уровни Ландау с номерами $n < n_2$ заполнены, а на уровне n_2 заполнены почти все состояния электронов (т.е., на этом уровне находится небольшое число дырок). В результате будет происходить связывание электронов из первого листа с

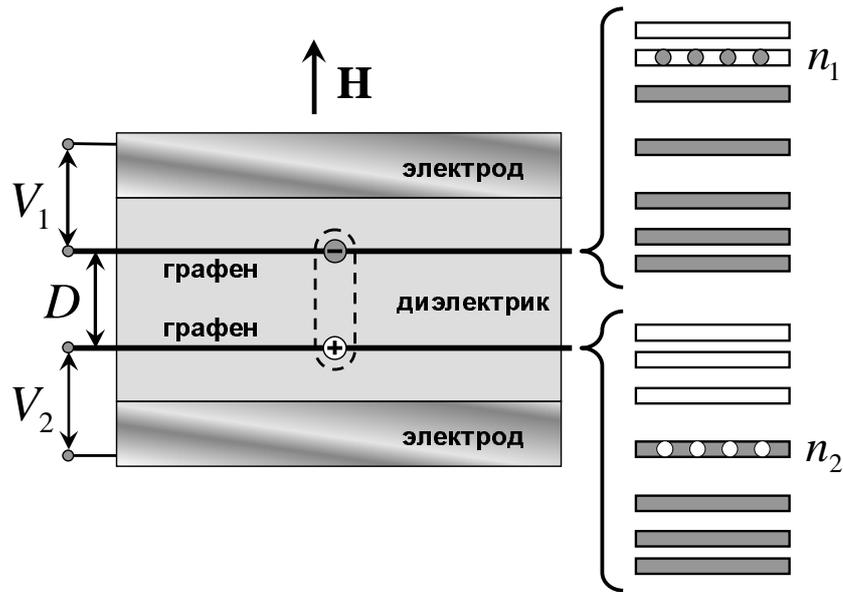


Рис. 1.1. Схема образования пространственно непрямых магнитоэкситонов в бислое графена без накачки.

дырками из второго листа в магнитоэкситоны, сопровождающееся энергетической релаксацией пар. Такие магнитоэкситоны будут образовывать разреженный газ композитных бозе-частиц, отталкивающихся посредством диполь-дипольного взаимодействия. При наличии слабого туннелирования между листами графена они будут рекомбинировать с испусканием фотонов. Второй способ формирования пространственно непрямых магнитоэкситонов заключается в связывании электронов и дырок, образовавшихся в результате оптической накачки обоих листов графена. При этом будут формироваться как прямые, так и непрямые магнитоэкситоны. Последние, обладая большим временем жизни, будут иметь возможность прийти в термодинамически квазиравновесное состояние до того, как рекомбинируют с испусканием люминесцентных фотонов.

Рассмотрение магнитоэкситонов как изолированных пар частиц справедливо, когда среднее расстояние между ними много больше характерного размера магнитоэкситона в плоскости слоев графена, составляющего $\langle r \rangle \sim \max(r_0, l_H) = \max(P l_H^2, l_H)$ (т.е., расстояние между электроном и дыркой набирается как за счет смещения r_0 , так и за счет размазывания волновой функции относительного движения на масштабах l_H). Если концентрация магнитоэкситонов равна n , то среднее расстояние между ними есть $l \sim 1/\sqrt{n}$, а типичные значения их импульса равны $P \sim \sqrt{n}$. Следовательно, перекрытие магнитоэкситонов незначительно, $\langle r \rangle \ll l$, когда $l_H \sqrt{n} \ll 1$, а это, в свою очередь, справедливо,

если $nS \ll N_\phi$, т.е., когда число электронов на уровне Ландау n_1 и дырок на уровне n_2 мало по сравнению со степенью их вырождения.

Рассмотрение волновых функций магнитоэкситонных состояний, проведенное в предыдущем разделе, полностью переносится на случай пространственно не прямых магнитоэкситонов. Входящее в (1.15) кулоновское взаимодействие между электроном и дыркой, экранированное внешней диэлектрической средой, будет иметь вид:

$$V(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0) = -\frac{e^2}{\varepsilon\sqrt{(\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)^2 + D^2}}. \quad (1.16)$$

Если магнитное поле настолько сильное, что $l_H \ll D$, или же диэлектрическая проницаемость окружающей среды высока, $\varepsilon \gg 1$, то взаимодействие (1.16) является слабым возмущением, не приводящим к сколь-нибудь заметному смешиванию различных уровней Ландау, разделенных между собой энергетическими промежутками порядка v_F/l_H . Магнитная длина может быть оценена как $l_H \approx 257 \text{ \AA}/\sqrt{B [\text{Тл}]}$; в типичных лабораторных магнитных полях $B \sim 20 \text{ Тл}$ получим $l_H \sim 60 \text{ \AA}$, следовательно, расстояния $D \sim 30 \text{ нм}$ будет достаточно для применимости теории возмущений. Однако, представляет интерес и случай сильного кулоновского взаимодействия, осуществимый на практике при малых D [65, 66], который в настоящей работе не рассматривается.

В данном подразделе мы будем рассматривать только вычисляемый в первом порядке теории возмущения сдвиг энергии магнитоэкситона $\Delta E_{n_1 n_2}(P)$ (1.15), обусловленный кулоновским взаимодействием и зависящий от P . Обсуждение же вкладов в энергию магнитоэкситона, не зависящих от P (т.е. суммы собственных энергий электрона и дырки) должно проводиться применительно к конкретной ситуации, в которой магнитоэкситон образуется или распадается. Мы вернемся к этому обсуждению в подразделе 1.3.4, где будут рассматриваться энергии рекомбинационных фотонов.

В силу электрон-дырочной симметрии в графене дисперсионные зависимости не меняются при перестановке и изменении знаков квантовых чисел n_1 и n_2 . На Рис. 1.2–1.5 приведены дисперсионные кривые для нескольких низколежащих магнитоэкситонных состояний с небольшими квантовыми числами при различных расстояниях D между листами графена. Энергии $\Delta E_{n_1 n_2}(P)$ приведены в единицах $E_0 = (e^2/\varepsilon l_H)\sqrt{\pi/2}$. По мере увеличения D происходит сглаживание дисперсионной зависимости, которое, в частности, проявляется в постепенном исчезновении ротонного минимума в состоянии $n_1 = 2$, $n_2 = 0$, существующего при малых D (Рис. 1.4). Аналогичный эффект для пространственно не прямых магнитоэкситонов в связанных квантовых ямах отмечался, например,

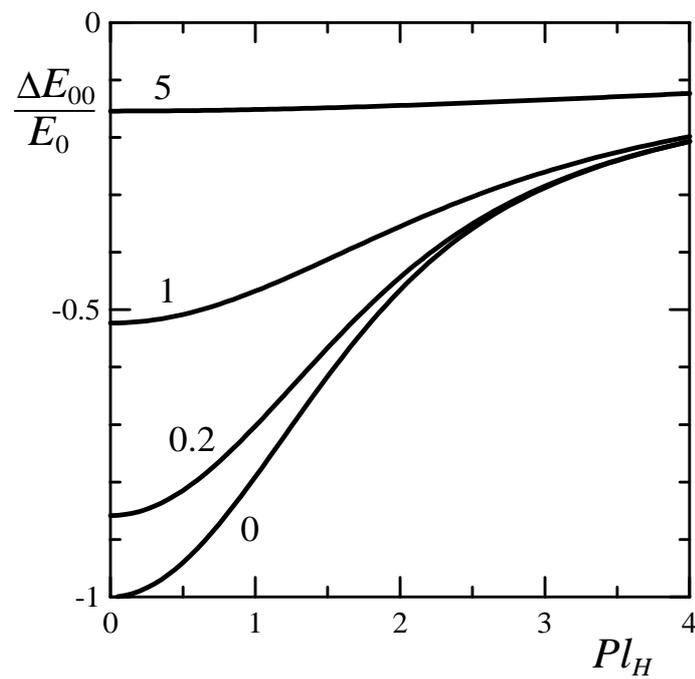


Рис. 1.2. Дисперсионные зависимости $\Delta E_{n_1 n_2}(P)$ для пространственно непрямого магнитоэкситона с квантовыми числами $n_1 = n_2 = 0$ при различных отношениях D/l_H , указанных возле соответствующих кривых.

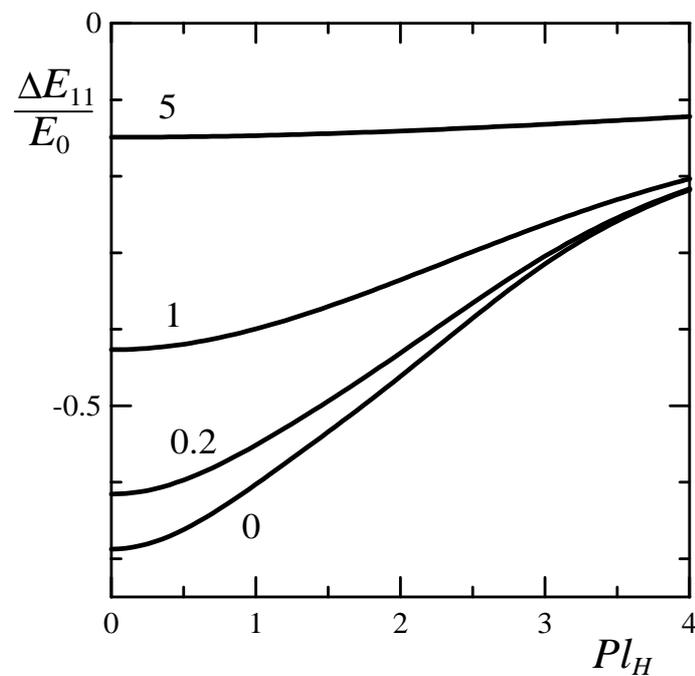
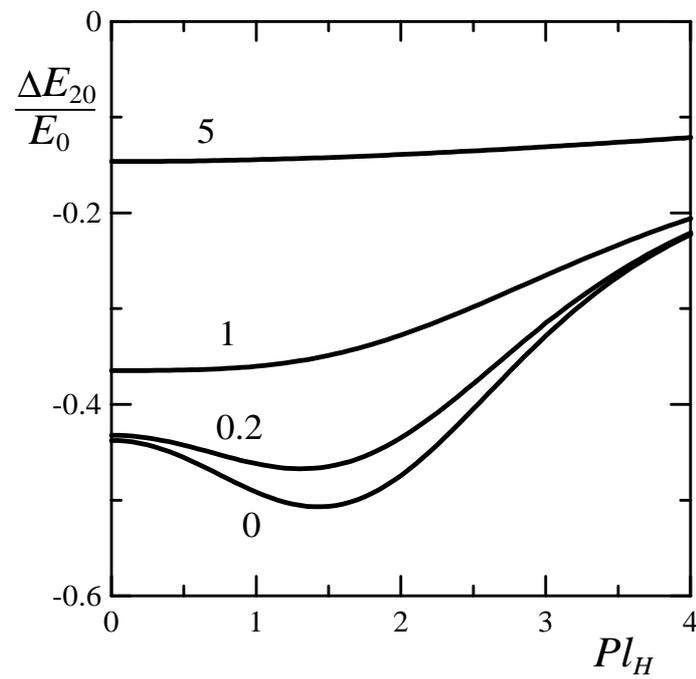
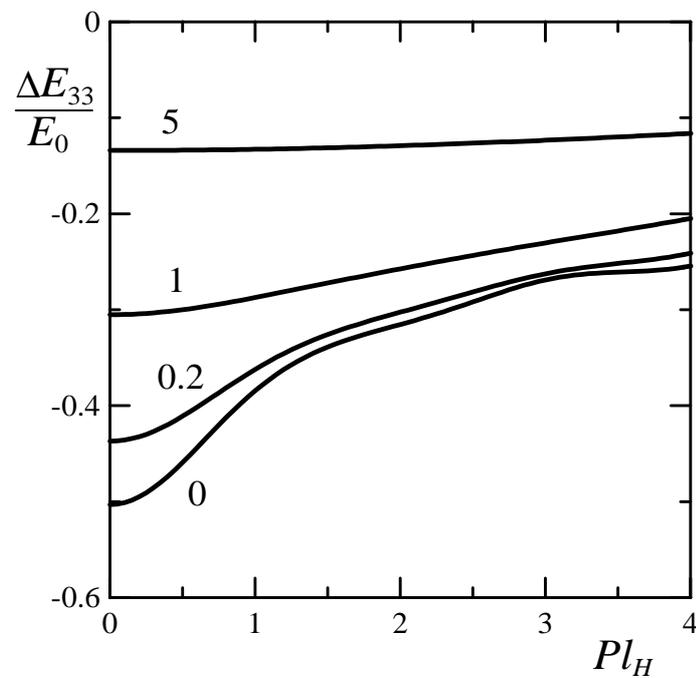


Рис. 1.3. То же самое, что на Рис. 1.2, но при $n_1 = n_2 = 1$.

Рис. 1.4. То же самое, что на Рис. 1.2, но при $n_1 = 2$, $n_2 = 0$.Рис. 1.5. То же самое, что на Рис. 1.2, но при $n_1 = n_2 = 3$.

в работе [92].

Сглаживание дисперсионных зависимостей при увеличении D легко понять, если обратиться к простой их интерпретации, предложенной в работах [68, 92]. Выражение (1.15) при свертке по подрешеткам разбивается на четыре интеграла вида

$$\int d\mathbf{r} e|\phi_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}(\mathbf{r})|^2 \frac{-e^2}{\varepsilon\sqrt{D^2 + (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)^2}} \quad (1.17)$$

с $(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) = (|n_1| - 1, |n_2| - 1), (|n_1| - 1, |n_2|), (|n_1|, |n_2| - 1), (|n_1|, |n_2|)$, каждый из которых может трактоваться как энергия взаимодействия двумерного зарядового распределения $e|\phi_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}(\mathbf{r})|^2$ в плоскости (x, y) с точечным зарядом $-e$, имеющим координаты $\{\mathbf{r}_0, D\}$. Функция $|\phi_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}(\mathbf{r})|^2$ аксиально-симметрична относительно начала координат и имеет $n_r + 1$ максимум и $n_r + 1 - \delta_{m0}$ минимум, где $n_r = \min(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$, $m = \tilde{n}_1 - \tilde{n}_2$. Первый максимум всегда имеет наибольшую амплитуду, причем в начале координат $\mathbf{r} = 0$ имеется максимум при $m = 0$ и минимум при $m \neq 0$. Ширины максимумов и минимумов имеют порядок l_H . Главный вклад в интеграл (1.17) поступает от области перекрытия круга радиуса D (центр которого находится под точечным зарядом) с кольцами, соответствующими максимумам и минимумам плотности $|\phi_{\tilde{n}_1\tilde{n}_2}(\mathbf{r})|^2$. Приведенная интерпретация позволяет угадать самые общие черты дисперсионных зависимостей: они имеют экстремум при $P = 0$ и осцилляции при больших n_1 и n_2 , которые, тем не менее, сглаживаются по мере увеличения D . Однако, в силу четырехкомпонентности волновой функции (1.12), энергия связи складывается из четырех интегралов вида (1.17) с различными \tilde{n}_1 и \tilde{n}_2 , а это приводит к тому, что электростатическая аналогия в графене является менее прозрачной, чем в случае связанных квантовых ям [92].

Дисперсионная зависимость (1.15) может быть разложена при малых P ; при $Pl_H \ll 1$ достаточно учесть только члены, пропорциональные 1 и P^2 [68, 92]:

$$\Delta E_{n_1 n_2}(P) \approx -W_{n_1 n_2} + \frac{P^2}{2M_{n_1 n_2}}, \quad (1.18)$$

где $W_{n_1 n_2}$ — энергия связи магнитоэкситона, $M_{n_1 n_2}$ — его эффективная масса. В случае асимптотически большого расстояния между листами, когда $D \gg l_H$, $D \gg Pl_H^2$, параметры разложения $W_{n_1 n_2}$ и $M_{n_1 n_2}$ стремятся к универсальным асимптотикам

$$W_{n_1 n_2} \approx E_0 \frac{l_H}{D} \sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{e^2}{\varepsilon D}, \quad M_{n_1 n_2} \approx \frac{M_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{D}{l_H}\right)^3, \quad (1.19)$$

где $M_0 = 2/E_0 l_H^2$. Энергии связи магнитоэкситонов в нескольких низколежащих состояниях как функции D приведены на Рис. 1.6, а эффективные массы в единицах M_0 приведены на Рис. 1.7. В целом энергии связи уменьшаются с ростом квантовых чисел n_1 и

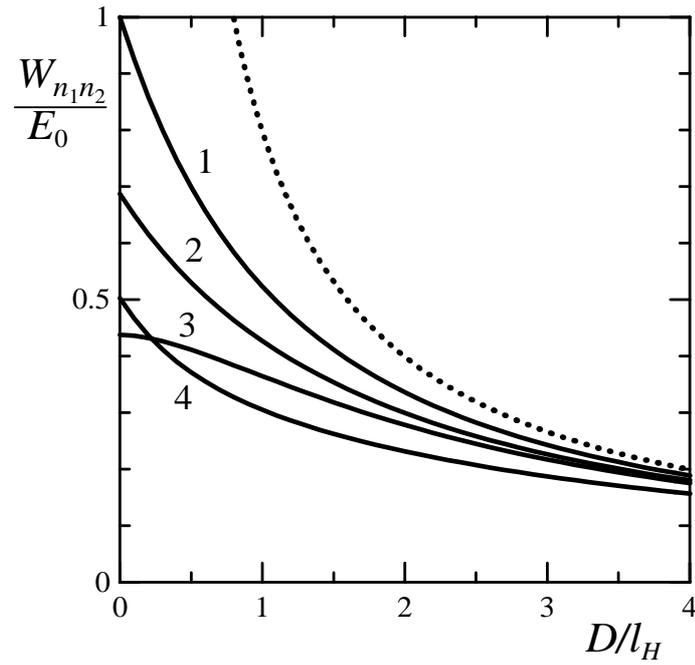


Рис. 1.6. Зависимость энергии связи $W_{n_1 n_2}$ пространственно непрямого магнитоэкситона от расстояния D между листами графена: (1) $n_1 = n_2 = 0$, (2) $n_1 = n_2 = 1$, (3) $n_1 = 2, n_2 = 0$, (4) $n_1 = n_2 = 3$. Пунктиром показана асимптотика $W_{n_1 n_2}$ при больших D .

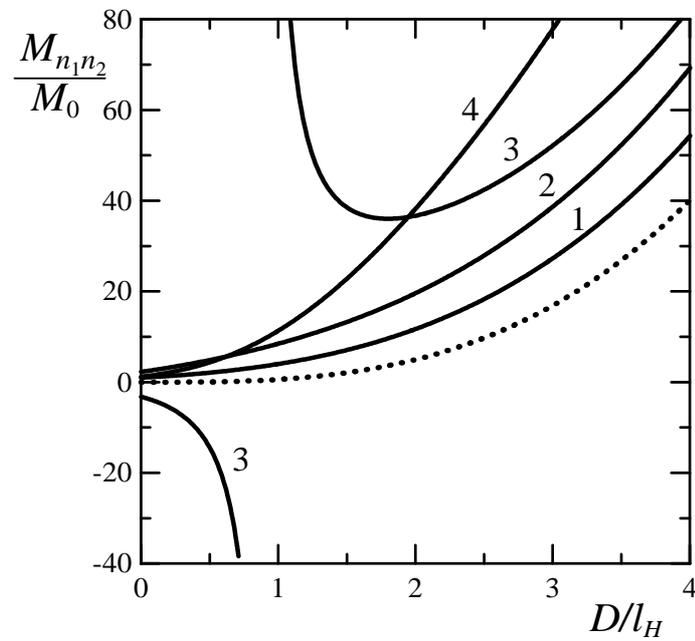


Рис. 1.7. Зависимость эффективной массы $M_{n_1 n_2}$ пространственно непрямого магнитоэкситона от расстояния D между листами графена: (1) $n_1 = n_2 = 0$, (2) $n_1 = n_2 = 1$, (3) $n_1 = 2, n_2 = 0$, (4) $n_1 = n_2 = 3$. Пунктиром показана асимптотика $M_{n_1 n_2}$ при больших D .

n_2 , а эффективные массы растут. Состояние $n_1 = 2$, $n_2 = 0$ при малых D имеет ротонный минимум, который по мере увеличения расстояния исчезает (Рис. 1.4). Поэтому M_{20} , отрицательная при малых D , по мере увеличения расстояния меняет знак.

В принципе, можно найти аналитические выражения для $W_{n_1 n_2}$ и $M_{n_1 n_2}$ при любых n_1 и n_2 [92]. Например,

$$\begin{aligned}
W_{00}(D) &= E_0 e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right), \\
W_{11}(D) &= E_0 \left\{ \frac{D^4 - 2D^2l_H^2 + 11l_H^4}{16l_H^4} e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right) - \frac{D^2 - 3l_H^2}{8l_H^2} \frac{D}{\sqrt{2\pi}l_H} \right\}, \\
W_{20}(D) &= E_0 \left\{ \frac{D^4 - 6D^2l_H^2 + 7l_H^4}{16l_H^4} e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right) - \frac{D^2 - 7l_H^2}{8l_H^2} \frac{D}{\sqrt{2\pi}l_H} \right\}, \\
M_{00}(D) &= M_0 \left\{ \frac{D^2 + l_H^2}{l_H^2} e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right) - \frac{D}{l_H} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\}^{-1}, \\
M_{11}(D) &= M_0 \left\{ \frac{(D^2 + l_H^2)(D^4 + 6D^2l_H^2 + 7l_H^4)}{16l_H^6} e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right) - \frac{D^2 + 3l_H^2}{8l_H^2} \frac{D}{\sqrt{2\pi}l_H} \right\}^{-1}, \\
M_{20}(D) &= M_0 \left\{ \frac{(D^2 + 5l_H^2)(D^4 - 2D^2l_H^2 - l_H^4)}{16l_H^6} e^{D^2/2l_H^2} \operatorname{erfc} \left(\frac{D}{\sqrt{2}l_H} \right) - \frac{D^4 + 2D^2l_H^2 - 11l_H^4}{8l_H^4} \frac{D}{\sqrt{2\pi}l_H} \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

где $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ — дополнительный интеграл ошибок.

Итак, мы нашли, что при выполнении условий $D \gg l_H$, $l_H \sqrt{n} \ll 1$ смешиванием различных уровней Ландау можно пренебречь, а пространственно не прямые магнитоэкситоны с заданными квантовыми числами n_1 , n_2 в бислое графена образуют разреженный газ практически не перекрывающихся композитных бозонов. Несмотря на эффективно ультрарелятивистскую природу составляющих электронов и дырок, магнитоэкситоны ведут себя как частицы с параболическим законом дисперсии (1.18), а их эффективная масса слабо зависит от n_1 , n_2 и выходит на универсальную асимптотику (1.19). Из-за пространственного разделения электрона и дырки магнитоэкситоны являются отталкивающимися практически параллельными электрическими диполями. В разреженном газе магнитоэкситонов при низких температурах будет происходить бозе-конденсация, сопровождающаяся возникновением сверхтекучести [107]. Температуру бозе-конденсации можно грубо оценить как $T_c \sim n/2M_{n_1 n_2}$; используя выражение (1.19) для эффективной массы, получим

$$T_c \sim \frac{e^2}{\varepsilon l_H} \frac{n l_H^2}{(D/l_H)^3}.$$

Приближения $D \gg l_H$, $l_H\sqrt{n} \ll 1$, использованные при получении этого выражения, допускают только весьма низкие значения T_c . Более выгодными для наблюдения бозе-конденсации являются ситуации, в которых D достаточно мало, а плотность магнитоэкситонов n велика. Однако, теоретическое исследование таких ситуаций требует выхода за рамки двухчастичной задачи и приближения «замороженных» уровней Ландау.

Более подробное рассмотрение бозе-конденсации и сверхтекучести разреженного газа пространственно непрямых магнитоэкситонов в бислое графена с учетом их взаимодействия проведено в работе [71]. Для температуры перехода Костерлица-Таулеса в сверхтекучее состояние были предсказаны значения порядка 1 К. Также следует отметить предсказание возможности бозе-конденсации магнитобиэкситонов и сверхрешетке слоев графена [108] и магнитоэкситонных поляритонов [109]. Бозе-конденсация в плотном газе магнитоэкситонов была рассмотрена в приближении Хартри-Фока в работе [104], где для максимально возможной критической температуры была получена оценка $T_c \approx 0.01e^2/\varepsilon D$ при $D < l_H < 2D$ (T_c при этом может достигать нескольких градусов Кельвина).

1.3 Многочастичная формулировка задачи

1.3.1 Функции Грина

Рассмотрим теперь задачу о магнитоэкситоне в многочастичной формулировке. Для этого прежде всего сформулируем правила диаграммной техники для функций Грина электронов в графене и бислое графена. Введем двухкомпонентный оператор поля электронов в виде разложения по волновым функциям (1.3) одночастичных состояний:

$$\psi(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{nk}(\mathbf{r}) c_{nk}(\tau), \quad (1.20)$$

где $c_{nk}(\tau)$ — оператор уничтожения электрона на уровне Ландау n с индексом ведущего центра k , τ — мнимое время. Одночастичная мацубаровская функция Грина, построенная на основе (1.20), будет представлять собой матрицу (2×2) вида

$$G(x_1, x_2) = -\langle T\psi(x_1)\psi^+(x_2) \rangle \quad (1.21)$$

в базисе подрешеток, где $x_i = \{\mathbf{r}_i, \tau_i\}$, T — оператор хронологического упорядочения в мнимом времени τ . Подставляя (1.3) в (1.21) и осуществляя преобразование Фурье

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) = \int_0^{1/T} e^{i\varepsilon\tau} G(\mathbf{r}_1, \tau, \mathbf{r}_2, 0),$$

получим для функции Грина свободного движения

$$G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_{nk}(\mathbf{r}_1)\psi_{nk}^+(\mathbf{r}_2)}{i\varepsilon - E_n^L} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{i\varepsilon - E_n^L} 2^{\delta_{n0}-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \phi_{|n|-1,k}(\mathbf{r}_1)\phi_{|n|-1,k}^*(\mathbf{r}_2) & \text{sgn}(n)\phi_{|n|-1,k}(\mathbf{r}_1)\phi_{|n|k}^*(\mathbf{r}_2) \\ \text{sgn}(n)\phi_{|n|k}(\mathbf{r}_1)\phi_{|n|-1,k}^*(\mathbf{r}_2) & \phi_{|n|k}(\mathbf{r}_1)\phi_{|n|k}^*(\mathbf{r}_2) \end{pmatrix}. \quad (1.22)$$

Используя формулу (1.5), можно, произведя суммирование по индексу k , получить соотношение

$$\sum_{k=0}^{\infty} \phi_{n_1k}(\mathbf{r}_1)\phi_{n_2k}^*(\mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_H} e^{i(x_1y_2-x_2y_1)/2l_H^2} \phi_{n_1n_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1.23)$$

Подставляя его в (1.22), будем иметь

$$G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_H} e^{i(x_1y_2-x_2y_1)/2l_H^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\varepsilon - E_n^L} 2^{\delta_{n0}-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \phi_{|n|-1,|n|-1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & \text{sgn}(n)\phi_{|n|-1,|n|}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \text{sgn}(n)\phi_{|n|,|n|-1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & \phi_{|n||n|}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{pmatrix}. \quad (1.24)$$

Как было отмечено в [103], представление (1.24) функции Грина в магнитном поле в виде произведения $e^{i(x_1y_2-x_2y_1)/l_H^2}$ и трансляционно-инвариантного выражения может интерпретироваться как проявление калибровочного преобразования волновой функции электрона, движущегося из точки \mathbf{r}_1 в точку \mathbf{r}_2 .

Рассмотрим теперь вторично-квантованный оператор кулоновского взаимодействия

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{2S} \int \sum_{w_1w_2} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi^+(\mathbf{r}_1, w_1)\psi^+(\mathbf{r}_2, w_2)V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\psi(\mathbf{r}_2, w_2)\psi(\mathbf{r}_1, w_1), \quad (1.25)$$

где дискретные переменные w_i , соответствующие суммированию по подрешеткам, выделены явно. Для того, чтобы учитывать на равных основаниях прямое и обменное кулоновское взаимодействие, произведем симметризацию оператора (1.25):

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{4S} \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \psi^+(x_1)\psi^+(x_4)\Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4)\psi(x_2)\psi(x_3). \quad (1.26)$$

Симметризованная затравочная вершина здесь равна

$$\Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = V(x_1 - x_4)[\delta(x_1 - x_3)\delta(x_2 - x_4) - \delta(x_1 - x_2)\delta(x_3 - x_4)]. \quad (1.27)$$

В диаграммном виде ее можно представить так, как изображено на Рис. 1.7. Здесь и далее мы будем для сокращения записи считать, что переменные подрешеток w_i включены в соответствующие им координаты x_i или \mathbf{r}_i , за исключением тех случаев, в которых они будут

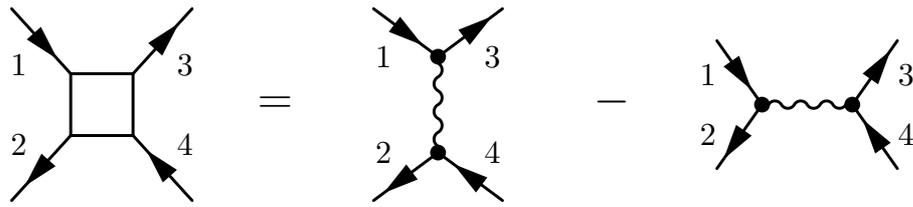


Рис. 1.8. Диаграммное представление симметризованной затравочной вершинной части (1.27), складывающейся из прямого и обменного кулоновского взаимодействия.

выписаны явно. При этом будем считать, что интегрирование по переменным x_i включает в себя также суммирование по w_i , а δ -функции Дирака вида $\delta(x_i - x_j)$ включают в себя символы Кронекера $\delta_{w_i w_j}$. Входящий же в (1.27) потенциал кулоновского взаимодействия $V(x_i - x_j)$ не зависит от подрешеток w_1 и w_4 (на пространственных масштабах, больших по сравнению с постоянной решетки графена).

Симметризация (1.26)–(1.27) оператора взаимодействия произведена таким же образом, как в обычной диаграммной технике для электронного газа [110, стр. 120]. Таким же образом можно построить теорию возмущений для матричных функций Грина (1.21), позволяющую вычислять поправки к ним на языке фейнмановских диаграмм. Отличия заключаются в отсутствии в системе трансляционной инвариантности (напомним, что, тем не менее, в системе имеется инвариантность относительно одновременной трансляции и калибровочного преобразования) и в том, что в нашем случае каждому концу функции Грина, наряду с координатой \mathbf{r} и мнимым временем τ , присваивается также индекс подрешетки w . В диаграммах по всем переменным w_i , соответствующим четырем внутренним концам каждой вершины (1.27), должно производиться суммирование. Отметим, что проекция спина электрона, долина, в которой он находится, и слой графена (верхний или нижний — для случая бислоя) также могут быть формально включены в пространственные координаты \mathbf{r} . В результате во всех внутренних концах функции Грина, наряду с интегрированием по \mathbf{r} , будет производиться суммирование по подрешеткам, проекциям спина, долинам и по индексам слоя графена. Взаимодействие $V(x_1 - x_4)$, входящее в (1.27), не будет при этом зависеть от спинов и долин, но будет зависеть от того, в каких слоях графена находятся частицы с координатами x_1 и x_4 . Мы вернемся к этому вопросу позже при рассмотрении различных каналов уравнения для вершинной части.

Отметим также, что теория возмущений для функций Грина формулируется для случая невырожденного основного состояния системы [110, стр. 84]. В нашем случае это усло-

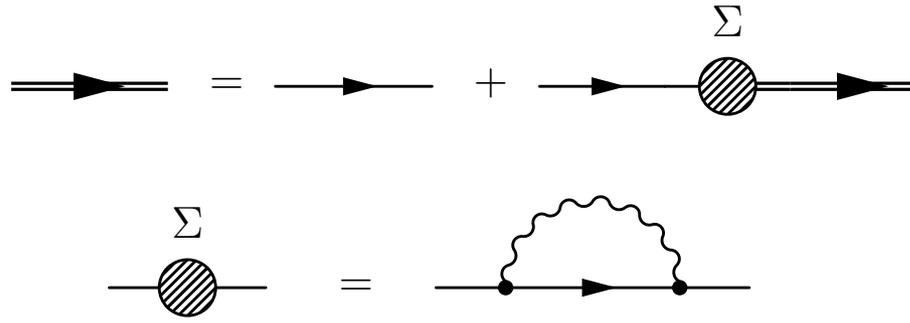


Рис. 1.9. Уравнение Дайсона (1.28) для функции Грина с учетом обменной собственной энергии Σ .

вие выполняется при целочисленном заполнении уровней Ландау в графене, или же целочисленном заполнении расщепленных по спину или долинам подуровней. В дальнейшем мы будем рассматривать только первый вариант (некоторые свойства магнитоэкситонов, образующихся во втором случае, были рассмотрены в работе [101]).

В завершение рассмотрения одночастичной функции Грина, вычислим ее с учетом кулоновского взаимодействия в приближении Хартри-Фока. При этом будем считать, что прямая собственная энергия электронов уже учтена в их химическом потенциале μ , введение которого сводится к замене $E_n^L \rightarrow E_n^L - \mu$ в выражениях (1.22), (1.24). Уравнение Дайсона для G с учетом обменной собственной энергии изображено в диаграммном виде на Рис. 1.9 и записывается аналитически как

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) = G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) + \int d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, i\varepsilon) \Sigma(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) G(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_2, i\varepsilon), \quad (1.28)$$

где функции Грина G , G_0 и обменная собственная энергия Σ являются матрицами (2×2) . Так как потенциал взаимодействия V не зависит от частоты, то Σ также не зависит от ε и дается выражением

$$\Sigma(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = -T \sum_{i\varepsilon_k} V(\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2) G_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, i\varepsilon_k) e^{i\varepsilon_k \tau}, \quad (1.29)$$

где $\tau \rightarrow +0$.

Для решения уравнения (1.28) переведем его в представление волновых функций одночастичных состояний (1.3), образующих полный набор, поскольку $\sum_{nk} \psi_{nk}(\mathbf{r}_1) \psi_{nk}^+(\mathbf{r}_2) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) I$ (I — единичная матрица (2×2)). Затравочная функция Грина в представлении таких состояний находится тривиальным образом:

$$\langle n_1 k_1 | G_0(i\varepsilon) | n_2 k_2 \rangle \equiv \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \psi_{n_1 k_1}^+(\mathbf{r}_1) G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) \psi_{n_2 k_2}(\mathbf{r}_2) = \frac{\delta_{n_1 n_2} \delta_{k_1 k_2}}{i\varepsilon - E_{n_1}^L + \mu}. \quad (1.30)$$

Подставим в выражение для собственной энергии (1.29) функцию Грина вида (1.24) и произведем суммирование по частотам [38, стр. 171]

$$T \sum_{\varepsilon_k} \frac{e^{i\varepsilon_k \tau}}{i\varepsilon_k - E_n^L + \mu} = n_F(E_n^L),$$

где $n_F(E) = [e^{(E-\mu)/T} + 1]^{-1}$ — распределение Ферми. В рассматриваемом нами случае $T = 0$ обозначим $n_F(E_n^L) = f_n$, где $f_n = 1$ для заполненных уровней Ландау n и $f_n = 0$ для пустых уровней. Далее, воспользовавшись представлением (1.5), преобразуем получившиеся интегралы:

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi_{n_1 k_1}^*(\mathbf{r}_1) \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_H} e^{i(x_1 y_2 - x_2 y_1)/l_H^2} \phi_{n'_1 n'_2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi_{n_2 k_2}(\mathbf{r}_2) = \\ = \delta_{k_1 k_2} \int d\mathbf{r} V(r) \phi_{n_1 n_2}^*(\mathbf{r}) \phi_{n'_1 n'_2}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

В результате Σ в обкладках одночастичных состояний будет равна

$$\langle n_1 k_1 | \Sigma | n_2 k_2 \rangle = -\delta_{k_1 k_2} \sum_{n'} f_{n'} \int d\mathbf{r} \Phi_{n_1 n_2}^+(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \Phi_{n'_1 n'_2}(\mathbf{r}), \quad (1.31)$$

где мы формально использовали четырехкомпонентные волновые функции $\Phi_{n_1 n_2}$ внутреннего движения магнитоэкситона (1.12). Как видно, суммирование в (1.31) производится по заполненным уровням Ландау n' , с которыми и происходит обмен.

Подставляя (1.30) и (1.31) в уравнение Дайсона (1.28), взятое в обкладках одночастичных состояний, мы получим, что из элементов $\langle n_1 k_1 | G(i\varepsilon) | n_2 k_2 \rangle$ отличными от нуля будут те, у которых $k_1 = k_2$. Кроме того, интегрирование по углу вектора \mathbf{r} с учетом (1.4) и (1.12) делает отличными от нуля только те элементы $\langle n_1 k | \Sigma | n_2 k \rangle$, для которых $|n_1| = |n_2|$, т.е. $n_1 = \pm n_2$. Таким образом, уравнение Дайсона при заданных индексах n и k превращается в систему двух уравнений для матричных элементов $\langle nk | G(i\varepsilon) | nk \rangle$ и $\langle nk | G(i\varepsilon) | -n, k \rangle$ полной функции Грина. Недиагональные элементы $\langle nk | G(i\varepsilon) | -n, k \rangle$ имеют отношение к параметру порядка, связывающему между собой электроны зоны проводимости с дырками валентной зоны. Такой параметр порядка свидетельствует о возникновении экситонного спаривания в графене в магнитном поле, которое похоже на состояние экситонного диэлектрика [46, 47, 48] и рассматривалось, например, в работах [24, 111] (и, в частности, в работах [49, 50, 51] — для графена в отсутствие магнитного поля). Мы будем пока предполагать, что экситонное спаривание не возникает, и поэтому будем считать отличными от нуля только матричные элементы $\langle nk | G(i\varepsilon) | nk \rangle$. Таким образом, полная функция Грина примет вид (по аналогии с (1.22), (1.24))

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_{nk}(\mathbf{r}_1) \psi_{nk}^+(\mathbf{r}_2)}{i\varepsilon - \xi_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_H} e^{i(x_1 y_2 - x_2 y_1)/2l_H^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{i\varepsilon - \xi_n} \times$$

$$\times 2^{\delta_{n0}-1} \begin{pmatrix} \phi_{|n|-1,|n|-1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & \text{sgn}(n)\phi_{|n|-1,|n|}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\ \text{sgn}(n)\phi_{|n|,|n|-1}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) & \phi_{|n|,|n|}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \end{pmatrix}, \quad (1.32)$$

где введены перенормированная энергия электрона на n -м уровне Ландау

$$\xi_n = E_n^L + E_n^{(\text{self})} - \mu$$

и его собственная энергия на этом уровне

$$E_n^{(\text{self})} = - \sum_{n'} f_{n'} \int d\mathbf{r} \Phi_{n_1 n_2}^+(\mathbf{r}) V(\mathbf{r}) \Phi_{n' n'}(\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

1.3.2 Уравнение для электрон-дырочной вершинной части

Поскольку мы интересуемся магнитоэкситами и магнитоплазмонами, представляющими собой суперпозиции электрон-дырочных возбуждений, то нам следует рассматривать электрон-дырочную вершинную часть, или же электрон-дырочную двухчастичную функцию Грина, полюсы которых будут соответствовать таким возбуждениям. Введем двухчастичную функцию Грина следующего вида:

$$G_{\text{II}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \langle T \psi(x_1) \psi^+(x_2) \psi^+(x_3) \psi(x_4) \rangle. \quad (1.34)$$

На диаграммах операторы уничтожения и рождения соответствуют началу и концу стрелки, обозначающей распространение электрона; так, например, одночастичной функции Грина (1.21) соответствует распространение электрона из точки 1 в точку 2. Аналогично, двухчастичной функции Грина (1.34) можно сопоставить распространение электрона из точки 1 в точку 3 и одновременное распространение дырки из точки 2 в точку 4.

Двухчастичная функция Грина (1.34) может быть разложена на сумму двух пар одночастичных функций Грина и на совокупность всех диаграмм, не распадающихся на несвязанные части, которую можно представить как точную вершинную часть Γ с «хвостами» в виде одночастичных функций Грина (по аналогии с [110, стр. 145]):

$$G_{\text{II}}(x_1, x_2, x_3, x_4) = G(x_1, x_3)G(x_4, x_2) - G(x_1, x_2)G(x_4, x_3) - \int dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 \Gamma(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) G(x_1, x'_1) G(x'_2, x_2) G(x'_3, x_3) G(x_4, x'_4). \quad (1.35)$$

Диаграммный вид формулы (1.35) представлен на Рис. 1.10. По своему смыслу вершинная часть Γ представляет собой амплитуду рассеяния электрон-дырочной пары (электрон и дырка в начальных состояниях 1 и 2 соответственно, и в конечных состояниях 3 и 4).

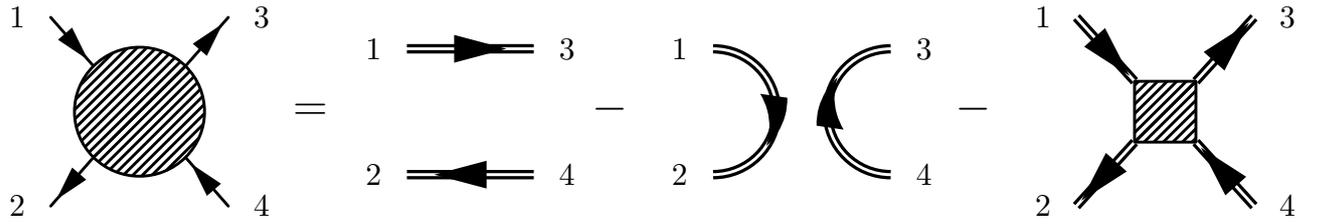


Рис. 1.10. Связь (1.35) между двухчастичной функцией Грина (заштрихованный круг) и вершинной частью (заштрихованный квадрат).

Полюсы G_{Π} , соответствующие магнитоэкситонам и магнитоплазонам, будут присутствовать и в вершинной части Γ . Следовательно, для их нахождения достаточно решить уравнения для Γ . В случае обычного двумерного электронного газа в сильном магнитном поле отбор диаграмм для вершинной части основывается на факте малости величины кулоновского взаимодействия по сравнению с расстоянием между уровнями Ландау [72]. При этом для определения энергий низколежащих возбуждений наиболее существенными являются диаграммы, соответствующие обобщенному приближению хаотических фаз. При рассмотрении более высоколежащих возбуждений будут играть существенную роль процессы их распада на возбуждения с более низкой энергией; главный вклад в такие процессы будут давать диаграммы, соответствующие экранированию прямого кулоновского взаимодействия (первого слагаемого в правой части на Рис. 1.8).

Итак, обобщенное приближение хаотических фаз для электрон-дырочной вершины является точным в пределе слабого кулоновского взаимодействия и только для низкоэнергетических возбуждений [72]. Будем пока исходить из него при дальнейшем анализе, а потом сформулируем более точно критерии его применимости для нашей системы. Аналитическое выражение, соответствующее диаграмме на Рис. 1.11, имеет вид

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \Gamma_0(x_1, x_2, x_3, x_4) - \int dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 \Gamma_0(x_1, x_2, x'_3, x'_4) \times \\ \times G(x'_3, x'_1) G(x'_2, x'_4) \Gamma(x'_1, x'_2, x_3, x_4). \quad (1.36)$$

Перейдем в уравнении (1.36) от мнимых времен τ_i к мацубаровским частотам ε_i . При этом закон сохранения энергии выразится в условии $\varepsilon_1 + \varepsilon_4 = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, благодаря которому частоту ε_4 можно опустить. Кроме того, как можно показать, вершинная часть, подчиняющаяся уравнению (1.36), будет зависеть только от комбинации частот $i\Omega = i\varepsilon_1 - i\varepsilon_2 = i\varepsilon_3 - i\varepsilon_4$, имеющей смысл суммарной энергии электрона и дырки (Γ_0 вообще не зависит от частот, поскольку она содержит только затравочное кулоновское взаимодействие $V(\mathbf{r})$). Таким

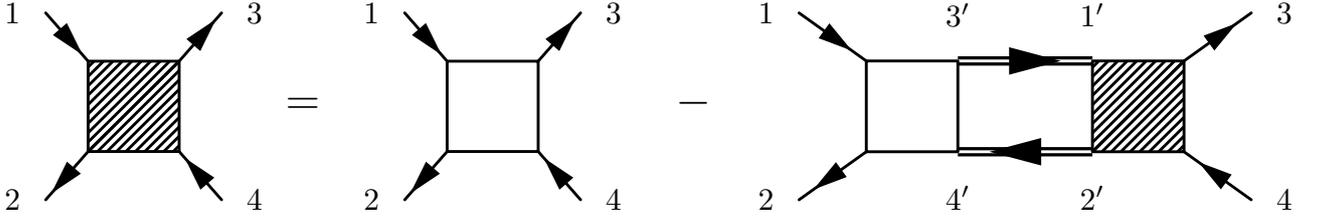


Рис. 1.11. Уравнение (1.36) для электрон-дырочной вершинной части Γ в обобщенном приближении хаотических фаз. Полная вершинная часть Γ представлена заштрихованным квадратом, затравочная вершина Γ_0 — белым квадратом.

образом, будем иметь следующее уравнение для Γ :

$$\Gamma(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, i\Omega) = \Gamma_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4) - T \sum_{\varepsilon} \int d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 d\mathbf{r}'_3 d\mathbf{r}'_4 \Gamma_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_3, \mathbf{r}'_4) \times \\ \times G(\mathbf{r}'_3, \mathbf{r}'_1, i\Omega + i\varepsilon) G(\mathbf{r}'_2, \mathbf{r}'_4, i\varepsilon) \Gamma(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, i\Omega). \quad (1.37)$$

С вершинной частью Γ удобно работать в базе волновых функций магнитоэкситонных состояний (1.13):

$$\langle n'_1 n'_2 | \Gamma(\mathbf{P}, i\Omega) | n_1 n_2 \rangle \delta(\mathbf{P} - \mathbf{P}') \equiv \sum_{w_1 w_2} \sum_{w_3 w_4} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 d\mathbf{r}_4 \Psi_{\mathbf{P}' n'_1 n'_2}^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, w_1, w_2) \times \\ \times \Gamma(\mathbf{r}_1, w_1, \mathbf{r}_2, w_2, \mathbf{r}_3, w_3, \mathbf{r}_4, w_4, i\Omega) \Psi_{\mathbf{P} n_1 n_2}(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4, w_3, w_4). \quad (1.38)$$

Затравочная вершина (1.36) в таком представлении равна

$$\langle n'_1 n'_2 | \Gamma_0(\mathbf{P}) | n_1 n_2 \rangle = V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}), \quad (1.39)$$

где введены (по аналогии с [72, 101]) матричные элементы прямого ($V^{(d)}$) и обменного ($V^{(e)}$) кулоновского взаимодействия в обкладках волновых функций внутреннего движения магнитоэкситона (1.12):

$$V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}) = \sum_{w_1 w_2} \Phi_{n'_1 n'_2}^*(\mathbf{r}, w_1, w_2) V(\mathbf{r} + l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}]) \Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}, w_1, w_2), \quad (1.40)$$

$$V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}) = - \sum_{w_1 w_2} \Phi_{n'_1 n'_2}^*(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}], w_1, w_1) V(\mathbf{P}) \Phi_{n_1 n_2}(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}], w_2, w_2). \quad (1.41)$$

В выражении (1.41) фигурирует уже фурье-образ потенциала взаимодействия $V(\mathbf{q}) = 2\pi e^2 / \varepsilon |\mathbf{q}|$.

Подставляя в (1.37) в качестве полных функций Грина G полученные в предыдущем подразделе функции (1.32) и используя соотношения (1.14) и (1.23), можно представить произведение пары функций Грина в виде разложения по магнитоэкситонным состояниям:

$$G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, i\Omega + i\varepsilon) G(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) = \sum_{n_1 n_2} \int d\mathbf{P} \frac{\Psi_{\mathbf{P} n_1 n_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{P} n_1 n_2}^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4)}{(i\varepsilon + i\Omega - \xi_{n_1})(i\varepsilon - \xi_{n_2})}$$

(напомним, что здесь переменные подрешеток w_i включены в соответствующие координаты \mathbf{r}_i). Производя суммирование по фермионной мадубаровской частоте ε , в пределе $T \rightarrow 0$ получим выражение

$$\begin{aligned} & T \sum_{\varepsilon} G(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3, i\Omega + i\varepsilon) G(\mathbf{r}_4, \mathbf{r}_2) = \\ & = \sum_{n_1 n_2} \int d\mathbf{P} \frac{f_{n_2} - f_{n_1}}{i\Omega + \xi_{n_2} - \xi_{n_1}} \Psi_{\mathbf{P}n_1 n_2}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \Psi_{\mathbf{P}n_1 n_2}^*(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4), \end{aligned} \quad (1.42)$$

которое можно трактовать как пропагатор невзаимодействующей электрон-дырочной пары, описывающий процесс распространения электрона и дырки с координатами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 соответственно в состояние с координатами \mathbf{r}_3 и \mathbf{r}_4 .

Подставляя (1.39)–(1.42) в (1.37), получим уравнение для вершинной части в представлении магнитоэкситонных состояний:

$$\begin{aligned} & \langle n'_1 n'_2 | \Gamma(\mathbf{P}, i\Omega) | n_1 n_2 \rangle = \langle n'_1 n'_2 | \Gamma_0(\mathbf{P}) | n_1 n_2 \rangle - \\ & - \sum_{k_1 k_2} \langle n'_1 n'_2 | \Gamma_0(\mathbf{P}) | k_1 k_2 \rangle \frac{f_{k_2} - f_{k_1}}{i\Omega + \xi_{k_2} - \xi_{k_1}} \langle k_1 k_2 | \Gamma(\mathbf{P}, i\Omega) | n_1 n_2 \rangle. \end{aligned}$$

Введение величин

$$B_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}(\mathbf{P}, i\Omega) = \frac{f_{n'_2} - f_{n'_1}}{i\Omega + \xi_{n'_2} - \xi_{n'_1}} \langle n'_1 n'_2 | \Gamma(\mathbf{P}, i\Omega) | n_1 n_2 \rangle,$$

позволяет переписать уравнение для вершинной части в виде матричного уравнения:

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1 k_2} \left\{ \delta_{k_1 n'_1} \delta_{k_2 n'_2} (f_{n'_2} - f_{n'_1}) (i\Omega + \xi_{n'_2} - \xi_{n'_1}) + V_{n'_1 n'_2 k_1 k_2}^{(d)}(\mathbf{P}) + V_{n'_1 n'_2 k_1 k_2}^{(e)}(\mathbf{P}) \right\} B_{k_1 k_2 n_1 n_2} = \\ & = V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}), \end{aligned} \quad (1.43)$$

где выбираются только такие индексы n'_1 и n'_2 , для которых $f_{n'_1} \neq f_{n'_2}$ (компоненты вершинной функции с остальными индексами выпадают из уравнений).

Аналитическое продолжение $i\Omega \rightarrow \Omega + i\delta$ позволяет находить из системы уравнений (1.43) значения Ω , при которых электрон-дырочная вершинная часть Γ имеет полюс и которые являются энергиями магнитоэкситонных и магнитоплазмонных возбуждений в системе. Это происходит, когда обращается в нуль определитель системы:

$$\det \left\| \delta_{M'M} S_M(\Omega - E_M) + V_{M'M}^{(d)}(\mathbf{P}) + V_{M'M}^{(e)}(\mathbf{P}) \right\| = 0. \quad (1.44)$$

Здесь $M = \{n_1, n_2\}$ и $M' = \{n'_1, n'_2\}$ обозначают магнитоэкситонные состояния, $S_M = f_{n_2} - f_{n_1}$, $E_M = \xi_{n_1} - \xi_{n_2}$ — кинетическая энергия магнитоэкситона, равная разности энергий составляющих его электрона и дырки.

Таким образом, задача о нахождении полюса электрон-дырочной вершинной части в обобщенном приближении хаотических фаз сводится к диагонализации (1.44) в обкладках магнитоэкситонных состояний гамильтониана, складывающегося из кинетической энергии электрона и дырки, и прямой и обменной энергий их кулоновского взаимодействия. Осуществляя такую диагонализацию при каждом \mathbf{P} и находя собственные значения Ω_i , можно определить дисперсионные зависимости $\Omega_i(\mathbf{P})$ всех ветвей магнитоэкситонов и магнитоплазмонов в системе, допускаемых обобщенным приближением хаотических фаз (аналогичная процедура в случае двумерного электронного газа изложена в работе [72]).

Отметим, что множество базисных магнитоэкситонных состояний $M = \{n_1, n_2\}$ в (1.44) содержит не только те состояния, в которых уровни Ландау электрона n_1 являются незаполненными, а уровни Ландау дырки n_2 заполненными, но и такие состояния, в которых ситуация обратная: n_1 — заполненные уровни Ландау, n_2 — незаполненные. Такое смешивание магнитоэкситонных и «анти-магнитоэкситонных» состояний — характерная черта многочастичной задачи, отсутствующая в двухчастичном подходе (практически прямой аналог этого эффекта — смешивание состояний электронов над и под поверхностью Ферми в электронном газе во внешнем поле [38, стр. 281]).

Если оставить в уравнении (1.44) только обменное кулоновское взаимодействие $V_{M'M}^{(e)}$, то вычисление определителя матрицы сильно упрощается с учетом того, что матричные элементы $V_{M'M}^{(e)}$ факторизуются в виде (1.41):

$$\det \left\| \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} (f_{n_2} - f_{n_1}) (\Omega + i\delta - \xi_{n_1} + \xi_{n_2}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}) \right\| = 1 - V(P)\Pi(P, \Omega). \quad (1.45)$$

Здесь введен поляризационный оператор графена [112, 113, 114]

$$\begin{aligned} \Pi(q, i\omega) &= \frac{T}{S} \sum_{\varepsilon} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} G_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, i\omega + i\varepsilon) G_0(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1, i\varepsilon) = \\ &= \sum_{n_1 n_2} \frac{f_{n_2} - f_{n_1}}{i\omega + E_{n_2}^L - E_{n_1}^L} \sum_{w_1 w_2} \left| \Phi_{n_1 n_2}(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{q}], w_1, w_2) \right|^2 \end{aligned}$$

без учета вырождения электронов по проекциям спина и долинам. Условие равенства нулю определителя (1.45), таким образом, сводится к уравнению $1 - V(P)\Pi(P, \Omega) = 0$ для дисперсии плазмонов. Если же в уравнении (1.44) оставить только прямое кулоновское взаимодействие $V_{M'M}^{(d)}$, то его решение будет эквивалентным решению задачи о магнитоэкситоне в лестничном приближении [68, 72, 101]. В следующем подразделе мы рассмотрим общее уравнение (1.44) с учетом спинов и долин электронов для случая бислоя графена.

1.3.3 Разделение каналов уравнения для вершины

В подразделе (1.3.1) мы упоминали, что проекция спина электрона, долина и номер слоя, в котором электрон находится, могут быть включены в его координату \mathbf{r} . Выделим теперь явно эти степени свободы в уравнении для вершинной части (1.37). В таком подходе состояния магнитоэкситонов будут задаваться не только магнитным импульсом \mathbf{P} и уровнями Ландау электрона (n_1) и дырки (n_2), но и спин-долинными индексами электрона (s_1) и дырки (s_2), которые могут принимать значения от 1 до 4, а также индексами слоя l_1 и l_2 электрона и дырки ($l_i = 1$ соответствует верхнему слою, $l_i = 2$ — нижнему). Все эти индексы появятся, в свою очередь, и в уравнении (1.44), так что каждое магнитоэкситонное состояние M будет задаваться набором квантовых чисел $M = \{n_1, s_1, l_1, n_2, s_2, l_2\}$. При этом матричные элементы прямого кулоновского взаимодействия (1.40) будут иметь вид

$$V_{M'M}^{(d)}(\mathbf{P}) = \delta_{s'_1 s_1} \delta_{s'_2 s_2} \delta_{l'_1 l_1} \delta_{l'_2 l_2} V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; l_1, l_2), \quad (1.46)$$

отражающий то обстоятельство, что взаимодействие сохраняет проекцию спина, долину и слой электрона и дырки, но в то же время зависит от того, в одинаковых или в разных слоях находятся электрон и дырка:

$$V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; l_1, l_2) = \frac{e^2}{\varepsilon} \sum_{w_1 w_2} \frac{\Phi_{n'_1 n'_2}^*(\mathbf{r}, w_1, w_2) \Phi_{n_1 n_2}(\mathbf{r}, w_1, w_2)}{\sqrt{(\mathbf{r} + l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}])^2 + (1 - \delta_{l_1 l_2}) D^2}}. \quad (1.47)$$

Матричные элементы обменного кулоновского взаимодействия (1.41) иначе зависят от квантовых чисел:

$$V_{M'M}^{(e)}(\mathbf{P}) = \delta_{s_1 s_2} \delta_{s'_1 s'_2} \delta_{l_1 l_2} \delta_{l'_1 l'_2} V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}; l'_1, l_1), \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(e)}(\mathbf{P}; l'_1, l_1) &= -\frac{2\pi e^2}{\varepsilon} \sum_{w_1 w_2} \frac{e^{-(1-\delta_{l'_1 l_1})|\mathbf{P}|D}}{|\mathbf{P}|} \times \\ &\times \Phi_{n'_1 n'_2}^*(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}], w_1, w_1) \Phi_{n_1 n_2}(-l_H^2 [\mathbf{e}_z \times \mathbf{P}], w_2, w_2), \end{aligned} \quad (1.49)$$

демонстрируя тот факт, что обмен, представляющий собой аннигиляцию электрона и дырки в одной точке пространства и возникновение электрон-дырочной пары в другой точке, может происходить только в том случае, если проекции спина, долины и слой одинаковы у электрона и дырки как в начальном, так и в конечном состояниях.

Что же касается кинетической энергии E_M , то составляющие ее энергии уровней Ландау E_n^L , так же, как и обменные собственные энергии $E_n^{(\text{self})}$, не зависят от проекций спинов и долин в случае отсутствия (или малости) соответствующего расщепления уровней,

который мы и рассматриваем. Однако, поскольку уровни химического потенциала в разных слоях могут быть различными, прямые и обменные собственные энергии электронов в этих слоях также будут различаться. Обозначим через $\xi_n^{(1)}$ сумму прямой и обменной собственных энергий электрона в верхнем слое на уровне Ландау n , отсчитываемую от химического потенциала μ_1 в этом слое, и аналогично $\xi_n^{(2)}$ — для нижнего слоя. Тогда входящая в (1.44) кинетическая энергия будет равна $E_M = \xi_{n_1}^{(1)} - \xi_{n_2}^{(2)}$.

Используя соотношения (1.46) и (1.48), будем разбивать входящую в определитель (1.44) полную матрицу гамильтониана на более простые неприводимые матрицы, диагонализацию которых можно проводить независимо. Для этого прежде всего заметим, что в двух подматрицах, для которых $l'_1 = l_1 \neq l'_2 = l_2$, отлично от нуля только $V^{(d)}$. Эти подматрицы соответствуют состояниям пространственно непрямых магнитоэкситонов, электрон и дырка которых находятся в разных слоях. Без ограничения общности, будем рассматривать только случай $l'_1 = l_1 = 1$, $l'_2 = l_2 = 2$, когда электрон находится в верхнем слое, а дырка — в нижнем. Задача о диагонализации такой подматрицы сводится к 16 эквивалентным задачам диагонализации для различных спиновых и долинных состояний магнитоэкситонов с различными $s'_1 = s_1$ и $s'_2 = s_2$:

$$\det \left\| \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} (f_{n_2} - f_{n_1}) (\Omega - E_{n_1 n_2}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; 1, 2) \right\| = 0. \quad (1.50)$$

Далее, неприводимая матрица с $l'_1 = l'_2$, $l_1 = l_2$ содержит отличные от нуля матричные элементы $V^{(d)}$ и $V^{(e)}$. В этой матрице можно выделить 24 подматрицы с $l'_1 = l'_2 = l_1 = l_2$ и различными $s'_1 = s_1 \neq s'_2 = s_2$, соответствующие состояниям внутрислойных (пространственно прямых) магнитоэкситонов, которые целиком располагаются в верхнем или нижнем слоях графена, но из-за несовпадения проекций спинов или долин электрона и дырки не могут участвовать в обменном взаимодействии. Их дисперсионные соотношения определяются из уравнения

$$\det \left\| \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} (f_{n_2} - f_{n_1}) (\Omega - E_{n_1 n_2}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; 1, 1) \right\| = 0. \quad (1.51)$$

Задача о диагонализации оставшейся подматрицы с $l'_1 = l'_2 \equiv l'$, $l_1 = l_2 \equiv l$, $s'_1 = s'_2 \equiv s'$, $s_1 = s_2 \equiv s$ может быть упрощена. Обозначим входящие сюда матрицы прямого (1.46) и обменного (1.48) взаимодействий в базисе состояний n_1 , n_2 как $\hat{V}^{(d)}$ и $\hat{V}_{l'l}^{(e)}$. Тогда вся неприводимая часть матрицы, которую мы рассматриваем, может быть записана как $\hat{A}_{s'l'sl} = \delta_{s'l'sl} [\hat{E} - \hat{V}^{(d)}] - \hat{V}_{l'l}^{(e)}$, где $\hat{E} = \|\delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} (f_{n_2} - f_{n_1}) (\Omega - E_{n_1 n_2})\|$ — диагональная

матрица. Задача о диагонализации такой подматрицы сводится к матричному уравнению

$$\sum_{sl} [(\hat{E} - \hat{V}^{(d)})\delta_{s's}\delta_{l'l} - \hat{V}_{l'l}^{(e)}] X_{sl} = 0, \quad (1.52)$$

в котором каждая компонента X_{sl} собственного вектора X является, в свою очередь, вектором в базисе состояний n_1, n_2 . Будем искать сначала собственный вектор в виде: $X_{sl} = \frac{1}{2}X_l$; в таком случае уравнение (1.52) после суммирования по s примет вид: $\sum_l [(\hat{E} - \hat{V}^{(d)})\delta_{l'l} - 4\hat{V}_{l'l}^{(e)}] X_l = 0$. Условие его разрешимости есть

$$\det \begin{vmatrix} \hat{E} - \hat{V}^{(d)} - 4\hat{V}_{11}^{(e)} & -4\hat{V}_{12}^{(e)} \\ -4\hat{V}_{21}^{(e)} & \hat{E} - \hat{V}^{(d)} - 4\hat{V}_{22}^{(e)} \end{vmatrix} = 0 \quad (1.53)$$

Уравнение (1.53) определяет дисперсионные зависимости магнитоплазмонов $\Omega_i(\mathbf{P})$. Множитель 4 перед матрицей обменного взаимодействия представляет собой кратность вырождения по спину и долинам. Если формально счесть его большим (предел $N \rightarrow \infty$) и в связи с этим пренебречь матрицей $V^{(d)}$, то уравнение (1.53), по аналогии с (1.45), сведется к уравнению

$$1 - 2V(P) [\Pi_1(P, \Omega) + \Pi_2(P, \Omega)] + \Pi_1(P, \Omega)\Pi_2(P, \Omega)(1 - e^{-2PD}) = 0$$

для дисперсии плазмонов в двухслойной системе, где $\Pi_{1,2}$ — поляризационные операторы верхнего и нижнего слоев графена. Плазмоны в двухслойных системах рассматривались в работах [115, 116] для случая связанных квантовых ям в отсутствие магнитного поля и в [113] для бислоя графена в магнитном поле.

Наконец, в качестве собственных векторов в (1.52) можно выбрать, например, $X_{sl} = X(\delta_{s1} - \delta_{s,n-1})/\sqrt{2}$, где $n = 1, 2, 3$. В этом случае после суммирования по s и l уравнение (1.52) примет простой вид: $[\hat{E} - \hat{V}^{(d)}] X = 0$. Условие его разрешимости

$$\det \left\| \delta_{n'_1 n_1} \delta_{n'_2 n_2} (f_{n_2} - f_{n_1})(\Omega - E_{n_1 n_2}) + V_{n'_1 n'_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; 1, 1) \right\| = 0 \quad (1.54)$$

задает дисперсионные зависимости для обычных внутрислойных магнитоэкситонов.

Итак, приняв во внимание вырождение электронов и дырок по проекциям спина и долинам, а также тот факт, что электрон и дырка могут располагаться как в одном слое графена, так и в разных слоях, мы свели задачу о диагонализации гамильтониана (1.44) к нескольким более простым задачам, уже не содержащим спиновых и долинных переменных. Как показано, совместное действие прямого и обменного кулоновского взаимодействия приводит к тому, что в спектре бислоя графена в магнитном поле появляются

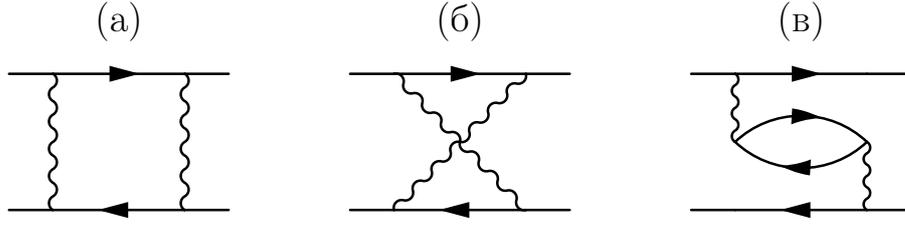


Рис. 1.12. Диаграммы второго порядка по кулоновскому взаимодействию, входящие (а) и не входящие (б,в) в лестничное приближение.

несколько ветвей возбуждений, соответствующие: 1) пространственно непрямым магнитоэкситонам (1.50), 2) внутрислойным магнитоэкситонам (1.51) и (1.54), 3) магнитоплазмонам (1.53), отвечающим плазменным колебаниям, которые охватывают сразу оба слоя графена.

Среди всех этих возбуждений нас интересуют только пространственно не прямые магнитоэкситоны, законы дисперсии которых находятся из уравнения (1.50) в рамках обобщенного приближения хаотических фаз, которое в нашем случае сводится к лестничному приближению. Существенно, что в это уравнение входит только межслойное прямое кулоновское взаимодействие $V_{n_1' n_2' n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; 1, 2)$, которое, будучи равным $e^2/\varepsilon D$ по порядку величины, в сильном магнитном поле является слабым возмущением по сравнению с разностью одночастичных энергий $E_{n_1 n_2}$, имеющей порядок v_F/l_H . Следовательно, уравнение (1.50) можно решить в первом порядке теории возмущений:

$$\Omega = E_{n_1}^L - E_{n_2}^L - \mu_1 + \mu_2 + E_{n_1}^{(\text{self})} - E_{n_2}^{(\text{self})} - V_{n_1 n_2 n_1 n_2}^{(d)}(\mathbf{P}; 1, 2). \quad (1.55)$$

В связи с этим возникает, однако, вопрос о том, насколько применимо в нашем случае лестничное приближение — даже если кулоновское взаимодействие является слабым. Как говорилось в подразделе 1.3.2 (согласно аргументации, приведенной в работе [72]), оно применимо только для низколежащих состояний магнитоэкситонов, которые не будут распадаться на магнитоэкситоны еще меньших энергий. Действительно, если мы оценим по порядку величины вклады диаграмм второго порядка по взаимодействию, приведенные на Рис. 1.12, то мы увидим, что диаграмма (а), входящая в лестничное приближение, дает вклад порядка $(e^2/\varepsilon D)^2/(\Omega + E_{k_2}^L - E_{k_1}^L)$, где k_1 и k_2 — уровни Ландау электрона и дырки, представленных внутренними линиями. Если взаимодействие не приводит к перескоку электрона и дырки между различными уровнями Ландау, т.е. $k_1 = n_1$, $k_2 = n_2$, а энергия Ω близка к истинной энергии магнитоэкситона, т.е. $|\Omega + E_{n_2}^L - E_{n_1}^L| \sim e^2/\varepsilon D$, то вклад этой

диаграммы будет сравним с вкладом диаграммы первого порядка, равным $e^2/\varepsilon D$. Вклад диаграммы на Рис. 1.12(б) равен по порядку величины $(e^2/\varepsilon D)^2/(\Omega - E_{k_1}^L - E_{k_2}^L)$, и при любом выборе k_1 и k_2 энергетический знаменатель будет велик в сильном магнитном поле; следовательно, такая диаграмма будет давать малый вклад.

Особого внимания требуют диаграммы типа изображенной на Рис. 1.12(в), отвечающие экранированию электрон-дырочного взаимодействия. Хотя в сильном магнитном поле возбуждение электрон-дырочной пары в поляризационной петле требует больших энергий порядка расстояния между уровнями Ландау, одна из линий взаимодействия будет соответствовать взаимодействию *внутри* одного слоя графена, которое не является малым. Таким образом, вклад этой диаграммы будет по порядку величины равен $(e^2/\varepsilon D) \times (e^2/\varepsilon l_H)/(v_F/l_H)$, что не мало по сравнению с вкладом от диаграммы первого порядка $e^2/\varepsilon D$ в сильном магнитном поле.

Если энергия связи магнитоэкситона меньше минимальной энергии, необходимой для возбуждения электрон-дырочной пары на диаграмме Рис. 1.12(в) (это будет происходить в достаточно сильных магнитных полях), то вклад такой диаграммы можно считать малым. Тем не менее, вопрос о влиянии экранирования взаимодействия на дисперсионные зависимости магнитоэкситонов нуждается в дополнительном исследовании.

1.3.4 Энергии рекомбинационных фотонов

В этом подразделе мы, основываясь на полученных выше результатах, вычислим энергии фотонов, испускаемых при рекомбинации пространственно непрямых магнитоэкситонов. Вычисления будем проводить в рамках приближения Хартри-Фока в пределе сильного магнитного поля, т.е. будем учитывать прямое кулоновское взаимодействие в первом порядке теории возмущений, а также прямые и обменные собственные энергии электрона и дырки.

Если отбросить энергию, связанную с переходом рекомбинирующего электрона из одного слоя графена в другой, то энергия испускаемого фотона будет равна энергии возбуждения магнитоэкситона (1.55). Энергия же межслойного перехода электрона связана с различием электрических потенциалов слоев и химических потенциалов, установленных внутри них. Пусть верхний и нижний слои графена имеют электрические потенциалы V_1 и V_2 соответственно, отсчитываемые от одной и той же точки, а химические потенциалы в них равны, соответственно, μ_1 и μ_2 . Тогда энергия, выделяющаяся при переносе элект-

трона из верхнего слоя в нижний, будет равна $\mu_2 - \mu_1 - e(V_1 - V_2)$. Прибавляя ее к (1.55), получим энергию фотона, испускаемого при рекомбинации магнитоэкситона с уровнями Ландау электрона и дырки n_1 и n_2 , и магнитным импульсом P :

$$E_\gamma = E_{n_1}^L - E_{n_2}^L - e(V_1 - V_2) + E_{n_1}^{(\text{self})} - E_{n_2}^{(\text{self})} - V_{n_1 n_2 n_1 n_2}^{(\text{d})}(\mathbf{P}; 1, 2). \quad (1.56)$$

Энергии уровней Ландау E_n^L даются формулой (1.6). Входящие в (1.56) дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов (1.15), равные $\Delta E_{n_1 n_2}(P) = -V_{n_1 n_2 n_1 n_2}^{(\text{d})}(\mathbf{P}; 1, 2)$, достаточно подробно обсуждались в подразделе 1.2.3. При вычислении обменных собственных энергий электрона и дырки будем исходить из принятого там же предположения о том, что в бислое графена создаются равновесные локальные пары при помощи такого характера допирования, что в верхнем слое заполнены все уровни Ландау вплоть до $n_1 - 1$, а в нижнем — все вплоть до n_2 (см. Рис. 1.1). Тогда обменные собственные энергии (1.33) с учетом (1.47) будут равны:

$$E_{n_1}^{(\text{self})} = - \sum_{n'=-\infty}^{n_1-1} V_{n_1 n_1 n' n'}^{(\text{d})}(0; 1, 1), \quad E_{n_2}^{(\text{self})} = - \sum_{n'=-\infty}^{n_2} V_{n_2 n_2 n' n'}^{(\text{d})}(0; 1, 1). \quad (1.57)$$

Подставляя (1.12) и (1.4) в (1.47), получим

$$V_{nnn'n'}^{(\text{d})}(0; 1, 1) = \frac{e^2}{\varepsilon l_H} \times 2^{\delta_{n_0} + \delta_{n'_0} - 2} \left\{ I_{|n|-1, |n'|-1}^0 + 2 \operatorname{sgn}(nn') I_{|n|-1, |n'|-1}^1 + I_{|n||n'|}^0 \right\}, \quad (1.58)$$

где (см. [117])

$$\begin{aligned} I_{nn'}^m &= \sqrt{\frac{n!n'!}{2(n+m)!(n'+m)!}} \int_0^\infty x^{m-1/2} e^{-x} L_n^m(x) L_{n'}^m(x) dx = \\ &= \sqrt{\frac{(n+m)!}{2(n'+m)!n!n'!}} \frac{\Gamma(m+1/2)\Gamma(n'+1/2)}{m!\sqrt{\pi}} {}_3F_2\left(-n, m + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; m+1, \frac{1}{2} - n'; 1\right), \end{aligned} \quad (1.59)$$

${}_3F_2$ — обобщенный гипергеометрический ряд, сводящийся в данном случае к конечной сумме, содержащей $n+1$ слагаемое. Асимптотика (1.59) при больших n' есть

$$\begin{aligned} I_{nn'}^m &= \sqrt{\frac{(m+n)!}{2n!}} \frac{\Gamma(m+1/2)}{m!\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{n'^{(m+1)/2}} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{8n'^{(m+3)/2}} \left[\frac{2n(2m+1)}{m+1} - 2m^2 - 2m - 1 \right] \right\} + \mathcal{O}\left[\frac{1}{n'^{(m+5)/2}}\right]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Определим теперь асимптотику слагаемых в разности обменных собственных энергий электрона и дырки (1.57) при больших по модулю отрицательных n' . Подставляя (1.60) в (1.58), получим

$$\begin{aligned} -V_{n_1 n_1 n' n'}^{(\text{d})}(0; 1, 1) + V_{n_2 n_2 n' n'}^{(\text{d})}(0; 1, 1) &= \frac{e^2}{\varepsilon l_H} \left\{ \left[\sqrt{|n_1|} \operatorname{sgn}(n_1) - \sqrt{|n_2|} \operatorname{sgn}(n_2) \right] \times \right. \\ &\left. \times \frac{1}{4\sqrt{2n'}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n'^{3/2}}\right) \right\} = \frac{e^2}{\varepsilon v_F} (E_{n_1}^L - E_{n_2}^L) \left[\frac{1}{8\sqrt{2n'}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n'^{3/2}}\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, разность собственных энергий электрона и дырки $E_{n_1}^{(\text{self})} - E_{n_2}^{(\text{self})}$ логарифмически расходится при суммировании по n' , если $n_1 \neq n_2$, или же сводится к одному слагаемому $V_{n_1 n_1 n_1 n_1}^{(d)}(0; 1, 1)$, если $n_1 = n_2$. В первом случае для получения конечного ответа мы можем сделать обрезание суммирования по n' , выполняя его начиная от нижнего уровня Ландау $-n_c$ (по аналогии с [101]). Чтобы оценить количество уровней Ландау n_c в заполненной валентной зоне, найдем при помощи выражения (1.7) число электронов в одной элементарной ячейке графена площадью $S_0 = a^2\sqrt{3}/2$ ($a = 2.46 \text{ \AA}$ — постоянная решетки) при заполнении n_c уровней Ландау:

$$\sum_{s=1}^4 \sum_{n=-n_c}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{S_0} d\mathbf{r} \psi_{nk}^+(\mathbf{r}) \psi_{nk}(\mathbf{r}) = \frac{2n_c S_0}{\pi l_H^2}$$

(суммирование по s отвечает учету вырождения электронов по спину и долинам). Поскольку реально в каждой элементарной ячейке находятся два валентных электрона, то для уровня обрезания получаем $n_c = \pi l_H^2 / S_0 = 2\pi l_H^2 / \sqrt{3}a^2 \approx 39600/B$ [Тл]. В типичных магнитных полях $B \approx 20$ Тл получаем $n_c \approx 1980$. Значения $E_{n_1}^{(\text{self})} - E_{n_2}^{(\text{self})}$ в единицах $E_0 = (e^2/\varepsilon l_H) \sqrt{\pi/2} \approx 0.07 \text{ эВ} \times \sqrt{B [\text{Тл}]} / \varepsilon$ при небольших n_1 и n_2 приведены в нижеследующей таблице:

	$n_2 = 3$	$n_2 = 2$	$n_2 = 1$	$n_2 = 0$	$n_2 = -1$	$n_2 = -2$	$n_2 = -3$
$n_1 = 3$	0.503	0.662	0.911	1.906	2.578	2.700	2.790
$n_1 = 2$	0.407	0.566	0.816	1.810	2.483	2.604	2.694
$n_1 = 1$	0.279	0.438	0.688	1.682	2.355	2.476	2.566
$n_1 = 0$	-0.403	-0.244	0.005	1	1.673	1.794	1.884
$n_1 = -1$	-1.388	-1.229	-0.980	0.015	0.688	0.809	0.899
$n_1 = -2$	-1.631	-1.472	-1.222	-0.228	0.445	0.566	0.656
$n_1 = -3$	-1.784	-1.624	-1.375	-0.381	0.292	0.415	0.503

Можно оценить, что при $B \approx 20$ Тл энергии фотонов (1.56), имеющие порядок E_0 , будут лежать в дальнем инфракрасном диапазоне.

Законы сохранения энергии и импульса обеспечивают возможность рекомбинации магнитоэкситонов лишь с $P = 0$; однако, прикладывание дополнительного магнитного поля H_{\parallel} , параллельного плоскости слоев графена, приводит к эффективному сдвигу дисперсионной зависимости на величину $\Delta P = eDH_{\parallel}/2c$ и позволяет «сканировать» ее в экспериментах [94, 95].

1.4 Выводы

Итак, в данной главе были изучены свойства магнитоэкситонов в графене и пространственно непрямых магнитоэкситонов в бислое графена в сильном магнитном поле. Сначала была рассмотрена двухчастичная задача о магнитоэкситоне в графене; при помощи магнитного импульса было разделено движение магнитоэкситона как целого и относительное движение электрона и дырки. В нулевом порядке по кулоновскому взаимодействию для разных состояний магнитоэкситона, характеризующихся различными уровнями Ландау электрона и дырки, были найдены четырехкомпонентные волновые функции их относительного движения. Учет взаимодействия в первом порядке теории возмущений позволил найти дисперсионные зависимости магнитоэкситона в различных состояниях. Было проведено их разложение при малых импульсах, позволяющее найти энергию связи и эффективную массу магнитоэкситона. Величина последней может быть использована для оценки температуры бозе-конденсации разреженного газа магнитоэкситонов в бислое графена.

Далее, с использованием аппарата матричных функций Грина была рассмотрена многочастичная задача о магнитоэкситоне в графене и бислое графена. При этом рассматривался случай невырожденного основного состояния, соответствующий целочисленному заполнению уровней Ландау. В приближении Хартри-Фока были найдены функции Грина электронов в графене, помещенном в магнитном поле. В обобщенном приближении хаотических фаз были рассмотрены двухчастичная функция Грина и вершинная часть электрон-дырочного рассеяния, полюсы которых соответствуют магнитоэкситонным и магнитоплазмонным возбуждениям. Было показано, что уравнение для вершинной части в случае бислоя графена разделяется на каналы, соответствующие прямым магнитоэкситонам, пространственно непрямых магнитоэкситонам и магнитоплазмонам.

Показано, что учет кулоновского взаимодействия в первом порядке теории возмущений для низколежащих состояний пространственно непрямых магнитоэкситонов оправдан в случае сильного магнитного поля или больших межслойных расстояний. Наконец, в приближении Хартри-Фока были вычислены энергии фотонов, испускаемых при рекомбинации пространственно непрямых магнитоэкситонов и складывающиеся из прямых и обменных собственных энергий электрона и дырки, а также из энергии их кулоновского взаимодействия. При этом существенный вклад в полную энергию магнитоэкситона возникает из-за обмена с заполненной валентной зоной.

Среди задач, связанных с дальнейшим исследованием электрон-дырочных возбуждений в графене, помещенном в магнитное поле, можно отметить следующие. Во-первых, актуальным является поиск проявлений магнитоэкситонных и магнитоплазмонных возбуждений, например, в спектрах фотопоглощения [118], комбинационного рассеяния [119], в расщеплении энергий фононов [120] и других наблюдаемых характеристиках. С фундаментальной точки зрения важным является вопрос о влиянии экранирования взаимодействия и смешивания уровней Ландау на свойства магнитоэкситонов и магнитоплазмонов в графене и структурах на его основе. С практической точки зрения интересен вопрос о возбуждении магнитоэкситонных поляритонов в графене, помещенном в микрополость, и осуществлении их бозе-конденсации [109]. Наконец, можно указать на тесно связанный с проблемой электрон-дырочных возбуждений вопрос о возможных перестройках основного состояния электронного газа графена в магнитном поле в результате кулоновского взаимодействия. Примеры таких перестроек, активно изучаемых в настоящее время теоретически и экспериментально — это переход в состояние экситонного диэлектрика [24, 111] и имеющее коллективную природу расщепление уровня Ландау $n = 0$ (см. напр. [121, 122] и цит. лит.).

Глава 2

Электрон-дырочное спаривание в бислое графена

2.1 Введение

Если в вырожденной системе фермионов существует притяжение между частицами, то при достаточно низких температурах происходит их спаривание — переход системы в такое состояние, в котором возникают парные корреляции в движении частиц с противоположными импульсами, выражающиеся в существовании недиагонального дальнего порядка, и образуется щель в спектре одночастичных возбуждений. Микроскопическая теория такого явления впервые была построена Бардиным, Купером и Шриффером (БКШ) применительно к спариванию электронов в сверхпроводниках, вызванному обменом фононами [73]. Индуцированное фононами эффективное электрон-электронное притяжение является относительно слабым, что позволяет сверхпроводимости проявляться только при низких температурах. Гораздо более сильное притяжение, обеспечивающее спаривание при высоких температурах, может быть достигнуто за счет кулоновских сил между электронами и дырками. Такой тип спаривания осуществляется в полуметаллах или полупроводниках с узкой запрещенной зоной, в которых образование экситонов — связанных электрон-дырочных пар — является энергетически выгодным. Электрон-дырочное спаривание в таких системах приводит к состоянию экситонного диэлектрика, в котором зонная структура перестраивается с образованием щели (см. напр. [46, 47, 48] и цит. лит.). В состоянии экситонного диэлектрика, однако, невозможна сверхпроводимость в силу электрической нейтральности системы. Кроме того, переходы между зонами спаривающихся частиц при-

водят к фиксации фазы параметра порядка и тем самым делают невозможной и сверхтекучесть.

Другой подход к осуществлению спаривания электронов и дырок включает их пространственно разделение, которое может быть осуществлено, например, в связанных полупроводниковых квантовых ямах (СКЯ) (см. напр. [74, 75, 115, 123, 124, 125, 126, 127]). В такой системе переходы между зонами спаривающихся частиц включают в себя туннелирование электрона из одной квантовой ямы в другую и поэтому могут быть подавлены при наличии диэлектрического барьера между ними. Электроны и дырки в системе могут быть созданы лазерной накачкой и, если их энергетическая релаксация происходит достаточно быстро, а времена их рекомбинации достаточно большие, может быть достигнуто квазиравновесное состояние электрон-дырочной системы, в которой будет происходить спаривание. Возможна также ситуация, когда электроны в одной квантовой яме и дырки в другой создаются равновесным образом посредством соответствующего допирования. Сверхтекучее движение конденсата электрон-дырочных пар будет проявляться в виде незатухающих электрических токов, движущихся по разным квантовым ямам в противоположных направлениях [115]. Кроме того, при наличии слабого туннелирования между ямами возможны эффекты, подобные эффектам Джозефсона [127]. Признаки возникновения конденсата пар были обнаружены экспериментально в ходе дальнейших исследований электрон-дырочного спаривания в таких системах [93, 128, 129, 130] (см. также [131, 132] и цит. лит.).

Если концентрация пространственно разделенных электронов и дырок в СКЯ велика, то спаривание происходит при совпадении их поверхностей Ферми и описывается теорией БКШ. Однако, при малой концентрации электроны и дырки образуют локализованные экситоноподобные пары; взаимное отталкивание таких пар из-за диполь-дипольного взаимодействия обеспечивает потенциальный барьер, препятствующий перекрытию их волновых функций. Следовательно, разреженный газ электрон-дырочных пар ведет себя как газ отталкивающихся бозонов, в котором при низких температурах может происходить бозе-эйнштейновская конденсация (БЭК) [107, 123]. Переход от состояния типа БКШ при высокой плотности к состоянию типа БЭК при низкой плотности является плавным и носит название *кроссовера БКШ-БЭК*. Это общее явление может происходить в различных системах спаривающихся фермионов [76] при изменении *силы связи* — параметра, количественно характеризующего силу притяжения между частицами (в данном случае

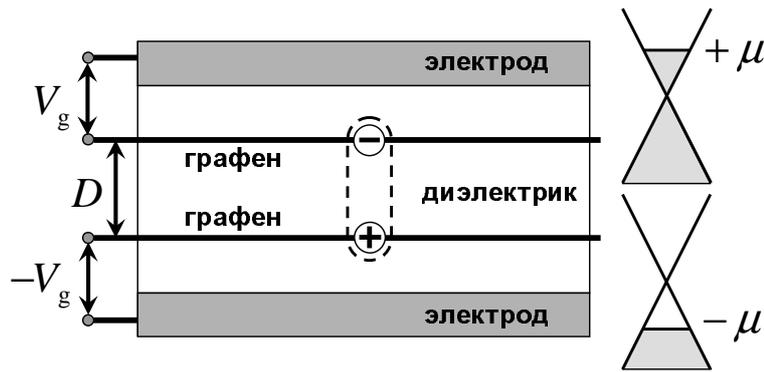


Рис. 2.1. Схема реализации спаривания пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена. Справа показаны уровни химических потенциалов μ и $-\mu$ в верхнем и нижнем слоях графена, устанавливаемые затворными напряжениями V_g и $-V_g$ соответственно.

параметр силы связи может быть связан с отношением среднего расстояния между частицами к боровскому радиусу электрон-дырочной пары). В системе электронов и дырок в СКЯ, однако, плавность кроссовера может нарушаться из-за корреляционных эффектов, приводящих к возникновению экситонной жидкости [124, 126].

В данной главе будет рассмотрена похожая система с пространственно разделенными электронами и дырками, но изготовленная на основе двух параллельных слоев графена, разделенных слоем диэлектрика толщиной D (Рис. 2.1). Прикладывая напряжение V_g между листом графена и затворным электродом, отделенным от него изолирующим слоем, можно регулировать плотность заряда на обкладках образующегося плоского конденсатора [18], емкость которого на единицу площади равна $C/S = \epsilon/4\pi d$, где ϵ — диэлектрическая проницаемость среды, d — расстояние между листом графена и электродом. Концентрация носителей заряда в графене будет равна $n = \epsilon V_g / 4\pi e d$, а их химический потенциал, отсчитываемый от дираковской точки, есть $\mu = v_F \sqrt{\pi n}$. Поскольку в химически чистом графене $\mu = 0$, то, прикладывая напряжение V_g разных знаков, можно создавать либо некоторую концентрацию электронов ($V_g > 0$, $\mu > 0$), либо некоторую концентрацию дырок ($V_g < 0$, $\mu < 0$). Максимальные значения концентрации носителей и химического потенциала, достижимые при химическом допировании составляют порядка $n \sim 10^{13} \text{ см}^{-2}$ и $\mu \sim 0.3 \text{ эВ}$ [20]. В дополнение к электрическому, возможны также химический [133] и электрохимический [134] способы допирования, обеспечивающие большие значения n и μ .

Наличие двух затворных электродов в бислое графена позволяет независимо регулиро-

вать химические потенциалы в каждом слое графена. Если установить в двух слоях противоположные химические потенциалы μ и $-\mu$ (см. Рис. 2.1), то, в силу электрон-дырочной симметрии в графене, они создадут равные концентрации электронов (в верхнем слое) и дырок (в нижнем слое). В таком случае, из-за совпадения поверхностей Ферми электронов и дырок и кулоновского притяжения между ними, система окажется неустойчивой по отношению к спариванию электронов и дырок с противоположными импульсами, аналог которого для СКЯ описывался выше. В то время, как в лучших образцах СКЯ расстояние между электронами и дырками имеет порядок десятков нанометров (см. напр. [135]), в бислое графена, благодаря атомарной толщине слоев, электроны и дырки могут быть сближены на гораздо меньшие расстояния, что обеспечивает более сильное кулоновское притяжение. В недавних экспериментах [65, 66] были изготовлены образцы бислоя графена, в которых слои разделены воздушным промежутком, и расстояние между ними составляет несколько ангстрем.

Возникновение электрон-дырочного спаривания в бислое графена можно проявляться в эксперименте через особенности в эффекте кулоновского увлечения (например, для случая СКЯ было показано, что конденсация пар приводит к резкому увеличению транспроводимости [136, 137, 138]). Другая возможность — это наблюдение эффектов, подобных эффекту Джозефсона [127]. Кроме того, конденсация меняет характер отклика системы на внешнее электромагнитное поле. В частности, наложение внешнего магнитного поля, направленного в плоскости слоев графена, ведет к появлению незатухающих токов, которые могут быть обнаружены непосредственно [127, 139].

В последующих разделах будет исследовано спаривание электронов и дырок в режимах слабой и сильной связи и показано, что спаривание в бислое графена имеет ряд особенностей, главная из которых — это отсутствие кроссовера БКШ-БЭК.

2.2 Режим слабой связи

2.2.1 Модель спаривания

В данном разделе мы рассмотрим электрон-дырочное спаривание в бислое графена в режиме слабой связи (см. [56]), охватывающее лишь узкие слои импульсного пространства в окрестности поверхностей Ферми электронов и дырок (Рис. 2.2). Для такого случая мы сформулируем БКШ-подобную модель спаривания и с ее помощью определим параметры

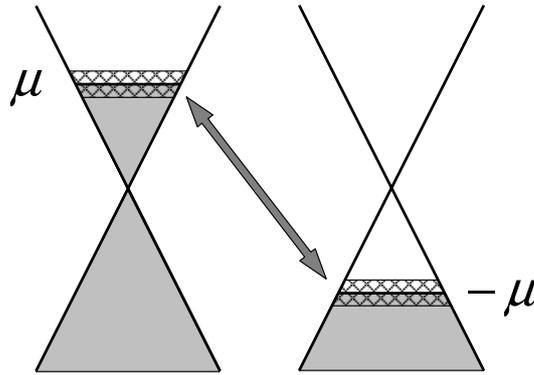


Рис. 2.2. Спаривание электронов и дырок в бислое графена в режиме слабой связи, когда парные корреляции охватывают лишь узкие слои импульсного пространстве в окрестности поверхностей Ферми электронов и дырок (показаны штриховкой).

системы, управляющие силой связи.

Вблизи двух неэквивалентных точек касания зон (дираковских точек) динамика свободных электронов графена описывается эффективным уравнением [4, 6]

$$v_F(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})\psi = E\psi, \quad (2.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y\}$ — двумерный вектор, составленный из матриц Паули, ψ — двухкомпонентная волновая функция электрона, компоненты которой являются огибающими блоховских волн, построенных на двух подрешетках кристаллической решетки графена. Решениями уравнения (2.1) являются волновые функции

$$\psi_{\mathbf{p}\gamma}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} f_{\mathbf{p}\gamma}, \quad f_{\mathbf{p}\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \\ \gamma e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

имеющие вид плоской волны, умноженной на спинор $f_{\mathbf{p}\gamma}$, где φ — азимутальный угол вектора импульса \mathbf{p} , отсчитываемый от некоторого фиксированного направления, $\gamma = \pm 1$ — индекс зоны, в которой находится электрон. При $\gamma = +1$ электрон находится в зоне проводимости и его энергия (отсчитываемая от дираковской точки) равна $E = v_F|\mathbf{p}|$, а при $\gamma = -1$ электрон находится в валентной зоне и его энергия равна $E = -v_F|\mathbf{p}|$. Напомним также, что состояния электронов в графене четырехкратно вырождены по проекциям спина и долинам.

Для описания спаривания при слабой связи достаточно учесть электроны из зоны проводимости верхнего слоя и дырки из валентной зоны нижнего слоя графена (см. Рис. 2.2). Существенным для спаривания является их кулоновское взаимодействие между собой;

однако, кулоновское взаимодействие в пределах каждого из слоев графена также играет важную роль, приводя к экранированию межслойного электрон-дырочного взаимодействия. Таким образом, эффективный вторично-квантованный гамильтониан системы (без учета вырождения по проекциям спина и долинам) может быть записан в виде:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}) - \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \cos \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} a_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}_2} a_{\mathbf{p}_1}, \quad (2.3)$$

где $a_{\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения дираковского электрона в состоянии (2.2), находящегося в зоне проводимости ($\gamma = +1$) верхнего слоя графена, $b_{\mathbf{p}}$ — оператор уничтожения дырки, находящейся в валентной зоне ($\gamma = -1$) нижнего слоя графена, $\xi_{\mathbf{p}} = v_F |\mathbf{p}| - \mu$ — энергии электронов и дырок, отсчитываемые от их химических потенциалов, $V(\mathbf{q})$ — экранированный потенциал кулоновского межслойного электрон-электронного взаимодействия (взаимодействие между пространственно разделенными электроном и дыркой есть, соответственно, $-V(\mathbf{q})$). Специфический для графена множитель $\cos(\varphi_1/2) \cos(\varphi_2/2)$, где $\varphi_1 = \varphi_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}_1}$, $\varphi_2 = \varphi_{\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}} - \varphi_{\mathbf{p}_2}$ — углы рассеяния электрона и дырки, возникает в результате свертки по компонентам спинорных волновых функций (2.2) электрона и дырки до и после акта рассеяния.

Рассмотрим теперь, в рамках подхода БКШ [73], часть гамильтониана (2.3), отвечающую за спаривание электронов и дырок с противоположными импульсами:

$$H = \sum_{\mathbf{p}} \xi_{\mathbf{p}} (a_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}}) - \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{p} \mathbf{q}} V(\mathbf{q}) \frac{1 + \cos \varphi}{2} a_{\mathbf{p} + \mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{p} - \mathbf{q}}^+ b_{-\mathbf{p}} a_{\mathbf{p}}, \quad (2.4)$$

где φ — угол между \mathbf{p} и $\mathbf{p} + \mathbf{q}$, т.е. угол рассеяния, равный для электрона и дырки. Множитель $(1 + \cos \varphi)/2$ имеет смысл коэффициента перекрытия состояний электрон-дырочной пары до и после акта взаимодействия. Гамильтониан (2.4) может быть диагонализирован при помощи преобразований Боголюбова:

$$a_{\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}}^+, \quad b_{-\mathbf{p}} = u_{\mathbf{p}} \beta_{\mathbf{p}} - v_{\mathbf{p}} \alpha_{\mathbf{p}}^+.$$

Вводя традиционные обозначения

$$u_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right), \quad v_{\mathbf{p}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{p}}}{E_{\mathbf{p}}} \right), \quad u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} = \frac{\Delta_{\mathbf{p}}}{2E_{\mathbf{p}}}, \quad E_{\mathbf{p}} = \left(\xi_{\mathbf{p}}^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2 \right)^{1/2},$$

получаем самосогласованное уравнение для щели

$$\Delta_{\mathbf{p}} = \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^2} V(\mathbf{q}) \frac{1 + \cos \varphi}{2} \frac{\Delta_{\mathbf{p} + \mathbf{q}}}{2E_{\mathbf{p} + \mathbf{q}}}, \quad (2.5)$$

в котором мы перешли от суммирования к интегрированию по \mathbf{q} . Заметим, что уравнение (2.5) отличается от своего аналога для СКЯ [115] в двух аспектах. Во-первых, это линейная зависимость $\xi_{\mathbf{p}}$ от \mathbf{p} , вместо квадратичной в СКЯ; однако, вблизи энергии Ферми дисперсионная зависимость может быть линеаризована, так что это отличие несущественно. Второе отличие — это присутствие коэффициента перекрытия $(1 + \cos \varphi)/2$, который подавляет обратное рассеяние в графене [52]. В случае слабой связи этот коэффициент обращается в единицу благодаря преобладанию малых углов рассеяния в интеграле в уравнении (2.5), но в случае сильной связи он может ослабить спаривание.

2.2.2 Управляющие параметры системы

В уравнении (2.5) главный вклад в интеграл дает область вблизи энергии Ферми, в которой динамически экранированное межслойное электрон-дырочное взаимодействие $-V(\mathbf{q}, \omega)$ является притягивающим. В приближении хаотических фаз [116, 115]

$$V(\mathbf{q}, \omega) = \frac{v_q e^{-qD}}{1 - v_q(\Pi_1 + \Pi_2) + v_q^2 \Pi_1 \Pi_2 (1 - e^{-2qD})}, \quad (2.6)$$

где $v_q = 2\pi e^2/\varepsilon q$ — фурье-образ неэкранированного взаимодействия, $\Pi_{1,2} = \Pi_{1,2}(q, \omega)$ — поляризационные операторы верхнего и нижнего слоев графена. В случае равных концентраций электронов и дырок, благодаря электрон-дырочной симметрии графена, поляризуемость обоих слоев одинакова: $\Pi_1 = \Pi_2 \equiv \Pi$. Условие равенства нулю знаменателя (2.6)

$$1 - 2v_q \Pi(q, \omega) + v_q^2 \Pi^2(q, \omega)(1 - e^{-2qD}) = 0 \quad (2.7)$$

описывает две ветви $\omega_{\pm}(q)$ плазмонной дисперсии в бислое, соответствующие синфазным (верхняя ветвь ω_+) и противофазным (нижняя ветвь ω_-) плазменным колебаниям [45, 116, 115]. Таким образом, при каждом заданном q взаимодействие $-V(\mathbf{q}, \omega)$ (2.6) является притягивающим в области $0 < \omega < \omega_-(q)$, отталкивающим при $\omega_-(q) < \omega < \omega_+(q)$ и снова притягивающим при $\omega > \omega_+(q)$.

Режим слабой связи (или режим БКШ) имеет место, если ширина области спаривания вблизи энергии Ферми является малой по сравнению с размером самой сферы Ферми. В таком случае можно приближенно разделить радиальное интегрирование по переменной $\xi \equiv \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}$ в уравнении для щели (2.5) и интегрирование по углу φ . Интегрирование по ξ мы будем проводить в пределах области, ограниченной энергией обрезания w , в которой динамически экранированное электрон-дырочное взаимодействие является притягивающим.

На поверхности Ферми последнее превращается в *статически* экранированный потенциал $V(\mathbf{q}) \equiv V(\mathbf{q}, \omega = 0)$, который мы и будем использовать при интегрировании по φ .

Предположим, что главный вклад в интеграл в (2.5) дают малые q , не превышающие по порядку величины некоторое характерное значение \tilde{q} . Определим \tilde{q} , например, как величину импульса, на которой статически экранированное взаимодействие спадает в два раза: $V(\tilde{q}) = V(0)/2$. Явный вид $V(\mathbf{q})$ определяется статической поляризуемостью в длинноволновом пределе [40, 44, 45]

$$\Pi(q, 0) \approx -4\mathcal{N}, \quad \mathcal{N} = \frac{\mu}{2\pi v_F^2}, \quad (2.8)$$

где \mathcal{N} — плотность состояний на поверхности Ферми в расчете на одну проекцию спина и одну долину электрона.

Введем импульс Ферми $p_F = \mu/v_F$ и безразмерный параметр

$$r_s = \frac{e^2}{\varepsilon v_F} \approx \frac{2.19}{\varepsilon}, \quad (2.9)$$

определяющий отношение характерной величины кулоновской энергии квантовой системы к ее характерной кинетической энергии [38, стр. 380] [45]. В двумерной полупроводниковой системе величина r_s увеличивается с ростом концентрации носителей заряда, но в графене она определяется только диэлектрической проницаемостью ε окружающей среды.

В рассматриваемой системе имеются три характерные длины: радиус томас-фермиевского экранирования $1/2p_F r_s$, межслойное расстояние D и среднее расстояние между носителями заряда $l \sim 1/p_F$ в каждом из слоев графена. Поведение системы зависит от соотношений между этими тремя длинами, которые определяются двумя безразмерными параметрами r_s и $p_F D$ (отметим, что при спаривании пространственно разделенных электронов и дырок в СКЯ поведение системы также определяется двумя параметрами r_s и $p_F D$, но с другим выражением для r_s [140, 141]).

Поставляя (2.8) в (2.6) с учетом (2.9), получим длинноволновое выражение для статически экранированного взаимодействия:

$$V(q) = \frac{1}{\mathcal{N}} \frac{r_s e^{-qD}}{q/p_F + 8r_s + (16r_s^2 p_F/q)(1 - e^{-2qD})}. \quad (2.10)$$

Характерный импульс \tilde{q} легко может быть найден из (2.10) в двух предельных случаях: $r_s p_F D \gg 1$ и $r_s p_F D \ll 1$. В первом случае эффективное обрезание по импульсу происходит из-за множителя e^{-qD} в числителе (2.10), и мы получаем $\tilde{q} \approx 2/D$. Во втором случае обрезание определяется томас-фермиевским экранированием в знаменателе, и мы получаем

$\tilde{q} \approx 8r_s p_F$. Оба результата могут быть записаны в виде

$$\tilde{q} = \min\left(8r_s p_F, \frac{2}{D}\right). \quad (2.11)$$

Энергия обрезания w определяется характерной частотой нижней ветви плазменных колебаний, при которой взаимодействие меняет знак, и может быть оценена как $w \approx \omega_-(\tilde{q})$. В приближении хаотических фаз поляризационный оператор в пределе $q \rightarrow 0$, $\omega > v_F q$ равен [44, 45]

$$\Pi(q, \omega) \approx \mathcal{N} \frac{2q^2 v_F^2}{\omega^2}. \quad (2.12)$$

В случае, когда $r_s p_F D \gg 1$, из (2.7) и (2.12) находим $\omega_-(q) = v_F q \sqrt{2r_s p_F D}$ и $\omega_+(q) = 2v_F \sqrt{r_s p_F q}$. Следовательно, энергия обрезания, с учетом (2.11), равна $w \approx 2\mu \sqrt{2r_s/p_F D}$. В том же случае, когда $r_s p_F D \ll 1$, приближенное выражение (2.12) неприменимо, так как формально найденная из него нижняя ветвь плазменных колебаний попадает в область одночастичных возбуждений $\omega < v_F q$. На самом деле, в этом случае $\omega_-(q) \approx v_F q$ и $\omega_+(q) = 2v_F \sqrt{r_s p_F q}$, и энергия обрезания равна $w \approx 8\mu r_s$.

Электрон-дырочные куперовские пары имеют размер порядка $1/\tilde{q}$ в направлении, параллельном слоям графена. Режим слабой связи требует малости среднего расстояния между соседними парами по сравнению с размером одной пары, т.е. $\tilde{q}l \ll 1$. Используя (2.11), можно сделать вывод, что режим слабой связи имеет место в том случае, если $r_s \ll 1$ или $p_F D \gg 1$. В этом случае, как следует из вышеизложенного, энергетическая полуширина слоя спаривания мала по сравнению с химическим потенциалом, $w \ll \mu$, что и предполагалось изначально (см. Рис. 2.2).

2.2.3 Результаты и обсуждение

Спаривание в бислое графена не обязательно должно быть s -волновым, как в традиционных сверхпроводниках. Из-за пространственного разделения электронов и дырок принцип Паули не накладывает никаких ограничений на относительный угловой момент, проекции спинов и долины спаривающихся электронов и дырок. Однако, поскольку экранированный потенциал (2.10) монотонно убывает с ростом q , то константа связи, возникающая после интегрирования в уравнении для щели (2.5), будет максимальной при s -волновом спаривании, которое и будет рассматриваться в дальнейшем.

Для оценки величины щели при слабой связи положим, в духе теории БКШ [73], что щель отлична от нуля и постоянна в слое спаривания энергетической полушириной w :

$\Delta_p = \Delta \Theta(w - |\xi_p|)$. При этом интегральное уравнение для щели (2.5) превращается в следующее алгебраическое уравнение относительно Δ :

$$\ln \frac{2w}{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} V \left(2p_F \left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| \right) \frac{1 + \cos \varphi}{2} = 1. \quad (2.13)$$

Вычисляя асимптотики интеграла по φ в (2.13), мы можем найти оценочные выражения для Δ при различных соотношениях между r_s , $p_F D$ и единицей [56].

В частности, при больших межслойных расстояниях, когда $r_s p_F D \gg 1$, получим

$$\Delta = \frac{4\mu\sqrt{2r_s}}{\sqrt{p_F D}} \exp \{ -8\pi p_F D (1 + 2r_s p_F D) \}. \quad (2.14)$$

Это выражение применимо при значениях r_s , как больших, так и малых по сравнению с единицей.

При $r_s p_F D \ll 1$ будем различать случаи малых и промежуточных межслойных расстояний. В первом случае, когда $r_s \ll 1$, $p_F D \ll 1$, щель равна

$$\Delta = 16\mu r_s \exp \left\{ -\frac{\pi}{r_s \ln(1 + 1/4s)} \right\}. \quad (2.15)$$

Во втором случае, когда $p_F D \gg 1$, $r_s p_F D \ll 1$, щель равна

$$\Delta = 16\mu r_s \exp \left\{ -\frac{\pi}{r_s [\ln(1/16r_s p_F D) - \gamma]} \right\}, \quad (2.16)$$

где $\gamma \approx 0.577$ — постоянная Эйлера.

Рассмотрим более внимательно условия слабой связи при $r_s \sim 1$. Такие значения r_s могут быть достигнуты, например, с традиционно используемой подложкой из SiO_2 ($\varepsilon \approx 4$). В этом случае сила связи определяется только значением $p_F D \approx 0.15 \times \mu [\text{эВ}] \times D [\text{Å}]$. Импульс Ферми p_F пропорционален химическому потенциалу μ , который можно изменять в электрически допированном графене от нуля до максимального значения $\approx 0.3 \text{ эВ}$ [18, 20]. При разумных концентрациях носителей заряда режим слабой связи ($p_F D \gg 1$) может быть достигнут при межслойных расстояниях $D > 100 \text{ Å}$. С другой стороны, устремляя μ к нулю, всегда можно достигнуть режима сильной связи. Таким образом, в эксперименте при помощи изменения затворного напряжения может быть прослежен весь переход от слабой к сильной связи.

Случай $r_s \ll 1$ имеет место при больших значениях диэлектрической проницаемости ε окружающей среды, что может быть осуществлено, например, с использованием HfO_2 ($\varepsilon \approx 25$). В этом случае режим слабой связи сохраняется даже при $\mu \rightarrow 0$, т.е. при сколь

угодно малых концентрациях носителей заряда, а щель при этом стремится к нулю как $\Delta \propto \mu$ согласно формуле (2.15). Это резко контрастирует с ситуацией в СКЯ, где при исчезающе малых концентрациях носителей заряда неизбежно наступает режим сильной связи.

При типичном значении химического потенциала $\mu \approx 0.1$ эВ и межслойном расстоянии $D = 50$ Å, а также при $\varepsilon = 7$ (при этом приближение слабой связи еще достаточно надежно) выражение (2.15) дает нам значение щели $\Delta = 4 \times 10^{-6}$ эВ, эквивалентное температуре 0.05 К. Максимальное значение щели может быть достигнуто в режиме сильной связи $r_s \sim p_F D \sim 1$, который будет рассмотрен в последующих разделах.

Оценим теперь влияние примесей и беспорядка. В случае традиционной электронной сверхпроводимости присутствие магнитных примесей разрушительно воздействует на конденсат пар, поскольку они по-разному рассеивают электроны с антипараллельными спинами, составляющие куперовскую пару. В нашем случае любая примесь, находящаяся в любом из слоев графена, воздействует разрушительно на конденсат пар, поскольку она рассеивает только один компонент пары. Спаривание сохраняется, если средняя длина свободного пробега квазичастицы λ превышает длину когерентности $l_\Delta = v_F/\Delta$ (по аналогии с [142]). Из выражения для диффузионной бальцмановской проводимости [143] получаем $\lambda \approx (\mu/ev_F)\mu_c$, где μ_c — подвижность носителей заряда в графене. В «грязных» образцах графена $\mu_c \approx 1000$ см²/В · с при комнатной температуре [18], а соответствующая длина свободного пробега равна $\lambda \approx 10$ нм при $\mu = 0.1$ эВ. Напротив, в чистом графене при низких температурах [29, 30] $\mu_c \approx 10^6$ см²/В · с, так что $\lambda \approx 10$ мкм. Сравнивая эти оценки λ с оценочными значениями l_Δ , можно заключить, что спаривание в режиме слабой связи может быть осуществлено только в очень чистых образцах графена.

В СКЯ серьезным препятствием осуществлению БКШ-подобного электрон-дырочного спаривания является анизотропия дырочной зоны [136, 144]. Однако, в графене электрон-дырочная симметрия обеспечивает очень хорошее соответствие ферми-линий электронов и дырок по форме. В этой связи было бы интересно обсудить возможное влияние треугольного искажения в графене на БКШ-подобное спаривание в нашей системе. Треугольное искажение нарушает изотропию дираковского энергетического спектра в графене и вызывает отклонение ферми-линии от окружности в сторону треугольной формы [52]. Это искажение является пренебрежимо слабым при малых концентрациях, но становится значительным при достаточно больших μ . Отклонения формы ферми-линий в сторону тре-

угольника, имея противоположные ориентации в разных долинах, нарушает симметрию по ним. Следовательно, при сильном допировании слоев графена будет преобладать спаривание между электронами и дырками из одинаковых долин.

2.3 Отсутствие кроссовера БКШ-БЭК

Первые теоретические предположения о существовании кроссовера БКШ-БЭК — плавного перехода между БКШ-подобным конденсатом куперовских пар при высокой плотности и бозе-конденсатом локальных пар при низкой плотности — были высказаны в работах [145, 146]. В этих работах, а позднее в [76], было показано, что волновая функция основного состояния вырожденной системы притягивающихся фермионов при $T = 0$ может быть описана как функция БКШ $|\Psi\rangle = \prod_{\mathbf{p}} (u_{\mathbf{p}} + v_{\mathbf{p}} c_{\mathbf{p}\uparrow}^+ c_{-\mathbf{p}\downarrow}^+) |0\rangle$ ($c_{\mathbf{p}\uparrow}^+$ и $c_{-\mathbf{p}\downarrow}^+$ — операторы рождения электронов в состояниях с указанными импульсами и проекциями спина, $|0\rangle$ — состояние вакуума) не только при слабой связи, для которой теория БКШ была изначально разработана, но и при сильной связи. Однако, в отличие от теории БКШ, где химический потенциал μ , входящий в выражение для энергии боголюбовских возбуждений $E_{\mathbf{p}} = \sqrt{(p^2/2m - \mu)^2 + \Delta_{\mathbf{p}}^2}$, однозначно определяется концентрацией частиц n , при рассмотрении произвольной силы связи его необходимо определять самосогласованным образом исходя из уравнения для числа частиц $2 \sum_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}}^2 = n$. В таком подходе при сильной связи уравнение для щели превращается в уравнение Шредингера для волновой функции $\psi_{\mathbf{p}} = \Delta_{\mathbf{p}}/2E_{\mathbf{p}}$ покоящейся изолированной пары частиц в импульсном представлении, а уравнение для числа частиц дает $\mu \approx -W/2$, где W — энергия связи пары.

Таким образом, в пределе сильной связи в системе образуются локализованные пары частиц, которые почти не перекрываются и могут поэтому рассматриваться как бозоны, в газе которых при низкой температуре происходит бозе-конденсация. Напротив, при слабой связи куперовские пары частиц сильно перекрываются и не могут рассматриваться как бозе-частицы, однако, из-за парных корреляций в движении частиц в энергетическом спектре системы открывается щель. При нулевой температуре оба предельных случая (слабая и сильная связь) хорошо описываются приближением среднего поля; это же приближение может использоваться для построения интерполяционной схемы между случаями слабой и сильной связи. Такая модель указывает на наличие плавного перехода между состояниями БКШ и БЭК, за условную точку которого можно принять тот момент, когда химический

потенциал пересекает дно зоны проводимости [76, 145].

Применительно к спариванию в плотной кварковой материи в ряде работ был исследован кроссовер БКШ-БЭК в вырожденном газе массивных релятивистских частиц (см. напр. [147, 148, 149, 150]). При слабой связи вся существенная динамика частиц сосредоточена в малой окрестности поверхности Ферми, поэтому состояние такой системы аналогично состоянию, описываемому теорией БКШ. При сильной связи массивные релятивистские частицы образуют локальные пары, в газе которых может происходить бозе-конденсация. Тем не менее, из-за влияния античастичных возбуждений, играющих важную роль при сильной связи, кроссовер БКШ-БЭК в системах массивных релятивистских частиц имеет свои особенности.

В нашем случае электроны и дырки в графене являются эффективно безмассовыми. Для существования кроссовера необходимо, как минимум, существование локальных пар спаривающихся частиц при сильной связи. В данном подразделе мы покажем, что в бислое графена этого не происходит, из-за чего поведение системы при увеличении силы связи кардинально отличается от кроссовера БКШ-БЭК [36, 57, 58]. Мы рассмотрим задачу об изолированной электрон-дырочной паре в бислое графена, результаты решения которой были упомянуты в работе [57]. Приведенное ниже рассмотрение частично пересекается с рассмотрением задачи двух тел в графене, опубликованном позже другими авторами в статье [151].

Пусть $\{A_1, B_1\}$ — подрешетки электрона, $\{A_2, B_2\}$ — подрешетки дырки. Гамильтониан электрон-дырочной пары имеет вид $H = H_0 + V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, где \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 — координаты электрона и дырки, а оператор кинетической энергии в совместном базисе подрешеток $\{A_1A_2, A_1B_2, B_1A_2, B_1, B_2\}$ есть

$$H_0 = v_F (\boldsymbol{\sigma}_1 \mathbf{p}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2 \mathbf{p}_2) = v_F \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & p_{2-} & p_{1-} & 0 \\ p_{2+} & 0 & 0 & p_{1-} \\ p_{1+} & 0 & 0 & p_{2-} \\ 0 & p_{1+} & p_{2+} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.17)$$

Здесь введены циклические компоненты $p_{k\pm} = (p_{kx} \pm ip_{ky})/\sqrt{2}$ импульсов электрона и дырки \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 . Введем оператор разности двумерных «квазиспинов» электрона и дырки $\mathbf{S} = \sigma_{2z}(\boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2)\sigma_{2z}/2$ и перейдем в базис собственных векторов операторов \mathbf{S}^2 и S_z при

помощи преобразования $H \rightarrow C^+ H C$, где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

После такого преобразования гамильтониан (2.17) принимает вид:

$$H_0 = v_F \begin{pmatrix} 0 & -P_+ & 0 & P_- \\ -P_- & 0 & 2p_- & 0 \\ 0 & 2p_+ & 0 & 2p_- \\ P_+ & 0 & 2p_+ & 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ — суммарный импульс пары, $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$ — относительный импульс электрона и дырки.

В отличие от обычных нерелятивистских частиц, для которых относительное движение в паре отделяется от движения пары как целого, в нашем случае такого не происходит. Поэтому ограничимся рассмотрением простейшего случая покоящейся пары с $\mathbf{P} = 0$. Заметим, что при этом гамильтониан $H = H_0 + V(\mathbf{r})$, где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, коммутирует с оператором \mathbf{S}^2 . Отсюда следует, что уравнение $[E - H] \Psi = 0$ для четырехкомпонентной волновой функции пары Ψ , имеющее явный вид

$$[E - V(\mathbf{r})] \Psi - 2v_F \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_- & 0 \\ 0 & p_+ & 0 & p_- \\ 0 & 0 & p_+ & 0 \end{pmatrix} \Psi = 0, \quad (2.18)$$

разделяется на синглетный ($S = 0$) и триплетный ($S = 1$) каналы. Выделяя в соответствии с этим однокомпонентную синглетную Ψ_s и трехкомпонентную триплетную Ψ_t части волновой функции $\Psi = (\Psi_s, \Psi_t)^T$, получим из (2.18) уравнения для них:

$$\begin{cases} [E - V(\mathbf{r})] \Psi_s = 0, \\ [E - V(\mathbf{r}) - 2v_F \mathbf{J} \mathbf{p}] \Psi_t = 0, \end{cases}, \quad (2.19)$$

где \mathbf{J} — оператор спина 1 [152].

Кинетическая энергия пары частиц в синглетном канале уравнения (2.19) тождественно равна нулю. Это можно объяснить, перейдя в базис четырех состояний электрона и

дырки (2.2), находящихся в определенных зонах. В двух состояниях электрон и дырка находятся в противоположных зонах и сумма их кинетических энергий $\pm v_F(|\mathbf{p}_1| - |\mathbf{p}_2|)$ равна нулю для покоящейся пары, у которой $\mathbf{p}_1 = -\mathbf{p}_2$. При этом одно из этих состояний связано матричными элементами взаимодействия $V(\mathbf{r})$ с другой парой состояний, в которых электрон и дырка находятся в одинаковых зонах, а кинетическая энергия $\pm v_F(|\mathbf{p}_1| + |\mathbf{p}_2|)$ отлична от нуля. Три этих связанных состояния образуют триплетный канал. Оставшееся же состояние с нулевой кинетической энергией оказывается никак не связанным с остальными и образует синглетный канал.

Итак, будем считать, что синглетная часть волновой функции Ψ_s всюду равна нулю (за исключением точек, в которых $V(r) = E$ — в работе [151] этот вопрос исследован более детально), и сконцентрируем внимание на триплетной части волновой функции Ψ_t , подчиняющейся второму уравнению в (2.19). Домножив это уравнение слева на $E - V(r) + 2v_F \mathbf{Jp}$, получим

$$\{[E - V(r)]^2 - 2v_F [\mathbf{Jp}, V(r)] - 4v_F^2 (\mathbf{Jp})^2\} \Psi_t = 0. \quad (2.20)$$

Учитывая то, что в полярных координатах

$$p_+ = -\frac{ie^{i\varphi}}{\sqrt{2}} \left(\partial_r + \frac{i}{r} \partial_\varphi \right), \quad p_- = -\frac{ie^{-i\varphi}}{\sqrt{2}} \left(\partial_r - \frac{i}{r} \partial_\varphi \right), \quad (2.21)$$

мы можем выделить зависимость компонент Ψ_t от угла φ в виде:

$$\Psi_t = \begin{pmatrix} e^{i(m-1)\varphi} f_+ \\ e^{im\varphi} f_0 \\ e^{i(m+1)\varphi} f_- \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

где m — целое число, представляющее собой орбитальный момент электрон-дырочной пары. Подставляя (2.21)–(2.22) в (2.20), получим следующую систему уравнений для радиальных функций $f_0, f_{\pm 1}$:

$$\begin{aligned} & \{[E - V(r)]^2 + \sqrt{2}iv_F V'(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + 2v_F^2 \begin{pmatrix} \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{(m-1)^2}{r^2} & 0 & \partial_r^2 + \frac{2m+1}{r}\partial_r + \frac{m^2-1}{r^2} \\ 0 & 2\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r - \frac{2m^2}{r^2} & 0 \\ \partial_r^2 - \frac{2m-1}{r}\partial_r + \frac{m^2-1}{r^2} & 0 & \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r - \frac{(m+1)^2}{r^2} \end{pmatrix} \} \begin{pmatrix} f_+ \\ f_0 \\ f_- \end{pmatrix} = 0. \quad (2.23) \end{aligned}$$

Наиболее простое решение системы уравнений (2.23) может быть получено при s -волновом спаривании (когда $m = 0$) и с использованием кулоновского потенциала притяжения $V(r) = -2v_{\text{F}}g/r$. Делая при этом замену $f_i(r) = u_i(r)/\sqrt{r}$, получим

$$\left\{ \left(\epsilon + \frac{g}{r} \right)^2 + \frac{ig}{r^2} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} + \partial_r^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{8} \end{pmatrix} \right\} U = 0, \quad (2.24)$$

где введены новые радиальные функции $U = (u_+, u_0, u_-)^T$ и безразмерная энергия $\epsilon = E/2v_{\text{F}}$. При помощи преобразования $U = CU'$, где

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i\sqrt{1-\alpha}}{2} & \frac{i\sqrt{1+\alpha}}{2} \\ 0 & \sqrt{\frac{1+\alpha}{2}} & \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i\sqrt{1-\alpha}}{2} & \frac{i\sqrt{1+\alpha}}{2} \end{pmatrix}, \quad \alpha = \sqrt{1 - 4g^2},$$

одновременно можно диагонализировать все матрицы в системе (2.24). Получим в итоге

$$\left\{ \epsilon^2 + \frac{2\epsilon g}{r} + \partial_r^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{\alpha^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \end{pmatrix} \right\} U' = 0. \quad (2.25)$$

Как видно, первое уравнение системы (2.25) не имеет дифференциальной части и, следовательно, не имеет решений. Второе и третье уравнения разделяются и оба могут быть записаны в виде

$$u''(r) + \left[\epsilon^2 + \frac{2\epsilon g}{r} + \frac{1}{r^2} \left(\pm \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha^2}{4} \right) \right] u(r) = 0. \quad (2.26)$$

Это уравнение похоже на радиальное уравнение для электрона в графене в поле кулоновской примеси [153].

Теперь попробуем свести систему уравнений (2.19) для триплетной части к одному уравнению при произвольном потенциале $V(r)$ и произвольных m . Для этого домножим систему слева на $[E - V(r)]^2$ и исключим из уравнений первую и третью компоненты столбца Ψ_{t} . Уравнение для второй компоненты $\Psi_{\text{t}0}$ после замены $\Psi_{\text{t}0}(r, \varphi) = e^{im\varphi} u(r)/\sqrt{r}$ примет вид:

$$\left\{ [E - V(r)]^3 + 4v_{\text{F}}^2 V'(r) \left(\partial_r - \frac{1}{2r} \right) + 4v_{\text{F}}^2 [E - V(r)] \left(\partial_r^2 - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right) \right\} u(r) = 0. \quad (2.27)$$

Таким образом, мы свели уравнение (2.18) для покоящейся электрон-дырочной пары в графене или бислое графена к радиальным уравнениям: (2.26) — для случая кулоновского взаимодействия и $m = 0$, и (2.27) — для взаимодействия произвольного вида и

произвольных m . Решения более простого уравнения (2.26) могут быть получены в виде вырожденной гипергеометрической функции [151]. Однако, в рамках нашей задачи, нас интересует только сам факт существования или не существования локализованных пар. Для этого нам нужно найти асимптотики решений радиальных уравнений при $r \rightarrow 0$ и $r \rightarrow \infty$. Существование локализованной пары требует квадратичной интегрируемости волновой функции пары, для чего должен сходиться интеграл $\int_0^\infty u^2(r)dr$.

Рассмотрим сначала простейший случай притягивающего кулоновского потенциала $V(r) = -2v_F g/r$, описываемый уравнением (2.26) при $m = 0$ и уравнением (2.27) $m \neq 0$. При $r \rightarrow 0$ оба уравнения дают асимптотики решения в виде $u(r) \propto r^{\pm\sqrt{m^2+1/4-g^2}}$. При $g < 1/2$ решение $u(r) \propto r^{\sqrt{m^2+1/4-g^2}}$ является регулярным в начале координат для любых орбитальных моментов m . В случае $g > 1/2$, $m = 0$ возникает ситуация «падения на центр», похожая на ситуацию со сверхкритическим зарядом кулоновской примеси в графене [153, 154] (фактически же, в этом случае необходимо принимать в расчет дискретность кристаллической решетки). При $r \rightarrow \infty$ мы получаем обычную асимптотику волновой функции инфинитного движения частицы в кулоновском поле: $u(r) \propto \sin(\epsilon r + g \ln r + \delta)$, где δ — некий фазовый сдвиг. Как мы видим, при $g < 1/2$ решение $u(r)$ может быть регулярным в начале координат, но не является квадратично интегрируемым на бесконечности. Волновая функция пары имеет на бесконечности асимптотику, соответствующую инфинитному движению, и поэтому пара делокализована.

Рассмотрим теперь более реалистичный потенциал межслойного электрон-дырочного взаимодействия, который при $r \rightarrow 0$ пропорционален $V(r) \propto -1/\sqrt{r^2 + D^2}$. В этом случае уравнение (2.27) дает асимптотики решения $u(r) \propto r^{\pm m+1/2}$ в начале координат, из которых регулярной является $u(r) \propto r^{|m|+1/2}$. При $r \rightarrow \infty$ статически экранированный потенциал (2.10) имеет асимптотику [40] $V(r) \propto -1/r^3$, что дает $u(r) \propto \sin(\epsilon r + \delta)$. Если графен не допирован, то кулоновский потенциал экранируется логарифмически: $V(r) \propto -1/r \ln r$, откуда при $r \rightarrow \infty$ $u(r) \propto \sin(\epsilon r + \ln \ln r + \delta)$. Таким образом, при любых условиях волновая функция пары не является квадратично интегрируемой на бесконечности, что соответствует отсутствию локализации пары частиц.

В отличие от задачи о двух взаимодействующих релятивистских дираковских частицах [155, 156], в нашем случае уравнения, описывающие две эффективно ультрарелятивистские частицы в графене, не являются лоренц-инвариантными (также они не обладают и галилеевской инвариантностью, как и все уравнения для огибающих волновой функ-

ции электрона в поле кристалла [157]). Это не позволяет свести в нашем случае задачу о движущейся паре к задаче о покоящейся паре. При $\mathbf{P} \neq 0$ уравнения (2.19) для синглетной и триплетной компонент волновой функции оказываются связанными; получившаяся система может быть сведена к одному дифференциальному уравнению которое не приводится здесь в силу его громоздкости. В этом уравнении отсутствует аксиальная симметрия относительно начала координат, и его решения также не являются локализованными.

Итак, мы рассмотрели задачу об изолированной электрон-дырочной паре в графене и бислое графена и нашли, что при любых энергиях пары и при любых возможных потенциалах электрон-дырочного взаимодействия волновая функция относительного движения электрона и дырки будет соответствовать инфинитному движению. Это легко понять исходя из того, что в графене отсутствует щель в энергетическом спектре пары, необходимая для образования связанного состояния. Энергия связанного состояния должна лежать внутри щели, что обеспечивает экспоненциальное затухание волновой функции на бесконечности; в нашем же случае при любой энергии состояние пары попадает в континуум состояний, соответствующих инфинитному движению, и поэтому не является связанным (см. [38, стр. 272]). Таким образом, в бислое графена невозможно образование газа локализованных пар в режиме сильной связи, так как любые электрон-дырочные пары всегда будут существенно перекрываться.

В следующем разделе будет показано, что нормальное состояние бислоя графена, в котором отсутствует спаривание, будет неустойчивым при достаточно низких температурах, в том числе, в режиме сильной связи. Это означает, что в основном состоянии системы будет формироваться конденсат электрон-дырочных пар, но из-за их сильного перекрытия это будут не локальные, а *куперовские* пары. Однако, при сильной связи структура куперовских пар будет иной, чем при слабой связи, так как в первом случае существенную роль будет играть эффективно ультрарелятивистская динамика электронов и дырок.

Отметим, что вывод об отсутствии кроссовера БКШ-БЭК в графене справедлив только в условиях применимости низкоэнергетического приближения уравнения Дирака для электронов. Если характерный энергетический масштаб притяжения между частицами в графене сравним с шириной электронной зоны (около 6 эВ), то дираковское приближение нарушается и БКШ-БЭК кроссовер становится возможным [158]. Кроме того, кроссовер возможен при помещении графена в перпендикулярное сильное магнитное поле, в котором могут существовать локализованные электрон-дырочные пары — магнитоэкситоны [71].

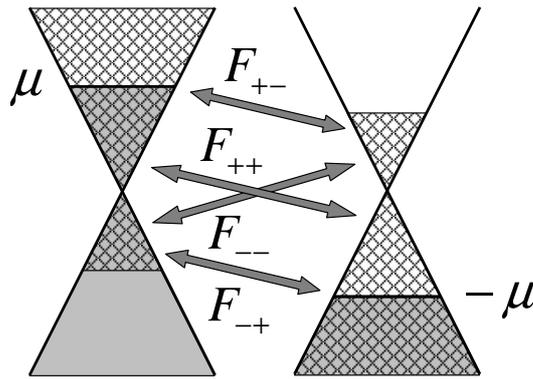


Рис. 2.3. Многозонное спаривание электронов и дырок в бислое графена в режиме сильной связи, когда спариванием захватываются сразу несколько зон (область спаривания выделена штриховкой). Показаны также компоненты $F_{\gamma_1\gamma_2}$ матричного по зонам параметра порядка.

2.4 Многозонное спаривание при сильной связи

2.4.1 Введение

В данном разделе мы детально рассмотрим спаривание в электрон-дырочном бислое графена в режиме сильной связи и попытаемся оценить масштаб температуры перехода такой системы в сверхтекучее состояние (см. [59, 60]). Основной особенностью спаривания эффективно ультррелятивистских фермионов при сильной связи является его многозонный характер. В режиме слабой связи спаривание захватывает только узкие области импульсного пространства электронов и дырок вблизи их поверхностей Ферми в зоне проводимости дырочного слоя и валентной зоне электронного слоя (Рис. 2.2). При усилении связи область спаривания расширяется и в какой-то момент пересекает дираковские точки электронов и дырок, захватывая их зоны, удаленные от поверхностей ферми, т.е. валентную зону электронного слоя и зону проводимости дырочного слоя (Рис. 2.3). Именно вовлечение в спаривание удаленных зон можно считать характерной чертой многозонного «ультррелятивистского» спаривания.

В отличие от газа локальных пар, в котором температура перехода в сверхтекучее состояние определяется коллективными звуковыми возбуждениями и перестает зависеть от параметра силы связи при больших его значениях [76], в состоянии с конденсатом куперовских пар критическая температура определяется энергией разрыва куперовской пары, которая увеличивается по мере усиления связи. Поэтому можно ожидать, что в

ультрарелятивистском режиме спаривания в бислое графена критическая температура будет весьма высокой.

После первой работы [56], в которой был рассмотрен режим слабой связи в бислое графена, другими авторами были предприняты попытки рассмотрения режима сильной связи в работах [159, 160, 161, 162, 163, 164, 165]. В работах [159, 160] задача о спаривании была рассмотрена в приближении Хартри-Фока с использованием неэкранированного потенциала кулоновского взаимодействия. Оценки температуры перехода системы в сверхтекучее состояние, полученные в результате численных расчетов, показали, что сверхтекучесть может сохраняться вплоть до комнатных температур. Однако, учет экранирования взаимодействия, как было показано в [163], понижает температуру перехода до значений порядка 10^{-3} К. Было высказано предположение о том, что экранирование самосогласованно ослабляется вследствие появления щели в спектре [164], но последующие оценки [165] показали, что этот эффект является очень слабым. Во всех перечисленных работах, за исключением [162], спаривание при сильной связи рассматривалось в рамках однозонной модели.

При обсуждении вопроса о надежном количественном предсказании величины температуры перехода электрон-дырочного бислоя графена в сверхтекучее состояние следует признать, что в отличие от режима слабой связи, где не вызывает сомнений применимость теории БКШ [56], в режиме сильной связи необходимо учитывать ряд важных факторов, выходящих ее за рамки, которые могут сильно повлиять на величину критической температуры. Этими факторами являются, в первую очередь, многозонный характер спаривания и эффекты частотной зависимости экранированного потенциала взаимодействия, а также всевозможные корреляционные эффекты, не учитываемые в приближении среднего поля. Роль динамических эффектов будет рассмотрена в разделе 2.5, а в данном разделе мы обращаемся к исследованию роли многозонного характера спаривания. При этом рассмотрение проводится в приближении среднего поля, а в качестве потенциала электрон-дырочного взаимодействия берется статически экранированный потенциал, найденный в приближении хаотических фаз.

Оценки роли многозонности при БКШ-подобном спаривании релятивистских и ультрарелятивистских частиц делались и ранее в работах, посвященных обобщениям модели Намбу-Иона-Лазинио [166, 167, 168, 169] и спариванию в плотной кварковой материи [77]. Кроме того, в приближении контактного потенциала исследовалась роль многозонности

спаривания непосредственно в графене [170]. В данном же разделе дается более подробное рассмотрение задачи электрон-дырочного спаривания в бислое графена с учетом конечности радиуса действия потенциала и с физически обоснованными оценками импульса ультрафиолетового обрезания в уравнениях для щели. При помощи перехода от дырок к электронам проведенное рассмотрение может быть перенесено и на случай сверхпроводимости электронов в одном слое графена (см. третью главу диссертации).

Среди моделей многозонного спаривания в графене следует также отметить рассмотрение [171], основанное на распространении теории БКШ на конусообразную зонную структуру, а также работу [55], в которой исследована конденсация электронов и дырок с противоположными спинами, возникающих в графене в параллельном магнитном поле в результате зеемановского расщепления. В последней работе грубые оценки максимально возможной температуры перехода с учетом экранирования потенциала взаимодействия дают результат порядка десятков милликельвинов.

2.4.2 Описание основного состояния

Для описания конденсата пар ультрарелятивистских частиц в бислое графена будем использовать модификацию нерелятивистской диаграммной техники для обычных систем фермионов [110], отражающую особенности многозонного спаривания. Для этой цели введем мацубаровские функции Грина вида

$$G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T c_{\mathbf{p}\gamma_1 s_1}^{(\alpha)}(0) c_{\mathbf{p}\gamma_2 s_2}^{(\beta)+}(\tau) \rangle, \quad (2.28)$$

где T — оператор хронологического упорядочения в мацубаровском времени, $\langle \dots \rangle$ — усреднение по термодинамическому состоянию системы, $c_{\mathbf{p}\gamma s}^{(1)} = a_{\mathbf{p}\gamma s}^{(1)}$, $c_{\mathbf{p}\gamma s}^{(2)} = a_{\mathbf{p}-\gamma s}^{(2)}$, $a_{\mathbf{p}\gamma s}^{(\alpha)}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом \mathbf{p} в слое α ($\alpha = 1$ — электронный слой, $\alpha = 2$ — дырочный слой), обладающего спином и долиной, совместно задаваемыми индексом s , и находящегося в зоне γ (т.е. в состоянии (2.2)). Переход от операторов a к операторам c , заключающийся в перемене местами валентной зоны и зоны проводимости дырочного слоя, позволяет обозначать зоны обоих типов спаривающихся частиц, содержащие их поверхности Ферми, индексом $+1$ и называть их «зонами проводимости»; соответственно, удаленные от поверхностей Ферми зоны могут быть обозначены индексом -1 и названы «валентными зонами». Функции Грина свободного движения, как легко показать, диагональны по всем индексам и равны $G_{\gamma s \gamma s}^{0(\alpha\alpha)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = [i\varepsilon_n - \xi_{\mathbf{p}\gamma}^{(\alpha)}]^{-1}$, где $\xi_{\mathbf{p}\gamma}^{(1)} = -\xi_{\mathbf{p}\gamma}^{(2)} \equiv \xi_{p\gamma} = \gamma v_F |\mathbf{p}| - \mu$

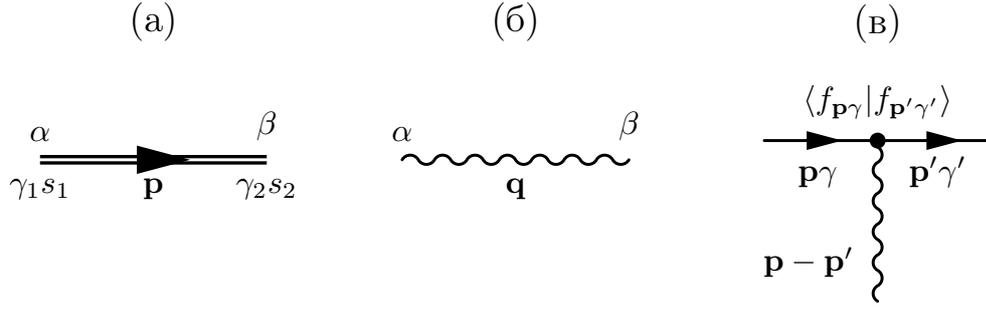


Рис. 2.4. Элементы многозонной диаграммной техники: (а) функция Грина $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$, (б) электрон-электронное взаимодействие $V^{(\alpha\beta)}(q)$, (в) угловой фактор (2.29) в вершине взаимодействия.

— энергии электронов и дырок, отсчитываемые от их химических потенциалов.

Таким образом, каждому концу функции Грина $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$ сопоставляются индексы слоя α, β и зоны $\gamma_{1,2}$ электрона, а также индексы проекций спина и долин $s_{1,2}$ (Рис. 2.4(а)). Поскольку межслойное кулоновское электрон-электронное взаимодействие отличается от внутрислойного, то каждому концу линии взаимодействия $V^{(\alpha\beta)}(q)$ сопоставляются индексы слоя (Рис. 2.4(б)). Фурье-образы неэкранированного взаимодействия равны $v^{(\alpha\beta)}(q) = 2\pi e^2 \exp\{-qD(1 - \delta_{\alpha\beta})\}/\varepsilon q$, где ε — диэлектрическая проницаемость окружающей бислое среды. Кроме того, в результате свертки по компонентам произведения спинорных волновых функций (2.2) в каждую вершину диаграммы добавляется множитель, зависящий от зон и направлений импульса электрона до и после акта рассеяния. Если в вершину входит электрон с импульсом \mathbf{p} , находящийся в зоне γ , а выходит электрон с импульсом \mathbf{p}' , находящийся в зоне γ' , то затравочной вершине сопоставляется множитель

$$\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}'\gamma'} \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{i(\varphi - \varphi')}{2} + \gamma\gamma' \exp \frac{i(\varphi' - \varphi)}{2} \right\}, \quad (2.29)$$

где φ и φ' — азимутальные углы векторов \mathbf{p} и \mathbf{p}' соответственно. При вычислении аналитического выражения, соответствующего диаграмме, во внутренних вершинах производится суммирование по индексам слоя, зоны, спина и долины. При этом в вершинах взаимодействия индексы слоя, спина и долины сохраняются, а индексы зоны не сохраняются.

Руководствуясь вышеизложенными правилами, построим диаграммы, выражающие уравнения Горькова [172], которые описывают спаривание системы фермионов в приближении среднего поля, и уравнение самосогласования для собственных энергий (Рис. 2.5).

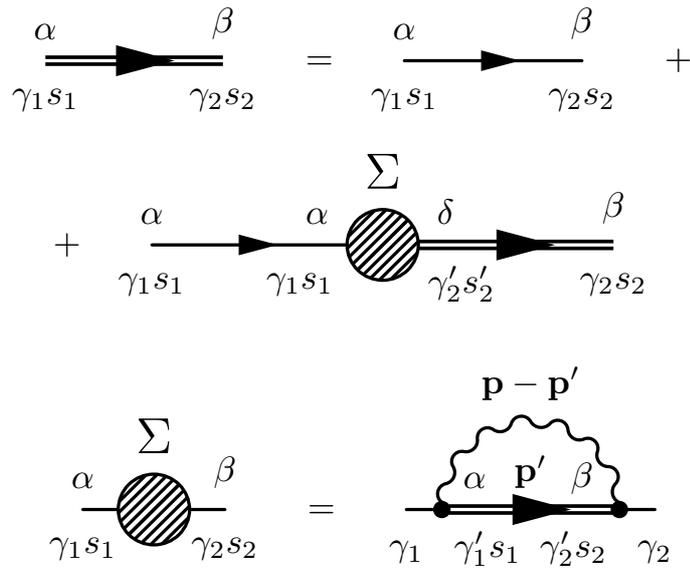


Рис. 2.5. Диаграммное представление уравнений Горькова (2.30) и уравнения самосогласования (2.31).

Соответствующие аналитические выражения имеют вид:

$$G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{0(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) + \sum_{\delta\gamma'_2 s'_2} G_{\gamma_1 s_1 \gamma_1 s_1}^{0(\alpha\alpha)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) \Sigma_{\gamma_1 s_1 \gamma'_2 s'_2}^{(\alpha\delta)}(\mathbf{p}) G_{\gamma'_2 s'_2 \gamma_2 s_2}^{(\delta\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n), \quad (2.30)$$

$$\Sigma_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}) = -T \sum_{\varepsilon_n \gamma'_1 \gamma'_2} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} V^{(\alpha\beta)}(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|) \langle f_{\mathbf{p}\gamma_1} | f_{\mathbf{p}'\gamma'_1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}'\gamma'_2} | f_{\mathbf{p}\gamma_2} \rangle G_{\gamma'_1 s_1 \gamma'_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}', i\varepsilon_n), \quad (2.31)$$

где $V^{(\alpha\beta)}(q)$ — фурье-образы статически экранированного внутрислойного и межслойного электрон-электронного взаимодействия. Здесь мы не рассматриваем детали зависимости собственно-энергетических частей от частоты, полагая, что роль динамических эффектов сводится к ограничению области спаривания подобно тому, как область спаривания электронов при сверхпроводимости ограничена дебаевской частотой фононов [73]. Поскольку мы интересуемся межслойным спариванием, то ключевыми для нас будут слагаемые уравнения (2.30), содержащие аномальные собственно-энергетические части $\Sigma^{(12)}$ и $\Sigma^{(21)}$, а слагаемые, содержащие нормальные собственно-энергетические части $\Sigma^{(11)}$ и $\Sigma^{(22)}$, приводящие к перенормировке скорости Ферми и химического потенциала, мы опустим. Кроме того, в отличие от процедуры, принятой при рассмотрении кроссовера БКШ-БЭК [76], в которой химический потенциал считается свободным параметром, определяемым исходя из уравнения для числа частиц, здесь мы для простоты будем считать химический потенциал μ жестко связанным с концентрацией n соотношением $\mu = v_F \sqrt{\pi n}$ (это оправдано, если возникающая в спектре щель мала по сравнению с химическим потенциалом).

Поскольку электроны и дырки пространственно разделены и спариваются благодаря кулоновскому притяжению, не зависящему от спин и долин, то спариваться могут частицы с любыми спинами и долинами, что выражается в произвольности структуры аномальных функций Грина $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(12)}$ и $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(12)}$, играющих роль волновой функции куперовской пары, по индексам s_1 и s_2 . В случае пространственно-временной однородности спаривания спин-долинная зависимость этих функций факторизуется в виде некоторой матрицы (4×4), которую мы обозначим как P : $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(12)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = P_{s_1 s_2} G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(12)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$, $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(21)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = P_{s_1 s_2}^+ G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(21)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$. Согласно (2.31), такая же факторизация будет справедлива для аномальных собственно-энергетических частей: $\Sigma_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(12)}(\mathbf{p}) = P_{s_1 s_2} \Delta_{\gamma_1 \gamma_2}(\mathbf{p})$, $\Sigma_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(21)}(\mathbf{p}) = P_{s_1 s_2}^+ \Delta_{\gamma_1 \gamma_2}^+(\mathbf{p})$. Следует отметить, что в основном состоянии системы матрица P должна быть унитарной — если она не унитарна, то, как можно показать, появляются возбуждения внутри щели, а энергия системы повышается по сравнению со случаем унитарной матрицы P (таким образом, физически унитарность матрицы P означает отсутствие неспаренных частиц; см. также [173] в связи с вопросом об унитарности структуры конденсата). Нормальные функции Грина диагональны по спинам и долинам: $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(11)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \delta_{s_1 s_2} G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(11)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$, $G_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(22)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \delta_{s_1 s_2} G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(22)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$.

В работе [55] была рассмотрена возможность различной по долинам структуры спаривания электронов и дырок, образующихся в графене, помещенном в продольное магнитное поле. В отличие от долин, спины спаривающихся частиц в такой системе жестко фиксированы из-за зеемановского расщепления, поэтому параметр порядка имеет структуру матрицы $U(2) = U(1) \times SU(2)$ по долинам. Флуктуации параметра порядка разделяются в соответствии с этим на флуктуации общей фазы конденсата (сектор $U(1)$) и его долиной структуры (сектор $SU(2)$). Похожим образом, в электрон-дырочном бислое графена параметр порядка имеет структуру $U(4) = U(1) \times SU(4)$, в связи с чем в такой системе возможны флуктуации как общей фазы конденсата, так и его спин-долинной структуры P (сектор $SU(4)$).

Рассмотрим для простоты случай изотропной по модулю щели, когда $|\Delta_{\gamma_1 \gamma_2}(\mathbf{p})|$ не зависит от направления вектора \mathbf{p} . В случае l -волнового спаривания, когда куперовская пара обладает проекцией орбитального момента на нормальную к плоскости системы ось, равной l , имеем: $G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(12)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \exp(il\varphi) F_{\gamma_1 \gamma_2}(p, i\varepsilon_n)$, $G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(21)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \exp(-il\varphi) F_{\gamma_1 \gamma_2}^+(p, i\varepsilon_n)$, $\Delta_{\gamma_1 \gamma_2}(\mathbf{p}) = \exp(il\varphi) \Delta_{\gamma_1 \gamma_2}(p)$, где φ — азимутальный угол вектора импульса \mathbf{p} ; нормальные функции Грина $G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(11)}$ и $G_{\gamma_1 \gamma_2}^{(22)}$ не зависят от направления импульса. Запишем с учетом

таких обозначений описывающие спаривание подсистемы уравнений Горькова (2.30):

$$\begin{cases} [i\varepsilon_n - \xi_{p\gamma_1}^{(1)}]G_{\gamma_1\gamma_2}^{(11)} - \Delta_{\gamma_1\gamma} F_{\gamma\gamma_2}^+ = \delta_{\gamma_1\gamma_2}, \\ [i\varepsilon_n - \xi_{p\gamma_1}^{(2)}]F_{\gamma_1\gamma_2}^+ - \Delta_{\gamma_1\gamma}^+ G_{\gamma\gamma_2}^{(11)} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} [i\varepsilon_n - \xi_{p\gamma_1}^{(2)}]G_{\gamma_1\gamma_2}^{(22)} - \Delta_{\gamma_1\gamma}^+ F_{\gamma\gamma_2} = \delta_{\gamma_1\gamma_2}, \\ [i\varepsilon_n - \xi_{p\gamma_1}^{(1)}]F_{\gamma_1\gamma_2} - \Delta_{\gamma_1\gamma} G_{\gamma\gamma_2}^{(22)} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Если в уравнениях самосогласования (2.31) использовать введенные обозначения и с учетом (2.29) провести интегрирование по направлению вектора \mathbf{p}' , то они примут вид

$$\Delta_{\gamma_1\gamma_2}(p) = -T \sum_{\varepsilon_n \gamma_1' \gamma_2'} \int \frac{p' dp'}{2\pi} \left\{ \frac{1 + \gamma_1\gamma_2\gamma_1'\gamma_2'}{4} V_l(p, p') + \frac{\gamma_1\gamma_1'}{4} V_{l+1}(p, p') + \frac{\gamma_2\gamma_2'}{4} V_{l-1}(p, p') \right\} F_{\gamma_1'\gamma_2'}(p', i\varepsilon_n), \quad (2.33)$$

где введены l -волновые гармоники потенциала спаривания:

$$V_l(p, p') = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} V \left(\sqrt{p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \varphi} \right) e^{-il\varphi}. \quad (2.34)$$

Перемешивание гармоник потенциала различной мультипольности является проявлением «киральности» электронов в графене [53].

Находя из системы уравнений (2.32) матрицу аномальных функций Грина $F_{\gamma_1\gamma_2}(p, i\varepsilon_n)$ при каждом значении p и ε_n , выражая их через матрицу щелей $\Delta_{\gamma_1\gamma_2}(p)$ и подставляя в (2.33), мы получим систему четырех интегральных уравнений для четырех функций $\Delta_{\gamma_1\gamma_2}(p)$. Заметим, что энергия E элементарных возбуждений системы определяется из условия равенства нулю определителя систем уравнений (2.32) с заменой $i\varepsilon_n \rightarrow E$.

Матричная структура уравнений (2.32) и (2.33), вообще говоря, будет согласованной только при определенных формах матричной структуры параметра порядка $\Delta_{\gamma_1\gamma_2}$. В работах [168, 169, 169] были найдены все возможные структуры параметра порядка, допускающие самосогласованное решение при релятивистском спаривании на контактном потенциале, и было показано, что только скалярный и псевдоскалярный параметры порядка имеют физический смысл спаривания с изотропной щелью, переходящего в нерелятивистском пределе к обычному спариванию типа БКШ.

В наших обозначениях это соответствует матрице щели, пропорциональной единичной: $\Delta_{\gamma_1\gamma_2} \propto \delta_{\gamma_1\gamma_2}$. Однако, отличие нашего потенциала спаривания (2.34) от контактного потенциала $V_l(p, p') = V_0\delta_{l0}$ приводит к необходимости модифицировать это решение, а именно, допустить, что диагональные элементы $\Delta_{\gamma_1\gamma_2}$ могут различаться между собой (подобное делалось в работе [167]). Предположение о диагональном по зонам спаривании является наиболее простым и с физической точки зрения, соответствуя спариванию электронов из

зоны проводимости электронного слоя только с дырками валентной зоны дырочного слоя, а электронов валентной зоны электронного слоя — только с дырками зоны проводимости дырочного слоя (см. Рис. 2.3 — в этом случае отличны от нуля только F_{++} и F_{--}). Из уравнений (2.32)–(2.33) с учетом соотношения $V_{-1} = V_1$ легко видеть, что это предположение является самосогласованным только в случае s -волнового спаривания, которое и будет рассматриваться в дальнейшем. Дополнительные соображения в пользу диагональности спаривания будут приведены в подразделе 2.4.4.

Энергии элементарных возбуждений при диагональном спаривании равны

$$E_+(p) = \sqrt{(v_F p - \mu)^2 + |\Delta_{++}(p)|^2}, \quad E_-(p) = \sqrt{(v_F p + \mu)^2 + |\Delta_{--}(p)|^2}, \quad (2.35)$$

где ветвь возбуждений $E_-(p)$ соответствует перебросу квазичастиц из валентной зоны, а выражения для аномальных функций Грина имеют вид

$$F_{++}(p, i\varepsilon_n) = -\frac{\Delta_{++}(p)}{\varepsilon_n^2 + E_+^2(p)}, \quad F_{--}(p, i\varepsilon_n) = -\frac{\Delta_{--}(p)}{\varepsilon_n^2 + E_-^2(p)}. \quad (2.36)$$

Подставляя (2.36) в (2.33) и выполняя суммирование по мацубаровским фермионным частотам $\varepsilon_n = (2n + 1)\pi T$, получим систему уравнений для щелей:

$$\begin{cases} \Delta_{++}(p) = \int \frac{p' dp'}{2\pi} \left\{ V_a(p, p') \frac{\Delta_{++}(p')}{2E_+(p')} \operatorname{th} \frac{E_+(p')}{2T} + V_b(p, p') \frac{\Delta_{--}(p')}{2E_-(p')} \operatorname{th} \frac{E_-(p')}{2T} \right\}, \\ \Delta_{--}(p) = \int \frac{p' dp'}{2\pi} \left\{ V_b(p, p') \frac{\Delta_{++}(p')}{2E_+(p')} \operatorname{th} \frac{E_+(p')}{2T} + V_a(p, p') \frac{\Delta_{--}(p')}{2E_-(p')} \operatorname{th} \frac{E_-(p')}{2T} \right\}, \end{cases} \quad (2.37)$$

где $V_a = (V_0 + V_1)/2$, $V_b = (V_0 - V_1)/2$. Заметим, что отличие V_b от нуля приводит к перемешиванию Δ_{++} и Δ_{--} в уравнениях (2.37) и, следовательно, к фиксации относительной фазы двух щелей.

Система (2.37) отличается по виду от многозонного уравнения для щели в работе [171], так как последнее получено путем распространения рассмотрения БКШ на конусообразную зонную структуру и не отражает киральность электронов в графене. Однако, результаты совпадают в пределе контактного взаимодействия спаривания, когда $V_a = V_b$.

2.4.3 Величина щели при нулевой температуре

Решение системы (2.37) определяется свойствами потенциала спаривания $V(q)$, в качестве которого мы возьмем статически экранированный потенциал (2.10), вычисленный в приближении хаотических фаз. Здесь и далее мы будем рассматривать случай $p_F D \ll 1$,

при котором межслойное расстояние выпадает из задачи, а сила связи определяется параметром r_s (2.9), максимально возможное значение которого составляет приблизительно 2.19. Большая кратность вырождения фермионов, равная в нашем случае 8 (две проекции спина, две долины и два слоя графена), обеспечивает применимость приближения хаотических фаз для определения $V(q)$ (см. [163, 165, 174]). Частота обрезания w , определяющая энергетическую полуширину слоя спаривания в окрестности поверхности Ферми, была определена выше в подразделе 2.2.2:

$$w = \mu \times \begin{cases} \sqrt{8r_s/p_F D}, & \text{если } r_s p_F D \gg 1, \\ 8r_s, & \text{если } r_s p_F D \ll 1, r_s \ll 1, \\ 2, & \text{если } r_s p_F D \ll 1, r_s \sim 1. \end{cases} \quad (2.38)$$

В режиме слабой связи — при малых r_s или больших $p_F D$ — получаем $w \ll \mu$, следовательно, спаривание практически не захватывает зоны спаривающихся частиц, удаленные от поверхности Ферми, поэтому можно положить $\Delta_{--} = 0$. Таким образом, при слабой связи у нас остается только первое уравнение системы (2.37), которое и было рассмотрено ранее (см. уравнение (2.5)). Его решение можно представить в виде

$$\Delta = 2w \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda_a} \right\}, \quad (2.39)$$

где $\lambda_a = \mathcal{N}V_a(p_F, p_F)$ — безразмерная константа внутризонной связи, $\mathcal{N} = \mu/2\pi\hbar v_F^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми. В рассматриваемом нами случае $p_F D \ll 1$ экранированное взаимодействие (2.10) принимает простой вид:

$$\mathcal{N}V(q) = \frac{r_s}{\tilde{q} + 8r_s}. \quad (2.40)$$

Интегрируя (2.40) по углам согласно (2.34), получим

$$\lambda_a = \frac{r_s}{\pi} \left\{ 2\pi r_s - 1 - \sqrt{16r_s^2 - 1} \arccos \frac{1}{4r_s} \right\}. \quad (2.41)$$

Выражения (2.39) и (2.41) определяют грубую оценку щели в однозонном режиме слабой связи, который был рассмотрен выше более детально. Эта оценка, в согласии с [163], имеет порядок $10^{-7} \times \mu$. Однако, как будет показано ниже, при многозонном рассмотрении может дать гораздо большие оценки щели при сильной связи.

Для рассмотрения многозонного спаривания мы используем две модели, позволяющие свести интегральные уравнения для щели (2.37) к алгебраическим: приближение щели, постоянной в слое спаривания, и приближение сепарабельного потенциала.

Предположим, что щели $\Delta_{++}(p)$ и $\Delta_{--}(p)$ являются постоянными в слое спаривания с энергетической полушириной w , который, в том числе, частично захватывает удаленные от поверхности Ферми зоны: $\Delta_{++}(p) = \Delta_+ \Theta(w + \mu - v_F p)$, $\Delta_{--}(p) = \Delta_- \Theta(w - \mu - v_F p)$ (положим Δ_+ и Δ_- вещественными и положительными). Заменяя потенциалы V_a и V_b их значениями на поверхности Ферми, мы приведем систему (2.37) к виду

$$\begin{cases} \Delta_+ = \lambda_a A_+ \Delta_+ + \lambda_b A_- \Delta_-, \\ \Delta_- = \lambda_b A_+ \Delta_+ + \lambda_a A_- \Delta_-, \end{cases} \quad (2.42)$$

$$A_{\pm} = \int_0^{w/\mu \pm 1} \frac{x dx}{2\sqrt{(x \mp 1)^2 + (\Delta_{\pm}/\mu)^2}} = \frac{\sqrt{\Delta_{\pm}^2 + w^2} - \sqrt{\Delta_{\pm}^2 + \mu^2}}{2\mu} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{\Delta_{\pm}^2 + w^2} \pm w}{\sqrt{\Delta_{\pm}^2 + \mu^2} - \mu}, \quad (2.43)$$

где $\lambda_b = \mathcal{N}V_b(p_F, p_F)$ — безразмерная константа межзонной связи. При $p_F D \ll 1$, по аналогии с (2.41), получим

$$\lambda_b = \frac{r_s}{\pi} \left\{ -2\pi r_s + 1 + \frac{16r_s^2}{\sqrt{16r_s^2 - 1}} \arccos \frac{1}{4r_s} \right\}. \quad (2.44)$$

Согласно тому, где константы связи λ_a и λ_b находятся в уравнениях (2.42), их можно назвать, соответственно, константами внутризонной и межзонной связи. По определению, их сумма $\lambda_0 = \lambda_a + \lambda_b$ является безразмерной s -волновой гармоникой потенциала спаривания на поверхности Ферми, а разность $\lambda_1 = \lambda_a - \lambda_b$ является p -волновой гармоникой потенциала спаривания. Если радиус действия потенциала спаривания мал (что соответствует случаю сильного экранирования и больших r_s), то p -волновая гармоника стремится к нулю, вследствие чего значения λ_a и λ_b сближаются. Действительно, из (2.41) и (2.44) при $p_F D \ll 1$, $r_s \rightarrow \infty$ получаем $\lambda_0 \approx 1/8$, $\lambda_1 \approx 1/48\pi r_s$, поэтому $\lambda_a, \lambda_b \rightarrow 1/16$. Если же радиус действия потенциала спаривания велик (случай слабого экранирования и малых r_s), то s - и p -волновая гармоники имеют одинаковый порядок величины, вследствие чего нельзя пренебречь различием между λ_a и λ_b . Действительно, при $p_F D \ll 1$, $r_s \ll 1$ выражения (2.41) и (2.44) дают $\lambda_a \approx (r_s/\pi)(-1 - \ln 2r_s)$, $\lambda_b \approx r_s/\pi$. Графики зависимости λ_0 , λ_1 , λ_a и λ_b от r_s при $p_F D \ll 1$, изображенные на рис. 2.6, подтверждают эти выводы.

В асимптотическом случае малых щелей $\Delta_{\pm} \ll \mu$ из выражений (2.43) получаем

$$A_+ \approx \frac{w - \mu}{2\mu} + \ln \frac{2\sqrt{w\mu}}{\Delta_+}, \quad A_- \approx \frac{w - \mu}{2\mu} - \frac{1}{2} \ln \frac{w}{\mu}. \quad (2.45)$$

Подставляя (2.45) в (2.42), находим асимптотические выражения для щелей:

$$\Delta_+ = 2\mu \exp \left\{ -\frac{1}{\Lambda} + \frac{w}{\mu} - 1 \right\}, \quad \Delta_- = \Delta_+ \frac{\lambda_b}{\lambda_a - (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)A_-}. \quad (2.46)$$

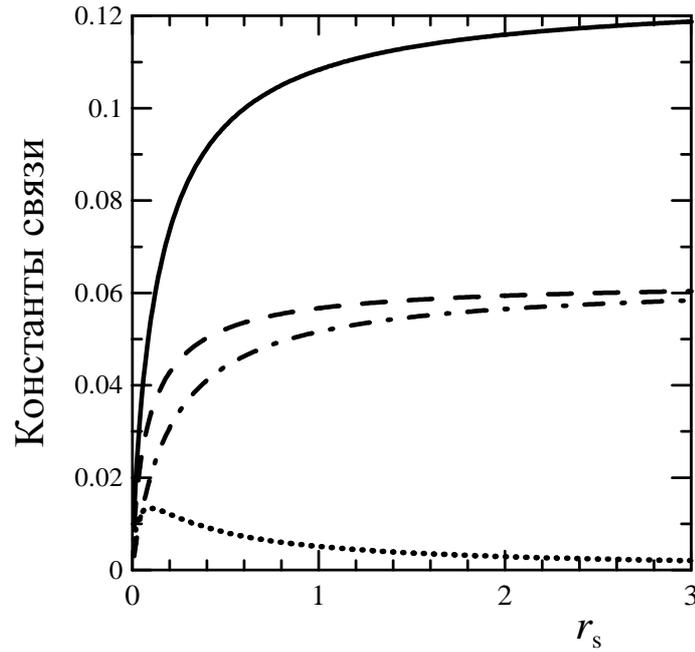


Рис. 2.6. Безразмерные константы связи при $p_F D \ll 1$ как функции параметра r_s : λ_0 — сплошная линия, λ_1 — пунктир, λ_a — штриховая линия, λ_b — штрих-пунктир.

Здесь введена эффективная константа связи

$$\Lambda = \frac{\lambda_a - (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)A_-}{1 - (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)A_-^2}, \quad (2.47)$$

которая немного отличается от внутризонной константы λ_a , фигурирующей в (2.39), за счет влияния валентной зоны.

Выражение (2.46) для Δ_+ отличается по своему виду от результата типа БКШ (2.39). Если пренебречь отличием внутризонной и межзонной констант связи и положить $\lambda_a = \lambda_b$ (что соответствует случаю контактного потенциала спаривания), то выражение (2.46) сводится к асимптотической формуле (6) работы [171]:

$$\Delta_+ = \Delta_- = 2\mu \exp \left\{ -\frac{2}{\lambda_0} + \frac{w}{\mu} - 1 \right\}. \quad (2.48)$$

Итак, щели Δ_+ и Δ_- при $T = 0$ в нашей модели зависят от $p_F D$, r_s и w . Грубая оценка ширины слоя спаривания при $p_F D \ll 1$, согласно (2.38), дает результат $w = \max(2\mu, 8\mu r_s)$. Однако, поскольку эта оценка касается только порядка величины, то для численных расчетов мы рассмотрим различные величины w в окрестности значений $w = 8\mu r_s$ и $w = 2\mu$. На Рис. 2.7 приведены значения щели в зоне проводимости Δ_+ , полученные численным решением системы уравнений (2.42) и нормированные на μ , как функции r_s при $p_F D \ll 1$ и

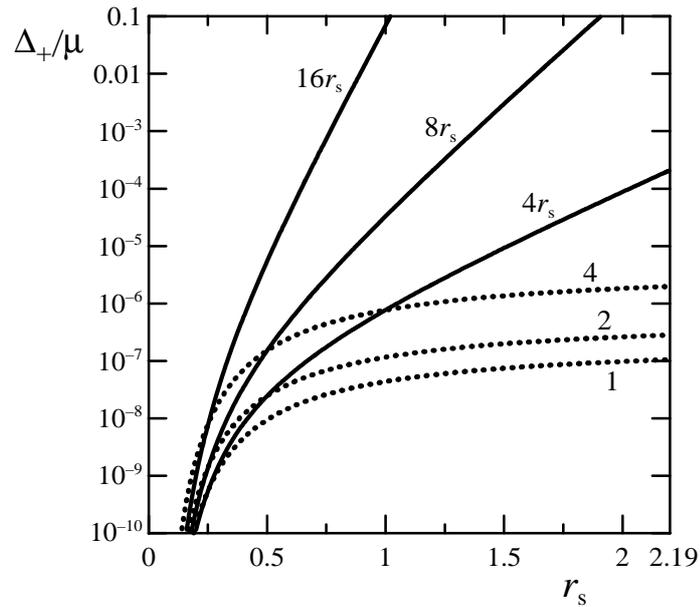


Рис. 2.7. Значение щели в зоне проводимости Δ_+ , нормированной на химический потенциал μ , как функция r_s при $T = 0$, $p_F D \ll 1$ и различных отношениях w/μ , значения которых указаны возле соответствующих кривых.

различных отношениях w/μ . Видно, что, во-первых, Δ_+ приблизительно экспоненциально зависит от w/μ , а во-вторых, быстро выходит на постоянную асимптотику при $w = \text{const}$. Это легко понять исходя из приближенной формулы (2.48) и вида кривой $\lambda_0(r_s)$ на Рис. 2.6: при увеличении r_s и $w = \text{const}$ показатель экспоненты в (2.48) выходит на предельное значение $w/\mu = 17$. Таким образом, при больших w щель в спектре Δ_+ экспоненциально зависит от w , что качественно отличается от результата, даваемого формулой типа БКШ (2.39), в которую w входит только в виде предэкспоненциального множителя.

Тем не менее, согласно (2.38), оценка $w = 8\mu r_s$ справедлива только при $r_s \ll 1$, а оценка $w = 4\mu$ — при $r_s \sim 1$, из-за чего при малых r_s адекватные оценки величины Δ_+ , должны даваться на Рис. 2.7 сплошными кривыми, а при достаточно больших r_s — пунктирными кривыми. Следовательно, в рассматриваемой модели максимальное значение отношения w/μ достигает 2 по порядку величины, а максимальное значение Δ_+ составляет по порядку величины $(10^{-7} - 10^{-6}) \times \mu$. Таким образом, величина щели при многозонном спаривании в приближении постоянной щели может превышать оценку БКШ только при условии $w \gg \mu$, которое, казалось бы, не выполняется даже при больших r_s . Однако, как будет показано ниже, выход за рамки приближения $\Delta_{\gamma\gamma}(p) = \text{const}$ значительно увеличивает щель за счет интегрирования по широкой области импульсов, дающих вклад в уравнение

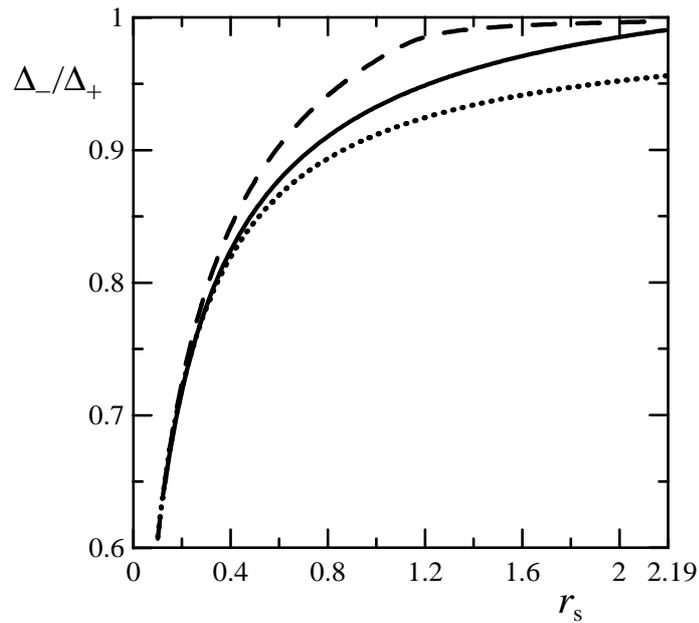


Рис. 2.8. Отношение щели в валентной зоне Δ_- к щели в зоне проводимости Δ_+ как функция r_s при $T = 0$, $p_F D \ll 1$ и различных отношениях $w/\mu r_s$: $16r_s$ — штриховая линия, $8r_s$ — сплошная линия, 2 — пунктир.

самосогласования.

Что касается отношения щелей в зоне проводимости и валентной зоне, то, как видно из системы (2.42), значения Δ_+ и Δ_- отличаются тем сильнее, чем сильнее отличаются λ_a и λ_b . Как было сказано выше при обсуждении Рис. 2.6, отличие λ_a и λ_b велико при малых r_s и мало при больших r_s . На Рис. 2.8 приведено отношение Δ_-/Δ_+ при $T = 0$, $p_F D \ll 1$ и различных отношениях w/μ как функция r_s . Видно, что Δ_-/Δ_+ слабо зависит от w/μ и, в согласии с вышеприведенными рассуждениями, увеличивается при увеличении r_s , устремляясь к единице. При достаточно больших r_s отношение Δ_-/Δ_+ близко к единице, и это означает, что спаривание в валентной зоне столь же существенно, сколь и в зоне проводимости. Следовательно, многозонность спаривания может проявиться в виде необычных сверхтекучих свойств системы. Некоторые результаты, касающиеся этого вопроса, представлены в работах [162, 175, 176], где в многозонном приближении с использованием контактного потенциала спаривания были исследованы свойства вихрей в конденсате электрон-дырочных пар в бислое графена, а также нулевые моды внутри этих вихрей.

Отметим также, что в отличие от рассмотренного в работе [167] спаривания безмас-

совых фермионов, обменивающихся скалярными бозонами, в нашем случае кулоновское взаимодействие является продольно-векторным. При скалярном взаимодействии система уравнений для щели отличается от системы (2.37) заменой $V_a \leftrightarrow V_b$ и, следовательно, поведение отношения Δ_-/Δ_+ качественно иное: Δ_- всегда больше Δ_+ , а при слабой связи Δ_-/Δ_+ устремляется к бесконечности.

При слабой связи, когда $\lambda_b \ll \lambda_a$, фиксация относительной фазы параметров порядка Δ_+ и Δ_- ослабевает, а в пределе $\lambda_b = 0$ она отсутствует, так как уравнения системы (2.42) расщепляются. Поэтому при малых r_s могут возникать щелевые и солитоноподобные возбуждения, связанные с колебаниями относительной фазы Δ_+ и Δ_- и являющиеся решениями уравнения синус-Гордона (по аналогии с [127]).

Попробуем теперь выйти за рамки приближения постоянной щели и учесть зависимость функций $\Delta_{\pm}(p)$ от импульса. Для этого оставим от гармоник $V_0(p, p')$ и $V_1(p, p')$ статически экранированного потенциала (2.40), входящих в уравнения (2.37), только сепарабельную часть, подобно тому, как это делается в [177]:

$$V_l^{(\text{sep})}(p, p') = \frac{V_l(p, p_F)V_l(p_F, p')}{V_l(p_F, p_F)}. \quad (2.49)$$

Сепарабельная часть $V_l^{(\text{sep})}(p, p')$ близка к исходному потенциалу $V_l(p, p')$, если хотя бы один из импульсов p или p' лежит в области, близкой к поверхности Ферми, дающей главный вклад в уравнения для щели (2.37). Поэтому мы можем считать, что замена $V_l(p, p')$ на $V_l^{(\text{sep})}(p, p')$ не приведет к существенным ошибкам в определении щелей $\Delta_{\pm}(p)$. Отличие $V_l^{(\text{sep})}(p, p')$ от $V_l(p, p')$ может быть значительным, если оба импульса p и p' одновременно находятся далеко от поверхности Ферми, но, как можно показать, для случая статически экранированного потенциала (2.40) при таких импульсах $V_l^{(\text{sep})}(p, p') < V_l(p, p')$, поэтому замена потенциала на сепарабельную часть может дать только *заниженные* оценки величины щели.

Подставляя (2.49) в (2.37), мы увидим, что функции $\Delta_{\pm}(p)$ могут быть представлены в виде

$$\Delta_+(p) = \tilde{\Delta}_+ v_a(p) + \tilde{\Delta}_- v_b(p), \quad \Delta_-(p) = \tilde{\Delta}_+ v_b(p) + \tilde{\Delta}_- v_a(p), \quad (2.50)$$

где

$$v_{a,b}(p) = \frac{v_0(p) \pm v_1(p)}{2}, \quad v_l(p) = \frac{V_l(p, p_F)}{V_l(p_F, p_F)} \quad (2.51)$$

(заметим, что $\Delta_{\pm}(p_F) = \tilde{\Delta}_{\pm}$, поэтому *щель в спектре возбуждений системы* приблизительно равна $\tilde{\Delta}_+$). В результате подстановки (2.49)–(2.50) систему интегральных уравнений (2.37) можно превратить в систему алгебраических уравнений относительно двух числовых *параметров щели* $\tilde{\Delta}_+$ и $\tilde{\Delta}_-$, имеющую вид:

$$\begin{cases} \tilde{\Delta}_+ = \lambda_a A \tilde{\Delta}_+ + \lambda_b C \tilde{\Delta}_+ + \lambda_a C \tilde{\Delta}_- + \lambda_b B \tilde{\Delta}_-, \\ \tilde{\Delta}_- = \lambda_a C \tilde{\Delta}_+ + \lambda_b A \tilde{\Delta}_+ + \lambda_a B \tilde{\Delta}_- + \lambda_b C \tilde{\Delta}_-, \end{cases} \quad (2.52)$$

коэффициенты которой

$$A = \tilde{U}_a^+ + U_b^-, \quad B = U_b^+ + U_a^-, \quad C = U_c^+ + U_c^-,$$

$$U_{a,b}^{\pm} = \frac{v_F}{p_F} \int_0^{\infty} p dp \frac{v_{a,b}^2(p)}{2\sqrt{(v_F p \mp \mu)^2 + \Delta_{\pm}^2(p)}}, \quad U_c^{\pm} = \frac{v_F}{p_F} \int_0^{\infty} p dp \frac{v_a(p)v_b(p)}{2\sqrt{(v_F p \mp \mu)^2 + \Delta_{\pm}^2(p)}} \quad (2.53)$$

сами зависят от $\tilde{\Delta}_+$ и $\tilde{\Delta}_-$, так как функции $\Delta_{\pm}(p)$ под интегралами определяются выражениями (2.50). При больших p функции $v_{a,b}(p)$ ведут себя как $r_s/2\lambda_0 p$, поэтому интегралы (2.53) сходятся и приближение сепарабельного потенциала не требует обрезания на больших импульсах.

В пределе $\tilde{\Delta}_{\pm} \rightarrow 0$ из всех интегралов (2.53) только U_a^+ является логарифмически сингулярным и расходится как $\ln(\mu/\tilde{\Delta}_+)$, а остальные интегралы стремятся к конечным пределам. Для аналитических оценок и численных расчетов удобно выделить эту сингулярность следующим образом:

$$U_a^+ = \frac{2\mu}{\sqrt{\tilde{\Delta}_+^2 + 4\mu^2}} \ln \frac{2\mu}{\tilde{\Delta}_+} + \tilde{U}_a^+, \quad A = \frac{2\mu}{\sqrt{\tilde{\Delta}_+^2 + 4\mu^2}} \ln \frac{2\mu}{\tilde{\Delta}_+} + \tilde{A}.$$

Обозначая пределы \tilde{A} , B и C при $\tilde{\Delta}_{\pm} \rightarrow 0$ как \tilde{A}_0 , B_0 и C_0 соответственно и замечая, что $A \approx \ln(2\mu/\tilde{\Delta}_+) + \tilde{A}_0$ при малых $\tilde{\Delta}_+$, получим из системы (2.52) асимптотическое решение для малых $\tilde{\Delta}_{\pm}$:

$$\tilde{\Delta}_+ = 2\mu \exp \left\{ -\frac{1 - \lambda_a(\tilde{A}_0 + B_0) - 2\lambda_b C_0 + (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)(\tilde{A}_0 B_0 - C_0^2)}{\lambda_a - (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)B_0} \right\}, \quad (2.54)$$

$$\tilde{\Delta}_- = \tilde{\Delta}_+ \frac{\lambda_b + (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)C_0}{\lambda_a - (\lambda_a^2 - \lambda_b^2)B_0}. \quad (2.55)$$

Если мы для простоты положим $\lambda_a \approx \lambda_b \approx \lambda_0/2$ (обоснованность такого предположения при больших r_s подтверждается Рис. 2.6), то будем иметь

$$\tilde{\Delta}_+ = 2\mu \exp \left\{ -\frac{2}{\lambda_0} + \tilde{A}_0 + B_0 + 2C_0 \right\}. \quad (2.56)$$

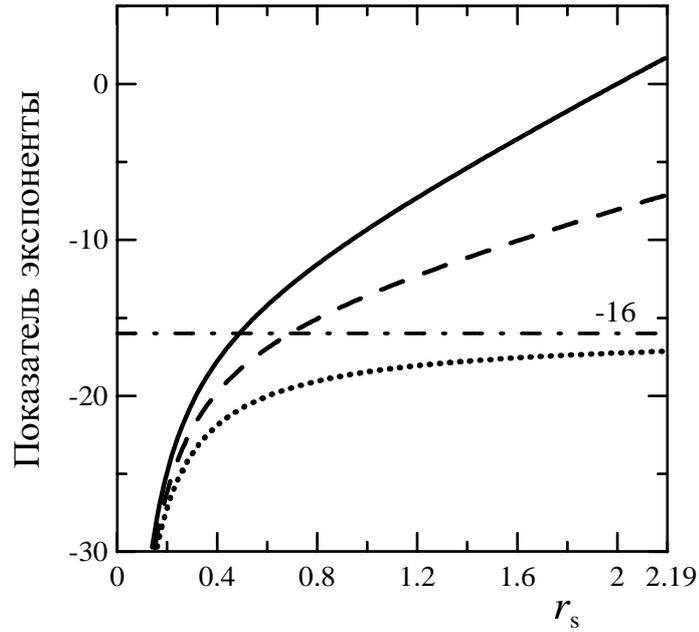


Рис. 2.9. Показатель экспоненты a в формуле $\tilde{\Delta}_+ = 2\mu \exp(a)$ для параметра щели $\tilde{\Delta}_+$ как функция r_s . Сплошная линия: полное приближение сепарабельного потенциала (2.56), пунктир: учет вклада только зоны проводимости (2.57). Штриховая линия: предел БКШ $a = -2/\lambda_0$ (штрих-пунктир — асимптотика этой кривой $a \approx -16$ при больших r_s).

Полученное выражение похоже на (2.48) и отличается от выражения БКШ (2.39) наличием дополнительных слагаемых в показателе экспоненты, которые положительны всюду, за исключением малой области при $r_s \ll 1$. Интересно отметить, что, согласно (2.53), эти слагаемые можно разделить на два вклада, соответствующих верхней и нижней зонам. Исключая из показателя экспоненты интегралы U_a^- , U_b^- и U_c^- , получим выражение для щели, соответствующее однозонной модели с учетом только зоны проводимости:

$$\tilde{\Delta}_+^{(\text{ob})} = 2\mu \exp \left\{ -\frac{2}{\lambda_0} + \tilde{U}_a^+ + U_b^+ + 2U_c^+ \right\}. \quad (2.57)$$

Таким образом, одна часть положительного вклада в показатель экспоненты (2.56) проистекает из-за влияния валентной зоны, а другая часть определяется только зоной проводимости и набирается за счет плавной зависимости функций $\Delta_{\pm}(p)$ и потенциалов $V_l^{(\text{sep})}(p, p')$ от импульсов в широкой области их изменения. На Рис. 2.9 показаны зависимости показателя экспоненты a в приближенной формуле для параметра щели $\tilde{\Delta}_+ = 2\mu \exp(a)$ от r_s в трех случаях: учет обеих зон, в соответствии с (2.56), учет только зоны проводимости (2.57), и предел БКШ, при котором в показателе экспоненты остается только $-2/\lambda_0$. Как видно, при достаточно больших r_s вклады в показатель экспоненты от

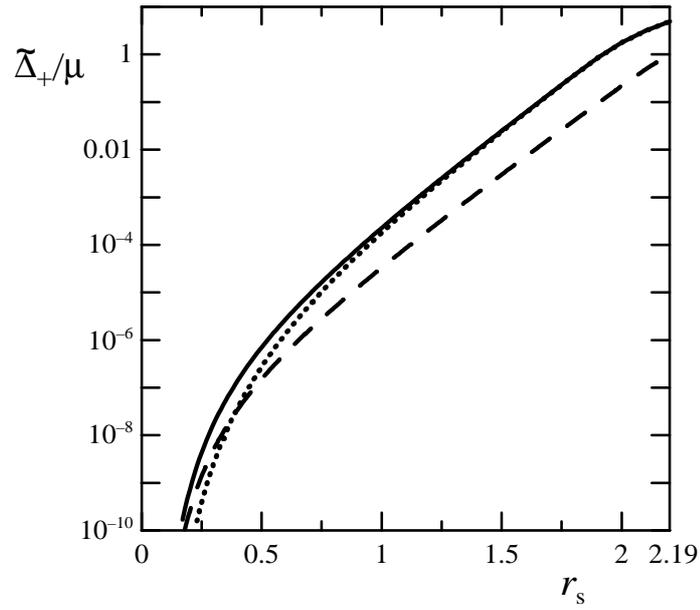


Рис. 2.10. Сплошная линия: параметр щели $\tilde{\Delta}_+$, нормированный на химический потенциал μ , как функция r_s , вычисленный в приближении сепарабельного потенциала. Пунктир: результат в приближении $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_0/2$, штриховая линия: результат для Δ_+ в приближении $\Delta_{\pm} = \text{const}$ при $w = 8\mu r_s$ (см. Рис. 2.7).

валентной зоны и от зоны проводимости являются большими по величине, приблизительно равны между собой и возрастают линейно с ростом r_s .

Результаты для величины самого параметра щели $\tilde{\Delta}_+$ в приближении сепарабельного потенциала приведены на Рис. 2.10. Они получены численным решением системы (2.52) как с учетом различия констант связи λ_a и λ_b (сплошная линия), так и в приближении $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_0/2$, использованном при получении формулы (2.56) (пунктир). При больших r_s , в полном соответствии с уменьшением λ_1 относительно λ_0 (Рис. 2.6), различие между этими кривыми становится несущественным, так что пренебрежение разностью λ_a и λ_b является оправданным в этих условиях. Мы видим, что за счет зависимости щелей $\Delta_{\pm}(p)$ и потенциалов $V_l^{(\text{sep})}(p, p')$ от импульса величина щели в спектре, приближенно равная $\tilde{\Delta}_+$, может достигать значений порядка μ , что резко контрастирует с результатом БКШ $\tilde{\Delta}_+ \sim (10^{-7} - 10^{-6}) \times \mu$.

Для сравнения на Рис. 2.10 приведена зависимость для Δ_+ в приближении $\Delta_{\pm} = \text{const}$ при $w = 8\mu r_s$, аналогичная изображенной на Рис. 2.7. Она демонстрирует хорошее согласие с результатами, полученными в приближении сепарабельного потенциала, что можно понять, исходя из выражения (2.40) для статически экранированного потенциала: раз-

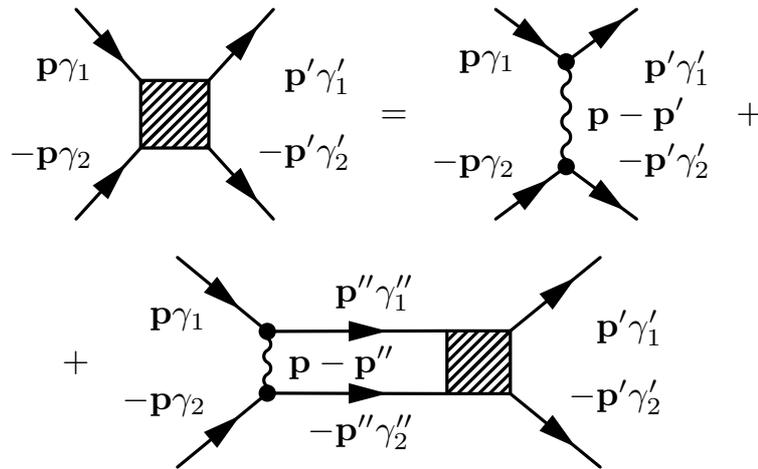


Рис. 2.11. Диаграммное представление уравнения Бете-Солпитера (2.58).

мер области импульсов, дающих вклад в уравнение для щели, имеет порядок $8p_F r_s$, а это эквивалентно энергетической полуширине слоя спаривания $w \sim 8\mu r_s$.

Приближенные формулы (2.54)–(2.55) дают хорошие оценки $\tilde{\Delta}_{\pm}$, очень близкие к результатам численного решения системы (2.52), а отклонения начинаются только при $r_s > 2$ и видны на Рис. 2.10 как небольшой горизонтальный загиб сплошной кривой. Отношение параметров щели $\tilde{\Delta}_-/\tilde{\Delta}_+$ качественно и количественно близко к зависимостям, приведенным на Рис. 2.8.

2.4.4 Неустойчивость нормального состояния

Исследование неустойчивости нормального состояния позволяет определить критическую температуру перехода в сверхтекучее состояние в приближении среднего поля T_c , которая может служить верхней оценкой для температуры перехода Костерлица-Таулеса двумерной системы в сверхтекучее состояние [15, 16]. Для этого будем рассматривать вершинную часть в лестничном приближении, задаваемую уравнением Бете-Солпитера. При понижении температуры до критического значения T_c в вершинной части как функции суммарной энергии сталкивающихся частиц появляется полюс, когда обе частицы лежат на поверхности Ферми [110, стр. 429]. Уравнение Бете-Солпитера для вершинной части, отвечающей покоящейся паре, имеет диаграммный вид, приведенный на Рис. 2.11, а соответствующее аналитическое выражение есть:

$$\Gamma_{\gamma_1\gamma_2\gamma'_1\gamma'_2}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E) = V(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|) \langle f_{\mathbf{p}\gamma_1} | f_{\mathbf{p}'\gamma'_1} \rangle \langle f_{\mathbf{p}\gamma_2} | f_{\mathbf{p}'\gamma'_2} \rangle -$$

$$\begin{aligned}
& -T \int \frac{d\mathbf{p}''}{(2\pi)^2} V(|\mathbf{p} - \mathbf{p}''|) \sum_{\gamma_1'' \gamma_2''} \langle f_{\mathbf{p}\gamma_1} | f_{\mathbf{p}''\gamma_1''} \rangle \langle f_{\mathbf{p}\gamma_2} | f_{\mathbf{p}''\gamma_2''} \rangle \times \\
& \times \Gamma_{\gamma_1'' \gamma_2'' \gamma_1' \gamma_2'}(\mathbf{p}'', \mathbf{p}', E) \sum_{\varepsilon_n} G_{\gamma_1'' \gamma_1'}^{0(11)}(\mathbf{p}'', E/2 + i\varepsilon_n) G_{\gamma_2'' \gamma_2'}^{0(22)}(\mathbf{p}'', -E/2 + i\varepsilon_n), \quad (2.58)
\end{aligned}$$

где $\Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}', E)$ — вершинная часть, соответствующая взаимному рассеянию электрона из верхнего слоя, находящегося в зоне γ_1 в начальном состоянии и в зоне γ_1' в конечном состоянии, и электрона из нижнего слоя, находящегося в зоне $-\gamma_2$ в начальном состоянии и в зоне $-\gamma_2'$ в конечном состоянии; \mathbf{p} и \mathbf{p}' — относительные импульсы двух электронов до и после рассеяния, E — суммарная энергия электронов. При возникновении неустойчивости полюс в вершинной части впервые появляется при $E = 0$ [110, стр. 433]. Сумма по частотам в (2.58) при $E = 0$ равна

$$S_{\gamma_1 \gamma_2}(p) = -T \sum_{\varepsilon_n} G_{\gamma_1 \gamma_1}^{0(11)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) G_{\gamma_2 \gamma_2}^{0(22)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n) = \frac{1 - n_F(\xi_{p\gamma_1}) - n_F(\xi_{p\gamma_2})}{\xi_{p\gamma_1} + \xi_{p\gamma_2}},$$

где $n_F(E) = [\exp(E/T) + 1]^{-1}$ — распределение Ферми. Для различных индексов зон получим

$$S_{++}(p) = \frac{1}{2\xi_{p+}} \operatorname{th} \frac{\xi_{p+}}{2T}, \quad S_{--}(p) = \frac{1}{2\xi_{p-}} \operatorname{th} \frac{\xi_{p-}}{2T}, \quad (2.59)$$

$$S_{+-}(p) = S_{-+}(p) = \frac{\operatorname{sh}(\mu/T)}{4\mu \operatorname{ch}(\xi_{p+}/2T) \operatorname{ch}(\xi_{p-}/2T)}. \quad (2.60)$$

Будем искать нестабильность в s -волновом канале, когда относительный орбитальный момент сталкивающихся частиц равен нулю. Тогда $\Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ не зависит от направленных векторов \mathbf{p} и \mathbf{p}' , а уравнение (2.58) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}(p, p') &= \frac{1 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}{4} V_0(p, p') + \frac{\gamma_1 \gamma_1' \gamma_2 \gamma_2'}{4} V_1(p, p') + \\
&+ \int \frac{p'' dp''}{2\pi} \sum_{\gamma_1'' \gamma_2''} \left[\frac{1 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1'' \gamma_2''}{4} V_0(p, p'') + \frac{\gamma_1 \gamma_1'' + \gamma_2 \gamma_2''}{4} V_1(p, p'') \right] \times \\
&\times S_{\gamma_1'' \gamma_2''}(p'') \Gamma_{\gamma_1'' \gamma_2'' \gamma_1' \gamma_2'}(p'', p'). \quad (2.61)
\end{aligned}$$

Отсюда можно сразу заметить, что 8 компонент $\Gamma_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}$, у которых три из четырех зонных индексов одного знака, а четвертый — противоположного знака, равны нулю. Уравнения (2.61) для остальных 8 компонент разделяются попарно на 4 системы. Решим их в приближении постоянной в слое спаривания вершины: $\Gamma_{+\gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}(p, p') = \Gamma_{+\gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'} \Theta(w + \mu - v_F p)$, $\Gamma_{-\gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'}(p, p') = \Gamma_{-\gamma_2 \gamma_1' \gamma_2'} \Theta(w - \mu - v_F p)$, а потенциалы спаривания, как и в уравнениях для щели, заменим их значениями на поверхности Ферми. (Строго говоря, использование для потенциала спаривания нуль-температурных выражений из подраздела 2.4.3 справедливо, если влияние температуры на поляризационный оператор мало на характерных

масштабах импульсов p_F/r_s , т.е., если $T_c \ll \mu/r_s$.) Тогда уравнения (2.61) для ненулевых компонент вершины примут вид:

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_a I_{++} & -\lambda_b I_{--} \\ -\lambda_b I_{++} & 1 - \lambda_a I_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{++++} \\ \Gamma_{----} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a/\mathcal{N} \\ \lambda_b/\mathcal{N} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_a I_{++} & -\lambda_b I_{--} \\ -\lambda_b I_{++} & 1 - \lambda_a I_{--} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{++--} \\ \Gamma_{--++} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_b/\mathcal{N} \\ \lambda_a/\mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad (2.62)$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_a I_{+-} & -\lambda_b I_{-+} \\ -\lambda_b I_{+-} & 1 - \lambda_a I_{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{+--+} \\ \Gamma_{-++-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a/\mathcal{N} \\ \lambda_b/\mathcal{N} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda_a I_{+-} & -\lambda_b I_{-+} \\ -\lambda_b I_{+-} & 1 - \lambda_a I_{-+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{+--+} \\ \Gamma_{-++-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_b/\mathcal{N} \\ \lambda_a/\mathcal{N} \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

где введены интегралы

$$I_{++} = \int_0^{w/\mu+1} \frac{x dx}{2(x-1)} \operatorname{th} \frac{x-1}{2T/\mu}, \quad I_{--} = \int_0^{w/\mu-1} \frac{x dx}{2(x+1)} \operatorname{th} \frac{x+1}{2T/\mu}, \quad (2.64)$$

$$I_{\gamma,-\gamma} = \int_0^{w/\mu+\gamma} \frac{\operatorname{sh}(\mu/T)x dx}{4 \operatorname{ch}[(x-1)\mu/2T] \operatorname{ch}[(x+1)\mu/2T]}. \quad (2.65)$$

Условие сингулярности компонент $\Gamma_{\gamma\gamma'\gamma'}$, отвечающих диагональному по зонам спариванию, эквивалентно обращению в нуль определителя систем (2.62) и имеет вид

$$(1 - \lambda_a I_{++})(1 - \lambda_a I_{--}) - \lambda_b^2 I_{++} I_{--} = 0. \quad (2.66)$$

Аналогично, получаемое из систем (2.63) условие сингулярности вершин $\Gamma_{\gamma-\gamma'\gamma'}$, отвечающих антидиагональному по зонам спариванию, есть

$$(1 - \lambda_a I_{+-})(1 - \lambda_a I_{-+}) - \lambda_b^2 I_{+-} I_{-+} = 0. \quad (2.67)$$

Положим для качественного анализа $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$, тогда уравнение (2.66) переходит в $I_{++} + I_{--} = 2/\lambda$, а уравнение (2.67) — в $I_{+-} + I_{-+} = 2/\lambda$. Как видно из (2.64) и (2.65), интеграл I_{++} логарифмически устремляется к бесконечности при $T \rightarrow 0$, а остальные интегралы I_{+-} , I_{-+} и I_{--} при $T \rightarrow 0$ стремятся к конечным пределам. Это означает, что неустойчивость по отношению к диагональному по зонам спариванию будет существовать при сколь угодно малых λ , в то время как неустойчивость по отношению к антидиагональному по зонам спариванию будет иметь место, только если константа связи превышает некоторое пороговое значение, зависящее от w .

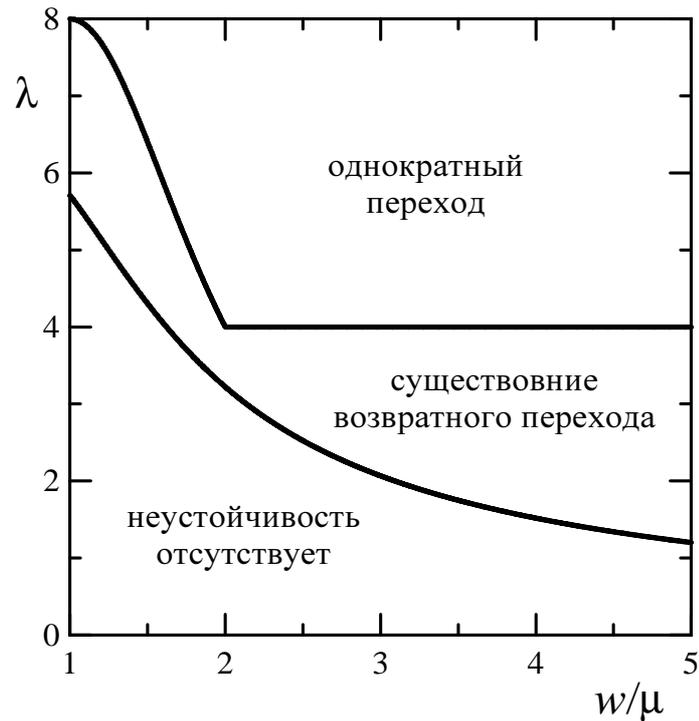


Рис. 2.12. Фазовая диаграмма системы по отношению к антидиагональному по зонам спариванию в переменных ширины слоя спаривания w , нормированной на химический потенциал μ , и безразмерной константы связи λ . В области возвратного перехода неустойчивость существует только в некотором интервале температур.

На Рис. 2.12 изображена фазовая диаграмма системы относительно антидиагонального по зонам спаривания в переменных полуширины слоя спаривания w , отнесенной к химическому потенциалу μ , и константы связи λ . При фиксированном w и увеличении λ устойчивое нормальное состояние системы сменяется неустойчивым состоянием. Эта неустойчивость существует, только если температура системы T заключена в некотором интервале от минимального ненулевого значения до максимального, вследствие чего при изменении температуры будет происходить возвратный фазовый переход системы в сверхтекучее состояние. При дальнейшем увеличении λ минимальное значение температуры, ограничивающей область неустойчивости, обращается в нуль, и поведение системы характеризуется обычным однократным переходом, возникающим при уменьшении температуры ниже некоторого критического значения. Такое поведение системы связано с необычным видом двухчастичной функции Грина на поверхности Ферми (2.60) в антидиагональном по зоне канале. В диагональном же канале двухчастичная функция Грина (2.59) имеет обычный для теории БКШ вид.

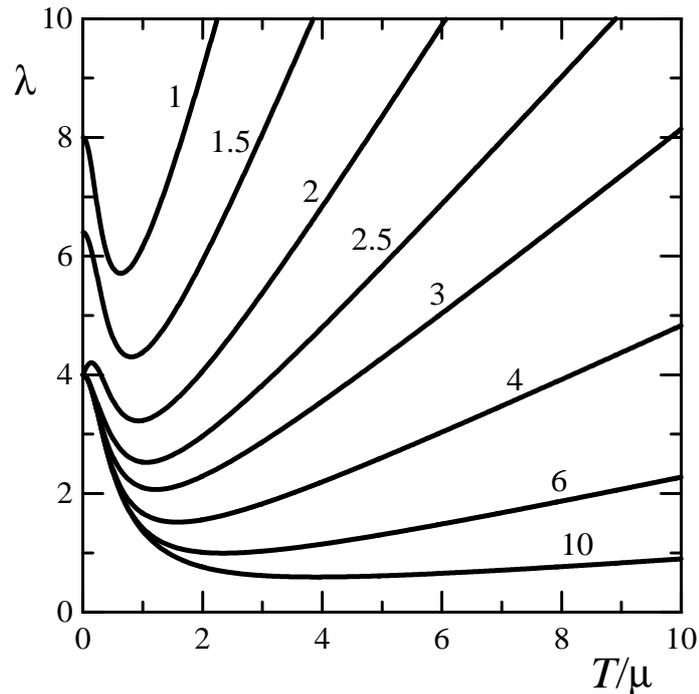


Рис. 2.13. Фазовая диаграмма системы по отношению к антидиагональному по зонам спариванию в переменных температуры T , нормированной на химический потенциал μ , и безразмерной константы связи λ , при различных отношениях w/μ , значения которых указаны возле соответствующих кривых.

Для иллюстрации этих выводов на Рис. 2.13 изображены фазовые диаграммы системы в переменных T и λ при различных значениях w в единицах μ . Состояние системы устойчиво, если значение λ находится ниже соответствующей кривой, и неустойчиво, если λ лежит выше кривой. Немонотонное поведение кривых говорит о том, что в некоторых диапазонах λ состояние системы неустойчиво в интервале температур от ненулевого минимального значения до некоторого максимального значения. При достаточно больших λ состояние системы неустойчиво в области от $T = 0$ до температуры перехода, как и происходит при обычных однократных переходах в спаренное состояние. При $w = 2\mu$ на Рис. 2.13 видны колебания границы фаз вблизи $T = 0$, казалось бы, указывающие на трехкратный переход. Однако, можно показать, что такие колебания, возникающие и при других значениях w , близких к 2μ , являются артефактом резкого обрезания области спаривания и исчезают при небольшом размазывании этой области в интегралах (2.65).

В подразделе 2.4.3 было показано, что максимальное значение констант внутризонного и межзонного спаривания $\lambda_{a,b}$ составляет $1/16$. С другой стороны, ширина слоя спарива-

ния не превосходит по порядку величины значения $8\mu \times 2.19 \approx 17.5\mu$. Точка $w/\mu = 17.5$, $\lambda = 1/16$ лежит далеко в области устойчивости нормального состояния системы, следовательно, электрон-дырочное кулоновское взаимодействие в бислое графена не может вызвать антидиагонального спаривания. Поскольку диагональный и антидиагональный по зонам способы спаривания являются взаимно конкурирующими (Рис. 2.3), то при достаточно низких температурах в системе, скорее всего, будет реализовываться диагональное по зонам спаривание, рассмотренное в подразделе 2.4.3.

Решая численно уравнение (2.66), можно определить критическую температуру T_c перехода системы в состояние с диагональным по зонам спариванием, а при $T_c \ll \mu$, $T_c \ll w$ можно получить асимптотическую формулу для T_c . Интегралы (2.64) в этом случае приближенно равны

$$I_{++} \approx \frac{w - \mu}{2\mu} + \ln \frac{2C\sqrt{w\mu}}{\pi T}, \quad I_{--} \approx \frac{w - \mu}{2\mu} - \frac{1}{2} \ln \frac{w}{\mu},$$

где $C \approx 1.78$ — постоянная Эйлера. Подстановка таких асимптотик в уравнение (2.67) дает результат

$$T_c = \frac{C}{\pi} \Delta_+, \quad (2.68)$$

совпадающий с обычным соотношением БКШ между щелью при нулевой температуре и критической температурой, где Δ_+ дается выражением (2.46). Уравнение (2.66) было также решено численно при различных r_s и w , и было получено, что отношение между Δ_+ и T_c весьма близко к (2.68) и при достаточно больших T_c .

2.4.5 Переход Костерлица-Таулеса

Как было сказано выше, критическая температура T_c , получаемая из уравнения Бете-Солпитера, является верхней оценкой для температуры перехода Костерлица-Таулеса $T_{КТ}$ в сверхтекучее состояние в рассматриваемой двумерной системе. При повышении температуры выше $T_{КТ}$ диссоциация пар антипараллельных вихрей в параметре порядка [16] становится энергетически выгодной, так как становится отрицательной свободная энергия вихря

$$F_v = E_v - TS_v, \quad (2.69)$$

где E_v — энергия вихря, связанная в повышении энергии конденсата, S_v — энтропия вихря. Последняя может быть оценена как $S_v = \ln(\pi L^2/\pi\xi^2) = 2\ln(L/\xi)$ — логарифм

отношения площади системы (считаем, что она имеет форму круга радиусом L) к площади кора вихря, где ξ — длина когерентности.

Для определения энергии вихря E_v необходимо учитывать тот факт, что в нашем случае параметр порядка является матрицей (4×4) по спинам и долинам. Обобщая функционал Гинзбурга-Ландау, найденный в работе [55] для случая матричного (2×2) параметра порядка, получим

$$E_v = \frac{1}{32} \rho_s(T) \int d\mathbf{r} \left\{ \text{Sp} [-iP\partial_x P]^2 + \text{Sp} [-iP\partial_y P]^2 \right\}, \quad (2.70)$$

где P — матричный параметр порядка, $\rho_s(T)$ — сверхтекучая плотность (или фазовая жесткость) конденсата при заданной температуре, а интегрирование производится по всей площади системы за исключением кора вихря, в котором конденсат отсутствует. Обычный вихрь может быть представлен следующей конфигурацией параметра порядка:

$$P = e^{i\varphi} S, \quad (2.71)$$

где φ — азимутальный угол, отсчитываемый от центра вихря, S — произвольная унитарная матрица (4×4), которая может медленно меняться в пространстве и не имеет особенностей. Подставляя (2.71) в (2.70), получим энергию вихря $E_v^{(1)} = \pi\rho_s \ln(L/\xi)$. Условие обращения в нуль свободной энергии вихря (2.69) дает уравнение для температуры диссоциации пар вихрей:

$$\frac{\pi\rho_s(T)}{2} = T, \quad (2.72)$$

которое и является уравнением для определения температуры перехода Костерлица-Таулеса в двумерной системе [16].

Однако, помимо обычных вихрей (2.71), в матричном параметре порядка P возможны и другие типы топологических возбуждений. Один из них, — это рассмотренные в [55] *полувихри* вида

$$P = S \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^+, \quad (2.73)$$

энергия (2.70) которого равна $E_v^{(1/2)} = (1/4)\pi\rho_s(T) \ln(L/\xi)$ и, как видно, в 4 раза меньше энергии обычного вихря. Кроме того, в матричном параметре порядка возможно возник-

новение четверть-вихрей вида

$$P = S \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} S^+. \quad (2.74)$$

Подставляя (2.74) в (2.70), получим в случае черверть-вихря энергию, равную $E_V^{(1/4)} = (1/16)\pi\rho_s(T) \ln(L/\xi)$, которая в 16 раз меньше энергии обычного вихря (2.71).

Поскольку четверть-вихри (2.74) обладают меньшей энергией, чем обычные вихри (2.71) и полувихри (2.73), то переход Костерлица-Таулеса будет происходить при диссоциации пар антипараллельных четверть-вихрей. Условие обращения в нуль свободной энергии (2.69) четверть-вихря

$$\frac{\pi\rho_s(T_{\text{КТ}})}{2} = 16T_{\text{КТ}}, \quad (2.75)$$

будет определять температуру перехода Костерлица-Таулеса $T_{\text{КТ}}$ в системе.

Как известно, сверхтекучая плотность $\rho_s(T)$ равна $\mu/4\pi$ при $T = 0$ и обращается в ноль при критической температуре T_c , найденной в приближении среднего поля [16, 165]. Если $T_{\text{КТ}} \ll \mu$, то, как следует из (2.75), $T_{\text{КТ}} \approx T_c$, т.е. приближения среднего поля оказывается достаточно для определения температуры перехода в сверхтекучее состояние. В этом случае можно оценить T_c исходя из величины щели при нулевой температуре при помощи выражения (2.68)

Если же температура достаточно велика, $T_{\text{КТ}} \sim \mu$, чего можно ожидать при больших r_s , то необходимо определять сверхтекучую плотность ρ_s как функцию температуры. В данном разделе было показано, что при больших r_s спаривание в валентной зоне является настолько же существенным, как и в зоне проводимости. Следовательно, при расчете ρ_s и определении $T_{\text{КТ}}$ необходимо учитывать вклад валентной зоны. Оставляя этот вопрос для дальнейших исследований (см. также работу [178]), заметим только, что, тем не менее, в качестве грубой оценки $T_{\text{КТ}}$ по порядку величины можно брать значение щели $\Delta_{++}(p_F)$ на поверхности Ферми при $T = 0$.

2.5 Учет динамических эффектов

Рассмотрим теперь спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена в режиме сильной связи за пределами статического приближения, т.е. с

учетом динамических эффектов — зависимости экранированного потенциала электрон-дырочного взаимодействия от частоты (см. [63]). Для этого будем исходить из уравнений Горькова, похожих на (2.30)–(2.31), но в которых потенциал взаимодействия $V^{(\alpha\beta)}(\mathbf{q}, i\omega_n)$ и собственно-энергетические части $\Sigma_{\gamma_1 s_1 \gamma_2 s_2}^{(\alpha\beta)}(\mathbf{p}, i\varepsilon_n)$ зависят от частот. Здесь, как и в предыдущем разделе, мы будем рассматривать уравнения в куперовском канале, пренебрегая нормальными собственными энергиями. Проводя такие же преобразования, как и при получении уравнения (2.33), но оставляя зависимость $\Delta_{\gamma_1 \gamma_2}(p, i\varepsilon_n)$ от частоты, получим его аналог для случая s -волнового диагонального по зонам спаривания:

$$\Delta_{\gamma\gamma}(p, i\varepsilon_n) = -T \sum_{\gamma' \varepsilon_k} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma\gamma' \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2} V(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|, i\varepsilon_n - i\varepsilon_k) F_{\gamma'\gamma'}(p', i\varepsilon_k), \quad (2.76)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$, $V(q, \omega)$ — динамически экранированное межслойное электрон-электронное взаимодействие, $F_{\gamma'\gamma'}(p', i\varepsilon_k)$ — аномальные функции Грина, которые даются аналогами выражений (2.35)–(2.36):

$$F_{\gamma\gamma}(p, i\varepsilon_n) = \frac{\Delta_{\gamma\gamma}(p, i\varepsilon_n)}{(i\varepsilon_n)^2 - E_{\gamma}^2(p, i\varepsilon_n)}, \quad E_{\gamma}(p, i\varepsilon_n) = \sqrt{(\gamma v_{\text{FP}} - \mu)^2 + \Delta_{\gamma\gamma}^2(p, i\varepsilon_n)}. \quad (2.77)$$

Аналогично тому, как это делается при рассмотрении уравнений Элиашберга для сверхпроводников [78, 79, 179], воспользуемся спектральным представлением входящих в (2.76) аномальной функции Грина и потенциала взаимодействия:

$$F_{\gamma'\gamma'}(p', i\varepsilon_k) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \operatorname{Im} F_{\gamma'\gamma'}(p', \omega' + i\delta) \left(\frac{1}{i\varepsilon_k - \omega'} - \frac{1}{i\varepsilon_k + \omega'} \right), \quad (2.78)$$

$$V(q, i\varepsilon_n - i\varepsilon_k) = v_q - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\nu \operatorname{Im} V(q, \nu + i\delta) \left(\frac{1}{i\varepsilon_n - i\varepsilon_k - \nu} - \frac{1}{i\varepsilon_n - i\varepsilon_k + \nu} \right), \quad (2.79)$$

где $\delta \rightarrow +0$, $v_q = 2\pi e^2/\varepsilon q$ — неэкранированный потенциал электрон-электронного взаимодействия. Подставив (2.78)–(2.79) в (2.76), выполнив суммирование по фермионным матричным частотам $\varepsilon_k = \pi T(2k + 1)$ и сделав аналитическое продолжение $i\varepsilon_n \rightarrow \omega + i\delta$, получим

$$\begin{aligned} \Delta_{\gamma\gamma}(p, \omega) = & - \sum_{\gamma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma\gamma' \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \operatorname{Im} F_{\gamma'\gamma'}(p', \omega' + i\delta) \left\{ v_{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|} \operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} + \right. \\ & + \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \operatorname{Im} V(|\mathbf{p} - \mathbf{p}'|, \nu + i\delta) \left[\left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \nu - \omega - i\delta} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\omega' + \nu + \omega + i\delta} \right) + \left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} - \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' - \nu - \omega - i\delta} + \frac{1}{\omega' - \nu + \omega + i\delta} \right) \right] \left. \right\}. \quad (2.80) \end{aligned}$$

Будем искать щель при нулевой температуре. Устремив в (2.80) T к нулю, получим систему уравнений самосогласования:

$$\Delta_{\gamma\gamma}(p, \omega) = - \sum_{\gamma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma\gamma'\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2} \int_0^{\infty} \frac{d\omega'}{\pi} \text{Im} F_{\gamma'\gamma'}(p', \omega' + i\delta) \left\{ v_{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|} + \int_0^{\infty} \frac{d\omega''}{2\pi} \text{Im} V(|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|, \nu + i\delta) \left(\frac{1}{\omega' + \nu - \omega - i\delta} + \frac{1}{\omega' + \nu + \omega + i\delta} \right) \right\}. \quad (2.81)$$

Динамически экранированный потенциал межслойного электрон-электронного взаимодействия $V(q, \omega)$ может быть найден в приближении хаотических фаз, которое, как говорилось выше, является оправданным в бислое графена благодаря большой кратности вырождения электронов. Мы будем рассматривать случай малых межслойных расстояний D , при которых $p_F D \ll 1$, а выражение (2.6) для потенциала принимает вид

$$V(q, \omega) \approx \frac{v_q}{1 - 2v_q\Pi(q, \omega)} = \frac{r_s/\mathcal{N}}{q/p_F - 2r_s\Pi(q, \omega)/\mathcal{N}}. \quad (2.82)$$

Поляризационный оператор $\Pi(q, \omega)$ в единицах плотности состояний \mathcal{N} , вычисленный в приближении хаотических фаз, для допированного графена равен [44, 45]:

$$\frac{\Pi(q, \omega)}{4\mathcal{N}} = -1 + \frac{v_F^2 q^2}{8\mu\sqrt{\omega^2 - v_F^2 q^2}} \left\{ G\left(\frac{\omega + 2\mu}{v_F q}\right) - \Theta(2\mu - \omega - v_F q) G\left(\frac{2\mu - \omega}{v_F q}\right) - \Theta(\omega + v_F q - 2\mu) \left[G\left(\frac{\omega - 2\mu}{v_F q}\right) + i\pi \right] \right\}, \quad (2.83)$$

где $G(x) = x\sqrt{x^2 - 1} - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

Исследуем поведение потенциала $V(q, \omega)$, задаваемого формулами (2.82)–(2.83). При $\omega = 0$ он совпадает со статически экранированным потенциалом, который при $q < 2p_F$ дается простым выражением (2.40) и является притягивающим (в электрон-дырочном канале). Для каждого импульса q существуют два значения частоты $\omega_{\pm}(q)$, при которых знаменатель (2.82) обращается в нуль, и соответствующие двум ветвям плазменных колебаний в системе [116, 115]. При уменьшении D спектральный вес нижней ветви плазмона с дисперсией $\omega_-(q) \approx v_F q$ стремится к нулю. Это можно понять исходя из того, что нижняя мода плазменных колебаний в двухслойной системе является противофазной по плотности заряда, в результате чего при $D \rightarrow 0$ она исчезает. В то же время, верхняя мода колебаний остается при уменьшении D ; ее дисперсия при малых q приблизительно является корневой, $\omega_+(q) = 2\mu\sqrt{r_s q/p_F} + \mu(-1 + 3/16r_s^2)(r_s q/p_F)^{3/2} + \mathcal{O}(q^{5/2})$, а при больших q выходит на линейную зависимость: $\omega_+(q) \approx v_F q + 128\mu r_s^2/9(q/p_F + 8r_s)^2$. При $\omega_+(q) + v_F q > 2\mu$ верхняя плазменная мода начинает затухать, так как попадает в континуум одночастичных межзонных возбуждений.

Таким образом, при фиксированном q и постепенном увеличении ω , начиная от $\omega = 0$, притягивающий потенциал $-V(q, \omega)$ переходит через ноль при $\omega = \omega_-(q)$ и становится отталкивающим, затем переходит через полюс при $\omega = \omega_+(q)$ и снова становится притягивающим. При дальнейшем увеличении частоты экранированный потенциал $V(q, \omega)$ стремится к неэкранированному потенциалу v_q . Наша задача состоит в том, чтобы выяснить, как влияют эти черты поведения потенциала на величину щели при спаривании в бислое графена.

Заметим, что бесконечно малая мнимая добавка $\delta \rightarrow +0$ в аргументе потенциала $V(q, \omega + i\delta)$, входящего в (2.81), необходима как раз для выявления вклада, соответствующего незатухающим плазмонам. Поскольку, как говорилось выше, нижняя плазменная мода исчезает при малых D , то ее вклад в потенциал взаимодействия также исчезает. Поэтому мнимая добавка δ , фактически, выделяет только вклад верхней ветви плазмонов, но только при $\omega_+(q) + v_F q < 2\mu$, когда они являются незатухающими; в области же затухания она ни на что не влияет. Если в окрестности частоты $\omega = \omega_+(q)$ справедливо разложение знаменателя (2.82) $1 - 2v_q \Pi(q, \omega) = \alpha(q)[\omega - \omega_+(q)] + \mathcal{O}([\omega - \omega_+(q)]^2)$, то $V(q, \omega + i\delta)$ при $\omega_+(q) + v_F q < 2\mu$ может быть переписан в виде:

$$\text{Im } V(q, \omega + i\delta) = \text{Im } V(q, \omega) - \frac{\pi v_q}{\alpha(q)} \delta[\omega - \omega_+(q)]. \quad (2.84)$$

Такое представление позволяет явно выделить вклад незатухающих плазмонов верхней ветви в уравнения для щелей (2.81). Функция $\alpha(q)$ может быть найдена численно как $\alpha(q) = -2v_q[\partial\Pi(q, \omega)\partial\omega]|_{\omega=\omega_+(q)}$ и при малых q имеет асимптотику $\alpha(q) = 1/v_F\sqrt{r_s p_F q} + 3v_F\sqrt{r_s p_F q}(1 + 1/32r_s^2) + \mathcal{O}(q^{3/2})$. Если подставить (2.84) в спектральное представление (2.79) для потенциала, то последний примет вид

$$V(q, i\omega_n) = v_q + A(q) \frac{2\omega_+(q)}{(i\omega_n)^2 - \omega_+^2(q)} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\nu \text{Im } V(q, \nu) \left(\frac{1}{i\omega_n - \nu} - \frac{1}{i\omega_n + \nu} \right) \quad (2.85)$$

суммы неэкранированного кулоновского взаимодействия (первое слагаемое), функции Грина незатухающего плазмона, умноженной на его спектральный вес $A(q)$ (второе слагаемое) и совместного вклада затухающих плазмонов и континуума одночастичных возбуждений (третье слагаемое). Спектральный вес незатухающего плазмона равен $A(q) = v_q/\alpha(q) = -1/2[\partial\Pi(q, \omega)\partial\omega]|_{\omega=\omega_+(q)}$ при $\omega_+(q) + v_F q < 2\mu$ и нулю в противном случае. Представление экранированного потенциала взаимодействия в виде суммы физически различных вкладов, похожее на (2.85), использовалось также в работе [179].

Для того, чтобы продвинуться дальше в решении уравнений самосогласования (2.81), желательно свести две независимые переменные p и ω к одной, превратив двумерный интегральные уравнения в одномерные. В подходе Элиашберга [78, 79] в такой ситуации производится усреднение уравнений по импульсу, поскольку щель слабо от него зависит, в результате чего выводятся интегральные уравнения по одной независимой переменной — частоте ω . Мы поступим иначе, так как для нас может оказаться очень важным интегрирование по импульсу в широкой области его изменения, на что указывают результаты предыдущего раздела, полученные в статическом приближении. Положим, что щели $\Delta_{\gamma\gamma}(p, \omega)$ являются чисто вещественными, тогда спектральная функция $\text{Im } F_{\gamma\gamma}(p, \omega + i\delta)$ аномальной функции Грина (2.77) может быть легко найдена:

$$\text{Im } F_{\gamma\gamma}(p, \omega + i\delta) = -\frac{\pi \Delta_{\gamma\gamma}(p, \omega)}{2E_{\gamma}(p, \omega)} \delta[\omega - E_{\gamma}(p, \omega)]. \quad (2.86)$$

Предположим, что при каждом заданных значениях p и γ аргумент дельта-функции в (2.86) обращается в нуль при некоторой однозначно определенной частоте $\omega = \tilde{\omega}_{\gamma}(p)$ (это предположение будет справедливым при достаточно плавной зависимости $\Delta_{\gamma\gamma}(p, \omega)$ от импульса и частоты). В таком случае можно перейти от функций p и ω к функциям на массовой поверхности, обозначив $\Delta_{\gamma\gamma}(p) \equiv \Delta_{\gamma\gamma}(p, \tilde{\omega}_{\gamma}(p))$, $E_{\gamma}(p) \equiv E_{\gamma}(p, \tilde{\omega}_{\gamma}(p))$. Подставляя (2.86) в (2.81) и фиксируя ω также на массовой поверхности, получим

$$\Delta_{\gamma\gamma}(p) = \sum_{\gamma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma\gamma' \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2} \frac{\Delta_{\gamma'\gamma'}(p')}{2E_{\gamma'}(p')} \left\{ v_{|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|} + \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\pi} \text{Im } V(|\mathbf{p}-\mathbf{p}'|, \nu + i\delta) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{E_{\gamma'}(p') + \nu - E_{\gamma}(p) - i\delta} + \frac{1}{E_{\gamma'}(p') + \nu + E_{\gamma}(p) + i\delta} \right) \right\}. \quad (2.87)$$

Интеграл по ν в (2.87) сходится на бесконечности, так как при $\nu \rightarrow \infty$ справедлива стандартная асимптотика функций Грина $V(q, \nu) - v_q \propto 1/\nu$. Что же касается интеграла по p' , то для его сходимости необходимо, чтобы $\Delta_{\gamma'\gamma'}(p')$ при больших p' убывала хотя бы степенным образом. Из (2.87) видно, что при $p \rightarrow \infty$ незранированная часть взаимодействия обеспечивает асимптотику $\Delta_{\gamma\gamma}(p) \propto 1/p$. Таким образом, полученное интегральное уравнение не нуждается в обрезании на больших импульсах, что является его несомненным достоинством. Однако, уравнение (2.87) имеет и существенный недостаток: при его выводе использовалось предположение о вещественности щелей $\Delta_{\gamma\gamma}(p)$, которое, как можно видеть, удовлетворяется только на поверхности Ферми, т.е. при $p = p_F$, $\gamma = 1$. Это обстоятельство не позволяет решить уравнения для щелей на массовой поверхности самосогласованно. Однако, можно предположить, что, коль скоро щели являются вещественными

на поверхности Ферми, то и в ее окрестности, дающей главный вклад в интеграл, мнимая часть щелей достаточно мала. Поскольку мы ищем только оценку величины щели, то в уравнении (2.87) мы положим $p = p_F$, $\gamma = 1$ и будем считать, что щели под интегралом в правой части являются вещественными. Также пренебрегая несущественной величиной щели в боголюбовских энергиях $E_{\gamma'}(p')$ внутри фигурных скобок в (2.87) и используя (2.84), получим следующее уравнение для оценки щели:

$$\Delta_+(p_F) = \sum_{\gamma} \int p dp U_{\gamma}(p) \frac{\Delta_{\gamma}(p)}{2E_{\gamma}(p)}. \quad (2.88)$$

Мы ввели эффективное взаимодействие на массовой поверхности

$$U_{\gamma}(p) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(2\pi)^2} \frac{1 + \gamma \cos \varphi}{2} \left\{ v_q - \frac{2A(q)}{|\xi_{\gamma}(p)| + \omega_+(q)} + \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\pi} \text{Im} V(q, \nu) \frac{2}{|\xi_{\gamma}(p)| + \nu} \right\}, \quad (2.89)$$

где $q = |\mathbf{p} - \mathbf{p}_F| = \sqrt{p^2 + p_F^2 - 2pp_F \cos \varphi}$ под интегралом, $\xi_{\gamma}(p) = \gamma v_F p - \mu$.

Как было показано в предыдущем разделе, в статическом приближении щели в зоне проводимости $\Delta_{++}(p)$ и в валентной зоне $\Delta_{--}(p)$ очень близки по величине при сильной связи (Рис. 2.8). Причина этого заключается в малом отличии констант внутризонной и межзонной связи при больших r_s (Рис. 2.6). Поэтому, для оценки щели с учетом динамических эффектов, в данном разделе мы будем считать щели в зоне проводимости и валентной зоне равными, $\Delta_{++}(p) = \Delta_{--}(p)$, и также считать, что угловой фактор $(1 + \gamma \cos \varphi)/2$ под интегралом (2.89) с хорошей точностью можно заменить на $1/2$.

Эффективный потенциал взаимодействия на массовой поверхности $U_{\gamma}(p)$ (2.89) естественным образом разделяется на три физически различные части: 1) неэкранированный кулоновский потенциал (первое слагаемое в фигурных скобках), который в электрон-дырочном канале является притягивающим, 2) отталкивающий вклад виртуальных затухающих плазмонов верхней ветви $\omega_+(q)$ (второе слагаемое), 3) совместный вклад затухающих плазмонов верхней ветви и континуума одночастичных возбуждений (внутризонные электронные переходы при $\omega < v_F q$ и межзонные переходы при $\omega + v_F q > 2\mu$), который также является отталкивающим, поскольку $\text{Im} V(q, \omega) \leq 0$ (третье слагаемое). Потенциал $U_{\gamma}(p)$ содержит в себе информацию о динамических свойствах исходного экранированного потенциала $V(q, \omega)$, поскольку по физике дела соответствует взаимодействию на частоте $\omega = |\xi_{\gamma}(p)|$. Строго на поверхности Ферми потенциал взаимодействия на массовой поверхности равен статически экранированному потенциалу, $U_+(p_F) = V_0(p_F, p_F)/2$ (см. (2.34)), а при удалении от поверхности Ферми начинает от него отклоняться из-за динамических эффектов.

На Рис. 2.14 изображен потенциал взаимодействия на массовой поверхности в зоне проводимости $U_+(p)$ при $r_s = 2$, разрешенный по перечисленным выше вкладам. При учете только неэкранированного кулоновского взаимодействия потенциал на поверхности Ферми имеет логарифмическую особенность. Вклад незатухающих плазмонов, отличный от нуля при $|p - p_F| < q_{\max}$, где q_{\max} — максимальный импульс незатухающих плазмонов, определяемый уравнением $\omega_+(q_{\max}) + v_F q_{\max} = 2\mu$, снимает эту особенность и значительно уменьшает величину притяжения вблизи поверхности Ферми. Дальнейшее добавление вклада затухающих плазмонов и континуума одночастичных возбуждений резко уменьшает величину эффективного потенциала взаимодействия. Полный потенциал на массовой поверхности совпадает со статически экранированным потенциалом $V_0(p_F, p_F)/2$ на поверхности Ферми, но резко возрастает при отходе от нее по закону $\propto \sqrt{|p - p_F|}$. На Рис. 2.15 приведен потенциал на массовой поверхности в валентной зоне $U_-(p)$. Как видно, здесь полный потенциал сохраняет логарифмическую сингулярность при $p = p_F$ и не совпадает со статически экранированным, поскольку в данном случае точка $p = p_F$ лежит далеко от поверхности Ферми и соответствует частоте $\omega = 2\mu$.

Для решения уравнения (2.88) нам необходимо принять какую-либо пробную функцию для щели $\Delta_{\gamma\gamma}(p) \equiv \Delta \times f(p)$. Функция $f(p)$ должна быть равна 1 при $p = p_F$, а при $p \rightarrow \infty$ она должна обладать асимптотикой $f(p) \propto 1/p$. Величина Δ в таком случае будет играть роль щели в спектре возбуждений системы, связанной с критической температурой перехода в сверхтекучее состояние согласно соотношению (2.68). Важным является вопрос о том, на каких масштабах импульсов функция $f(p)$ должна существенно спадать. Поскольку потенциал $U_{\pm}(p)$ всюду положителен, то величина щели Δ , даваемая уравнением (2.88), будет тем больше, чем медленнее спадает $f(p)$ с ростом p .

При рассмотрении в статическом приближении, проведенном в подразделе 2.4.3 в приближении сепарабельного потенциала, функция щели спадала довольно медленно на масштабах $p \sim 8r_s p_F$, подобно самому статически экранированному потенциалу. В результате значения щели получились очень большими при $r_s \sim 1$ несмотря на то, что величина взаимодействия на самой поверхности Ферми весьма мала. В нашем случае, при учете динамических свойств экранированного взаимодействия, характерные масштабы импульса p и частоты ω , на которых изменяются все функции, входящие в уравнения для щелей (2.81), составляют соответственно p_F и μ . Следовательно, будет естественным допустить, что пробная функция для щели $f(p)$ должна спадать на масштабах $p \sim p_F$.

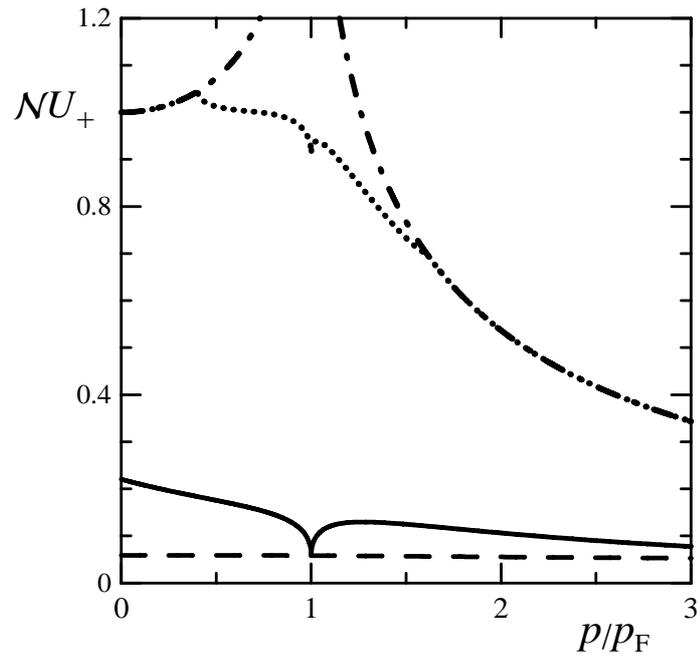


Рис. 2.14. Эффективное взаимодействие на массовой поверхности $U_+(p)$ (2.89) в зоне проводимости в единицах обратной плотности состояний \mathcal{N} как функция p при $r_s = 2$. Сплошная линия: полное взаимодействие, штрих-пунктир: учет только незэкранированного кулоновского взаимодействия, пунктир: учет незэкранированного кулоновского взаимодействия и вклада незатухающих плазмонов, штриховая линия: статически экранированное взаимодействие $V_0(p, p_F)/2$ (2.34).

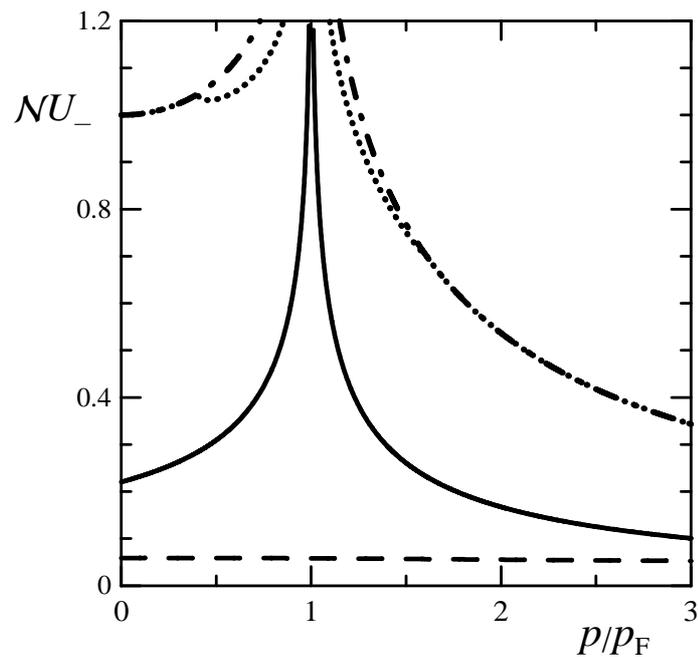


Рис. 2.15. То же самое, что на Рис. 2.14, но для валентной зоны ($\gamma = -1$).

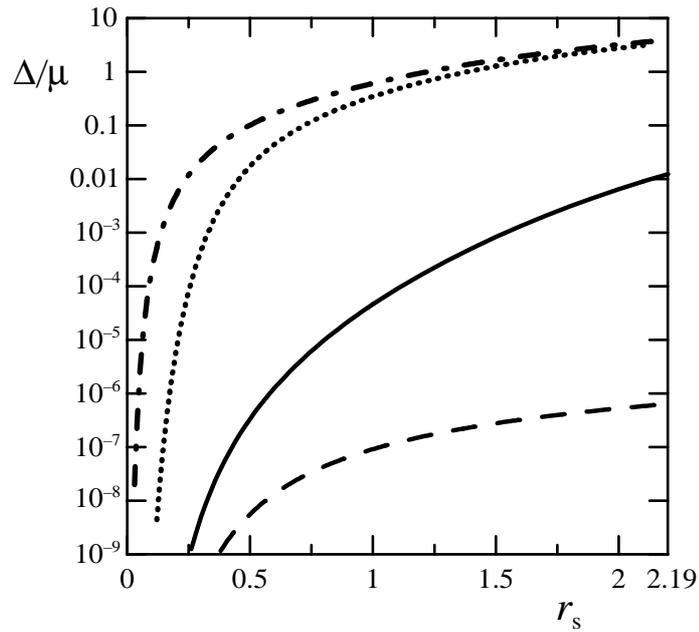


Рис. 2.16. Величина щели в спектре возбуждения системы Δ в единицах химического потенциала μ , как функция параметра силы связи r_s , с учетом различных вкладов в эффективный потенциал взаимодействия (2.89). Сплошная линия: полное взаимодействие на массовой поверхности, штрих-пунктир: учет только неэкранированного кулоновского взаимодействия, пунктир: учет неэкранированного кулоновского взаимодействия и вклада незатухающих плазмонов, штриховая линия: использование статически экранированного взаимодействия.

В диссертационной работе было проведено численное решение уравнения (2.88) с учетом (2.89) и (2.82)–(2.85) относительно параметра Δ при различных выборах пробной функции $f(p)$, удовлетворяющей вышеперечисленным условиям. Все они дали близкие между собой результаты. Результаты, полученные с использованием пробной функции $f(p) = p_F/(|p - p_F| + p_F)$, представлены на Рис. 2.16 и разрешены по физически различным вкладам в эффективный потенциал на массовой поверхности (2.89). Учет только неэкранированного кулоновского потенциала приводит к очень большим значениям щели порядка $\Delta \sim \mu$ при $r_s \sim 1$, что находится в согласии с результатами других авторов [159, 160]. Добавление отталкивающего вклада виртуальных незатухающих плазмонов немного понижает величину Δ , главным образом, при малых r_s . Расчеты с полным потенциалом на массовой поверхности дают гораздо меньшие значения щели порядка $(10^{-4} - 10^{-2}) \times \mu$ при $r_s \sim 1$.

При замене потенциала на массовой поверхности $U_{\pm}(p)$ на статически экранированный потенциал $V_0(p, p_F)/2$ (2.34) и с использованием быстро убывающей на масштабах $p \sim p_F$ пробной функции $f(p)$ величина щели получается малой, $\Delta \sim 10^{-7} \times \mu$. Это находится в согласии с оценками [163, 165], основанными на однозонной модели типа БКШ. Если же пробная функция убывает на масштабах $p \sim 8r_s p_F$, что является самосогласованным при использовании статически экранированного потенциала (см. подраздел 2.4.3), то величина щели получается большой, $\Delta \sim \mu$. Обе эти модели, дающие столь различающиеся по порядку величины результаты, не учитывают динамические эффекты. Учет последних, как показано в данном подразделе, дает для щели значения, на несколько порядков меньшие, чем полученные вообще без учета экранирования, но в то же время на несколько порядков большие, чем даваемые однозонной моделью типа БКШ. При $\mu \approx 0.1$ эВ и $\Delta \sim 0.01\mu$ получим для температуры перехода в сверхтекучее состояние $T_c \sim 1$ К.

2.6 Выводы

Итак, в данной главе было рассмотрено спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена под действием их кулоновского притяжения. Формирование конденсата электрон-дырочных пар в такой системе должно приводить к образованию щели в спектре возбуждений, а также к сверхтекучести и незатухающим противоположно направленным электрическим токам в разных слоях графена, которые могут быть обнаружены экспериментально различными методами. Сначала спаривание было рассмотрено в режиме слабой связи, при котором основное состояние системы, несмотря на эффективно ультрарелятивистскую динамику электронов и дырок в графене, не отличается качественно от состояния, рассматриваемого теорией БКШ. Оценки величины щели при слабой связи составляют порядка $10^{-7} \times \mu$, а критическая температура перехода системы в сверхтекучее состояние ненаблюдаемо мала.

Были определены управляющие параметры системы и показано, что в эксперименте достижимы режимы как слабой, так и сильной связи. При малом межслойном расстоянии сила связи зависит только от диэлектрической проницаемости окружающей среды и не зависит от концентрации электронов и дырок. Показано, что в графене не могут образовываться локальные пары из-за отсутствия щели в спектре частиц. Следовательно, при увеличении силы связи в рассматриваемой системе отсутствует кроссовер от состоя-

ния типа БКШ к бозе-газу локальных пар. Вместо этого состояние типа БКШ сменяется «ультрарелятивистским» состоянием типа БКШ, при котором сохраняются сильно перекрывающиеся куперовские пары, но вместе с тем существенную роль играет эффективно ультрарелятивистский характер спаривающихся частиц.

Характерная черта ультрарелятивистского спаривания состоит в том, что в спаривании участвуют частицы как из зон, включающих поверхности Ферми, так и из зон, удаленных от поверхностей Ферми. Многозонное спаривание было изучено в приближении среднего поля при помощи модифицированной для этой цели диаграммной техники. Полученная система уравнений Горькова описывает матричную по зонам щель, которая в случае диагонального по зонам спаривания сводится к двум щелям: одной — в зоне проводимости и другой, меньшей по величине, — в валентной зоне. Относительная фаза щелей фиксирована, а отношение их величин определяется радиусом действия потенциала спаривания. При сильной связи спаривание в валентной зоне столь же существенно, как и в зоне проводимости. Это может проявляться в аномалиях сверхтекучих свойств системы и, в принципе, может быть обнаружено экспериментально.

Была исследована неустойчивость основного состояния системы, выражающаяся в расходимости вершинной части электрон-дырочного рассеяния, задаваемой в лестничном приближении уравнением Бете-Солпитера. Исследование различных каналов уравнения, включающих разные зонные компоненты вершинной функции, приводит к двум условиям неустойчивости: одному для канала внутризонного спаривания, когда электрон и дырка до и после рассеяния находятся в одинаковых зонах, и другому для канала межзонного спаривания, когда электрон и дырка до и после рассеяния находятся в разных зонах. Неустойчивость в межзонном канале возникает только если сила притяжения превышает некоторый порог, а в определенном диапазоне констант связи она могла бы существовать только в области температур, начинающейся с некоторого ненулевого значения. Неустойчивость же во внутризонном канале не устанавливает порога для силы взаимодействия и соответствует диагональному по зонам спариванию, подробно рассмотренному в данной главе.

Многозонное спаривание было рассмотрено сначала в статическом приближении, при котором мы пренебрегаем частотной зависимостью собственно-энергетических частей и экранированного потенциала спаривания. Для оценок величины щели были использованы два различных подхода: приближение щели, постоянной в некоторой области спаривания,

и приближение сепарабельного потенциала. В первом случае интегрирование по импульсу в уравнениях для щели обрезается в пределах области вокруг поверхности Ферми, энергетическая полуширина которой равна характерной частоте динамического экранирования взаимодействия. Во втором случае мы работаем всюду со статически экранированным взаимодействием, а введение обрезания не требуется. Результаты численных расчетов показывают, что в первом случае величина щели может существенно отклоняться от оценки БКШ за счет многозонности спаривания, если ширина области спаривания превышает во много раз энергию Ферми. Похожим образом, расчеты, выполненные по второй схеме, в приближении сепарабельного потенциала, демонстрируют сильные отклонения от предела БКШ за счет интегрирования по широкой области импульсов и зависимости щелей и потенциала от импульса. При больших r_s щель оказывается сравнимой с химическим потенциалом. Такой результат служит указанием на то, что в режиме сильной связи необходимо более точное рассмотрение задачи с выходом за рамки приближения среднего поля и учетом деталей динамического экранирования электрон-дырочного взаимодействия. Определение температуры перехода Костерлица-Таулеса, наступающего в результате диссоциации пар антипараллельных четверть-вихрей, в случае сильной связи также требует дополнительного рассмотрения (в частности, учета вклада валентной зоны в сверхтекучую плотность конденсата).

Динамически экранированный кулоновский потенциал в двухслойной системе при малых частотах близок к статически экранированному потенциалу, при больших частотах приближается к неэкранированному потенциалу, а между этими двумя пределами проходит через область отталкивания, связанную с существованием плазменных колебаний. Количественное исследование конкуренции притяжения и отталкивания в разных областях частот было проведено при помощи уравнений типа уравнений Элиашберга, учитывающих динамические эффекты. Уравнения самосогласования были сведены к эффективным уравнениям, оперирующим величинами «на массовой поверхности». При этом динамически экранированное взаимодействие, вычисленное в приближении хаотических фаз и взятое на массовой поверхности, естественным образом разбивается на три части: притягивающее неэкранированное кулоновское взаимодействие, отталкивающий вклад верхней ветви виртуальных незатухающих плазмонов и совместный отталкивающий вклад верхней ветви затухающих плазмонов и континуума одночастичных возбуждений. Полученные уравнения для щели на массовой поверхности, принимающие в расчет как динамические

эффекты, так и многозонный характер спаривания, были приближенно решены численно для получения оценки величины щели. Учет только неэкранированного кулоновского взаимодействия дает большие значения щели, сравнимые с химическим потенциалом (соответственно, температура перехода в сверхтекучее состояние имеет порядок комнатной температуры). Добавление в потенциал взаимодействия вкладов виртуальных плазмонов и одночастичных возбуждений уменьшает щель на несколько порядков. Это указывает на существование серьезной конкуренции между прямым кулоновским притяжением и отталкивающим действием виртуальных возбуждений системы, приводящих к экранированию потенциала. Однако, даже оценки щели с учетом динамических эффектов на несколько порядков превышают однозонные оценки типа БКШ. Температура перехода в сверхтекучее состояние при этом может достигать нескольких градусов Кельвина.

Таким образом, рассмотрение спаривания пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена позволило сделать общие выводы, касающиеся особенностей явлений спаривания ультрарелятивистских частиц (например, отсутствие кроссовера БКШ-БЭК и многозонное спаривание в режиме сильной связи). Также обнаружены особенности сверхтекучих свойств электрон-дырочного конденсата в графене и сделаны оценки величины щели с учетом динамических эффектов и многозонного характера спаривания.

В круг задач дальнейшего развития теории спаривания в графене и других системах ультрарелятивистских частиц можно включить разработку двухщелевой теории сверхтекучести при многозонном спаривании, поиск новых типов топологических возбуждений и оценку роли корреляционных эффектов в режиме сильной связи.

Глава 3

Фононный механизм сверхпроводимости в графене

3.1 Многозонные уравнения Элиашберга

3.1.1 Введение

В данной главе мы рассмотрим спаривание электронов в графене, вызываемое обменом фононами. Как было показано во второй главе, спаривание эффективно ультрарелятивистских электронов в графене и наноструктурах на его основе имеет важную особенность: оно является многозонным при сильной связи. Поэтому сначала мы исследуем общие закономерности многозонного спаривания электронов в графене под действием фононов, получив и решив описывающие его уравнения Элиашберга.

Различные обобщения теории сверхпроводимости БКШ [73] на случаи многозонного спаривания, в котором участвуют частицы сразу из нескольких зон, в последнее время становятся все более востребованными. Такая задача впервые была рассмотрена в работе [180] и недавно приобрела особую актуальность в связи с обнаружением существенно многозонного характера спаривания в MgB_2 [181] и новых высокотемпературных сверхпроводниках на основе железа [182, 183]. Указанные примеры объединены тем, что все зоны спаривающихся частиц содержат участки их поверхностей Ферми. Однако, существует иной класс задач, таких как задачи о спаривании релятивистских фермионов, одна из которых была рассмотрена во второй главе диссертации. В этих задачах существенную роль играют не только зоны частиц, включающие их поверхность Ферми, но и удаленные

от нее зоны античастиц. Как было показано в предыдущей главе (и, кроме того, в работах [167, 169]), учет античастиц при рассмотрении спаривания может значительно повлиять на величину щели в спектре.

Графен особенно интересен как система, в которой может быть осуществлено многозонное спаривание, поскольку щель между зоной проводимости и валентной зоной в этом материале равна нулю, а химический потенциал, задающий степень удаленности поверхности Ферми от точки касания зон, может регулироваться в широких пределах — от нуля до значений порядка 0.3эВ при электрическом допировании [20] и порядка 1.5эВ при химическом допировании [133]. Если химический потенциал мал по сравнению с характерными частотами, на которых происходит сверхпроводящее спаривание, то оно будет затрагивать и зону проводимости, и валентную зону. В противоположном случае сильного допирования спаривание будет затрагивать только одну зону, содержащую поверхность Ферми.

В качестве возможных источников собственной сверхпроводимости графена были предложены фононный механизм [80, 81], плазмонный механизм в графене, покрытом слоем металла [80], электронные корреляции [82, 83] и существенно анизотропное электрон-электронное взаимодействие вблизи сингулярностей Ван-Хова электронной подсистемы [84]. Помимо собственной сверхпроводимости, многозонный характер спаривания в графене может проявляться в эффекте близости при контакте со сверхпроводником (см., напр., [184, 185]). Спаривание электронов в графене, затрагивающее сразу две зоны, было рассмотрено в работе [170] в модели контактного потенциала спаривания и позднее в работе [171] путем распространения уравнений БКШ на конусообразную зонную структуру. Последний подход, пренебрегающий спинорной структурой волновых функций электронов в графене, в некотором смысле эквивалентен приближению контактного потенциала спаривания. В [171] и ранее в [186] было, в частности, показано, что в недопированном графене существует квантовая критическая точка, отвечающая возникновению сверхпроводимости при превышении константой связи некоторого критического значения.

В связи с применением теории БКШ для многозонного спаривания в графене представляет интерес ее дальнейшее обобщение в духе теории сверхпроводимости Элиашберга [78, 79], учитывающей эффекты запаздывания взаимодействия. Среди немногочисленных примеров многозонного обобщения теории Элиашберга отметим двухзонное рассмотрение спаривания в MgB_2 , при котором учет динамических эффектов дает результаты, каче-

ственно отличные от приближения БКШ [187], двухзонное рассмотрение сверхпроводимости в CaC_6 [188], трехзонное рассмотрение спаривания в высокотемпературных сверхпроводниках на основе железа [189], а также применение теории Элиашберга к проблеме спаривания в плотной кварковой материи посредством обмена магнитными глюонами, которые экранируются только при конечных частотах [190, 191].

Итак, в данном разделе мы рассмотрим общие закономерности сверхпроводящего спаривания электронов в графене под действием обмена фононами, отвлекаясь пока от деталей фононного спектра и электрон-фононного взаимодействия. Рассмотрение будет проведено при помощи формализма уравнений Элиашберга в куперовском канале, в котором пренебрегается нормальной собственной энергией и влиянием кулоновского отталкивания на спаривание. Для фононного спектра будет использовано приближение Эйнштейна, а спаривание будет рассмотрено как в однозонном режиме в пределе сильного допирования, так и в окрестности квантовой критической точки при малом допировании. Соответствующие результаты опубликованы в работе [61].

3.1.2 Уравнения Элиашберга для графена

Напомним, что в окрестности каждой из двух точек зоны Бриллюэна (\mathbf{K} и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$), в которых происходит касание валентной зоны и зоны проводимости, свободные электроны в графене подчиняются эффективному уравнению (2.1), имеющему вид уравнения Дирака для двухкомпонентной волновой функции. Состояния свободных электронов описываются спинорными решениями этого уравнения $|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle$ (2.2). При рассмотрении электронных переходов $|f_{\mathbf{p}\gamma}\rangle \rightarrow |f_{\mathbf{p}'\gamma'}\rangle$ под действием возмущения, одинаково влияющего на атомы под решеток A и B , мы должны добавлять в матричные элементы этих переходов множители $\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle$ (2.29), соответствующие перекрытию начального и конечного состояний.

Как и во второй главе, здесь мы будем рассматривать диагональное по зонам спаривание, при котором образуются две щели: Δ_+ — щель в зоне проводимости (щель для «частиц») и Δ_- — щель в валентной зоне (щель для «античастиц»). При этом мы отвлекаемся от структуры конденсата по спинам и долинам, которая при s -волновом спаривании и отсутствии междолинных перебросов должна факторизоваться в виде антисимметричной спин-долинной волновой функции. Введем нормальную $G_\gamma(p, \tau) = -\langle T a_{\mathbf{p}\gamma}(\tau) a_{\mathbf{p}\gamma}^\dagger(0) \rangle$ и аномальные $F_\gamma(p, \tau) = -\langle T a_{\mathbf{p}\gamma}(\tau) a_{-\mathbf{p}\gamma}(0) \rangle$, $F_\gamma^+(p, \tau) = -\langle T a_{-\mathbf{p}\gamma}^+(\tau) a_{\mathbf{p}\gamma}^\dagger(0) \rangle$ функции Грина в мадубаровском представлении, соответствующие диагональному по зонам спариванию.

Здесь $a_{\mathbf{p}\gamma}$ — оператор уничтожения электрона с импульсом \mathbf{p} , находящегося в зоне проводимости ($\gamma = +1$) или в валентной зоне ($\gamma = -1$).

Будем рассматривать электрон-фононное взаимодействие простейшего вида, считая, что деформационный потенциал, возникающий в результате колебаний решетки, одинаково действует на обе подрешетки. В таком случае затравочные матричные элементы $g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}$ электрон-фононного взаимодействия умножаются на фактор перекрытия (2.29), и гамильтониан электрон-фононного взаимодействия, таким образом, равен

$$H_{\text{el-ph}} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \sum_{\gamma\gamma'\lambda} g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda} \langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle a_{\mathbf{p}'\gamma'}^+ a_{\mathbf{p}\gamma} (c_{\mathbf{p}'-\mathbf{p},\lambda} + c_{\mathbf{p}-\mathbf{p}',\lambda}^+), \quad (3.1)$$

где $c_{\mathbf{q}\lambda}$ — оператор уничтожения фонона моды λ с импульсом \mathbf{q} , S — площадь системы. С учетом оператора взаимодействия (3.1), построим уравнения Горькова [172] для введенных выше функций Грина G и F^+ в пренебрежении кулоновским взаимодействием и нормальной собственной энергией (т.е. в куперовском канале):

$$\begin{cases} G_\gamma(p, i\varepsilon_n) = G_\gamma^{(0)}(p, i\varepsilon_n) - G_\gamma^{(0)}(p, i\varepsilon_n) \Delta_\gamma(p, i\varepsilon_n) F_\gamma^+(p, i\varepsilon_n), \\ F_\gamma^+(p, i\varepsilon_n) = G_\gamma^{(0)}(p, -i\varepsilon_n) \Delta_\gamma^+(p, i\varepsilon_n) G_\gamma(p, i\varepsilon_n), \end{cases} \quad (3.2)$$

где $G_\gamma^{(0)}(p, i\varepsilon_n) = [i\varepsilon_n - \xi_\gamma(p)]^{-1}$ — функция Грина свободного движения, $\xi_\pm(p) = \pm v_F p - \mu$ — энергии электронов в зоне проводимости и валентной зоне соответственно, отсчитываемые от химического потенциала μ . Поскольку зонная структура графена обладает приближенной электрон-дырочной симметрией относительно дираковской точки, то здесь и далее мы для определенности будем рассматривать случай $\mu > 0$. Введенные в (3.2) аномальные собственно-энергетические части (щели) равны

$$\Delta_\gamma^+(p, i\varepsilon_n) = -T \sum_{\gamma'\lambda\varepsilon_k} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 D_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', i\varepsilon_n - i\varepsilon_k) F_{\gamma'}^+(p', i\varepsilon_k), \quad (3.3)$$

где $D_\lambda(\mathbf{q}, i\omega_n) = -\int_0^{1/T} d\tau e^{i\omega_n\tau} \langle T [c_{\mathbf{q}\lambda}(\tau) + c_{-\mathbf{q}\lambda}^+(\tau)] [c_{\mathbf{q}\lambda}^+(0) + c_{-\mathbf{q}\lambda}(0)] \rangle$ — функция Грина фононов моды λ .

Заменой для $\Delta^+ \rightarrow \Delta$, $F^+ \rightarrow F$ из (3.3) можно получить аналогичное уравнение для Δ_\pm и F_\pm . При помощи калибровочных преобразований можно сдвигать относительную фазу F и F^+ , а также относительную фазу Δ и Δ^+ . Выберем такую калибровку, в которой $\Delta = \Delta^+$ и $F = F^+$; тогда можно пользоваться только одним уравнением вида (3.3) для Δ и F :

$$\Delta_\gamma(p, i\varepsilon_n) = -T \sum_{\gamma'\lambda\varepsilon_k} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 D_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', i\varepsilon_n - i\varepsilon_k) F_{\gamma'}(p', i\varepsilon_k), \quad (3.4)$$

Решая уравнения Горькова (3.2) относительно $F^+ = F$, получим

$$F_\gamma(p, i\varepsilon_n) = \frac{\Delta_\gamma(p, i\varepsilon_n)}{\varepsilon_n^2 + \xi_\gamma^2(p) + \Delta_\gamma^2(p, i\varepsilon_n)}. \quad (3.5)$$

Далее, используя спектральное представление функций Грина

$$D_\lambda(\mathbf{q}, i\omega_n) = \int_0^\infty d\nu B(\mathbf{q}, \nu) \left(\frac{1}{i\omega_n - \nu} - \frac{1}{i\omega_n + \nu} \right),$$

$$F_\gamma(p, i\varepsilon_n) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\omega' \operatorname{Im} F_\gamma(p, \omega' + i\delta) \left(\frac{1}{i\varepsilon_n - \omega'} - \frac{1}{i\varepsilon_n + \omega'} \right),$$

где $\delta \rightarrow +0$, вычисляя сумму по фермионным мацубаровским частотам $\varepsilon_k = \pi T(2k + 1)$ и делая аналитическое продолжение $i\varepsilon_n \rightarrow \omega + i\delta$, приведем уравнения (3.4) к виду

$$\Delta_\gamma(p, \omega) = \sum_{\gamma'\lambda} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 \int_0^\infty d\nu B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu) \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \operatorname{Im} F_{\gamma'}(p', \omega' + i\delta) \left\{ \left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} + \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \omega + \nu + i\delta} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\omega' - \omega + \nu - i\delta} \right) - \left(\operatorname{th} \frac{\omega'}{2T} - \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \omega - \nu + i\delta} + \frac{1}{\omega' - \omega - \nu - i\delta} \right) \right\}. \quad (3.6)$$

Ход дальнейшего решения уравнений (3.6) зависит от используемой процедуры интегрирования по импульсу \mathbf{p}' и частоте ω' . В случае сильного допирования, когда химический потенциал μ велик по сравнению с характерными частотами фононов, функции щели $\Delta_\pm(p, \omega)$ слабо зависят от \mathbf{p} , в связи с чем уравнения (3.6) могут быть усреднены по импульсу и сведены к одномерным интегральным уравнениям по частоте [78, 79]; этот случай будет рассмотрен в подразделе 3.1.3. В противоположном случае слабого допирования, когда химический потенциал сравним с характерной частотой фононов или меньше ее, мы не можем проводить усреднение по поверхности Ферми в силу ее малости. Этот случай, соответствующий окрестности квантовой критической точки, будет рассмотрен в разделе 3.1.4.

3.1.3 Случай сильного допирования

Энергетическая ширина слоя в окрестности поверхности Ферми, в пределах которого состояния электронов зоны проводимости существенно затрагиваются спариванием и отличен от нуля параметр порядка, $\operatorname{Im} F_+(p, \omega + i\delta) \neq 0$, равна по порядку величины характерной частоте фононов. С другой стороны, электроны валентной зоны затронуты

спариванием и $\text{Im } F_-(p, \omega + i\delta) \neq 0$ при импульсах $p \approx (\omega - \mu)/v_F$ (см. (3.5)). Так как $p > 0$, то $\text{Im } F_-(p, \omega + i\delta) \neq 0$ только при $\omega > \mu$.

В случае сильного допирования, когда характерная частота фононов (и, соответственно, ширина частотной области, в которой $\Delta_{\pm}(p, \omega) \neq 0$) мала по сравнению с химическим потенциалом μ , мы можем, принимая во внимание сказанное выше и используя (3.5), провести интегрирование по модулю импульса в уравнениях (3.6) следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \frac{p' dp'}{2\pi} \text{Im } F_+(p', \omega' + i\delta) \approx \pi \mathcal{N} \text{Re} \frac{\Delta_+(\tilde{p}, \omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta_+^2(\tilde{p}, \omega')}}, \quad (3.7)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{p' dp'}{2\pi} \text{Im } F_-(p', \omega' + i\delta) \sim \mathcal{N} \frac{\Delta_-(0, \mu)}{\mu}, \quad (3.8)$$

где $\mathcal{N} = \mu/2\pi v_F^2$ — плотность состояний на поверхности Ферми, а \tilde{p} — импульс, находящийся внутри области спаривания $\mu - \omega' < v_F \tilde{p} < \mu + \omega'$. При сильном допировании функции $\Delta_{\pm}(p, \omega)$ на частотах порядка μ малы, поэтому мы можем пренебречь вкладом валентной зоны (3.8) по сравнению с вкладом зоны проводимости (3.7).

Подставляя (3.7) в (3.6), мы видим, что щели $\Delta_{\pm}(p, \omega)$ зависят от модуля импульса p только посредством спектральной функции фононов $B_{\lambda}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu)$. Поскольку в (3.6) производится интегрирование по азимутальному углу φ' импульса \mathbf{p}' , модуль которого, согласно (3.7), близок к фермиевскому импульсу $p_F = \mu/v_F$, то любая зависимость $\Delta_{\pm}(p, \omega)$ от p смазывается на масштабах p_F . В результате можно считать, что щели практически не зависят от p и рассматривать их в дальнейшем при $p = p_F$ как $\Delta_{\gamma}(p_F, \omega) \equiv \Delta_{\gamma}(\omega)$ [78].

Таким образом, подставляя (3.7) в (3.6) и полагая $p = p_F$, $\tilde{p} \approx p_F$, получим уравнения Элиашберга в куперовском канале для случая сильного допирования и конечных температур, похожие на уравнения для обычного сверхпроводника [192, 193, 194]:

$$\Delta_{\gamma}(\omega) = \int_0^{\infty} d\omega' K_{\gamma+}(\omega, \omega') \text{Re} \frac{\Delta_+(\omega')}{\sqrt{\omega'^2 - \Delta_+^2(\omega')}}, \quad (3.9)$$

где

$$K_{\gamma\gamma'}(\omega, \omega') = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\nu \alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu) F(\nu) \left\{ \left(\text{th} \frac{\omega'}{2T} + \text{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \omega + \nu + i\delta} + \frac{1}{\omega' - \omega + \nu - i\delta} \right) - \left(\text{th} \frac{\omega'}{2T} - \text{cth} \frac{\nu}{2T} \right) \left(\frac{1}{\omega' + \omega - \nu + i\delta} + \frac{1}{\omega' - \omega - \nu - i\delta} \right) \right\}. \quad (3.10)$$

Функции $\alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu)$ и $F(\nu)$ имеют смысл усредненных по поверхности Ферми квадрата матричного элемента электрон-фононного взаимодействия и плотности фононных состояний,

соответственно, а их произведение — функция Элиашберга — определяется как

$$\alpha_{\gamma\gamma'}^2(\nu)F(\nu) = \mathcal{N} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \sum_{\lambda} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 B_{\lambda}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu), \quad (3.11)$$

где векторы \mathbf{p} и \mathbf{p}' находятся на поверхности Ферми, а интегрирование проводится по азимутальному углу вектора \mathbf{p}' . Заметим, что в правую часть уравнений Элиашберга входит только щель в зоне проводимости $\Delta_+(\omega)$, поэтому самосогласованное решение необходимо находить только для $\Delta_+(\omega)$, а функция $\Delta_-(\omega)$ может быть найдена в явном виде по известной $\Delta_+(\omega)$.

Для аналитического решения интегрального уравнения (3.9) для функции $\Delta_+(\omega)$ мы будем аппроксимировать ее в правой части ступенчатой пробной функцией [193, 195]

$$\Delta_+(\omega') = \Delta_+ \Theta(\omega_0 - \omega') \quad (3.12)$$

шириной ω_0 , а для вычисления величины Δ_+ в левой части (3.9), будем полагать $\omega = 0$. В таком подходе частота обрезания ω_0 является свободным параметром, который можно полагать равным по порядку величины максимальной частоте фононов. Однако, более естественно определить ω_0 самосогласованным образом — как частоту ω , при которой обращается в нуль функция щели $\Delta_+(\omega)$, даваемая левой частью (3.9) при подстановке в правую часть выражения (3.12). Решение получаемого таким образом уравнения для ω_0 оказывается непростой задачей, однако в работе [195] было показано, что частота ω_0 должна находиться вблизи «центра тяжести» функции $\alpha_{++}^2(\nu)F(\nu)$.

Для нахождения критической температуры сверхпроводящего перехода T_c , которая может служить верхней оценкой температуры перехода Костерлица-Таулеса в квазидвумерной системе, линеаризуем по величине щели уравнение (3.9) для $\gamma = +1$, принимающее с учетом подстановки (3.12) вид

$$1 = \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega'}{\omega'} K_{++}(0, \omega'). \quad (3.13)$$

В приближении $T_c \ll \omega_0$, аналогично [195], находим

$$\int_0^{\omega_0} \frac{d\omega'}{\omega'} K_{++}(0, \omega') \approx - \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \alpha_{++}^2(\nu)F(\nu) \left\{ \ln \left| 1 - \frac{\nu^2}{\omega_0^2} \right| - 2\text{Re} \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i\nu}{2\pi T_c} \right) + 2\psi \left(\frac{1}{2} \right) + \text{cth} \frac{\nu}{2T_c} \ln \left| \frac{\omega_0 + \nu}{\omega_0 - \nu} \right| \right\}, \quad (3.14)$$

где $\psi(x)$ — логарифмическая производная гамма-функции.

Вводя эффективную константу связи

$$\lambda = 2 \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \alpha_{++}^2(\nu) F(\nu) \quad (3.15)$$

и (аналогично [195]) функцию температуры

$$\Lambda(T) = \int_0^{\infty} \frac{d\nu}{\nu} \alpha_{++}^2(\nu) F(\nu) \left\{ \ln \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\nu^2} \right| + 2 \ln \frac{\nu}{2\pi T} - \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{i\nu}{2\pi T} \right) + \operatorname{cth} \frac{\nu}{2T} \ln \left| \frac{\omega_0 + \nu}{\omega_0 - \nu} \right| \right\}, \quad (3.16)$$

получим из (3.13)–(3.14) следующее уравнение для T_c :

$$T_c = \frac{2\omega_0 e^\gamma}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1 + \Lambda(T_c)}{\lambda} \right\}, \quad (3.17)$$

где $\gamma \approx 0.577$ — постоянная Эйлера.

Чтобы конкретизировать функцию $\alpha_{++}^2(\nu)F(\nu)$, будем рассматривать одну моду оптических фононов, частота которых при $q = 0$ равна ω_1 , причем $T_c \ll \omega_1 \ll \mu$. Кроме того, будем считать, что частота этой моды слабо меняется по сравнению с ω_1 , а матричные элементы электрон-фононного взаимодействия $g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}$ слабо зависят от импульсов на масштабах p_F (так как в электрически допированном графене импульс p_F мал по сравнению с вектором обратной решетки, на масштабах которого свойства фононов могут заметно меняться). Таким образом, характеристики фононов будем задавать моделью Эйнштейна:

$$g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda} \approx g, \quad B_\lambda(\mathbf{q}, \nu) \approx \delta(\nu - \omega_1). \quad (3.18)$$

Из (3.11) и (3.18) получим

$$\alpha_{++}^2(\nu)F(\nu) = \frac{\mathcal{N}g^2}{2} \delta(\nu - \omega_1). \quad (3.19)$$

За счет наличия факторов перекрытия (2.29) («киральности» электронов) константа связи в графене эффективно уменьшается в два раза по сравнению с обычным металлом. Подставляя (3.19) в (3.15) и (3.16), с учетом условия $T_c \ll \omega_1$ получаем

$$\lambda = \frac{\mathcal{N}g^2}{\omega_1}, \quad \Lambda(T_c) \approx \lambda \ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right). \quad (3.20)$$

Уравнения (3.17) и (3.20) дают выражение для критической температуры перехода в пределе сильного допирования:

$$T_c = \frac{2\omega_{\text{eff}} e^\gamma}{\pi} \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} \right\}, \quad \frac{1}{\omega_{\text{eff}}} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{\omega_1}. \quad (3.21)$$

Оценка (3.21) отличается от оценки БКШ $T_c = (2\omega_D e^\gamma / \pi) \exp(-1/\lambda)$ заменой дебаевской частоты ω_D на эффективную частоту ω_{eff} , которая является приведенной частотой, составленной из ω_0 и ω_1 . Эффективная частота меньше каждой из частот ω_0 , ω_1 и приближенно равна меньшей из них, если частоты сильно отличаются по величине. Однако в модели Эйнштейна для фононного спектра более естественным является предположение $\omega_0 \approx \omega_1$, откуда $\omega_{\text{eff}} \approx \omega_1/2$.

3.1.4 Окрестность квантовой критической точки

Существование квантовой критической точки в графене при $\mu = 0$ по отношению к константе связи является результатом обращения в нуль плотности состояний в дираковской точке [171, 186]. Поэтому при рассмотрении квантовой критической точки и ее окрестности нужно аккуратно проводить интегрирование по малым импульсам в уравнениях для щели. В то же время детали зависимости функций щели $\Delta_{\pm}(p, \omega)$ от частоты не являются принципиально важными для физики квантовой критической точки. Таким образом, для рассмотрения спаривания при малом допировании вернемся к уравнению (3.6) и сделаем предположение

$$\Delta_{\gamma}(p, \omega) = u_{\gamma}(p)\Theta(\omega_0 - \omega),$$

а в левой части (3.6), соответственно, положим $\omega = 0$. При этом, согласно (3.5), при $\omega' \geq 0$

$$\text{Im } F_{\gamma'}(p', \omega' + i\delta) = \frac{\pi u_{\gamma'}(p')}{2E_{\gamma'}(p')} \delta[\omega' - E_{\gamma'}(p')] \Theta[\omega_0 - E_{\gamma'}(p')], \quad (3.22)$$

где $E_{\gamma'}(p') = \sqrt{\xi_{\gamma'}^2(p') + u_{\gamma'}^2(p')}$. Подставим теперь (3.22) в (3.6) и линеаризуем уравнение для нахождения T_c , сделав замену $E_{\gamma'}(p') \rightarrow |\xi_{\gamma'}(p')|$. Получим

$$u_{\gamma}(p) = \sum_{\gamma'} \int \frac{d\mathbf{p}'}{(2\pi)^2} L_{\gamma\gamma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \frac{u_{\gamma'}(p')}{2|\xi_{\gamma'}(p')|}, \quad (3.23)$$

где

$$L_{\gamma\gamma'}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \Theta[\omega_0 - |\xi_{\gamma'}(p')|] \sum_{\lambda} |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}'\gamma'} \rangle|^2 \int_0^{\infty} d\nu B_{\lambda}(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu) \times \\ \times \left\{ \text{th} \frac{|\xi_{\gamma'}(p')|}{2T_c} \left(\frac{1}{|\xi_{\gamma'}(p')| + \nu} - \frac{P}{|\xi_{\gamma'}(p')| - \nu} \right) + \text{cth} \frac{\nu}{2T_c} \left(\frac{1}{|\xi_{\gamma'}(p')| + \nu} + \frac{P}{|\xi_{\gamma'}(p')| - \nu} \right) \right\} \quad (3.24)$$

а символ P означает интегрирование в смысле главного значения.

До сих пор мы не делали никаких предположений относительно параметров задачи. Теперь допустим, что $\mu < \omega_0$, тогда пределы интегрирования по модулю импульса p' в

уравнении (3.23) определяются фактором $\Theta[\omega_0 - |\xi_{\gamma'}(p')|]$ в (3.24) и для $\gamma = \pm 1$ равны, соответственно, $0 < p' < (\omega_0 \pm \mu)/v_F$. Получаем, что зависимость u_γ от p в левой части (3.23), определяемая спектральной функцией $B_\lambda(\mathbf{p} - \mathbf{p}', \nu)$ в (3.24), в результате интегрирования по \mathbf{p}' размазывается по области импульса порядка ω_0/v_F . Поскольку частота ω_0 , равная по порядку величины характерной частоте фононов, много меньше ширины π -зоны электронов графена, составляющей около 6 эВ, то эта область мала по сравнению с вектором обратной решетки.

Поскольку область импульсов \mathbf{p}' , по которой производится интегрирование в уравнениях для щели (3.23), мала по сравнению с зоной Бриллюэна, то есть основания, как и в предыдущем разделе, использовать для оценки модель Эйнштейна (3.18) для одной моды оптических фононов. В таком подходе функции $u_\gamma(p)$ оказываются не зависящими от импульсов. Более того, в результате интегрирования фактора перекрытия $|\langle f_{\mathbf{p}\gamma} | f_{\mathbf{p}'\gamma'} \rangle|^2$ по углу между векторами \mathbf{p} и \mathbf{p}' мы получим, что $u_\gamma(p)$ не зависят также от индекса зоны γ . Поэтому мы можем провести в явном виде интегрирование по p' и суммирование по γ' в уравнениях (3.23) согласно правилу

$$\sum_{\gamma'} \int_0^\infty \frac{p' dp'}{2\pi} f(|\xi_{\gamma'}(p')|) = 2\mathcal{N} \int_0^\infty d\xi f(\xi) \max\left(1, \frac{\xi}{\mu}\right).$$

Получим в результате

$$\frac{1}{G} = \int_0^{\omega_0} \frac{d\xi}{2\xi} \max(\mu, \xi) \left\{ \text{th} \frac{\xi}{2T_c} \left(\frac{1}{\xi + \omega_1} - \frac{P}{\xi - \omega_1} \right) + \text{cth} \frac{\omega_1}{2T_c} \left(\frac{1}{\xi + \omega_1} + \frac{P}{\xi - \omega_1} \right) \right\}, \quad (3.25)$$

где введена безразмерная константа связи

$$G = \frac{g^2}{2\pi v_F^2}. \quad (3.26)$$

Из уравнения (3.25) легко видеть наличие квантовой критической точки при $\mu = 0$, связанное с тем, что спаривание осуществляется, только если константа связи G превышает некоторое критическое значение. Действительно, при сколь угодно малом, но конечном μ интеграл в правой части (3.25) расходится при стремлении T_c к нулю, что означает возможность спаривания (т.е., существование $T_c > 0$, удовлетворяющего уравнению (3.25)) при сколь угодно малой G . Вместе с тем, при $\mu = 0$ и устремлении T_c к нулю интеграл в правой части стремится к конечному пределу, равному пороговому значению $1/G$. Если отношение $1/G$ превышает этот порог, то уравнение (3.25) для T_c не имеет решений.

Рассмотрим соотношение параметров системы, соответствующее квантовой критической точке и ее ближайшей окрестности: $\mu \ll T_c \ll \omega_1 \sim \omega_0$. При этом уравнение (3.25)

примет приближенный вид:

$$\frac{1}{G} = \ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) + \frac{2T_c \ln 2}{\omega_1} + \frac{\mu^2}{4\omega_1 T_c}.$$

Решая получившееся квадратное уравнение относительно T_c , получим выражение для температуры перехода в окрестности квантовой критической точки:

$$T_c = \frac{\omega_1}{4 \ln 2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) - \frac{1}{G} + \sqrt{\left[\ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) - \frac{1}{G} \right]^2 + \frac{2\mu^2 \ln 2}{\omega_1^2}} \right\}. \quad (3.27)$$

При $\mu = 0$ выражение (3.27) дает температуру перехода в самой критической точке:

$$T_c = \frac{\omega_1}{2 \ln 2} \left\{ \ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) - \frac{1}{G} \right\}, \quad (3.28)$$

причем спаривание может существовать только при

$$G > \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{\omega_0}{\omega_1} \right)}. \quad (3.29)$$

Теперь рассмотрим случай дальней окрестности квантовой критической точки, для которой $T_c \ll \mu < \omega_1 \sim \omega_1$. Уравнение (3.25) для таких соотношений между параметрами принимает вид:

$$\frac{1}{G} = \ln \frac{\omega_0 + \omega_1}{\mu + \omega_1} + \frac{\mu}{\omega_1} \left\{ \ln \frac{2\omega_1 e^\gamma}{\pi} - \ln \frac{\mu + \omega_1}{\mu} \right\},$$

откуда находим

$$T_c = \frac{2e^\gamma}{\pi} \frac{\mu\omega_1}{\mu + \omega_1} \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} + \frac{\omega_1}{\mu} \ln \frac{\omega_0 + \omega_1}{\mu + \omega_1} \right\}, \quad (3.30)$$

где мы перешли от константы G к константе $\lambda = G\mu/\omega_1$ (см. (3.20)).

Выражения (3.27), (3.28) и (3.30) для температуры перехода в квантовой критической точке и ее окрестностях похожи по своей форме на выражения, полученные в работе [171], но являются более точными благодаря учету динамических эффектов и фактора перекрытия (2.29), проистекающего из учета спинорной природы волновых функций электронов. Критическое значение силы электрон-фононного взаимодействия, даваемое неравенством (3.29), зависит от соотношения частоты обращения в нуль сверхпроводящей щели ω_0 и частоты фононов ω_1 .

Отметим некоторое сходство между результатами (3.21) и (3.30) для критической температуры, полученными при условиях $T_c \ll \omega_0 \sim \omega_1 \ll \mu$ и $T_c \ll \mu < \omega_0 \sim \omega_1$ соответственно. Эти случаи соответствуют физическим ситуациям однозонного и многозонного

спаривания; плавная интерполяция между соответствующими выражениями для T_c может дать ответ на вопрос об изменении факторов, влияющих на критическую температуру при постепенном переходе от многозонного спаривания к однозонному.

Заметим также, что при малом допировании, в окрестности квантовой критической точки, становится важным вопрос о применимости теоремы Мигдала [196], которая требует, чтобы характерные частоты электронной подсистемы были велики по сравнению с характерными частотами фононов. Если химический потенциал достаточно мал, то условия применимости этой теоремы нарушаются и, как следствие, фононная функция Грина и вершины электрон-фононного взаимодействия могут претерпевать существенные перенормировки. Как было показано в [85, 197], изменение фононных свойств в результате взаимодействия с электронами сводится к изменению их дисперсионной зависимости, которое для оптических фононов является несущественным на важных для электронного спаривания импульсах, малых по сравнению с вектором обратной решетки.

3.2 Система взаимодействующих электронов и фононов в графене

3.2.1 Электроны

В данном разделе мы представим микроскопическое описание системы взаимодействующих электронов и фононов в графене, позволяющее рассматривать электронное спаривание. При этом динамика электронов будет разрешена по подрешеткам кристаллической решетки графена и по долинам, которые электроны заселяют. Движение атомов углерода, соответствующее различным модам фононов, также должно быть разрешено по подрешеткам. Представленные здесь результаты опубликованы в работах [62, 63].

Кристаллическая решетка графена, изображенная на Рис. 3.1, состоит из двух взаимопроникающих треугольных подрешеток A и B , каждая из которых является двумерной решеткой Браве с периодом $a = 2.46 \text{ \AA}$ [3]. Гамильтониан невзаимодействующих электронов в графене в приближении линейной комбинации атомных орбиталей имеет вид [6]

$$H_0 = -t \sum_{\langle ij \rangle} \{ a_i^\dagger b_j + b_j^\dagger a_i \}, \quad (3.31)$$

где a_i и b_j — операторы уничтожения электрона на i -м атоме подрешетки A и j -м атоме подрешетки B соответственно. Символ $\langle ij \rangle$ обозначает суммирование по всем парам

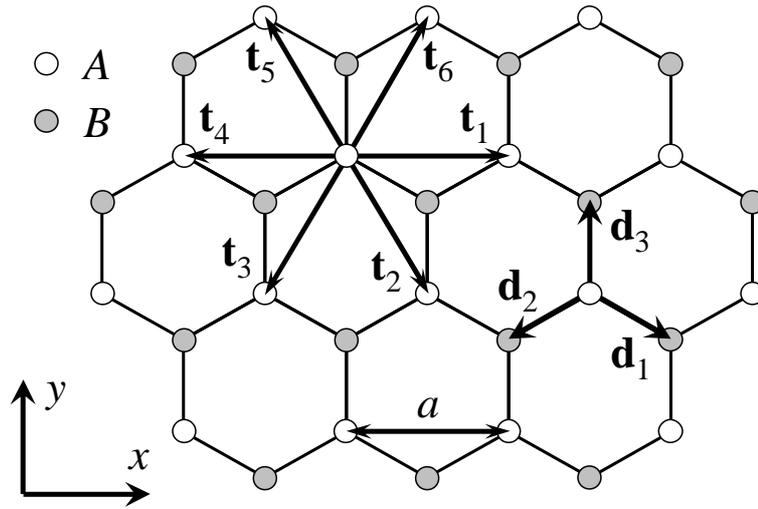


Рис. 3.1. Кристаллическая решетка графена как совокупность двух треугольных подрешеток A и B с периодом $a = 2.46 \text{ \AA}$. Векторы \mathbf{d}_k ($k = 1, 2, 3$) и \mathbf{t}_l ($l = 1, \dots, 6$) соединяют атом подрешетки A с его ближайшими соседями и соседями второго порядка соответственно.

атомов, которые являются ближайшими соседями и принадлежат разным подрешеткам. Перейдем в импульсное представление при помощи преобразования Фурье:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}_{iA}^{(0)}} a_{\mathbf{p}}, \quad b_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{R}_{jB}^{(0)}} b_{\mathbf{p}}, \quad (3.32)$$

где $N = S/S_0$ — количество элементарных ячеек в кристалле, S — площадь системы, $S_0 = a^2\sqrt{3}/2$ — площадь одной ячейки, $\mathbf{R}_{nw}^{(0)}$ — положение равновесия атома подрешетки w в n -й элементарной ячейке. Нормировочный множитель N выбран здесь таким образом, чтобы операторы уничтожения в импульсном пространстве подчинялись антикоммутиационным соотношениям $\{a_{\mathbf{p}}, a_{\mathbf{p}'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$, $\{b_{\mathbf{p}}, b_{\mathbf{p}'}^+\} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$. Подставляя (3.32) в (3.31), получим

$$H_0 = -t \sum_{\mathbf{p}} \left\{ a_{\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{p}} g_{\mathbf{p}} + b_{\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{p}} g_{-\mathbf{p}} \right\}, \quad (3.33)$$

где введены функции

$$g_{\mathbf{p}} = \sum_{k=1}^3 e^{i\mathbf{p}\mathbf{d}_k},$$

а векторы $\mathbf{d}_1 = (a/2)(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y/\sqrt{3})$, $\mathbf{d}_2 = a\mathbf{e}_y/\sqrt{3}$, $\mathbf{d}_3 = (a/2)(-\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y/\sqrt{3})$ показаны на Рис. 3.1.

Обратная решетка графена является треугольной и изображена на Рис. 3.2. Неэквивалентные значения импульса электрона, по которым производится суммирование в (3.33),

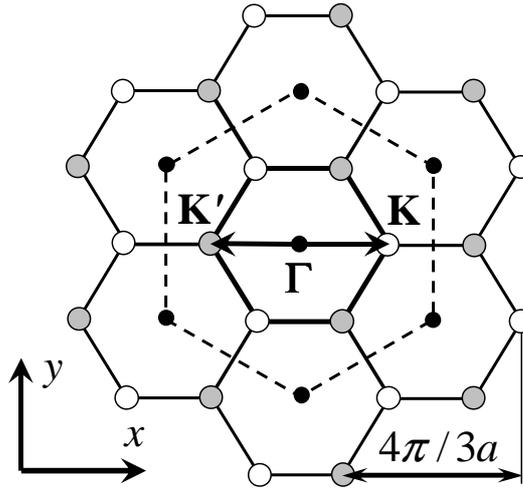


Рис. 3.2. Обратная решетка графена в импульсном пространстве. Первая и вторая зоны Бриллюэна ограничены толстой сплошной и пунктирной линиями соответственно. Масштабы эквивалентных точек Γ , \mathbf{K} и \mathbf{K}' изображены кругами различных цветов.

заклучены в пределах первой зоны Бриллюэна (ячейки Вигнера-Зейтца обратной решетки). Валентная зона и зона проводимости графена касаются в дираковских точках \mathbf{K} и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$, поэтому для описания низкоэнергетической динамики электронов достаточно учесть импульсы электрона, лежащие в окрестности этих точек. Раскладывая сумму в (3.33) в окрестностях \mathbf{K} и \mathbf{K}' и учитывая, что $g_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} = -(a\sqrt{3}/2)\mathbf{p}(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + \mathcal{O}(p^2)$, $g_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}} = (a\sqrt{3}/2)\mathbf{p}(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) + \mathcal{O}(p^2)$, получим

$$H_0 = v_F \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} \left\{ (a_{\mathbf{K}+\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} - b_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}})(\mathbf{e}_x - i\mathbf{e}_y) + (b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}}^+ a_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} - a_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}}^+ b_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}})(\mathbf{e}_x + i\mathbf{e}_y) \right\}, \quad (3.34)$$

где $v_F = at\sqrt{3}/2$ — фермиевская скорость, а сумма по берется уже по значениям \mathbf{p} , малым по сравнению с векторами обратной решетки.

Введем, по аналогии с [199, 200], четырехкомпонентный спинор операторов уничтожения электрона:

$$\Psi_{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} a_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} \\ b_{\mathbf{K}+\mathbf{p}} \\ b_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}} \\ a_{\mathbf{K}'+\mathbf{p}} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

тогда гамильтониан свободных электронов в графене (3.34) можно переписать в компакт-

ном виде

$$H_0 = v_F \sum_{\mathbf{p}} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}} \gamma_{\mathbf{p}} \Psi_{\mathbf{p}}. \quad (3.36)$$

Здесь введены «ковариантные» компоненты импульса $p^0 = (i/v_F)(\partial/\partial t)$, $p^{1,2} = p_{x,y}$, $p_{\mu} = \{p^0, -p^1, -p^2\}$, гамма-матрицы Дирака в представлении Вейля

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

и дираковское сопряжение спинора: $\bar{\Psi}_{\mathbf{p}} = \Psi_{\mathbf{p}}^+ \gamma^0$. С гамильтонианом (3.36), операторный спинор $\Psi_{\mathbf{p}}$ в гейзенберговском представлении подчиняется уравнению, аналогичному двумерному уравнению Дирака для частиц нулевой массы:

$$p_{\mu} \gamma^{\mu} \Psi_{\mathbf{p}} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2. \quad (3.38)$$

3.2.2 Плоские фононы

Рассмотрим взаимодействие с электронами *плоских* фононов, соответствующих колебаниям атомов в плоскости листа графена. Вектор, задающий положение атома, находящегося в n -й элементарной ячейке и принадлежащего подрешетке $w = A, B$, может быть представлен в виде (см., напр., [38, стр. 12]):

$$\mathbf{R}_{nw}(t) = \mathbf{R}_{nw}^{(0)} + \sum_{\mathbf{q}\sigma} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^w}{\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}\sigma}}} \left\{ c_{\mathbf{q}\sigma} e^{i(\mathbf{q}\mathbf{R}_{nw}^{(0)} - \omega_{\mathbf{q}\sigma}t)} + c_{\mathbf{q}\sigma}^+ e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{R}_{nw}^{(0)} - \omega_{\mathbf{q}\sigma}t)} \right\}, \quad (3.39)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^w$ — вектор поляризации, соответствующий фононной моде $\sigma = 1, \dots, 4$ с импульсом \mathbf{q} , находящимся в первой зоне Бриллюэна, $\omega_{\mathbf{q}\sigma}$ — частота этой моды, $c_{\mathbf{q}\sigma}$ и $c_{\mathbf{q}\sigma}^+$ — операторы уничтожения и рождения фонона этой моды, M — масса атома. Нормировка в (3.39) выбрана таким образом, чтобы из антикоммутиационных соотношений для операторов фононов $\{c_{\mathbf{q}\sigma}, c_{\mathbf{q}'\sigma'}^+\} = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \delta_{\sigma\sigma'}$ следовали канонические коммутационные соотношения для координат и импульсов атомов: $[(\mathbf{R}_{nw})_k, (M\dot{\mathbf{R}}_{n'w'})_j] = i\delta_{kj} \delta_{nn'} \delta_{ww'}$. Перейдем в представление Гейзенберга для операторов фононов при помощи замены $c_{\mathbf{q}\sigma} e^{-i\omega_{\mathbf{q}\sigma}t} \rightarrow c_{\mathbf{q}\sigma}(t)$, $c_{\mathbf{q}\sigma}^+ e^{i\omega_{\mathbf{q}\sigma}t} \rightarrow c_{\mathbf{q}\sigma}^+(t)$ и введем для удобства вспомогательные операторы $P_{\mathbf{q}}^{(\sigma)} = (c_{\mathbf{q}\sigma} + c_{-\mathbf{q}\sigma}^+)/\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}\sigma}}$. Тогда (3.39) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}_{nw}(t) = \mathbf{R}_{nw}^{(0)} + \sum_{\mathbf{q}\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^w P_{\mathbf{q}}^{(\sigma)} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_{nw}^{(0)}}. \quad (3.40)$$

Рассмотрим вклад в электрон-фононное взаимодействие, происходящий из-за того, что сближение или удаление соседних атомов изменяет интеграл перескока t электрона между ними, входящий в оператор кинетической энергии на решетке (3.31). Изменение интеграла перескока t_{ij} между i -м атомом из подрешетки A и соседним j -м атомом из подрешетки B может быть разложено в первом порядке по смещению атомов: $t_{ij} = t - \Delta t_{ij}$ [201], где, с учетом (3.40),

$$\Delta t_{ij} = -\gamma \frac{\mathbf{d}_k}{|\mathbf{d}_k|} (\mathbf{R}_{jB} - \mathbf{R}_{iA} - \mathbf{d}_k) = -\frac{\gamma\sqrt{3}}{a} \sum_{\mathbf{q}\sigma} P_{\mathbf{q}}^{(\sigma)} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_{iA}^{(0)}} \mathbf{d}_k \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^B e^{i\mathbf{q}\mathbf{d}_k} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^A \right\}. \quad (3.41)$$

Здесь $\gamma = -\partial t / \partial l \approx 6 \text{ эВ}/\text{Å}$ — производная интеграла перескока по расстоянию между атомами l , взятая со знаком «минус» [202], $\mathbf{d}_k = \mathbf{R}_{jB}^{(0)} - \mathbf{R}_{iA}^{(0)}$ (см. Рис. 3.1). Подстановка (3.41) в (3.31) и переход к фурье-представлению (3.32) даст гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в линейном приближении:

$$H_{\text{el-ph}}^{(\text{lin})} = \frac{\gamma\sqrt{3}}{a} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}\sigma} \sum_{k=1}^3 P_{\mathbf{q}}^{(\sigma)} \mathbf{d}_k \left\{ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^B e^{i\mathbf{q}\mathbf{d}_k} - \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}\sigma}^A \right\} \left\{ a_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ b_{\mathbf{p}} e^{i\mathbf{p}\mathbf{d}_k} + b_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{p}} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{q})\mathbf{d}_k} \right\}. \quad (3.42)$$

Как и в гамильтониане свободных электронов (3.33), разложим сумму по импульсам в операторе взаимодействия (3.42) в окрестностях долин электронов $\mathbf{p} \approx \mathbf{K}, \mathbf{K}'$, $\mathbf{p} + \mathbf{q} \approx \mathbf{K}, \mathbf{K}'$. При этом ограничимся нулевым порядком отклонения импульсов \mathbf{p} и $\mathbf{p} + \mathbf{q}$ от дираковских точек. Принимая в расчет геометрию обратной решетки (Рис. 3.2), получим 4 комбинации импульсов электрона \mathbf{p} и фонона \mathbf{q} , при которых электрон в начальном и конечном состоянии находится вблизи дираковских точек: 1) $\mathbf{p} = \mathbf{K}$, $\mathbf{q} = \Gamma$, 2) $\mathbf{p} = \mathbf{K}$, $\mathbf{q} = \mathbf{K}$, 3) $\mathbf{p} = \mathbf{K}'$, $\mathbf{q} = \Gamma$, 4) $\mathbf{p} = \mathbf{K}'$, $\mathbf{q} = \mathbf{K}'$. Как видно, в таком приближении достаточно учитывать только фононы с импульсами Γ , $\pm\mathbf{K}$ [202]. Определив для таких фононов 4 моды с поляризациями

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}1x}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}1x}^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}1y}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}1y}^B = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}2x}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}2x}^B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_x, \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}2y}^A = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{q}2y}^B = -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathbf{e}_y, \end{array} \right\}, \quad (3.43)$$

и используя спинорные обозначения (3.35) и явный вид гамма-матриц (3.37), приведем (3.42) к виду:

$$\begin{aligned} H_{\text{el-ph}}^{(\text{lin})} = & -\frac{3\gamma}{\sqrt{2}} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \left\{ \gamma^5 \gamma^2 P_{\Gamma+\mathbf{q}}^{(2x)} - \gamma^5 \gamma^1 P_{\Gamma+\mathbf{q}}^{(2y)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} I \left[iP_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(1x)} - iP_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(1x)} + P_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(2y)} + P_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(2y)} \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \gamma^5 \left[iP_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(1x)} + iP_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(1x)} + P_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(2y)} - P_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(2y)} \right] \right\} \Psi_{\mathbf{p}}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

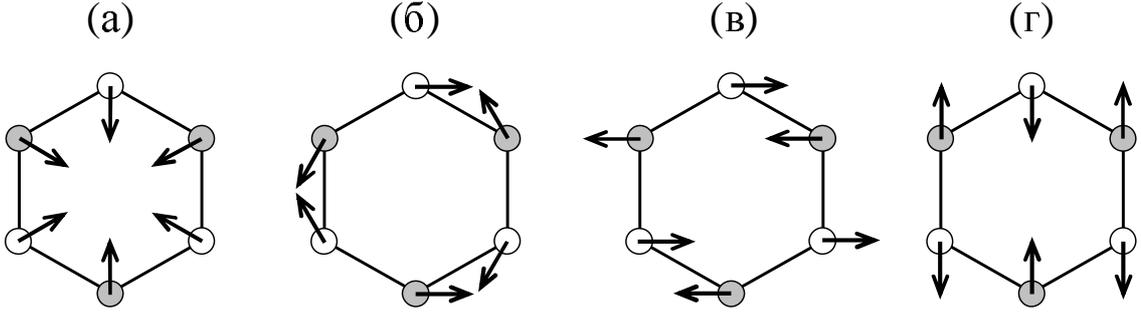


Рис. 3.3. Фононные моды в графене, наиболее сильно взаимодействующие с электронами: (а) скалярная мода A_1 с $\mathbf{q} \approx \pm\mathbf{K}$, (б) псевдоскалярная мода B_1 с $\mathbf{q} \approx \pm\mathbf{K}$, (в,г) псевдовекторные моды E_{2x} и E_{2y} с импульсом $\mathbf{q} \approx \Gamma$. Стрелками указаны направления амплитудных смещений атомов, согласно работам [86, 202].

где введена матрица

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

а импульсы \mathbf{p} и \mathbf{q} теперь являются малыми по сравнению с векторами обратной решетки.

Сопоставим фононные моды, входящие в (3.44), с фононными модами утроенной элементарной ячейки, рассмотренными в [202] и отвечающими неприводимым представлениям группы симметрии кристаллической решетки графена. В нулевом порядке по \mathbf{q} взаимодействие с электронами демонстрируют скалярная мода A_1 и псевдоскалярная мода B_1 , являющиеся линейными комбинациями мод с импульсами \mathbf{q} в окрестностях \mathbf{K} и $\mathbf{K}' = -\mathbf{K}$, а также две псевдовекторные моды E_{2x} и E_{2y} с импульсами $\mathbf{q} \approx \Gamma$ (Рис. 3.3). Пронумеруем эти моды индексом μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$ для мод A_1, B_2, E_{2x} и E_{2y} соответственно) и введем для них операторы $\Phi_{\mathbf{q}\mu} = c_{\mathbf{q}\mu} + c_{-\mathbf{q}\mu}^\dagger$ (здесь вектор \mathbf{q} мал и отсчитывается от их «больших» импульсов $\Gamma, \pm\mathbf{K}$). Тогда операторы $P_{\mathbf{q}}^{(\sigma)}$ фононов с поляризациями (3.43) будут связаны следующим образом с $\Phi_{\mathbf{q}\mu}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[-iP_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(1x)} + iP_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(1x)} - P_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(2y)} - P_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(2y)} \right] &= \frac{\Phi_{\mathbf{q}1}}{\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}1}}}, \\ \frac{1}{2} \left[P_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(1x)} + P_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(1x)} - iP_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}^{(2y)} + iP_{\mathbf{K}'+\mathbf{q}}^{(2y)} \right] &= \frac{\Phi_{\mathbf{q}2}}{\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}2}}}, \\ P_{\Gamma+\mathbf{q}}^{(2x)} &= \frac{\Phi_{\mathbf{q}3}}{\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}3}}}, & -P_{\Gamma+\mathbf{q}}^{(2y)} &= \frac{\Phi_{\mathbf{q}4}}{\sqrt{2NM\omega_{\mathbf{q}4}}}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Подставляя (3.45) в (3.44), получим выражение для гамильтониана взаимодействия (см.

также [86, 202]):

$$H_{\text{el-ph}}^{(\text{lim})} = \frac{1}{\sqrt{S}} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} \sum_{\mu=1}^4 g_{\mu} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} \Gamma_{\mu} \Psi_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{q}\mu}, \quad (3.46)$$

где введены матрицы вершин взаимодействия, соответствующие рассматриваемым четырем фононным модам:

$$\Gamma_1 = I, \quad \Gamma_2 = -i\gamma^5, \quad \Gamma_3 = -\gamma^5\gamma^2, \quad \Gamma_4 = -\gamma^5\gamma^1 \quad (3.47)$$

(отметим, что все Γ_{μ} должны удовлетворять условиям эрмитовости гамильтониана взаимодействия $\Gamma_{\mu} = \gamma^0 \Gamma_{\mu}^+ \gamma^0$).

Итак, мы будем рассматривать 4 моды плоских фононов в графене, которые являются оптическими, взаимодействуют с электронами наиболее сильно и хорошо видны в спектрах комбинационного рассеяния (см., напр., [85, 86, 202, 203]). Они попарно вырождены по энергии: моды фононов A_1 и B_1 с импульсами $\mathbf{q} = \pm \mathbf{K}$ (будем их называть \mathbf{K} -фононами) имеют энергию $\omega_{\mathbf{q}1} = \omega_{\mathbf{q}2} \equiv \omega_{\mathbf{K}} \approx 0.150$ эВ, а энергия двух псевдовекторных мод E_{2x} и E_{2y} (будем называть их Γ -фононами) равна $\omega_{\mathbf{q}3} = \omega_{\mathbf{q}4} \equiv \omega_{\Gamma} \approx 0.196$ эВ. Характеристики указанных оптических фононов — частоты ω_{μ} и константы связи с электронами g_{μ} — слабо зависят от импульсов фонона и электрона и потому будут считаться постоянными. Константы связи в самом грубом приближении равны $g_{\mu} = (3\gamma/2)\sqrt{S_0/M\omega_{\mathbf{q}\mu}}$; однако, мы будем использовать более точные их значения, которые могут быть следующим образом связаны с величинами $\langle g_{\mathbf{K},\Gamma}^2 \rangle_{\text{F}}$, введенными в работе [85]: $g_{1,2}^2 = 4S_0 \langle g_{\mathbf{K}}^2 \rangle_{\text{F}}$, $g_{3,4}^2 = 4S_0 \langle g_{\Gamma}^2 \rangle_{\text{F}}$ (напомним, что $S_0 = a^2\sqrt{3}/2$). Кроме того, мы можем соотнести g_{μ} с безразмерными константами λ_{A_1} и λ_{E_2} , рассматриваемыми в [86] (см. формулу (9) и Рис. 6 из этой работы): $g_1^2 = g_2^2 = \lambda_{A_1} v_{\text{F}}^2/2$, $g_3^2 = g_4^2 = \lambda_{E_2} v_{\text{F}}^2/2$. Наконец, величины g_{μ}^2 могут быть связаны с соответствующими парциальными вкладами различных фононных мод в константу $\lambda(\epsilon_f)$, определенную в работе [204] (формула (15) и Рис. 5): $\lambda(\epsilon_f) = \sum_{\mu=1}^4 \mathcal{N} g_{\mu}^2 / \omega_{\mu}$.

3.2.3 Изгибные фононы

Рассмотрим теперь *изгибные* фононы, соответствующие изгибным колебаниям подвешенного листа графена, и их взаимодействие с электронами. При этом не будем принимать в расчет ангармоническую связь между плоскими и изгибными колебаниями [22, 87]. Будем отталкиваться от простой модели, в которой энергия изогнутого листа графена определяется отклонением углов между соседними валентными связями от их равновесных значений. Функция Лагранжа кристаллической решетки атомов в таком приближении равна

[205, 206]

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2} \sum_i \left(\frac{\partial u_i^A}{\partial t} \right)^2 + \frac{M}{2} \sum_j \left(\frac{\partial u_j^B}{\partial t} \right)^2 - \frac{D}{2} \sum_i \left[\sum_{j \in N_1(i)} (u_j^B - u_i^A) \right]^2 - \frac{D}{2} \sum_j \left[\sum_{i \in N_1(j)} (u_i^A - u_j^B) \right]^2, \quad (3.48)$$

где u_i^A и u_j^B — смещения атомов подрешеток A и B в направлении, перпендикулярном плоскости листа графена, D — коэффициент упругости, $N_p(i)$ — множество соседей p -го порядка атома с номером i . В континуальном приближении (3.48) принимает вид лагранжиана упругой мембраны без учета смещений в ее плоскости [87]:

$$\mathcal{L} = \frac{2}{S_0} \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{M}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 - \frac{Da^2}{4} (\Delta u)^2 \right\}.$$

Уравнения Лагранжа для смещений атомов, следующие из (3.48), имеют вид

$$\begin{cases} \left(M \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 12D \right) u_i^A - 6D \sum_{j \in N_1(i)} u_j^B + D \sum_{k \in N_2(i)} u_k^A = 0, \\ \left(M \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 12D \right) u_j^B - 6D \sum_{i \in N_1(j)} u_i^A + D \sum_{k \in N_2(j)} u_k^B = 0. \end{cases} \quad (3.49)$$

Разложим теперь смещения u_i^A и u_j^B , аналогично (3.40), по фононным модам:

$$u_i^w = \sum_{\mathbf{q}\sigma} \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^w P_{\mathbf{q}\sigma} e^{i\mathbf{q}\mathbf{R}_{i_w}^{(0)}}, \quad (3.50)$$

где суммирование проводится по акустической ($\sigma = +1$) и оптической ($\sigma = -1$) модам, а импульс \mathbf{q} пробегает значения внутри *второй* зоны Бриллюэна (Рис. 3.2); $P_{\mathbf{q}\sigma} = (c_{\mathbf{q}\sigma} + c_{-\mathbf{q}\sigma}^+) / \sqrt{6NM\omega_{\mathbf{q}\sigma}}$, $c_{\mathbf{q}\sigma}$ — оператор уничтожения изгибного фонона (здесь использован коэффициент 6 вместо 2, поскольку по площади вторая зона Бриллюэна в 3 раза больше первой). Подставляя (3.50) в (3.49), получим систему уравнений для определения характеристик фононных мод:

$$\begin{pmatrix} (M/D)\omega_{\mathbf{q}\sigma}^2 - |g_{\mathbf{q}}|^2 + 3 & 6g_{\mathbf{q}} \\ 6g_{\mathbf{q}}^* & (M/D)\omega_{\mathbf{q}\sigma}^2 - |g_{\mathbf{q}}|^2 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^A \\ \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^B \end{pmatrix} = 0.$$

Решая эту систему, получим

$$\omega_{\mathbf{q}\sigma} = \sqrt{\frac{D}{M} (3 - \sigma|g_{\mathbf{q}}|)}, \quad \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^A = \sigma \frac{g_{\mathbf{q}}}{\sqrt{2}|g_{\mathbf{q}}|}, \quad \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^B = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.51)$$

В принципе, в формуле (3.50) достаточно проводить суммирование по первой зоне Бриллюэна, но в нашем случае более удобно суммировать по второй зоне Бриллюэна, поскольку в ее пределах характеристики фононов (3.51) определены однозначно. Длинноволновые асимптотики частот акустических и оптических фононов есть: $\omega_{\mathbf{q}+} \approx (a^2/4)\sqrt{D/M}q^2$, $\omega_{\mathbf{q}-} \approx 6\sqrt{D/M}$. Сравнивая частоту оптической моды $\omega_{\mathbf{q}=0,-}$ с экспериментальными данными [207], получим $\sqrt{D/M} \approx 0.019$ эВ.

Главный вклад в электрон-фононное взаимодействие в графене определяется двумя механизмами: деформационным потенциалом и модуляцией интеграла перескока из-за растяжения валентных связей. В простейшем приближении деформационный потенциал, действующий на электрон, находящийся на определенном атоме, складывается из потенциалов, создаваемых тремя соседними атомами. Деформационный потенциал увеличивается, если соседние атомы приближаются к рассматриваемому атому, и уменьшается, если они удаляются. Следовательно, деформационный потенциал определяется суммой длин связей атома с ближайшими соседями и может быть разложен в линейном порядке по этой сумме (отметим, что в случае плоских оптических фононов, как можно заключить исходя из Рис. 3.3, вклад деформационного потенциала во взаимодействие с электронами отсутствует). В то же время, изменение длины связи между соседними атомами в результате смещений атомов перпендикулярно плоскости графена пропорционально (как легко показать) квадрату разности малых смещений этих атомов. Таким образом, гамильтониан квадратичного взаимодействия электронов с изгибными фононами может быть записан в следующем виде:

$$H_{\text{el-ph}}^{\text{(quadr)}} = \sum_{\langle ij \rangle} (u_j^B - u_i^A)^2 \left\{ C_1 (a_i^+ a_i + b_j^+ b_j) + C_2 (a_i^+ b_j + b_j^+ a_i) \right\}, \quad (3.52)$$

где первое слагаемое в фигурных скобках соответствует деформационному потенциалу, а второе — модуляции интеграла перескока. Параметр C_2 , отвечающий растяжению связей, равен $C_2 = \gamma\sqrt{3}/2a$. Для того, чтобы определить C_1 , запишем деформационную часть гамильтониана (3.52) в континуальном приближении:

$$H_{\text{def}} = \frac{C_1 a^2}{2} \sum_n (a_n^+ a_n + b_n^+ b_n) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Как следует из этого выражения, на каждый атом действует деформационный потенциал $V_{\text{def}} = C a^2 (\Delta S/S)$, где $\Delta S/S = (\nabla u)^2/2$ — относительное изменение элемента площади в результате изгиба листа графена. Согласно работам [88, 201], деформационный потенциал равен $V_{\text{def}} = (g/2)(\nabla u)^2$, где $g \approx 20 - 30$ эВ, откуда получим: $C_1 = g/a^2$.

Проводя в гамильтониане (3.52) преобразование Фурье электронных операторов (3.32) и раскладывая атомные смещения по фононным модам (3.50), получим

$$H_{\text{el-ph}}^{(\text{quadr})} = \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \sum_{\mathbf{q}\sigma\sigma'} \frac{\Phi_{\mathbf{q}\sigma}\Phi_{\mathbf{q}'\sigma'}}{6NM\sqrt{\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{q}'\sigma'}}} \sum_{w_1w_2} \left\{ a_{\mathbf{p}'}^+ a_{\mathbf{p}} R_{w_1w_2}^{AA} + b_{\mathbf{p}'}^+ b_{\mathbf{p}} R_{w_1w_2}^{BB} + a_{\mathbf{p}'}^+ b_{\mathbf{p}} R_{w_1w_2}^{AB} + b_{\mathbf{p}'}^+ a_{\mathbf{p}} R_{w_1w_2}^{BA} \right\} \varepsilon_{\mathbf{q}\sigma}^{w_1} \varepsilon_{\mathbf{q}'\sigma'}^{w_2}. \quad (3.53)$$

Здесь векторы \mathbf{p} и \mathbf{p}' пробегают первую зону Бриллюэна, а \mathbf{q} — вторую зону Бриллюэна; при этом $\mathbf{q}' = \mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}$. Для $w_1, w_2 = A, B$ мы ввели матрицы

$$R_{w_1w_2}^{AA} = C_1 \begin{pmatrix} 1 & -g_{\mathbf{q}'} \\ -g_{\mathbf{q}} & g_{\mathbf{p}'-\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{w_1w_2}, \quad R_{w_1w_2}^{BB} = C_1 \begin{pmatrix} 1 & -g_{-\mathbf{q}} \\ -g_{-\mathbf{q}'} & g_{-\mathbf{p}'+\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{w_1w_2}, \\ R_{w_1w_2}^{AB} = C_2 \begin{pmatrix} g_{\mathbf{p}} & -g_{\mathbf{p}'-\mathbf{q}} \\ -g_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} & g_{\mathbf{p}'} \end{pmatrix}_{w_1w_2}, \quad R_{w_1w_2}^{BA} = C_2 \begin{pmatrix} g_{-\mathbf{p}'} & -g_{-\mathbf{p}-\mathbf{q}} \\ -g_{-\mathbf{p}'+\mathbf{q}} & g_{-\mathbf{p}} \end{pmatrix}_{w_1w_2}. \quad (3.54)$$

Поскольку электроны заселяют окрестности точек \mathbf{K} и \mathbf{K}' , мы распределим по ним сумму по \mathbf{p} и \mathbf{p}' в (3.53) и сделаем соответствующие разложения матриц (3.54). Используя четырехкомпонентные операторы (3.35), получим

$$H_{\text{el-ph}}^{(\text{quadr})} = \frac{1}{S} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{Q}\sigma\sigma'} \bar{\Psi}_{\mathbf{p}'} V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})} \Psi_{\mathbf{p}} \Phi_{\mathbf{q}\sigma} \Phi_{\mathbf{q}'\sigma'}, \quad (3.55)$$

где $\mathbf{q}' = \mathbf{Q} + \mathbf{p}' - \mathbf{p} - \mathbf{q}$, а векторы \mathbf{p} и \mathbf{p}' являются уже малыми и отсчитываются от дираковских точек; вектор \mathbf{Q} принимает значения $\mathbf{\Gamma}$, $\pm\mathbf{K}$. Выражения для вершин взаимодействия $V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})}$ имеют вид

$$V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{\Gamma})} = \frac{a^2}{8M\sqrt{\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{q}'\sigma'}}} \left\{ 2\delta_{\sigma\sigma'} C_1 (3 - \sigma|g_{\mathbf{q}}|) \gamma^0 + C_2 \gamma^5 \left[(\sigma g_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} + \sigma' g_{\mathbf{K}+\mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{q}}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\gamma^1 + i\gamma^2}{2} + (\sigma g_{-\mathbf{K}-\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} + \sigma' g_{-\mathbf{K}+\mathbf{q}} \phi_{-\mathbf{q}}) \frac{\gamma^1 - i\gamma^2}{2} \right] \right\}, \\ V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{K})} = \frac{a^2(1 + \gamma^5)}{16M\sqrt{\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{K}-\mathbf{q},\sigma'}}} \left\{ C_1 (3 - \sigma|g_{\mathbf{q}}| - \sigma'|g_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}|) \gamma^0 \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{\gamma^1 + i\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^1 - i\gamma^2}{2} \sigma\sigma' \phi_{\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{K}-\mathbf{q}} \right) + C_2 (\sigma g_{-\mathbf{K}-\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{q}} + \sigma' g_{\mathbf{K}+\mathbf{q}} \phi_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}) \right\}, \\ V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(-\mathbf{K})} = \gamma^0 [V_{-\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{K})}]^+ \gamma^0, \quad (3.56)$$

где $\phi_{\mathbf{q}} = g_{\mathbf{q}}/|g_{\mathbf{q}}|$. Гамильтониан квадратичного взаимодействия изгибных фононов с электронами (3.55) естественным образом разделяется, с одной стороны, на части, соответствующие влиянию деформационного потенциала и модуляции интеграла перескока, а с другой стороны — на части, соответствующие процессам взаимодействия, оставляющим электрон в его долине ($\mathbf{Q} = \mathbf{\Gamma}$), и процессам взаимодействия, перебрасывающим электрон в другую долину ($\mathbf{Q} = \pm\mathbf{K}$).

3.3 Описание электронного спаривания

3.3.1 Уравнения Горькова

Для описания спаривания ультрарелятивистских электронов в графене будем использовать диаграммную технику, основанную на четырехкомпонентных операторах (3.35) и в чем-то похожую на технику, используемую в квантовой электродинамике. Мы можем ввести мацубаровскую функцию Грина $G(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T\Psi_{\mathbf{p}}(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}}(0)\rangle$, являющуюся матрицей (4×4) . Однако, наряду с такой нормальной функцией Грина, для описания спаривания нам понадобятся аномальные функции Грина. Для того, чтобы их ввести, воспользуемся формализмом зарядового сопряжения. Следуя работе [167], введем набор четырех матричных функций Грина вида

$$G_{ij}(\mathbf{p}, \tau) = \begin{pmatrix} -\langle T\Psi_{\mathbf{p}}(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}}(0)\rangle & -\langle T\Psi_{\mathbf{p}}(\tau)\bar{\Psi}_{C\mathbf{p}}(0)\rangle \\ -\langle T\Psi_{C\mathbf{p}}(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}}(0)\rangle & -\langle T\Psi_{C\mathbf{p}}(\tau)\bar{\Psi}_{C\mathbf{p}}(0)\rangle \end{pmatrix}_{ij}, \quad (3.57)$$

где $\Psi_{C\mathbf{p}}(\tau) = C\bar{\Psi}_{-\mathbf{p}}^T(\tau)$ — зарядово сопряженный биспинор, $C = i\gamma^2\gamma^0$ — матрица зарядового сопряжения. Диагональные элементы (3.57), G_{11} и G_{22} , являются функциями Грина частиц и «античастиц», а антидиагональные элементы G_{12} и G_{21} описывают конденсат куперовских пар. Различные элементы G_{ij} связаны между собой соотношениями, следующими из их определений: $G_{22}(\mathbf{p}, \tau) = C^{-1} [G_{11}(-\mathbf{p}, -\tau)]^T C$ и

$$G_{21}(\mathbf{p}, \tau) = \gamma^0 [G_{12}(\mathbf{p}, -\tau)]^+ \gamma^0. \quad (3.58)$$

Как следует из (3.38), функции Грина свободного движения частиц равны

$$\begin{aligned} G_{11}^{(0)}(p) &= \frac{1}{\gamma^0(p_0 + \mu) - v_F\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}} = \frac{\gamma^0(p_0 + \mu) - v_F\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{(p_0 + \mu)^2 - v_F^2\mathbf{p}^2}, \\ G_{22}^{(0)}(p) &= \frac{1}{\gamma^0(p_0 - \mu) - v_F\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}} = \frac{\gamma^0(p_0 - \mu) - v_F\boldsymbol{\gamma}\mathbf{p}}{(p_0 - \mu)^2 - v_F^2\mathbf{p}^2}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где введен 3-импульс $p = \{p_0 = i\pi T(2n + 1), \mathbf{p}\}$, а μ — химический потенциал в графене.

Пользуясь функциями Грина (3.57) и гамильтонианами взаимодействия электронов с плоскими (3.46) и изгибными (3.55) фононами, запишем уравнения Горькова [172] в пренебрежении нормальными собственными энергиями (см. также [167, 168, 169, 170]):

$$G_{11} = G_{11}^{(0)} + G_{11}^{(0)}\Delta_{12}G_{21}, \quad G_{22} = G_{22}^{(0)} + G_{22}^{(0)}\Delta_{21}G_{12}, \quad (3.60)$$

$$G_{12} = G_{11}^{(0)}\Delta_{12}G_{22}, \quad G_{21} = G_{22}^{(0)}\Delta_{21}G_{11}. \quad (3.61)$$

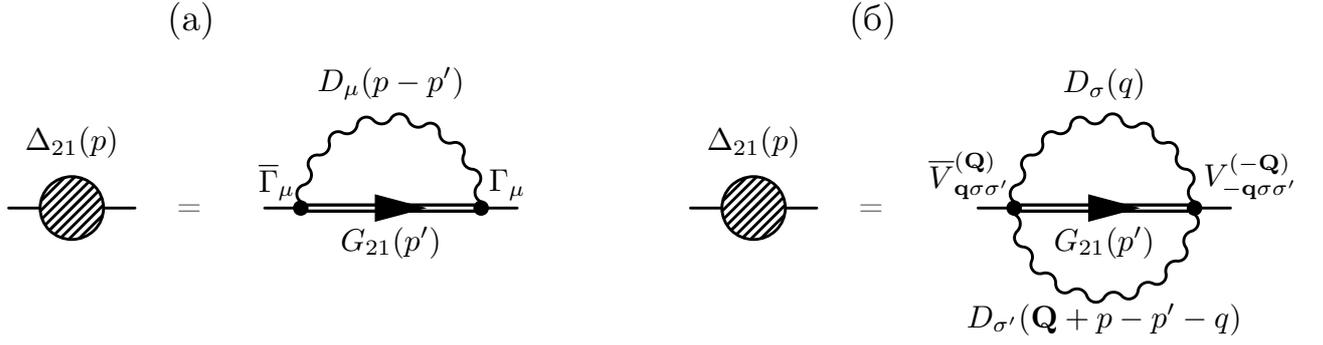


Рис. 3.4. Диаграммное представление уравнений для щели (3.62) и (3.63) для случаев спаривания под действием, соответственно, плоских (а) и изгибных (б) фононов.

Здесь все G_{ij} и Δ_{ij} являются матрицами (4×4) , зависящими от 3-импульса $p = \{p_0, \mathbf{p}\}$. В случае спаривания посредством плоских фононов аномальные собственно-энергетические части Δ_{12} и Δ_{21} задаются выражениями (см. Рис. 3.4(а)):

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(p) &= -\frac{T}{S} \sum_{p'\mu} g_\mu^2 D_\mu(p-p') \Gamma_\mu G_{12}(p') \bar{\Gamma}_\mu, \\ \Delta_{21}(p) &= -\frac{T}{S} \sum_{p'\mu} g_\mu^2 D_\mu(p-p') \bar{\Gamma}_\mu G_{21}(p') \Gamma_\mu,\end{aligned}\quad (3.62)$$

где суммирование по p' подразумевает суммирование по дискретным значениям импульса $\mathbf{p}' = (2\pi/\sqrt{S})\{n'_x, n'_y\}$ и по мадубаровским частотам $p_0 = i\pi T(2n+1)$; функция Грина плоских фононов равна $D_\mu(q) = 2\omega_{\mathbf{q}\mu}/(q_0^2 - \omega_{\mathbf{q}\mu}^2)$. Здесь введены также зарядово-сопряженные вершины $\bar{\Gamma}_\mu = C^{-1}\Gamma_\mu C$ (для вершин (3.47) получим $\bar{\Gamma}_{1,3,4} = \Gamma_{1,3,4}$, $\bar{\Gamma}_2 = -\Gamma_2$).

В случае спаривания электронов под действием изгибных фононов с гамильтонианом взаимодействия (3.55) уравнения для щелей в (3.60)–(3.61) имеют более сложный вид из-за квадратичного характера взаимодействия (см. Рис. 3.4(б)):

$$\begin{aligned}\Delta_{12}(p) &= \frac{2T^2}{S^2} \sum_{p'q} \sum_{\mathbf{Q}\sigma\sigma'} D_\sigma(q) D_{\sigma'}(\mathbf{Q} + p - p' - q) V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})} G_{12}(p') \bar{V}_{-\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(-\mathbf{Q})}, \\ \Delta_{21}(p) &= \frac{2T^2}{S^2} \sum_{p'q} \sum_{\mathbf{Q}\sigma\sigma'} D_\sigma(q) D_{\sigma'}(\mathbf{Q} + p - p' - q) \bar{V}_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})} G_{21}(p') V_{-\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(-\mathbf{Q})},\end{aligned}\quad (3.63)$$

где введены зарядово-сопряженные вершины $\bar{V}_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})} = C^{-1}[V_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})}]^T C$ (вклады в вершины (3.56), происходящие от модуляции интеграла перескока, не меняются при зарядовом сопряжении, а вклады деформационного потенциала меняют знак).

Обсудим теперь метод решения матричных уравнений Горькова (3.60)–(3.61), которые

мы перепишем в виде:

$$G_{11}^{-1} = G_{11}^{(0)-1} - \Delta_{12} G_{22}^{(0)} \Delta_{21}, \quad G_{22}^{-1} = G_{22}^{(0)-1} - \Delta_{21} G_{11}^{(0)} \Delta_{12}, \quad (3.64)$$

$$G_{12} = G_{11}^{(0)} \Delta_{12} G_{22}, \quad G_{21} = G_{22}^{(0)} \Delta_{21} G_{11}. \quad (3.65)$$

Подобные уравнения рассматривались, например, в работах [167, 168] применительно к обобщениям модели Намбу-Ионы-Лазинио и к задачам о спаривании в кварковой материи (см. также обзорную работу [77] и цит. лит.). Способ решения таких уравнений может быть следующим: 1) из физических соображений мы постулируем некоторый вид параметров порядка Δ_{ij} , при котором они имеют определенную матричную структуру и параметризуются набором переменных или функций; 2) с этими Δ_{ij} мы решаем уравнения (3.64), находя обращенные нормальные функции Грина G_{ii}^{-1} ; 3) обращая матрицы G_{ii}^{-1} , определяем G_{ii} и подставляем их в уравнения (3.65), находя аномальные функции Грина $G_{i \neq j}$; 4) подставляя $G_{i \neq j}$ в уравнения самосогласования (3.62)–(3.63), мы получаем замкнутую систему уравнений для величин, параметризующих Δ_{ij} . При этом матричная структура параметров порядка Δ_{ij} должна совпадать с обеих частях уравнений (3.62)–(3.63). Это происходит, вообще говоря, не при любом виде Δ_{ij} , принимаемом в первом пункте.

Возможность существования параметров порядка различной симметрии и матричной структуры при спаривании релятивистских частиц обсуждалась в работе [208], а в работах [200, 209] — применительно к графену. В работах [168, 169, 170] были рассмотрены все возможные виды параметра порядка, которые выражаются в виде комбинации гамма-матриц и допускают самосогласованное решение уравнений для щели в случае контактного потенциала спаривания, скалярного по свойствам симметрии (т.е., с вершиной взаимодействия $\Gamma = I$). В работе [167] использовалось скалярное взаимодействие с конечным радиусом, а параметр порядка представлялся в виде разложения по операторам проецирования на состояния частиц с определенными киральностью и спиральностью. Мы используем для нашей задачи в чем-то похожий подход, перекликающийся, кроме того, с рассмотрением диагонального по зонам спаривания в бислое графена, проведенным во второй главе диссертации.

3.3.2 Структура параметра порядка

По аналогии с [167], введем операторы проецирования на состояния электронов определенной киральности $c = \pm 1$ и спиральности $h = \pm 1$:

$$\mathcal{P}_{ch}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1 + c\gamma^5}{2} \times \frac{1 + h\gamma^5\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}}}{2}, \quad (3.66)$$

где $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/p$ — единичный вектор, направленный в сторону вектора импульса \mathbf{p} . Применительно к графену, киральность электрона соответствует долине, в которой он находится: состояния в долине \mathbf{K} имеют киральность $+1$, состояния в долине \mathbf{K}' — киральность -1 . Для частиц с положительной энергией (т.е., для электронов в зоне проводимости) киральность и спиральность совпадают, а для частиц с отрицательной энергией (электроны в валентной зоне) киральность и спиральность противоположны. Руководствуясь этими соображениями, построим операторы, осуществляющие проекцию на зону проводимости ($s = +1$) и валентную зону ($s = -1$):

$$\tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}}) = \mathcal{P}_{c,sh}(\hat{\mathbf{p}}) + \mathcal{P}_{-c,-sh}(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{1 + s\gamma^0\boldsymbol{\gamma}\hat{\mathbf{p}}}{2}. \quad (3.67)$$

Рассмотрим, как и во второй главе, диагональное по зонам s -волновое спаривание. Пусть $\Delta_+(p)$ — щель в зоне проводимости, $\Delta_-(p)$ — щель в валентной зоне. По аналогии с [167], при помощи проекционных операторов (3.67) мы можем построить следующую матрицу щели: $\Delta_0(p) = \tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\Delta_+(p) + \tilde{\mathcal{P}}_-(\hat{\mathbf{p}})\Delta_-(p)$. Если приравнять $\Delta_{21} = \Delta_0$, то, как нетрудно проверить при помощи уравнений (3.64)–(3.65) и выражения (3.57), параметр порядка G_{21} будет соответствовать диагональному по долинам спариванию, при котором величины параметры порядка в обеих долинах совпадают (иными словами, параметр порядка в пространстве долин будет иметь вид единичной матрицы). Однако мы рассмотрим параметр порядка более общего вида с произвольной структурой в пространстве долин. Для этого заметим, что операторы $T_1 = \gamma^5$, $T_2 = \gamma^3\gamma^5$, $T_3 = i\gamma^3$ коммутируют с проекционными операторами (3.67) и обладают алгеброй матриц Паули $[T_i, T_j] = 2i\epsilon_{ijk}T_k$ (см. [200]). Набор таких операторов позволяет производить вращения параметра порядка Δ_0 в пространстве долин, оставляя неизменной его структуру в пространстве зон.

Чтобы показать это наглядно, перейдем в представление собственных векторов ψ_{ch} гамильтониана (3.36) и операторов (3.66), которые обладают определенной киральностью

с и спиральностью h :

$$\psi_{+h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} \\ he^{i\varphi/2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi_{-h} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-i\varphi/2} \\ he^{i\varphi/2} \end{pmatrix}.$$

В базисе $\{\psi_{++}, \psi_{+-}, \psi_{-+}, \psi_{--}\}$ этих векторов диагональный по зонам параметр порядка с произвольной долиной структурой, задаваемой унитарной матрицей $(2 \times 2) \|S_{ij}\|$, должен иметь вид:

$$\Delta_{21} = \begin{pmatrix} S_{11}\Delta_+ & 0 & 0 & S_{12}\Delta_+ \\ 0 & S_{11}\Delta_- & S_{12}\Delta_- & 0 \\ 0 & S_{21}\Delta_- & S_{22}\Delta_- & 0 \\ S_{21}\Delta_+ & 0 & 0 & S_{22}\Delta_+ \end{pmatrix}. \quad (3.68)$$

С другой стороны, проекционные операторы (3.67) и генераторы вращений T_i в этом же представлении имеют вид:

$$\tilde{\mathcal{P}}_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{P}}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что операторы $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}$ имеют вид единичных операторов в секторах зоны проводимости (1-е и 4-е строка и столбец) и валентной зоны (2-е и 3-е строка и столбец), в то время как T_i имеют вид матриц Паули в этих секторах. Следовательно, матрица параметра порядка

$$\Delta_{21}(p) = e^{i\mathbf{v}\mathbf{T}} \left[\tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\Delta_+(p) + \tilde{\mathcal{P}}_-(\hat{\mathbf{p}})\Delta_-(p) \right], \quad (3.69)$$

получаемая из Δ_0 $SU(2)$ -вращением в пространстве долин, которое производится при помощи генераторов T_i и параметризуется трехмерным вектором \mathbf{v} , будет иметь нужный

нам вид (3.68) при условии $S = \exp\{i(v_1\sigma_z + v_2\sigma_x + v_3\sigma_y)\}$. Следовательно, операторы T_i действительно вращают параметр порядка в пространстве долин при неизменности структуры по зонам.

Отметим, что в выражении (3.69) мы ограничились случаем общей в обеих зонах долиной структурой параметра порядка, хотя можно было бы рассмотреть случай различных долинных структур $\|S_{ij}\|$ (см. (3.68)) в неприводимых подпространствах зоны проводимости и валентной зоны. В таком случае понадобилось бы два набора операторов, осуществляющих независимые вращения в различных зонах и имеющих вид $T_i^{(\pm)} = T_i\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}$.

Итак, выбирая (3.69) в качестве параметра порядка, параметризуемого вектором \mathbf{v} и двумя функциями $\Delta_{\pm}(p)$, подставим его в уравнения Горькова (3.64). Для нахождения Δ_{12} используем свойство (3.58); проводя калибровочное преобразование, можно добиться того, что при всех частотах p_0 будет выполняться следующее из него с учетом (3.62)–(3.63) равенство $\Delta_{12}(p) = \gamma^0 [\Delta_{21}(p)]^+ \gamma^0$. Функции Грина свободного движения (3.59) можно представить в виде разложения по операторам (3.67): $G_{11}^{(0)}(p) = \sum_s \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}})\gamma^0/[p_0 - \xi_s(p)]$, $G_{22}^{(0)}(p) = \sum_s \gamma^0 \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}})/[p_0 + \xi_s(p)]$, где, как и раньше, $\xi_s(p) = sv_F|\mathbf{p}| - \mu$. Подставляя с учетом этого (3.69) в (3.64) и далее в (3.65), получим нормальные и аномальные функции Грина в системе со спариванием:

$$\begin{aligned} S_{11}(p) &= \sum_s \frac{p_0 + \xi_s(\mathbf{p})}{p_0^2 - E_s^2(p)} \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}})\gamma^0, & S_{22}(p) &= \sum_s \frac{p_0 - \xi_s(\mathbf{p})}{p_0^2 - E_s^2(p)} \gamma^0 \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}}), \\ S_{12}(p) &= \sum_s \frac{\Delta_s^*(p)}{p_0^2 - E_s^2(p)} e^{-i\mathbf{v}\mathbf{T}} \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}}), & S_{21}(p) &= \sum_s \frac{\Delta_s(p)}{p_0^2 - E_s^2(p)} \gamma^0 e^{i\mathbf{v}\mathbf{T}} \tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}})\gamma^0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Здесь введены энергии боголюбовских возбуждений в зоне проводимости и валентной зоне $E_s(p) = \sqrt{\xi_s^2(p) + \Delta_s^2(p)}$.

3.3.3 Спаривание под действием плоских фононов

Подставим теперь аномальные функции Грина (3.70) в уравнения самосогласования (3.62), описывающие спаривание электронов под действием плоских фононов. Умножая обе части получающихся матричных уравнений на $\tilde{\mathcal{P}}_{\pm}(\hat{\mathbf{p}})$ и вычисляя их след, получим систему уравнений для щелей Δ_{\pm}

$$\Delta_s(p) = \frac{T}{S} \sum_{p'\mu t} g_{\mu}^2 D_{\mu}(p-p') \frac{\Delta_t(p')}{p_0'^2 - E_t^2(p')} R_{st}^{\mu}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}), \quad (3.71)$$

где введены *угловые факторы*

$$R_{st}^\mu(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) = -\frac{1}{2} \text{Sp} \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{T}} \bar{\Gamma}_\mu \gamma^0 e^{i\mathbf{v}\mathbf{T}} \tilde{\mathcal{P}}_t(\hat{\mathbf{p}}') \gamma^0 \Gamma_\mu \right]. \quad (3.72)$$

Вычисляя их для всех фононных мод с вершинами (3.47), получим

$$\begin{aligned} R_{st}^1(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) &= \left[-\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_2^2) \sin^2 v \right] \frac{1 - st\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2}, \\ R_{st}^2(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) &= \left[-\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_3^2) \sin^2 v \right] \frac{1 - st\hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}'}{2}, \\ R_{st}^3(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) &= \left[-\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_1^2) \sin^2 v \right] \frac{1 - st(\hat{p}_x\hat{p}'_x - \hat{p}_y\hat{p}'_y)}{2}, \\ R_{st}^4(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) &= \left[-\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_1^2) \sin^2 v \right] \frac{1 + st(\hat{p}_x\hat{p}'_x - \hat{p}_y\hat{p}'_y)}{2}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Уравнения самосогласования (3.71) похожи на многозонные уравнения для щели (3.4)–(3.5), послужившие исходной точкой для вывода и решения уравнений Элиашберга, проведенного в предыдущем разделе. Отличие заключается в том, что принятое в предыдущем разделе эффективное электрон-электронное взаимодействие

$$V_{\gamma\gamma'}^{(\text{eff})}(p, p') = \sum_\lambda |g_{\mathbf{p}\mathbf{p}'\lambda}|^2 |\langle f_{\mathbf{p}'\gamma'} | f_{\mathbf{p}\gamma} \rangle|^2 D_\lambda(p - p'),$$

возникающее в результате обмена фононами во втором порядке теории возмущения, в нашем случае заменяется на

$$V_{st}^{(\text{eff})}(p, p') = \sum_\mu R_{st}^\mu(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) g_\mu^2 D_\mu(p - p'). \quad (3.74)$$

Как видно, эффективное взаимодействие (3.74) является линейной комбинацией взаимодействий $g_\mu^2 D_\mu(p - p')$, индуцируемых каждой фононной модой, с коэффициентами $R_{st}^\mu(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v})$, зависящими от векторного параметра \mathbf{v} . В то время, как индуцированное фононами во втором порядке теории возмущения взаимодействие между электронами является притягивающим, вклад каждой μ -й моды в эффективное взаимодействие в нашем случае может быть как притягивающим (если $R_{st}^\mu > 0$), так и отталкивающим (если $R_{st}^\mu < 0$). Легко убедиться, что каждый коэффициент R_{st}^μ может принимать значения в диапазоне от -1 до 1 .

Мы будем рассматривать случай сильного допирования, изученный ранее в подразделе 3.1.3, поскольку сильное допирование позволяет добиться наивысших значений константы связи за счет больших \mathcal{N} . Такой случай будет реализовываться при $\mu > \omega_\mu$, т.е., при $\mu > 0.2$ эВ. Проведем с уравнениями (3.71) такие же операции, как и при выводе уравнений

Элиашберга (3.9)–(3.10), но для случая $T = 0$. Используя подстановку (3.12), получим следующее уравнение для величины щели в спектре Δ :

$$1 = 2 \int_0^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} \int_0^{\infty} d\nu \frac{\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu) F(\nu)}{\omega + \nu}. \quad (3.75)$$

Зависящая от параметра \mathbf{v} функция Элиашберга в нашем случае равна:

$$\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu) F(\nu) = \mathcal{N} g_{\mathbf{K}}^2 R_{\mathbf{K}}(\mathbf{v}) \delta(\nu - \omega_{\mathbf{K}}) + \mathcal{N} g_{\mathbf{\Gamma}}^2 R_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{v}) \delta(\nu - \omega_{\mathbf{\Gamma}}). \quad (3.76)$$

Здесь мы учли тот факт, что фононные моды 1, 2 и 3, 4 попарно вырождены и обладают одинаковыми частотами и константами связи $g_1 = g_2 \equiv g_{\mathbf{K}}$ и $g_3 = g_4 = g_{\mathbf{\Gamma}}$ внутри каждой пары. Учитывая, что моды оптические и поэтому интегрирование по углу вектора \mathbf{p}' выполняется тривиально, таким же образом можно объединить угловые факторы (3.73):

$$R_{\mathbf{K}}(\mathbf{v}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \left[R_{++}^1(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) + R_{++}^2(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) \right] = -\cos^2 v + \hat{v}_1^2 \sin^2 v, \\ R_{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{v}) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{2\pi} \left[R_{++}^3(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) + R_{++}^4(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{p}}'; \mathbf{v}) \right] = -\cos^2 v + (1 - 2\hat{v}_1^2) \sin^2 v. \quad (3.77)$$

Рассмотрим выделенные случаи структуры параметра порядка в пространстве долин. При $\mathbf{v} = 0$ спаривание диагонально по долинам, и в разных долинах значения параметра порядка совпадают (т.е., параметр порядка в пространстве долин $\{\mathbf{K}, \mathbf{K}'\}$ является единичной матрицей (2×2)). В этом случае $R_{\mathbf{K}} = R_{\mathbf{\Gamma}} = -1$ и все фононные моды производят эффективное отталкивание. Если $\mathbf{v} = \{\pi/2, 0, 0\}$, спаривание также диагонально по долинам, но с противоположными знаками параметра порядка в разных долинах; при этом $R_{\mathbf{K}} = 1$, $R_{\mathbf{\Gamma}} = -1$, т.е. \mathbf{K} -фононы осуществляют притяжение, а $\mathbf{\Gamma}$ -фононы — отталкивание. В случаях $\mathbf{v} = \{0, \pi/2, 0\}$ и $\mathbf{v} = \{0, 0, \pi/2\}$ спаривание антидиагонально по долинам (параметр порядка представлен матрицами σ_x и σ_y соответственно в пространстве долин), $\mathbf{\Gamma}$ -фононы осуществляют притяжение ($R_{\mathbf{\Gamma}} = 1$), а вклады 1-й и 2-й моды \mathbf{K} -фононов (3.73) взаимно компенсируются, так что $R_{\mathbf{K}} = 0$.

Итак, спаривание электронов в графене под действием плоских оптических фононов в случае сильного допирования описывается уравнениями (3.75)–(3.76), решение которых в подстановке (3.12) и в пределе $\Delta \ll \omega_0 \sim \omega_{\mu}$ дает выражение для щели при нулевой температуре:

$$\Delta \approx \frac{2\omega_0}{\prod_{\mu=\mathbf{K}, \mathbf{\Gamma}} (1 + \omega_0/\omega_{\mu})^{\lambda_{\mu}/\lambda}} \exp \left\{ -\frac{1}{\lambda} \right\}.$$

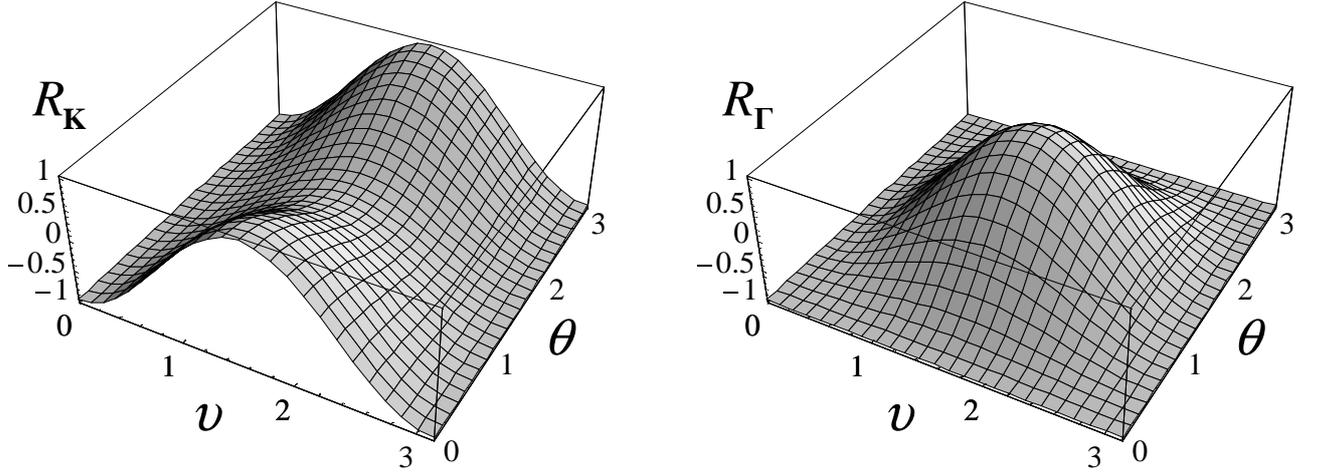


Рис. 3.5. Угловые факторы (3.77) для **K**- и **Г**-фононов как функции модуля вектора \mathbf{v} и угла θ между \mathbf{v} и осью z .

Здесь мы ввели парциальные $\lambda_\mu = 2\mathcal{N}g_\mu^2 R_\mu(\mathbf{v})/\omega_\mu$ и суммарную $\lambda = \lambda_{\mathbf{K}} + \lambda_{\mathbf{\Gamma}}$ константы связи. При спаривании структура параметра порядка \mathbf{v} сама будет подстраиваться таким образом, чтобы обеспечить максимальную величину λ и, следовательно, максимальную энергию конденсации куперовских пар.

Заметим, что определяющие величину λ угловые факторы (3.77), фактически, зависят только от двух переменных: модуля v вектора \mathbf{v} и угла θ между \mathbf{v} и осью z ($\hat{\mathbf{v}}_1 = \cos \theta$). Зависимости R_μ от v и θ изображены на Рис. 3.5. Как видно, наиболее выгодной для спаривания является линия $v = \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi$, на которой оба R_μ максимальны. При этом суммарная константа связи равна

$$\lambda = \mathcal{N} \left\{ \frac{g_{\mathbf{K}}^2}{\omega_{\mathbf{K}}} + \left(\frac{g_{\mathbf{K}}^2}{\omega_{\mathbf{K}}} - 2\frac{g_{\mathbf{\Gamma}}}{\omega_{\mathbf{\Gamma}}} \right) \cos 2\theta \right\}. \quad (3.78)$$

Если $g_{\mathbf{K}}^2/\omega_{\mathbf{K}} > 2g_{\mathbf{\Gamma}}/\omega_{\mathbf{\Gamma}}$, то (3.78) будет максимальным при $\theta = 0$, когда спаривание является диагональным по долинам: $\mathbf{v} = \{\pi/2, 0, 0\}$. В противоположном случае $g_{\mathbf{K}}^2/\omega_{\mathbf{K}} < 2g_{\mathbf{\Gamma}}/\omega_{\mathbf{\Gamma}}$ максимум (3.78) будет при $\theta = \pi/2$, и спаривание будет антидиагональным по долинам: $\mathbf{v} = \{0, (\pi/2) \cos \varphi, (\pi/2) \sin \varphi\}$.

Взяв значения констант связи из работы [85], будем иметь $g_{\mathbf{K}}^2/\omega_{\mathbf{K}} \approx 12.02 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}^2$, $g_{\mathbf{\Gamma}}^2/\omega_{\mathbf{\Gamma}} \approx 3.75 \text{ эВ} \cdot \text{\AA}^2$. Следовательно, предпочтительным будет спаривание с параметром порядка $\mathbf{v} = \{\pi/2, 0, 0\}$, при котором происходит конкуренция притяжения, вызываемого **K**-фононами, с отталкиванием, вызываемым **Г**-фононами (заметим однако, что эта ситуация может поменяться в случае большой диэлектрической проницаемости окружающей

среды, поскольку $g_{\mathbf{k}}$ существенно перенормируется в сторону больших значений из-за влияния кулоновского взаимодействия [86]). Суммарная константа связи (3.78) в этом случае равна $\lambda \approx 0.065 \times \mu$ [эВ]; спаривание со сколь-нибудь заметной критической температурой (градусы Кельвина) возможно только при сильном химическом допировании графена [133], при котором $\mu \approx 1.5 - 2$ эВ.

Как отмечалось выше, рассмотренный случай сильного допирования имеет место при $\mu > 0.2$ эВ и концентрации электронов $n > 2 \times 10^{12}$ см $^{-2}$. Если $n \sim 10^{12}$ см $^{-2}$, то система находится в области кроссовера от однозонного режима спаривания к многозонному, а при $n \ll 10^{12}$ см $^{-2}$ система находится в окрестности квантовой критической точки недопированного графена по константе связи, рассмотренной в подразделе 3.1.4. Соответствующая константа связи (3.26) при $\mathbf{v} = \{\pi/2, 0, 0\}$ составляет около $G \approx 0.008$, что очень далеко от критического значения (3.29) при условии $\omega_0 \sim \omega_{\mathbf{k}}, \omega_{\Gamma}$.

3.3.4 Спаривание под действием изгибных фононов

Для рассмотрения электрон-электронного спаривания в графене под действием изгибных фононов будем отправляться от уравнений самосогласования (3.63) с учетом вершин взаимодействия (3.56). Как и в предыдущем подразделе, примем параметр порядка вида (3.69), при котором функции Грина задаются выражениями (3.70). В уравнениях (3.63) сразу же можно выполнить суммирование по $q_0 = 2\pi i T n$ — частоте внутри фононной петли (см. Рис. 3.4(б)). В пределе $T = 0$ сумма

$$T \sum_{q_0} D_{\sigma}(q) D_{\sigma'}(\mathbf{Q} + \mathbf{p} - \mathbf{p}' - q) = - \frac{2(\omega_{\mathbf{q}\sigma} + \omega_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q},\sigma'})}{(p_0 - p'_0)^2 - (\omega_{\mathbf{q}\sigma} + \omega_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q},\sigma'})^2}$$

имеет вид функции Грина (со знаком «минус») фонона, частота которого равна сумме частот двух фононов, входящих в петлю. Это обстоятельство позволяет осуществить вывод уравнений самосогласования для щелей $\Delta_{\pm}(p)$ и далее уравнений Элиашберга для случая сильного допирования по аналогии с выводом уравнений (3.71) и (3.75). Аналогом уравнений (3.71)–(3.72) в случае изгибных фононов будет

$$\Delta_s(p) = - \frac{2T}{S^2} \sum_{p't\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{Q}\sigma\sigma'} \frac{\Delta_t(p')}{p_0'^2 - E_t^2(p')} \frac{2(\omega_{\mathbf{q}\sigma} + \omega_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q},\sigma'})}{(p_0 - p'_0)^2 - (\omega_{\mathbf{q}\sigma} + \omega_{\mathbf{Q}+\mathbf{p}-\mathbf{p}'-\mathbf{q},\sigma'})^2} \times \\ \times \frac{1}{2} \text{Sp} \left[\tilde{\mathcal{P}}_s(\hat{\mathbf{p}}) e^{-i\mathbf{v}\mathbf{T}\bar{V}_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})}} \gamma^0 e^{i\mathbf{v}\mathbf{T}\tilde{\mathcal{P}}_t(\hat{\mathbf{p}}')} \gamma^0 V_{-\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(-\mathbf{Q})} \right].$$

Соответственно, уравнение Элиашберга для случая сильного допирования будет в нашем случае выглядеть так же, как уравнение (3.75), но выражение для функции Элиашберга

будет более сложным:

$$\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu)F(\nu) = -\frac{\mathcal{N}}{S} \sum_{\mathbf{q}\mathbf{Q}} \sum_{\sigma\sigma'} \delta(\nu - \omega_{\mathbf{q}\sigma} - \omega_{\mathbf{Q}-\mathbf{q},\sigma'}) \frac{1}{4} \text{Sp} \left[e^{-i\nu\mathbf{T}} \bar{V}_{\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(\mathbf{Q})} \gamma^0 e^{i\nu\mathbf{T}} \gamma^0 V_{-\mathbf{q}\sigma\sigma'}^{(-\mathbf{Q})} \right]. \quad (3.79)$$

Здесь мы провели интегрирование по углу вектора \mathbf{p}' и пренебрегли слабой зависимостью частот фононов от разности импульсов электронов $\mathbf{p}' - \mathbf{p}$.

Подставляя вершины (3.56) в (3.79) и производя суммирование по \mathbf{q} в пределах второй зоны Бриллюэна, получим функцию Элиашберга в виде суммы четырех слагаемых:

$$\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu)F(\nu) = \sum_{\mu=1}^4 R_{\mu}(\mathbf{v})E_{\mu}(\nu). \quad (3.80)$$

Пары слагаемых $\mu = 1, 2$ и $\mu = 3, 4$ отвечают, соответственно, деформационному потенциалу и модуляции интеграла перескока. С другой стороны, пары слагаемых $\mu = 1, 3$ и $\mu = 2, 3$ отвечают, соответственно, процессам, оставляющим взаимодействующие электроны в их прежних долинах и перебрасывающим их в противоположные долины. Угловые факторы для изгибных фононов равны

$$\begin{aligned} R_1(\mathbf{v}) &= 1, & R_2(\mathbf{v}) &= (-\hat{\mathbf{v}}_2^2 + \hat{\mathbf{v}}_3^2) \sin^2 v, \\ R_3(\mathbf{v}) &= -\cos^2 v + (1 - 2\hat{\mathbf{v}}_1^2) \sin^2 v, & R_4(\mathbf{v}) &= -\cos^2 v + \hat{\mathbf{v}}_1^2 \sin^2 v, \end{aligned} \quad (3.81)$$

а парциальные функции Элиашберга вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} E_1(\omega) &= \frac{\mathcal{N}}{S} \left(\frac{a^2 C_1}{4M} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}\sigma} \frac{(3 - \sigma|g_{\mathbf{q}}|)^2}{\omega_{\mathbf{q}\sigma}^2} \delta(\nu - 2\omega_{\mathbf{q}\sigma}), \\ E_2(\omega) &= \frac{\mathcal{N}}{S} \left(\frac{a^2 C_1}{4M} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}\sigma\sigma'} \frac{(3 - \sigma|g_{\mathbf{q}}| - \sigma'|g_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}|)^2}{4\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\sigma'}} \delta(\nu - \omega_{\mathbf{q}\sigma} - \omega_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\sigma'}), \\ E_3(\omega) &= \frac{\mathcal{N}}{S} \left(\frac{a^2 C_2}{4M} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}\sigma\sigma'} \frac{|\sigma g_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}\phi_{-\mathbf{q}} + \sigma' g_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}\phi_{\mathbf{q}}|^2}{4\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{q}\sigma'}} \delta(\nu - \omega_{\mathbf{q}\sigma} - \omega_{\mathbf{q}\sigma'}), \\ E_4(\omega) &= \frac{\mathcal{N}}{S} \left(\frac{a^2 C_2}{4M} \right)^2 \sum_{\mathbf{q}\sigma\sigma'} \frac{|\sigma g_{-\mathbf{K}+\mathbf{q}}\phi_{-\mathbf{q}} + \sigma' g_{\mathbf{K}-\mathbf{q}}\phi_{\mathbf{K}+\mathbf{q}}|^2}{4\omega_{\mathbf{q}\sigma}\omega_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\sigma'}} \delta(\nu - \omega_{\mathbf{q}\sigma} - \omega_{\mathbf{K}+\mathbf{q},\sigma'}). \end{aligned} \quad (3.82)$$

Обезразмеренные функции Элиашберга $\tilde{E}_{1,2}(x) = (16a^2\sqrt{MD^3}/3\mathcal{N}g^2)E_{1,2}(x\sqrt{D/M})$, отвечающие взаимодействию электронов с доминирующим [201, 88] деформационным потенциалом и вычисленные с использованием характеристик фононов (3.51), представлены на Рис. 3.6.

Для удобства перепишем уравнение Элиашберга (3.75) в следующем виде:

$$1 = \int_{\Delta}^{\omega_0} \frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2 - \Delta^2}} Z(\omega; \mathbf{v}), \quad Z(\omega; \mathbf{v}) = \int_0^{\infty} d\nu \frac{\alpha_{\mathbf{v}}^2(\nu)F(\nu)}{\omega + \nu}. \quad (3.83)$$

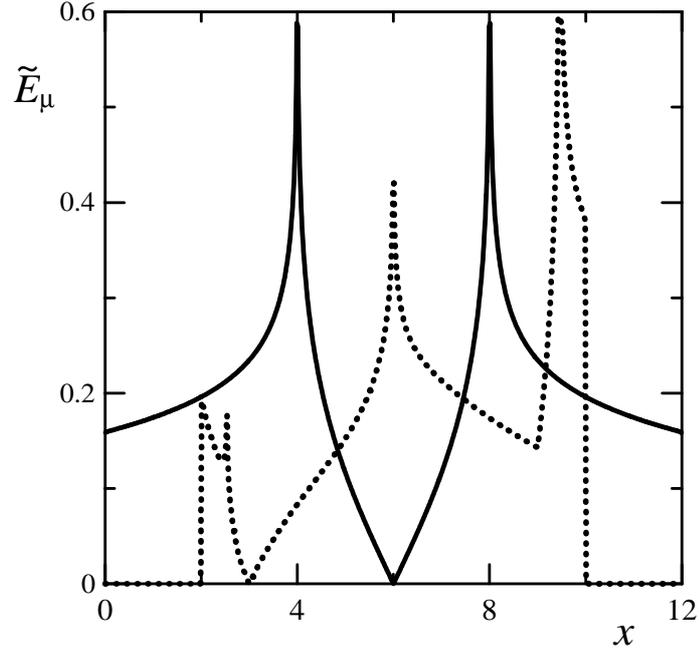


Рис. 3.6. Обезразмеренные парциальные функции Элиашберга изгибных фононов, взаимодействующих с электронами посредством деформационного потенциала. Показаны вклады двухфононных процессов, оставляющих электроны с их долинах (\tilde{E}_1 , сплошная линия), и процессов, приводящих к перебросу электронов в противоположные долины (\tilde{E}_2 , пунктир).

По аналогии с (3.80), функция $Z(\omega; \mathbf{v}) = \sum_{\mu=1}^4 R_{\mu}(\mathbf{v}) Z_{\mu}(\omega)$ представляется в виде линейной комбинации парциальных функций $Z_{\mu}(\omega)$, которые могут быть обезразмерены следующим образом:

$$Z_{1,2}(\omega) = \frac{3\mathcal{N}g^2}{16a^2M^{1/2}D^{3/2}} \tilde{Z}_{1,2}\left(\frac{\omega}{\sqrt{D/M}}\right), \quad Z_{3,4}(\omega) = \frac{9\mathcal{N}\gamma^2}{32a^2M^{1/2}D^{3/2}} \tilde{Z}_{3,4}\left(\frac{\omega}{\sqrt{D/M}}\right). \quad (3.84)$$

Безразмерные функции $\tilde{Z}_{\mu}(x)$, вычисленные в модели (3.51), представлены на Рис. 3.7.

Анализируя поведение угловых факторов (3.81), найдем структуру параметра порядка $\mathbf{v} = \{0, 0, \pi/2\}$, наиболее выгодную для спаривания и обеспечивающую максимальное значение $Z(\omega; \mathbf{v})$; при этом $R_{1,2,3} = 1$, $R_4 = 0$. Для численных оценок эффективной константы связи, используя (3.84), получим $Z_{1,2}(\omega) \approx 0.002 \times \mu [\text{эВ}] \times \tilde{Z}_{1,2}(\omega/0.02 \text{ эВ})$, $Z_{3,4}(\omega) \approx 0.0007 \times \mu [\text{эВ}] \times \tilde{Z}_{3,4}(\omega/0.02 \text{ эВ})$. Так как все \tilde{Z}_{μ} имеют порядок единицы (см. Рис. 3.7), константа связи будет иметь порядок 10^{-3} при $\mathbf{v} = \{0, 0, \pi/2\}$, что не может обеспечить спаривания с наблюдаемой температурой.

Отметим, тем не менее, два важных момента. Во-первых, функции $Z_1(\omega)$ и $Z_2(\omega)$ ло-

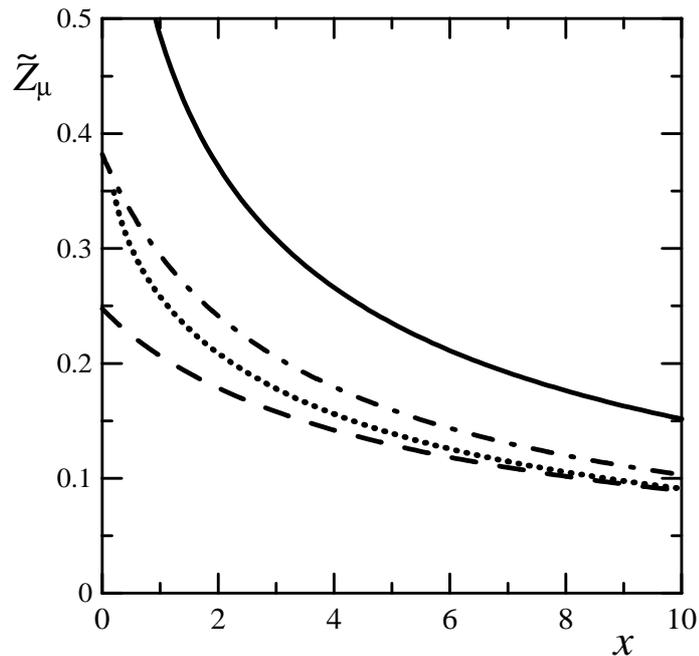


Рис. 3.7. Обезразмеренные функции $\tilde{Z}_\mu(x)$ (3.84), соответствующие функциям $Z_\mu(\omega) = \int_0^\infty E_\mu(\nu)/(\omega + \nu)$. Сплошная линия: $\mu = 1$, штриховая линия: $\mu = 2$, пунктир: $\mu = 3$, штрих-пунктир: $\mu = 4$.

гарифмически расходятся при $\omega = 0$ из-за вкладов акустических ветвей $\sigma = \sigma' = +1$ (для Z_1 это, в частности, видно из того, что $E_1(\nu)$ остается конечной при $\nu \rightarrow 0$ — см. Рис. 3.6). Эта расходимость является проявлением дальнедействующей природы эффективного электрон-электронного взаимодействия, порождаемого акустическими изгибными фононами. В работе [81] было отмечено, что взаимодействие на больших расстояниях ведет себя как $-1/r^2$. Во-вторых, в эффективное взаимодействие, вызываемое изгибными фононами, дают одинаковые по порядку величины вклады фононы обеих ветвей (акустической и оптической) и всех импульсов из первой зоны Бриллюэна. Это является проявлением квадратичного характера взаимодействия электронов с изгибными фононами, следствием которого является суммирование по фононным модам в фононной петле (см. Рис. 3.4(б)). Напротив, в случае линейного взаимодействия электронов с плоскими фононами главную роль играют только фононы с импульсами Γ и $\pm\mathbf{K}$, оставляющие электрон в прежней долине или перебрасывающие его в противоположную долину.

3.3.5 Симметрия параметра порядка с учетом спина электронов

До сих пор мы игнорировали спиновую степень свободы электронов. Введем теперь проекции спина s, s' в определение аномальных функций Грина (3.57):

$$G_{12}^{ss'}(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T\Psi_{\mathbf{p}s}(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}s'}(0)\rangle, \quad G_{21}^{ss'}(\mathbf{p}, \tau) = -\langle T\Psi_{\mathbf{p}s}(\tau)\bar{\Psi}_{\mathbf{p}s'}(0)\rangle. \quad (3.85)$$

Условие (3.58), получаемое в результате эрмитового сопряжения, с учетом спинов принимает уточненный вид: $G_{21}^{ss'}(\mathbf{p}, \tau) = \gamma^0[G_{12}^{s's}(\mathbf{p}, -\tau)]^+\gamma^0$. Однако, более важным для нас будет другое — принципиально новое — условие, получаемое из (3.85) при $\tau = 0$ перестановкой антикоммутирующих операторов электронов:

$$G_{12}^{ss'}(\mathbf{p}, 0) = C [G_{12}^{s's}(-\mathbf{p}, 0)]^T C^{-1}, \quad G_{21}^{ss'}(\mathbf{p}, 0) = C [G_{21}^{s's}(-\mathbf{p}, 0)]^T C^{-1}. \quad (3.86)$$

Подставляя (3.86) в уравнения самосогласования (3.62) и (3.63), можно убедиться, что аналогичные условия справедливы для разрешенных по проекциям спина аномальных собственно-энергетических частей $\Delta_{12}^{ss'}$ и $\Delta_{21}^{ss'}$.

В случае обычных сверхпроводников условия, аналогичные (3.86), выражают собой антисимметрию волновой функции куперовской пары относительно перестановки спаривающихся фермионов. Иными словами, волновая функция куперовской пары обладает совместной орбитально-спиновой антисимметрией: в случае орбитальной симметрии (s - или d -волновое спаривание) куперовские пары синглетны по спину (как в обычных сверхпроводниках), а при орбитальной антисимметрии (p -волновое спаривание) пары триплетны по спину (как, например, в сверхтекучем He^3).

В нашем случае, если мы выбираем параметр порядка вида (3.69), его симметрия характеризуется дополнительно структурой спаривания в пространстве долин, которая в предельных случаях может быть либо симметричной (при $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, 0\}$), либо антисимметричной ($\mathbf{v} \propto \{0, 0, 1\}$) при перестановке долин. Применяя условие (3.86), получим, что параметр порядка должен обладать совместной орбитально-спиново-долинной симметрией. Если спаривание антидиагонально и антисимметрично по долинам ($\mathbf{v} \propto \{0, 0, 1\}$), то параметр порядка должен обладать орбитально-спиновой антисимметрией, как и в обычных сверхпроводниках. Однако, если спаривание симметрично по долинам, то куперовские пары должны обладать орбитально-спиновой симметрией, т.е., s -волновое спаривание будет триплетным по спину.

Тот факт, что спаривание электронов может быть симметричным по долинам, по спину и по орбитальному движению, казалось бы, противоречит принципу Паули. Объяс-

нить возникший парадокс можно следующим образом. Рассмотрим параметр порядка вида (3.69), который диагонален по долинам ($\mathbf{v} = 0$) и, для простоты, отличен от нуля только в зоне проводимости: $\Delta_{21}^{ss'}(p) = \tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\Delta_+^{ss'}(p)$. Аномальная функция Грина, согласно (3.70), будет иметь вид $G_{21}^{ss'}(\mathbf{p}, \tau = 0) = \gamma^0 \tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\gamma^0 F_{ss'}(\mathbf{p})$. Сопоставляя его с определением (3.85) с учетом (3.35), получим

$$\begin{aligned} \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle &= -\langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle = \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = -\langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \frac{1}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}), \\ \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle &= \langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \frac{e^{i\varphi}}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}), \quad \langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle = \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = -\frac{e^{-i\varphi}}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (3.87)$$

где введены сокращения $a_{\mathbf{p}_s}^{(1)} = a_{\mathbf{K}+\mathbf{p},s}$, $a_{\mathbf{p}_s}^{(2)} = a_{\mathbf{K}'+\mathbf{p},s}$ (и аналогично для операторов b). Как говорилось выше, в случае диагонального по долинам спаривания орбитально-спиновая часть параметра порядка $F_{ss'}(\mathbf{p})$ должна быть симметрична: $F_{ss'}(\mathbf{p}) = F_{s's}(-\mathbf{p})$. Это условие согласуется с антикоммутацией фермионных операторов в выражениях (3.87). Оттуда же видна и причина орбитально-спиновой симметрии $F_{ss'}(\mathbf{p})$: аномальные средние, в которых спарены операторы электронов из разных подрешеток, меняют знак при перестановке подрешеток; в то же время, аномальные средние, включающие пары операторов электронов из одной подрешетки, благодаря множителям $e^{\pm i\varphi}$ эффективно приобретают дополнительную орбитальную антисимметрию. Таким образом, можно сказать, что параметр порядка обладает «скрытой» антисимметрией по подрешеткам на микроскопическом уровне описания, которая теряется при описании в терминах зон и долин электронов.

В том случае, если параметр порядка является антидиагональным и симметричным по долинам ($\mathbf{v} = \{0, \pi/2, 0\}$), орбитально-спиновая часть параметра порядка $F_{ss'}(\mathbf{p})$ также должна быть симметричной, но по другой причине. В этом случае будем иметь $\Delta_{21}^{ss'}(p) = i\gamma^3 \gamma^5 \tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\Delta_+^{ss'}(p)$, $G_{21}^{ss'}(\mathbf{p}, \tau = 0) = i\gamma^0 \gamma^3 \gamma^5 \tilde{\mathcal{P}}_+(\hat{\mathbf{p}})\gamma^0 F_{ss'}(\mathbf{p})$, откуда

$$\begin{aligned} \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle &= -\langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle = -\langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \frac{i}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}), \\ \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle &= \langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \frac{ie^{-i\varphi}}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}), \quad \langle b_{-\mathbf{p}_s}^{(2)+} a_{\mathbf{p}_{s'}}^{(1)+} \rangle = \langle a_{-\mathbf{p}_s}^{(1)+} b_{\mathbf{p}_{s'}}^{(2)+} \rangle = \frac{ie^{i\varphi}}{2} F_{ss'}(\mathbf{p}). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что спаривание электронов из одинаковых подрешеток в действительности антисимметрично по долинам, а спаривание электронов из разных подрешеток симметрично по долинам, но при этом приобретает дополнительную орбитальную антисимметрию. Иными словами, в данном случае также имеется «скрытая» антисимметрия параметра порядка.

Следует отметить, что сделанные в данном подразделе выводы о свойствах симметрии параметра порядка справедливы безотносительно механизма спаривания, но применимы

только к случаям диагонального по зонам спаривания. В случае других структур параметра порядка (см., напр., [168, 209]) симметрия его орбитально-спиновой части может быть иной.

3.4 Выводы

В данной главе мы рассмотрели теоретически возможность сверхпроводящего спаривания электронов, вызываемого обменом собственными фононами графена, и его особенности, обусловленные эффективно ультрарелятивистской электронной динамикой. Сначала была рассмотрена общая модель многозонного спаривания в графене без конкретизации деталей электрон-фононного взаимодействия. Были выведены многозонные уравнения Элиашберга в приближении куперовского канала, т.е. без учета кулоновского отталкивания и перенормировки нормальных свойств в результате спаривания. Аналитическое решение уравнений Элиашберга позволило найти выражения для критической температуры, служащей верхней оценкой температуры перехода Костерлица-Таулеса в сверхтекучее состояние. При этом были рассмотрены три случая: 1) случай сильного допирования, при котором спаривание охватывает малую область импульсного пространства вблизи поверхности Ферми и, фактически, является однозонным; 2) случай квантовой критической точки недопированного графена по константе связи и ее ближней окрестности, при котором спаривание является существенно многозонным; 3) случай дальней окрестности квантовой критической точки. Для фононов была использована модель Эйнштейна, хорошо описывающая свойства оптических мод. Показано, что критическая температура и критическая величина константы связи при $\mu = 0$ зависят от отношения частоты обращения в нуль сверхпроводящей щели к частоте фононов.

Затем было проведено более подробное рассмотрение спаривания с учетом деталей электрон-фононного взаимодействия. Из первых принципов были построено описание системы взаимодействующих электронов и фононов в графене. Были учтены два фактора, приводящие к электрон-фононному взаимодействию: возникновение деформационного потенциала и модуляция интеграла перескока электрона между соседними атомами. При этом были приняты в расчет 4 оптические моды плоских фононов, наиболее сильно взаимодействующие с электронами и соответствующие колебаниям атомов в плоскости графена, и 2 моды изгибных фононов, взаимодействующие с электронами квадратично. Для

описания последних была использована простая микроскопическая модель, принимающая в расчет энергию изменения углов между соседними валентными связями.

Спаривание ультрарелятивистских электронов было описано при помощи техники матричных функций Грина, компоненты которых соответствуют двум подрешеткам и двум долинам электронов. В таком подходе взаимодействие электронов с каждой фононной модой (или с двумя модами — в случае квадратичного взаимодействия с изгибными фононами) характеризуется не только константой связи, но и матричной вершиной взаимодействия, вид которой отражает свойства симметрии моды. Далее, при помощи формализма зарядового сопряжения были получены матричные уравнения Горькова и уравнения самосогласования для матричной щели.

Для решения уравнений Горькова была принята определенная форма параметра порядка, соответствующая s -волновому спариванию, диагональному по валентной зоне и зоне проводимости электронов. В то же время структура параметра порядка в пространстве долин была задана произвольной матрицей вида $SU(2)$. Таким образом, уравнения самосогласования для щели были сведены к системе двух уравнений Элиашберга для щелей в зоне проводимости и валентной зоне. Вклад каждой фононной моды в эффективное электрон-электронное взаимодействие, входящее в эти уравнения, определяется свойствами ее симметрии и долинной структурой параметра порядка, и при этом может быть как притягивающим, так и отталкивающим.

Структура параметра порядка в пространстве долин при спаривании будет подстраиваться таким образом, чтобы обеспечить максимальное эффективное притяжение между электронами. В случае спаривания под действием плоских оптических фононов результат будет определяться конкуренцией констант связи, отвечающим скалярной A_1 и псевдоскалярной B_1 модам с одной стороны, и двум псевдовекторным модам E_{2x} и E_{2y} с другой стороны. Поскольку константа связи первых двух мод существенно перенормируется в сторону больших значений из-за влияния кулоновского взаимодействия, результат этой конкуренции будет зависеть от диэлектрической проницаемости окружающей среды.

Максимальные значения критической температуры спаривания под действием плоских фононов могут быть достигнуты при сильном допировании графена (химический потенциал $\mu \sim 1.5$ эВ, концентрация электронов $n \sim 1.5 \times 10^{14}$ см $^{-2}$), когда спаривание является однозонным. В этом случае температура перехода в сверхпроводящее состояние может достигать долей градуса Кельвина. При таком сильном допировании, которое может

быть достигнуто путем напыления примесей [133], нужно, однако, учитывать ряд дополнительных факторов, не рассматривавшихся в использованной модели. Среди них можно отметить влияние примесей на конденсат куперовских пар [210], треугольное искажение электронного спектра [52], способствующее спариванию электронов с противоположными импульсами из противоположных долин, образование зон примесных атомов, как в химически расслоенном графите и в CaC_6 [188, 211, 212], и даже возможные структурные перестройки самого графена [133].

Взаимодействие электронов в графене с изгибными фононами было подробно рассмотрено с разрешением по подрешеткам и долинам электронов. Квадратичный характер взаимодействия приводит к необычной форме вызываемого фононами эффективно-го электрон-электронного взаимодействия, представленного петлей, состоящей из двух фононных пропагаторов. Внутри этой петли должно выполняться суммирование по фононным модам и интегрирование по импульсам фононов в пределах всей первой зоны Бриллюэна (в отличие от случая линейного взаимодействия, при котором главный вклад дается фононами только с малыми импульсами и со значениями импульса, отвечающими междолинному перебросу). Вклад изгибных фононов также зависит от долинной структуры параметра порядка, однако получающаяся константа связи слишком мала, чтобы обеспечить возможность спаривания в рассмотренных условиях. Тем не менее, изучение взаимодействия электронов в графене с изгибными фононами может способствовать лучшему пониманию вопросов, связанных с влиянием «риплов», образующихся на графене [21], на его электронные свойства.

Показано, что сверхпроводящий параметр порядка в графене при диагональном по зонам спаривании обладает необычными свойствами симметрии: куперовские пары в графене должны обладать совместной орбитально-спиново-долинной симметрией (в противоположность орбитально-спиновой антисимметрии при обычной сверхпроводимости). Следовательно, при симметричном по долинам спаривании параметр порядка должен обладать орбитально-спиновой симметрией; в таком случае возможно, например, s -волновое триплетное спаривание. Этот факт связан с существованием «скрытой» антисимметрии параметра порядка по подрешеткам.

Отметим, что использованное в данном разделе приближение куперовского канала приводит к качественно правильным результатам, только если перенормировка нормальных свойств и влияние кулоновского отталкивания относительно малы; в противном случае

учет перенормировки нормальных свойств может привести к качественно новым зависимостям в выражениях для T_c [193, 195, 198]. Кулоновское взаимодействие может быть добавлено в уравнения самосогласования (3.62) и (3.63) как двухчастичное взаимодействие с вершинами $\Gamma = -\bar{\Gamma} = \gamma^0$. Оно будет всегда осуществлять отталкивание, поскольку соответствующие ему угловые факторы (3.72) не будут зависеть от структуры параметра порядка в пространстве долин. Однако, при некоторых формах параметра порядка в графене кулоновское взаимодействие может вызывать эффективное притяжение: например, в случае «векторного» параметра порядка, рассмотренного в [170], или в случае резонирующих валентных связей [82, 83].

В круг дальнейших теоретических исследований, которые могут быть проведены при помощи развитого в данной главе аппарата, можно включить следующие задачи. В первую очередь, это поиск других возможных механизмов сверхпроводящего спаривания в графене, обеспечивающих новые формы матричного параметра порядка. Аппарат матричных функций Грина позволяет единым образом описывать множество различных типов спаривания, в частности, спаривание электронов на узле [80], спаривание в модели резонирующих валентных связей [82, 83], формирование различных векторных и псевдовекторных параметров порядка с анизотропной щелью [168, 169, 170]. Представляет интерес обобщение теории эффекта близости и андреевского отражения при контакте графена со сверхпроводником [184, 185] на случаи различных форм параметра порядка, а также обобщение теории Абрикосова-Горькова для «грязной» сверхпроводимости с учетом влияния дальнедействующих и короткодействующих примесей (см., напр., [210]).

Проведенное рассмотрение спаривания электронов в графене посредством фононного механизма не только позволяет расширить аналогию между поведением электронов в этой системе и поведением релятивистских частиц, вводя новые типы взаимодействий (скалярное, псевдоскалярное, псевдовекторное и т.п.), но и способствует лучшему пониманию вопросов, связанных с явлениями спаривания в нетрадиционных условиях.

Заключение

Основные результаты

Перечислим вкратце основные результаты, представленные в диссертации:

1. Найдены волновые функции магнитоэкситонов в графене в симметричной калибровке векторного потенциала, определены дисперсионные зависимости пространственно не прямых магнитоэкситонов и энергии рекомбинационных фотонов при учете кулоновского взаимодействия как малого возмущения. Обоснована применимость теории возмущения для кулоновского взаимодействия в сильном магнитном поле в случае пространственно не прямых магнитоэкситонов.
2. Исследовано спаривание пространственно разделенных электронов и дырок в бислое графена в режимах слабой и сильной связи. Обнаружено, что при переходе от слабой связи к сильной в графене и бислое графена отсутствует кроссовер к газу локальных пар, вместо которого реализуется переход от однозонного спаривания типа БКШ к многозонному «ультрарелятивистскому» спариванию.
3. Показано, что многозонное рассмотрение спаривания в бислое графена при сильной связи может дать гораздо большие оценки величины щели, чем однозонные оценки типа БКШ. Сделаны оценки влияния динамических эффектов (частотной зависимости экранированного потенциала спаривания) на величину щели и продемонстрирована серьезная конкуренция между неэкранированным кулоновским притяжением, с одной стороны, и совместным отталкивающим вкладом виртуальных плазмонов и одночастичных возбуждений, с другой стороны. Также отмечены необычные сверхтекучие свойства системы, в частности, фиксация относительной фазы щелей в зоне проводимости и валентной зоне и образование четверть-вихрей при фазовом переходе Костерлица-Таулеса.

4. Исследовано спаривание электронов в графене посредством плоских оптических, а также изгибных фононных мод. При этом предполагался s -волновой параметр порядка, диагональный по валентной зоне и зоне проводимости, но имеющий произвольную структуру в пространстве долин. Получены и аналитически решены в предельных случаях двухзонные уравнения Элиашберга, описывающие спаривание посредством фононов. Показано, что величина и знак эффективного взаимодействия, входящее в эти уравнения за счет каждой фононной моды, зависят от симметрии этой моды и от структуры параметра порядка в пространстве долин. Отмечена необычная совместная пространственно-спиново-долинная симметрия параметра порядка.
5. Изучено квадратичное взаимодействие электронов с двумя ветвями (акустической и оптической) изгибных фононов с учетом вкладов деформационного потенциала и растяжения валентных связей в гамильтониан взаимодействия. Показано, что, хотя одночастичная динамика электронов в графене разыгрывается в окрестностях двух дираковских точек, в эффективное электрон-электронное взаимодействие, обусловленное изгибными фононами, дают вклады все импульсы фононов в пределах первой зоны Бриллюэна.

Значение полученных результатов

Обсудим теперь практическую значимость полученных результатов и возможные направления дальнейших исследований электронных свойств графена при помощи развитых в диссертационной работе методов. Представленные в первой главе результаты — характеристики магнитоэкситонов в графене, а также энергии фотонов, испускаемых при их рекомбинации — могут быть сопоставлены с экспериментальными данными, полученными спектроскопическими методами. Изучение свойств магнитоэкситонов в графене может оказаться полезным для подбора оптимальных условий эксперимента по осуществлению их бозе-конденсации.

Разработанная в ходе диссертационной работы техника функций Грина электронов в графене, помещенном в магнитное поле, может быть использована для теоретического исследования ряда задач, связанных с электронными свойствами такой системы. Среди них можно отметить изучение роли смешивания уровней Ландау, рассмотрение магнитоэкситонных и магнитоплазмонных поляритонов в графене, помещенном в микрополость,

и изучение возможных перестроек основного состояния системы из-за влияния кулоновского взаимодействия.

Рассмотренное во второй главе многозонное спаривание в электрон-дырочном бислое графена может быть реализовано экспериментально при низких температурах. Сверхтекучесть конденсата электрон-дырочных пар и сопутствующие ей эффекты Джозефсона могут быть использованы в различных наноэлектронных устройствах. С фундаментальной точки зрения представляют интерес разработка теории сверхтекучести системы с многозонным спариванием, поиск новых типов топологических возбуждений в такой системе и исследование роли корреляционных эффектов в режиме сильной связи.

Исследованное в третьей главе сверхпроводящее спаривание электронов в графене посредством фононного механизма может быть обнаружено в экспериментах при сильном химическом допировании образцов и примыкает к явлениям сверхпроводимости в интеркалированном графите. Изучение взаимодействия электронов в графене с изгибными фононами позволяет достичь лучшего понимания вопросов, связанных влиянием «рипплов» на электронные свойства графена. Разработанный аппарат матричных функций Грина может быть использован для единообразного описания спаривания электронов в графене с разнообразными видами параметра порядка, что может оказаться полезным при поиске новых механизмов спаривания.

Таким образом, в диссертационной работе проведены теоретические исследования ряда коллективных электронных явлений в графене. Результаты указывают на множество их интересных особенностей, являющихся следствиями эффективно ультрарелятивистского поведения электронов. Бурное развитие исследований графена и перспективы его технологических применений придают особую значимость полученным результатам.

Благодарности

В заключение автору хочется выразить особую благодарность своему научному руководителю Юрию Ефремовичу Лозовику за постановку задачи, научное руководство и постоянную поддержку на всех этапах работы. Работа выполнена в Институте спектроскопии РАН. Часть работы, результаты которой представлены в разделе 3.1, выполнена в сотрудничестве с С.Л. Огарковым (Московский инженерно-физический институт).

Литература

- [1] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, Ph. Avouris (eds.), Carbon nanotubes, Berlin, Springer, 2000.
- [2] H.O. Pierson, Handbook of carbon, graphite, diamond and fullerenes, New Jersey, Noyes Publications, 1993.
- [3] P.R. Wallace. The band theory of graphite // Phys. Rev. **71**, No. 9, pp. 622–634 (1947).
- [4] J.C. Slonczewski, P.R. Weiss. Band structure of graphite // Phys. Rev. **109**, No. 2, pp. 272–279 (1958).
- [5] Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва, Наука, 1984, стр. 80.
- [6] G.W. Semenoff. Condensed-matter simulation of a three-dimensional anomaly // Phys. Rev. Lett. **53**, No. 26, pp. 2449–2452 (1984).
- [7] J.W. McClure. Band structure of graphite and de Haas-van Alphen effect // Phys. Rev. **108**, No. 3, pp. 612–618 (1957).
- [8] G.S. Painter, D.E. Ellis. Electronic band structure and optical properties of graphite from a variational approach // Phys. Rev. B **1**, No. 12, pp. 4747–4752 (1970).
- [9] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. Intercalation compounds of graphite // Adv. in Phys. **30**, No. 2, pp. 139–326 (1981).
- [10] D.P. DiVincenzo, E.J. Mele. Self-consistent effective-mass theory of intralayer screening in graphite intercalation compounds // Phys. Rev. B **29**, No. 4, pp. 1685–1694 (1984).
- [11] K.W.-K. Shung. Dielectric function and plasmon structure of stage-1 intercalated graphite // Phys. Rev. B **34**, No. 2, pp. 979–993 (1986).

- [12] K.W.-K. Shung. Lifetime effects in low-stage intercalated graphite systems // *Phys. Rev. B* **34**, No. 2, pp. 1264–1273 (1986).
- [13] M.S. Dresselhaus, G. Dresselhaus. Intercalation compounds of graphite // *Adv. in Phys.* **51**, No. 1, pp. 1–186 (2002).
- [14] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Статистическая физика. Часть 1, Москва, Наука, 1976, стр. 471.
- [15] В.Л. Березинский, Низкотемпературные свойства двумерных систем с непрерывной группой симметрии, Москва, Физматлит, 2007.
- [16] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems // *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6**, No. 7, pp. 1181–1203 (1973).
- [17] D.R. Nelson, B.I. Halperin. Dislocation-mediated melting in two dimensions // *Phys. Rev. B* **19**, No. 5, pp. 2457–2484 (1979).
- [18] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, Y. Zhang, S.V. Dubonos, I.V. Grigorieva, A.A. Firsov. Electric field effect in atomically thin carbon films // *Science* **306**, No. 5696, pp. 666–669 (2004).
- [19] K.S. Novoselov, D. Jiang, F. Schedin, T.J. Booth, V.V. Khotkevich, S.V. Morozov, A.K. Geim. Two-dimensional atomic crystals // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **102**, No. 30, pp. 10451–10453 (2005).
- [20] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, A.A. Firsov. Two-dimensional gas of massless Dirac fermions in graphene // *Nature* **438**, No. 7065, pp. 197–200 (2005).
- [21] J.C. Meyer, A.K. Geim, M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov, T.J. Booth, S. Roth. The structure of suspended graphene sheets // *Nature* **446**, No. 7131, pp. 60–63 (2007).
- [22] P.L. Doussal, L. Radzihovsky. Self-consistent theory of polymerized membranes // *Phys. Rev. Lett.* **69**, No. 8, pp. 1209–1212 (1992).
- [23] F.D.M. Haldane. Model for a quantum Hall effect without Landau levels: Condensed-matter realization of the «Parity anomaly» // *Phys. Rev. Lett.* **61**, No. 18, pp. 2015–2018 (1988).

- [24] E.V. Gorbar, V.P. Gusynin, V.A. Miransky, I.A. Shovkovy. Magnetic field driven metal-insulator phase transition in planar systems // *Phys. Rev. B* **66**, No. 4, 045108(22pp) (2002).
- [25] Y. Zheng, T. Ando. Hall conductivity of a two-dimensional graphite system // *Phys. Rev. B* **65**, No. 24, 245420(11pp) (2002).
- [26] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov. Unconventional integer quantum Hall effect in graphene // *Phys. Rev. Lett.* **95**, No. 14, 146801(4pp) (2005).
- [27] W.A. de Heer, C. Berger, X. Wu, P.N. First, E.H. Conrad, X. Li, T. Li, M. Sprinkle, J. Hass, M.L. Sadowski, M. Potemski, G. Martinez. Epitaxial graphene // *Solid State Commun.* **143**, No. 1–2, pp. 92–100 (2007).
- [28] B. Özyilmaz, P. Jarillo-Herrero, D. Efetov, P. Kim. Electronic transport in locally gated graphene nanoconstrictions // *Appl. Phys. Lett.* **91**, No. 19, 192107(3pp) (2007).
- [29] S.V. Morozov, K.S. Novoselov, M.I. Katsnelson. Giant intrinsic carrier mobilities in graphene and its bilayer // *Phys. Rev. Lett.* **100**, No. 1, 016602(4pp) (2008).
- [30] K.I. Bolotin, K.J. Sikes, Z. Jiang, M. Klima, G. Fudenberg, J. Hone, P. Kim, H.L. Stormer. Ultrahigh electron mobility in suspended graphene // *Solid State Commun.* **146**, No. 9–10, pp. 351–355 (2008).
- [31] K.S. Novoselov, Z. Jiang, Y. Zhang, S.V. Morozov, H.L. Stormer, U. Zeitler, J.C. Maan, G.S. Boebinger, P. Kim, A.K. Geim. Room-temperature quantum Hall effect in graphene // *Science* **315**, No. 5817, pp. 1379–1379 (2007).
- [32] M.I. Katsnelson, K.S. Novoselov. Graphene: New bridge between condensed matter physics and quantum electrodynamics // *Solid State Commun.* **143**, No. 1–2, pp. 3–13 (2007).
- [33] M.I. Katsnelson. Graphene: carbon in two dimensions // *Materials Today* **10**, No. 1–2, pp. 20–27 (2007).
- [34] A.K. Geim, K.S. Novoselov. The rise of graphene // *Nature Materials* **6**, No. 3, pp. 183–191 (2007).

- [35] А.Н. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. The electronic properties of graphene // *Rev. Mod. Phys.* **80**, No. 1, pp. 109–162 (2009).
- [36] Ю.Е. Лозовик, С.П. Меркулова, А.А. Соколик. Коллективные электронные явления в графене // *УФН* **178**, No. 7, сс. 757–776 (2008).
- [37] Т. Ando, A.B. Fowler, F. Stern. Electronic properties of two-dimensional systems // *Rev. Mod. Phys.* **54**, No. 2, pp. 437–672 (1981).
- [38] G.D. Mahan, *Many-particle physics*, New York, Plenum Press, 1990.
- [39] H. Dahal, Y.N. Joglekar, K. Bedell, A.V. Balatsky. Absence of Wigner crystallization in graphene // *Phys. Rev. B* **74**, No. 23, 233405(3pp) (2006).
- [40] M.I. Katsnelson. Nonlinear screening of charge impurities in graphene // *Phys. Rev. B* **74**, No. 20, 201401(R)(3pp) (2006).
- [41] J. González, F. Guinea, M.A.H. Vozmediano. Non-Fermi liquid behavior of electrons in the half-filled honeycomb lattice (A renormalization group approach) // *Nucl. Phys. B* **424**, No. 3, pp. 595–618 (1994).
- [42] J. González, F. Guinea, M.A.H. Vozmediano. Marginal-Fermi-liquid behavior from two-dimensional Coulomb interaction // *Phys. Rev. B* **59**, No. 4, pp. R2474–R2477 (1999).
- [43] J. González, F. Guinea, M.A.H. Vozmediano. Unconventional quasiparticle lifetime in graphite // *Phys. Rev. Lett.* **77**, No. 17, pp. 3589–3592 (1996).
- [44] B. Wunsch, T. Stauber, F. Sols, F. Guinea. Dynamical polarization of graphene at finite doping // *New J. Phys.* **8**, No. 12, 318(15pp) (2006).
- [45] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Dielectric function, screening, and plasmons in two-dimensional graphene // *Phys. Rev. B* **75**, No. 20, 205418(6pp) (2007).
- [46] Л.В. Келдыш, Ю.В. Копаев. Возможная неустойчивость полуметаллического состояния относительно кулоновского взаимодействия // *Физ. твердого тела* **6**, No. 9, сс. 2791–2798 (1964).
- [47] Р.Р. Гусейнов, Л.В. Келдыш. О характере фазового перехода в условиях «экситонной» неустойчивости электронного спектра кристалла // *ЖЭТФ* **63**, No. 6(12), сс. 2255–2263 (1972).

- [48] D. Jérôme, T.M. Rice, W. Kohn. Excitonic insulator // *Phys. Rev.* **158**, No. 2, pp. 462–475 (1967).
- [49] D.V. Khveshchenko. Ghost excitonic insulator transition in layered graphite // *Phys. Rev. Lett.* **87**, No. 24, 246802(4pp) (2001).
- [50] J.E. Drut, T.A. Lähde. Is graphene in vacuum an insulator? // *Phys. Rev. Lett.* **102**, No. 2, 026802(4pp) (2009).
- [51] W. Armour, S. Hands, C. Strouthos. Lattice simulations near the semimetal-insulator phase transition of graphene // <http://arxiv.org/abs/0908.0118v1>.
- [52] T. Ando, T. Nakanishi, R. Saito. Berry's phase and absence of back scattering in carbon nanotubes // *J. Phys. Soc. Japan* **67**, No. 8, pp. 2857–2862 (1998).
- [53] R. Jackiw, S.-Y. Pi. Chiral gauge theory for graphene // *Phys. Rev. Lett.* **98**, No. 26, 266402(4pp) (2007).
- [54] D. Xiao, W. Yao, Q. Niu. Valley-contrasting physics in graphene: magnetic moment and topological transport // *Phys. Rev. Lett.* **99**, No. 23, 236809(4pp).
- [55] I.L. Aleiner, D.E. Kharzeev, A.M. Tsvelik. Spontaneous symmetry breaking in graphene subjected to an in-plane magnetic field // *Phys. Rev. B* **76**, No. 19, 195415(27pp) (2007).
- [56] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-hole pair condensation in graphene bilayer // *Письма в ЖЭТФ* **87**, No. 1, сс. 61–65 (2008).
- [57] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Coherent phases and collective electron phenomena in graphene // *J. Phys.: Conf. Ser.* **129**, 012003(8pp) (2008).
- [58] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik, M. Willander. Coherent phases and magnetoexcitons in graphene // *Phys. Stat. Sol. A* **206**, No. 5, pp. 927–930 (2009).
- [59] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Multi-band pairing of ultrarelativistic electrons and holes in graphene bilayer // *Phys. Lett. A* **374**, No. 2, pp. 326–330 (2009).
- [60] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Ultrarelativistic electron-hole pairing in graphene bilayer // *Eur. Phys. J. B* **73**, No. 2, pp. 195–206 (2009).

- [61] Ю.Е. Лозовик, С.Л. Огарков, А.А. Соколик. Теория сверхпроводимости дираковских электронов в графене // *ЖЭТФ* **137**, No. 1, сс. 57–66 (2010).
- [62] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Phonon-mediated electron pairing in graphene // *Phys. Lett. A* **374**, No. 27, pp. 2785–2791 (2010).
- [63] Yu.E. Lozovik, A.A. Sokolik. Electron-electron and electron-hole pairing in graphene structures // *Philos. Trans. Roy. Soc. A* (в печати); <http://arxiv.org/abs/1005.4857>.
- [64] E. McCann, V.I. Fal'ko. Landau-level degeneracy and quantum Hall effect in a graphite bilayer // *Phys. Rev. Lett.* **96**, No. 8, 086805(4pp).
- [65] H. Schmidt, T. Lüdtkke, P. Barthold, E. McCann, V.I. Falko, R.J. Haug. Tunable graphene system with two decoupled monolayers // *Appl. Phys. Lett.* **93**, No. 17, 172108(3pp) (2008).
- [66] H. Schmidt, T. Lüdtkke, P. Barthold, R.J. Haug. Mobilities and scattering times in decoupled graphene monolayers // *Phys. Rev. B* **81**, No. 12, 121403(R)(4pp) (2010).
- [67] Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. К теории экситона Мотта в сильном магнитном поле // *ЖЭТФ* **53**, No. 2, сс. 717–722 (1967).
- [68] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. Экситон Мотта в квазидвумерных полупроводниках в сильном магнитном поле // *ЖЭТФ* **78**, No. 3, сс. 1167–1175 (1980).
- [69] И.В. Лернер, Ю.Е. Лозовик. Двумерные электронно-дырочные системы в сильном магнитном поле как почти идеальный газ экситонов // *ЖЭТФ* **80**, No. 4, сс. 1488–1503 (1981).
- [70] I.V. Lerner, Yu.E. Lozovik. Phase transitions in two-dimensional electron-hole systems in the high magnetic fields // *J. Low Temp. Phys.* **38**, No. 3–4, pp. 333–352 (1980).
- [71] O.L. Berman, Yu.E. Lozovik, G. Gumbs. Bose-Einstein condensation and superfluidity of magnetoexcitons in bilayer graphene // *Phys. Rev. B* **77**, No. 15, 155433(10pp) (2008).
- [72] C. Kallin, B.I. Halperin. Excitations from a filled Landau level in the two-dimensional electron gas // *Phys. Rev. B* **30**, No. 10, pp. 5655–5668 (1984).

- [73] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer. Theory of superconductivity // *Phys. Rev.* **108**, No. 5, pp. 1175–1204 (1957).
- [74] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. О возможности сверхтекучести разделенных в пространстве электронов и дырок при их спаривании: новый механизм сверхпроводимости // *Письма в ЖЭТФ* **22**, No. 11, сс. 556–559 (1975).
- [75] С.И. Шевченко. Теория сверхпроводимости систем со спариванием пространственно разделенных электронов и дырок // *Физ. низк. темп.* **2**, No. 4, сс. 505–516 (1976).
- [76] P. Nozières, S. Schmitt-Rink. Bose condensation in an attractive electron gas: From weak to strong coupling superconductivity // *J. Low Temp. Phys.* **59**, No. 3–4, pp. 195–211 (1985).
- [77] M.G. Alford, A. Schmitt, R. Rajagopal, T. Schäfer. Color superconductivity in dense quark matter // *Rev. Mod. Phys.* **80**, No. 4, pp. 1455–1515 (2008).
- [78] Г.М. Элиашберг. Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в сверхпроводнике // *ЖЭТФ* **38**, No. 3, сс. 966–976 (1960).
- [79] Г.М. Элиашберг. Температурные функции Грина электронов в сверхпроводнике // *ЖЭТФ* **39**, No. 5(11), сс. 1437–1441 (1960).
- [80] B. Uchoa, A.H. Castro Neto. Superconducting states of pure and doped graphene // *Phys. Rev. Lett.* **98**, No. 14, 146801(4pp) (2007).
- [81] D.V. Khveshchenko. Massive Dirac fermions in single-layer graphene // *J. Phys.: Condens. Matter* **21**, No. 7, 07533(7pp) (2009).
- [82] A.M. Black-Schaffer, S. Doniach. Resonating valence bonds and mean-field d-wave superconductivity in graphite // *Phys. Rev. B* **75**, No. 13, 134512(10pp) (2007).
- [83] C. Honerkamp. Density waves and Cooper pairing on the honeycomb lattice // *Phys. Rev. Lett.* **100**, No. 14, 164404(4pp) (2008).
- [84] J. González. Kohn-Luttinger superconductivity in graphene // *Phys. Rev. B* **78**, No. 20, 205431(6pp) (2008).

- [85] S. Piscanec, M. Lazzeri, F. Mauri, A.C. Ferrari, J. Robertson. Kohn anomalies and electron-phonon interactions in graphite // *Phys. Rev. Lett.* **93**, No. 18, 185503(4pp) (2004).
- [86] D.M. Basko, I.L. Aleiner. Interplay of Coulomb and electron-phonon interactions in graphene // *Phys. Rev. B* **77**, No. 4, 041409(R)(4pp) (2008).
- [87] E. Mariani, F. von Oppen. Flexural phonons in free-standing graphene // *Phys. Rev. Lett.* **100**, No. 7, 076801(4pp) (2008).
- [88] E. Mariani, F. von Oppen. Erratum: Flexural phonons in free-standing graphene [*Phys. Rev. Lett.* 100, 076801 (2008)] // *Phys. Rev. Lett.* **100**, No. 24, 249901(1p) (2008).
- [89] A. Karlhede, S.A. Kivelson, S.L. Sondhi, The quantum Hall effect, Jerusalem 2002 winter school, University of California, 2002.
- [90] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Квантовая механика, Москва, Наука, 1989.
- [91] K.W. Chiu, J.J. Quinn. Plasma oscillations of a two-dimensional electron gas in a strong magnetic field // *Phys. Rev. B* **9**, No. 11, pp. 4724–4732 (1974).
- [92] Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский. Магнитоэкситонное поглощение в связанных квантовых ямах // *ЖЭТФ* **112**, No. 5, сс. 1791–1808 (1997).
- [93] J.P. Eisenstein, A.H. MacDonald. Bose–Einstein condensation of excitons in bilayer electron systems // *Nature* **432**, No. 7018, pp. 691–694 (2004).
- [94] L.V. Butov, A.V. Mintsev, Yu.E. Lozovik, K.L. Campman, A.C. Gossard. From spatially indirect excitons to momentum-space indirect excitons by an in-plane magnetic field // *Phys. Rev. B* **62**, No. 3, pp. 1548–1551 (2000).
- [95] L.V. Butov, C.W. Lai, D.S. Chemla, Yu.E. Lozovik, K.L. Campman, A.C. Gossard. Observation of magnetically induced effective-mass enhancement of quasi-2D excitons // *Phys. Rev. Lett.* **87**, No. 21, 216804(4pp) (2001).
- [96] Yu.E. Lozovik, I.V. Ovchinnikov, S.Yu. Volkov, L.V. Butov, D.S. Chemla. Quasi-two-dimensional excitons in finite magnetic fields // *Phys. Rev. B* **65**, No. 23, 235304(11pp) (2002).

- [97] А.Б. Дзюбенко, Ю.Е. Лозовик. Квазидвумерный конденсат электронно-дырочных пар в сильных магнитных полях // *Физ. твердого тела* **26**, No. 5, сс. 1540–1541 (1984).
- [98] A.B. Dzyubenko, Yu.E. Lozovik. Symmetry of Hamiltonians of quantum two-component systems: condensate of composite particles as an exact eigenstate // *J. Phys. A* **24**, No. 2, pp. 415–424 (1991).
- [99] С.Д. Дикман, С.В. Иорданский. Спиновая релаксация в условиях КЭХ при нечетном заполнении // *Письма в ЖЭТФ* **63**, No. 1, сс. 43–48 (1996).
- [100] D. Paquet, T.M. Rice, K. Ueda. Two-dimensional electron-hole fluid in a strong perpendicular magnetic field: Exciton Bose condensate or maximum density two-dimensional droplet // *Phys. Rev. B* **32**, No. 8, pp. 5208–5221 (1985).
- [101] A. Iyengar, J. Wang, H.A. Fertig, L. Brey. Excitations from filled Landau levels in graphene // *Phys. Rev. B* **75**, No. 12, 125430(14pp) (2007).
- [102] Yu.A. Bychkov, G. Martinez. Magnetoplasmon excitations in graphene for filling factors $\nu \leq 6$ // *Phys. Rev. B* **77**, No. 12, 125417(14pp) (2008).
- [103] Z.G. Koinov. Magnetoexciton dispersion in graphene bilayers embedded in a dielectric // *Phys. Rev. B* **79**, No. 7, 073409(4pp) (2009).
- [104] D.V. Fil, L.Yu. Kravchenko. Superfluid state of magnetoexcitons in double layer graphene structures // *AIP Conf. Proc.* **1198**, pp. 34–41 (2009).
- [105] C.-H. Zhang, Y.N. Joglekar. Influence of Landau-level mixing on Wigner crystallization in graphene // *Phys. Rev. B* **77**, No. 20, 205426(5pp) (2008).
- [106] X. Хакен, *Квантовополевая теория твердого тела*, Москва, Наука, 1980, стр. 161.
- [107] Yu.E. Lozovik, I.V. Yudson. On the ground state of the two-dimensional non-ideal Bose gas // *Physica A* **93**, No. 3–4, pp. 439–502 (1978).
- [108] O.L. Berman, R.Ya. Kezerashvili, Yu.E. Lozovik. Collective properties of magnetobexcitons in quantum wells and graphene superlattices // *Phys. Rev. B* **78**, No. 3, 035135(9pp) (2008).

- [109] O.L. Berman, R.Ya. Kezerashvili, Yu.E. Lozovik. Bose-Einstein condensation of trapped polaritons in two-dimensional electron-hole systems in a high magnetic field // *Phys. Rev. B* **80**, No. 11, 115302(11pp) (2009).
- [110] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Москва, Добросвет, 2006.
- [111] V.P. Gusynin, V.A. Miransky, S.G. Sharapov, I.A. Shovkovy. Excitonic gap, phase transition, and quantum Hall effect in graphene // *Phys. Rev. B* **74**, No. 19, 195429(10pp) (2006).
- [112] K. Shizuya. Electromagnetic response and effective gauge theory of graphene in a magnetic field // *Phys. Rev. B* **75**, No. 24, 245417(9pp) (2007).
- [113] O.L. Berman, G. Gumbs, Yu.E. Lozovik. Magnetoplasmons in layered graphene structures // *Phys. Rev. B* **78**, No. 8, 085401(5pp) (2008).
- [114] R. Roldán, J.-N. Fuchs, M.O. Goerbig. Collective modes of doped graphene and a standard two-dimensional electron gas in a strong magnetic field: Linear magnetoplasmons versus magnetoexcitons // *Phys. Rev. B* **80**, No. 8, 085408(6pp) (2009).
- [115] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Новый механизм сверхпроводимости: спаривание между пространственно разделенными электронами и дырками // *ЖЭТФ* **71**, No. 2(8), сс. 738–753 (1976).
- [116] S. Das Sarma, A. Madhukar. Collective modes of spatially separated, two-component, two-dimensional plasma in solids // *Phys. Rev. B* **23**, No. 2, pp. 805–815 (1981).
- [117] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, Интегралы и ряды. Специальные функции, Москва, Наука, 1983, стр. 478.
- [118] M.L. Sadowski, G. Martinez, M. Potemski, C. Berger, W.A. de Heer. Magnetospectroscopy of epitaxial few-layer graphene // *Solid State Commun.* **143**, No. 1–2, pp. 123–125 (2007).
- [119] O. Kashuba, V.I. Fal'ko. Signature of electronic excitations in the Raman spectrum of graphene // *Phys. Rev. B* **80**, No. 24, 241404(4pp) (2009).

- [120] M.O. Goerbig, J.-N. Fuchs, K. Kechedzhi, V.I. Fal'ko. Filling-factor-dependent magnetophonon resonance in graphene // *Phys. Rev. Lett.* **99**, No. 8, 087402(4pp) (2007).
- [121] Z. Jiang, Y. Zhang, H.L. Stormer, P. Kim. The nature of quantum Hall states near the charge neutral Dirac point in graphene // *Phys. Rev. Lett.* **99**, No. 10, 106802(4pp) (2007).
- [122] N. Shibata, K. Nomura. Coupled charge and valley excitations in graphene quantum Hall ferromagnets // *Phys. Rev. B* **77**, No. 23, 235426(5pp) (2008).
- [123] Yu.E. Lozovik, V.I. Yudson. Superconductivity at dielectric pairing of spatially separated quasiparticles // *Solid State Commun.* **19**, No. 4, pp. 391–393 (1976).
- [124] А.В. Ключник, Ю.Е. Лозовик. Двумерная диэлектрическая электронно-дырочная жидкость // *Физ. твердого тела* **20**, No. 2, сс. 625–627 (1978).
- [125] S.I. Shevchenko. Phase diagram of systems with pairing of spatially separated electrons and holes // *Phys. Rev. Lett.* **72**, No. 20, pp. 3242–3245 (1994).
- [126] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман. Фазовые переходы в системе пространственно разделенных электронов и дырок // *ЖЭТФ* **111**, No. 5, сс. 1879–1895 (1997).
- [127] Yu.E. Lozovik, A.V. Poushnov. Magnetism and Josephson effect in a coupled quantum well electron-hole system // *Phys. Lett. A* **228**, No. 6, pp. 399–407 (1997).
- [128] S.A. Moskalenko, D.W. Snoke. Bose-Einstein condensation of excitons and biexcitons and coherent nonlinear optics with excitons, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2000.
- [129] В.Б. Тимофеев. Коллективные экситонные явления в пространственно разделенных электрон-дырочных слоях в полупроводниках // *УФН* **175**, No. 3, сс. 315–327 (2005).
- [130] L.V. Butov. Condensation and pattern formation in cold exciton gases in coupled quantum wells // *J. Phys.: Condens. Matter* **16**, No. 50, pp. R1577–R1613 (2004).
- [131] Ю.Е. Лозовик, И.Л. Курбаков, Г.Е. Астрахарчик, М. Вилландер. Бозе-конденсация двумерных дипольных экситонов: моделирование квантовым методом Монте-Карло // *ЖЭТФ* **133**, No. 2, сс. 348–369 (2008).

- [132] Yu.E. Lozovik, I.L. Kurbakov, M. Willander. Superfluidity of two-dimensional excitons in flat and harmonic traps // *Phys. Lett. A* **366**, No. 4–5, pp. 487–492 (2007).
- [133] J.L. McChesney, A. Bostwick, T. Ohta, T. Seyller, K. Horn, J. Gonzalez, E. Rotenberg. Extended van Hove singularity and superconducting instability in doped graphene // *Phys. Rev. Lett.* **104**, No. 13, 136803(4pp) (2010).
- [134] A. Das, S. Pisana, B. Chakraborty, S. Piscanec, S.K. Saha, U.V. Waghmare, K.S. Novoselov, H.R. Krishnamurthy, A.K. Geim, A.C. Ferrari, A.K. Sood. Monitoring dopants by Raman scattering in an electrochemically top-gated graphene transistor // *Nature Nanotechnology* **3**, No. 4, pp. 210–215 (2008).
- [135] U. Sivan, P.M. Solomon, H. Shtrikman. Coupled electron-hole transport // *Phys. Rev. Lett.* **68**, No. 8, pp. 1196–1200 (1992).
- [136] S. Conti, G. Vignale, A.H. MacDonald. Engineering superfluidity in electron-hole double layers // *Phys. Rev. B* **57**, No. 12, pp. R6846–R6849 (1998).
- [137] Ю.Е. Лозовик, М.В. Никитков. Кинетические свойства системы пространственно-разделенных экситонов и электронов при наличии бозе-конденсата экситонов // *ЖЭТФ* **116**, No. 4(10), сс. 1440–1449 (1999).
- [138] B.Y.-K. Hu. Prospecting for the superfluid transition in electron-hole coupled quantum wells using Coulomb drag // *Phys. Rev. Lett.* **85**, No. 4, pp. 820–823 (2000).
- [139] A.V. Balatsky, Y.N. Joglekar, P.B. Littlewood. Dipolar superfluidity in electron-hole bilayer systems // *Phys. Rev. Lett.* **93**, No. 26, 266801(4pp) (2004).
- [140] S. De Palo, F. Rapisarda, G. Senatore. Excitonic condensation in a symmetric electron-hole bilayer // *Phys. Rev. Lett.* **88**, No. 20, 206401(4pp) (2002).
- [141] Y.N. Joglekar, A.V. Balatsky, S. Das Sarma. Wigner supersolid of excitons in electron-hole bilayers // *Phys. Rev. B* **74**, No. 23, 233302(4pp) (2006).
- [142] Yu.E. Lozovik, V.I. Yudson. Electron-hole superconductivity. Influence of structure defects // *Solid State Commun.* **21**, No. 2, pp. 211–215 (1977).
- [143] S. Adam, E.H. Hwang, V.M. Galitski, S. Das Sarma. A self-consistent theory for graphene transport // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **104**, No. 47, pp. 18392–18397 (2007).

- [144] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон. Фазовый переход полуметалла в состояние с резко анизотропным спариванием электронов и дырок // Физ. твердого тела **17**, No. 6, сс. 1613–1616 (1975).
- [145] D.M. Eagles. Possible pairing without superconductivity at low carrier concentrations in bulk and thin-film superconducting semiconductors // Phys. Rev. **186**, No. 2, pp. 456–463 (1969).
- [146] A.J. Leggett. Cooper pairing in spin-polarized Fermi systems // Journal de Physique Colloque (Paris) **41**, No. 7, pp. C7-19–C7-26.
- [147] H. Abuki, T. Hatsuda, K. Itakura. Structural change of Cooper pairs and momentum-dependent gap in color superconductivity // Phys. Rev. D **65**, No. 7, 074014(14pp).
- [148] Y. Nishida, H. Abuki. BCS-BEC crossover in a relativistic superfluid and its significance to quark matter // Phys. Rev. D **72**, No. 9, 096004(5pp) (2005).
- [149] L. He, P. Zhuang. Relativistic BCS-BEC crossover at zero temperature // Phys. Rev. D **75**, No. 9, 096003(8pp) (2007).
- [150] L. He, P. Zhuang. Relativistic BCS-BEC crossover at finite temperature and its application to color superconductivity // Phys. Rev. D **76**, No. 5, 056003(13pp) (2007).
- [151] J. Sabio, F. Sols, F. Guinea. Two-body problem in graphene // Phys. Rev. B **81**, No. 4, 045428(12pp) (2010).
- [152] В.В. Балашов, В.К. Долинов, Курс квантовой механики, Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, стр. 172.
- [153] V.M. Pereira, J. Nilsson, A.H. Castro Neto. Coulomb impurity problem in graphene // Phys. Rev. Lett. **99**, No. 16, 166802(4pp) (2007).
- [154] A.V. Shytov, M.I. Katsnelson, L.S. Levitov. Vacuum polarization and screening of supercritical impurities in graphene // Phys. Rev. Lett. **99**, No. 23, 236801(4pp) (2007).
- [155] P. Van Alstine, H. Crater. Exact parapositroniumlike solution to two-body Dirac equations // Phys. Rev. D **34**, No. 6, pp. 1932–1935 (1986).

- [156] D. Alba, H.W. Crater, L. Lusanna. Hamiltonian relativistic two-body problem: center of mass and orbit reconstruction // *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, pp. 9585–9607 (2007).
- [157] K. Kawamura, R.A. Brown. Borgmann's theorem and position-dependent effective mass // *Phys. Rev. B* **37**, No. 8, pp. 3932–3939 (1988).
- [158] E. Zhao, A. Paramekanti. BCS-BEC crossover on the two-dimensional honeycomb lattice // *Phys. Rev. Lett.* **97**, No. 23, 230404(4pp) (2006).
- [159] H. Min, R. Bistritzer, J.-J. Su, A.H. MacDonald. Room-temperature superfluidity in graphene bilayers // *Phys. Rev. B* **78**, No. 12, 121401(R)(4pp) (2008).
- [160] C.-H. Zhang, Y.N. Joglekar. Excitonic condensation of massless fermions in graphene bilayers // *Phys. Rev. B* **77**, No. 23, 233405(4pp) (2008).
- [161] R. Bistritzer, A.H. MacDonald. Influence of disorder on electron-hole pair condensation in graphene bilayers // *Phys. Rev. Lett.* **101**, No. 25, 256406(4pp) (2008).
- [162] B. Seradjeh, H. Weber, M. Franz. Vortices, zero modes, and fractionalization in the bilayer-graphene exciton condensate // *Phys. Rev. Lett.* **101**, No. 24, 264404(4pp) (2008).
- [163] M.Yu. Kharitonov, K.B. Efetov. Electron screening and excitonic condensation in double-layer graphene systems // *Phys. Rev. B* **78**, No. 24, 241401(R)(4pp) (2008).
- [164] R. Bistritzer, H. Min, J.-J. Su, A.H. MacDonald. Comment on «Electron screening and excitonic condensation in double-layer graphene systems» // <http://arxiv.org/abs/0810.0331v1>.
- [165] M.Yu. Kharitonov, K.B. Efetov. Excitonic condensation in a double-layer graphene system // *Semicond. Sci. Tech.* **25**, No. 3, 034004(11pp) (2010).
- [166] M. Alford, K. Rajagopal, F. Wilczek. QCD at finite baryon density: nucleon droplets and color superconductivity // *Phys. Lett. B* **422**, No. 1–4, pp. 247–256 (1998).
- [167] R.D. Pisarski, D.H. Rischke. Superfluidity in a model of massless fermions coupled to scalar bosons // *Phys. Rev. D* **60**, No. 9, 094013(19pp) (1999).
- [168] T. Ohsaku. BCS and generalized BCS superconductivity in relativistic quantum field theory: Formulation // *Phys. Rev. B* **65**, No. 2, 024512(13pp) (2001).

- [169] T. Ohsaku. BCS and generalized BCS superconductivity in relativistic quantum field theory. II. Numerical calculations // *Phys. Rev. B* **66**, No. 5, 054518(13pp) (2002).
- [170] T. Ohsaku. Relativistic model of two-band superconductivity in (2+1)-dimension // *Int. J. Mod. Phys. B* **18**, No. 12, pp. 1771–1794 (2004).
- [171] N.B. Kopnin, E.B. Sonin. BCS superconductivity of Dirac electrons in graphene layers // *Phys. Rev. Lett.* **100**, No. 24, 246808(4pp) (2008).
- [172] Л.П. Горьков. Об энергетическом спектре сверхпроводников // *ЖЭТФ* **34**, No. 3, pp. 735–739 (1958).
- [173] M. Sigrist, K. Ueda. Phenomenological theory of unconventional superconductivity // *Rev. Mod. Phys.* **63**, No. 2, pp. 239–311 (1991).
- [174] S.M. Apenko, D.A. Kirzhnits, Y.E. Lozovik. On the validity of the $1/N$ -expansion // *Phys. Lett. A* **92**, No. 3, pp. 107–109 (1982).
- [175] M.V. Milovanović. Fractionalization in dimerized graphene and graphene bilayer // *Phys. Rev. B* **78**, No. 24, 245424(7pp) (2008).
- [176] I.M. Khaymovich, N.B. Kopnin, A.S. Mel'nikov, I.A. Shereshevskii. Vortex core states in superconducting graphene // *Phys. Rev. B* **79**, No. 22, 224506(7pp) (2009).
- [177] V.A. Khodel, V.V. Khodel, J.W. Clark. Solution of the gap equation in neutron matter // *Nucl. Phys. A* **598**, No. 3, pp. 390–417 (1996).
- [178] N.B. Kopnin, E.B. Sonin. Supercurrent in superconducting graphene // <http://arxiv.org/abs/1001.1048v1>.
- [179] Y.M. Malozovsky, S.M. Bose, P. Longe, J.D. Fan. Eliashberg equations and superconductivity in a layered two-dimensional metal // *Phys. Rev. B* **48**, No. 14, pp. 10504–10513 (1993).
- [180] H. Suhl, B.T. Matthias, L.R. Walker. Bardeen-Cooper-Schrieffer theory of superconductivity in the case of overlapping bands // *Phys. Rev. Lett.* **3**, No. 12, pp. 552–554 (1959).

- [181] H. Schmidt, J.F. Zasadzinski, K.E. Gray, D.G. Hinks. Evidence for two-band superconductivity from break-junction tunneling on MgB_2 // *Phys. Rev. Lett.* **88**, No. 12, 127002(4pp) (2000).
- [182] V. Barzykin, L.P. Gor'kov. On superconducting and magnetic properties of iron-oxypnictides // *Письма в ЖЭТФ* **88**, No. 2, сс. 142–146 (2008).
- [183] М.В. Садовский. Высокотемпературная сверхпроводимость в слоистых соединениях на основе железа // *УФН* **178**, No. 12, сс. 1243–1271 (2008).
- [184] H.B. Heersche, P. Jarillo-Herrero, J.B. Oostinga, L.M.K. Vandersypen, A.F. Morpurgo. Bipolar supercurrent in graphene // *Nature* **446**, No. 7131, pp. 56–59 (2007).
- [185] C.W.J. Beenakker. Colloquium: Andreev reflection and Klein tunneling in graphene // *Rev. Mod. Phys.* **80**, No. 4, pp. 1337–1354 (2008).
- [186] E.C. Marino, L.H. Nunes. Quantum criticality and superconductivity in quasi-two-dimensional Dirac electronic systems // *Nucl. Phys. B* **741**, No. 3, pp. 404–420 (2006).
- [187] O.V. Dolgov, I.I. Mazin, D. Parker, A.A. Golubov. Interband superconductivity: Contrasts between Bardeen-Cooper-Schrieffer and Eliashberg theories // *Phys. Rev. B* **79**, No. 6, 060502(R)(4pp) (2009).
- [188] M. Calandra, F. Mauri. Theoretical explanation of superconductivity in C_6Ca // *Phys. Rev. Lett.* **95**, No. 23, 237002(4pp) (2005).
- [189] G.A. Ummarino, M. Tortello, D. Daghero, R.S. Gonnelli. Three-band $s\pm$ Eliashberg theory and the superconducting gaps of iron pnictides // *Phys. Rev. B* **80**, No. 17, 172503 (2009).
- [190] D.T. Son. Superconductivity by long-range color magnetic interaction in high-density quark matter // *Phys. Rev. D* **59**, No. 9, 094019(8pp) (1999).
- [191] T. Schäfer, F. Wilczek. Superconductivity from perturbative one-gluon exchange in high density quark matter // *Phys. Rev. D* **60**, No. 11, 114033(7pp) (1999).
- [192] D.J. Scalapino, Y. Wada, J.C. Swihart. Strong-coupling superconductor at nonzero temperature // *Phys. Rev. Lett.* **14**, No. 4, pp. 102–105 (1965).

- [193] W.L. McMillan. Transition temperature of strong-coupled superconductors // *Phys. Rev.* **167**, No. 2, pp. 331–344 (1968).
- [194] С.В. Вонсовский, Ю.А. Изюмов, Э.З. Курмаев, *Сверхпроводимость переходных металлов, их сплавов и соединений*, Москва, Наука, 1977, стр. 44.
- [195] М.В. Медведев, Э.А. Пашицкий, Ю.С. Пятилетов. Влияние низкочастотных пиков фононной плотности состояний на критическую температуру сверхпроводников // *ЖЭТФ* **65**, No. 1, сс. 1186–1197 (1973).
- [196] А.Б. Мигдал. Взаимодействие электронов с колебаниями решётки в нормальном металле // *ЖЭТФ* **34**, No. 6, сс. 1438–1446 (1958).
- [197] S. Pisana, M. Lazzeri, C. Casiraghi, K.S. Novoselov, A.K. Geim, A.C. Ferrari, F. Mauri. Breakdown of the adiabatic Born–Oppenheimer approximation in graphene // *Nature Materials* **6**, No. 3, pp. 198–201 (2007).
- [198] О.В. Долгов, Е.Г. Максимов. Критическая температура сверхпроводников с сильной связью // *УФН* **138**, No. 1, сс. 95–128 (1982).
- [199] E. McCann, K. Kechedzhi, V.I. Fal’ko, H. Suzuura, T. Ando, B.L. Altshuler. Weak-localization magnetoresistance and valley symmetry in graphene // *Phys. Rev. Lett.* **97**, No. 14, 146805(4pp) (2006).
- [200] V.P. Gusynin, S.G. Sharapov, J.P. Carbotte. AC conductivity of graphene: from tight-binding model to 2+1-dimensional quantum electrodynamics // *Int. J. Mod. Phys. B* **21**, No. 27, pp. 4611–4658 (2007).
- [201] H. Suzuura, T. Ando. Phonons and electron-phonon scattering in carbon nanotubes // *Phys. Rev. B* **65**, No. 23, 235412(15pp) (2002).
- [202] D.M. Basko. Theory of resonant multiphonon Raman scattering in graphene // *Phys. Rev. B* **78**, No. 12, 125418(42pp) (2008).
- [203] A. Grüneis, J. Serrano, A. Bosak, M. Lazzeri, S.L. Molodtsov, L. Wirtz, C. Attaccalite, M. Krisch, A. Rubio, F. Mauri, T. Pichler. Phonon surface mapping of graphite: Disentangling quasi-degenerate phonon dispersions // *Phys. Rev. B* **80**, No. 8, 085423(5pp) (2009).

- [204] M. Calandra, F. Mauri. Electron-phonon coupling and electron self-energy in electron-doped graphene: Calculation of angular-resolved photoemission spectra // *Phys. Rev. B* **76**, No. 20, 205411(9pp) (2007).
- [205] V. Perebeinos, J. Tersoff. Valence force model for phonons in graphene and carbon nanotubes // *Phys. Rev. B* **79**, No. 24, 241409(R)(4pp) (2009).
- [206] S.V. Kusminskiy, D.K. Campbell, A.H. Castro Neto. Lenosky's energy and the phonon dispersion of graphene // *Phys. Rev. B* **80**, No. 3, 035401(5pp) (2009).
- [207] L. Wirtz, A. Rubio. The phonon dispersion of graphite revisited // *Solid State Commun.* **131**, No. 3–4, pp. 141–152 (2004).
- [208] K. Capelle, E.K.U. Gross. Relativistic framework for microscopic theories of superconductivity. I. The Dirac equation for superconductors // *Phys. Rev. B* **59**, No. 10, pp. 7140–7154 (1999).
- [209] H. Ryu, C. Mudry, C.-Y. Hou, C. Chamon. Masses in graphene-like two-dimensional electronic systems: Topological defects in order parameters and their fractional exchange statistics // *Phys. Rev. B* **80**, No. 20, 205319(32pp) (2009).
- [210] T.O. Wehling, H.P. Dahal, A.I. Lichtenstein, A.V. Balatsky. Local impurity effects in superconducting graphene // *Phys. Rev. B* **78**, No. 3, 035414(5pp) (2008).
- [211] R. Al-Jishi. Model for superconductivity in graphite intercalation compounds // *Phys. Rev. B* **28**, No. 1, pp. 112–116 (1983).
- [212] T.E. Weller, M. Ellerby, S.S. Saxena, R.P. Smith, N.T. Skipper. Superconductivity in the intercalated graphite compounds C_6Yb and C_6Ca // *Nature Phys.* **1**, No. 1, pp. 39–41 (2005).