

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

На правах рукописи

Суслов Михаил Васильевич

**Полная статистика переноса квантовых  
частиц, квантовая метрология и создание  
запутанных состояний**

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук  
Лесовик Гордей Борисович

Долгопрудный – 2016

# Оглавление

Введение . . . . .	4
<b>Глава 1. Полная статистика переноса в формализме волновых пакетов . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Полная статистика счета . . . . .	15
1.1.1. Одна частица . . . . .	18
1.1.2. $N$ частиц . . . . .	20
1.1.3. Неортогональный базис . . . . .	22
1.1.4. Инвариантность детерминанта Слэтера при линейных преобразованиях . . . . .	22
1.1.5. Диагонализация . . . . .	24
1.1.6. Полная статистика переноса для запутанных состояний	26
1.2. Две частицы . . . . .	29
1.2.1. Полная статистика переноса . . . . .	29
1.2.2. Ограничения из-за биномиальной статистики . . . . .	32
1.2.3. Запутанные состояния . . . . .	36
1.2.4. Две частицы со спином $1/2$ . . . . .	38
1.3. $N$ -частичный транспорт . . . . .	41
1.4. Обобщения . . . . .	46
1.4.1. Унитарная эволюция и зависящий от времени счет . . . . .	46
1.4.2. Матрица плотности – конечные температуры . . . . .	50
1.5. Постоянное напряжение . . . . .	53
1.5.1. Обобщенная биномиальная статистика . . . . .	54
1.5.2. Короткие времена измерения . . . . .	55

1.5.3.	Большие времена измерения . . . . .	57
1.5.4.	Фактор Фано для промежуточного режима . . . . .	61
1.5.5.	Конечная температура . . . . .	64
1.6.	Выводы . . . . .	68
<b>Глава 2.</b>	<b>Эффективная схема счета частиц . . . . .</b>	<b>71</b>
2.1.	Алгоритмы счета . . . . .	73
2.1.1.	Классический алгоритм . . . . .	73
2.1.2.	Квантовые измерения . . . . .	74
2.1.3.	Квантовый алгоритм . . . . .	75
2.1.4.	Проверка делимости . . . . .	81
2.2.	Возможная реализация кубитов . . . . .	82
2.3.	Выводы . . . . .	89
<b>Глава 3.</b>	<b>Общая теория квантового счета. Связь с преобразо-</b>	
	<b>ванием Фурье . . . . .</b>	<b>91</b>
3.1.	Различимость и квантовый счет . . . . .	92
3.2.	Квантовые счета . . . . .	101
3.3.	Обобщенное преобразование Фурье . . . . .	105
3.4.	Обсуждение и выводы . . . . .	106
<b>Глава 4.</b>	<b>Счет по основанию <math>d</math> . . . . .</b>	<b>108</b>
4.1.	Кубиты: двоичный счет . . . . .	109
4.2.	Кутриты: счет степеней 3 . . . . .	118
4.3.	Обобщение на кудиты . . . . .	129
4.4.	Реализация кутритов и кудитов . . . . .	132
4.4.1.	Спин-1 кутрит . . . . .	133

4.4.2. Трех-точечный кутрит . . . . .	139
4.4.3. Эмуляция кутрита кубитами . . . . .	139
4.5. Обсуждение и выводы . . . . .	146
<b>Глава 5. Связь с алгоритмом оценки фазы и приложения</b>	<b>148</b>
5.1. Связь с алгоритмом оценки фазы. . . . .	149
5.2. Квантовая метрология: измерение напряжения . . . . .	153
5.3. Многочастичное запутывание . . . . .	155
5.4. Обсуждение и выводы . . . . .	158
<b>Заключение</b> . . . . .	<b>160</b>
<b>Приложение А. Сильная теорема Сегё</b> . . . . .	<b>165</b>
<b>Приложение Б. Вывод операторов <math>U_p</math> и <math>M</math>, используемых для     эмуляции кутритов кубитами</b> . . . . .	<b>168</b>
<b>Список иллюстраций</b> . . . . .	<b>177</b>
<b>Литература</b> . . . . .	<b>179</b>

# Введение

За последние двадцать лет в квантовой физике произошли изменения, которые можно смело назвать революционными: во-первых, резко выросли возможности создавать системы с заданными свойствами и детально изучать их на мезо- и наномасштабах, во-вторых, в 90-е годы были осознаны новые возможности чисто квантовых систем, такие, как, например, возможность факторизации больших чисел посредством знаменитого алгоритма Шора, квантовая криптография и квантовая метрология. В данной работе изучается электронный транспорт в наноструктурах, возможность создания квантово запутанных электронных состояний с помощью специфических измерений, относящихся к так называемой квантовой метрологии. Соответствующие методы измерения могут быть применены для сверхточной регистрации ультрамалых напряжений и магнитных потоков, при этом применяются элементы квантовых алгоритмов, такие, как, например, преобразование Фурье в системе кубитов.

Цель работы состояла в изучении динамики квантовых частиц в нанопроводниках, возможности манипуляций ими и создания запутанных состояний, а также новых методов измерения числа частиц и электромагнитных полей.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и двух приложений. В конце приведен Список иллюстраций и используемая Литература.

**Глава 1** посвящена изучению полной статистики переноса заряда в формализме волновых пакетов. Простота формализма первичного квантования

позволила получить нетривиальные результаты по полной статистике переноса для рассеивателя, зависящего от энергии, включая зависимость от обменной симметрии переносимого заряда. Мы начинаем с  $N$ -частичного детерминанта Слэтера, который получен из ортонормированных одночастичных волновых функций  $\phi_m$ , описывающих фермионы, падающие слева, и выводим соответствующую характеристическую функцию, описывающую полную статистику переноса в виде детерминанта. Используя процедуру диагонализации, получаем характеристическую функцию обобщенной биномиальной статистики. Затем рассмотрен случай запутанных состояний, то есть состояний, которые описываются суперпозицией двух слэтеровских детерминантов. Выведена характеристическая функция для этого случая.

В разделе 1.2 мы используем эти результаты для обсуждения статистических транспортных свойств двух фермионов. Раздел 1.3 посвящен вычислению характеристической функции для случая постоянного напряжения, начиная с  $N$ -частичного транспорта, устремляя затем ширину индивидуальных волновых пакетов к бесконечности. В разделе 1.4 мы получаем результаты, которые относятся к устройству с зависящим от времени рассеянием и счетом некогерентных суперпозиций входящих частиц. В последнем разделе этой главы мы еще раз выводим результат для постоянного напряжения, включая пределы коротких и больших времен измерения, а также рассматриваем конечные температуры.

**Глава 2.** В этой главе будет предложен эффективный алгоритм счета частиц, который требует всего  $(\log_2 N)$  спинов-счетчиков (кубитов). В начале в разделах 2.1.1 и 2.1.2 изучается эффективность классического алгоритма и квантового измерения спином-кубитом. Затем в разделе 2.1.3

строится эффективный квантовый алгоритм счета частиц, который заметно уменьшает количество требуемых ресурсов. Использование упрощенного варианта квантового алгоритма позволяет определить степень двойки в разложении числа на простые множители. Эта процедура рассмотрена в разделе 2.1.4. Различные возможные реализации кубитов и их свойства представлены в разделе 2.2. Рассмотрена возможность реализовать зарядовый кубит при помощи заряженной частицы в двойной квантовой точке и предложены способы управления такими кубитами.

**Глава 3.** В этой главе сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных квантовых состояний при однократном измерении. В разделе 3.1 определяется оператор счета, изучается его спектр и строится полный набор собственных состояний этого оператора (вычислительный базис). Из требования того, чтобы процесс счета был реализован "мягким" образом, следует, что базис счета является квантовым обобщенным преобразованием Фурье вычислительного базиса. В разделе 3.2 вводится дополнительная структура (квантовые счеты), которая позволяет заметно уменьшить сложность алгоритма. Роль произвольных фаз в определении собственных состояний оператора счета и связь обобщенного и канонического преобразований Фурье рассмотрены в разделе 3.3.

**Глава 4.** В этой главе рассматриваются различные обобщения двоичного алгоритма на случай счета по другому основанию, обращая особое внимание на случай считающих в троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементарных считающих устройств. В разделе 4.1 мы кратко повторяем наш двоичный квантовый алгоритм с кубитами, включающий последовательную и однократную схему считывания, обращая осо-

бое внимание на связь с квантовым преобразованием Фурье. Затем в разделе 4.2 мы опишем возможную реализацию кубитов и кутритов заряженной частицей в многоямном потенциале и способы управления их состояниями. Затем обобщим алгоритм счета на счет в троичном представлении и счет степеней 3 при помощи кутритов. В разделе 4.3 будет рассмотрено дальнейшее обобщение на кудиты. В разделе 4.4 обсудим различные возможности других реализаций троичного алгоритма: систему со спином 1, служащую скорее мысленным экспериментом для иллюстрации, и две практические версии эмуляции кутритов кубитами.

**Глава 5.** В этой главе устанавливается связь между квантовым алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы, а также обсуждаются различные приложения. В разделе 5.1, мы обсудим интересное соответствие между нашим алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы (насколько известно, не существует аналогичного соответствия для алгоритма проверки делимости). Также будет показано, что полуклассическое и полное квантовое преобразования Фурье одинаково устойчивы относительно систематических ошибок, появляющихся при неполном (нецелом) счете. Более того, полуклассический алгоритм довольно устойчив относительно случайных ошибок; с последними можно справиться при помощи классической многокубитной схемы коррекции ошибок. Используя возможность точного измерения нецелых чисел, в разделе 5.2 рассматривается возможность создания квантового вольтметра (аналого-цифрового преобразователя). Схема для создания многочастичных запутанных состояний в интерферометре Маха-Цендера обсуждается в разделе 5.3.

**Приложения.** В приложениях А и В представлен вывод утверждений



и формул, используемых в основном тексте.

**Заключение.** Дается обзор полученных в работе результатов и приводится список публикаций по теме диссертации.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту, состоят в следующем:

1. Используя формализм первичного квантования для описания полной статистики переноса заряда невзаимодействующими электронами в мезоскопических устройствах, воспроизведены известные и получены новые выражения для характеристической функции полной статистики переноса, учитывающие энергетические зависимости и зависимость от времени в процессе рассеяния, а также обменные эффекты, обусловленные конечными перекрытиями пролетающих волновых пакетов.
2. Результаты пункта 1 применены для описания общих статистических свойств при рассеянии двух фермионов.
3. Получена суббиномиальная статистика для незапутанных входящих состояний (слэтеровский детерминант ранга 1), в то время как запутанные состояния (слэтеровский детерминант ранга 2) могут порождать супербиномиальный (и даже суперпуассоновский) шум. Это свойство может быть использовано в качестве детектора для различения спинового синглета или триплета.
4. Описан случай с постоянным напряжением, где учитывается зависимость рассеяния от энергии и конечных времен измерения, включая

совсем короткие времена измерения, на которых принцип Паули становится более важен.

5. Предложена схема, в которой несколько кубитов служат детектором в задаче о полной статистике переноса заряда. Ключевым элементом алгоритма является специфическое физическое устройство из  $K$  кубитов, выполняющее неразрушающий счет частиц  $n < N = 2^K$  в потоке, проходящем по квантовой проволоке. Этот алгоритм оказывается аналогичным алгоритму оценки фазы в обращенном виде: вместо того, чтобы определять фазу  $\phi$  при помощи  $N$  операций, фаза  $\phi$  считается известной, а мы стремимся найти число  $N$  операций, ассоциированных с прохождением частиц. Схема содержит условные измерения, когда  $j$ -ое измерение зависит от результатов предыдущих  $j - 1$  измерений, что напоминает двоичный граф.
6. Более простое одновременное (а не условное) измерение  $K$  кубитов позволяет выполнить проверку делимости измеряемого числа на  $2^K$ .
7. Сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных квантовых состояний при однократном измерении. Такое сведение к небольшому числу основных элементов естественным образом связывает задачу счета с квантовым преобразованием Фурье и дает нам общую конструктивную схему прибора для (невозмущающего) квантового алгоритма счета.
8. Исследованы различные возможности приборной реализации этого алгоритма, обращая особое внимание на случай считающих в троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементарных

считающих устройств.

9. Предложен способ создания многочастичных запутанных состояний (мобильных кубитов) следующим образом - сначала они запутываются со спиновым счетчиком, а после проективного измерения состояний счетчика запутанное многочастичное состояние может использоваться дальше.
10. Предложен новый способ измерения напряжения при помощи одного или нескольких зарядовых кубитов. Метод позволяет достичь гейзенберговского или стандартного квантового предела в зависимости от времени измерения.

## Глава 1

# Полная статистика переноса в формализме

## ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

Транспорт заряда через препятствие в проводе является статистическим процессом, полное описание которого дается функцией вероятности  $P(n, t)$ , которая говорит нам, сколько носителей заряда  $n$  проходит через провод за время  $t$ . Вычисление этой полной статистики переноса обычно сводится к вычислению производящей функции  $\chi(\lambda, t) = \sum_n P(n, t) e^{i\lambda n}$  для этого процесса, откуда распределение вероятности  $P(n, t)$  получается с помощью простого преобразования Фурье  $\mathcal{F}[\chi(\lambda, t)] = P(n, t)$ . Корректное физическое определение производящей функции  $\chi(\lambda, t)$  является нетривиальной задачей, она была решена Левитовым и Лесовиком в 1993 году [1], смотри также обзор [2], полученные результаты многократно использовались впоследствии [3]. Первоначальное определение включает понятие счетчика заряда в форме спина, связанного с движущимися зарядами через калибровочный потенциал, и оно было сделано в довольно сложной форме в формализме вторичного квантования. Недавно [4] было обнаружено соответствие между производящей функцией  $\chi_1(\lambda)$  полной статистики переноса для одной частицы и понятием точности (fidelity) в одночастичной хаотичной квантовой системе [5]. Это позволяет описать более просто, в терминах первичного квантования, полную статистику переноса и включить в рассмотрение обобщенную производящую функцию  $\chi_N(\lambda)$  для  $N$  частиц. На самом деле теория транспорта зарядов, позволяющая рассчитывать шум, сформулированная в терминах первичного квантования, уже

была опубликована несколько лет назад [6]. Более того, такой формализм волновых пакетов естественно описывает статистику импульсного транспорта, когда импульсы напряжения вызывают одночастичные возбуждения, которые подаются в устройство [2, 7–10] (источник, подающий индивидуальные электроны в квантовый провод был применен в недавних экспериментах [11]). Простота формализма первичного квантования позволила получить нетривиальные результаты по полной статистике переноса для рассеивателя, зависящего от энергии, включая зависимость от обменной симметрии переносимого заряда [12].

В настоящей работе мы интенсивно используем формализм волновых пакетов для решения задачи транспорта зарядов и выводим различные выражения для характеристической функции  $\chi_N(\lambda)$  более простым способом. Мы начинаем с  $N$ -частичного детерминанта Слэтера, полученного из ортонормированных одночастичных волновых функций  $\phi_m$ , описывающих фермионы, падающие слева, и выводим соответствующую характеристическую функцию, описывающую полную статистику переноса в виде детерминанта

$$\chi_N(\lambda) = \det \langle \phi_m | 1 - \mathcal{T} + \mathcal{T} e^{i\lambda} | \phi_n \rangle, \quad (1.1)$$

с оператором  $\mathcal{T}$ , описывающим зависящее от энергии прохождение частицы через рассеиватель,  $\mathcal{T} = \int (dk/2\pi) T_k |k\rangle \langle k|$  в импульсном ( $k$ ) представлении (здесь число частиц  $N$  заменяет временную переменную  $t$  в исходной формуле [1]). Детерминант в уравнении (1.1) может быть выражен в форме произведения

$$\chi_N(\lambda) = \prod_{m=1}^N (1 - \tau_m + \tau_m e^{i\lambda}), \quad (1.2)$$

где  $\tau_m$  - собственные значения Эрмитова оператора  $\mathcal{T}$  в пространстве, натянутом на состояния  $|\phi_n\rangle$ . Характеристическая функция (1.2) описывает

распределение вероятности, которое мы будем называть ‘*обобщенным биномиальным*’.

В реальном эксперименте импульсы напряжения, генерирующие входящие волновые пакеты, могут перекрываться. Для этого случая мы вновь выведем простое и элегантное выражение (1.2) для полной статистики переноса, но при этом заменим коэффициенты  $\tau_m$  корнями обобщенной задачи на собственные значения, которые включают все эффекты фермионной статистики и полную зависимость амплитуды прохождения (прозрачности) от энергии. Результаты (1.1) и (1.2) относятся к незапутанному состоянию в форме детерминанта Слэтера [13]. Имеется также обобщение для запутанных состояний в форме детерминанта Слэтера ранга 2 [14].

Далее мы обобщаем результат (1.1), чтобы описать ситуацию, в которой и процесс рассеивания и интервал счета зависят от времени, и получаем компактный результат в форме (1.1) с

$$\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}_Q = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{Q} \mathcal{U}, \quad (1.3)$$

где  $\mathcal{U}$  обозначает одночастичный оператор эволюции по времени, а оператор  $\mathcal{Q}$  проецирует волновую функцию на ее измеряемую часть. Полная статистика переноса для фермионных атомов в виде детерминанта была выведена в работе [15] при помощи замены бозонного выражения [16] на фермионное, недавние применения можно найти в работе [17].

Наконец, мы распространяем результат (1.3) на случай, когда исходное состояние состоит из некогерентной суперпозиции многих детерминантов Слэтера с различным числом частиц. В случае, когда частицы приходят только слева, мы имеем результат (1.1) с

$$\mathcal{T} \rightarrow \eta \mathcal{T}_Q, \quad (1.4)$$

где  $\eta$  обозначает одночастичный оператор чисел заполнения. Кроме того, детерминант в (1.1) должен быть взят по всему одночастичному Гильбертову пространству.

Мы широко используем эти формулы: для двухчастичной задачи мы показываем, что *i*) исходное состояние, описанное простым детерминантом Слэтера, не может дать фактор Фано  $F = \langle\langle n^2 \rangle\rangle / \langle n \rangle > 1 - \langle n \rangle / 2$  (т.е. шум всегда суббиномиальный, в частности, также субпуассонов, отсутствует группировка); эти кумулянты получены из производящей функции  $\chi(\lambda)$  при помощи  $\langle\langle n^j \rangle\rangle = (-i)^j \partial_\lambda^j \log \chi|_{\lambda=0}$ ; *ii*) при надлежащем выборе  $T_k$  входящее запутанное состояние может дать любую величину фактора Фано  $F < 2$ ; и *iii*) для двух фермионов со спином  $1/2$  мы показываем, что простой эксперимент по рассеянию дает информацию о запутанности исходного состояния (смотри также статью [18]).

Далее мы анализируем случай  $N$  фермионов и выводим полную статистику переноса для постоянного напряжения ( $V$ ), обобщая таким образом исходный результат Левитова и Лесовика [1], чтобы описать транспорт с зависящей от энергии амплитудой прохождения (см. статью [19]). Наш результат

$$\log \chi_N(\lambda) = N \frac{2\pi \hbar v_F}{eV} \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - T_k + T_k e^{i\lambda}), \quad (1.5)$$

допускает простую интерпретацию полной статистики переноса, как получаемую из переноса выведенного из равновесия моря Ферми, находящегося между энергиями  $E_F$  и  $E_F + eV$ , где  $E_F$  обозначает энергию Ферми, а  $V$  - приложенное напряжение. Используя альтернативный вывод, основанный на уравнении (1.3), и стационарные состояния рассеяния, мы получаем статистику переноса в пределе коротких времен, затем снова получаем биноми-

альный результат (1.5) в пределе больших времен, при этом число частиц  $N$  заменяется на время измерения  $t$ ,  $N \rightarrow t eV/2\pi\hbar$ . Использование нашего детерминанта вместе с теоремой Сегё [20, 21] позволяет нам представить строгий вывод этих результатов.

Далее мы даем краткий обзор предыдущей работы по этой тематике, а затем выводим характеристические функции (1.1) и (1.2) для  $N$  фермионов. В разделе 1.2 мы используем эти результаты для обсуждения статистических транспортных свойств двух фермионов. Раздел 1.3 посвящен вычислению характеристической функции для случая постоянного напряжения, начиная с  $N$ -частичного транспорта, устремляя затем ширину индивидуальных волновых пакетов к бесконечности. В разделе 1.4 мы выводим результаты (1.3) и (1.4), которые относятся к устройству с зависящим от времени рассеянием и счетом некогерентных суперпозиций входящих частиц. Мы еще раз выводим результат для постоянного напряжения, включая предел коротких времен.

## 1.1. Полная статистика счёта

Впервые производящая функция для полной статистики переноса, основанная на простом выражении  $\chi(\lambda, t) = \langle \exp[i\lambda \int dt' \mathcal{I}(t')] \rangle$ , где  $\mathcal{I}(t)$  обозначает оператор тока, была введена в работе Левитова и Лесовика [22]. Вскоре было понято [1], что такое определение не соответствует никакой известной (даже на уровне мысленного эксперимента) процедуре измерения; тем не менее, это первое определение дало правильные результаты для всех неприводимых корреляторов ток-ток на нулевой частоте  $\langle \langle \mathcal{I}_0 \dots \mathcal{I}_0 \rangle \rangle$  (смотри также обсуждения в статье [23]). В последующей статье [24] было дано



первое 'осуществимое' определение производящей функции  $\chi(\lambda, t)$ , которое (по крайней мере в принципе) соответствует реальному эксперименту счета, содержащему спин-гальванометр в качестве измерительного устройства (смотри также статью [2]). В последнее время было показано [4], что это определение (соответствующее скорее 'мысленному' эксперименту) может быть действительно реализовано при помощи кубитов, служащих измерительным устройством, в котором 'шум', создаваемый проходящим зарядом, служит измерительным сигналом для полной статистики переноса. Это расходится с обычной интерпретацией 'шума среды', ответственного за расфазировку кубитов [25] и также имеющего отношение к взаимосвязи между информацией и сбоем фазы [26] в квантовой теории измерений.

Понимание эквивалентности понятий точности (fidelity) и полной статистики переноса послужило мотивом для развития формализма первичного квантования в проблеме счета в терминах волновых пакетов. Точность (Fidelity)  $|\chi_{\text{fid}}|$ , модуль перекрытия  $\chi_{\text{fid}} = \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle$ , была введена Пересом [5] при исследовании хаотических систем. Она измеряет степень перекрытия между двумя состояниями  $|\Psi_{1,2}\rangle$ , которые описывают начальное состояние  $|\Psi_0\rangle$  после эволюции под действием двух слегка различных Гамильтонианов. В контексте полной статистики одной частицы, измеряемой спиновым счетчиком, волновые функции  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  заменяются на состояния рассеяния  $\Psi_{\text{out}}^+$  и  $\Psi_{\text{out}}^-$ , взаимодействующие со спином в состояниях  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ , в результате имеем выражение для производящей функции в форме  $\chi_1 = \langle \Psi_{\text{out}}^- | \Psi_{\text{out}}^+ \rangle$ . Эта новая формулировка в терминах волновых пакетов обеспечивает радикальное упрощение по сравнению с первоначальным формализмом вторичного квантования [2]. В то время как использование формализма вторичного квантования обязательно для описания частиц,

связанных с бозонными возбуждениями полей (фотоны, фононы и т.д.), здесь мы имеем дело с нерелятивистскими электронами, когда число частиц фиксировано, что позволяет нам использовать альтернативный формализм первичного квантования. Кроме того, наш формализм волновых пакетов имеет технические преимущества (например при описании зависящего от энергии рассеяния или при классификации двухчастичных событий рассеяния) и дает более хорошее физическое понимание. Заметим, однако, что при конечных температурах мы используем формализм вторичного квантования в пространстве Фока.

Метод, альтернативный процедуре с использованием спиновых счетчиков, был рассмотрен в нескольких статьях [27–29], в которых полная статистика и, в частности, производящая функция  $\chi(\lambda, t)$  были построены с использованием только базисных определений квантовой механики; стартуя с начального состояния в форме собственного состояния оператора числа частиц с фиксированным числом частиц справа от рассеивателя (или счетчика), вторая проекция (на собственные состояния оператора числа частиц) на конечное состояние осуществляется через время наблюдения  $t$ . Обе процедуры (проектирование и счет спином) приводят к одному и тому же выражению для производящей функции  $\chi$ , при условии что начальное состояние не приводит к суперпозиции после прохождения через счетчик. В последнем случае явное вычисление с использованием спинового счетчика дает фиделити, описывающую декогеренцию спина, а рассмотрение с использованием производящей функции может дать вероятность переноса нецелого заряда [28] и, следовательно, является нефизическим. С другой стороны, метод проектирования, разрушающий такую суперпозицию при первом измерении, всегда допускает интерпретацию на языке вероятностей.

### 1.1.1. Одна частица

В этой главе мы будем широко использовать производящую функцию, полученную в формализме первичного квантования: начиная с одночастичной проблемы, мы используем эквивалентность понятий точности и полной статистики переноса. [4] Рассмотрим входящий слева волновой пакет  $\psi(x; t \rightarrow -\infty)$  в виде

$$\psi(x; t) = \int \frac{dk}{2\pi} \phi_1(k) e^{ikx - i\epsilon(k)t} \quad (1.6)$$

с нормировкой  $\int (dk/2\pi) |\phi_1(k)|^2 = 1$ , см. Рис. 1.1. Далее мы предположим (для простоты) линейность спектра  $\epsilon = v_F k$ , где  $v_F$  это скорость Ферми; при низких температурах и напряжениях интересная физика обычно имеет место в окрестностях поверхности Ферми. Импульс  $\hbar k$  и энергия  $\hbar\epsilon$  измеряются относительно импульса Ферми  $\hbar k_F$  и энергии Ферми  $E_F$ . Здесь и далее волновой пакет содержит только импульсы с  $k > 0$  для того, чтобы исключить вклад моря Ферми, которое рассматривается как вакуум в нашем анализе. Рассеиватель в точке  $x = 0$  описывается зависящими от импульса (энергии) амплитудами прохождения (отражения)  $t_k$  ( $r_k$ ; отражение частиц переводит нас на другую ветвь  $\epsilon = -v_F k$ , где  $k$  измеряется относительно  $-k_F$ ). Спиновый (или кубитный) счетчик, расположенный справа от рассеивателя, добавляет фазовый множитель  $e^{\pm i\lambda/2}$  в волновую функцию, в котором знак зависит от состояния  $|\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\rangle$  спина. Выходящая ( $t \rightarrow \infty$ ) волновая функция принимает вид

$$\begin{aligned} \psi_{\text{out}}^{\pm}(x; t) = & \int \frac{dk}{2\pi} [r_k e^{-ik(x+v_F t)} \Theta(-x) \\ & + t_k e^{ik(x-v_F t)} e^{\pm i\lambda/2} \Theta(x)] \phi_1(k) \end{aligned} \quad (1.7)$$

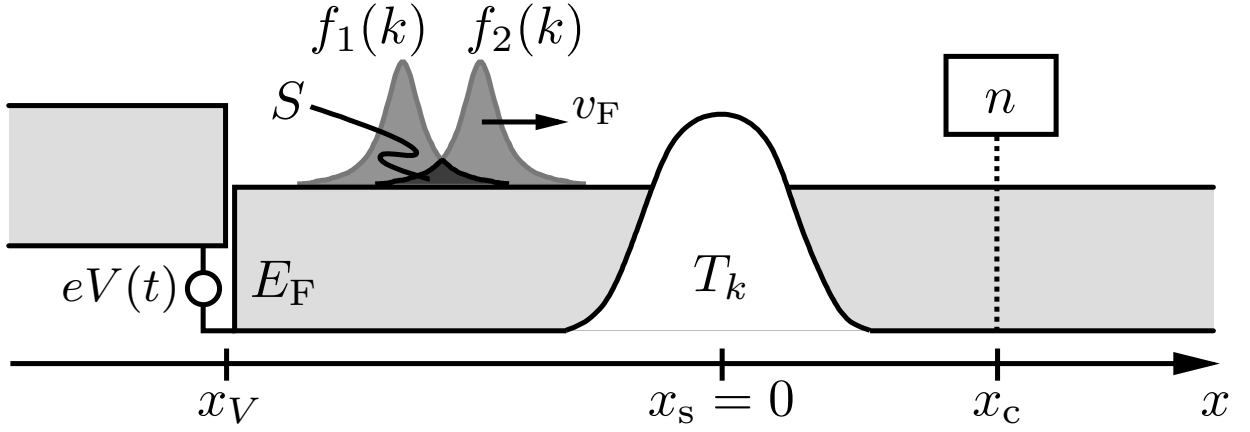
и состоит из отраженной ( $x < 0$ ) и прошедшей ( $x > 0$ ) частей;  $\Theta(x)$  - единичная ступенька. Фиделити (точность)  $\chi_1(\lambda)$  задается перекрытием волновых функций, которые в процессе эволюции взаимодействуют с различными состояниями спина  $|\uparrow\rangle$  и  $|\downarrow\rangle$ ,

$$\begin{aligned}\chi_1(\lambda) &= \int dx \psi_{\text{out}}^-(x; t)^* \psi_{\text{out}}^+(x; t) \\ &\xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \int \frac{dk}{2\pi} (1 - T_k + T_k e^{i\lambda}) |\phi_1(k)|^2 \\ &= \langle \phi_1 | 1 - \mathcal{T} + \mathcal{T} e^{i\lambda} | \phi_1 \rangle,\end{aligned}\tag{1.8}$$

в пределе больших времен; используя полное разделение прошедшей и отраженной частей волновой функции, интегрирование по координате выполняется тривиально. Более того, зависимость от времени исчезает как только прошедшая волновая функция пересекает счетчик. Вероятность прохождения  $T_k = |t_k|^2$  - это собственное значение оператора прохождения  $\mathcal{T} = \int (dk/2\pi) T_k |k\rangle \langle k|$ . При выбранном выше взаимодействии со спином фиделити эквивалентна характеристической функции

$$\chi(\lambda) = \sum_m P_m e^{i\lambda m}\tag{1.9}$$

полной статистики, как определено в статье [24], где спин-гальванометр был использован в качестве измерительного устройства. Коэффициенты Фурье  $P_m$  это вероятности прохождения  $m$  частиц. В случае одной входящей частицы возможны два исхода: частица отразилась с вероятностью  $P_0 = 1 - \langle \mathcal{T} \rangle$  и частица прошла с вероятностью  $P_1 = \langle \mathcal{T} \rangle$ , где  $\langle \mathcal{T} \rangle = \langle \phi_1 | \mathcal{T} | \phi_1 \rangle$  обозначает среднюю вероятность прохождения. Зная характеристическую функцию, кумулянты  $\langle \langle n^j \rangle \rangle$  могут быть получены как



**Рис. 1.1.** Квантовый провод с рассеивающим центром, расположенным в точке  $x_s$  и имеющим зависящую от импульса вероятность прохождения  $T_k$ . Потенциал  $eV(t)$ , приложенный в точке  $x_V$  (слева от рассеивателя), создает входящие волновые пакеты  $f_1$ ,  $f_2$  с перекрытием  $S = \langle f_2 | f_1 \rangle$ . Счетчик, расположенный в точке  $x_c$  (справа от рассеивателя), измеряет число  $n$  прошедших частиц. Мы рассматриваем входящие волновые пакеты с импульсом  $k > 0$ , находящиеся вне Ферми моря. В результате Ферми море, которое не учитывается в нашем анализе, не возбуждено в пределе больших времен. Для конечных времен наблюдения присутствие Ферми моря создает дополнительный шум, который не рассматривается в этой работе.

коэффициенты в разложении Тейлора функции  $\log \chi(\lambda)$ ,

$$\langle \langle n^j \rangle \rangle = \left( \frac{d}{i d \lambda} \right)^j \log \chi(\lambda) \Big|_{\lambda=0}. \quad (1.10)$$

В дальнейшем нас будет особенно интересовать фактор Фано, равный отношению  $F = \langle \langle n^2 \rangle \rangle / \langle n \rangle$  второго кумулянта к первому.

### 1.1.2. $N$ частиц

Далее мы обобщим наше описание на случай  $N$  частиц с волновой функцией  $\Psi(\mathbf{k})$ , определенной в импульсном пространстве; вектор

$\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$  определяет  $N$  импульсов частиц. Мы рассмотрим независимые частицы без взаимодействия, которые рассеиваются независимо. После рассеяния выходящая волновая функция имеет асимптотический ( $t \rightarrow \infty$ ) вид

$$\begin{aligned} \psi_{\text{out}}^{\pm}(\mathbf{x}; t) = & \left\{ \prod_{m=1}^N \int \frac{dk_m}{2\pi} [r_{k_m} e^{-ik_m(x_m + v_F t)} \Theta(-x_m) \right. \\ & \left. + t_{k_m} e^{ik_m(x_m - v_F t)} e^{\pm i\lambda/2} \Theta(x_m)] \right\} \Psi(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (1.11)$$

т.е., эволюция описывается произведением одночастичных функций из выражения (1.7). Характеристическая функция полной статистики  $\chi_N(\lambda) = \int d\mathbf{x} \psi_{\text{out}}^{-}(\mathbf{x}; t)^* \psi_{\text{out}}^{+}(\mathbf{x}; t)$  тогда может быть записана в виде

$$\chi_N(\lambda) = \left\{ \prod_{m=1}^N \int \frac{dk_m}{2\pi} (1 - T_{k_m} + T_{k_m} e^{i\lambda}) \right\} |\Psi(\mathbf{k})|^2. \quad (1.12)$$

До сих пор мы точно не определяли тип входящей волновой функции. Если мы ограничимся состояниями, которые описываются детерминантом Слэтера, составленным из ортогональных одночастичных состояний  $\phi_m$ ,

$$\Psi(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \det \phi_m(k_n), \quad (1.13)$$

тогда выражение из (1.12) может быть переписано в виде детерминанта (смотри Ур. (1.69))

$$\begin{aligned} \chi_N(\lambda) &= \det \int \frac{dk}{2\pi} \phi_m^*(k) (1 - T_k + T_k e^{i\lambda}) \phi_n(k) \\ &= \det \langle \phi_m | 1 - \mathcal{T} + \mathcal{T} e^{i\lambda} | \phi_n \rangle, \end{aligned} \quad (1.14)$$

содержащего одночастичные матричные элементы  $\langle \phi_m | \mathcal{O} | \phi_n \rangle$  оператора  $\mathcal{O} = 1 - \mathcal{T} + \mathcal{T} e^{i\lambda}$ .

### 1.1.3. Неортогональный базис

При физической реализации такого эксперимента обычно заселяются не ортогональные состояния, использованные при конструировании детерминанта Слэтера, а состояния  $f_1$  и  $f_2$  с конечным перекрытием (смотри Рис. 1.1), то есть эти состояния неортогональны. Конечно,  $N$ -частичный детерминант Слэтера может быть также построен из неортогональных состояний  $|f_m\rangle$ , при условии что они линейно независимы, то есть  $\det\langle f_m|f_n\rangle \neq 0$ . Полностью антисимметричная и нормированная волновая функция (1.13) тогда приобретает форму

$$\Psi^f(k_1, \dots, k_N) = \frac{1}{\sqrt{N! \det\langle f_m|f_n\rangle}} \det f_m(k_n). \quad (1.15)$$

Подставляя это выражение в (1.12) и повторяя вычисления, которые привели к (1.14), получаем производящую функцию в виде отношения двух детерминантов,

$$\begin{aligned} \chi_N(\lambda) &= \frac{\det\langle f_m|1 - \mathcal{T} + \mathcal{T}e^{i\lambda}|f_n\rangle}{\det\langle f_m|f_n\rangle} \\ &= \frac{\det(\mathbf{S}^f - \mathbf{T}^f + \mathbf{T}^f e^{i\lambda})}{\det \mathbf{S}^f} \end{aligned} \quad (1.16)$$

с двумя  $N \times N$  матрицами

$$\mathbf{S}_{mn}^f = \langle f_m|f_n\rangle \quad \text{and} \quad \mathbf{T}_{mn}^f = \langle f_m|\mathcal{T}|f_n\rangle. \quad (1.17)$$

### 1.1.4. Инвариантность детерминанта Слэтера при линейных преобразованиях

Оказывается, что выражение (1.16) для производящей функции может быть радикально упрощено и переписано в обобщенной биномиальной форме. В качестве первого шага для достижения этой цели заметим, что

$N$ -мерное Гильбертово пространство  $H_N$ , натянутое на одночастичные волновые функции  $f_n(k)$ , определяет только одну полностью антисимметричную волновую функцию или, что эквивалентно, существует только одно (с точностью до фазы) соответствующее  $N$ -частичное состояние. Таким образом, антисимметричное  $N$ -частичное состояние полностью определяется Гильбертовым пространством  $H_N$  и не зависит от выбранного базиса [30].

В качестве примера рассмотрим двухчастичное состояние (в обозначениях вторичного квантования)  $|\Psi\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle$ , с вакуумным состоянием  $|0\rangle$  и Фермионными операторами  $a_{1,2}$ . Вводя новые операторы  $a_\pm = (a_1 \pm a_2)/\sqrt{2}$ , легко увидеть, что двухчастичное состояние

$$a_+^\dagger a_-^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2}(a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1^\dagger - a_2^\dagger)|0\rangle = a_2^\dagger a_1^\dagger |0\rangle = |\Psi\rangle \quad (1.18)$$

не изменилось. Рассмотрим теперь общее  $N$ -частичное состояние в форме Ур. (1.15). При линейных комплексных преобразованиях базисных состояний  $f_m(k)$  в новые состояния  $g_m(k)$

$$g_m(k) = \sum_n A_{nm} f_n(k), \quad \det \mathbf{A} \neq 0, \quad (1.19)$$

антисимметричная комбинация

$$\det g_m(k_n) = (\det \mathbf{A}) \det f_m(k_n) \quad (1.20)$$

остается инвариантной с точностью до множителя  $\det \mathbf{A}$ ; здесь мы использовали тот факт, что детерминант произведения двух матриц равен произведению детерминантов. Более того, нормированные  $N$ -частичные состояния  $\Psi^f$  и  $\Psi^g$  удовлетворяют соотношению

$$\Psi^g(k_1, \dots, k_N) = \text{sgn}(\det \mathbf{A}) \Psi^f(k_1, \dots, k_N) \quad (1.21)$$



где  $\text{sgn}(x) = x/|x|$ . Единственный эффект введения нового базиса состоит в появлении дополнительного фазового множителя  $\text{sgn}(\det \mathbf{A})$ , который не меняет характеристическую функцию (1.12). Следовательно, вычисление полной статистики в базисах  $f$  и  $g$  дает одинаковые результаты.

### 1.1.5. Диагонализация

Рассмотренная выше инвариантность может быть использована для упрощения вычисления полной статистики. Более того, даже без детализации (не зависящего от времени) рассеивателя, можно получить полезные знания о структуре возможных ответов при вычислении полной статистики. В частности, оказывается, что наиболее общая полная статистика для состояний в виде детерминанта Слэтера дается обобщенным биномиальным выражением в форме (1.2).

Давайте вначале исследуем, как инвариантность при линейных преобразованиях, уравнение (1.19), проявляется в детерминантной формуле из уравнения (1.16). Для этого заметим, что любая матрица  $\mathbf{B}$  вида (1.17) при линейных преобразованиях  $\mathbf{A}$  базисных функций меняется согласно уравнению

$$\mathbf{B}^g = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{B}^f \mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{S}, \mathbf{T}. \quad (1.22)$$

Так как  $\det(\mathbf{AB}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ , получаем, что характеристическая функция  $\chi_N$  (мы обозначили  $\mathbf{X}^f = \mathbf{S}^f - \mathbf{T}^f + \mathbf{T}^f e^{i\lambda}$ ) инвариантна при замене базиса,

$$\chi_N = \frac{\det \mathbf{X}^f}{\det \mathbf{S}^f} = \frac{|\det \mathbf{A}|^2 \det \mathbf{X}^f}{|\det \mathbf{A}|^2 \det \mathbf{S}^f} = \frac{\det \mathbf{X}^g}{\det \mathbf{S}^g}. \quad (1.23)$$

Эта инвариантность может быть использована при помощи перехода к новым ортогональным базисным функциям  $g_m(k)$  с матрицей перекрытий  $\mathbf{S}_{mn}^g = \delta_{mn}$  и с матрицей прохождения, имеющей диагональный вид

$\mathbf{T}_{mn}^g = \tau_m \delta_{mn}$ . Возможность одновременной диагонализации матриц  $\mathbf{T}_{mn}^g$  и  $\mathbf{S}_{mn}^g$  является следствием закона преобразования (1.22), характерного для билинейных форм (в противоположность линейным преобразованиям  $\mathbf{L}$  по закону  $\mathbf{L}^g = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}^f \mathbf{A}$ ) в сочетании с положительностью матрицы  $\mathbf{S}^f$ . Соответствующий собственный базис  $g_m$  и собственные значения  $\tau_m$  матрицы  $\mathbf{T}_{mn}^g$  можно найти, решая уравнение

$$(\mathbf{T}^f - \tau_m \mathbf{S}^f) a_m = 0 \quad (1.24)$$

с нормировкой  $a_m^\dagger \mathbf{S}^f a_m = 1$ . Собственные векторы  $a_m$  являются столбцами матрицы преобразования  $\mathbf{A} = (a_1, \dots, a_N)$ . Собственные значения есть корни характеристического полинома  $\det(\mathbf{T}^f - \tau \mathbf{S}^f) = 0$ . Полная статистика, уравнение (1.16), записанная в новом базисе  $g_m(k)$ , принимает обобщенную биномиальную форму

$$\chi_N(\lambda) = \prod_{m=1}^N (1 - \tau_m + \tau_m e^{i\lambda}), \quad (1.25)$$

где детерминант вычислен явно и результат зависит только от собственных значений  $\tau_m$ . Обобщенная задача на собственные значения может быть сведена к обычной при помощи перехода к ортогональному базису  $\phi_m(k)$ , с  $\mathbf{S}^\phi = \hat{\mathbf{1}}_N$ , который можно получить, применяя процедуру Грама-Шмидта или приравнивая  $\phi_m(k) = \sum_n [(\mathbf{S}^f)^{-1/2}]_{nm} f_n(k)$ .

Из вышеизложенного видно, что конкретный вид задачи на собственные числа (1.24) зависит от базиса, тогда как собственные значения и векторы зависят только от оператора перехода  $\mathcal{T}$ , действующего в гильбертовом пространстве  $H_N$  со скалярным произведением  $\langle f|g \rangle$ . Действительно, можно найти собственные значения и собственные векторы независимым от базиса образом, используя положительно определенные квадратичные фор-

мы  $T(g) = \langle g|\mathcal{T}|g\rangle$  и  $S(g) = \langle g|g\rangle$ ,  $g \in H_N$ . Представляя билинейную форму  $T(g)$  с фиксированным  $S(g) = 1$  в виде полярного графика зависимости радиуса  $T(g)$  от направления, задаваемого вектором  $g$  в гильбертовом пространстве  $H_N$ , мы получаем эллипсоид в  $N$ -мерном пространстве. Тогда длины главных осей этого эллипсоида соответствуют собственным значениям, а их направления - собственным векторам задачи (1.24) [31]. Собственные значения  $\tau_m$  ограничены интервалом  $[0, 1]$ , поскольку  $T(g) \geq 0$  и  $T(g) \leq S(g)$  в силу свойства унитарности.

### 1.1.6. Полная статистика переноса для запутанных состояний

Выше мы обсуждали начальные состояния, описываемые одним слэтеровским детерминантом, то есть незапутанные состояния с рангом Слэтера, равным 1. Имеет смысл обобщить эти рассуждения на запутанные состояния, в которых присутствует когерентная суперпозиция слэтеровских детерминантов. Рассмотрим начальное состояние  $N$  частиц с рангом Слэтера, равным 2,

$$\Psi(\mathbf{k}) = \alpha\Psi^{\text{I}}(\mathbf{k}) + \beta\Psi^{\text{II}}(\mathbf{k}), \quad (1.26)$$

где  $\Psi^{\text{I}}(\mathbf{k})$  и  $\Psi^{\text{II}}(\mathbf{k})$  - нормированные  $N$ -частичные слэтеровские детерминанты, описывающие прилетающие слева частицы и сделанные из одночастичных состояний  $f_m^{\text{I}}(k)$  и  $f_m^{\text{II}}(k)$ ,  $m = 1, \dots, N$ ; комплексные числа  $\alpha$  и  $\beta$  выбраны так, чтобы состояние  $\Psi(\mathbf{k})$  было нормированно. Характеристическая функция полной статистики счета (1.12) принимает вид

$$\begin{aligned} \chi_N(\lambda) = & \left[ \prod_{m=1}^N \int \frac{dk_m}{2\pi} (1 - T_{k_m} + T_{k_m} e^{i\lambda}) \right] \left[ |\alpha|^2 |\Psi^{\text{I}}(\mathbf{k})|^2 + \right. \\ & \left. + |\beta|^2 |\Psi^{\text{II}}(\mathbf{k})|^2 + 2\text{Re}\{\alpha\beta^* \Psi^{\text{I}}(\mathbf{k})\Psi^{\text{II}}(\mathbf{k})^*\} \right], \quad (1.27) \end{aligned}$$

где  $\text{Re}$  обозначает вещественную часть. Первые два члена сводятся к производящим функциям для состояний, описываемых простыми слэтеровскими детерминантами, и мы можем записать

$$\begin{aligned} \chi_N(\lambda) = & |\alpha|^2 \chi_N^{\text{I}}(\lambda) + |\beta|^2 \chi_N^{\text{II}}(\lambda) + \\ & + \alpha\beta^* \chi_N^{\text{mix}}(\lambda) + \alpha^*\beta \chi_N^{\text{mix}}(-\lambda)^* \end{aligned} \quad (1.28)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_N^{\text{I}}(\lambda) &= \frac{\det(\mathbf{S}^{f^{\text{I}}} - \mathbf{T}^{f^{\text{I}}} + \mathbf{T}^{f^{\text{I}}} e^{i\lambda})}{\det \mathbf{S}^{f^{\text{I}}}}, \\ \chi_N^{\text{II}}(\lambda) &= \frac{\det(\mathbf{S}^{f^{\text{II}}} - \mathbf{T}^{f^{\text{II}}} + \mathbf{T}^{f^{\text{II}}} e^{i\lambda})}{\det \mathbf{S}^{f^{\text{II}}}}, \\ \chi_N^{\text{mix}}(\lambda) &= \frac{\det(\mathbf{S}^{\text{mix}} - \mathbf{T}^{\text{mix}} + \mathbf{T}^{\text{mix}} e^{i\lambda})}{\sqrt{\det \mathbf{S}^{f^{\text{I}}} \mathbf{S}^{f^{\text{II}}}}}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Матрицы с верхними индексами  $f^{\text{I}}$  и  $f^{\text{II}}$  были определены в уравнении (1.17), тогда как новые матрицы с верхним индексом ‘mix’ задаются матричными элементами

$$\mathbf{S}_{mn}^{\text{mix}} = \langle f_m^{\text{II}} | f_n^{\text{I}} \rangle, \quad \mathbf{T}_{mn}^{\text{mix}} = \langle f_m^{\text{II}} | \mathcal{T} | f_n^{\text{I}} \rangle. \quad (1.30)$$

Первые два члена в (1.28) могут быть диагонализированы описанным выше способом, сравни с (1.24),

$$\chi_N^{\text{I}}(\lambda) = \prod_{m=1}^N (1 - \tau_m^{\text{I}} + \tau_m^{\text{I}} e^{i\lambda}), \quad (1.31)$$

$$\chi_N^{\text{II}}(\lambda) = \prod_{m=1}^N (1 - \tau_m^{\text{II}} + \tau_m^{\text{II}} e^{i\lambda}), \quad (1.32)$$

с собственными значениями  $\tau_m^{\text{I}}$  и  $\tau_m^{\text{II}}$ , равными корням уравнений  $\det(\mathbf{T}^{\text{I}} - \tau^{\text{I}} \mathbf{S}^{\text{I}}) = 0$  и  $\det(\mathbf{T}^{\text{II}} - \tau^{\text{II}} \mathbf{S}^{\text{II}}) = 0$ .

Рассмотрим характеристическую функцию  $\chi^{\text{mix}}(\lambda)$ . К сожалению, на этот раз не существует общей процедуры, поскольку матрицы  $\mathbf{S}^{\text{mix}}$  и  $\mathbf{T}^{\text{mix}}$  не являются более эрмитовыми и, следовательно, выражение (1.27), вообще говоря, трудно упростить. В частности, характеристическая функция  $\chi^{\text{mix}}(\lambda)$  не является инвариантной при преобразованиях базисов  $f_m^{\text{I}}$  и  $f_m^{\text{II}}$  (такие преобразования оставляют слэтеровский детерминант неизменным с точностью до фазового множителя, который исчезает при вычислении характеристической функции для состояния ранга 1, но остается при когерентной суперпозиции двух слэтеровских детерминантов). Чтобы продвинуться дальше, ограничим наше рассмотрение двумя частными случаями:  $\mathbf{S}^{\text{mix}} = 0$  или  $\det \mathbf{S}^{\text{mix}} \neq 0$ . Наиболее простой случай реализуется для взаимноортогональных наборов базисных функций  $f_m^{\text{I}}$  и  $f_m^{\text{II}}$ , тогда  $\mathbf{S}^{\text{mix}} = 0$ ; если, в дополнение к этому,  $\det \mathbf{T}^{\text{mix}} = 0$ , то мы имеем  $\chi^{\text{mix}}(\lambda) = 0$  (см. также ниже Раздел 1.2.3), в противном случае  $\chi^{\text{mix}}(\lambda) = \tau^{\text{mix}}(e^{i\lambda} - 1)^N$ , где  $\tau^{\text{mix}} = \det \mathbf{T}^{\text{mix}} / \sqrt{\det \mathbf{S}^{f^{\text{I}}} \mathbf{S}^{f^{\text{II}}}}$ .

Далее, допустим, что матрица  $\mathbf{S}^{\text{mix}}$  является обратимой,  $\det \mathbf{S}^{\text{mix}} \neq 0$ . Пусть  $\tau_m^{\text{mix}}$  - корни полинома

$$\det[\mathbf{T}^{\text{mix}} - \tau^{\text{mix}} \mathbf{S}^{\text{mix}}] = 0. \quad (1.33)$$

Тогда матрицу  $\mathbf{T}^{\text{mix}}(\mathbf{S}^{\text{mix}})^{-1}$  можно привести к каноническому виду Жордана с числами  $\tau_m^{\text{mix}}$  на диагонали, и характеристическая функция принимает простой вид

$$\chi_N^{\text{mix}}(\lambda) = \frac{\det \mathbf{S}^{\text{mix}}}{\sqrt{\det \mathbf{S}^{f^{\text{I}}} \mathbf{S}^{f^{\text{II}}}}} \prod_{m=1}^N (1 - \tau_m^{\text{mix}} + \tau_m^{\text{mix}} e^{i\lambda}). \quad (1.34)$$

Эта процедура может быть непосредственно обобщена на состояния с более высоким рангом Слэтера.

## 1.2. Две частицы

### 1.2.1. Полная статистика переноса

Полученные выше результаты имеют интересные общие следствия для переноса заряда фермионами; ниже мы обсудим простейший случай двух частиц, см. Рис. 1.1, где проявляются нетривиальные обменные свойства. Для двух частиц  $N = 2$  диагонализация (1.24) может быть проделана в явном виде для произвольных матриц  $\mathbf{T}^f$  и  $\mathbf{S}^f$ . Два собственных значения  $\tau_{1,2}$  равны

$$\tau_{1,2} = \frac{\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - \det \mathbf{T}^f \det \mathbf{S}^f}}{\det \mathbf{S}^f}, \quad (1.35)$$

где параметр  $2\alpha = \mathbf{S}_{22}^f \mathbf{T}_{11}^f + \mathbf{S}_{11}^f \mathbf{T}_{22}^f - 2\text{Re}(\mathbf{S}_{12}^f \mathbf{T}_{21}^f)$ . Другим способом собственные значения  $0 \leq \tau_m \leq 1$  находятся по принципу максимума/минимума [31]

$$\tau_1 = \min_{g \in H_2 | S(g)=1} T(g), \quad \tau_2 = \max_{g \in H_2 | S(g)=1} T(g), \quad (1.36)$$

причем собственные функции  $g_{1,2}(k)$  соответствуют тем функциями, которые дают минимальные/максимальные значения, т.е.  $T(g_{1,2}) = \tau_{1,2}$ . Когда собственные значения  $\tau_m$  известны, характеристическая функция  $\chi_2$  принимает простую обобщенную биномиальную форму

$$\chi_2(\lambda) = (1 - \tau_1 + \tau_1 e^{i\lambda})(1 - \tau_2 + \tau_2 e^{i\lambda}). \quad (1.37)$$

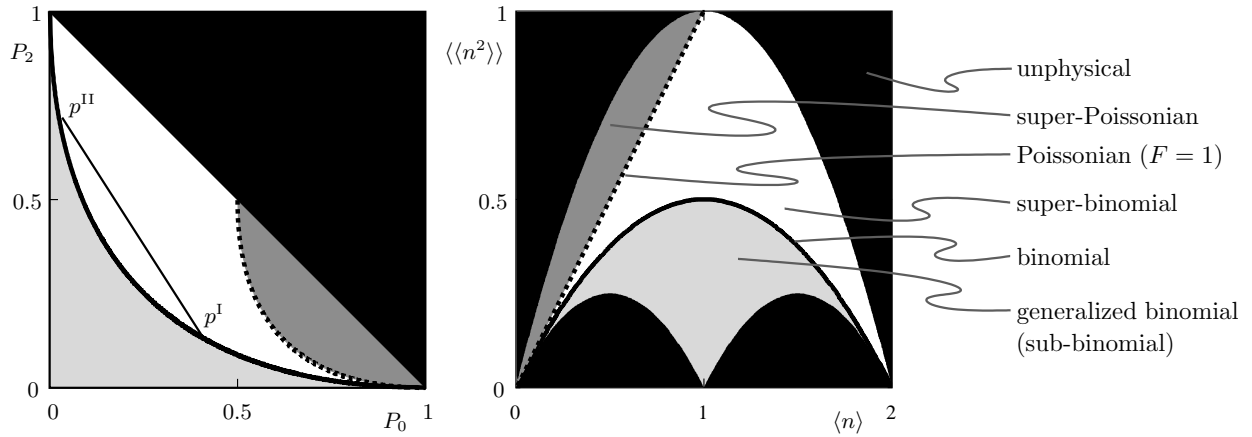
В результате мы находим, что в новом базисе  $g_m$  две частицы проходят через рассеиватель независимо друг от друга, то есть характеристическая функция является простым произведением независимых одночастичных характеристических функций. Более того, характеристическая функция определяется Гильбертовым пространством начальных состояний  $f_{1,2}$  и не

зависит от выбора базиса. Обменные эффекты проявляются при сравнении результата (1.37) для слэтеровского детерминанта  $\Psi^f \propto \det f_m(k_n)$  с результатом  $\chi_2^{\text{dist}}(\lambda) = (1 - T_{11}^f + T_{11}^f e^{i\lambda})(1 - T_{22}^f + T_{22}^f e^{i\lambda})$  для различных частиц,  $\Psi^{\text{dist}} \propto f_1(k_1)f_2(k_2)$ . Обменные эффекты отсутствуют, если оба матричных элемента  $S_{21}^f = \langle f_2|f_1 \rangle = 0$  и  $T_{21}^f = 0$ , то есть для ортогональных начальных и прошедших состояний. С другой стороны, не равенство нулю по меньшей мере одного матричного элемента приводит к конечным обменным эффектам, которые выражаются в замене  $T_{mm}^f$  в  $\chi_2^{\text{dist}}$  на собственные значения  $\tau_m$  в  $\chi_2$ .

Принцип минимума/максимума, описанный выше, влечет за собой ряд *априорных* неравенств для вероятностей прохождения  $n$  частиц  $P_n$ , которые включают матричные элементы оператора прохождения  $T_{\min} = \min\{T_{11}^f, T_{22}^f\}$  и  $T_{\max} = \max\{T_{11}^f, T_{22}^f\}$ ; отметим, что вероятности  $P_n$  учитывают обменные эффекты, хотя одночастичные матричные элементы  $T_{mm}^f$ , очевидно, этого не делают. С начальными (неортогональными) волновыми пакетами  $f_m$ , нормированными на единицу,  $S(f_m) = 1$ , поиск экстремумов в уравнении (1.36) также включает эти состояния. Таким образом, мы получаем набор неравенств  $0 \leq \tau_1 \leq T_{\min} \leq T_{\max} \leq \tau_2 \leq 1$ . Используя их для оценки  $P_0 = (1 - \tau_1)(1 - \tau_2) \leq (1 - \tau_2)$ ,  $P_2 = \tau_1\tau_2 \leq \tau_1$  и  $P_1 = 1 - P_0 - P_2$ , мы можем вывести следующие ограничения

$$P_0 \leq 1 - T_{\max}, \quad P_1 \geq T_{\max} - T_{\min}, \quad P_2 \leq T_{\min}. \quad (1.38)$$

для вероятностей прохождения двух частиц. Эти неравенства дают верхнюю границу для вероятности группировки ( $P_2$  и  $P_0$ ) и нижнюю границу для вероятности антигруппировки ( $P_1$ ). Заметим, тем не менее, что ограничение на  $P_2$  не исключает того, что вероятность прохожде-



**Рис. 1.2.** Диаграммы, которые описывают статистические свойства прохождения двух частиц, слева в виде  $P_2$ - $P_0$  диаграммы, справа в виде шум-заряд  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle$ - $\langle n \rangle$  диаграммы. Черная область не имеет физического смысла, поскольку в ней сумма вероятностей  $P_0, P_1, P_2$  принимает значения вне интервала  $[0, 1]$ . Светло-серые области изображают обобщенные биномиальные (суб-биномиальные) процессы, уравнение (1.37), и ограничены черной линией, которая показывает обычные биномиальные процессы. Линии из точек соответствуют процессам с фактором Фано  $F = \langle\langle n^2 \rangle\rangle / \langle n \rangle$ , равным единице. Внутри темно-серых областей шум супер-Пуассонов с фактором Фано  $F > 1$ . Чтобы наблюдать супер-Пуассонов шум, вероятность отражения должна быть большой,  $P_0 > 1/2$  и  $\langle n \rangle < 1$ .



ния превысит (благодаря обменным эффектам) ‘классическое’ значение  $P_2^{\text{dist}} = T_{11}^f T_{22}^f$  для различных частиц, смотри  $\chi_2^{\text{dist}}$  выше. Действительно, так как  $T_{11}^f T_{22}^f \leq T_{\text{min}}$ , значение  $P_2 > T_{11}^f T_{22}^f$  остается возможным. Этот эффект недавно наблюдался [32]: вероятность двуэлектронных событий при электронной эмиссии из  $\text{Cs}_3\text{Sb}$  катода в фотоумножителе была больше, чем квадрат вероятности одноэлектронной эмиссии. Эффект наблюдался в случае термоэмиссии без освещения фотокатода и при слабом освещении. К тому же, как показывают вычисления, большое  $P_2$  может быть получено для волновых пакетов с амплитудами  $f_2(k) = f_1(k + \delta k)$ , сдвинутыми в  $k$ -пространстве, и с большим интегралом перекрытия  $S_{21}^f$ , в сочетании с амплитудой прохождения, подавленной при  $k$  в области перекрытия.

### 1.2.2. Ограничения из-за биномиальной статистики

Произвольный двухчастичный процесс рассеяния полностью описывается тремя параметрами  $P_0, P_1, P_2$ , из которых только два независимы; здесь мы предполагаем, что мы можем посылать только целые заряды. На рисунках 1.2(a) и (b) мы выделяем области с различными статистическими свойствами, которые могут быть получены в двухфермионном процессе рассеяния; на одном рисунке в пространстве параметров  $P_0$ – $P_2$ , на другом в переменных шум  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle$  и среднее число  $\langle n \rangle$ . Начнем с определения физически допустимой области на этих диаграммах, требуя чтобы  $P_1 = 1 - P_0 - P_2 \geq 0$  (Рис. 1.2(a)) и  $P_0, P_1, P_2 \geq 0$  (Рис. 1.2(b)), находим что черные области запрещены.

Традиционно при обсуждении статистики Пуассона ( $F = 1$ ), применимой для испускаемого лазером когерентного света или для транспорта классического электронного газа через вакуумную трубку, большое внимание

уделялось различию суб- и суперпуассоновских статистик с уменьшенной и увеличенной интенсивностью шума, количественно характеризующейся фактором Фано  $F < 1$  (субпуассоновский шум) и  $F > 1$  (суперпуассоновские процессы). Для фермионов, как мы выяснили, общей отправной точкой является, вместо пуассоновской, биномиальная статистика, с последующей квалификацией режимов суб- и супербиномиальных процессов, о которых речь пойдет ниже.

Тем не менее, мы начнем наш анализ с традиционной классификации, сравнивая статистику процесса с пуассоновской статистикой, которая обозначена точечной линией на Рис. 1.2(а), определяемой соотношением

$$F = \frac{P_0(1 - P_0) + P_2(1 - P_2) + 2P_0P_2}{1 - P_0 + P_2} = 1, \quad (1.39)$$

т.е.,

$$P_2 = P_0 - \sqrt{2P_0 - 1} \quad \text{с} \quad P_0 \geq 1/2. \quad (1.40)$$

В темно-серой области шум является суперпуассоновским, что обычно ассоциируется с группировкой частиц и, следовательно, с бозоновской статистикой. Заметим, что факторы Фано, большие, чем пуассоновская величина 1, требуют большой вероятности отражения  $P_0 > 1/2$ ; только при отражении большинства частиц можно наблюдать группировку оставшихся прошедших объектов.

Намного более естественной является классификация нашей фермионной системы при помощи биномиальной статистики (и отклонения от нее). Характеристическая функция  $\chi_2$  для двух фермионов в состоянии слэтеровского детерминанта может быть представлена в обобщенной биномиальной форме Ур. (1.37), зависящей от двух параметров  $\tau_1, \tau_2$ . Следовательно,

вероятности удовлетворяют дополнительному неравенству

$$\sqrt{P_0} + \sqrt{P_2} \leq 1. \quad (1.41)$$

При вычислении параметров  $\tau_1, \tau_2$  через вероятности  $P_0, P_2$ , используя соотношения  $P_0 = (1 - \tau_1)(1 - \tau_2)$  и  $P_2 = \tau_1\tau_2$ , получаем квадратное уравнение; требование положительности дискриминанта этого уравнения приводит к неравенству (1.41), которое определяет светлосерую область на Рис. 1.2(a), естественно названную суббиномиальной областью. Толстая черная линия, ограничивающая эту обобщенную биномиальную (или суббиномиальную) область, является линией обычной биномиальной статистики, реализующейся в случае вырождения коэффициентов прохождения  $\tau_1 = \tau_2$ , имеющего место, например, при независимости процесса рассеяния от энергии.

Область с суперпуассоновским шумом (темносерая) и суббиномиальная область (светлосерая) отличаются друг от друга, причем статистика фермионов с начальным состоянием в виде слэтеровского детерминанта всегда остается в суббиномиальной области. Заметим, что статистика произвольного двухчастичного процесса (без подробного описания обменных свойств) также зависит от двух из трех параметров  $P_0, P_1, P_2$  (поскольку условие  $P_0 + P_1 + P_2 = 1$  должно быть выполнено), но не может быть представлена в виде Ур. (1.37) в общем случае, вследствие чего эти процессы свободны от дополнительного ограничения (1.41).

Диаграмма  $P_2-P_0$  может быть представлена в виде более близкой к эксперименту диаграммы  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle - \langle n \rangle$ , смотри Рис. 1.2(b). Физические огра-

ничения  $0 \leq P_0, P_1, P_2$  приводят к ряду неравенств

$$\begin{aligned}\langle\langle n^2 \rangle\rangle &\geq \langle n \rangle(1 - \langle n \rangle), \\ \langle\langle n^2 \rangle\rangle &\leq \langle n \rangle(2 - \langle n \rangle), \\ \langle\langle n^2 \rangle\rangle &\geq (\langle n \rangle - 1)(2 - \langle n \rangle),\end{aligned}\tag{1.42}$$

которые можно представить в более компактном виде  $(m + 1 - \langle n \rangle)(\langle n \rangle - m) \leq \langle\langle n^2 \rangle\rangle \leq \langle n \rangle(2 - \langle n \rangle)$ , где  $m = 0, 1$ . Единственная большая и две маленькие параболы, ограничивающие нефизические (черные) области, задаются вторым и двумя первыми (для  $m = 0, 1$ ) неравенствами. Для обобщенной (или суб-) биномиальной статистики дополнительное ограничение принимает вид

$$F = \frac{\langle\langle n^2 \rangle\rangle}{\langle n \rangle} \leq 1 - \langle n \rangle/2,\tag{1.43}$$

причем равенство выполняется в биномиальном случае при  $\tau_1 = \tau_2$ . Внутри светлосерой области диаграммы шум является суббиномиальным  $F \leq 1 - \langle n \rangle/2$  и, следовательно, субпуассоновским,  $F \leq 1$ . Заметим, что для бесшумового прохождения заряда требуется, чтобы средний прошедший заряд был бы целым.

Обобщение изложенного выше анализа на случай  $N$  частиц в начальном состоянии в виде детерминанта Слэтера производится непосредственно. Обобщенная биномиальная характеристическая функция дается Ур. (1.2). Положительность вероятностей  $P_m \geq 0$ ,  $m = 0, \dots, N$  налагает  $N + 1$  ограничений на два первых момента  $\langle n \rangle$  and  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle$ ,  $(m + 1 - \langle n \rangle)(\langle n \rangle - m) \leq \langle\langle n^2 \rangle\rangle \leq \langle n \rangle(N - \langle n \rangle)$ , при  $m = 0, \dots, N - 1$ , что определяет простое обобщение Рис. 1.2(b) с одной большой и  $N$  маленькими параболоми. В обобщенном биномиальном случае дополнительное ограни-

чения

$$F = \frac{\langle\langle n^2 \rangle\rangle}{\langle n \rangle} \leq 1 - \langle n \rangle / N \leq 1 \quad (1.44)$$

говорят о том, что начальные состояния в виде слэтеровского детерминанта дают суббиномиальную статистику шума. Недавно схожий результат был получен в работе [33], посвященной адиабатической накачке. Авторы рассмотрели зависящую от времени матрицу рассеяния в приближении мгновенного рассеяния (то есть не зависящий от энергии рассеиватель) и получили производящую функцию в виде произведения, описывающего обобщенную биномиальную статистику с параметрами  $u_m \leq 0$ , соответствие которых нашим параметрам  $\tau_m$  дается выражением  $\tau_m = (1 - u_m)^{-1}$ .

### 1.2.3. Запутанные состояния

Изложенное выше обсуждение случая двух частиц позволяет нам сделать вывод, что начальные состояния в виде слэтеровского детерминанта дают факторы Фано  $F \leq 1 - \langle n \rangle / 2 \leq 1$ ; такие состояния не являются запутанными. С другой стороны, запутанное двухчастичное состояние может быть порождено суммой двух слэтеровских детерминантов; такое запутанное состояние (с  $0 < \alpha < 1$ , т.е. состояние со слэтеровским рангом 2, смотри Раздел 1.1.6)

$$\Psi(k_1, k_2) = \sqrt{\alpha} \Psi^I(k_1, k_2) + \sqrt{1 - \alpha} \Psi^{II}(k_1, k_2), \quad (1.45)$$

достаточно для того, чтобы породить все возможные типы двухчастичных статистик: мы выбираем (приходящие слева) волновые функции  $\Psi^I$  и  $\Psi^{II}$  так, чтобы они занимали различные области в пространстве импульсов, например,  $\Psi^I$  имеет носитель в области  $k < k_c$ , а  $\Psi^{II}$  - в области  $k > k_c$ . Далее, пусть вероятность прохождения будет  $T_1 = T_{k < k_c}$  в области ниже

$k_c$  и  $T_2 = T_{k>k_c}$  в области выше  $k_c$ . При таких условиях все интегралы перекрытия исчезают, например,  $\int (dk_1 dk_2 / 4\pi^2) \Psi^{\text{II}*}(k_1, k_2) \Psi^{\text{I}}(k_1, k_2) = 0$ , и мы получаем (сравни Ур. (1.28))

$$\chi_2(\lambda) = \alpha(1 - T_1 + T_1 e^{i\lambda})^2 + (1 - \alpha)(1 - T_2 + T_2 e^{i\lambda})^2, \quad (1.46)$$

то есть производящая функция является просто взвешенной суммой двух индивидуальных производящих функций состояний слэтеровского детерминанта. Статистика таких запутанных состояний описывается точками на диаграмме  $P_2$ - $P_0$  на Рисунке 1.2(a), которые лежат на прямой линии, соединяющей точки  $p^{\text{I}}$  для  $\Psi^{\text{I}}$  и точку  $p^{\text{II}}$  для  $\Psi^{\text{II}}$ , причем коэффициент  $\alpha$  параметризует прямую. Обе точки  $p^{\text{I}}$  и  $p^{\text{II}}$  расположены на биномиальной линии, тогда как соединяющая их прямая может входить в супербиномиальную или даже в суперпуассоновскую область: например, полагая  $T_1 = 0$  и  $T_2 = 1$ , получим характеристическую функцию в виде  $\chi_2 = \alpha + (1 - \alpha)e^{2i\lambda}$  и  $F = 2\alpha$ , что предполагает значения между нулем и двойкой (заметим, что в пределе  $\alpha \rightarrow 1$  волновая функция (1.45) имеет слэтеровский ранг 1, тем не менее фактор Фано близок к  $F = 2$ . Поскольку при  $P_0 = 1$  фактор Фано имеет вид  $0/0$ , его значение зависит от направления, по которому приближаются к точке  $P_0 = 1$ ). Поскольку простые слэтеровские детерминанты производят только факторы Фано до  $1 - \langle n \rangle / 2$ , то большее его значение свидетельствует о запутывании двух частиц [34, 35]. Для  $N$  прилетающих частиц в запутанном состоянии ранга 2 аналогичная конструкция (сравни 1.1.6) дает фактор Фано  $F = N\alpha$ , где  $0 < \alpha < 1$ , таким образом, суперпуассоновская статистика может быть получена при достаточно больших  $\alpha$ .

#### 1.2.4. Две частицы со спином 1/2

Далее, рассмотрим ситуацию, показанную на Рис. 1.1, с двумя входящими частицами в нормированных состояниях  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$  с перекрытием  $S = S_{21}^f = \langle f_2 | f_1 \rangle$  и спиновыми степенями свободы (спин 1/2). Рассмотрим случай не зависящего от спина рассеяния, когда коэффициенты в  $T^f$  зависят исключительно от  $f_1(k)$  и  $f_2(k)$ . Четыре должным образом симметризованных состояния обозначим посредством  $\Psi_{s,m_s}(\mathbf{k})$ , причем  $s = 0$  соответствует синглетному состоянию ( $m_s = 0$ ), а  $s = 1$  трем триплетным состояниям ( $m_s = -1, 0, +1$ ). Степени свободы  $\mathbf{k}$  описывают импульсы  $k_n$  и спины  $s_n$  частиц,  $\mathbf{k} = (k_1, s_1; k_2, s_2)$ . Триплетные состояния с  $m_s = \pm 1$  являются состояниями, которые описываются простым детерминантом Слэтера

$$\begin{aligned} \Psi_{1,\pm 1}(\mathbf{k}) = & \frac{1}{\sqrt{2(1 - |S|^2)}} [f_1(k_1)\chi_{\uparrow/\downarrow}(s_1)f_2(k_2)\chi_{\uparrow/\downarrow}(s_2) \\ & - [(k_1, s_1) \leftrightarrow (k_2, s_2)]] . \end{aligned} \quad (1.47)$$

Характеристическая функция  $\chi_2$  для полной статистики переноса принимает тогда обобщенную биномиальную форму с  $\tau_{1/2}$ , задаваемыми Ур. (1.35),

$$\begin{aligned} \chi_{1,\pm 1}(\lambda) = & (1 - \tau_1 + \tau_1 e^{i\lambda})(1 - \tau_2 + \tau_2 e^{i\lambda}) \quad (1.48) \\ = & \frac{(1 - T_{11}^f + T_{11}^f e^{i\lambda})(1 - T_{22}^f + T_{22}^f e^{i\lambda})}{1 - |S|^2} \\ & - \frac{(S - T_{21}^f + T_{21}^f e^{i\lambda})(S^* - T_{12}^f + T_{12}^f e^{i\lambda})}{1 - |S|^2} . \end{aligned}$$

Состояния с  $m_s = 0$  более интересны, поскольку их слэтеровский ранг

равен 2. Определяя

$$\begin{aligned} f_1^{\text{I}}(k, s) &= f_1(k)\chi_{\uparrow}(s), & f_2^{\text{I}}(k, s) &= f_2(k)\chi_{\downarrow}(s), \\ f_1^{\text{II}}(k, s) &= f_1(k)\chi_{\downarrow}(s), & f_2^{\text{II}}(k, s) &= f_2(k)\chi_{\uparrow}(s), \end{aligned} \quad (1.49)$$

получаем

$$\Psi_{0/1,0}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm |S|^2)}} [\Psi^{\text{I}}(\mathbf{k}) \mp \Psi^{\text{II}}(\mathbf{k})] \quad (1.50)$$

где  $\Psi^{\text{I/II}}(\mathbf{k})$  - нормированные двухчастичные слэтеровские детерминанты, устроенные из состояний  $f_m^{\text{I/II}}$ . Вычисление характеристической функции производится по описанной выше процедуре: поскольку матрицы  $\mathbf{T}_{mn}^{\text{I/II}} = \mathbf{T}_{mm}^f \delta_{mn}$  и  $\mathbf{S}_{mn}^{\text{I/II}} = \delta_{mn}$  являются диагональными (частицы 1 и 2 различимы), мы немедленно получаем

$$\chi^{\text{I/II}}(\lambda) = (1 - \mathbf{T}_{11}^f + \mathbf{T}_{11}^f e^{i\lambda})(1 - \mathbf{T}_{22}^f + \mathbf{T}_{22}^f e^{i\lambda}). \quad (1.51)$$

Для вычисления функции  $\chi^{\text{mix}}(\lambda)$  надо рассчитать матрицы  $\mathbf{T}^{\text{mix}}$  и  $\mathbf{S}^{\text{mix}}$ . В рассматриваемом случае матрицы являются полностью недиагональными с недиагональными матричными элементами  $\mathbf{T}_{21}^{\text{mix}} = \mathbf{T}_{21}^f$  и  $\mathbf{S}_{21}^{\text{mix}} = S$ . Вычисляя детерминанты в Ур. (1.29), получаем смешанную компоненту в виде

$$\chi^{\text{mix}}(\lambda) = -(S - \mathbf{T}_{21}^f + \mathbf{T}_{21}^f e^{i\lambda})(S^* - \mathbf{T}_{12}^f + \mathbf{T}_{12}^f e^{i\lambda}) \quad (1.52)$$

и характеристическую функцию

$$\begin{aligned} \chi_{0/1,0}(\lambda) &= \frac{(1 - \mathbf{T}_{11}^f + \mathbf{T}_{11}^f e^{i\lambda})(1 - \mathbf{T}_{22}^f + \mathbf{T}_{22}^f e^{i\lambda})}{1 \pm |S|^2} \\ &\quad \pm \frac{(S - \mathbf{T}_{21}^f + \mathbf{T}_{21}^f e^{i\lambda})(S^* - \mathbf{T}_{12}^f + \mathbf{T}_{12}^f e^{i\lambda})}{1 \pm |S|^2}. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Результат (1.53) согласуется с результатами работы [12]. Характеристические функции двух триплетных состояний с  $s = 1$  и магнитным числом



$m_s = \pm 1$  и характеристическая функция триплетного состояния с нулевым магнитным числом  $s = 1, m_s = 0$  совпадают с характеристическими функциями для слэтеровского детерминанта бесспиновых фермионов, Ур. (1.37). Такое совпадение имеет место благодаря тому, что все три состояния имеют идентичные орбитальные волновые функции, а процесс рассеяния не зависит от спиновой части волновой функции. Соответствующее среднее число частиц  $\langle n \rangle_{1, m_s}$  и шум  $\langle \langle n^2 \rangle \rangle_{1, m_s}$  находятся внутри области обобщенной биномиальной статистики, смотри Рис. 1.2,

$$F_{1, m_s} \leq 1 - \langle n \rangle_{1, m_s} / 2. \quad (1.54)$$

Синглетное запутанное состояние (с  $s = 0$ ) необязательно удовлетворяет этому условию. Скорее, наоборот, в случае равенства индивидуальных вероятностей прохождения для двух частиц,  $T_{11}^f = T_{22}^f$ , моменты и факторы Фано всегда находятся вне области обобщенной биномиальной статистики,

$$F_{0,0} \geq 1 - \langle n \rangle_{0,0} / 2, \quad (1.55)$$

как показывают длинные, но простые вычисления. Следовательно, такая довольно простая схема может быть использована для различения синглетного состояния от триплетных, а также может служить индикатором запутывания (при выполнении строгих неравенств, что имеет место при  $S \neq 0$  и  $T_{21}^f \neq S T_{11}^f$ ).

Сходный эксперимент был рассмотрен в работе [18], в которой две частицы с одинаковой энергией входили через разные плечи в симметричный делитель (см. работу [14] для расчета полной статистики переноса для такого устройства). В нашем же устройстве используется только один канал, зато накладывается требование зависимости от энергии для вероятности прохождения (иначе мы остановились бы на биномиальной линии).

Более того, сама возможность разделения синглетного и триплетных состояний определяется присутствием или отсутствием обобщенной биномиальной статистики и, следовательно, задает биномиальную границу  $1 - \langle n \rangle_{0,0}/2$  для  $F$ .

### 1.3. $N$ -частичный транспорт

Рассмотрим случай  $N$  прилетающих частиц, имеющих одинаковую форму волновой функции  $f(k)$ , выстроенные упорядоченно в реальном пространстве с разделением  $a$ ; волновая функция  $m$ -ой частицы тогда дается выражением  $f_m(k) = f(k)e^{-imak}$ . Матрица перекрытия и матрица прохождения (1.17) задаются преобразованиями Фурье

$$\begin{aligned} S_{mn}^f &= \int \frac{dk}{2\pi} |f(k)|^2 e^{i(m-n)ka}, \\ T_{mn}^f &= \int \frac{dk}{2\pi} |f(k)|^2 T_k e^{i(m-n)ka} \end{aligned} \quad (1.56)$$

и являются матрицами Тейлица, элементы которых зависят только от разности индексов  $m - n$ . В пределе  $N \rightarrow \infty$  детерминанты матриц Тейлица  $S^f$  и  $S^f - T^f + T^f e^{i\lambda}$  можно оценить, сводя интеграл по  $k$ -пространству к интегралу по первой зоне Бриллюэна  $[0, 2\pi/a]$  и используя теорему Сегё,

см. работу [20] и Приложение А,

$$\log \det \mathbf{S}^f \sim N \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log \left\{ \frac{1}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[(\theta + 2\pi m)/a]|^2 \right\},$$

$$\log \det(\mathbf{S}^f - \mathbf{T}^f + \mathbf{T}^f e^{i\lambda}) \sim$$

$$\sim N \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log \left\{ \frac{1}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[(\theta + 2\pi m)/a]|^2 [1 - T_{(\theta+2\pi m)/a} + T_{(\theta+2\pi m)/a} e^{i\lambda}] \right\}.$$

(1.57)

Логарифмы этих детерминантов линейно зависят от  $N$ , что и следовало ожидать, поскольку при больших расстояниях  $a$  корреляция между частицами исчезает. Объединяя результаты из (1.57) и заменяя интегрирование по углу  $\theta$  интегрированием по первой зоне Бриллюэна  $k \in [0, 2\pi/a]$ , находим производящую функцию в виде

$$\log \chi_N(\lambda) = Na \int_0^{2\pi/a} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - \tau_k + \tau_k e^{i\lambda}) \quad (1.58)$$

с эффективными вероятностями прохождения

$$\tau_k = \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(k + 2\pi m/a)|^2 T_{k+2\pi m/a}}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(k + 2\pi m/a)|^2}, \quad (1.59)$$

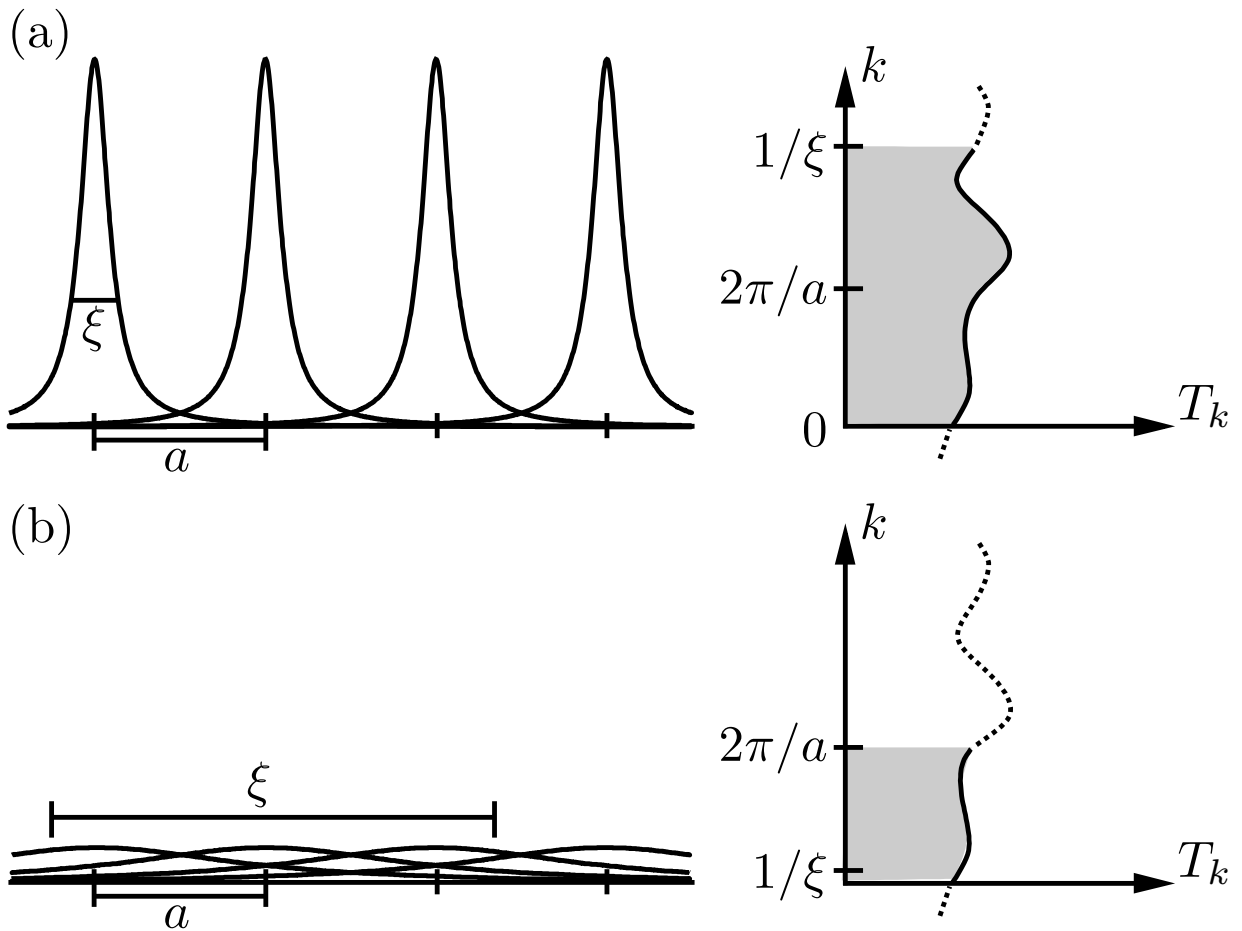
под которыми понимаются вероятности прохождения (с  $0 \leq \tau_k \leq 1$ ), усредненные по высшим гармоникам  $2\pi m/a$  с весами  $|f(k + 2\pi m/a)|^2$ .

Применим этот результат к волновым пакетам, порождаемым лоренцевскими импульсами напряжения. Как показано в работе [10], лоренцевский импульс напряжения  $eV_{t_0}(t) = 2\hbar\gamma/[(t - t_0)^2 + \gamma^2]$ , параметризованный шириной  $\gamma$  и временем появления  $t_0$  (здесь  $c \int dt V(t) = hc/e = \Phi_0$

– квант потока), возбуждает одну частицу с волновой функцией  $f_{x_0}(k) = \sqrt{4\pi\xi}e^{-\xi k - ix_0 k}\Theta(k)$ , двигающуюся по квантовой проволоке ( $\Theta(k)$  обозначает ступенчатую функцию; напомним, что импульсы  $k$  измеряются относительно импульса Ферми  $k_F$ ). Здесь  $e$  – заряд частицы,  $x_0 = v_F t_0$  задает положение,  $\xi = v_F \gamma$  – ширина волнового пакета в реальном пространстве. Периодическая последовательность таких импульсов напряжения  $V(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} V_{ma/v_F}(t)$ , подаваемых слева от рассеивателя, возбуждает по одной частице за временной интервал  $a/v_F$ . Такой процесс дает вероятности прохождения

$$\tau_k = (1 - e^{-4\pi\xi/a}) \sum_{m \geq 0} e^{-4\pi m \xi/a} T_{k+2\pi m/a}. \quad (1.60)$$

Для неперекрывающихся волновых пакетов  $\xi \ll a$ , смотри рисунок 1.3(a), обменные эффекты отсутствуют. Сумма в Ур. (1.60) заменяется на интеграл, и вероятности прохождения принимают простой вид  $\tau_k = \int (dk'/2\pi) |f(k')|^2 T_{k'} = \langle \mathcal{T} \rangle$  (что легко получить из (1.59) заменой сумм на интегралы), не зависящий от  $k$ : каждая частица исследует вероятности прохождения со своим весом  $|f(k)|^2$ . В противоположном случае  $\xi \gg a$ , т.е. для пакетов плоских волн с сильным перекрытием, результат для различных частиц есть  $\tau_k^{\text{dist}} \rightarrow T_0$ . Тем не менее, обменные эффекты заставляют систему заполнить первую зону Бриллюэна  $k \in [0, 2\pi/a]$  и частицы зондируют прохождение внутри этого энергетического интервала  $\tau_k = T_k$  (что получается из (1.60) при сохранении только одного члена  $m = 0$ ), смотри рисунок 1.3(b). Предельный переход  $\xi \rightarrow \infty$  соответствует случаю постоянного приложенного напряжения  $V$  величиной  $eV = 2\pi\hbar v_F/a$  (напомним, что проинтегрированный по времени импульс напряжения создает единич-



**Рис. 1.3.** (а) Транспорт неперекрывающихся волновых пакетов,  $\xi \ll a$ . Каждая частица туннелирует независимо от других с вероятностью прохождения  $\int (dk/2\pi) |f(k)|^2 T_k$ , зависящей только от  $f(k)$ . Для волновых пакетов с шириной  $\xi$  частицы тестируют вероятности прохождения в интервале импульсов до  $1/\xi$ . (б) Транспорт сильно перекрывающихся волновых пакетов,  $\xi \gg a$ . Если частицы туннелируют независимо друг от друга (нет обменных эффектов), то они зондируют вероятности прохождения  $T_k$  в интервале импульсов до  $1/\xi \approx 0$ . Благодаря обменным эффектам частицы заполняют Ферми море, определяемое плотностью  $1/a$ . Таким образом, частицы зондируют вероятности прохождения для импульсов в интервале  $[0, 2\pi/a]$ . Это состояние можно рассматривать как аналог случая постоянного напряжения.

ный поток  $\Phi_0 = hc/e$ , и что импульсы разделены временным интервалом  $a/v_F$ ); производящая функция принимает вид

$$\log \chi_N(\lambda) = N \frac{2\pi \hbar v_F}{eV} \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - T_k + T_k e^{i\lambda}). \quad (1.61)$$

Этот результат, следовательно, дает характеристическую функцию полной статистики переноса для постоянного напряжения  $V$ , приложенного слева от рассеивателя, включая случай зависящего от энергии рассеивателя. Эквивалентный результат был найден в работе [19], если мы поменяем число частиц  $N$  на ‘время измерения’  $t$  согласно формуле  $N \rightarrow tv_F/a = teV/2\pi\hbar$  (заметим, что хотя такая замена кажется разумной, предельный переход  $t \rightarrow \infty$  был бы нестрогим в рамках настоящего формализма; мы прокомментируем это обстоятельство позднее).

Следующий член в асимптотическом разложении при  $N \rightarrow \infty$  можно получить, используя обобщение теоремы Сегё (гипотеза Фишера—Хартвига, сравни Ур. (A.10)), в виде

$$\Delta \log \chi_N(\lambda) = \frac{\log N}{4\pi^2} \log^2 \left[ \frac{1 - T_{2\pi/a} + T_{2\pi/a} e^{i\lambda}}{1 - T_0 + T_0 e^{i\lambda}} \right]; \quad (1.62)$$

логарифмическая природа этой поправки обусловлена энергетической зависимостью вероятности прохождения  $T_k$ , в частности, ее скачком  $T_0 \neq T_{2\pi/a}$  при переходе через первую зону Бриллюэна,  $k \in [0, 2\pi/a]$  (для  $T_0 = T_{2\pi/a}$  поправочный член порядка единицы, смотри (A.7)). Поправка для шума дается выражением

$$\Delta \langle \langle n^2 \rangle \rangle = \frac{(T_{2\pi/a} - T_0)^2}{2\pi^2} \log N \quad (1.63)$$

и аналогичные поправки получаются для кумулянтов более высокого порядка.

## 1.4. Обобщения

### 1.4.1. Унитарная эволюция и зависящий от времени счет

Мы хотим обобщить производящую функцию  $\chi_N$ , полученную в уравнении (1.14), чтобы учесть временную эволюцию состояния рассеяния и различные процедуры счета. На протяжении этого обсуждения удобно использовать обозначения Дирака и мы перепишем детерминант Слэтера (1.13) в виде

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{\pi \in S_N} \text{sgn}(\pi) |\phi_{\pi(1)}\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_{\pi(N)}\rangle; \quad (1.64)$$

Уравнение (1.64) описывает начальное  $N$ -частичное состояние в момент времени  $t = 0$ , составленное из ортонормированных одночастичных состояний  $|\phi_m\rangle$  (здесь  $\pi$  обозначает элемент группы перестановок  $S_N$ ). Выбор ортонормированных состояний сделан для удобства: как показано в Разделе 1.1.4, детерминант Слэтера инвариантен при общих линейных преобразованиях состояний; в частности, можно выбрать ортонормированный базис.

Одночастичный гамильтониан  $\mathcal{H}(t)$  определяет унитарный оператор эволюции

$$\mathcal{U} = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \mathcal{H}(t') \right]. \quad (1.65)$$

При отсутствии взаимодействия эволюция всей системы определяется оператором  $\Gamma_N(\mathcal{U})$ , где для заданного одночастичного оператора  $\mathcal{O}$  мы определяем  $N$ -частичный оператор

$$\Gamma_N(\mathcal{O}) = \underbrace{\mathcal{O} \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}}_{N\text{-times}}, \quad (1.66)$$

действующий одновременно на все  $N$  частиц. Хотя мы ограничиваемся рассмотрением невзаимодействующих систем, все же мы учитываем зависящие от времени потенциалы рассеяния, которые могут давать неупругие процессы. Конечное состояние в момент времени  $t$  дается выражением:  $|\Psi_{\text{out}}\rangle = \Gamma_N(\mathcal{U})|\Psi\rangle$ . Добавляя процедуру счета, волновая функция принимает вид

$$|\Psi_{\text{out}}^{\pm}\rangle = \Gamma_N(e^{\pm i\lambda\mathcal{Q}/2})|\Psi_{\text{out}}\rangle = \Gamma_N(e^{\pm i\lambda\mathcal{Q}/2}\mathcal{U})|\Psi\rangle, \quad (1.67)$$

где  $\mathcal{Q}$  это ортогональный проектор ( $\mathcal{Q}^2 = \mathcal{Q}$  и  $\mathcal{Q}^{\dagger} = \mathcal{Q}$ ) на ту часть волновой функции, которая была посчитана. Например, в оригинальной схеме, рассмотренной в статье [4], со спином в положении  $x_0$  и частицей, прилетающей слева, оператор  $\mathcal{Q}_t = \int_I dx |x\rangle\langle x|$  проектирует на интервал  $I = [x_0, x_0 + v_F t]$  (невозможно определить оператор  $\mathcal{Q}$ , имитирующий спиновый счетчик, если частицы прилетают с обеих сторон); следовательно, та часть волновой функции, которая прошла через счетчик за время  $t$ , получила дополнительную фазу  $e^{\pm i\lambda/2}$ . Заметим, что всегда добавляется полная фаза  $\lambda$  - и тогда, когда частица измеряется (собственное значение 1 оператора  $\mathcal{Q}$ ), и тогда, когда частица не измеряется (собственное значение 0 оператора  $\mathcal{Q}$ ). Характеристическая функция полной статистики переноса дается перекрытием (фиделити)

$$\chi_N(\lambda) = \langle \Psi_{\text{out}}^- | \Psi_{\text{out}}^+ \rangle = \langle \Psi | \Gamma_N(\mathcal{U}^{\dagger} e^{i\lambda\mathcal{Q}} \mathcal{U}) | \Psi \rangle \quad (1.68)$$

волновых функций, распространяющихся вперед и назад, измеренных в состояниях с противоположными спинами.

Далее, воспользуемся тем, что ожидаемое значение произведения операторов  $\Gamma_N(\mathcal{O})$  в состоянии, описываемом слэтеровским детерминантом, может быть записано как детерминант одночастичных матричных элемен-



тов  $\langle \phi_m | \mathcal{O} | \phi_n \rangle$  в гильбертовом пространстве  $H_N$  состояний  $|\phi_m\rangle$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \Psi | \Gamma_N(\mathcal{O}) | \Psi \rangle &= \frac{1}{N!} \sum_{\pi, \pi' \in S_N} \text{sgn}(\pi \circ \pi') \prod_{m=1}^N \langle \phi_{\pi(m)} | \mathcal{O} | \phi_{\pi'(m)} \rangle \\
&= \frac{1}{N!} \sum_{\pi, \pi'' \in S_N} \text{sgn}(\pi'') \prod_{m=1}^N \langle \phi_m | \mathcal{O} | \phi_{\pi''(m)} \rangle \\
&= \det \langle \phi_m | \mathcal{O} | \phi_n \rangle;
\end{aligned} \tag{1.69}$$

эта формула лежит в основе (большинства) результатов по представлению характеристической функции полной статистики переноса в детерминантном виде. Используя Ур. (1.69), перепишем характеристическую функцию Eq. (1.68) в виде детерминанта

$$\begin{aligned}
\chi_N(\lambda) &= \det \langle \phi_m | e^{i\lambda \mathcal{U}^\dagger \mathcal{Q} \mathcal{U}} | \phi_n \rangle \\
&= \det \langle \phi_m | 1 - \mathcal{T}_Q + \mathcal{T}_Q e^{i\lambda} | \phi_n \rangle
\end{aligned} \tag{1.70}$$

где

$$\mathcal{T}_Q = \mathcal{U}^\dagger \mathcal{Q} \mathcal{U}; \tag{1.71}$$

при переходе от первой ко второй строчке в Ур. (1.70) была разложена экспонента и использован тот факт, что  $\mathcal{T}_Q$  является проектором. Поскольку  $\mathcal{T}_Q$  является проектором в одночастичном гильбертовом пространстве  $H$ , его собственные значения в подпространстве  $H_N$  лежат в интервале от 0 до 1, и Ур. (1.70) приводит к обобщенной биномиальной статистике.

Чтобы освоиться с этой новой формулой, воспроизведем результаты предыдущего раздела. Рассмотрим ситуацию, когда начальное состояние  $|\Psi\rangle$  локализовано слева от рассеивающей области и конечное состояние описывает асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$ , когда все частицы уже рассеялись. В базисе состояний с импульсами  $k$  слева/справа от рассеивателя,

асимптотический вид пропагатора дается унитарной матрицей (рассеяния)

$$U_k^\infty = \begin{pmatrix} r_k & t'_k \\ t_k & r'_k \end{pmatrix}, \quad (1.72)$$

где коэффициенты  $r_k$  ( $r'_k$ ) и  $t_k$  ( $t'_k$ ) есть амплитуды отражения и прохождения для частицы, приходящей слева (справа). Полный пропагатор принимает вид  $\mathcal{U}^\infty = \int (dk/2\pi) |k\rangle_{\text{out}} U_k^\infty \langle k|_{\text{in}}$ , где мы ввели асимптотические состояния  $|k\rangle_{\text{in(out)}} = (|k\rangle_{\text{L,in(out)}}, |k\rangle_{\text{R,in(out)}})$ , которые являются входящими (выходящими) плоскими волнами в левом/правом канале: при формальном выводе мы должны рассмотреть предел  $t \rightarrow \infty$  оператора эволюции (1.65) в рамках картины взаимодействия с тривиальной динамикой  $\mathcal{U}_0 = \int (dk/2\pi) e^{-iv_{\text{F}}kt} (|k\rangle_{\text{in}} \langle k|_{\text{in}} + |k\rangle_{\text{out}} \langle k|_{\text{out}})$ . Оператор счета  $\mathcal{Q}$  дается проекцией на правый выводящий канал  $\mathcal{Q}_{\text{R}} = (0, 1)^\dagger (0, 1)$ , и мы получаем

$$\mathcal{T}_{\mathcal{Q}_{\text{R}}}^\infty = \int (dk/2\pi) |k\rangle_{\text{in}} (t_k, r'_k)^\dagger (t_k, r'_k)_{\text{in}} \langle k|. \quad (1.73)$$

Поскольку одночастичные волновые функции  ${}_{\text{in}}\langle k|\phi_m\rangle = (\langle k|\phi_m\rangle, 0)$  локализованы слева от рассеивателя, характеристическая функция принимает вид

$$\chi(\lambda) = \det \langle \phi_m | 1 - \mathcal{T} + \mathcal{T} e^{i\lambda} | \phi_n \rangle, \quad (1.74)$$

где  $\mathcal{T} = \int (dk/2\pi) T_k |k\rangle \langle k|$  в соответствии с (1.14); здесь мы сократили обозначение  $|k\rangle = |k\rangle_{\text{in,L}}$  в соответствии с предыдущим разделом. Обобщение результата (1.74) на случай многих каналов производится непосредственно: пропагатор (1.72) имеет блочную структуру с матрицами  $t_k$  and  $r_k$ , описывающими прохождение и отражение в базисе канала (channel basis), вероятности прохождения  $T_k = t_k^\dagger t_k$  имеют матричный вид, а вектор состояния  $|\phi_m\rangle$  получает дополнительный индекс канала. Допуская неявное

суммирование по индексам канала, ур. (1.74) сохраняет свой вид. То же самое утверждение относится и к спиновым индексам.

### 1.4.2. Матрица плотности – конечные температуры

Детерминант в ур. (1.70) ограничен подпространством начальных состояний  $|\phi_m\rangle$ . Вводя оператор проекции  $\mathcal{P} = \sum_{m=1}^N |\phi_m\rangle\langle\phi_m|$  на подпространство начальных состояний  $|\phi_m\rangle$ , этот оператор может быть распространен на полное гильбертово пространство. Разделим полное гильбертово пространство на сектор, определяемый проектором  $\mathcal{P}$ , и его дополнение, проектируемое на  $\mathcal{P}_\perp = 1 - \mathcal{P}$ . Оператор  $1 - \mathcal{P}\mathcal{T}_Q + \mathcal{P}\mathcal{T}_Q e^{i\lambda}$  может быть представлен в блочном виде

$$[1 + \mathcal{P}\mathcal{T}_Q(e^{i\lambda} - 1)] = \begin{bmatrix} 1 + \mathcal{T}_Q(e^{i\lambda} - 1) & \mathcal{T}_Q(e^{i\lambda} - 1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.75)$$

с блоками, действующими на подпространствах  $\mathcal{P}H$  and  $\mathcal{P}_\perp H$ . Детерминант верхней блочно-диагональной матрицы (1.75) есть произведение детерминанта (1.70) в  $\mathcal{P}$ -блоке и детерминанта 1 в  $\mathcal{P}_\perp$ -блоке, следовательно, производящая функция принимает вид

$$\chi_N(\lambda) = \det(1 - \mathcal{P}\mathcal{T}_Q + \mathcal{P}\mathcal{T}_Q e^{i\lambda}), \quad (1.76)$$

где детерминант берется по полному одночастичному гильбертовому пространству  $H$ .

Интересно, что эта формула может быть обобщена на случай, когда начальное состояние не представляется в виде одного слэтеровского детерминанта, но является некогерентной суперпозицией многих слэтеровских

детерминантов с матрицей плотности в виде  $\Gamma(\rho)/Z$  в пространстве Фока  $F = \bigoplus_N H_N$ , где  $\Gamma(\mathcal{O}) = \bigoplus_N \Gamma_N(\mathcal{O})$ ,  $Z = \text{Tr}_{F_a} \Gamma(\rho)$ , а  $\rho$  есть одночастичная матрица плотности; например,  $\rho = e^{-\beta(\mathcal{H}-\mu)}$  для термического ансамбля с температурой  $\beta^{-1}$ , химическим потенциалом  $\mu$  и зависящим от времени *одно*-частичным гамильтонианом  $\mathcal{H}$ ; выше  $F_a$  обозначает антисимметричный сектор пространства Фока. Используя формулу для следа оператора [36],  $\text{Tr}_{F_a}[\Gamma(\mathcal{O})] = \det(1 + \mathcal{O})$ , где детерминант берется по одночастичному гильбертовому пространству, получаем характеристическую функцию  $\chi(\lambda) = \text{Tr}_{F_a}[\Gamma(\rho)\Gamma(\mathcal{U}^\dagger e^{i\lambda\mathcal{Q}}\mathcal{U})]/Z$ , сравни ур. (1.68), в виде

$$\begin{aligned}\chi(\lambda) &= \det(1 + \rho e^{i\lambda\mathcal{U}^\dagger\mathcal{Q}\mathcal{U}}) / \det(1 + \rho) \\ &= \det(1 - \eta + \eta e^{i\lambda\mathcal{T}_Q}) \\ &= \det(1 - \eta\mathcal{T}_Q + \eta\mathcal{T}_Q e^{i\lambda})\end{aligned}\tag{1.77}$$

с одночастичным (occupation-number) оператором чисел заполнения  $\eta = \rho/(1 + \rho)$  (и произвольной одночастичной матрицей плотности  $\rho$ ); заметим опять же, что спектр  $\eta\mathcal{T}_Q$  лежит между 0 и 1, так что (1.77) указывает на обобщенную биномиальную статистику.

Рассмотрим в качестве примера ситуацию прилетающих слева двух частиц с волновыми функциями  $\phi_1(k)$  и  $\phi_2(k)$ , когда процесс создания частиц является не детерминистическим, а вероятностным: пусть  $p_1$  ( $p_2$ ) - вероятность успешного создания первой (второй) частицы. Предположим для простоты, что  $\phi_1(k)$  и  $\phi_2(k)$  ортогональны  $\langle\phi_m|\phi_n\rangle = \delta_{mn}$ . Начальное состояние может быть записано как матрица плотности  $\Gamma(\rho)/Z$  с одночастичной матрицей плотности

$$\rho = \frac{p_1}{1 - p_1} |\phi_1\rangle\langle\phi_1| + \frac{p_2}{1 - p_2} |\phi_2\rangle\langle\phi_2|.\tag{1.78}$$

Удельные веса в (1.78) выбраны так, чтобы одночастичный оператор заполнения  $\eta = \rho/(1 + \rho)$  имел вид

$$\eta = p_1|\phi_1\rangle\langle\phi_1| + p_2|\phi_2\rangle\langle\phi_2|, \quad (1.79)$$

где  $p_1$  ( $p_2$ ) - вероятность заполнения состояния 1 (2). Нормированная матрица плотности [мы пользуемся тем, что  $Z = \text{Tr}_{F_a}\Gamma(\rho) = \det(1 + \rho) = 1/(1 - p_1)(1 - p_2)$ ]

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho)/Z = & (1 - p_1)(1 - p_2) \oplus p_1(1 - p_2)|\phi_1\rangle\langle\phi_1| \\ & + p_2(1 - p_1)|\phi_2\rangle\langle\phi_2| \oplus p_1p_2|\phi_1\rangle\langle\phi_1| \otimes |\phi_2\rangle\langle\phi_2| \quad (1.80) \end{aligned}$$

состоит из трех членов: первый член описывает бесчастичный сектор, который возникает с вероятностью  $(1 - p_1)(1 - p_2)$ . Второй член относится к состояниям с одной частицей:  $p_1(1 - p_2)$  [ $p_2(1 - p_1)$ ] есть вероятность того, что создана только первая [вторая] частица. Третий член показывает, что вероятность появления слэтеровского детерминанта из обоих состояний  $\phi_1$  и  $\phi_2$  есть  $p_1p_2$ ; мы опустили члены с тензорными произведениями более чем одного проектора на одно и то же состояние, поскольку они не имеют веса в антисимметричной части гильбертового пространства. Производящая функция полной статистики переноса имеет вид (1.77),

$$\begin{aligned} \chi(\lambda) = & \det(1 - \eta\mathcal{T}_{Q_R}^\infty + \eta\mathcal{T}_{Q_R}^\infty e^{i\lambda}) \\ = & (1 - p_1T + p_1Te^{i\lambda})(1 - p_2T + p_2Te^{i\lambda}) \quad (1.81) \end{aligned}$$

для простейшего случая асимптотического рассеяния с независимой от энергии вероятностью прохождения  $T_k = T$ .

## 1.5. Постоянное напряжение

В литературе описано много результатов, полученных для стационарного режима с постоянным напряжением  $V$ , приложенным к проволоке в течение длительного времени измерения  $teV/\hbar \gg 1$  [1, 37–39]. В противоположность рассмотренному в Разделе 1.3 нестационарному случаю прохождения конечного числа  $N$  частиц, измеряемых спиновым счетчиком за время  $t \rightarrow \infty$ , здесь мы рассматриваем в термодинамическом пределе ( $N, L \rightarrow \infty$  при фиксированной плотности  $n = N/L$ , где  $L$  - размер системы) стационарную ситуацию с двумя резервуарами, разбалансированными приложенным напряжением  $V$ , при счете за конечное время  $t$ .

Начнем с  $N$  (прилетающих слева) частиц в состояниях рассеяния

$$\varphi_k(x) = (e^{ikx} + r_k e^{-ikx})\Theta(-x) + t_k e^{ikx}\Theta(x), \quad (1.82)$$

с энергиями  $\hbar\varepsilon = \hbar v_F k$  между  $E_F$  и  $E_F + eV$ . Рассеиватель находится в начале координат. Чтобы упорядочить задачу, перейдем к волновым пакетам  $\phi_m(x)$ : разделим интервал импульсов  $[0, eV/v_F]$  на части  $\hbar\kappa = eV/v_F N$  и определим веса

$$f_m(k) = \begin{cases} \sqrt{2\pi/\kappa}, & \kappa(m-1) \leq k \leq \kappa m, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (1.83)$$

при  $m \in \{1, \dots, N\}$ . С реальными весами  $f_m(k)$ , нормированные волновые пакеты

$$\phi_m(x) = \int \frac{dk}{2\pi} f_m(k) \varphi_k(x) \quad (1.84)$$

определяют состояния, центрированные на начале координат. Заметим, что добавление произвольной фазы к волновым пакетам  $\phi_m(x)$  не меняет их слэтеровский детерминант. При постоянном  $V$  и предельном переходе  $\kappa \rightarrow 0$

волновые пакеты распространяются в реальном пространстве, число частиц  $N$  стремится к бесконечности, однородная плотность частиц принимает конечное значение  $eV/2\pi\hbar v_F$ , а результирующий ток  $\langle \mathcal{I} \rangle = (e/h)TV$  постоянен во времени, сравни (1.101). Такая процедура по сути имитирует устройство с постоянным напряжением, поскольку генерирует такую же матрицу плотности при нулевой температуре, как и матрица плотности, получаемая методом вторичного квантования при заполнении состояниями рассеяния интервала шириной  $eV$ .

Для использования выражения (1.70) нам требуется время эволюции волновых пакетов

$$\phi_m(x; t) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{-iv_F kt} f_m(k) \varphi_k(x), \quad (1.85)$$

а также оператор счёта  $\mathcal{Q}_t = \int_I dx |x\rangle\langle x|$ , проектирующий частицы на пространственный интервал  $I = [x_0, x_0 + v_F t]$  (счетчик расположен справа от начала координат в области  $x_0 > 0$ ).

### 1.5.1. Обобщенная биномиальная статистика

Характеристическая функция  $\chi_t(\lambda)$  есть детерминант матрицы, сравни Ур. (1.70),

$$\begin{aligned} \langle \phi_m | e^{i\lambda \mathcal{U}^\dagger \mathcal{Q}_t \mathcal{U}} | \phi_n \rangle &= \langle \phi_m(t) | e^{i\lambda \mathcal{Q}_t} | \phi_n(t) \rangle \\ &= \int dx \phi_m(x; t)^* \langle x | e^{i\lambda \mathcal{Q}_t} | x \rangle \phi_n(x; t) \\ &= \delta_{mn} + (e^{i\lambda} - 1) \mathbf{Q}_{mn}, \end{aligned} \quad (1.86)$$

$$\chi_t(\lambda) = \det[\delta_{mn} + (e^{i\lambda} - 1) \mathbf{Q}_{mn}] \quad (1.87)$$

где

$$\mathbf{Q}_{mn} = \int \frac{dk' dk}{4\pi^2} t_k f_n(k) K_t(k - k') t_{k'}^* f_m^*(k') \quad (1.88)$$

и ядро

$$\begin{aligned}
K_t(q) &= \int_{x_0}^{x_0+v_{\text{F}}t} dx e^{iq(x-v_{\text{F}}t)} = \frac{e^{iqx_0}(1 - e^{-iqv_{\text{F}}t})}{iq} \\
&= 2e^{iq(x_0-v_{\text{F}}t/2)} \frac{\sin(qv_{\text{F}}t/2)}{q}.
\end{aligned} \tag{1.89}$$

Матрица  $Q_{mn}$  является эрмитовой матрицей с действительными собственными значениями  $0 \leq \tau_m(t) \leq 1$ , следовательно, связанная с ней полная статистика переноса является обобщенной биномиальной статистикой во всех случаях. Такой же результат можно извлечь из работы [33] при соответствующем выборе рассеивателя, зависящего от времени. В дальнейшем мы обсудим различные предельные выражения для производящей функции  $\chi_t(\lambda)$ .

### 1.5.2. Короткие времена измерения

Рассмотрим случай достаточно больших  $N$ , таких, что  $t_k$  заметно не меняется на интервале  $\varkappa$ , т.е.  $\varkappa \partial_k t_k \ll 1$ . Тогда амплитуду  $t_k$  можно вынести из-под знака интеграла в Ур. (1.88). Полагая к тому же, что время измерения  $t$  мало,  $|q|v_{\text{F}}t \leq teV/\hbar \ll 1$ , можно разложить  $K_t(q)$  и получить (в нижнем порядке по  $teV/\hbar$ )

$$\begin{aligned}
\chi_t^{\ll}(\lambda) &= \det \left[ \delta_{mn} + (e^{i\lambda} - 1) t_{\varkappa m}^* t_{\varkappa n} \varkappa v_{\text{F}} t \right. \\
&\quad \left. \times e^{i\varkappa x_0(n-m)} \frac{2 \sin^2(\varkappa x_0/2)}{\pi \varkappa^2 x_0^2} \right].
\end{aligned} \tag{1.90}$$

Второй член содержит матричное произведение  $(v_1, v_2, \dots, v_N)^\dagger (v_1, v_2, \dots, v_N)$  вектора и его дуального вектора, где  $v_m = t_{\varkappa m} e^{i\varkappa x_0 m}$ , и, следовательно, может быть записан в дираковских



обозначениях как проектор  $\mu|v\rangle\langle v|$  с  $\mu = 2(e^{i\lambda} - 1)\varkappa v_{\text{F}} t \sin^2(\varkappa x_0/2)/\pi \varkappa^2 x_0^2$ . Тогда детерминант  $\det(1 + \mu|v\rangle\langle v|)$  дается произведением собственных значений  $1 + \mu\langle v|v\rangle$  (в направлении  $|v\rangle$ ) и 1 (in the complement),  $\det(1 + \mu|v\rangle\langle v|) = 1 + \mu\langle v|v\rangle$ , и мы получаем

$$\begin{aligned} \chi_t^{\ll}(\lambda) &= 1 + (e^{i\lambda} - 1)\varkappa v_{\text{F}} t \frac{2 \sin^2(\varkappa x_0/2)}{\pi \varkappa^2 x_0^2} \sum_{m=1}^N T_{\varkappa m} \\ &\xrightarrow{(\varkappa \rightarrow 0)} 1 + \alpha(e^{i\lambda} - 1), \end{aligned} \quad (1.91)$$

где (заметим, что  $N\varkappa = eV/\hbar v_{\text{F}}$ )

$$\alpha = tv_{\text{F}} \int_0^{eV/\hbar v_{\text{F}}} \frac{dk}{2\pi} T_k \leq teV/2\pi\hbar \ll 1 \quad (1.92)$$

(заметим, что зависимость параметра  $\alpha \propto t$  от положения счетчика  $x_0$  исчезает в пределе постоянного напряжения  $\varkappa \rightarrow 0$ ). Проводя вычисления до высших порядков по  $teV/\hbar$ , мы находим, что в разложении  $\chi_t^{\ll}(\lambda)$  члены второго и третьего порядка исчезают и следующая поправка появляется только в четвертом порядке

$$\begin{aligned} \Delta\chi_t^{\ll}(\lambda) &= \frac{(e^{i\lambda} - 1)^2 (tv_{\text{F}})^4}{24} \int_0^{eV/\hbar v_{\text{F}}} \frac{dkdk'}{(2\pi)^2} T_k T_{k'} (k - k')^2 \\ &\leq \left( \frac{e^{i\lambda} - 1}{24\pi} \right)^2 \left( \frac{teV}{\hbar} \right)^4; \end{aligned} \quad (1.93)$$

следовательно, при малых временах измерения большинство отсчетов регистрируют ни одной, либо одну частицу, а наблюдение двухчастичных событий  $P_2 \leq (teV/\hbar)^4/(24\pi)^2$  сильно подавляется вследствие принципа запрета Паули. Заметим, что в пределе малого времени измерения имеет значение специфическая природа счетного устройства. Выше мы полагали,

что характерные времена всех внутренних процессов в счетчике малы по сравнению со временем измерения. Более того, мы пренебрегали эффектом ферми-моря, который также дает дополнительный вклад. Тем не менее, даже при более реалистичном моделировании счетчика следует ожидать, что принцип Паули приведет к подавлению двух- и более частичных событий. К тому же, возможно представить себе эксперимент, в котором отсутствует эффект дополнительного ферми-моря: при приложении к квантовой проволоке напряжения, большего, чем энергия Ферми, падающие справа частицы блокируются дном зоны, и только падающие слева состояния с энергиями в интервале  $E_F$  (заменяющим  $eV$ ) дают вклад в поток частиц[40].

Заметим, что обобщенная биномиальная статистика Ур. (1.3) сводится к простому пуассоновскому результату

$$\log \chi(\lambda) = \sum_m \tau_m (e^{i\lambda} - 1) \quad (1.94)$$

в пределе малых обобщенных вероятностей прохождения  $\tau_m \ll 1$ , причем результат в этом случае зависит только от параметра  $\sum_m \tau_m = \text{tr} \mathcal{T}_{Q_t}$ . В пределе малых времен измерения на малые собственные значения прохождения накладывается малый пространственный интервал в проекции  $Q_t$  и  $\sum_m \tau_m = \alpha$ , см. Ур. (1.92). Такой же результат получается в пределе больших времен измерения, см. (1.98), при условии что вероятности прохождения  $T_k$  малы сами по себе.

### 1.5.3. Большие времена измерения

В асимптотическом пределе  $t \rightarrow \infty$  ядро  $K_t(q)$  гарантирует сохранение энергии/импульса, делая задачу диагональной в импульсном базисе[1, 19]. Однако асимптотический предел  $t \rightarrow \infty$  не совместим со стандартным вы-

водом результата для конечного времени измерения. Мы рассмотрим здесь случай большого, но конечного времени измерения  $t$  при бесконечно большом числе частиц  $N \rightarrow \infty$ , устремляя интервал  $\hbar\chi = eV/v_F N$  к нулю при постоянном напряжении  $V$ .

В пределе  $N \rightarrow \infty$  характеристическая функция  $\chi_t(\lambda)$ , которая является детерминантом матрицы в Ур. (1.86), сравни Ур. (1.70), имеет вид

$$\chi_t(\lambda) = \det(1 - \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{Q}_t + \mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{Q}_t e^{i\lambda}) \quad (1.95)$$

где  $\mathcal{P} = \int_0^{eV/\hbar v_F} (dk/2\pi) |k\rangle\langle k|$  - проектор на подпространство занятых состояний; представление в виде (1.95) можно получить из (1.86), если использовать проектор  $\mathcal{P}$  для распространения детерминанта на все гильбертово пространство, сравни Ур. (1.75) и (1.76), и использовать тождество  $\det(1 + \mathcal{A}\mathcal{B}) = \det(1 + \mathcal{B}\mathcal{A})$  для перемещения  $t_k^*$  влево от ядра  $K_t$ , что само по себе является импульсным представлением проектора  $\mathcal{Q}_t$ . Выражение (1.95) соответствует выражению (1.76) при замене  $\mathcal{T}_Q = \mathcal{T}\mathcal{Q}_t$ . Поскольку  $\mathcal{Q}_t$  является проектором,  $\mathcal{Q}_t^2 = \mathcal{Q}_t$ , то мы можем переписать Ур. (1.95) как  $\det[1 + (e^{i\lambda} - 1)\mathcal{Q}_t\mathcal{P}\mathcal{T}\mathcal{Q}_t]$ . Этот детерминант необходимо вычислить только в подпространстве  $\mathcal{Q}_t H$ , поскольку матрица единична в ортогональном дополнении. В подпространстве  $\mathcal{Q}_t H$  мы используем ортонормированный базис в реальном пространстве (а не в  $k$ -пространстве, см. Ур. (1.83))

$$g_l(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{\epsilon}, & \epsilon(l-1) \leq x - x_0 \leq \epsilon l, \\ 0, & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (1.96)$$

где  $\epsilon = tv_F/L$  - ширина сегмента в реальном пространстве и  $l \in \{1, \dots, L\}$ .

Матричные элементы  $\mathcal{PT}$  принимают вид

$$\begin{aligned}\langle g_l | \mathcal{PT} | g_m \rangle &= \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} T_k \langle g_l | k \rangle \langle k | g_m \rangle \\ &= \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} T_k \frac{4 \sin^2(\epsilon k/2)}{\epsilon k^2} e^{i(l-m)k\epsilon},\end{aligned}\tag{1.97}$$

т.е. они имеют вид матриц Тейлора. Применяя теорему Сегё и переходя к пределу больших  $t$  и  $L$  при фиксированной малой величине  $\epsilon = v_F t/L$  ( $\epsilon \ll \hbar v_F/eV$ , следовательно,  $4 \sin^2(\epsilon k/2)/\epsilon k^2 \approx \epsilon$ ), мы получаем производящую функцию

$$\log \chi_t(\lambda) = t v_F \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - T_k + T_k e^{i\lambda}),\tag{1.98}$$

сравни Приложение А.

Используя обобщенную теорему Сегё (гипотеза Фишера-Гартвига, см. (А.7) и (А.10)) [41], можно вычислить член следующего порядка. Поскольку аргумент логарифма (сравни (А.10)), заметим, что  $x(\theta)$  следует заменить на  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} P_{(\theta+2\pi n)/\epsilon} [1 + (e^{i\lambda} - 1)T_{(\theta+2\pi n)/\epsilon}]$ , где  $P_k = 1$ ,  $k \in [0, eV/\hbar v_F]$  или  $P_k = 0$  в других случаях) имеет особенность при  $k = 0$  и  $k = eV/\hbar v_F$ , поправка к главному члену состоит из двух вкладов от скачков при  $k = 0, eV/\hbar v_F$ ,

$$\Delta \log \chi_t(\lambda) = \frac{\log(t/t_0)}{4\pi^2} \sum_{k=0, eV/\hbar v_F} \log^2[1 + (e^{i\lambda} - 1)T_k],\tag{1.99}$$

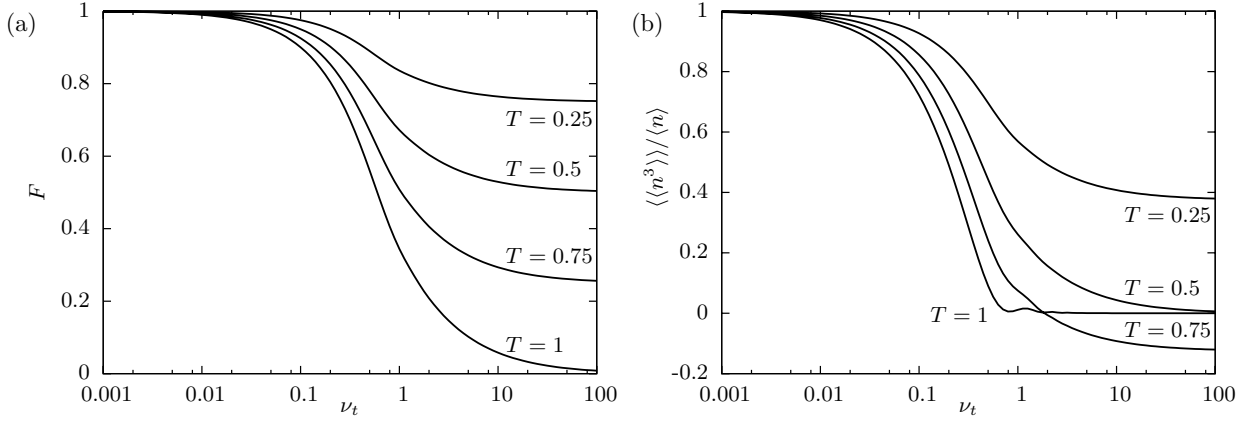
где  $t_0$  - некоторое малое время обрезания; этот результат приводит к логарифмической поправке во втором порядке и во всех высших кумулянтах.

Коррекция для шума дается выражением [19, 27]

$$\Delta \langle \langle n^2 \rangle \rangle = \frac{T_0^2 + T_{eV/\hbar v_F}^2}{2\pi^2} \log(t/t_0).\tag{1.100}$$

Здесь логарифмические поправки в уравнениях (1.99) и (1.100) обусловлены флуктуациями числа частиц в интервале конечной длины  $v_F t$ . Следовательно, флуктуации не исчезают при  $T = 1$ , как в уравнениях (1.62) и (1.63). В дополнение к шуму, происходящему от напряжения смещения, существует равновесный вклад от ферми-моря при любом конечном времени измерения, сравни Раздел 1.5.2. Для асимптотически больших времен первый вклад растет логарифмически со временем [2].

Теорема Сегё применима к матрице из Ур. (1.97) в силу временной трансляционной инвариантности: матричные элементы между состояниями, локализованными в двух различных областях пространства/времени зависят только от их пространственного/временного разделения и, следовательно, образуют матрицу Топлица. Те же доводы неприменимы к импульсному базису, и именно поэтому мы не можем применить теорему Сегё непосредственно к матрице в Ур. (1.86). Результат, представленный в Ур. (1.98) и его обобщение на случай конечных температур (сравни Ур. (1.113)), был получен в работе [19], где автор использовал двойную проекцию в процессе счета: вместо теоремы Сегё было использовано соотношение  $\log \det(1 + M) = \text{tr} \log(1 + M)$  и разложение логарифма. При вычислении следа каждого члена фазовые множители (см. Ур. (1.89)), появляющиеся в циклическом произведении ядер  $K_t$ , взаимно уничтожаются. В пределе больших времен ядра становятся диагональными (что обеспечивает сохранение энергии) и одно из них дает вклад - множитель  $t$ , поэтому кумулятивная производящая функция  $\log \chi_t(\lambda)$  линейна по  $t$ . В альтернативных подходах используется картирование задачи Римана-Гильберта [27] (эта процедура позволяет вычислить главный член и логарифмическую поправку Ур. (1.99)), или периодичность по времени [2, 8], вводимую для того,



**Рис. 1.4.** (а) Фактор Фано  $F = \langle\langle n^2 \rangle\rangle / \langle n \rangle$  и (б) третий момент  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle / \langle n \rangle$  для постоянного напряжения при не зависящих от энергии вероятностях прохождения  $T = 0.25, 0.5, 0.75, 1$ , как функция от числа падающих частиц  $\nu_t = teV/2\pi\hbar$ . Фактор Фано приближается к биномиальной величине  $F = 1 - T$  при  $\nu_t \gg 1$ , а в случае  $\nu_t \ll 1$  он всегда близок к 1 при любой вероятности прохождения  $T$ . Третий кумулянт как функция от  $\nu_t$  меняется между Пуассоновским  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle / \langle n \rangle = 1$  и биномиальным  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle / \langle n \rangle = T(1 - T)(1 - 2T)$  значениями. Осцилляции (особенно в окрестностях точки  $\nu_t \approx 1$  для  $T = 1$ ) происходят из-за разрыва функции чисел заполнения в точке  $k = eV/\hbar v_F$ .

чтобы сделать  $\log \chi_t$  экстенсивным по  $t$  (таким образом можно получить только член, линейный по  $t$ ).

#### 1.5.4. Фактор Фано для промежуточного режима

Для того, чтобы понять кроссовер между поведением распределения носителей при малом и большом времени измерения, мы рассчитали фактор Фано  $F$  и представили результат как функцию от  $\nu_t = teV/2\pi\hbar$  (числа прилетевших частиц за время  $t$ ) на Рис. 1.4(а) для нескольких значений коэффициента прохождения  $T$  (для рассеивателя с трансмиссией,

не зависящей от энергии). При малых временах измерения распределение является пуассоновским, и, следовательно,  $F(\nu_t \rightarrow 0) \rightarrow 1$ . Биномиальное распределение, справедливое для больших времен, дает асимптотику  $F(\nu_t \rightarrow \infty) \rightarrow (1 - T)$ . Чтобы найти кроссовер между этими режимами, определим матрицу  $\mathbf{Q}$  (см. Ур. (1.88)),

$$\mathbf{Q}_{mn} \xrightarrow{(\varkappa \rightarrow 0)} t_{\varkappa m}^* t_{\varkappa n} e^{i(n-m)\varkappa(x_0 - v_F t)} \frac{\sin[(n-m)\varkappa v_F t/2]}{\pi(n-m)},$$

при помощи которой характеристическая функция принимает простой вид (1.87), и, следовательно,  $\log \chi_t(\lambda) = \text{tr} \log[\delta_{mn} + (e^{i\lambda} - 1)\mathbf{Q}_{mn}]$  (напомним, что мы рассматриваем предел  $\varkappa \rightarrow 0$  при фиксированном напряжении  $V$ ).

Средний прошедший заряд  $\langle n \rangle = -i\partial_\lambda \log \chi_t|_{\lambda=0}$ ,

$$\langle n \rangle = \text{tr} \mathbf{Q} = t v_F \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk}{2\pi} T_k, \quad (1.101)$$

линейно растет со временем  $t$ ; вышеприведенный результат совпадает с результатами, полученными из выражений для малого и большого времени измерения (1.91) и (1.98). Выражение для шума  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle = -\partial_\lambda^2 \log \chi_t|_{\lambda=0}$  принимает вид

$$\begin{aligned} \langle\langle n^2 \rangle\rangle &= \text{tr} \mathbf{Q} - \text{tr} \mathbf{Q}^2 \\ &= \langle n \rangle - \int_0^{eV/\hbar v_F} \frac{dk' dk}{\pi^2} T_{k'} T_k \frac{\sin^2[(k' - k)v_F t/2]}{(k' - k)^2}. \end{aligned} \quad (1.102)$$

(в рассматриваемом здесь пределе  $\varkappa \rightarrow 0$  оба момента не зависят от положения счетчика  $x_0$ , поскольку волновые пакеты сильно делокализованы в координатном пространстве. Для простоты анализа примем, что вероятность прохождения не зависит от энергии,  $T_k = T$ , на интервале  $[0, eV/\hbar v_F]$ ).

Тогда средний заряд дается выражением

$$\langle n \rangle = TteV/2\pi\hbar = T\nu_t. \quad (1.103)$$

Фактор Фано  $F = \langle\langle n^2 \rangle\rangle/\langle n \rangle$  может быть представлен в виде

$$F = 1 - Tf(\nu_t) \quad (1.104)$$

где

$$f(\nu_t) = \int_{-1}^1 dx(1 - |x|) \frac{\sin^2(\pi\nu_t x)}{\pi^2\nu_t x^2}. \quad (1.105)$$

Для малых времен  $\nu_t \ll 1$ ,

$$f(\nu_t) = \nu_t - \frac{\pi^2}{18}\nu_t^3 + \mathcal{O}(\nu_t^5), \quad (1.106)$$

тогда как  $f$  в пределе больших времен  $\nu_t \gg 1$  стремится к единице как

$$f(\nu_t) = 1 - \frac{\log(2\pi\nu_t) + 1 + \gamma}{\pi^2\nu_t} + \mathcal{O}(\nu_t^{-3}), \quad (1.107)$$

где  $\gamma \approx 0.5772$  - константа Эйлера.

Поправки к простому биномиальному результату дают логарифмический по времени рост шума  $\langle\langle n^2 \rangle\rangle$ ; результат (1.107) совпадает с Ур. (1.100) в случае не зависящих от времени вероятностей рассеяния  $T_k = T$ . Эта логарифмическая зависимость шума обусловлена флуктуациями числа электронов в конечном отрезке проволоки [1].

Аналогично может быть рассчитан третий кумулянт  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle$ ; (численные) результаты, показанные на Рис. 1.4(b), интерполируют между пуассоновской величиной  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle/\langle n \rangle = 1$  для малых времен и биномиальным результатом  $\langle\langle n^3 \rangle\rangle/\langle n \rangle = T(1-T)(1-2T)$  для больших времен измерения.



### 1.5.5. Конечная температура

Рассмотрим ситуацию, когда частицы испускаются при конечной температуре из канала в вакуум; таким образом, мы предполагаем Ферми-резервуар частиц (падающих слева), рассеивающихся с зависящими от энергии вероятностями (вправо). При конечной температуре рассеянные состояния заполняются согласно статистике Ферми-Дирака (Fermi-Dirac occupation), что описывается одночастичным оператором  $\eta = [e^{\beta(\mathcal{H}-\mu)} + 1]^{-1}$ . Характеристическая функция  $\chi_t(\lambda)$  дается выражением (1.77), где  $\mathcal{T}_Q = \mathcal{T}\mathcal{Q}_t$  и проектор  $\mathcal{Q}_t$  определен на интервале  $I = [x_0, x_0 + v_F t]$ , сравни Sec. 1.5.3. При фиксированных больших временах измерения  $t$  вычисление детерминанта в базисе (1.96) и применение теоремы Сегё (см. Раздел 1.5.3) дает результат

$$\log \chi_t(\lambda) = tv_F \int \frac{dk}{2\pi} \log \left[ 1 + T_k n_L(k) (e^{i\lambda} - 1) \right], \quad (1.108)$$

где  $n_L(k) = \langle k | \eta | k \rangle = [e^{\beta(\hbar v_F k - \mu)} + 1]^{-1}$ . При высоких температурах и постоянной плотности частиц [ $\beta \rightarrow 0$ ,  $n_L(k) \approx e^{-\beta(\hbar v_F k - \mu)}$ ] все собственные значения прохождения  $\tau_k = T_k / (e^{\beta(\hbar v_F k - \mu)} + 1) \approx T_k e^{-\beta(\hbar v_F k - \mu)}$  стремятся к нулю. Логарифм в Ур. (1.108) можно разложить в ряд и получить, что статистика эмиссии электронов, покидающих резервуар Ферми при высоких температурах, является пуассоновской статистикой [42]

$$\log \chi_t(\lambda) = (e^{i\lambda} - 1) tv_F \int \frac{dk}{2\pi} T_k e^{-\beta(\hbar v_F k - \mu)} \quad (1.109)$$

Фактор Фано принимает значение  $F = 1$ , не зависящее от  $T_k$ .

В завершение анализа обсудим обобщение на случай конечных температур результата, полученного для двух резервуаров и постоянного напряжения. Смоделируем наше устройство двумя резервуарами Ферми с числами заполнения  $n_{L/R}(k) = [\exp[\beta(\hbar v_F k - \mu_{L/R})] + 1]^{-1}$ , соответственно,

для частиц, падающих слева (L) или справа (R). Напряжение входит через разницу химических потенциалов  $eV = \mu_L - \mu_R$ .

К сожалению, невозможно определить проектирующий оператор  $\mathcal{Q}$ , который действовал бы *после* эволюции и который мог бы имитировать действие спинового счетчика, сравни обсуждение после Ур. (1.67). Причина заключается в том, что про частицу, распространяющуюся влево при  $t \rightarrow \infty$  невозможно сказать, поступила ли она изначально слева и была отражена рассеивателем (следовательно, не была зарегистрирована счетчиком справа от рассеивателя), или она появилась справа и прошла через рассеиватель (следовательно, один раз прошла через спиновый счетчик). Одно из решений этой проблемы заключается в проведении первого проектирующего измерения в начальный момент времени; [27, 29] это соответствует замене Ур. (1.77) на выражение

$$\chi_t(\lambda) = \frac{\det(1 + \rho \mathcal{U}^\dagger e^{i\lambda \mathcal{Q}_t} \mathcal{U} e^{-i\lambda \mathcal{Q}_t})}{\det(1 + \rho)}, \quad (1.110)$$

с оператором  $\eta = \rho/(1 + \rho) = \int (dk/2\pi) |k\rangle_{\text{in}} \text{diag}[n_L(k), n_R(k)]_{\text{in}} \langle k|$ , причем одночастичный оператор эволюции  $\mathcal{U}$  описывает рассеиватель, но не описывает спиновый счетчик, сравни Ур. (1.72), а проектирующий оператор  $\mathcal{Q}_t$  имитирует измерение счета прошедших частиц посредством проектирования волновых функций на канал справа от счетчика. Дополнительный множитель  $\exp(-i\lambda \mathcal{Q}_t)$ , при сравнении с (1.77), соответствует дополнительному измерению до эволюции.

В этой главе мы используем спиновый счетчик как измерительный прибор. В противоположность ситуации, рассмотренной в Разделе 1.4, действие спинового счетчика не может быть смоделировано проектированием на выходящие состояния, так как операторы  $\mathcal{U}_\pm$  не факторизуются на

множители, описывающие рассеиватель и счетчик:  $\mathcal{U}_\pm \neq e^{\pm i\lambda \mathcal{Q}_t/2} \mathcal{U}$ . Следовательно, мы должны использовать полные операторы эволюции  $\mathcal{U}_\pm$ ,  $|\Psi_{\text{out}}^\pm\rangle = \Gamma(\mathcal{U}_\pm)|\Psi\rangle$ , в присутствии как рассеивателя, так и счетчика, где индекс ‘ $\pm$ ’ относится к спиновым состояниям счетчика. Полный оператор эволюции (сравни Рис. 1.5) может быть записан как

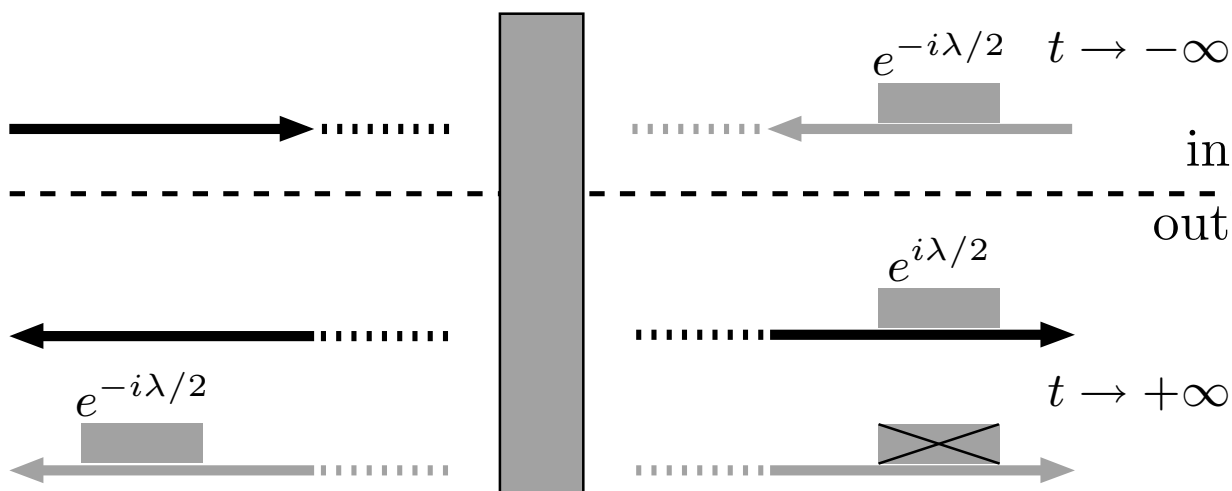
$$\mathcal{U}_\pm = e^{\pm i\lambda \mathcal{Q}_t/2} \mathcal{U} e^{\mp i\lambda \mathcal{Q}_t/2}, \quad (1.111)$$

где  $\mathcal{U}$ , сравни Ур. (1.72), есть оператор эволюции, не учитывающий присутствие спинового счетчика. Производящая функция полной статистики переноса принимает вид

$$\chi_t(\lambda) = \frac{\det(1 + \rho e^{-i\lambda \mathcal{Q}_t/2} \mathcal{U}^\dagger e^{i\lambda \mathcal{Q}_t} \mathcal{U} e^{-i\lambda \mathcal{Q}_t/2})}{\det(1 + \rho)}. \quad (1.112)$$

Две процедуры счета из Ур. (1.110) и (1.112) согласуются друг с другом только когда частицы падают слева, поскольку в этом случае дополнительные множители, в сравнении с Ур. (1.77), дают единицу. Для частиц, падающих как слева, так и справа, две процедуры счета необязательно совпадают; только если  $\mathcal{Q}_t$  коммутирует с  $\rho$ , мы можем переставить множитель  $e^{-i\lambda \mathcal{Q}_t/2}$  влево от  $\rho$  и затем циклически переставлять множители во втором члене детерминанта, чтобы доказать эквивалентность (1.110) и (1.112).

Интерпретация (1.112) как производящей функции для полной статистики переноса с использованием процедуры спинового счета сталкивается с проблемами, поскольку оператор (1.111) не является обязательно  $2\pi$ -периодическим, и, следовательно, при счете может получиться нецелое число частиц. В определенных ситуациях, тем не менее, использование спинового счетчика приводит к осмысленным результатам. В частности, для



**Рис. 1.5.** Входящие ( $t \rightarrow -\infty$ , выше пунктирной линии) и рассеянные (большой серый прямоугольник) выходящие ( $t \rightarrow +\infty$ , ниже пунктирной линии) состояния, измеренные спиновым счетчиком (маленький серый прямоугольник), расположенным справа от рассеивателя. Входящие слева и рассеянные состояния обозначены черными стрелками, а входящие слева состояния обозначены серыми стрелками. Действие спинового счетчика (с поляризацией вверх) включено в выражение  $\mathcal{U}_+$ , смотри уравнение (1.111). Оператор  $\mathcal{U}_+$  содержит два проектора, один описывается выражением  $\exp(-i\lambda Q_t/2)$  при  $t \rightarrow -\infty$ , а второй выражением  $\exp(+i\lambda Q_t/2)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Правое входящее состояние (серая стрелка) при  $t \rightarrow -\infty$  приобретает фазовый множитель  $\exp(-i\lambda/2)$  при первом проектировании; это дает правильную фазу для прошедшей части. Фазовый множитель отраженной части уничтожается вторым проектором. На левое входящее состояние первый проектор не действует, и прошедшая часть получает фазу  $\exp(i\lambda/2)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

асимптотически больших времен измерения  $t \rightarrow \infty$ , проектирующий оператор счёта  $\mathcal{Q}_t$  становится диагональным в энергетическом или импульсном базисе. Коммутируя оператор  $\exp(-i\lambda\mathcal{Q}_t/2)$  с оператором  $\rho$  и повторяя вычисления из Раздела 1.5.3, т.е. вычисляя детерминант в базисе (1.96) и применяя теорему Сегё, получаем результат

$$\begin{aligned} \log \chi_t^{\gg}(\lambda) = & tv_F \int \frac{dk}{2\pi} \log \left[ 1 + T_k \{ n_L(k)[1 - n_R(k)](e^{i\lambda} - 1) \right. \\ & \left. + n_R(k)[1 - n_L(k)](e^{-i\lambda} - 1) \} \right]; \end{aligned} \quad (1.113)$$

альтернативно, результат (1.113) может быть получен разложением детерминанта, используя соотношение  $\log \det(1 + M) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \text{tr} M^k / k$ . Вдали от асимптотического предела (включающего также вычисление следующих за главным членом поправок) описанное выше коммутирование не может быть выполнено и могут появиться полужелые заряды [28]. Тщательное подробное рассмотрение эквивалентности процедур счёта (1.110) и (1.112) для конечных времен измерения все еще отсутствует.

## 1.6. Выводы

Мы использовали формализм первичного квантования для вычисления производящей функции  $\chi_N(\lambda)$  полной статистики переноса фермионов в различных физических ситуациях, таких, как  $N$  частиц в начальных состояниях, описываемых слэтеровским детерминантом ранга 1 (незапутанных), ранга 2 (запутанных), или некогерентной суперпозицией слэтеровских детерминантов в пространстве Фока с неопределенным числом частиц. Наш формализм описывает различные свойства, такие, как зависящие от энергии вероятности рассеяния, зависящее от времени рассеяние и зависящий

от времени счет.

Мы представили наши результаты в детерминантном виде с дальнейшими упрощениями, выявляющими в разных случаях обобщенную биномиальную статистику. Приложения наших результатов включают классификацию возможного статистического поведения двухчастичных событий рассеяния, а также чрезвычайно простой детектор, различающий синглетные и триплетные состояния и выявляющий присутствие запутанных состояний. В контексте когерентного транспорта невзаимодействующих фермионов, естественной отправной точкой в обсуждении статистических свойств является биномиальное распределение; энергетическая зависимость рассеяния сдвигает шум в суббиномиальный (или обобщенный биномиальный) режим, тогда как обусловленные запутыванием дополнительные корреляции могут создать супербиномиальную статистику шума.

Наши результаты, вычисленные при нулевой температуре, остаются верными при  $\beta^{-1} \ll \hbar v_F / \xi$ , т.е. для достаточно узких волновых пакетов с малой шириной  $\xi$  в реальном пространстве. Более того, мы вычислили производящую функцию для случая постоянного напряжения в пределе большого времени измерения для любых температур. Для коротких времен измерения наши результаты верны при температурах  $\beta^{-1} \ll eV$  и мы нашли сильное подавление  $P_{n \geq 2}$ , обусловленное принципом запрета Паули.

Центральным элементом, лежащим в основе появления (суб)-биномиальной статистики фермионов, является отсутствие межчастичных взаимодействий и запутывание. Этот результат остается справедливым для зависящего от времени рассеивающего потенциала и конечной температуры. Мы проанализировали изменения, обусловленные запутыванием, и нашли, что может возникнуть супербиномиальная

статистика. Включение взаимодействия, в частности, внутри рассеивателя, где запутываются взаимодействующие частицы, остается открытой интересной проблемой.

## Глава 2

### Эффективная схема счета частиц

Задача счета частиц, возникающая при построении рассмотренной нами в главе 1 полной статистики переноса заряда в мезоскопических системах, может быть решена выбором того или иного устройства счета частиц. В качестве индивидуального считающего элемента может быть использована любая двухуровневая система (кубит), например, спин или заряженная частица в двухъямном потенциале. Использование двухуровневой системы имеет длинную историю: используя ларморовскую прецессию спина в качестве часов, привязанных к самой частице, Базь [43] и Рыбаченко [44] предложили измерять время, затрачиваемое частицей на прохождение барьера в задаче туннелирования. В контексте полной статистики переноса заряда в мезоскопической физике Левитов и Лесовик [45] предложили идею использовать независимый фиксированный спин как измерительный прибор для счета электронов, проходящих через квантовую проволоку. В квантовой оптике Бруне *и др.* [46] предложил использовать возбужденные атомы как атомные часы для счета фотонов в резонаторе, что недавно было реализовано экспериментально [47]; в последнем случае пролетающие атомы измеряют число локализованных в резонаторе фотонов.

Устройство, непосредственно считающее частицы в мезоскопических системах [48, 49] и в квантовой оптике [46], требует порядка  $N^2$  индивидуальных считающих элементов, смотри ниже раздел 2.1.2. Квантовая механика дает нам возможность построить новые алгоритмы счета, ускоряющие решение специфических вычислительных задач, и если для некоторых задач



скорость счета увеличивается умеренно (например, для задачи сортировки списка [50, 51]), то в других случаях, как, например, разложение числа на простые множители [50, 52], скорость вычислений растет экспоненциально. Если практическое применение квантовой криптографии [50, 53] близко к коммерческой реализации [54], то создание квантового компьютера с тысячами квантовых битов - дело отдаленного будущего, если только эта цель когда-либо будет достигнута. В этой ситуации представляет интерес рассмотреть некоторые специфические задачи, решение которых не предъявляет высоких требований к числу кубитов и сложности управления ими. Примером такого рода приложения является использование кубита в качестве измерительного прибора в задаче полной статистики переноса заряда [4]; также, итеративный алгоритм оценки фазы был предложен в качестве тестового приложения устройства с ограниченным числом кубитов, в частности, двухкубитного устройства [55].

В этой главе будет предложен эффективный алгоритм счета частиц, который требует всего  $(\log_2 N)$  спинов-счетчиков (кубитов). Ключевым элементом алгоритма является специфическое физическое устройство из  $K$  кубитов, выполняющее неразрушающий счет частиц  $n < N = 2^K$  в потоке, проходящем по квантовой проволоке. Этот алгоритм похож на задачу оценки фазы [56, 57] в обращенном виде: вместо того, чтобы определять фазу  $\phi$  при помощи  $N$  операций, фаза  $\phi$  считается известной, а мы стремимся найти число  $N$  операций, ассоциированных с прохождением частиц. Наша схема содержит условные измерения, когда  $j$ -ое измерение зависит от результатов предыдущих  $j - 1$  измерений, что напоминает двоичный граф [58]. Более простое одновременное (а не условное) измерение  $K$  кубитов позволяет выполнить проверку делимости на  $2^K$  измеряемого числа.

Таким образом, наша программа позиционируется в пограничной области между теорией информации и ее применением в мезоскопической физике; не являясь универсальной, наша схема квантового счета является алгоритмом для решения специфической задачи, сочетающим относительно простую реализацию и возможность практического применения.

## 2.1. Алгоритмы счета

### 2.1.1. Классический алгоритм

Задача, с которой мы начнем, заключается в счете (заряженных) частиц, прошедших через прибор, и записи результата счета в двоичном виде. Рассмотрим сначала обычный классический алгоритм и предположим, что каждая частица, проходящая через классический счетчик, создает импульс (генерирует некий сигнал); для простоты допустим, что в процессе счета частица ‘●’ сама перемещается в некой цепочке (сама себя считает, как на счетах). Пусть у нас имеется регистр с  $K$  ( $n < 2^K$ ) пустыми ячейками  $[0, 0, \dots, 0, 0, 0]$ , тогда первая прошедшая частица поместится в крайнее правое положение  $[0, 0, \dots, 0, 0, \bullet]$ , а прохождение второй частицы приведет к заполнению второй ячейки справа ( $[0, 0, \dots, 0, 0, \bullet\bullet] \rightarrow [0, 0, \dots, 0, \bullet, 0]$ ). Третья частица опять заполнит крайнюю правую ячейку ( $[0, 0, \dots, 0, 0, \bullet, \bullet]$ ), четвертая частица индуцирует двойной сдвиг ( $[0, 0, \dots, 0, 0, \bullet, \bullet\bullet] \rightarrow [0, 0, \dots, 0, \bullet\bullet, 0] \rightarrow [0, 0, \dots, 0, \bullet, 0, 0]$ ) и т.д. Таким образом, для счета  $n < N = 2^K$  пролетевших частиц потребуется  $\sim n \log_2 n$  шагов.

### 2.1.2. Квантовые измерения

Простейшая схема, использующая спиновые счетчики для нахождения числа прошедших по проволоке частиц [45] нуждается в проведении  $\propto n^2$  измерений и поэтому требует больше ресурсов. Чтобы пояснить эту мысль, предположим, что заряженные частицы движутся вдоль оси  $x$  и  $N_m$  спинов первоначально поляризованы вдоль положительного направления оси  $y$ . При прохождении заряда индуцированное магнитное поле  $B$ , направленное вдоль оси  $z$ , поворачивает спины в  $x$ - $y$  плоскости на фиксированный угол  $\phi < \pi/N$ . В реальном эксперименте спины следует заменить на подходящие кубиты [4], в дальнейшем мы будем использовать термины "спин" и "кубит" как синонимы. Использование  $N_m$  спинов, которое эквивалентно  $N_m$ -кратному повторению одного и того же эксперимента с одним спином, позволяет нам при однократном прохождении  $n < N$  частиц выполнить  $N_m$  измерений над системой одинаково приготовленных спинов—эта процедура соответствует однократному измерению  $N_m$  спинов (заметим, что теорема, запрещающая клонирование [59, 60], не допускает использования одного спина с последующим клонированием его после пролета  $n$  частиц). При измерении спина вдоль оси  $y$  (теоретическая) вероятность найти его в положении "вверх" дается выражением  $P^\uparrow = \langle m^\uparrow \rangle_k / N_m = \cos^2(n\phi/2)$ , где  $\langle m^\uparrow \rangle_k$  обозначает усредненное по результатам  $k \rightarrow \infty$  измерений число спинов, обнаруженных в состоянии "вверх". С другой стороны, однократное измерение  $m_m^\uparrow$  дает экспериментальный результат  $P_m^\uparrow = m_m^\uparrow / N_m$ , из которого мы можем найти число  $n = (2/\phi) \arccos[(P_m^\uparrow)^{1/2}]$ . Вариант подобной схемы предложен в работе [46], где последовательность возбужденных атомов, приведенных в состояние квантовой суперпозиции посредством вза-

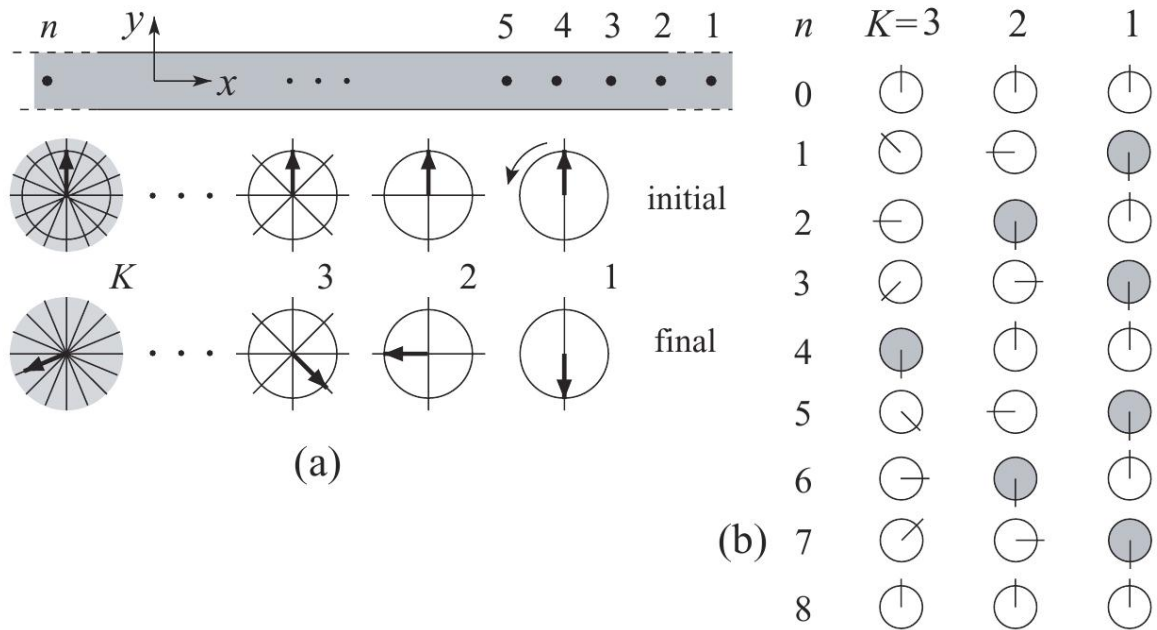
имодействия с фотонами в резонаторе, используется для проецирования поля резонатора на состояние с определенным числом фотонов.

Вышеприведенная процедура является статистической, и мы должны определить, сколько спинов (измерений)  $N_m$  необходимо для точного предсказания числа частиц  $n$ . Разница (мы полагаем, что  $N > n \gg 1$ )  $\delta P^\uparrow = |P^\uparrow(n+1) - P^\uparrow(n)| \approx |\partial_n P^\uparrow| = (\phi/2) \sin(n\phi)$  должна быть много больше, чем неопределенность  $[\langle (\delta m^\uparrow)^2 \rangle_k]^{1/2} \equiv [\langle (m^\uparrow - \langle m^\uparrow \rangle_k)^2 \rangle_k]^{1/2}$  измерения,  $\delta P^\uparrow \gg [\langle (\delta m^\uparrow)^2 \rangle_k]^{1/2} / N_m$ . Для данной биномиальной статистики измерений (величины  $\uparrow$  и  $\downarrow$  измеряются с вероятностями  $P^\uparrow$  и  $(1 - P^\uparrow)$ ), мы получаем  $\langle (\delta m^\uparrow)^2 \rangle_k = P^\uparrow(1 - P^\uparrow) N_m$ , комбинируя эти результаты, получаем, что  $N_m \gg 1/\phi^2 > N^2/\pi^2 \gg 1$  спинов необходимы для точного измерения числа частиц  $n < N$ .

### 2.1.3. Квантовый алгоритм

Рассмотрим более сложную схему измерений при помощи квантового алгоритма, в которой нам понадобится только  $K \sim \log_2 N$  кубитов (спинов) для измерения количества  $n < N$  частиц и представления полученного числа в двоичном виде. Схема реализации этого алгоритма показана на Рис. 2.1, где  $n < N = 2^K$  частиц, которые необходимо сосчитать, пролетают в квантовой проволоке вдоль оси  $x$ . Первоначально все  $K$  спинов или кубитов (мы используем эти термины как синонимы, см. обзор [4]) поляризованы вдоль положительного направления оси  $y$ , то есть начальные состояния записываются как:  $|+y\rangle_j = [|\uparrow\rangle_j + i|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Мы используем состояния спина, поляризованные вдоль оси  $z$ , как наш вычислительный базис  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |0\rangle$  и  $|\downarrow\rangle \leftrightarrow -i|1\rangle$ .

Взаимодействие между заряженной частицей и спином такое, что



**Рис. 2.1.** Иллюстрация квантового алгоритма счета и записи числа частиц  $n$  в двоичной форме. (а) Первоначально все спины поляризованы в  $+y$  направлении. После пролета одной частицы  $j$ -й спин поворачивается (против часовой стрелки) на угол  $\phi_j = 2\pi/2^j$ . После пролета всех частиц первый спин измеряется вдоль оси  $y$ , это даст нам четность числа и цифру двоичной записи. В зависимости от четности, второй спин измеряется вдоль оси  $y$  (четное число) или оси  $-x$  (нечетное число); если в результате измерения получен спин вдоль (или в противоположном направлении) оси, то мы получаем вторую двоичную цифру 0 (1). Дальнейшие шаги делаются аналогично (см. текст). На рисунке показана ситуация после пролета 5 частиц при наличии  $K = 3$  кубитов. (б) Проверка делимости: состояния кубитов после прохождения  $n = 0, \dots, 8$  частиц для  $K = 3$ . При  $n = 1, \dots, 7$  имеется в точности один кубит, направленный вниз (в конце процедуры) в состоянии  $|\downarrow\rangle$  (затемнено), сигнализируя, что число частиц  $n$  не делится на  $2^3 = 8$ .

пролет частицы поворачивает спины в  $x$ - $y$  плоскости. Сила взаимодействия спинов с проволокой выбирается так, чтобы  $j$ -й спин вращался (против часовой стрелки) на угол  $\phi_j = 2\pi/2^j$  (вращение оператором  $U_z(\phi_j) = \exp(-i\phi_j\sigma_z/2)$ , где  $\sigma_z$  - матрица Паули). Тогда пролет  $n$  частиц поворачивает  $j$ -й спин на угол  $n\phi_j$  и переводит его в состояние  $[|\uparrow\rangle_j + i \exp(2\pi i n/2^j)|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$ , где мы отбросили общую фазу  $\exp(-\pi i n/2^j)$ . Состояние всей системы кубитов может быть записано следующим образом:

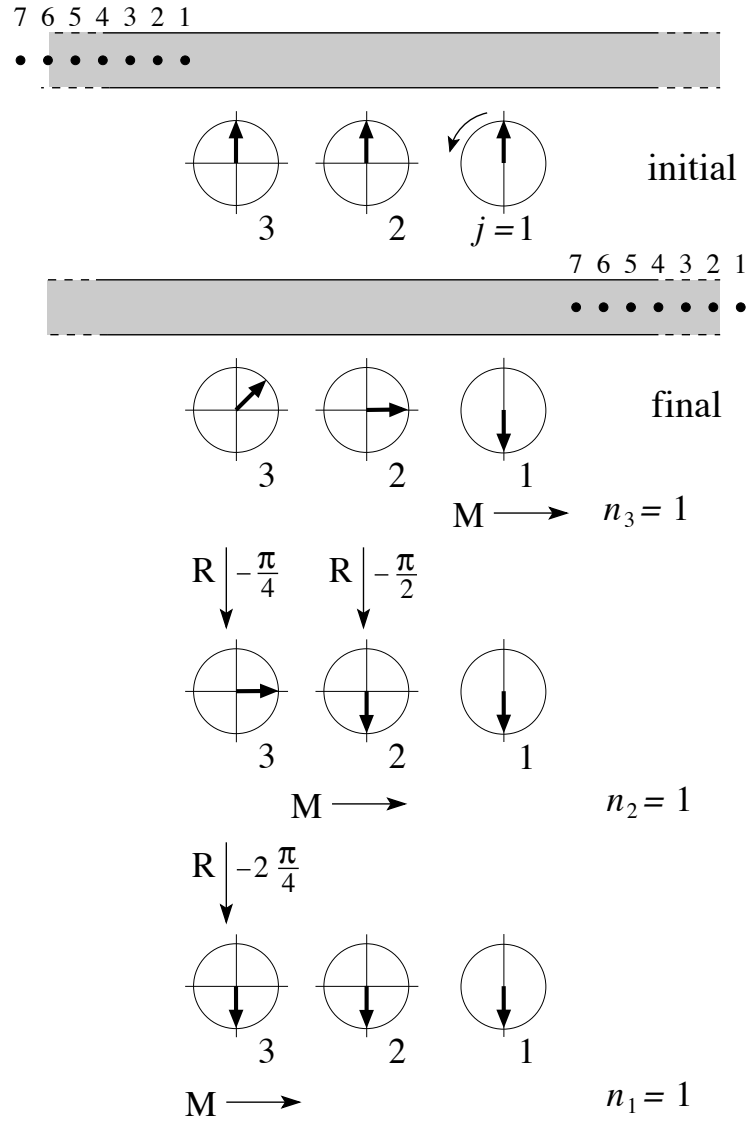
$$|\Psi_n\rangle_Q = \prod_{j=1}^K \frac{|\uparrow\rangle_j + i \exp(2\pi i n 2^{K-j}/2^K)|\downarrow\rangle_j}{\sqrt{2}} \quad (2.1)$$

В частности, первый спин поворачивается на угол  $n\pi$  и направлен вверх, если прошло четное число частиц; мы записываем '0' в первом разряде (справа налево) двоичного числа  $n_K$ , в противоположном случае спин направлен вниз и мы записываем '1' в первом разряде двоичного числа. Следовательно, измерение первого спина вдоль оси  $y$  дает нам четность числа (заметим, что в классическом алгоритме нам требовалось выполнить  $n \log_2 n$  операций для определения четности). Кроме того, что мы нашли первую цифру двоичного числа (четность), результат измерения дает нам возможное направление второго спина, который повернулся на угол  $n\pi/2$ . Второй спин направлен вдоль оси  $y$ , если число четное, или вдоль оси  $x$ , если нечетное. Эта информация позволяет нам измерить второй спин вдоль правильной оси; для четных  $n$  мы измеряем спин вдоль оси  $y$  и записываем 0 (1) во второй двоичный разряд  $n_{K-1}$ , если спин направлен вверх (вниз), для нечетных  $n$  мы измеряем спин вдоль оси  $-x$  и снова получаем вторую двоичную цифру. Более подробно, если  $n = 4l_2$ , где  $l_2$  - число полных оборотов второго спина, то состояние первого спина показывает, что

число четное, а второй спин, измеренный вдоль оси  $y$ , направлен вдоль  $(+y)$ , следовательно мы записываем '0' во втором разряде двоичного числа. Аналогично для  $n = 4l_2 + 1$ , второй спин направлен вдоль  $(-x)$ ; первый спин показывает, что число нечетно и измерение второго спина надо делать вдоль оси  $-x$ , мы записываем '0' во втором разряде двоичного числа. Для  $n = 4l_2 + 2$ , второй спин направлен вдоль  $(-y)$  (четное число, измерение вдоль оси  $y$ , записываем '1'), а для  $n = 4l_2 + 3$  второй спин направлен вдоль  $(+x)$  (нечетное число, измерение вдоль оси  $-x$ , записываем '1').

Продолжение алгоритма выполняется непосредственно:  $j$ -й спин измеряется вдоль направления  $m_{j-1}\phi_j$  с целым двоичным числом  $m_{j-1} = n_{K-j+2} \dots n_{K-1}n_K$ , полученным в предыдущих  $j-1$  измерениях. В  $j$ -ю позицию двоичного числа мы записываем  $n_{K-j+1} = 0$  или  $n_{K-j+1} = 1$  в зависимости от результата измерения; 0 для спина, направленного вдоль оси, и 1 для спина, направленного против оси. Этот алгоритм последовательных измерений дает нам двоичное представление числа пролетевших частиц  $n = n_1 n_2 \dots n_K = n_1 2^{K-1} + n_2 2^{K-2} + \dots + n_K 2^0$ . Полный алгоритм требует  $\lceil \log_2(n+1) \rceil$  шагов ( $i_r = \lceil r \rceil$  ближайшее целое число  $i_r > r$ ), то же самое число битов требуется для записи числа  $n$  в двоичном виде. Этот алгоритм обеспечивает экспоненциальное ускорение по сравнению с классическим алгоритмом.

Чтобы сделать алгоритм более эффективным, вместо поворота оси, вдоль которой делается измерение, будем поворачивать спины на соответствующие углы. Эти повороты на углы  $-m_{j-1}\phi_j$  удобно делать частями: после измерения  $j$ -го спина с результатами '0' или '1', все спины  $J > j$  поворачиваются на угол  $-n_{K-j+1}2^{j-1}\phi_J$ . Эти повороты компенсируют действие нечетного числа групп частиц: первый поворот на угол  $-2\pi n_K 1/2^J$ ,



**Рис. 2.2.** Счет  $n = 7$  частиц  $K = 3$  кубитами. После пролета частиц, начальное состояние кубитов (все кубиты поляризованы вдоль оси  $y$ ) переходит в конечное. Затем отдельные кубиты измеряются (M), в результате получаем двоичные цифры числа  $n_j$ ,  $j = 3, 2, 1$  в обратном порядке. После каждого измерения остальные кубиты поворачиваются (R), чтобы скомпенсировать пролет посчитанной группы частиц.



действующий на кубиты  $J > 1$ , компенсирует пролет нечетного числа частиц, второй поворот на угол  $-2\pi n_{K-1} 2/2^J$ , действующий на кубиты  $J > 2$ , компенсирует пролет нечетного числа пар, третий поворот на угол  $-2\pi n_{K-2} 4/2^J$ , действующий на кубиты  $J > 3$ , компенсирует пролет нечетного числа четверок и так далее. Эти повороты дают возможность измерять следующий спин вдоль оси  $y$ . Этот алгоритм проиллюстрирован на Рис. 2.2 для случая  $n = 7$  частиц, которые считаются  $K = 3$  кубитами.

Формально, справедливость этого алгоритма последовательных измерений может быть выведена из подходящего представления состояния из уравнения (2.1): дробь  $n/2^j$  в фазе  $\exp(2\pi i n/2^j)$   $j$ -го кубита может быть известна только по модулю 1, используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^j} \Big|_{\text{mod}(1)} &= 0.n_{K-j+1} \dots n_K \\ &= \frac{n_K 2^0 + n_{K-1} 2^1 + \dots + n_{K-j+1} 2^{j-1}}{2^j}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

состояние  $j$ -го кубита может быть записано в форме  $[|0\rangle_j + \exp(2\pi i 0.n_{K-j+1} \dots n_K) |1\rangle_j] / \sqrt{2}$ , где мы использовали двоичное представление дроби  $0.n_1 n_2 \dots n_K = n_1/2 + n_2/4 + \dots + n_K/2^K$ , смотри книгу [50]. Конечное состояние кубитов после пролета частиц можно записать в форме

$$|\Psi_n\rangle_Q = \prod_{j=1}^K \frac{|0\rangle_j + \exp(2\pi i 0.n_{K-j+1} \dots n_K) |1\rangle_j}{\sqrt{2}}. \quad (2.3)$$

Это представление демонстрирует, что состояние первого кубита  $j = 1$  содержит только младшую цифру  $n_K$  числа  $n$ , второго кубита - только дробь  $0.n_{K-1} n_K$ , и так далее. Следовательно, для определения состояния каждого кубита требуется знать состояния предыдущих кубитов и измерение его дает нам еще одну цифру двоичного представления числа  $n$ .

#### 2.1.4. Проверка делимости

В этом разделе мы рассмотрим пример возможного использования алгоритма, описанного выше, для проверки делимости числа на степень двойки. Или более точно, в какой степени двойка появляется в разложении числа на простые множители. Очевидно, информация о делимости числа на  $2^K$  является неполной информацией о числе; соответственно, можно ожидать, что для такой проверки потребуется затратить меньше ресурсов. Действительно, для проверки делимости с использованием нашего устройства требуется одновременное измерение  $K$  кубитов вдоль оси  $y$  после прохождения электронов по проволоке (а не описанное выше условное измерение).

Пусть наше устройство состоит из  $K$  кубитов. Мы пропускаем через квантовый провод  $n < 2^K$  частиц. Число  $0 < n < 2^K$  может быть представлено в виде  $2^m I$ , где  $0 \leq m < K$  и  $I$  - целое нечетное число.

В исходном состоянии все кубиты поляризованы вдоль оси  $y$   $|\text{in}\rangle = |+\ y\rangle = (|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ . После прохождения  $n$  частиц,  $j$ -ый спин переходит в конечное состояние  $|\text{f}\rangle = [e^{\pi i n/2^j} |\uparrow\rangle + i e^{-\pi i n/2^j} |\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ . Вероятность найти этот спин в состоянии  $|+\ y\rangle$  равна  $|\langle +y|\text{f}\rangle|^2 = \cos^2(\pi n/2^j)$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Существует в точности один спин  $1 \leq j^* \leq K$ , для которого эта вероятность равна нулю. Действительно, так как  $n = 2^m I$ , где  $0 \leq m < K$  и  $I$  - целое нечетное число, то для спина  $j^* = m + 1$  (и только для этого спина) фаза  $\pi n/2^{j^*} = \pi I/2$  является произведением нечетного числа на  $\pi/2$ , следовательно, вероятность  $|\cos(\pi I/2)|^2$  найти спин в состоянии вдоль  $+y$  равна нулю, т.е. спин направлен вниз. Для  $j < m + 1$  фаза кратна  $\pi$ , а спины направлены вверх; для  $j > m + 1$  фаза равна произведению  $I/2^{j-m-1}$  на  $\pi/2$ , и спины не направлены вдоль оси  $y$ .

Таким образом, наш алгоритм устроен следующим образом. Мы пропускаем по проводу  $n < 2^K$  частиц, далее все кубиты измеряем вдоль оси  $y$ . Пусть  $m$  первых кубитов измерены в состоянии  $|+y\rangle$ , а следующий  $m+1$ -й в состоянии  $|-y\rangle$ , тогда число  $n$  делится на  $2^m$  и не делится на  $2^{m+1}$ .

## 2.2. Возможная реализация кубитов

Спины, требующиеся в вышеописанных алгоритмах счета и проверки делимости, могут быть реализованы при помощи разных кубитов; заметим, что, хотя специфическая природа нашего алгоритма позволяет избежать большого числа кубитов и сложного устройства квантового компьютера, нам тем не менее требуются кубиты высокого качества. Большинство кубитов естественным образом взаимодействуют с электронами в квантовой проволоке посредством либо векторного потенциала(тока), либо скалярного потенциала (заряда). Взаимодействие с зарядом является сильным, с типичными значениями углов поворота  $\phi$  порядка  $(e^2/\hbar v_F) \ln(L/d)$ , где  $L$  - длина проволоки,  $d$  - расстояние до кубита,  $v_F$  - скорость Ферми, за счет чего при прохождении отдельного заряда возможны повороты фазы на  $\pi$ . Взаимодействие с током является слабым, вследствие чего обычно требуется усиление, см. обсуждение в работе [4].

Чтобы пояснить эту идею, ниже мы обсудим реализацию с зарядовыми кубитами в виде двойной квантовой точки (DQD), параметрами которой можно управлять посредством подачи электрического напряжения и тем самым реализовывать различные квантовые операции. DQD были реализованы в гетероструктурах GaAs/AlGaAs [61, 62], а также был реализован изолированный вариант (без контактов) в кремниевой технологии [63]. Для

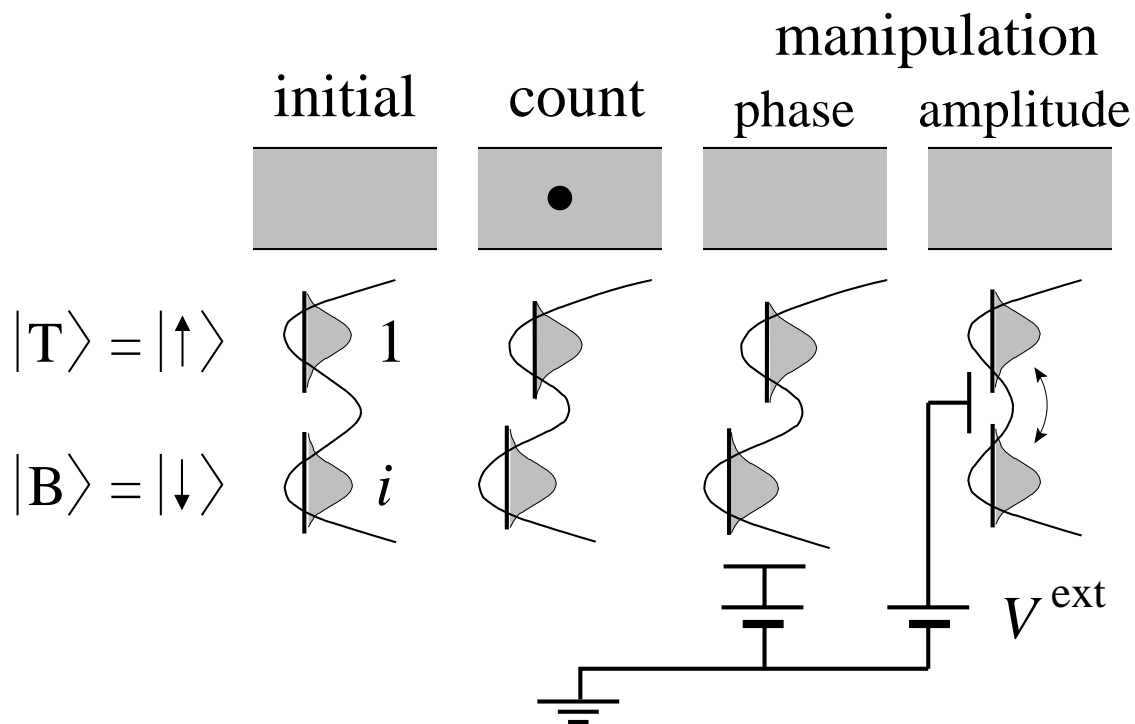
первого случая характерны частоты колебаний порядка нескольких ГГц и времена декогеренции порядка нескольких наносекунд, соответственно, эффективность такого устройства составляет величину порядка от 1 до 10. Во втором случае характерные времена туннелирования/декогеренции в 100 раз меньше/больше для изолированного кубита [63]. В качестве альтернативы можно рассмотреть сверхпроводящий зарядовый кубит, т.е. ‘квантроний’ [64], с временем декогеренции порядка миллисекунды; эта величина, измеренная в особой точке (‘sweet spot’), может быть, однако, уменьшена при выборе рабочей точки, достаточно чувствительной к заряду. В настоящее время разрешение противоречия между высокой чувствительностью заряда, достаточной для поворотов на угол порядка  $\pi$ , и декогерентностью, обусловленной флуктуациями заряда под действием внешних помех, остается технологическим вызовом. С другой стороны, наилучшие современные твердотельные кубиты (со временем декогерентности более  $2 \mu\text{s}$ ), т.н. трансмоны (transmon) [65, 66], могли бы использоваться как фотонные счетчики в микроволновой области [67].

Вышеописанные временные характеристики кубитов следует сравнить с характерными временами электронного транспорта в проволоке. При постоянном напряжении отдельные следующие друг за другом электроны разделены временным интервалом  $\tau = h/eV$ , а одноэлектронные волновые пакеты можно создать импульсами напряжения, имеющими вид лоренциана [48, 68]. Недавно альтернативная схема была описана в работе [69], авторы которой инжектировали отдельные электроны из квантовой точки в канал, работающий в режиме квантового Холла. В их эксперименте характерные времена  $\tau = h/T\delta$  одноэлектронных импульсов находились в интервале от 0.1 до 10 наносекунд [69], где  $T$  и  $\delta$  - вероятность туннели-

рования и расстояние между уровнями в квантовой точке. Таким образом, в настоящее время технология зарядовых кубитов вплотную подошла к использованию в экспериментах счета электронов.

Рассмотрим такое устройство, в котором две квантовые точки расположены на прямой, перпендикулярной проволоке, вследствие чего они по-разному взаимодействуют с зарядом электрона в проволоке, и смоделируем двойную точку как двухъямный потенциал с квазиклассическими состояниями  $|T\rangle \equiv |\uparrow\rangle$  (верхняя яма, см Рис. 2.3; в нашем анализе мы используем спиновую терминологию) и  $|B\rangle \equiv |\downarrow\rangle$  (нижняя яма) и основным/возбужденным состояниями  $|\pm\rangle = [|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ , разделенными щелью  $\Delta$ . Рассмотрим случай высокого барьера, разделяющего квазиклассические состояния, тогда амплитуда туннелирования  $\propto \Delta$  экспоненциально мала. Чтобы приготовить кубиты в состоянии  $|+y\rangle = [|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ , мы измерим их состояния и затем повернем их вокруг оси  $x$  на угол  $-\pi/2$  ( $\pi/2$ ) для состояния  $|\uparrow\rangle$  ( $|\downarrow\rangle$ ). Вращение вокруг оси  $x$  осуществляется понижением барьера, разделяющего квазиклассические состояния, что вызывает перераспределение амплитуды вероятности между ямами, см. Рис. 2.3: открывание конечной щели  $\Delta$  в течение времени  $t$  изменяет фазу возбужденного состояния  $|-\rangle$  на  $e^{-i\Delta t/\hbar}$ , что соответствует повороту спина вокруг оси  $x$  на угол  $\Delta t/\hbar$ ; выбрав время  $t = \hbar\pi/2\Delta$ , мы получим поворот состояния  $|\downarrow\rangle$  в состояние  $|+y\rangle$ . Напротив, при приложении подходящего импульса напряжения к двойной точке, кубиты релаксируют в основное состояние  $|+\rangle$  (что соответствует выстраиванию спина вдоль оси  $+x$ ), поворачиваясь, соответственно, на  $\pi/2$  вокруг оси  $z$ , добавляя относительную фазу  $\pi/2$  к квазиклассическому состоянию  $|\downarrow\rangle$ , см. Рис. 2.3.

Прохождение электронов по проволоке создает конечное состояние

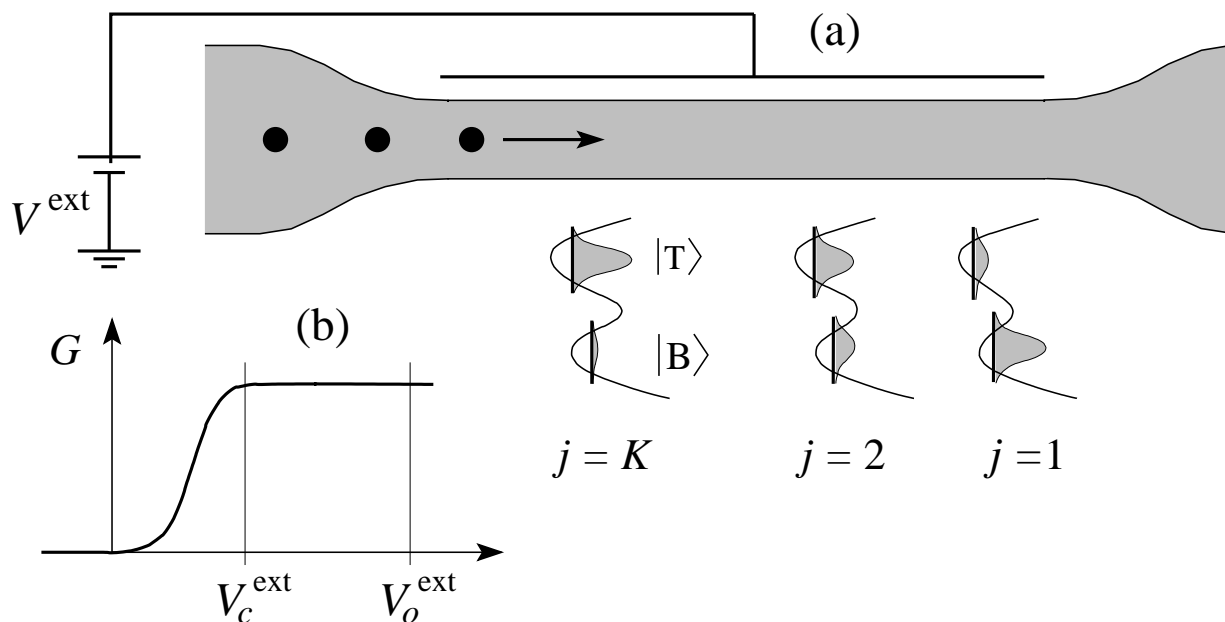


**Рис. 2.3.** Реализация алгоритма счета при помощи зарядовых кубитов, состоящих из двух квантовых точек, смоделированных частицей в двухямном потенциале. Начальное состояние  $|+y\rangle = [|\uparrow\rangle + i|\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ . Частицы пересчитываются за счет вызванных ими импульсов напряжения, порождающими сдвиг фаз между состояниями  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$  ("вращение вокруг оси  $z$ "). Приготовление начального состояния и считывание включает в себя манипуляцию фазой (с помощью сдвижки между уровнем  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$ , "вращение вокруг оси  $z$ ") и амплитудой (с помощью понижения барьера между  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$ , что соответствует вращению вокруг оси  $x$ ).

$|\Psi\rangle = [|\uparrow\rangle + ie^{-i\phi_j n}|\downarrow\rangle]/\sqrt{2}$ , где  $\phi_j = 2\pi/2^j$  - разность фаз между квази-классическими состояниями, возникающая при прохождении одного электрона. Процедура считывания для определения делимости заключается в повороте кубитов вокруг оси  $x$  на угол  $\pi/2$  и проверке того, находятся ли электроны во всех ямах в состоянии  $|\uparrow\rangle$ ; если ответ положителен, то число частиц  $n$ , прошедших мимо  $K$  двойных точек, делится на  $2^K$ . Для того, чтобы найти точное значение числа  $n$ , требуется до вращения вокруг оси  $x$  произвести дополнительные вращения вокруг оси  $z$  на угол  $m_{j-1}\phi_j$ , где число  $m_{j-1}$  равно двоичному числу, полученному в предыдущих  $j - 1$  измерениях. Например, для третьего кубита ( $j = 3$ ) после прохождения 7 электронов измерение первых двух кубитов дает двоичное число  $(1, 1)$ , следовательно,  $m_2 = 3$ , и вращение на  $3\pi/4$  вокруг оси  $z$  направит третий спин вдоль направления  $-y$ ; запишем 1 в третий разряд двоичного числа и получим  $m_3 = 7$ , см. Рис. 2.1(b).

В описанной выше процедуре двойная точка не оказывает заметного влияния на проходящие по проволоке электроны, поскольку распределение заряда остается неизменным в течение всего процесса детектирования. Другой вариант определения делимости использует обратное действие двойной точки на проволоку и работает без явного измерения какого-либо конечного состояния кубитов. Этот выигрыш в производительности влечет за собой, однако, два неудобства: во-первых, обратное действие должно тщательно контролироваться, во-вторых, поток частиц должен быть достаточно хорошо организован во времени так, чтобы обеспечить временное разделение двух следующих друг за другом частиц.

В устройстве с обратным действием имеется квантовый точечный контакт (QPC), которым можно управлять посредством подачи напряжения



**Рис. 2.4.** (a) Устройство проверки делимости с "самоизмерением". При прохождении электронов через QPC первоначально разбалансированные состояния  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$  становятся вырожденными, что приводит к перераспределению волновых функций между состояниями  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$ . В свою очередь кубиты действуют на QPC и изменяют его проводимость  $G$ , сужая (волновая функция наверху) или расширяя (волновая функция внизу) канал. (b) Зависимость проводимости  $G$  от приложенного внешнего напряжения  $V^{\text{ext}}$ . При  $V^{\text{ext}} = V_c^{\text{ext}}$  канал едва открыт, а при  $V^{\text{ext}} = V_o^{\text{ext}}$  канал открыт широко.



$V^{\text{ext}}$ , см. Рис. 2.4(a). В этом случае кубиты готовятся с асимметричными состояниями (с энергиями, отличающимися на величину  $\varepsilon$ ) при отсутствии смещающего напряжения. Изначально каждый кубит находится в состоянии  $|B\rangle$  (с более высокой энергией), в котором электрон находится дальше от проволоки. При прохождении электрона по проволоке состояния  $|T\rangle$  и  $|B\rangle$  становятся вырожденными, и часть волновой функции туннелирует из  $|B\rangle$  в  $|T\rangle$ . Роль угла поворота  $\phi$  теперь играет фаза  $\phi \approx \Delta\delta t_{\text{deg}}/\hbar$ , где  $\Delta$  - туннельная щель,  $\delta t_{\text{deg}}$  - время вырождения (в реальности следует должным образом учитывать время эволюции, т.е. изменения, электрического потенциала при прохождении электрона). Чтобы обеспечить должную эволюцию волновой функции в DQD при прохождении следующих друг за другом электронов, элементарное изменение фазы между событиями туннелирования  $|T\rangle \leftrightarrow |B\rangle$  должно быть кратно  $2\pi$ ,  $\varepsilon t_{\text{con}}/\hbar \approx 2k\pi$ .

Электроны в кубитах оказывают обратное действие на квантовую проволоку посредством емкостного взаимодействия и могут заблокировать канал. Определим критическое ( $V_c^{\text{ext}}$ ) и открывающее ( $V_o^{\text{ext}}$ ) смещение внешнего потенциала следующим образом (см. Рис. 2.4(b)): при всех кубитах, находящихся в состоянии  $|B\rangle$ , мы подбираем напряжение смещения так, чтобы квантовый точечный контакт QPC был бы почти закрытым каналом, для полной блокировки которого было бы достаточно перехода электрона только в одном из кубитов в состояние  $|T\rangle$  — это определяет критическое напряжение  $V_c^{\text{ext}}$ . С другой стороны, подача напряжения  $V_o^{\text{ext}}$  широко открывает канал, так что электроны проходят его с заметной скоростью. Имея две такие настройки, определение делимости легко реализовать: мы подаем напряжение смещения  $V_o^{\text{ext}}$  и позволяем потоку частиц пройти через контакт QPC. Затем мы переключаем напряжение смещения на его крити-

ческое значение  $V_c^{\text{ext}}$  и пропускаем еще один (контрольный) электрон через контакт QPC. Если число частиц в прошедшем потоке делится на  $2^K$ , то все кубиты вернутся в состояние  $|\text{bottom}\rangle$ , а контрольный электрон пройдет через контакт и будет зарегистрирован с другой стороны контакта, например, при помощи одноэлектронного транзистора. Если же число электронов в потоке не делится на  $2^K$ , то тогда в точности один из  $K$  кубитов находится в состоянии  $\text{top}$ , см. Рис. 2.4, и полностью блокирует канал (тогда как другие кубиты могут отклонить частицы только вероятностным образом). Такое устройство дает возможность реализовать быструю проверку делимости числа прошедших электронов на  $2^K$ .

Заметим, что канал при прохождении потока должен быть широко открыт для предотвращения запутывания электронов потока с кубитами через обратное действие: скалярное взаимодействие  $\mathcal{V}$  между кубитом и электроном в проволоке тормозит их. Это торможение создает время задержки  $t_{\text{del}} = \int dx \{1/v[\mathcal{V}(x)] - 1/v[\mathcal{V} = 0]\}$ , зависящее от состояния кубита, следовательно, два состояния кубита  $|\text{T}\rangle$  и  $|\text{B}\rangle$  перепутываются с частями волновых пакетов электронов, которые задерживаются во времени. Поэтому необходимо, чтобы напряжение, подаваемое на QPC, значительно превышало критическое значение, а электроны проходили через канал быстро. Тогда обратное действие будет слабым и временем задержки можно будет пренебречь.

### 2.3. Выводы

В заключение, идея использования простого спинового счетчика в ‘мысленном эксперименте’ по полной статистике переноса оказалась сама по

себе плодотворной—она не только может быть реализована как реальное счетное устройство с квантовыми битами, но и ее многокубитное обобщение в комбинации с нетривиальным протоколом измерения дает возможность сконструировать ‘квантовый счетчик’, в котором ‘примитивная’ физическая информация может быть преобразована в бинарную форму или использоваться непосредственно для контроля и управления в мезоскопическом устройстве. Мы полагаем, что, даже ограничивая свои амбиции разработкой и реализацией устройств для решения частных задач, можно открыть новые направления в обработке квантовой информации, реализовать которые гораздо проще, чем универсальный квантовый компьютер, но которые, тем не менее, могут иметь интересные приложения.

## Глава 3

# Общая теория квантового счета. Связь с преобразованием Фурье

Алгоритм счета частиц, изложенный в главе 2, будет обобщен в главе 4 для выполнения счета по основанию  $d$  и проверки наличия множителя  $d^k$  в разложении числа на множители. Для достижения этой цели очень полезно иметь абстрактную теорию процесса счета. В этой главе будет сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных известных квантовых состояний при однократном измерении. Такое сведение задачи счета к небольшому числу основных элементов естественным образом связывает задачу счета с квантовым преобразованием Фурье и дает нам конструктивную схему прибора для (невозмущающего) квантового алгоритма счета. Действительно, минимальная абстрактная формулировка квантового счета в  $N$ -мерном Гильбертовом пространстве (позволяющая различить или сосчитать по крайней мере  $N$  объектов) естественным образом приводит нас к двум типам базисных состояний: к вычислительному базису (соответствующему состояниям  $|n\rangle_Q$ ), в котором измеряется результат процесса счета, и к базису счета  $|\psi_n\rangle_Q$ , в котором выполняется процесс счета – оказывается, что именно эти два базиса естественным образом связаны квантовым преобразованием Фурье (обобщенным преобразованием Фурье),  $|\psi_n\rangle_Q = F(|n\rangle_Q)$ . Кроме того, абстрактный анализ процесса счета дает нам рецепт физической реализации алгоритма.

В дальнейшем будут исследованы различные возможности реализации этих алгоритмов счета, обращая особое внимание на случай считающих в

троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементарных считающих устройств. Также будет установлена связь между квантовыми алгоритмами счета и алгоритмом оценки фазы.

### 3.1. Различимость и квантовый счет

В этом разделе мы сведем проблему квантового счета к задаче различения квантовых состояний. Процесс счета частиц естественным образом разбивается на три шага. Первый шаг - процедура приготовления считающего устройства (счетчика) в начальном состоянии. На втором шаге пролетающие частицы взаимодействуют со счетчиком, изменяя его состояние. Третий шаг - это процесс считывания полученной информации, то есть получения числа пролетевших частиц. Такая разбивка процесса счета приведет нас к определению двух базисов в Гильбертовом пространстве состояний считающего устройства. Один базис (вычислительный базис) определяется процессом конечного измерения (шаг три), а второй (базис счета) возникает непосредственно в процессе счета (шаг два). Если мы хотим иметь "мягкую" невозмущающую процедуру счета, то, как будет показано ниже, эти два базиса должны быть связаны обобщенным квантовым преобразованием Фурье.

Начнем с того, что квантовый счет соответствует процессу ассоциирования различных состояний вспомогательной квантовой системы (счетчика) с состояниями физической системы, которые описывают различное количество пролетевших частиц. Предположим, что мы хотим сосчитать по крайней мере  $N$  объектов, следовательно, наша вспомогательная квантовая система будет считать объекты по модулю  $N$ . В процессе счета части-

ца взаимодействует со счетчиком, переводя его из начального состояния в другое состояние. В результате начальное состояние  $|\Psi_0\rangle$  счетчика после прохождения  $n$  объектов переходит в конечное состояние  $|\Psi_n\rangle$ . Для описания пролета одной частицы мы определяем унитарный оператор  $C_1$

$$|\Psi_1\rangle = C_1|\Psi_0\rangle. \quad (3.1)$$

Оператор  $C_1$  определяется гамильтонианом взаимодействия частицы и счетчика. Простое повторение действия оператора  $C_1$   $n$  раз дает состояние

$$|\Psi_n\rangle = C_1^n|\Psi_0\rangle \equiv C_n|\Psi_0\rangle \quad (3.2)$$

возникающее после пролета  $n$  частиц. Нам требуется, чтобы мы могли отличить состояния  $|\Psi_n\rangle$  от состояния  $|\Psi_0\rangle$  в процессе однократного измерения, следовательно, эти состояния должны быть ортогональными  $\langle\Psi_n|\Psi_0\rangle = 0$ . До сих пор нам требовалась возможность отличить состояние ‘нет частиц’, связанное с состоянием  $|\Psi_0\rangle$ , от состояния ‘ $n$  частиц’ с  $0 < n < N$ , связанного с состоянием  $|\Psi_n\rangle$ , не различая состояния с разными  $n$ . Оказалось, что, решая такую более простую задачу, мы также можем отличить состояния с различным числом частиц  $|\Psi_n\rangle$ . Действительно, используя уравнение (3.2) и тот факт, что  $\langle\Psi_n|\Psi_0\rangle = 0$  для всех  $0 < n < N$ , мы находим, что (выбираем  $0 < l < n < N$ )

$$\begin{aligned} \langle\Psi_l|\Psi_n\rangle &= \langle\Psi_0|C_l^\dagger C_n|\Psi_0\rangle = \langle\Psi_0|C_{n-l}|\Psi_0\rangle \\ &= \langle\Psi_0|\Psi_{n-l}\rangle = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

следовательно, все состояния  $|\Psi_n\rangle$  являются ортогональными и различными в процессе однократного измерения. Таким образом, (минимальная) вспомогательная система, осуществляющая счет частиц, описывается

$N$ -мерным Гильбертовым пространством  $\mathcal{H}$ . В конце концов, наше стремление считать по модулю  $N$  требует цикличности, то есть,

$$C_N|\Psi_0\rangle = \exp i\Theta|\Psi_0\rangle; \quad (3.4)$$

если размерность нашей вспомогательной системы есть  $N$ , то цикличность (3.4) получается автоматически. Действительно, применяя последовательно оператор  $C_1$  к состояниям  $|\Psi_n\rangle$ , получаем, что все состояния  $|\Psi_{n+1}\rangle$  ортогональны предыдущим состояниям  $|\Psi_l\rangle$ ,  $\langle\Psi_l|\Psi_{n+1}\rangle$ ,  $0 \leq l \leq n < N - 1$ . При  $n = N - 1$ , мы получаем  $N$  ортогональных состояний; дальнейшее применение оператора  $C_1$  производит состояние  $|\Psi_N\rangle = C_1|\Psi_{N-1}\rangle$ , которое должно быть суперпозицией предыдущих состояний  $|\Psi_N\rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \langle\Psi_n|\Psi_N\rangle|\Psi_n\rangle$ . Однако, поскольку все матричные элементы  $\langle\Psi_n|\Psi_N\rangle = \langle\Psi_n|C_1\Psi_{N-1}\rangle = \langle\Psi_{n-1}|\Psi_{N-1}\rangle$  исчезают для  $0 < n \leq N - 1$ , мы получаем  $|\Psi_N\rangle \propto |\Psi_0\rangle$ , а так как  $C_1$  является унитарным оператором, мы приходим к уравнению (3.4). В случае большей размерности вспомогательной системы, условие (3.4) должно быть наложено отдельно.

Таким образом, процесс счета частиц может быть реализован при помощи взаимодействия частиц с вспомогательной квантовой системой (счетчиком), которая описывается  $N$ -мерным Гильбертовым пространством  $\mathcal{H}$  с ортонормированным базисом (базис счета)  $|\Psi_n\rangle \in \mathcal{H}$ ,  $n = 0, \dots, N - 1$  и  $\langle\Psi_l|\Psi_n\rangle = \delta_{ln}$ . При этом взаимодействие частиц со счетчиком задается унитарным оператором (оператором сдвига или счета)  $C_1$ , переводящим состояние счета в следующее состояние счета  $C_1|\Psi_n\rangle = |\Psi_{n+1}\rangle$ , и свойством цикличности  $C_1^N = C_N = \exp(i\Theta)$ . Вследствие своей ортогональности состояния  $|\Psi_n\rangle$  различимы в процессе однократного измерения и однозначно определяют число пролетевших частиц.

При определенной физической реализации процесса счета фаза  $\Theta$  определяется эволюцией системы в процессе счета. Мы можем скомпенсировать фазу  $\Theta$  у оператора  $C_1$  на конечную величину, сдвигая начало отсчета энергии в гамильтониане взаимодействия частиц со счетчиком  $H_{\text{int}}$ . Добавив постоянную энергию  $\Theta\hbar/Nt_c$  к  $H_{\text{int}}$ , переопределяем считающий оператор  $\tilde{C}_1 = e^{-i\Theta/N}C_1$  и базис счета  $|\tilde{\Psi}_n\rangle = e^{-i\Theta n/N}|\Psi_n\rangle$ ,  $0 \leq n < N$ . Запишем новое условие цикличности  $|\tilde{\Psi}_N\rangle = \tilde{C}_1|\tilde{\Psi}_{N-1}\rangle = e^{-i\Theta}|\Psi_N\rangle = e^{-i\Theta}e^{i\Theta}|\Psi_0\rangle = |\tilde{\Psi}_0\rangle$ . Таким образом, можно считать, что фаза  $\Theta = 0$ .

Для того, чтобы описать свойства вспомогательной системы, определим собственные значения и собственные векторы оператора  $C_1$ . Записанный в базисе  $\{|\Psi_n\rangle\}_{n=0}^{N-1}$ , оператор имеет форму

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Его собственные значения и собственные векторы легко находятся: детерминант  $C_1 - \lambda\hat{1}$  равен  $(-\lambda)^N + (-1)^{N-1}$ , следовательно, собственные значения  $C_1$  равны корням  $N$ -й степени из единицы, то есть  $\lambda_k = \exp(2\pi ik/N)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N-1$ . Собственный вектор  $|k\rangle$ , соответствующий значению  $\lambda_k$ , определяется выражением  $\langle\Psi_n|k\rangle = \exp(-2\pi i kn/N)/\sqrt{N}$ , то есть

$$|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-2\pi i kn/N} |\Psi_n\rangle = F^{-1}(|\Psi_n\rangle). \quad (3.6)$$

Заметим, что каждый собственный вектор  $|k\rangle$  можно домножить на произвольный фазовый множитель  $e^{i\alpha_k}$ . Эти дополнительные множители потребуются при анализе процедур приготовления и считывания, а пока будем



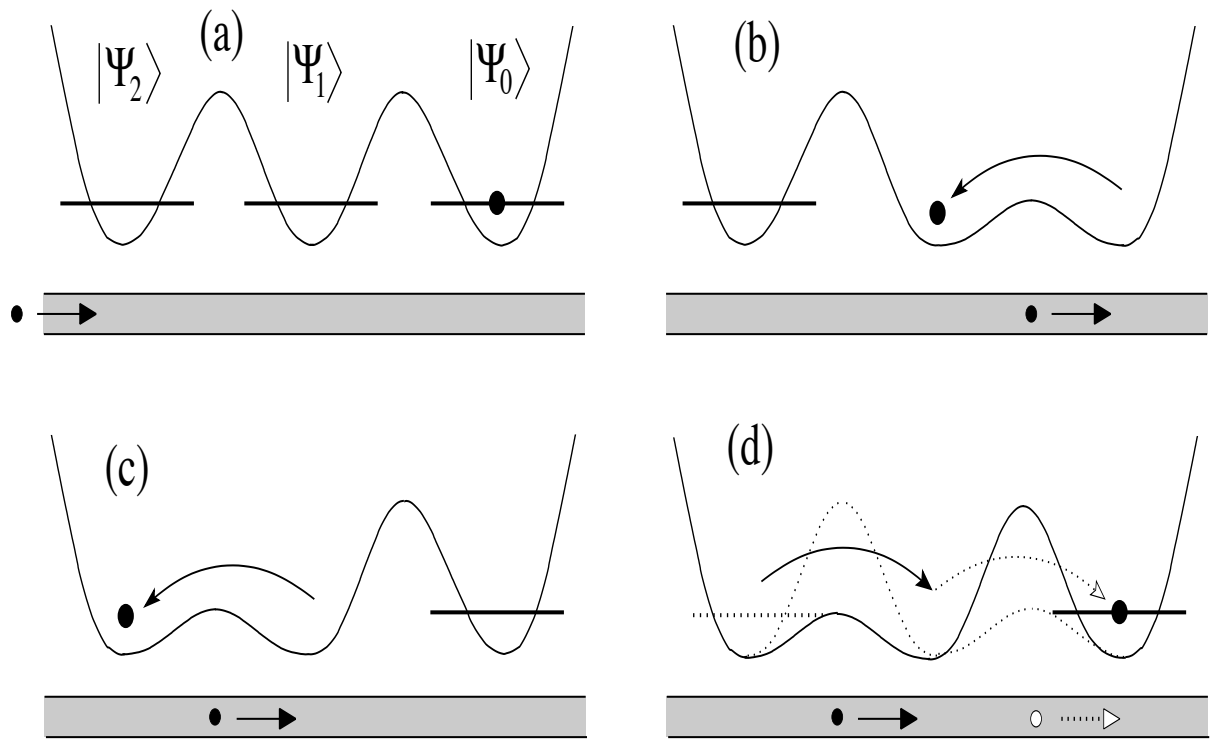
считать их равными единице. Выражая состояния счета  $|\Psi_n\rangle$  через собственные состояния  $|k\rangle$  оператора  $C_1$ , мы получаем

$$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i kn/N} |k\rangle = F(|n\rangle). \quad (3.7)$$

Таким образом мы получаем, что состояния счета  $|\Psi_n\rangle$  связаны с собственными состояниями  $|k\rangle$  оператора  $C_1$  через преобразование Фурье.

В процессе счета собственные состояния  $|k\rangle$  оператора  $C_1$  умножаются на фазовые множители, причем соответствующие фазы равномерно распределены по единичной окружности в комплексной плоскости. Это означает, что гамильтониан взаимодействия частицы и счетчика  $H_{\text{int}}$  должен иметь эквидистантный спектр. При использовании собственных состояний  $|k\rangle$  шаг счета может быть реализован очень простым и минимально возмущающим образом: при пролете частицы каждое состояние  $|k\rangle$  будет умножаться на фазовый множитель  $\exp(2\pi i k/N)$  и состояние  $|\Psi_n\rangle$  перейдет в состояние  $|\Psi_{n+1}\rangle$ , в чем и заключается действие оператора  $C_1$ . Следовательно, если мы выберем в качестве нашего вычислительного базиса набор ортонормальных собственных состояний  $\{|k\rangle\}_{k=0}^{N-1}$  оператора  $C_1$ , то процесс счета может быть реализован "мягким" образом, добавлением фаз к состояниям вычислительного базиса (заметим, что эти состояния являются как раз теми состояниями, над которыми будет производиться окончательное проективное измерение). В то же время базис счета, вектора которого связаны между собой оператором  $C_1$ , сформирован из состояний  $|\Psi_n\rangle = F(|n\rangle)$ , каждое из которых является квантовым преобразованием Фурье собственного состояния  $|n\rangle$ .

В этом месте можно задаться вопросом, существуют ли другие алгоритмы счета, не использующие квантовое преобразование Фурье. Ответ



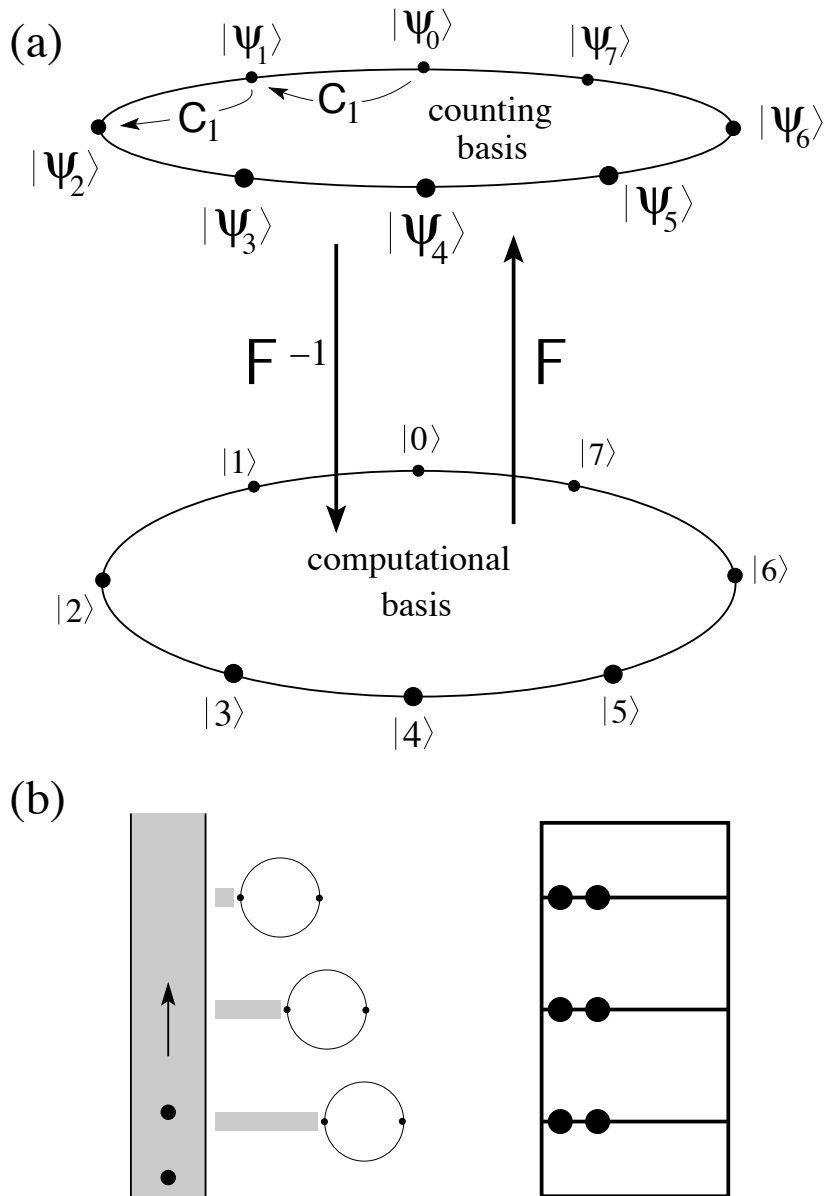
**Рис. 3.1.** Схема процесса счета, который не требует преобразования Фурье, на примере кутрита. Взаимодействие между частицей в счетчике и частицей в квантовом проводе понижает барьер, разделяющий квазиклассические состояния  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  при пролете частицы в проводе, перемещая частицу в счетчике влево, см. (a)  $\rightarrow$  (b)  $\rightarrow$  (c). Третья пролетающая частица переводит счетчик в исходное состояние, см. (d).

является утвердительным, однако эти альтернативные схемы не обеспечивают "мягкого" счета, сопряженного только с добавлением фаз. Рассмотрим в качестве примера показанную на Рис.3.1 многоямную систему (одна считающая частица в  $d$ -ямном потенциале), работающую в амплитудной моде. Предположим, что потенциал взаимодействия - притягивающий, тогда пролетающая частица понижает или устраняет барьер между соседними полуклассическими состояниями, позволяя считающей частице переместиться из одной ямы в другую. Здесь полуклассические состояния, локализованные в отдельных ямах, играют роль состояний счета  $|\Psi_n\rangle$ . При инициализации счетчика в крайнем правом положении в состоянии  $|\Psi_0\rangle$ , см. Рис.3.1, каждая из первых пролетевших  $d - 1$  частиц будет переводить считающую частицу из состояния  $|\Psi_n\rangle$  в состояние  $|\Psi_{n+1}\rangle$ , а  $d$ -ая частица перебросит считающую частицу обратно в крайнее правое, то есть, начальное, состояние  $|\Psi_0\rangle$ . Отличие такого счетного устройства от обсуждаемого выше "мягкого" счетного устройства заключается в выборе вычислительного базиса. А именно, вместо выбора в качестве вычислительного базиса собственных состояний оператора  $C_1$ , только меняющих фазы в процессе счета, в рассматриваемом примере за вычислительный базис мы принимаем сам базис счета  $|n\rangle = |\Psi_n\rangle$ . В результате вместо добавления фаз при счете мы сдвигаем считающую частицу в реальном пространстве. Очевидно, такое устройство трудно реализовать, поскольку для создания операции переноса требуется весьма тонкий инструмент; более того, операция переноса в реальном пространстве создаст заметное обратное воздействие на пролетающие частицы. С другой стороны, нет необходимости требовать когерентной эволюции такого счетчика между шагами счета, следовательно, требования к времени когерентности ослабляются.

Для осуществления процедуры счета частиц нам необходимо на первом шаге перевести считающее устройство из полуклассического состояния  $|0\rangle$  в состояние  $|\Psi_0\rangle = F(|0\rangle)$ . Для этого нам необходим набор физических процедур, которые описываются унитарным оператором (оператор приготовления)  $U_p$ . Заметим, что наш оператор приготовления  $U_p$  может не действовать как преобразование Фурье на другие базисные состояния, а является простейшим оператором, который переводит состояние  $|0\rangle$  в состояние  $|\Psi_0\rangle$ .

На втором шаге пролетающие частицы взаимодействуют со счетчиком, изменяя его состояние. Абстрактным образом этот процесс можно представить в виде перехода между расположенными по кругу состояниями счета  $|\Psi_n\rangle$  под действием оператора  $C_1$ , преобразующего одно состояние в следующее. Причем состояния  $|\Psi_n\rangle$  - это преобразования Фурье полуклассических состояний  $|k\rangle$ , которые являются собственными состояниями оператора  $C_1$ . Таким образом, процесс счета (оператор  $C_1$ ) переводит одну Фурье моду в следующую, см. Рис. 3.2(а). При взаимодействии с пролетающими частицами состояния  $|k\rangle$  меняют только фазы; эти состояния образуют наш вычислительный базис, в котором мы делаем финальные измерения.

В процессе считывания полученной информации (получение числа пролетевших частиц) нам необходим набор физических процедур, которые осуществляют обратное преобразование Фурье. Этим физическим процедурам соответствует оператор  $M$  (оператор измерения).



**Рис. 3.2.** (а) Процесс счета на примере  $N = 8$  (кудит с  $d = N = 8$ ). Квазиклассические состояния  $|k\rangle$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$  образуют вычислительный базис; их образы Фурье  $|\Psi_n\rangle$  задают базис счета. При пересчете одной частицы оператор  $C_1$  переводит одну моду Фурье  $|\Psi_n\rangle$  в следующую  $|\Psi_{n+1}\rangle$ . (б) Эмуляция  $N = 8$  кудита тремя кубитами, которые выполняют квантовый счет с  $d = 2$  и  $K = 3$  (слева), и соответствующие классические счеты (справа).

## 3.2. Квантовые счеты

До сих пор абстрактные вычислительные состояния  $|n\rangle$  выбирались тривиальным образом без какой-нибудь дополнительной структуры. "Мягкая" реализация процесса счета требует  $N$  квазиклассических состояний  $|n\rangle$ , как, например, заряженная частица в  $N$ -яльном потенциале. Конструкцию счетчика можно заметно упростить. Рассмотрим  $K$  одинаковых устройств, каждое из которых реализует  $d$  квазиклассических состояний (кудит). Такая система имеет  $d^K$  квазиклассических состояний и позволяет считать до  $N = d^K$ . Эта конструкция уменьшает потребность в "железе" от  $N$  до  $d \log_d N = Kd$ . Эффективность такого алгоритма возрастает с линейного по  $N$  до логарифмического по  $N$ . Как будет показано ниже, такая процедура реализует счет по основанию  $d$  и обобщает двоичный алгоритм.

Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим простой пример, в котором  $N = 8$ ,  $d = 2$  и  $K = 3$ , то есть счет до 8 при помощи 3 кубитов. Простая версия включает в себя петлю с 8 состояниями  $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |7\rangle$ . Она может быть уменьшена до трех петель с двумя состояниями на каждой,  $|0\rangle_j, |1\rangle_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , см. Рис.3.2. В начале на большой петле мы создаем состояние  $|\Psi_0^{(8)}\rangle = \sum_{k=0}^7 |k\rangle / \sqrt{8}$ , аналогичным образом приготовленная уменьшенная система в состоянии  $|\Psi_0^{(2^3)}\rangle = \prod_{j=1}^3 [|0\rangle_j + |1\rangle_j] / \sqrt{2}$ . За один шаг в процессе счета на большой петле добавляется фаза  $\exp(2\pi ik/8)$ ,  $|k\rangle \rightarrow \exp(2\pi ik/8)|k\rangle$ , к состоянию  $|k\rangle$  в  $|\Psi_0^{(8)}\rangle$ . С другой стороны, за один шаг на малых петлях добавляются последовательно уменьшающиеся фазы:  $|\nu\rangle_1 \rightarrow \exp(2\pi i\nu/2)|\nu\rangle_1$ ,  $|\nu\rangle_2 \rightarrow \exp(2\pi i\nu/4)|\nu\rangle_2$ ,  $|\nu\rangle_3 \rightarrow \exp(2\pi i\nu/8)|\nu\rangle_3$ ,

$\nu = 0, 1$ . Легко проверить, что состояние

$$\begin{aligned} |\Psi_0^{(2^3)}\rangle &= \frac{[|0\rangle_1 + |1\rangle_1] \otimes [|0\rangle_2 + |1\rangle_2] \otimes [|0\rangle_3 + |1\rangle_3]}{\sqrt{8}} \\ &= [ |000\rangle + |001\rangle + |010\rangle + |011\rangle \\ &\quad + |100\rangle + |101\rangle + |110\rangle + |111\rangle ] / \sqrt{8} \end{aligned} \quad (3.8)$$

(три индекса относятся к кубитам 1, 2 и 3, то есть  $|011\rangle \equiv |0_1 1_2 1_3\rangle \equiv |0\rangle_1 |1\rangle_2 |1\rangle_3$ ) переходит в состояние

$$\begin{aligned} |\Psi_1^{(2^3)}\rangle &= [ |000\rangle + e^{i\pi/4}|001\rangle + e^{i\pi/2}|010\rangle \\ &\quad + e^{3i\pi/4}|011\rangle + e^{i\pi}|100\rangle + e^{5i\pi/4}|101\rangle \\ &\quad + e^{3i\pi/2}|110\rangle + e^{7i\pi/4}|111\rangle ] / \sqrt{8} \end{aligned} \quad (3.9)$$

после пролета одной частицы; это состояние идентично состоянию  $|\Psi_1^{(8)}\rangle$  после отождествления состояния  $|k\rangle$  с его двоичным эквивалентом  $|k_1 k_2 k_3\rangle$ . Следовательно, сложность "железа" в задаче счета легко уменьшается при переходе к счету по некоторому основанию; в рассмотренном примере, вместо введения 8-уровневой системы, эта же задача может быть решена с помощью трех кубитов. Этот шаг в уменьшении сложности есть не что иное, как переход к квантовым счетам, см. Рис. 3.2(b). При физической реализации мы вводим кудиты, играющие роль костяшек в обычных счетах; выполнение одного цикла на  $j$ -м кудите сдвигает состояние следующего кудита на одну единицу.

Задача сделать процедуру счета "мягкой" и упростить устройство "железа" определяет выбор физической реализации процесса счета. Определим квантовую систему с  $N = d^K$  ортогональными состояниями  $|k\rangle$ ,  $k = 0, \dots, N - 1$ , с тривиальной временной эволюцией; эти состояния образуют наш вычислительный базис и часто появляются в форме полуклас-

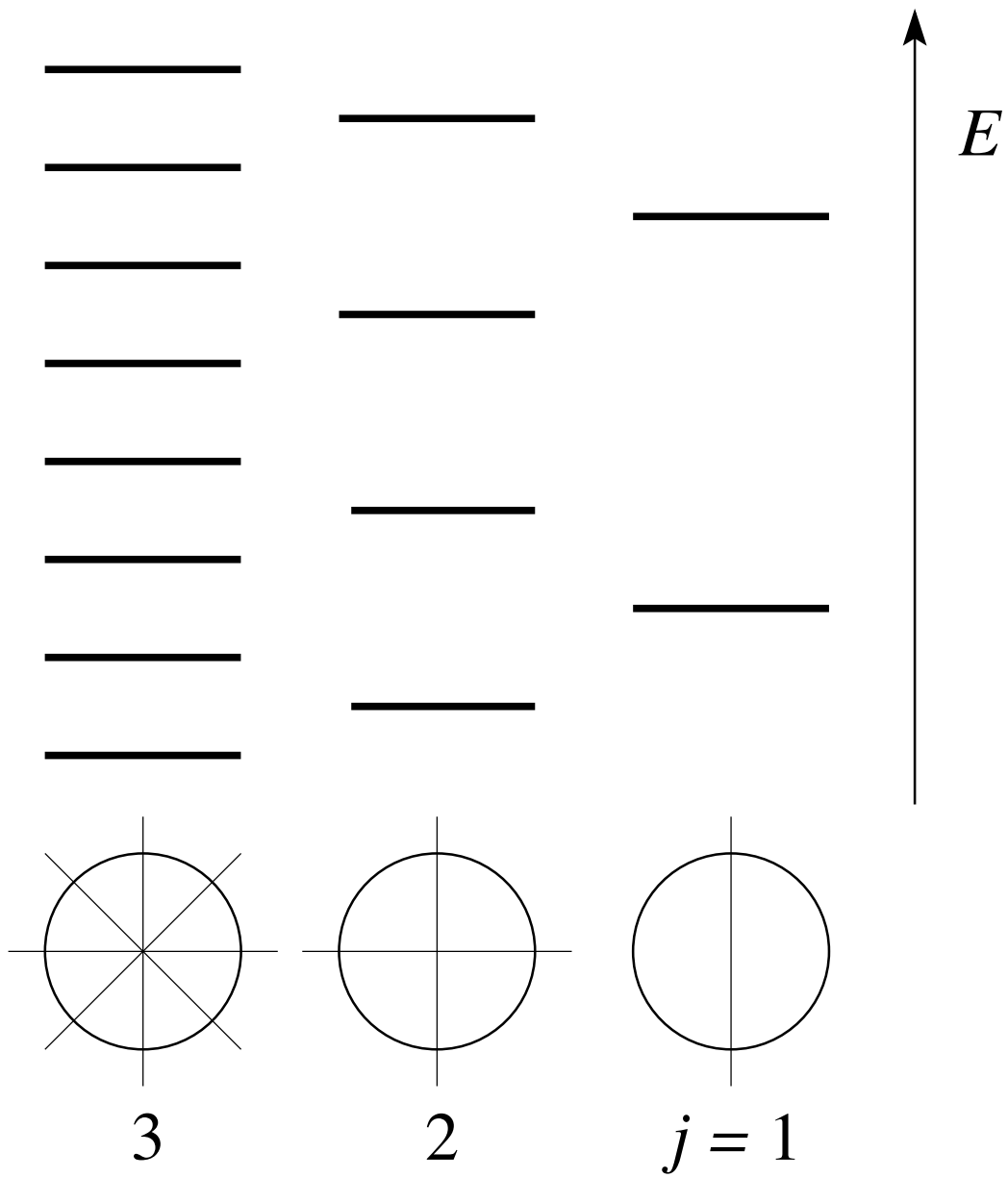
сических (измеряемых) состояний. Не тривиальная временная эволюция этих состояний происходит от их взаимодействия с пролетающими частицами. Взаимодействие состояний с частицами должно быть устроено так, чтобы состояние  $|k\rangle$  получало фазу  $\exp(2\pi ik/N)$  после пролета одной частицы. Определяя гамильтониан взаимодействия  $\mathbf{H}_{\text{int}}$ , это подразумевает эквидистантное распределение матричных элементов  $\int_0^{t_k} dt \langle k | \mathbf{H}_{\text{int}} | k \rangle$ ; предполагая, что все уровни взаимодействуют с частицами в течении одинаковых интервалов времени  $t_k = t_c$ , мы можем сделать вывод, что спектр  $\mathbf{H}_{\text{int}}$  эквидистантный.

В качестве специального примера проверим ситуацию для двоичного счета, рассмотренного в главе 2. В этом случае гамильтониан (точнее логарифм оператора сдвига,  $(1/i) \ln \mathbf{C}_1$ ), описывающий один шаг счета, можно записать в форме

$$\frac{1}{\hbar} \int_0^{t_c} dt \mathbf{H}_{\text{int}} = \sum_{j=1}^K \frac{\pi}{2^j} \sigma_z^{(j)}, \quad (3.10)$$

здесь матрицы Паули  $\sigma_z^{(j)}$  действуют на  $j$ -й кубит, и мы имеем ожидаемый эквидистантный спектр, см. Рис. 3.3. В этом примере нулевая энергия расположена между двумя собственными значениями и, следовательно,  $\Theta = \pi$ . Сдвигая нулевую энергию к одному из собственных значений, мы можем избавиться от циклической фазы  $\Theta$ . Сдвинув начало отсчета энергии к верхнему уровню, мы идентифицируем состояние  $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$  с вычислительным состоянием  $|0\rangle$ .





**Рис. 3.3.** Эквидистантный спектр гамильтониана  $H_{\text{int}}$ , описывающего  $K = 3$  кубита.

### 3.3. Обобщенное преобразование Фурье

Для проведения процедуры счета нам необходимы операторы приготовления  $U_p$  и измерения  $M$ . Этими операторами могут быть операторы прямого и обратного преобразования Фурье. Однако, физические процедуры, которые дают преобразования Фурье, могут быть достаточно сложными. Чтобы иметь возможность упростить эти процедуры, вспомним о произвольных фазах у собственных состояний  $|k\rangle$  оператора счета  $C_1$ .

Выбирая фазы  $\alpha_k$  в определении собственных состояний  $|k\rangle$  оператора счета  $C_1$ , получаем новые соотношения, которые связывают вычислительный базис и базис счета

$$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{2\pi i kn/N} e^{-i\alpha_k} |k\rangle. \quad (3.11)$$

Следовательно, оператор приготовления  $U_p$  может создавать не обязательно нулевую Фурье гармонику, а сбалансированное состояние с произвольными фазами. В дальнейшем мы увидим, что такой произвол в выборе фаз позволит значительно упростить процедуру приготовления.

Теперь предположим, что наши физические манипуляции дают оператор  $M$  такой, что

$$M|\Psi_n\rangle = e^{i\beta_n} |n\rangle. \quad (3.12)$$

Тогда оператор  $M$  и каноническое обратное преобразование Фурье  $F^{-1}$  связаны через

$$M = P_{[\beta]} F^{-1} P_{[\alpha]} \quad (3.13)$$

где операторы

$$P_{[\chi]} = \begin{pmatrix} e^{i\chi_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i\chi_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{i\chi_{N-1}} \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

с фазами  $[\chi] = [\alpha], [\beta]$ . Фазы  $[\alpha]$  и  $[\beta]$  определяются операторами  $U_p$  и  $M$ . Этот произвол в выборе оператора измерения также упрощает процедуру.

### 3.4. Обсуждение и выводы

При рассмотрении двоичного алгоритма не сразу становится ясно, как обобщить этот подход на алгоритмы более высокого порядка. Оказалось, что определение квантовой задачи счета на элементарном уровне через взаимно однозначное соответствие между считаемыми объектами и различными состояниями в Гильбертовом пространстве дает нам конструктивную схему реализации этой задачи. Также, анализ схемы счета естественным образом приводит к квантовому преобразованию Фурье как основной операции в невозмущающем процессе счета. Действительно, задача счета естественным образом вводит в пространстве счета оператор сдвига  $C_1$ , переводящий одно состояние счета  $|\Psi_n\rangle_Q$  в следующее  $|\Psi_{n+1}\rangle_Q$ . Выразив состояния счета через собственные состояния  $|n\rangle_Q$  оператора  $C_1$ , получаем, что операция счета только добавляет фазу  $\exp(2\pi in/N)$  к каждому из этих состояний. Таким образом при использовании этих собственных состояний  $|n\rangle_Q$ , являющихся ничем иным, как преобразованиями Фурье состояний счета  $|\Psi_n\rangle_Q$ , наш базис счета дает нам "мягкую" невозмущающую схему счета. Выбор какого-либо иного базиса счета приводит к энергетическому

обмену между считаемым объектом и счетной системой и значительным возмущениям.

Вышеупомянутое понимание основ квантового счета дало нам конструктивную схему алгоритма счета: начиная с набора измеряемых состояний (вычислительный базис  $\{|n\rangle_Q\}$ ), которые эволюционируют с предписанным накоплением фазы при прохождении частицы, мы должны приготовить из них сбалансированное состояние  $|\Psi_0\rangle_Q$ , используемое как первое состояние счета. Это первое состояние, набрав соответствующую фазу во время счета, эволюционирует в следующее состояние счета и снова переходит в первое после  $N$ -цикла. Как мы показали, нам необязательно входить в цикл на нижней гармонике, любая гармоника может быть использована, и даже произвольные фазы в сбалансированном состоянии (равновзвешенной суперпозиции состояний вычислительного базиса) являются приемлемыми. В последнем случае преобразование Фурье модифицируется дополнительными фазами, не искажающими все же наш алгоритм.

## Глава 4

### Счет по основанию $d$

Алгоритм счета, рассмотренный в главе 2, был построен для увеличения эффективности счета частиц в мезоскопических системах [48, 49] и в квантовой оптике [46]. Устройство, непосредственно считающее частицы, требует порядка  $N^2$  индивидуальных считающих элементов. В нашем алгоритме количество задействованных процессов сводится к величине порядка  $(\log_2 N)^2$  или  $(\log_d N)^2$ , если мы считаем по основанию  $d$ . В нашем алгоритме для счета  $n < N = 2^K$  частиц, распространяющихся в проволокe, используется массив  $K$  кубитов ( $K$ -кубитный регистр); очень похожая схема была предложена в работе [70] для нахождения распределения состояния числа частиц колебательного возбуждения в системе лазерно-охлажденных ионов. После завершения процесса счета мы получаем число пролетевших частиц, записанное в двоичном виде. Помимо представления числа в двоичном виде (двоичное исчисление), упрощенная версия этого алгоритма проверяет делимость на  $2^k$  для данного  $k \leq K$  и, таким образом, дает степень 2 в разложении числа на простые множители. В этой главе мы заново рассматриваем двоичный счет с точки зрения общей теории счета и обобщаем этот алгоритм для выполнения счета по основанию  $d$  и проверки наличия множителя  $d^k$  в разложении числа.

Такое достаточно очевидное обобщение алгоритма позволяет находить степени других простых чисел в числе  $n$ , представляя его в виде произведения  $n, n = 2^{k_2} 3^{k_3} 5^{k_5} \dots$ . Это может быть достигнуто посредством перехода от кубитов к трехуровневым системам, или кутритам,  $d$ -уровневым систе-

мам, или кудитам, и т.д. Это соответствует изменению представления числа  $n$  от двоичного к троичному, пятиричному и т.п.

Разложение больших целых чисел на простые множители является важной математической задачей. Квантовая механика открывает новые возможности для решения этой задачи, что впервые было показано в пионерской работе Шора [71] по эффективной факторизации больших чисел, оказавшей сильное влияние на коды безопасности. Даже вычисление и факторизация небольших чисел может оказаться полезной, например, для манипулирования с физическим состоянием числа частиц (и их суперпозициями) или для запутывания летающих кубитов [72–74].

В разделе 4.1 мы повторим наш двоичный квантовый алгоритм с кубитами, включающий последовательную и однократную схему считывания, обращая особое внимание на связь с квантовым преобразованием Фурье. Затем в разделе 4.2 мы опишем возможную реализацию кубитов и кутритов заряженной частицей в многоямном потенциале и способы управления их состояниями. Затем обобщим алгоритм счета на счет в троичном представлении и счет степеней 3 при помощи кутритов. В разделе 4.3 будет рассмотрено дальнейшее обобщение на кудиты. В разделе 4.4 обсудим различные возможности других реализаций троичного алгоритма: систему со спином 1, служащую скорее мысленным экспериментом для иллюстрации, и две практические версии эмуляции кутритов кубитами.

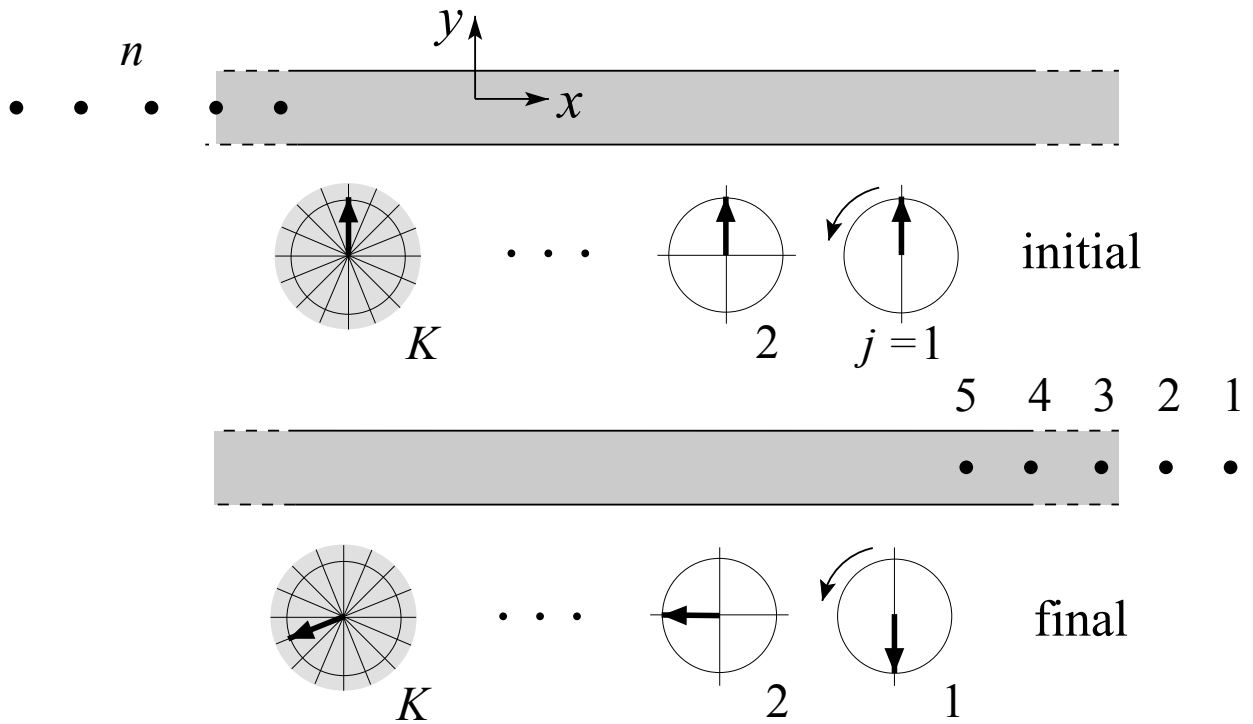
## 4.1. Кубиты: двоичный счет

В этом разделе мы детально обсудим алгоритм двоичного счета с точки зрения общей теории квантового счета и его связь с квантовым преобра-

зованием Фурье. Схема реализации алгоритма показана на Рис. 4.1, где  $n < N = 2^K$  частиц, которые необходимо сосчитать, пролетают в квантовой проволоке вдоль оси  $x$ . Одноэлектронный импульс может быть сгенерирован соответствующим импульсом напряжения [48, 68] или при помощи извлечения электрона из квантовой точки [69], а счетчики удобно представлять как индивидуальные спины, см. обзоры [43, 44, 48] или зарядовые кубиты. Зарядовый кубит может быть реализован при помощи заряженной частицы в потенциале двойной ямы (электрон в двойной квантовой точке), см. Рис. 4.2(a).

Мы используем состояния спина, поляризованные вдоль оси  $z$ , как наш вычислительный базис  $|\uparrow\rangle \leftrightarrow |0\rangle$  и  $|\downarrow\rangle \leftrightarrow -i|1\rangle$ . В случае использования зарядового кубита состоянию  $|0\rangle$  соответствует квазиклассическое состояние частицы, локализованной в одной яме, а состоянию  $|1\rangle$  в другой яме. Состояния  $K$ -кубитного регистра, выраженные в обычном (см. обзор [50]) вычислительном базисе это :  $|0\rangle_Q = |00\dots 0\rangle_Q, |1\rangle_Q = |00\dots 1\rangle_Q, \dots, |2^K - 1\rangle_Q = |11\dots 1\rangle_Q \in \mathcal{H}_Q$ .

В процессе измерения конечный транспорт  $n$  заряженных частиц, пролетающих по квантовой проволоке, см. Рис. 4.1, взаимодействует с массивом  $K$  расположенных рядом кубитов, приготовленных в начальном состоянии. В результате их состояния меняются определенным образом. Абстрактно говоря, этот этап соответствует отображению состояния  $|n\rangle_\Phi$ , кодирующего число, из Гильбертова пространства состояний числа частиц  $\mathcal{H}_\Phi$  в состояние  $|\Psi_n\rangle_Q$   $K$ -кубитного регистра в Гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}_Q$   $K$  кубитов. Вообще говоря, суперпозиция состояний, кодирующих число, становится перепутанной с  $K$ -кубитным регистром (но не копией, в соответствии с теоремой, запрещающей клонирование) в процессе счета. На этапе изме-



**Рис. 4.1.** Схема реализации квантового алгоритма счета (показан случай двоичного счета с кубитами). Состояние  $|n\rangle_{\Phi}$ , кодирующее число частиц, вводится в квантовый провод для проведения операции квантового счета. Взаимодействие между заряженными частицами и кубитами поворачивает состояния спинов/кубитов, генерируя преобразование Фурье  $F$ , которое переводит начальное состояние  $F(|0\rangle_Q)$  в состояние  $F(|n\rangle_Q)$ . Соответствующие манипуляции и измерения дают нам или состояние  $|n\rangle_Q$ , то есть число частиц (в этом случае требуется обратное квантовое преобразование Фурье и измерение в вычислительном базисе или полуклассическое обратное преобразование Фурье, состоящее из условных измерений), или максимальную степень двойки в разложении числа  $n$  на множители.



рения проделываются определенные манипуляции и считывание состояния кубита в  $\mathcal{H}_Q$ , что дает либо максимальную степень двойки, содержащуюся в разложении числа  $n$ , либо число  $n$  в двоичной форме, в зависимости от алгоритма считывания.

*Приготовление:* Первоначально  $K$  спинов или кубитов (мы используем эти термины как синонимы) поляризованы вдоль положительного направления оси  $z$ , то есть начальные состояния записываются как:  $|0\rangle_Q = |00\dots 0\rangle_Q$ . В процессе приготовления мы поворачиваем спины вдоль положительного направления оси  $y$ , прикладывая магнитное поле вдоль оси  $x$  в случае спинов или опуская барьер, разделяющий квазиклассические состояния (подробнее об этом в следующем разделе). То есть начальные состояния каждого кубита записываются как:  $|+y\rangle_j = [|\uparrow\rangle_j + i|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$ ,  $j = 1, \dots, K$ . Отождествляем  $|\uparrow\rangle_j \leftrightarrow |0\rangle_j$  и  $|\downarrow\rangle_j \leftrightarrow -i|1\rangle_j$ , тогда состояние  $K$  кубитного регистра  $|\Psi_0\rangle_Q = \prod_{j=1}^K [(|0\rangle_j + |1\rangle_j)/\sqrt{2}]$  равно состоянию  $|\Psi_0\rangle_Q = (1/\sqrt{2^K}) \sum_k |k\rangle_Q$ , которое есть суперпозиция состояний  $|0\rangle_Q, |1\rangle_Q, \dots, |2^K - 1\rangle_Q$  с равными весами. Это состояние совпадает с нижней гармоникой преобразования Фурье вычислительного базиса: действительно квантовое преобразование Фурье переводит состояние

$$|X\rangle_Q \equiv \sum_l x_l |l\rangle_Q \quad (4.1)$$

в состояние

$$\mathbf{F}(|X\rangle_Q) \equiv \sum_k y_k |k\rangle_Q = |Y\rangle_Q \quad (4.2)$$

где

$$y_k = (1/\sqrt{N}) \sum_l x_l \exp(2\pi i lk/N). \quad (4.3)$$

Начальное состояние  $|\Psi_0\rangle_Q$  в процедуре счета задается как  $x_l = \delta_{l0}$  и, следовательно,  $|\Psi_0\rangle_Q = \mathbf{F}(|0\rangle_Q)$ .

Обратим внимание на следующее обстоятельство. Если мы применим процедуру приготовления не к начальному состоянию  $|0\rangle_Q = |00\dots 0\rangle_Q$ , а к любому другому, то мы не получим преобразование Фурье этого состояния. То есть наша процедура приготовления не дает полного квантового преобразование Фурье. Хотя эта процедура дает полное квантовое преобразование Фурье состояния каждого отдельного кубита (квантовое преобразование Фурье в двумерном гильбертовом пространстве состояний кубита). Таким образом наша процедура приготовления намного проще полного квантового преобразование Фурье.

*Счет и преобразование Фурье:* Взаимодействие между заряженной частицей и спином такое, что пролет частицы поворачивает спины в  $x$ - $y$  плоскости. Сила взаимодействия спинов с проволокой выбирается так, чтобы  $j$ -й спин вращался (против часовой стрелки) на угол  $\phi_j = 2\pi/2^j$  (вращение оператором  $U_z(\phi_j) = \exp(-i\phi_j\sigma_z/2)$ , где  $\sigma_z$  - матрица Паули). Тогда пролет  $n$  частиц поворачивает  $j$ -й спин на угол  $n\phi_j$  и переводит его в состояние  $[|\uparrow\rangle_j + i\exp(2\pi i n/2^j)|\downarrow\rangle_j]/\sqrt{2}$ , где мы отбросили общую фазу  $\exp(-\pi i n/2^j)$ . Мы снова отождествляем  $|\uparrow\rangle_j \leftrightarrow |0\rangle_j$  и  $|\downarrow\rangle_j \leftrightarrow -i|1\rangle_j$  и, используя двоичное представление чисел  $k = k_1 2^{K-1} + \dots + k_K 2^0 = k_1 k_2 \dots k_K$ , переписываем произведение состояний кубитов  $|\Psi_n\rangle_Q = \prod_{j=1}^K [(|0\rangle_j + \exp(2\pi i n/2^j)|1\rangle_j)/2]$  как сумму состояний

регистра,

$$\begin{aligned}
|\Psi_n\rangle_Q &= \prod_{j=1}^K \frac{|0\rangle_j + \exp(2\pi i n 2^{K-j}/2^K)|1\rangle_j}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^K}} \sum_{k_1, \dots, k_K=0,1} e^{2\pi i n (\sum_{l=1}^K k_l 2^{K-l})/2^K} |k_1 \dots k_K\rangle_Q \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^K}} \sum_{k=0}^{2^K-1} e^{2\pi i n k/2^K} |k\rangle_Q.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Сравнивая преобразование Фурье из уравнений (4.2) и (4.3), находим, что  $x_l = \delta_{ln}$ , следовательно, пролет  $n$  частиц (процесс счета) переводит состояние  $F(|0\rangle_Q)$  в  $n$ -ю гармонику  $F(|n\rangle_Q)$ . Мы называем состояния  $|n\rangle_Q$  вычислительным базисом, а преобразование  $|\Psi_n\rangle_Q = F(|n\rangle_Q)$  определяет базис счета. Тот факт, что кубиты в  $K$ -кубитном регистре находятся в факторизованном состоянии и, следовательно, не запутаны [75, 76], есть решающий элемент нашего алгоритма на следующем шаге - считывании результата при помощи полуклассического квантового преобразования (обратного) Фурье.

*Считывание результата и обратное преобразование Фурье:* В зависимости от желаемой информации (точное число или делимость) и имеющегося оборудования (работающий квантовый компьютер или набор кубитов), считывание кубитного регистра может быть произведено различными способами. Наиболее эффективная схема второго этапа алгоритма состоит в применении второго (обратного) квантового преобразования Фурье  $F^{-1}$  состояния кубита  $F(|n\rangle_Q)$ , переводящего его обратно в состояние  $|n\rangle_Q$ . Одновременное измерение  $K$  кубитов тогда дает число частиц  $n$  в двоичной форме; в случае суперпозиции состояний, описывающих разные количества частиц, измерение спроецирует суперпозицию на одно из них.

Если суперпозиции нет, состояние числа частиц может быть использовано в последующих вычислениях.

Однако для выполнения обратного квантового преобразования Фурье состояния  $F(|n\rangle_Q)$  требуется квантовый компьютер (или, по крайней мере, те операции над кубитами, которые требуются для выполнения квантового преобразования Фурье). Вместо этого мы можем использовать процедуру, в основном идентичную предложенному Griffiths и Niu [75] полуклассическому преобразованию Фурье, причем основанный на условных измерениях алгоритм будет включать последовательное считывание, при котором считывание  $j$ -го кубита зависит от результатов предыдущих  $j - 1$  измерений. Это измерение дает полную информацию о чистом состоянии числа частиц; если исходное состояние является суперпозицией состояний, то полуклассический алгоритм спроектирует (при последовательных измерениях кубитов) это состояние на одну из его компонент.

Особенно эффективное считывание возможно, если мы больше интересуемся содержащейся в числе  $n$  степенью 2, нежели самими числом  $n$ . В этом случае одновременный (а не условный) алгоритм считывания может быть применен непосредственно к состоянию  $F(|n\rangle_Q)$ ; этот алгоритм обеспечивает проверку делимости  $n$  на  $2^k$ ,  $k < K$ .

Рассмотрим следующий шаг - полуклассическое квантовое (обратное) преобразование Фурье, которое даст нам требуемый результат, число  $n$  в двоичном представлении. Начнем с измерения первого спина. После пролета  $n$  частиц первый спин повернулся на угол  $n\pi$ . Применим к первому спину процедуру обратную той, которая была использована в процессе приготовления, то есть повернем его вокруг оси  $x$  на угол  $\pi/2$  в обратную сторону или, другими словами, сделаем обратное двумерное квантовое преобразова-

ние Фурье. Далее делаем измерение проекции спина на ось  $z$  или измеряем, в какой из двух ям находится частица в случае зарядового кубита (измерение в вычислительном базисе). Если мы находим его направленным вверх (состояние  $|0\rangle$ ), то число  $n$  четное и мы пишем ‘0’ в правой позиции  $n_K$  двоичного числа; если мы находим спин направленным вниз (состояние  $|1\rangle$ ), то число нечетное и мы пишем цифру ‘1’. Кроме того, что мы нашли первую цифру двоичного числа (четность), результат измерения дает нам возможное направление второго спина, который повернулся на угол  $n\pi/2$ ). Второй спин направлен вдоль оси  $y$ , если число четное, или вдоль оси  $x$ , если число нечетное. Эта информация позволяет нам сконструировать правильную процедуру измерения второго спина. Для четных  $n$  спин направлен вдоль оси  $y$ ; применяем процедуру, описанную выше, и записываем 0 (1) в  $n_{K-1}$ , если спин направлен вверх (вниз). Для нечетных  $n$  необходимо скомпенсировать пролет одной частицы, то есть повернуть спин вокруг оси  $z$  на угол  $\pi/2$  по часовой стрелке и применить описанную выше процедуру. Непосредственно продолжаем наш алгоритм на следующие спины: для  $j$ -го спина необходимо скомпенсировать пролет  $m_{j-1}$  частиц, где число  $m_{j-1} = n_{K-j+2} \dots n_{K-1} n_K$  получено в предыдущих  $j - 1$  измерениях. Далее проводится описанная выше процедура и  $j$ -я позиция в двоичном регистре принимает значение  $n_{K-j+1} = 0$  или  $n_{K-j+1} = 1$  в зависимости от результата измерения; 0 для спина направленного вдоль оси и 1 для спина направленного против. Этот алгоритм последовательных условных измерений дает нам двоичное представление числа  $n$ .

Чтобы сделать алгоритм более эффективным, повороты на углы  $-m_{j-1}\phi_j$  удобно делать частями: после измерения  $j$ -го спина с результатами ‘0’ или ‘1’, все спины  $J > j$  поворачиваются на угол  $-n_{K-j+1}2^{j-1}\phi_J$ . Эти

повороты компенсируют действие нечетного числа групп частиц: первый поворот на угол  $-2\pi n_K 1/2^J$ , действующий на кубиты  $J > 1$ , компенсирует пролет нечетного числа частиц, второй поворот на угол  $-2\pi n_{K-1} 2/2^J$ , действующий на кубиты  $J > 2$ , компенсирует пролет нечетного числа пар, третий поворот на угол  $-2\pi n_{K-2} 4/2^J$ , действующий на кубиты  $J > 3$ , компенсирует пролет нечетного числа четверок и так далее.

Формально, справедливость этого алгоритма последовательных условных измерений может быть выведена из подходящего представления состояния из уравнения (4.4): дробь  $n/2^j$  в фазе  $\exp(2\pi i n/2^j)$   $j$ -го кубита может быть известна только по модулю 1, используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{n}{2^j} \Big|_{\text{mod}(1)} &= 0.n_{K-j+1} \dots n_K \\ &= \frac{n_K 2^0 + n_{K-1} 2^1 + \dots + n_{K-j+1} 2^{j-1}}{2^j}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

состояние  $j$ -го кубита может быть записано в форме  $[|0\rangle_j + \exp(2\pi i 0.n_{K-j+1} \dots n_K) |1\rangle_j] / \sqrt{2}$ , где мы использовали двоичное представление дроби  $0.n_1 n_2 \dots n_K = n_1/2 + n_2/4 + \dots + n_K/2^K$ , смотри книгу [50]. Конечное состояние кубитов после пролета частиц можно записать в форме

$$|\Psi_n\rangle_Q = \prod_{j=1}^K \frac{|0\rangle_j + \exp(2\pi i 0.n_{K-j+1} \dots n_K) |1\rangle_j}{\sqrt{2}}. \quad (4.6)$$

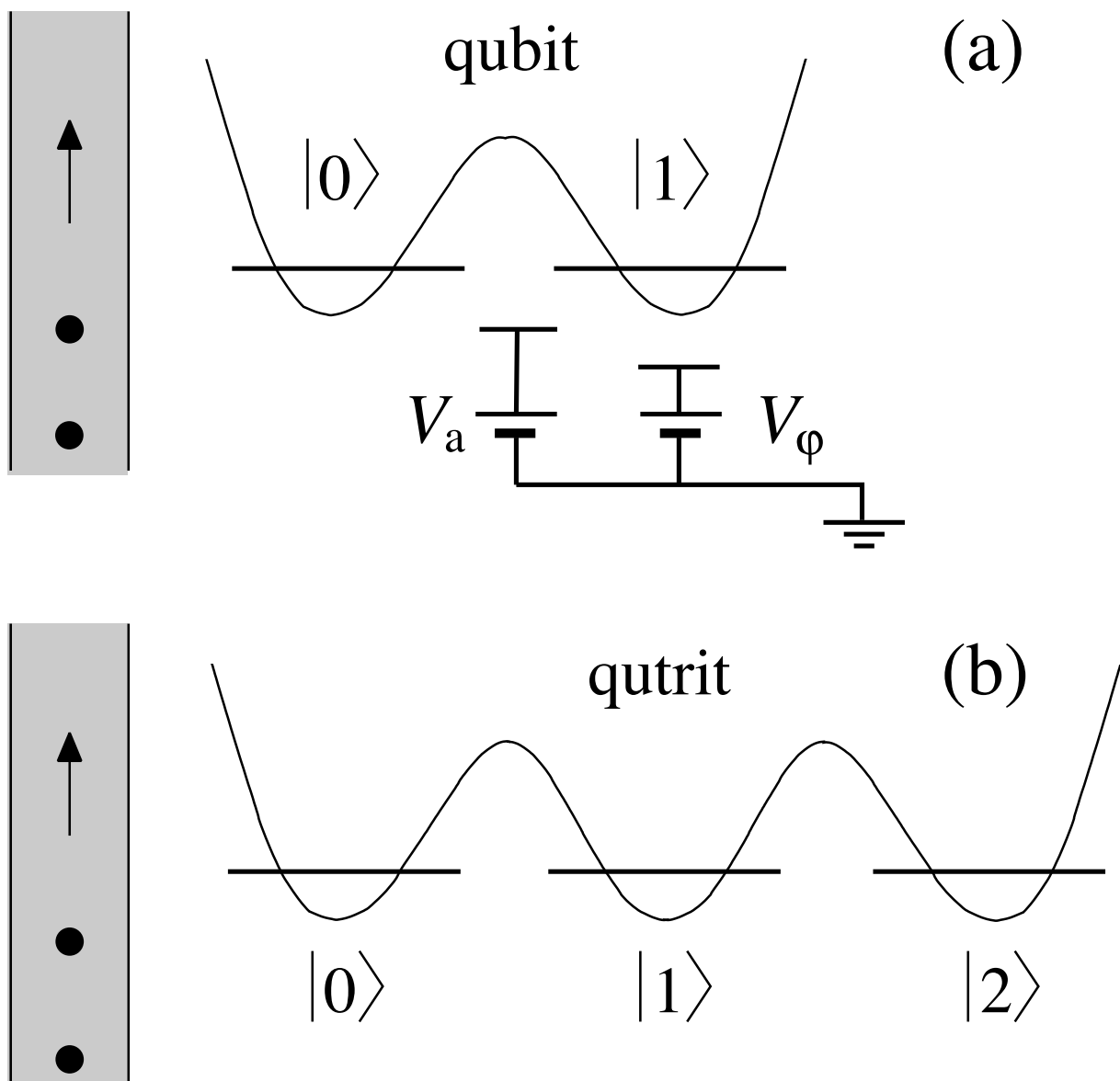
Это представление демонстрирует, что состояние первого кубита  $j = 1$  содержит только младшую цифру  $n_K$  числа  $n$ , второго кубита - только дробь  $0.n_{K-1} n_K$ , и так далее. Следовательно, для определения состояния каждого кубита требуется знать состояния предыдущих кубитов и измерение его дает нам еще одну цифру двоичного представления числа  $n$ .

*Делимость на  $2^k$* : Другой вариант алгоритма счета дает нам тест делимости числа  $n$  на степень двойки. Рассмотрим состояния первых  $j = 1, 2, \dots, k \leq K$  спинов после пролета  $n$  частиц. Если число  $n$  содержит множитель  $2^k$ , то все  $k$  кубитов будут поляризованы вдоль положительного направления оси  $y$  (а для  $k < K$ ,  $k + 1$ -й кубит будет направлен вниз; если  $n = 2^K$ , то все спины вернуться в начальное состояние). Однократное измерение всех  $K$  кубитов вдоль оси  $y$  даст нам (максимальный) множитель  $2^k$  в числе  $n$ . Формальное доказательство этого утверждения приведено в статье [74].

## 4.2. Кутриты: счет степеней 3

В качестве первого шага к обобщению на кутриты рассмотрим зарядовый кубит, который моделируется частицей в потенциале с двумя ямами, с квазиклассическими (вычислительными) состояниями  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , см. Рис. 4.2(а). Опишем способы управления состоянием такого кубита. Зарядовый кубит может быть реализован в виде заряда в двойной квантовой точке [61–63].

Предположим, что двойная точка выставлена перпендикулярно проволоке так, что две ямы различно взаимодействуют с зарядами пролетающих электронов, см. Рис. 4.2(а). Мы работаем с квазиклассическими состояниями  $|0\rangle \leftrightarrow |\uparrow\rangle$  и  $|1\rangle \leftrightarrow |\downarrow\rangle$  (наш вычислительный базис) и рассматриваем операции, изменяющие фазы счетчика с высоким барьером, разделяющим квазиклассические состояния. В результате мы имеем экспоненциально маленькую амплитуду туннелирования  $\propto \Delta$ , где  $2\Delta$  - это щель между двумя точными собственными значениями. Кубит управляется подачей напряже-



**Рис. 4.2.** Заряженная частица в потенциале с двумя или тремя ямами моделирует кубит (a) или кутрит (b). Кубит управляется при помощи импульса напряжения  $V_a$ , который опускает барьер между ямами и изменяет амплитуды в состоянии кубита, или импульса напряжения  $V_\phi$ , который опускает (поднимает) уровень дна ямы и изменяет фазы в состоянии кубита (аналогично для кутритов).



ния, которое или уменьшает барьер между ямами, чтобы изменить амплитуду (вращение вокруг оси  $x$ ; открывание щели  $2\Delta$  между собственными состояниями кубита на время  $t = \hbar\pi/2\Delta$  переводит состояние  $|0\rangle$  в состояние  $|1\rangle$ ), или поднимает дно одной ямы, чтобы изменить фазу (вращение вокруг оси  $z$ ; поднятие дна правой ямы на  $\delta$  на время  $t = \hbar\varphi/\delta$  добавляет относительную фазу  $\exp(-i\varphi)$  состоянию  $|1\rangle$ ).

Алгоритм счета с использованием зарядового кубита состоит из трех шагов: Чтобы *приготовить* кубит, стартуем с полуклассического состояния  $|0\rangle$  и применяем унитарный (меняющий амплитуду) оператор  $A_{10} = \exp(-iH_{10}t/\hbar)$  с гамильтонианом  $H_{10} = -\Delta(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$  (уменьшаем барьер между ямами) и  $t = \hbar\pi/4\Delta$ , получая сбалансированную суперпозицию  $|\Psi_0\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ ,

$$\begin{aligned} A_{10} &= \exp(-iH_{10}t/\hbar)|_{t=\hbar\pi/4\Delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (4.7)$$

на языке спинов это соответствует вращению вокруг оси  $x$  на угол  $-\pi/2$ , чтобы получить начальное состояние  $|+y\rangle$ .

Далее даем возможность частицам провзаимодействовать с кубитом. После *пролета одной частицы*, полуклассическое состояние кубита  $|\nu\rangle$  наберет фазу  $\exp(2\pi i\nu/2)$ . Унитарный оператор  $C_1 = \exp[i\pi(0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1|)]$  переведет  $|\Psi_0\rangle$  в  $|\Psi_1\rangle = C_1|\Psi_0\rangle = (|0\rangle + ie^{i\pi}|1\rangle)/\sqrt{2}$ ; пролет второй частицы приведет состояние  $|\Psi_1\rangle$  обратно в  $|\Psi_0\rangle$ , следовательно, оператор  $C_1$  циклический,  $C_1^2 = 1$ . Этот оператор соответствует вращению спина на угол  $\pi$  вокруг оси  $z$ . Состояния  $|\Psi_0\rangle$  и  $|\Psi_1\rangle$  определяют базис счета.

Наконец, опишем процесс *измерения*. Применение оператора  $A_{10}^{-1} = A_{10}^\dagger$  переводит  $|\Psi_0\rangle$  обратно в  $|0\rangle$  и  $|\Psi_1\rangle$  в  $|1\rangle$  (с точностью до фаз); простая проверка того, что кубит находится в состоянии  $|0\rangle$ , говорит нам, что число пролетевших частиц  $n$  четное.

Последующие кубиты с  $j > 1$  готовятся тем же способом. Поскольку задача для кубитов с  $j > 1$  - детектировать пролет групп частиц, то они должны слабее взаимодействовать с проволокой. В частности, оператор  $C_1$  для второго кубита измеряет пролет пар частиц, следовательно, фаза, добавляемая в состоянии  $|1\rangle$  равна  $\pi/2$ , и аналогично для следующих кубитов. На этапе измерения существует два варианта: Чтобы получить максимальный множитель  $2^k$  в числе  $n$ , достаточно применить оператор  $A_{10}^\dagger$  и проверить, находится ли кубит в состоянии  $|0\rangle$ ; первый кубит, найденный в состоянии  $|1\rangle$ , определяет степень  $k$ . С другой стороны, если цель - найти число  $n$ , тогда перед применением оператора  $A_{10}^\dagger$  кубиты необходимо правильно приготовить при помощи вращения вокруг оси  $z$ . Эти вращения удобно делать частями: после измерения  $j$ -го кубита с результатом '0' или '1' измеренная величина записывается как цифра  $n_{K-j+1}$  (отметим обратный ход последовательности) и все кубиты с  $J > j$  получают сдвиг фазы на  $-n_{K-j+1}2^{j-1}\phi_J$  у состояния  $|1\rangle$ . После применения оператора  $A_{10}^\dagger$  кубит  $j + 1$  измеряется.

Есть интересный тонкий вопрос относительно возможного запутывания кубитов с пролетающими частицами в процессе счета. Спиновый кубит, который обсуждался в разделе 4.1, совершенно не проблематичен с этой стороны, калибровочное взаимодействие оставляет считаемую частицу не измененной. С другой стороны, зарядовый кубит, действующий как счетчик, может сильно запутаться со считаемыми частицами. С зарядовым ку-

битом в состоянии квантовой суперпозиции с вероятностью  $1/2$  быть ближе к проволоке (состояние  $|\uparrow\rangle$ ) и вероятностью  $1/2$  быть дальше  $|\downarrow\rangle$ , летящая частица вначале замедляется, а затем ускоряется зарядом кубита. Этот процесс происходит с разной силой в зависимости от состояния кубита. В результате волновая функция частицы расщепится после пролета мимо кубита на часть (быстрая,  $|f\rangle$ ), которая движется впереди другой (медленная,  $|s\rangle$ ). Для вычисления вероятности  $\mathcal{P}_y$  найти кубит в состоянии, поляризованном вдоль направления  $y$ , необходимо взять след по состояниям частицы; если два состояния  $|f\rangle$  и  $|s\rangle$  различимы, то есть  $\langle f|s\rangle = 0$ , то  $\mathcal{P}_y = 1/2$  независимо от фазы  $\phi$ , полученной кубитом. Следовательно, важно чтобы кубит не расщеплял волновую функцию частицы при пролете, то есть кубит работает надлежащим образом, если  $|f\rangle \approx |s\rangle$  и конечное состояние существенно не запутано. Используя зарядовый кубит как измерительное устройство, требование слабого расщепления сводится к  $\phi \ll \xi k_F$ , где  $\phi$  это угол вращения кубита, характеризующий взаимодействие кубита с частицей,  $k_F$  это волновой вектор Ферми в квантовой проволоке, а  $\xi$  это ширина волнового пакета.

Для количественного анализа можно рассмотреть эволюцию волнового пакета (лоренциан, см. статью [68])  $\Psi(x)$  с Фурье амплитудами  $f(k) = \sqrt{4\pi\xi} \exp[-(k - k_F)\xi] \Theta(k - k_F)$  в скалярном поле заряда кубита. Для простоты, предположим, что кубит в состоянии  $|0\rangle$  действует на волновую функцию через потенциал  $V(x)$ , а кубит в состоянии  $|1\rangle$ , который дальше от проволоки, вообще не действует на частицу. Кроме того, выбираем потенциал  $V(x)$  так, чтобы состояние кубита вращалось на угол  $\phi$ , то есть после пролета частицы первоначальное состояние кубита  $|\Psi_0\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$  переходит в состояние  $|\Psi_\phi\rangle = (e^{i\phi}|0\rangle + i|1\rangle)/\sqrt{2}$ . Предполагая гладкий по-

тенциал  $V(x)$ , получим асимптотическое состояние частицы и кубита в рамках квазиклассического приближения, спроецируем волновую функцию на состояние кубита  $|\Psi_\phi\rangle$ , взяв след по степеням свободы частицы, получим вероятность  $P_\phi = 1 - \phi^2/8k_F^2\xi^2$  измерить кубит в состоянии  $|\Psi_\phi\rangle$ . Вторым членом дает вероятность неправильного результата. Заметим, что ошибка это квадрат маленького параметра  $\phi/\xi k_F$ .

Счет по основанию 3 с кутритами в форме тройной ямы происходит по такой же схеме, что и двоичный счет с кубитами в виде двойной квантовой точки, описанный выше. Мы начнем с одного кутрита ( $K = 1$ ), который первоначально находится в состоянии  $|0\rangle$ , см. Рис. 4.2(b). Сначала кутрит *приготавливается* в состоянии с равными весами каждого из квазиклассических состояний (фазы могут быть выбраны произвольно). Операторы (меняющие амплитуды)  $A_{10}$  и  $A_{21}$ , решающие эту задачу, обобщают оператор  $A_{10}$ , введенный выше. Угол  $\chi_{10} = \Delta_{10}t/\hbar$  в операторе  $A_{10}$  (мы записываем матрицы в квазиклассическом базисе),

$$A_{10} = \exp[i\chi_{10}(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)] \quad (4.8)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \chi_{10} & i \sin \chi_{10} & 0 \\ i \sin \chi_{10} & \cos \chi_{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

выбирается так, чтобы  $2/3$  волновой функции перешло в состояние  $|1\rangle$ , следовательно,  $\tan \chi_{10} = \sqrt{2}$ . Матрица  $A_{10}$  тогда принимает форму

$$A_{10} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Оператор  $A_{21}$  распределяет веса между состояниями  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ ,

$$A_{21} = \exp[i\chi_{21}(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)] \quad (4.11)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \chi_{21} & i \sin \chi_{21} \\ 0 & i \sin \chi_{21} & \cos \chi_{21} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Задача состоит в том, чтобы перевести состояние  $A_{10}|0\rangle = (|0\rangle + i\sqrt{2}|1\rangle)/\sqrt{3}$  в сбалансированное состояние  $|\Psi_0\rangle = (|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i\varphi_2}|2\rangle)/\sqrt{3}$  (с соответствующими фазами  $\varphi_{1,2}$ ). Выбирая время так, чтобы  $\chi_{21} = \Delta_{21}t/\hbar = \pi/4$ , получим оператор

$$A_{21} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

и сбалансированное состояние  $|\Psi_0\rangle = A_{21}A_{10}|0\rangle$  равное

$$|\Psi_0\rangle = A_{21}A_{10}|0\rangle = (|0\rangle + i|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{3}. \quad (4.14)$$

Назовем комбинацию  $U_p \equiv A_{21}A_{10}$  оператором приготовления. Состояние  $|\Psi_0\rangle$  не равно низшей Фурье гармонике  $|\Psi_h\rangle = [|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle]/\sqrt{3}$ ; если мы хотим работать с каноническим преобразованием Фурье, то мы должны переопределить фазы состояний вычислительного базиса,  $|0\rangle \rightarrow |0\rangle$ ,  $|1\rangle \rightarrow -i|1\rangle$  и  $|2\rangle \rightarrow -|2\rangle$ . С другой стороны, мы можем начать наш базис счета с любой гармоники Фурье вычислительного базиса или с произвольного сбалансированного состояния, которое будет получено в процессе приготовления (как мы сделали выше). Также заметим, что наш оператор приготовления  $U_p$  не действует как преобразование Фурье на другие базисные состояния, а является простейшим оператором, который переводит состояние  $|0\rangle$  в сбалансированное состояние.

Далее мы найдем состояния  $|\Psi_1\rangle$  и  $|\Psi_2\rangle$  после пролета 1 и 2 частиц: После пролета одной частицы, квазиклассическое состояние кутрита  $|\nu\rangle$  получает фазу  $\exp(2\pi i\nu/3)$ . Унитарный оператор

$$\mathbf{C}_1 = \exp[(2\pi i/3)(0|0\rangle\langle 0| + 1|1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|)] \quad (4.15)$$

производит дополнительные состояния счета

$$|\Psi_1\rangle = \mathbf{C}_1|\Psi_0\rangle = \frac{|0\rangle + ie^{2\pi i/3}|1\rangle - e^{4\pi i/3}|2\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (4.16)$$

$$|\Psi_2\rangle = \mathbf{C}_1|\Psi_1\rangle = \frac{|0\rangle + ie^{4\pi i/3}|1\rangle - e^{8\pi i/3}|2\rangle}{\sqrt{3}}. \quad (4.17)$$

Дальнейшее применение  $\mathbf{C}_1$  возвращает к состоянию  $|\Psi_0\rangle$ , то есть оператор  $\mathbf{C}_1$  является циклическим,  $\mathbf{C}_1^3 = 1$  ( $\Theta = 0$ ). Легко проверить, что множество  $|\Psi_0\rangle, |\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle$  образует новый ортонормированный базис в Гильбертовом пространстве кутрита, натянутом на квазиклассические состояния  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ .

Мы подошли к процедуре *измерения*. Определим обратный оператор приготовления  $\mathbf{U}_p^{-1} \equiv [\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{10}]^{-1} = \mathbf{A}_{10}^\dagger\mathbf{A}_{21}^\dagger$ , используя точные выражения из уравнений (4.10) и (4.13), получим

$$\mathbf{U}_p^{-1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -i\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -2i & 1 & -i \\ 0 & -i\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Применение  $\mathbf{U}_p^{-1}$  переводит состояние  $|\Psi_0\rangle$  обратно в  $|0\rangle$ , хотя  $\mathbf{U}_p^{-1}|\Psi_{1,2}\rangle$  есть суперпозиция состояний  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ ,

$$\mathbf{U}_p^{-1}|\Psi_0\rangle = |0\rangle, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{U}_p^{-1}|\Psi_1\rangle = -i(|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}, \quad (4.20)$$

$$\mathbf{U}_p^{-1}|\Psi_2\rangle = -i(|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}. \quad (4.21)$$

Проверка делимости на 3 состоит из применения  $U_p^{-1}$  к состоянию  $C_1^n |\Psi_0\rangle$ , полученному после пролета  $n$  частиц и измерения состояния кутрита; если кутрит в состоянии  $|0\rangle$ , то  $n$  делится на 3.

Получение числа  $n$  по модулю 3 незначительно сложнее. Мы должны повернуть состояния  $U_p^{-1} |\Psi_{1,2}\rangle$  так, чтобы восстановить состояния  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$  вычислительного базиса. Используя язык спинов в двумерном пространстве, натянутом на  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , эта операция получается при помощи вращения на угол  $\pi/2$  вокруг оси  $z$ , а затем вращения на угол  $-\pi/2$  вокруг оси  $x$ . Первая операция получается при помощи оператора  $P_2 \equiv \exp(i(\pi/2)|2\rangle\langle 2|)$ , а вторая при помощи  $A_{21}$ . Оператор

$$\begin{aligned} M &= A_{21} P_2 U_p^{-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ -i & -e^{4\pi i/3} & ie^{2\pi i/3} \\ 1 & -ie^{2\pi i/3} & -e^{4\pi i/3} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.22)$$

позволяет определить число  $n$  по модулю 3, так как

$$\begin{aligned} M|\Psi_0\rangle &= |0\rangle, \\ M|\Psi_1\rangle &= -i|1\rangle, \\ M|\Psi_2\rangle &= |2\rangle. \end{aligned}$$

В зависимости от результата измерения кутрита  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  или  $|2\rangle$ , число  $n$  равно 0, 1, или 2 по модулю 3. Число может быть найдено при помощи последовательной схемы измерений: после применения  $U_p^{-1}$  и измерения состояния  $|0\rangle$ , результат говорит, что  $n = 0$  по модулю 3 (если частица найдена в состоянии  $|0\rangle$ ) или 1 или 2 (если частица не детектирована); в последнем случае применение оператора  $A_{21} P_2$  и измерение состояния  $|1\rangle$

даст окончательный результат,  $n = 1$  по модулю 3, если частица найдена в состоянии  $|1\rangle$ , или  $n = 2$  по модулю 3, если не найдена (в этом случае частица в состоянии  $|2\rangle$ ).

Выше мы использовали те фазы, которые естественным образом появлялись при простейшем манипулировании с трехямной системой. В результате матрица в уравнении (4.22) не дает каноническое (обратное) преобразование Фурье. Процедура, описанная в разделе 3.3, позволяет связать матрицу  $\mathbf{M}$  с канонической формой  $\mathbf{F}^{-1}$ . Фазы  $[\alpha]$  и  $[\beta]$  определяются операторами  $\mathbf{U}_p$ , Ур. (4.14), и  $\mathbf{M}$ , Ур. (4.22). Используя эти фазы в уравнении (3.13), легко проверить, что выражение (4.22) действительно соответствует обратному преобразованию Фурье  $\mathbf{F}^{-1}$ .

Обобщение алгоритма на  $K$ -кутритные регистры делается так же, как в случае двоичного счета. Предположим, что все элементы в  $K$ -кутритном регистре первоначально находятся в состоянии  $|0\rangle_j$ , то есть в регистре закодированно состояние  $|0\rangle_Q$  вычислительного базиса. Кутрит  $j > 1$  считает кластеры частиц: кутрит  $j$  считает группы  $3^{(j-1)}$  частиц, следовательно, сдвиг фазы в  $\mathbf{C}_1$  равен  $\exp(2\pi i/3^j)$ . Все следующие кутриты взаимодействуют с проволокой в три раза слабее, чем предыдущий. На этапе *приготовления*  $j$ -й кутрит идентичен первому. После *пролета частицы* состояния  $|\nu\rangle$  в  $j$ -м кутрите получают фазы  $\exp(2\pi i\nu/3^j)$ .

Схема измерений при проверке на *делимость* включает применение  $\mathbf{U}_p^{-1}$  ко всем  $K$  кутритам и последовательную проверку состояний  $|0\rangle_j$  в каждом кутрите: если все кутриты  $j < k + 1$  в состоянии  $|0\rangle_j$  а кутрит  $j = k + 1$  нет, то  $n$  делится на  $3^k$  и не делится на  $3^{k+1}$ .

Чтобы получить *число  $n$  в троичном представлении*, перед применением оператора  $\mathbf{M}$ , Ур. (4.22), состояния кутритов необходимо скорректи-



ровать из-за пролета неполных групп частиц, за исключением первого, который измеряется после применения  $\mathbf{M}$ . Результат 0, 1 или 2 измерения записывается в  $n_K$ . Перед измерением следующего кутрита  $j = 2$ , все кутриты  $J > 1$  необходимо скорректировать: состоянию  $|\nu\rangle$   $J$ -го кутрита надо добавить фазу  $-2\pi n_K \nu 1/3^J$ . Впоследствии, оператор  $\mathbf{M}$  применяется к кутриту  $j = 2$ , его состояние измеряется, и результат 0, 1 или 2 записывается в  $n_{K-1}$ . Продолжая этот процесс, результат  $n_{K-j+1}$  измерения  $j$ -го кутрита используется для коррекции пролета неполных групп  $3^j$  частиц прибавлением фаз  $-2\pi n_{K-j+1} \nu 3^{j-1}/3^J$  в состояниях  $|\nu\rangle$  кутритов  $J > j$ . После применения  $\mathbf{M}$  к кутриту  $j + 1$ , его состояние измеряется и результат записывается в  $n_{K-j}$ .

Проанализируем три оператора  $\mathbf{U}_p$ ,  $\mathbf{U}_p^{-1}$  и  $\mathbf{M}$ : так как  $\mathbf{U}_p$  только переводит состояние  $|0\rangle$  в сбалансированное состояние  $|\Psi_0\rangle$  (но не действует как преобразование Фурье на другие состояния), его обратный  $\mathbf{U}_p^{-1}$  не описывает обратное квантовое преобразование Фурье. Только после увеличения  $\mathbf{U}_p^{-1}$  до оператора  $\mathbf{M}$ , см. Ур. (4.22), мы получаем обобщенное обратное квантовое преобразование Фурье, позволяющее считывать индивидуальные состояния кутритов. Последующее измерение всего кутритного регистра не требует полного квантового преобразования Фурье, для этого достаточно полуклассической версии, использующей последовательные измерения и манипуляции (выполнение компенсаций для пролета неполных групп частиц). Ниже мы встретимся с другими схемами, в которых приготавливающий оператор  $\mathbf{U}_p$  уже действует как полное квантовое преобразование Фурье на квазиклассические вычислительные состояния  $|n\rangle$ ; в этом случае измеряющий оператор просто равен обратному,  $\mathbf{M} = \mathbf{U}_p^{-1}$ . Причина, по которой мы используем два различных оператора  $\mathbf{U}_p$  и  $\mathbf{M}^{-1}$ , состоит в простоте эта-

па приготовления при использовании  $U_p$ . Это особенно выгодно в случае, когда мы интересуемся делимостью  $n$  на  $3^k$  и процесс измерения требует только обратный оператор  $U_p^{-1}$ . Использование полного преобразования Фурье  $M^{-1}$  для приготовления приводит к значительно более сложной процедуре приготовления, см. следующий раздел 4.3.

### 4.3. Обобщение на кудиты

Последующее обобщение на случай счета по основанию  $d$  с кудитами использует идеи, развитые для двоичного и троичного счета с кубитами и кутритами. Чтобы построить алгоритм, определим три шага: приготовление при помощи оператора  $U_p$ , счет с оператором  $C_1$  и измерение с использованием обратного преобразования Фурье  $M$ . Первые два шага понятны: Приготовление начального сбалансированного состояния  $|\Psi_0\rangle$  начинается с состояния  $|0\rangle$ , затем последовательно перемещаем часть волновой функции в соседнюю яму, всегда оставляя амплитуду с весом  $1/\sqrt{d}$ ; индивидуальные шаги требуют операторов

$$A_{k,k-1}^\chi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \cos \chi & i \sin \chi & \dots & 0 \\ 0 & \dots & i \sin \chi & \cos \chi & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

с  $(k-1, k)$  не тривиальным  $2 \times 2$  блоком, который перемещает амплитуду между ямами  $k-1$  и  $k$ , см. Ур. (4.8). Эта операция физически выполняется при помощи понижения барьера между соседними ямами  $k-1$  и  $k$ . Счита-

ющий оператор  $C_1$  получается прямым обобщением Ур. (4.15), состоит из вращающих или фазовых операторов

$$P_k^\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{i\phi} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

с  $\phi = 2\pi k/d$  и реализуется при помощи изменения дна ямы  $k$ .

Реализация обратного преобразования Фурье  $M$  при помощи физических операторов из уравнений (4.23) и (4.24) труднее, но возможна, так как это множество операторов универсально, то есть любая унитарная  $d \times d$  матрица может быть представлена в виде произведения операторов  $A_{k,k-1}^\chi$  и  $P_k^\phi$ . Доказательство этого утверждения аналогично доказательству универсальности двухуровневых унитарных матриц, см. книгу [50]. Идея состоит в том, чтобы заданную унитарную  $d \times d$  матрицу  $U$  (или оператор) привести к единичной матрице при помощи последовательных правых умножений на матрицы  $A_{k,k-1}^\chi$  и  $P_k^\phi$ . Рассмотрим элементы  $U_{0,k-1} = \beta = |\beta|e^{i\varphi_\beta}$  и  $U_{0,k} = \alpha = |\alpha|e^{i\varphi_\alpha}$  матрицы  $U$  (мы нумеруем строки и столбцы числами от 0 до  $d-1$ ). Произведение  $U P_{k-1}^\phi A_{k,k-1}^\chi$  порождает новые элементы матрицы  $\beta e^{i\phi} \cos \chi + i\alpha \sin \chi$  и  $\alpha \cos \chi + i\beta e^{i\phi} \sin \chi$ , мы можем заменить новые элементы в позиции  $(0, k)$  на 0, если выберем углы  $\chi = \arctan(|\alpha/\beta|)$  и  $\phi = \pi/2 + \varphi_\alpha - \varphi_\beta$  (если  $\beta = 0$ , то  $\chi = \pi/2$ ,  $\phi = 0$  и  $\alpha = 0$  подразумевает нулевые углы, то есть единичные матрицы). Новый  $(0, k-1)$  элемент равен  $\beta' = ie^{i\varphi_\alpha} \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$ . Повторяя эту операцию  $d-1$  раз, мы превратим верхнюю строку в нули, за исключением элемента  $(0, 0)$ , который обратим

в единицу, применяя дополнительный фазовый оператор. Таким образом, при помощи  $2d - 1$  элементарных операций (фазовых и амплитудных) мы первую строку превращаем в вектор  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ , всего  $\sum_1^d (2k - 1) = d^2$  элементарных операций переводит унитарный оператор  $\mathbf{U}$  в единичный оператор; требуемый оператор получается простым обращением.

Чтобы проиллюстрировать процедуру, получим преобразование Фурье  $\mathbf{M}^{-1}$ ,

$$\mathbf{M}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{2\pi i/3} & e^{4\pi i/3} \\ 1 & e^{4\pi i/3} & e^{8\pi i/3} \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

для кутритов. Для реализации первого шага выбираем углы  $\chi = \arctan(1) = \pi/4$  и  $\phi = \pi/2$ , произведение  $\mathbf{M}_1^{-1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{P}_1^{\pi/2} \mathbf{A}_{2,1}^{\pi/4}$  равно матрице

$$\mathbf{M}_1^{-1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ 1 & -i/\sqrt{2} & -i\sqrt{3/2} \\ 1 & -i/\sqrt{2} & i\sqrt{3/2} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Углы для второго шага равны  $\chi = \arctan(\sqrt{2})$  и  $\phi = \pi$ , и мы получаем матрицу  $\mathbf{M}_2^{-1} = \mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{P}_0^\pi \mathbf{A}_{1,0}^\chi \mathbf{P}_0^\pi$

$$\mathbf{M}_2^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -i & -i \\ 0 & -i & i \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Далее, углы для третьего шага равны  $\chi = \pi/4$  и  $\phi = \pi/2$ , а произведение  $\mathbf{M}_3^{-1} = \mathbf{M}_2^{-1} \mathbf{P}_1^{\pi/2} \mathbf{A}_{2,1}^{\pi/4}$  дает вторую строку в виде  $(0, 1, 0)$ ; на этом шаге нет необходимости в дополнительных фазовых вращениях. Наконец, мы должны скомпенсировать фазу у матричного элемента  $(2, 2)$  при помощи

дополнительного вращения  $M_4^{-1} = M_3^{-1}P_2^{3\pi/2}$ , и мы получаем единичную матрицу. Собирая все множители, получаем оператор  $M$ , выраженный через элементарные амплитудные и фазовые операторы,

$$M = [P_1^{\pi/2} A_{2,1}^{\pi/4}][P_0^\pi A_{1,0}^\chi P_0^\pi][P_1^{\pi/2} A_{2,1}^{\pi/4}][P_2^{3\pi/2}]. \quad (4.28)$$

Результат Ур. (4.28) соответствует выражению из Ур. (4.22) с точностью до фаз. Действительно, выше мы представили минимальный алгоритм с приготовлением при помощи оператора  $U_p$ , порождающего первое вычислительное состояние с фазами  $(1, i, -1)$  вместо канонических [тривиальные фазы  $(1, 1, 1)$ ]. В результате измерительный оператор Ур. (4.22) соответствует обратному преобразованию Фурье с точностью до фаз. Конечно, можно легко добавить дополнительные фазовые операторы  $P_k^\phi$  и устранить не канонические фазы ( $U_p = P_1^{3\pi/2} P_2^\pi A_{2,1}^{\pi/4} A_{1,0}^\chi$  с  $\chi = \arctan \sqrt{2}$ ), однако, такие дополнительные операции только усложняют алгоритм. Важно заметить, что проверка делимости не требует реализации обратного преобразования Фурье, следовательно, имеет смысл знать реализацию минимального оператора приготовления  $U_p$ .

#### 4.4. Реализация кутритов и кудитов

Счет по основанию  $d$  и алгоритм факторизации требуют множества приемлемых и хорошо управляемых элементарных квантовых устройств, кубитов, кутритов и кудитов. Ранее мы описали реализацию кубитов системой со спином  $1/2$ . Естественно было бы попытаться использовать систему со спином  $1$  для реализации кутритов и, возможно, систему со спином  $d$  для кудитов. Хотя эта идея в принципе может быть реализована для случая

спина 1, алгоритм приготовления и измерения достаточно сложен (смотри ниже) и должен поэтому восприниматься как мысленный эксперимент, а не реальная возможность. Попытка обобщения концепции заряда в двойной квантовой точке была проанализирована выше; эта идея хорошо работает в теории, однако реализация многоточечного зарядового кудита может столкнуться с трудностями. В качестве альтернативы можно попытаться имитировать  $d$ -спиновый кудит ( $d$ -уровневую систему) системами со спином  $1/2$  (кубитами). Предполагая, что мы допускаем двух-кубитные взаимодействия в нашей схеме, мы в состоянии определить все необходимые операции, которые требуются для выполнения алгоритма. Следовательно, мы можем предложить способ реализации кудитов, используя кубиты как элементарные единицы.

#### 4.4.1. Спин-1 кутрит

Рассмотрим реализацию кутрита при помощи системы со спином 1 с ортогональным вычислительным базисом  $|l, m\rangle_z = |1, 1\rangle_z = |0\rangle$ ,  $|1, 0\rangle_z = |1\rangle$  и  $|1, -1\rangle_z = |2\rangle$ . Мы должны приготовить систему в начальном состоянии счета  $\Psi_0$ , то есть низшей Фурье гармоники вычислительного базиса, или в любом другом сбалансированном состоянии. Заметим, что экспериментально мы можем получить состояния, поляризованные вдоль произвольного направления  $\mathbf{n}$ , такие как  $|1, 1\rangle_{\mathbf{n}}$  (аксиальное состояние) и  $|1, 0\rangle_{\mathbf{n}}$  (планарное состояние). Так как невозможно построить аксиальное состояние с равными весами базисных состояний  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ , мы будем использовать планарные состояния. Общее планарное состояние с направлением  $\mathbf{n}$ , опре-

деляемым углами  $\varphi$  и  $\theta$ , в вычислительном базисе имеет вид

$$|1, 0\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \cos \theta \\ \sin \theta e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (4.29)$$

Мы требуем, чтобы все компоненты имели равные веса, следовательно  $\theta = \arctan \sqrt{2}$ ; выбирая  $\varphi = \pi/4$ , получим сбалансированное состояние

$$|\Psi_0\rangle = \frac{-e^{-i\pi/4}|0\rangle + |1\rangle + e^{i\pi/4}|2\rangle}{\sqrt{3}}, \quad (4.30)$$

планарное состояние  $|1, 0\rangle_{\mathbf{e}_c}$  с направлением  $\mathbf{e}_c = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ , направленным вдоль главной диагонали; другие значения  $\varphi$  соответствуют другим направлениям  $\mathbf{e}_c$ , повернутым вокруг оси  $z$ .

Другие состояния счета получаются вращением  $|\Psi_0\rangle$  на угол  $2\pi/3$  (против часовой стрелки) вокруг оси  $z$ ,  $|\Psi_1\rangle = U_z(2\pi/3)|\Psi_0\rangle$  и  $|\Psi_2\rangle = U_z(2\pi/3)|\Psi_1\rangle$ ; физически, это вращение достигается благодаря тому, что пролетающие электроны создают локальный импульс магнитного поля вдоль оси  $z$ . Для простоты, поменяем две оси, одну для приготовления, другую, определяющую направление считающего поля: теперь наша задача получить первоначальное планарно поляризованное состояние  $|1, 0\rangle_z$  и реализовать шаг счета при помощи вращения на угол  $2\pi/3$  (против часовой стрелки) вокруг оси  $\mathbf{e}_c$ .

В то время как создание аксиально поляризованных состояний довольно просто, создание планарно поляризованного состояния  $|1, 0\rangle_{\mathbf{n}}$  не так тривиально. Действительно, аксиальное состояние можно приготовить, поместив систему в магнитное поле и выждав время релаксации спина. Для получения планарно состояния требуется более сложная процедура. Такое

приготовление может быть выполнено при помощи прибора Штерна-Герлаха, однако эта процедура является статистической с вероятностью правильного выхода  $1/2$ . Действительно, приготовив начальное состояние, поляризованное вдоль оси  $x$ ,  $|1, 1\rangle_x = (|1, 1\rangle_z + |1, -1\rangle_z)/2 + |1, 0\rangle_z/\sqrt{2}$ , мы получим требуемое спиновое состояние  $|1, 0\rangle_z$  с вероятностью одна вторая, используя прибор Штерна-Герлаха, настроенный вдоль оси  $z$ , и отбирая частицы с прямой траекторией (ниже мы обсудим процедуру создания правильного начального состояния с единичной вероятностью).

С правильно приготовленным состоянием счѐта  $|\Psi_0\rangle = |1, 0\rangle_z$  мы определим шаг счѐта через вращение на угол  $2\pi/3$  вокруг оси  $\mathbf{e}_c = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$ , см. Рис. 4.3,

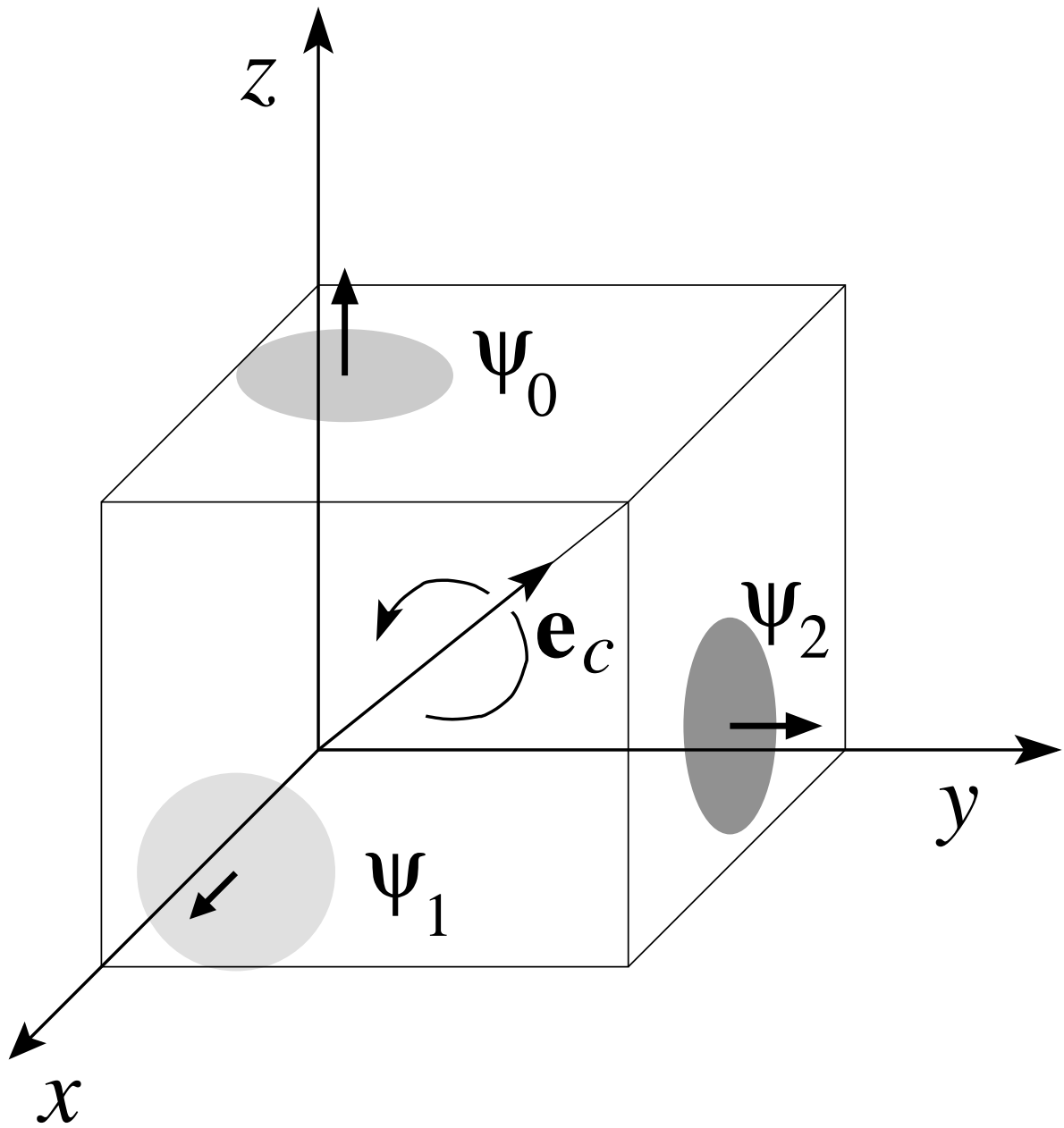
$$\begin{aligned} C_1 &= \exp[-i(2\pi/3)\mathbf{e}_c \cdot \mathbf{L}/\hbar] \\ &= \exp\left[-\frac{2\pi i}{3\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\pi/4} & 0 \\ e^{i\pi/4} & 0 & e^{-i\pi/4} \\ 0 & e^{i\pi/4} & -1 \end{pmatrix}\right]. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Этот оператор - циклический (трехкратное применение возвращает обратно к начальному состоянию  $|1, 0\rangle_z$ ) и создает полный ортогональный базис счѐта

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= |1, 0\rangle_z, \\ |\Psi_1\rangle &= |1, 0\rangle_x, \\ |\Psi_2\rangle &= |1, 0\rangle_y. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Этап измерения для проверки делимости после пролета частиц заключается в проведении второго эксперимента Штерна-Герлаха вдоль оси  $z$ ; если частица снова движется по прямой траектории, значит, ее





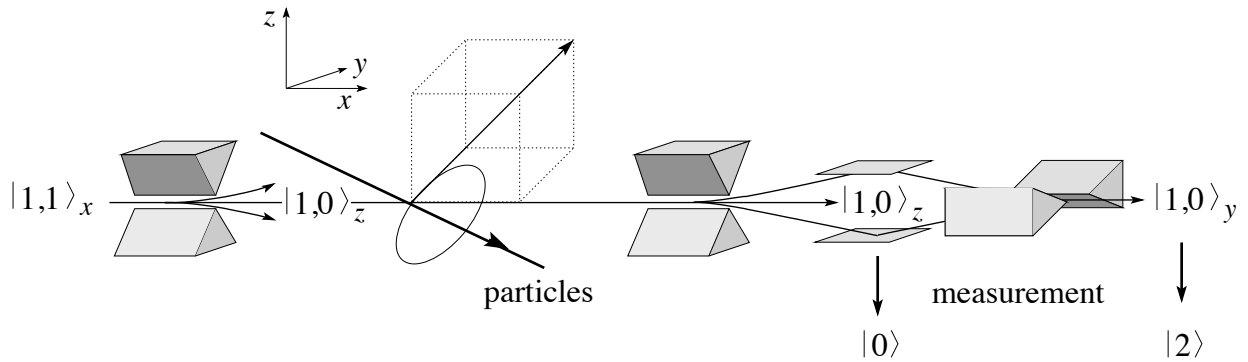
**Рис. 4.3.** Спин-1 кутрит. После приготовления в состоянии  $|1,0\rangle_z$ , спин в состоянии с планарной ( $xy$ ) поляризацией. После пролета частицы плоскость поляризации поворачивается (на угол  $2\pi/3$  вокруг  $\mathbf{e}_c$ ) из  $xy$  в  $yz$ , после пролета второй частицы в  $zx$ , а после третьей обратно в  $xy$ . Проверка делимости требует измерения прибором Штерна - Герлаха с магнитным полем, направленным вдоль оси  $z$ .

поляризация не изменилась после пролета  $n$  частиц и, следовательно,  $n$  делится на 3. Другие состояния  $|1, 0\rangle_x = (|1, -1\rangle_z - |1, 1\rangle_z)/\sqrt{2}$  и  $|1, 0\rangle_y = i(|1, 1\rangle_z + |1, -1\rangle_z)/\sqrt{2}$ , см. Ур. (4.29), не дают вклада в сигнал на прямой траектории, см. Рис. 4.4.

Как обычно, измерение чисел по модулю более трудно. Мы используем другие выходы второго эксперимента Штерна-Герлаха  $|1, 1\rangle_z$  и  $|1, -1\rangle_z$ , приводим их к интерференции, соединив траектории, см. Рис. 4.4. Это состояние запускаем в третий прибор Штерна-Герлаха, настроенный вдоль оси  $y$ , детектируем состояние  $|1, 0\rangle_y$  на прямой траектории (число равно 2 по модулю 3); если частица не измерена, то мы имели после процедуры счета состояние  $|1, 0\rangle_x$  и число равно 1 по модулю 3.

Наконец, рассмотрим этап приготовления с единичной эффективностью. Этого можно добиться, используя состояния  $|1, \pm 1\rangle_z$  после первого прибора Штерна-Герлаха (мы используем состояние  $|1, 1\rangle_x$  на входе в прибор Штерна-Герлаха). Соединив эти два состояния, мы получим состояние  $i(|1, 1\rangle_z + |1, -1\rangle_z)/2 = |1, 0\rangle_y/\sqrt{2}$ , повернув это планарное состояние обратно на ось  $z$ , получаем требуемое состояние  $|1, 0\rangle_z$ . Таким образом, мы трансформировали начальное состояние  $|1, 1\rangle_x$  в два волновых пакета с весами  $1/2$ , каждый из которых описывается одним и тем же спиновым состоянием  $|1, 0\rangle_z$ . Следовательно, хотя мы не можем получить планарное состояние из аксиального простым вращением, использование прибора Штерна-Герлаха и надлежащей манипуляции со всеми тремя амплитудами расщепленной волновой функции позволяют нам получить требуемое планарное состояние, разделенное на два волновых пакета с весом  $1/2$  каждый.

Очевидно, что приведенная выше схема очень сложна и может быть рассмотрена как мысленный эксперимент, а не как реальная установка.



**Рис. 4.4.** Схема установки для счета при помощи спин-1 кутрита. Посылая состояние с поляризацией  $|1, 1\rangle_x$  в первый прибор Штерна-Герлаха (SG) с магнитным полем вдоль оси  $z$  и отбирая среднюю траекторию, получаем планарное состояние  $|1, 0\rangle_z$  с вероятностью  $1/2$ . Частицы вращают состояние спина вокруг оси  $\mathbf{e}_c = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$  и создают планарные состояния счета  $|1, 0\rangle_z$ ,  $|1, 0\rangle_x$ , и  $|1, 0\rangle_y$ . Эти состояния анализируются во втором SG приборе с полем вдоль оси  $z$ . Если спин не отклонился, то число частиц  $n$  делится на 3. Сводя вместе два отклонившихся пучка и анализируя их суперпозицию в третьем SG приборе с полем вдоль оси  $y$ , находим число  $n$  по модулю 3, то есть получаем 2, если спин не отклонился, и 1 в противном случае.

Тем не менее, интересно увидеть, что спин-1 кутрит может, по крайней мере в принципе, быть использован для реализации алгоритма троичного счета.

#### 4.4.2. Трех-точечный кутрит

Трех-точечный кутрит обсуждался выше в разделе 4.2. Приготовление, счет и измерение могут быть выполнены при помощи импульсов напряжения, действующих на квазиклассические состояния (фазовый сдвиг) или на барьер (амплитудный сдвиг). Недостаток в том, что необходимо делать новое устройство при переходе от двоичного к троичному счету и, вообще, каждый раз, когда проверяется новый простой множитель. Эмуляция кутритов (и кудитов) при помощи кубитов, описанная ниже, дает нам возможность иметь дело только с одной вычислительной единицей для всех задач счета по основанию  $d$  и задач факторизации.

#### 4.4.3. Эмуляция кутрита кубитами

Основная задача, которой мы будем здесь заниматься, состоит в эмуляции кудитов, необходимых для задач счета по основанию  $d$  и факторизации, при помощи более простых кубитов. Мы начнем с комбинирования двух кубитов в кутрит.

#### Эмуляция, использующая спиновый триплет

Очевидный способ выбрать три подходящих состояния в произведении Гильбертовых пространств  $\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2}$  двух кубитов заключается в его

разложении на синглетный и триплетный секторы,

$$\mathcal{H}_{1/2} \otimes \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1, \quad (4.33)$$

и взятии трехмерного триплетного пространства  $\mathcal{H}_1$ . В отличие от простого спин-1 кутрита, эмуляция кутрита двумя кубитами дает нам необходимые степени свободы, чтобы выполнить все требуемые шаги (приготовление с  $\mathbf{U}_p$  и измерение с  $\mathbf{M}$ ) в алгоритме счета и факторизации при помощи одно- ( $\sigma_x^{(i)}, \sigma_z^{(i)}$ ) и двух-кубитных ( $\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$ ) операций. Мы начнем с вычислительного базиса  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ ,  $|1\rangle = (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}$  и  $|2\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$  и найдем такие операции с кубитами, которые дадут нам состояния счета в форме трех ортогональных планарно поляризованных состояний со сбалансированными весами. Они имеют форму Ур. (4.29), в то время как аксиальные состояния могут быть записаны как (снова в вычислительном базисе)

$$|1, 1\rangle_{\mathbf{n}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ (1 - \cos \theta) e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор в направлении поляризации спина. Заметим, что как только эти состояния выбраны, операторы  $\sigma_z^{(i)}$  и  $\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$  изменяют только относительные фазы у состояний  $|1, 0\rangle_{\mathbf{n}}$  и  $|1, 1\rangle_{\mathbf{n}}$ , но не их относительные веса. Следовательно, наша задача заключается в конструировании трех ортогональных планарных состояний из состояний вычислительного базиса, состоящего из двух аксиальных и одного планарного состояния. Таким образом, мы можем найтиготавливающий оператор  $\mathbf{U}_p$ , конгруэнтный преобразованию Фурье, т.е.  $\mathbf{U}_p = \mathbf{M}^{-1}$  преобразует вычислительный базис  $\{|k\rangle\}_{k=0}^2$  в базис счета  $\{|\Psi_n\rangle\}_{n=0}^2$ .

Прежде всего заметим, что планарные состояния Ур. (4.29) всегда имеют одинаковый вес в компонентах  $|0\rangle$  и  $|2\rangle$  и, следовательно, нам в первую очередь надо повернуть аксиальные состояния вычислительного базиса в  $yz$ -плоскости. Такой поворот осуществляется при помощи оператора  $e^{i\pi\sigma_x/2}$ , где  $\sigma_x = (\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)})/2$ , в результате действия которого получаем (с точностью до фазы) состояния  $[\theta = \pi/2$  в Ур. (4.34)]

$$|1, 1\rangle_{\mathbf{e}_y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |1, 1\rangle_{-\mathbf{e}_y} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.35)$$

см. Рис. 4.5. Заметим, что простое вращение переводит планарное состояние  $|1\rangle$  в планарное состояние (с направлением вдоль оси  $y$ ). Для того чтобы перевести аксиальные состояния Ур. (4.35) в планарные состояния, мы выбираем  $\theta = \pi/4$  в Ур. (4.29) и получаем планарные состояния

$$|1, 0\rangle_{\mathbf{n}_{\pi/4}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \\ e^{i\varphi} \end{pmatrix}; \quad (4.36)$$

планарные и аксиальные состояния в Ур. (4.36) и (4.35) теперь имеют одинаковые амплитуды. Для того чтобы получить подходящие фазы  $\varphi$  в планарных состояниях Ур. (4.36), заметим, что разность фаз у компонент  $|0\rangle$  и  $|2\rangle$  в аксиальных состояниях равна  $\pm\pi$ ; эти значения должны соответствовать разнице фаз  $\pi - 2\varphi$  в планарных состояниях и, следовательно, мы должны выбрать планарные состояния с  $\varphi = 0, \pi$ ,

$$|1, 0\rangle_{x,-z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle_{x,z} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Эти два состояния характеризуются направлениями вдоль  $xz$ -диагоналей, см. Рис. 4.5. Чтобы перевести аксиальные состояния Ур. (4.35) в планарные состояния Ур. (4.37), мы используем двухкубитный оператор

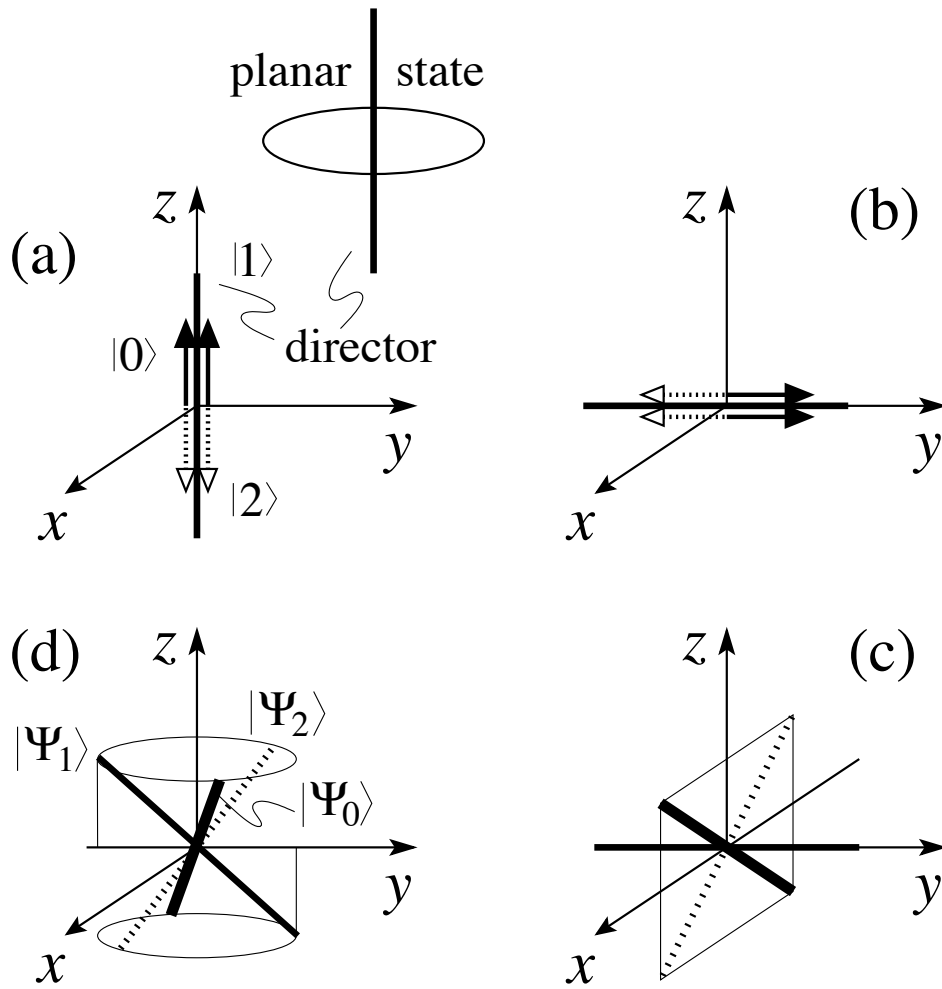
$$U_\chi = e^{i\chi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}}. \quad (4.38)$$

Этот оператор добавляет фазы  $\chi$  ( $-\chi$ ) в компоненты  $|0\rangle$ ,  $|2\rangle$  ( $|1\rangle$ ), оставляя относительную фазу между компонентами  $|0\rangle$ ,  $|2\rangle$  неизменной и добавляя относительный сдвиг  $-2\chi$  в среднюю компоненту. Следовательно, выбирая  $\chi = -\pi/4$ , мы можем отобразить аксиальное состояние  $|1, 1\rangle_{\mathbf{e}_y}$  в планарное состояние  $|1, 0\rangle_{x,z}$  и  $|1, 1\rangle_{-\mathbf{e}_y}$  в планарное состояние  $|1, 0\rangle_{x,-z}$ , см. Рис. 4.5. Поскольку компонента  $|1\rangle$  в планарном состоянии  $|1, 0\rangle_{\mathbf{e}_y}$  имеет вес 0, оператор  $U_{-\pi/4}$  оставляет его неизменным.

Таким образом, мы получили три ортогональных планарных состояния, направленных вдоль оси  $y$  и вдоль  $xz$ -диагоналей; последнее вращение  $e^{i\varphi\sigma_x}$  с  $\sigma_x = (\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(2)})/2$  на угол  $\varphi = \arctan(1/\sqrt{2})$  вокруг оси  $x$  располагает три состояния симметрично относительно оси  $z$ . Комбинируя эти три операции, мы получаем приготовляющий оператор, являющийся обратным к измеряющему оператору

$$U_p = M^{-1} = e^{i\varphi\sigma_x} e^{-i\pi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/4} e^{i\pi\sigma_x/2}. \quad (4.39)$$

Действие трех операций Ур. (4.39) на состояния вычислительного базиса  $\{|n\rangle\}_{n=0}^2$  проиллюстрированы на Рис. 4.5; результирующий базис счета за-



**Рис. 4.5.** Вращения, которые создают квантовое преобразование Фурье в триплетном секторе системы двух кубитов; мы обозначаем аксиальные состояния  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$  и  $|2\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$  двойными стрелками, а планарные состояния (например  $|1\rangle = [|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle]/\sqrt{2}$ ) линиями. (a) $\rightarrow$ (b) Вращение на угол  $-\pi/2$  вокруг оси  $x$ , (b) $\rightarrow$ (c) вращение оператором  $e^{i\chi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}}$  с  $\chi = -\pi/4$  переводит два аксиальных состояния в планарные с направлениями вдоль диагоналей в  $xz$  плоскости, (c) $\rightarrow$ (d) вращение на угол  $\varphi = -\arctan(1/\sqrt{2})$  вокруг оси  $x$  переводит планарные состояния в планарные с направлениями, симметричными относительно оси  $z$ . В итоге получаем состояния счета, которые переходят друг в друга при повороте на угол  $-2\pi/3$  вокруг оси  $z$ .



дан тремя планарными состояниями  $|\Psi_n\rangle = U_p|n\rangle$ ,

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \frac{e^{-5\pi i/12}}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{e^{3\pi i/4}}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{e^{11\pi i/12}}{\sqrt{3}}|2\rangle, \\ |\Psi_1\rangle &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{3}}|2\rangle, \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{e^{i11\pi/12}}{\sqrt{3}}|0\rangle + \frac{e^{i3\pi/4}}{\sqrt{3}}|1\rangle + \frac{e^{-i5\pi/12}}{\sqrt{3}}|2\rangle. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Можно показать, что шаг счета, применяющий оператор  $C_1 = \exp(2\pi i \sigma_z/3)$  с  $\sigma_z = (\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)})/2$ , действительно переводит три состояния из Ур. (4.40) друг в друга, то есть  $|\Psi_n\rangle = C_1^n|\Psi_0\rangle = C_n|\Psi_0\rangle$  (заметим, что используемый здесь симметрично определенный оператор  $\sigma_z$  отличается от оператора  $C_1$  в следующем параграфе, раздел 4.4.3).

## Эффективная эмуляция

Несмотря на то, что эмуляция кутрита триплетным сектором из двух кубитов может быть последовательно выполнена, эта схема неэффективна для больших простых чисел. Действительно, эмуляция системы со спином 2 по этой схеме требует 4 кубита, при этом большая часть Гильбертова пространства (сектор размерности одиннадцать) не используется, поскольку требуется только одна компонента  $\mathcal{H}_2$  разложения

$$\mathcal{H}_{1/2}^{\otimes 4} = \mathcal{H}_2 \oplus 3\mathcal{H}_1 \oplus 2\mathcal{H}_0. \quad (4.41)$$

Для большей эффективности следует использовать максимальную часть гильбертова пространства. При выборе подходящего набора состояний в мультикубитном Гильбертовом пространстве мы должны отбирать состояния с эквидистантным спектром. Например, в случае  $d = 3$  и 2 кубитов, мы выбираем три соседние состояния из  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ ,  $|1\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$ ,  $|2\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$ ,

$|3\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$  и оператор  $C_1 = \exp[-i\lambda(\sigma_z^{(1)} + \sigma_z^{(2)}/2)]$ ; при пролете частицы четыре состояния приобретают фазы  $\exp(-3i\lambda/2)$ ,  $\exp(-i\lambda/2)$ ,  $\exp(i\lambda/2)$ , и  $\exp(3i\lambda/2)$ . Выбирая  $\lambda = 2\pi/3$  и первые три состояния  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  и  $|2\rangle$ , оператор  $C_1$ ,

$$C_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

совпадает с выражением Ур. (4.15) с точностью до общей фазы  $\exp(3i\lambda/2) = \exp(i\pi)$  [которую надо добавить в выражение (4.42)]. Непосредственным образом эта схема обобщается на случай  $E$ -кубитов,

$$C_1 = \exp\left[-i\lambda \sum_{l=1}^E \sigma_z^{(l)}/2^{(l-1)}\right]. \quad (4.43)$$

Помимо оператора  $C_1$ , нам необходимо знать приготавливающий оператор  $U_p$ . Для вышеуказанной кутритной эмуляции этот оператор имеет вид (см. доказательство в Приложении В)

$$U_p = e^{-i\pi\sigma_x^{(2)}/4} e^{i\pi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/8} e^{i\pi\sigma_z^{(2)}/8} e^{i\pi\sigma_x^{(2)}/4} e^{i\pi\sigma_z^{(1)}/4} e^{i\theta\sigma_x^{(1)}/2} \quad (4.44)$$

причем  $\theta = 2 \arctan(1/\sqrt{2})$ . Поскольку этот оператор еще не является преобразованием Фурье вычислительного базиса  $|k\rangle$ ,  $k = 0, 1, 2$ , мы должны найти измеряющий оператор  $M$ . Для этого заметим, что три состояния счета  $|\Psi_n\rangle$ ,  $n = 0, 1, 2$  являются перепутанными, тогда как три вычислительных состояния  $|k\rangle$ ,  $k = 0, 1, 2$  не перепутаны. Следовательно, обратное преобразование Фурье  $M$  должно распутать состояния счета, это поможет нам найти форму этого оператора. В итоге оператор  $M$  записывается в

форме произведения трех унитарных операторов  $U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ ,

$$M = U_0 U_1 U_2, \quad (4.45)$$

где операторы  $U_2$  и  $U_1$  распутывают три состояния  $|\Psi_n\rangle$ ,  $n = 0, 1, 2$ , а оператор  $U_0$  - это условный оператор Адамара, который поворачивает спин второго кубита на ось  $z$ , если первый кубит находится в состоянии  $|\uparrow\rangle$ . Детальный вывод уравнений (4.44), (4.45) и операторов  $U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  дан в Приложении Б.

## 4.5. Обсуждение и выводы

В заключение отметим, что мы обобщили двоичный квантовый алгоритм счета и определение делимости на  $2^k$  на троичный алгоритм и алгоритмы более высокого порядка. Это обобщение совершенно нетривиально в нескольких аспектах: На уровне прибора, используемые в двоичном алгоритме кубиты должны быть заменены на кутриты для троичного алгоритма или кудиты для алгоритма порядка  $d$ . Поскольку данный алгоритм основан на двух последовательных квантовых преобразованиях Фурье, то должна быть определена подходящая схема для реализации квантового преобразования Фурье на уровне индивидуальных кубитов, кутритов или кудитов. К тому же, вместо использования новых устройств для каждого алгоритма стчета, мы предпочли обсудить использование кубитов для эмуляции кудитов, уделив особое внимание кутритам.

Вооруженные этой общей схемой, мы оказались в состоянии обобщить двоичный алгоритм на троичный и на  $d$ -ичный. Мы обнаружили, что одно из возможных изменений физического устройства, использующего вместо

системы со спином  $1/2$  систему со спином  $1$ , приводит к серьезной проблеме, связанной с отсутствием подходящих операторов для приготовления состояния. Действительно, хотя любая суперпозиция двух состояний допустима в квантовой механике, может оказаться затруднительным реализовать такую суперпозицию на практике. То есть, если мы хотим получить суперпозицию двух разных собственных состояний одного и того же Гамильтониана, мы должны подействовать на состояния оператором, которого может не оказаться в наличии в данной физической системе; такая ситуация действительно имеет место для систем со спином  $1$ . Тем не менее, эмуляция системы со спином  $1$  триплетным сектором двух кубитов дает жизнеспособную альтернативу: двухкубитная операция в комбинации с однокубитными вращениями дает достаточное число степеней свободы для выполнения всех необходимых операций счета, приготовления состояния и обратного преобразования Фурье. Дальнейшую эмуляцию кубитов кубитами, однако, не стоит проводить в спин- $d$  секторе, поскольку при этом ресурсы используются не эффективно. Вместо этого следует использовать последовательность соседних энергетических состояний. Важно отметить, что преобразование Фурье, которое мы можем провести полуклассически "между" кубитами, должно быть полностью квантовым "внутри" кубитов. Следовательно, чем более высок порядок  $d$  счетного базиса, тем большая часть обратного преобразования Фурье является полностью квантовой.

## Глава 5

# Связь с алгоритмом оценки фазы и приложения

В этой главе мы установим связь между нашим квантовым алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы и обсудим различные приложения.

В разделе 5.1 мы обсудим интересное соответствие между нашим алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы [50, 56, 76] (насколько нам известно, не существует аналогичного соответствия для алгоритма проверки делимости). Эта аналогия поможет проанализировать ситуацию, когда через счетчик проходит нецелое число частиц. Будет показано, что использование дополнительных кубитов увеличит вероятность правильного числа. Также будет показано, что полуклассическое и полное квантовое преобразование Фурье одинаково устойчивы относительно систематических ошибок, появляющихся при неполном (нецелом) счете. Более того, полуклассический алгоритм довольно устойчив относительно случайных ошибок; с последними можно справиться при помощи классической многокубитной схемы коррекции ошибок, см. [74].

В разделе 5.2 рассматривается возможность создания квантового вольтметра (аналого-цифрового преобразователя) на основе точного измерения нецелых чисел с помощью кубитов. Схема создания многочастичных запутанных состояний в интерферометре Маха-Цендера обсуждается в разделе 5.3.

## 5.1. Связь с алгоритмом оценки фазы.

Наш алгоритм счета, как оказалось, имеет много общего с алгоритмом оценки фазы (АОФ); последующее обсуждение АОФ выявляет эту связь. Алгоритм оценки фазы впервые появился как часть алгоритма факторизации Шора [71]; расширенный алгоритм был представлен Китаевым [77] и позже Клеве и др. [76]. Алгоритм оценки фазы пытается найти ‘фазу’  $0 \leq \varphi < 1$  собственного значения  $\exp(2\pi i\varphi)$  унитарного оператора  $\mathbf{U}$ , соответствующего собственному вектору  $|u\rangle$ . Согласно [50, 76], это достигается с помощью двух регистров, в один из которых (второй) записывается вектор  $|u\rangle$ , на который действуют операторы  $\mathbf{U}^{2^{j-1}}$ ,  $j = 1, \dots, K$ , генерирующие фазы  $\exp(2\pi i 2^{j-1}\varphi)$ . Другой регистр (первый) состоит из  $K$  кубитов и производит желаемую оценку фазы следующим образом: все кубиты, первоначально находящиеся в состоянии  $|0\rangle_j$ , переводятся оператором Адамара в сбалансированные состояния  $(|0\rangle_j + |1\rangle_j)/\sqrt{2}$ . Контролируемый оператор  $\mathbf{U}^{2^{K-j}}$  между вторым регистром и  $j$ -м кубитом в первом регистре переводит кубит в состояние  $(|0\rangle_j + \exp(2\pi i 2^{K-j}\varphi)|1\rangle_j)/\sqrt{2}$ , создавая таким образом квантовый образ Фурье (мы разлагаем получившееся состояние по вычислительному базису и предполагаем, что фаза  $\varphi$  может быть представлена записью  $K$  двоичных цифр)

$$\mathbf{F}(|2^K\varphi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2^K}} \sum_k e^{2\pi i k\varphi} |k\rangle_Q \quad (5.1)$$

в первом регистре. Финальное обратное преобразование Фурье создает состояние  $|2^K\varphi\rangle_Q |u\rangle$ , а проективное измерение  $K$ -кубитного регистра в вычислительном базисе дает нам фазу  $\varphi$ ; для произвольной фазы  $0 < \varphi < 1$  мы получаем приближенное значение  $\varphi_{\text{dig}}$  фазы  $\varphi$ .

Сравнивая этот алгоритм с нашим устройством счета, мы устанавли-

ваем соответствие между действием  $n$  частиц, пролетающих по квантовой проволоке, с действием второго регистра в АОФ, сопоставляя  $|n\rangle_{\Phi} \leftrightarrow |u\rangle$ . Контролируемые операторы  $U^{2^j}$  в АОФ заменяются взаимодействием проволоки с кубитами: взаимодействие  $n$  частиц с последним ( $K$ -м) кубитом соответствует действию контролируемого оператора  $U$  в АОФ, следовательно,  $\varphi = n/2^K$ . Кубиты с  $j < K$  сильнее взаимодействуют с проволокой, что соответствует более высокой степени оператора  $U$  в АОФ; действительно, связь  $j$ -го кубита в  $2^{K-j}$  раз сильнее и его взаимодействие с частицами в проволоке соответствует действию оператора  $U^{2^{K-j}}$ . В итоге промежуточные состояния в уравнениях (4.6) и (5.1) соответствуют друг другу при отождествлении  $n/N = n/2^K \leftrightarrow \varphi$ . Конечные состояния соответствуют друг другу при отождествлении  $|n\rangle_Q |n\rangle_{\Phi} \leftrightarrow |2^K \varphi_{\text{dig}}\rangle_Q |u\rangle$ . Заметим, что наш алгоритм делимости не имеет аналогов в АОФ.

Эта аналогия позволяет нам воспользоваться преимуществами [50, 76] АОФ: если мы хотим измерить фазу  $\varphi$  в задаче оценки фазы с точностью  $1/2^A$  (т.е. закодировать  $\varphi$   $A$  битами) и быть уверенными в результате нашего измерения с вероятностью, по меньшей мере,  $P = 1 - \epsilon$ , то наше устройство должно содержать  $K = A + \lceil \log_2(2 + 1/2\epsilon) \rceil$  кубитов.

Этот результат может быть применен к нашему алгоритму счета. Рассмотрим случай прохождения нецелого числа  $x = n + \delta n$  через счетчик, где  $n$  - целое и  $0 < \delta n < 1$  - действительное число. Такая ситуация может возникнуть, если взаимодействие между частицами и кубитами останется конечным в момент старта процедуры считывания, что соответствует прохождению части полного заряда. Благодаря реализации полного квантового обратного преобразования Фурье, АОФ дает возможность измерить число с любой желаемой точностью. Например, если мы хотим измерить число

$n < N = 2^K$  так, чтобы  $|n_{\text{meas}} - x| < 1/2$  с вероятностью  $P = 1 - 2^{-r}$ , нам необходимо иметь возможность различать дробные заряды  $\delta n \sim 2^{-r} \ll 1$ , для чего мы должны использовать дополнительные кубиты для измерения половины заряда (поворачивающиеся на  $2\pi$  при прохождении одной частицы), четверти заряда (поворот на  $4\pi$ ), и т.д. В результате устройство должно содержать  $\approx K + \log_2(1/2^{-r}) = K + r$  кубитов. Этот результат может быть распространен на кудиты: точность  $P = 1 - d^{-r}$  обеспечивается  $\approx K + \log_d(1/d^{-r}) = K + r$  кудитами. Следовательно, мы можем использовать дополнительные кудиты для получения правильного численного результата с высокой вероятностью.

Рассмотрим далее полуклассическое обратное преобразование Фурье. Ниже мы покажем, что полуклассическая схема дает те же ответы, что и полная квантовая версия, хотя прохождение дробного заряда сильно влияет на условные измерения множества кубитов, т.е., для  $\delta n = 1/2$  измерение первого кубита дает произвольное направление для измерения второго кубита. Тем не менее, эта ошибка не распространяется через всю измерительную схему. Напротив, измерения последующих кубитов устраняют ошибки, полученные при измерении предыдущих кубитов. Формально это можно доказать, сравнивая две вероятности  $P_{\text{qF}}(n; x)$  (для полного квантового преобразования Фурье) и  $P_{\text{scF}}(n; x)$  (для полуклассического преобразования Фурье) найти целое число  $n$ , когда нецелое число  $x$  провзаимодействовало с кубитами.

Рассчитаем вероятность  $P_{\text{scF}}(n, x)$  получить целое число  $n = \sum_{j=1}^K n_j 2^{K-j}$  при измерении нецелого сигнала  $x$ . Вероятность  $p_1(n_K, x)$  того, что первый кубит даст величину  $n_K$  задается матричным элементом между состоянием кубита  $(|0\rangle_1 + e^{2\pi i x/2}|1\rangle_1)/\sqrt{2}$  и состоянием



$(|0\rangle_1 + e^{\pi i n_K} |1\rangle_1) / \sqrt{2}$  (т.е. проекцией на  $|+y\rangle_1$  для  $n_K = 0$  или проекцией на  $|-y\rangle_1$  для  $n_K = 1$ , см. Раздел 4.1)

$$p_1(n_K; x) = \frac{|( {}_1\langle 0| + e^{-\pi i n_K} {}_1\langle 1|)(|0\rangle_1 + e^{2\pi i x/2} |1\rangle_1)|^2}{4}. \quad (5.2)$$

Далее, условная вероятность измерения величины  $n_{K-1}$  для второго кубита дается произведением  $p_1(n_K; x)p_2(n_{K-1}, n_K; x)$ , где

$$p_2(n_{K-1}, n_K; x) = |({}_2\langle 0| + e^{-\pi i(n_{K-1} + n_K/2)} {}_2\langle 1|)(|0\rangle_2 + e^{2\pi i x/4} |1\rangle_2)|^2 / 4. \quad (5.3)$$

Перепишем первый множитель в выражении для  $p_2(n_{K-1}, n_K; x)$  в более простом виде

$$p_2(n; x) = \frac{|({}_2\langle 0| + e^{-2\pi i n/4} {}_2\langle 1|)(|0\rangle_2 + e^{2\pi i x/4} |1\rangle_2)|^2}{4}. \quad (5.4)$$

Простая итерация этой схемы дает окончательный результат для  $P_{\text{scF}}(n, x)$  в виде произведения

$$P_{\text{scF}}(n, x) = \prod_{j=1}^K p_j(n; x), \quad (5.5)$$

где

$$p_j(n, x) = \frac{|({}_j\langle 0| + e^{-2\pi i n/2^j} {}_j\langle 1|)(|0\rangle_j + e^{2\pi i x/2^j} |1\rangle_j)|^2}{4}. \quad (5.6)$$

Ур. (5.5) легко переписать в виде  $P_{\text{scF}}(n, x) = |{}_Q\langle \Psi_n | \Psi_x \rangle_Q|^2$ , используя обобщенные состояния счета

$$|\Psi_x\rangle_Q = \frac{1}{\sqrt{2^K}} \sum_{k=0}^{2^K-1} \exp(2\pi i x k / 2^K) |k\rangle_Q. \quad (5.7)$$

Представляя состояние счета  $|\Psi_n\rangle_Q$  как Фурье образ вычислительного состояния  $|n\rangle_Q$ ,  $|\Psi_n\rangle_Q = \mathbf{F}(|n\rangle_Q)$ , мы получаем результат  $P_{\text{scF}}(n, x) = |{}_Q\langle n | x \rangle_Q|^2$ , где  $|x\rangle_Q = \mathbf{F}^{-1}(|\Psi_x\rangle_Q)$  есть обратный Фурье образ

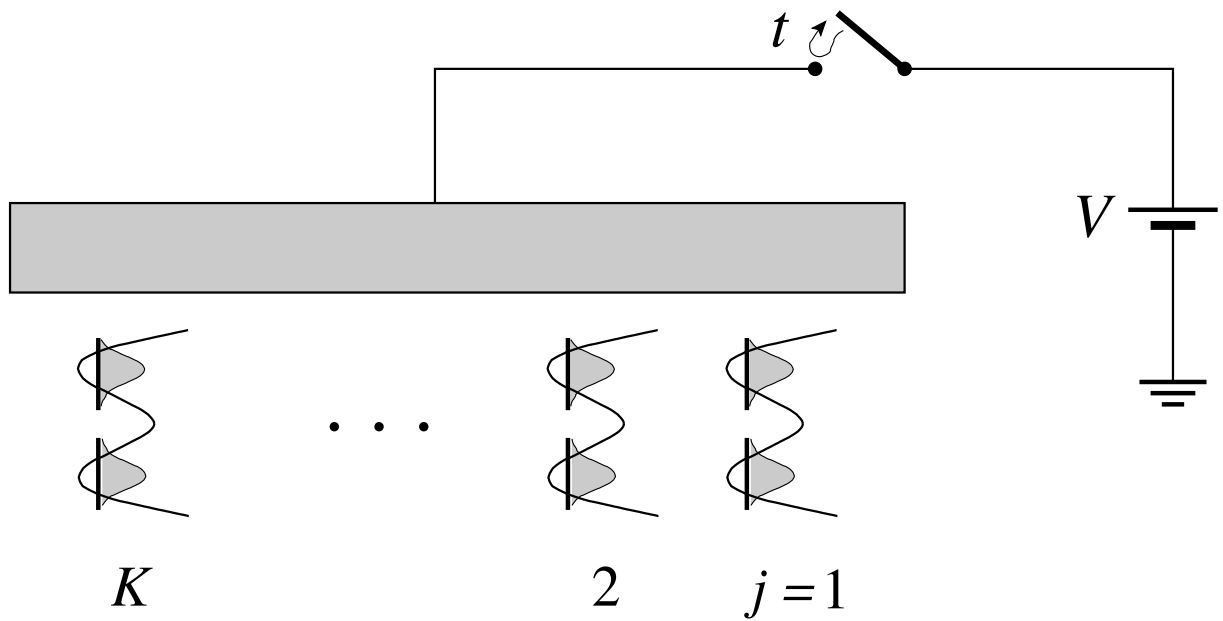
состояния счета. Последняя величина есть не что иное, как вероятность  $P_{\text{qF}}(n, x)$  найти число  $n$  при одиночном измерении кубитного регистра после применения обратного квантового преобразования Фурье состояния  $|\Psi_x\rangle_Q$ . Следовательно,  $P_{\text{scF}}(n, x) = P_{\text{qF}}(n, x)$ . Таким образом, мы показали, что полуклассическое и полное квантовое преобразования Фурье одинаково устойчивы относительно систематических ошибок, появляющихся при неполном (нецелом) счете. Более того, полуклассический алгоритм довольно устойчив относительно случайных ошибок; с последними можно справиться при помощи классической многокубитной схемы коррекции ошибок, см. [74].

## 5.2. Квантовая метрология: измерение напряжения

Приведенные выше соображения позволяют нам использовать наш прибор счета для измерения непрерывных величин. Понимание этого момента подготавливает почву для использования устройства в качестве квантового детектора напряжения, являющегося аналого-цифровым преобразователем (АЦП). Рассмотрим устройство, подобное представленному на Рис. 4.1, в котором проволоку заменили на конечный металлический объект, см. Рис. 5.1.

Предположим, что приложенное напряжение преобразуется в относительный сдвиг фазы  $\delta_K = \alpha_K eV$  ( $\delta_1 = \alpha_1 eV$ ) наиболее слабо (сильно) взаимодействующего кубита [являющегося кубитом  $j = K$  ( $j = 1$ )]. Тогда считывание массива кубитов после отключения напряжения даст нам двоичное число  $n$ , которое преобразуется в фазу  $\varphi$  согласно уравнению

$$\varphi = \frac{eVt}{\hbar} = \frac{2\pi}{\alpha_K} \frac{n}{2^K} = \frac{2\pi}{\alpha_1} \frac{n}{2}, \quad (5.8)$$



**Рис. 5.1.** Схема квантового вольтметра, в котором напряжение измеряется  $K$  кубитами. Напряжение  $V$ , подаваемое в течении фиксированного интервала времени  $t$ , генерирует фазу  $\varphi = eVt/\hbar$ , которая измеряется  $K$ -кубитным регистром и переводится в двоичное число.

при условии, что величина  $2\alpha_1 eVt/h$  может быть представлена целым числом. В общем случае произвольного  $Vt$  мы должны добавить дополнительные кубиты для получения численной оценки  $\varphi$ : для результата с относительной точностью  $1/2^K$  и с вероятностью лучшей, чем  $1-\epsilon$ , нам необходим измерительный прибор с  $K + \lceil \log_2(2 + 1/2\epsilon) \rceil$  кубитами.

Чувствительность нашего квантового АЦП повышается как  $1/t$ , где  $t$  есть время наблюдения, поскольку аккумулируемая фаза линейно растет со временем, а наиболее чувствительный кубит всегда разрешает фазы  $\pi$ . Следовательно, точность в  $1/\sqrt{t}$  раз выше, чем обычная классическая чувствительность, которая меняется как  $1/\sqrt{t}$ , и согласуется со стандартными ожиданиями [78]. В частности, при использовании алгоритма, описанного в Секции 2.1.2, для измерения напряжения  $V < V_{\max} = \pi \hbar/e\tau$  с точностью  $\delta V$ , нам либо потребуется  $M = (\pi/\phi)^2 = (V_{\max}/\delta V)^2$  кубитов, либо придется повторять эксперименты в течение времени  $t = M\tau$ , где  $\tau$  есть время измерения в индивидуальном эксперименте. Для желаемой точности  $\delta V$  мы получаем  $\delta V \sim \sqrt{\hbar V_{\max}/et}$ , т.е. точность повышается только как корень квадратный из полного времени измерения  $t$ , как и в классическом случае.

### 5.3. Многочастичное запутывание

Другим применением нашего устройства является получение многочастичных запутанных состояний при помощи интерферометра Маха-Цендера, см. Рис. 5.2. Запуская частицы в прибор через нижнее левое плечо, сплиттер создает суперпозицию состояний в двух плечах интерферометра; измерение счетчика у верхнего плеча и выбор определенного результа-

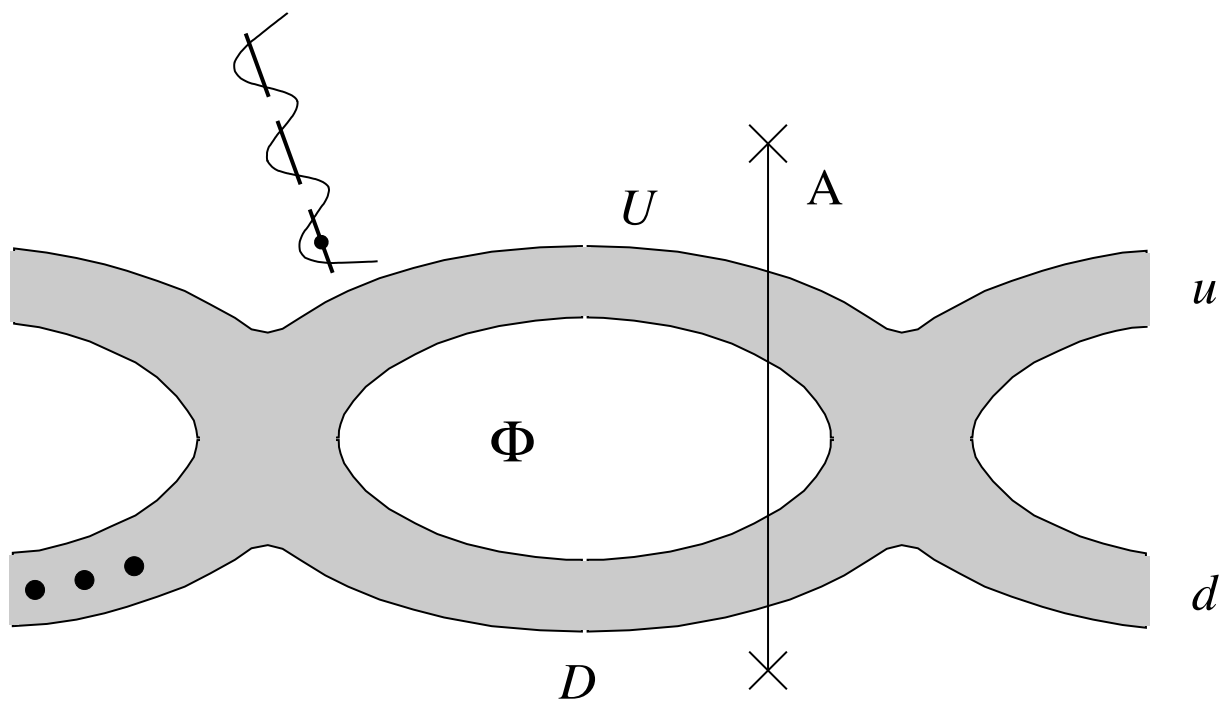
та проектирует систему на требуемое запутанное состояние. Работа такого устройства была подробно описана ранее в [74]. Здесь мы используем устройство с кутритами для создания GHZ (Гринберг-Хорн-Зайлингер) состояния [79] и подробного рассмотрения процесса перепутывания состояний счетчика и физических состояний в квантовой проволоке; обобщение на случаи с большим числом частиц и счетчиков следует за предыдущим обсуждением в [74].

Рассмотрим частицу, вошедшую в интерферометр Маха-Цендера через левый нижний канал и распространяющуюся вдоль одного из двух каналов  $U$  или  $D$ , см. Рис. 5.2. Волновая функция может распространяться вдоль двух траекторий: вдоль верхнего плеча  $U$ , где частица приобретает фазу  $\varphi_U$ , а счетчик активирован, или вдоль нижнего плеча  $D$ , приобретая фазу  $\varphi_D$  и оставляя счетчик в первоначальном состоянии. Полная волновая функция в точке A имеет вид

$$\Psi_{1A} = t e^{i\varphi_U} |\uparrow\rangle \otimes |\Psi_1\rangle + r e^{i\varphi_D} |\downarrow\rangle \otimes |\Psi_0\rangle, \quad (5.9)$$

где  $t$  и  $r$  - коэффициенты прохождения и отражения в сплиттере. Для описания распространения частиц вдоль двух каналов мы использовали обозначения на языке псевдо-спина: псевдо-спин  $\uparrow$  ( $\downarrow$ ) относится к частице, распространяющейся по верхнему (нижнему) плечу. Кутритное состояние зависит от траектории частицы и считывается как  $|\Psi_1\rangle$ , если частица прошла по верхнему плечу, или как  $|\Psi_0\rangle$ , если она прошла по нижнему плечу интерферометра.

Далее мы запускаем три частицы в петлю Маха-Цендера (МЗ) и полагаем, что три индивидуальные волновые функции, описывающие начальное состояние, хорошо разделены в пространстве, что в нашей геометрии (МЗ)



**Рис. 5.2.** Интерферометр Маха-Цендера с кутритным счетчиком. Частицы входят в интерферометр через нижнее левое плечо и измеряются справа. Кутритный счетчик на верхнем плече  $U$  детектирует прохождение частиц. Поток магнитного поля  $\Phi$  через петлю позволяет регулировать разность фаз частиц, распространяющихся по разным плечам.

позволяет игнорировать обменные эффекты. Волновая функция в точке А записывается как

$$\begin{aligned}
\Psi_{3A} = & [t^3 e^{3i\varphi_U} |\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle + r^3 e^{3i\varphi_D} |\downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle] \otimes |\Psi_0\rangle \\
& + tr^2 e^{i(\varphi_U+2\varphi_D)} [|\uparrow, \downarrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow, \downarrow\rangle \\
& + |\downarrow, \downarrow, \uparrow\rangle] \otimes |\Psi_1\rangle \\
& + t^2 r e^{i(2\varphi_U+\varphi_D)} [|\uparrow, \uparrow, \downarrow\rangle + |\uparrow, \downarrow, \uparrow\rangle \\
& + |\downarrow, \uparrow, \uparrow\rangle] \otimes |\Psi_2\rangle.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Будем считать, что сплиттер симметричен и его коэффициенты рассеяния имеют вид  $tt^* = 1/2$ ,  $r^2 = (-1)/2$ , и  $rt^* = \pm i e^{-i\varphi_t}/2$  (где  $\varphi_t$  - фаза коэффициента прохождения). Тогда проекция на состояние счетчика  $|\Psi_0\rangle$  дает нам GHZ-подобное состояние  $|\Psi_{\text{GHZ}}\rangle = (|\uparrow, \uparrow, \uparrow\rangle \mp i e^{3i(\varphi_D-\varphi_U-\varphi_t)} |\downarrow, \downarrow, \downarrow\rangle)/\sqrt{2}$ , а изменение потока  $\Phi$  в петле Маха-Цендера дает возможность реализовать требуемое перепутанное состояние. Более того, вид волновой функции из Ур. (5.10) проясняет запутывание между состояниями частиц и счетчика.

## 5.4. Обсуждение и выводы

Мы показали, что замена полного квантового обратного преобразования Фурье на полуклассическое обратное преобразование Фурье не приводит ни к каким затруднениям для алгоритма счета; это - важный результат как в отношении устойчивости алгоритма счета относительно систематических ошибок (нецелый счет), так и для его метрологического применения. Таким образом, оказалось, что полное квантовое преобразование Фурье может быть полностью заменено измерением в комбинации с условной операцией в полуклассической схеме. В обоих случаях нецелое считывание мо-

жет повлиять на несколько последних знаков искомого числа, не задевая первые знаки. Кроме того, добавление дополнительных кубитов (знаков) позволяет повысить точность на выходе физического устройства.

С точки зрения применения нашего устройства счета, мы обобщили схему многочастичного запутывания в интерферометре Маха-Цендера, а также предложили способ использовать счетчик в качестве квантового детектора напряжения, являющегося частным примером аналого-цифрового преобразователя. Мы можем предположить, что наша квантовая схема счета может быть распространена на другие алгоритмы измерений и оказаться полезной для других приложений в квантовой метрологии [78].



## Заключение

1. В работе был использован формализм волновых пакетов (первичного квантования) для описания полной статистики переноса заряда невзаимодействующими электронами в мезоскопических устройствах. Получены новые выражения для характеристической функции  $\chi_N(\lambda)$  полной статистики переноса фермионов в различных физических ситуациях. Такой подход к вычислению характеристической функции позволил учесть зависимость от энергии вероятности рассеяния, зависимость от времени в процессе рассеяния и счета частиц, а также обменные эффекты, обусловленные конечными перекрытиями волновых пакетов. Характеристическая функция была представлена в виде детерминанта, что позволило для различных случаев получить суббиномиальную статистику.
2. Подробно исследованы статистические свойства при рассеянии двух фермионов. Для незапутанных входящих состояний (Слэтеровский детерминант ранга 1) зависимость рассеяния от энергии сдвигает шум в суббиномиальный (или обобщенный биномиальный) режим. Было получено, что, благодаря обменным эффектам, вероятность прохождения двух фермионов может превысить 'классическое' значение для различимых частиц. Для запутанных двухчастичных состояний (сумма двух слэтеровских детерминантов, то есть состояние со слэтеровским детерминантом ранга 2) фактор Фано попадает в супербиномиальную или даже в суперпуассоновскую область. Учет спиновых степеней свободы приводит к интересному результату. Характеристические функции триплетных состояний совпадают с характеристиче-

скими функциями для слэтеровского детерминанта бесспиновых фермионов следовательно среднее число частиц  $\langle n \rangle_{1,m_s}$  и шум  $\langle \langle n^2 \rangle \rangle_{1,m_s}$  находятся внутри области суббиномиальной статистики. Синглетное запутанное состояние (с  $s = 0$ ) необязательно удовлетворяет этому условию. Скорее, наоборот, в случае равенства индивидуальных вероятностей прохождения для двух частиц,  $T_{11}^f = T_{22}^f$ , моменты и факторы Фано всегда находятся вне области обобщенной биномиальной статистики. Следовательно, такая довольно простая схема может быть использована для различения синглетного состояния от триплетных. Эти результаты были обобщены на случай  $N$  частиц.

3. Описан случай с постоянным напряжением, где учитывается зависимость рассеяния от энергии и рассматриваются конечные времена измерения, включая совсем короткие времена, на которых принцип запрета Паули становится более важен. Результаты, полученные при нулевой температуре, остаются верными при  $\beta^{-1} \ll \hbar v_F / \xi$ , то есть для достаточно узких волновых пакетов с малой шириной  $\xi$  в реальном пространстве. Более того, была вычислена производящая функция для случая постоянного напряжения в пределе большого времени измерения для любых температур. Для коротких времен измерения наши результаты верны при температурах  $\beta^{-1} \ll eV$  и мы нашли сильное подавление, обусловленное принципом запрета Паули.
4. Проанализирована простейшая схема, использующая спиновые счетчики для нахождения числа прошедших частиц. Получено, что такая схема нуждается в проведении  $\propto n^2$  измерений и поэтому требует больше ресурсов. Предложена схема, в которой несколько кубитов

служат детектором счета в задаче о полной статистике переноса заряда. Ключевым элементом алгоритма является специфическое физическое устройство из  $K$  кубитов, выполняющее неразрушающий счет  $n < N = 2^K$  частиц в потоке, проходящем по квантовой проволоке. Этот алгоритм оказывается аналогичным алгоритму оценки фазы в обращенном виде: вместо того, чтобы определять фазу  $\phi$  при помощи  $N$  операций, фаза  $\phi$  считается известной, а мы стремимся найти число  $N$  операций, ассоциированных с прохождением частиц. Схема содержит условные измерения, когда  $j$ -ое измерение зависит от результатов предыдущих  $j - 1$  измерений. Такая схема не требует полного квантового преобразования Фурье. Более простое одновременное (а не условное) измерение  $K$  кубитов позволяет определить степень двойки в разложении измеряемого числа на простые множители.

5. Сформулирована и решена задача счета в терминах проблемы различимости различных квантовых состояний при однократном измерении. Анализ схемы счета естественным образом приводит к обобщенному квантовому преобразованию Фурье как основной операции в невозмущающем процессе счета. Было показано, что гамильтониан взаимодействия счетчика с частицами должен иметь эквидистантный спектр. Тем не менее, была представлена схема счета, не использующая квантовое преобразование Фурье, однако эта альтернативная схема не обеспечивает "мягкого" счета.
6. Двоичный квантовый алгоритм счета и определение делимости на  $2^k$  был обобщен на троичный алгоритм и алгоритмы более высокого

порядка. Используемые в двоичном алгоритме кубиты должны быть заменены на кутриты для троичного алгоритма или кудиты для алгоритма порядка  $d$ . Исследованы различные возможности реализации этих алгоритмов, обращая особое внимание на случай считающих в троичном базисе систем, использующих кутриты в качестве элементарных считающих устройств. Представлены схемы эмуляции кутритов двумя кубитами, в которых используются двухкубитные операции. Двухкубитная операция в комбинации с однокубитными вращениями дает достаточное число степеней свободы для выполнения всех необходимых операций счета, приготовления состояния и обратного преобразования Фурье.

7. Установлена связь между квантовым алгоритмом счета и алгоритмом оценки фазы и показано, что замена полного квантового обратного преобразования Фурье на полуклассическое обратное преобразование Фурье не приводит ни к каким затруднениям для алгоритма счета; это - важный результат как в отношении устойчивости алгоритма счета относительно систематических ошибок (нецелый счет), так и для его метрологического применения. Таким образом, оказалось, что квантовое преобразование Фурье может быть полностью заменено условными измерениями в полуклассической схеме. В обоих случаях нецелое считывание может повлиять на несколько последних знаков искомого числа, не задевая первые знаки, кроме того, добавление дополнительных кубитов (знаков) позволяет повысить точность. Используя возможность точного измерения нецелых чисел, рассмотрена возможность создания квантового вольтметра, который измеряет на-

пряжение при помощи одного или нескольких зарядовых кубитов.

8. Предложен способ создания многокубитных запутанных состояний мобильных кубитов следующим образом - сначала они запутываются со спиновым счетчиком; а после проективного измерения состояний счетчика запутанное многокубитное состояние может использоваться дальше.

### Публикации по теме диссертации

1. *Hassler F., Suslov M. V., Graf G. M., Lebedev M. V., Lesovik G. B., Blatter G.* Wave-packet formalism of full counting statistics // *Phys. Rev. B.* — 2008. — October. — Vol. 78, no. 16. — P. 165330.
2. *Lesovik G. B., Suslov M. V., Blatter G.* Quantum counting algorithm and its application in mesoscopic physics // *Phys. Rev. A.* — 2010. — July. — Vol. 82, no. 1. — P. 012316.
3. *Suslov M. V., Lesovik G. B., Blatter G.* Quantum abacus for counting and factorizing numbers // *Phys. Rev. A.* — 2011. — May. — Vol. 83, no. 5. — P. 052317.

# Приложение А

## Сильная теорема Сегё

Сильная теорема Сегё применяется к матрицам Теплица и сводит вычисление асимптотического поведения их детерминантов к простому интегрированию (плюс суммирование). Мы определяем матрицу Теплица, начиная с комплекснозначной периодической функции  $a(\theta)$  с  $a(\theta + 2\pi) = a(\theta)$ . Кроме того, мы требуем, чтобы при изменении аргумента функции  $a(\theta)$  от 0 до  $2\pi$  комплексный вектор, соответствующий значению функции  $a(\theta)$ , не делал ни одного полного оборота. Мы определяем коэффициенты ряда Фурье

$$a_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} a(\theta) e^{-im\theta} \quad (\text{A.1})$$

и связанную с ними  $N \times N$  матрицу Теплица с элементами

$$[\mathbf{A}_N(a)]_{m,n} = a_{m-n}, \quad (\text{A.2})$$

зависящими только от разности индексов  $m$  и  $n$ ,  $m, n = 1, \dots, N$ . Сильная форма теоремы Сегё [21, 80] утверждает, что

$$\log \det \mathbf{A}_N(a) \quad (\text{A.3})$$

$$\sim N [\log a]_0 + \sum_{n=1}^{\infty} n [\log a]_n [\log a]_{-n}$$

при  $N \rightarrow \infty$ , где

$$[\log a]_n = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log[a(\theta)] e^{-in\theta} \quad (\text{A.4})$$

коэффициенты Фурье функции  $\log[a(\theta)]$ . Первый член в формуле (A.3), пропорциональный  $N$ , есть результат теоремы Сегё, тогда как сильная

форма теоремы применяется, если сумма во втором члене сходится. Эта поправка пропорциональна  $N^0$ .

Для матрицы Теплица  $\mathbf{X}^f = \mathbf{S}^f + (e^{i\lambda} - 1)\mathbf{T}^f$ , см. Ур. (1.56), мы показываем, как найти ее детерминант в асимптотическом пределе больших  $N$ . Расписывая матричные элементы

$$x_{m-n} = \int \frac{dk}{2\pi} |f(k)|^2 (1 - T_k + T_k e^{i\lambda}) e^{i(m-n)ka}, \quad (\text{A.5})$$

находим периодическую функцию  $x(\theta)$ , вычисляя ряд Фурье

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} x_m e^{im\theta} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[(\theta + 2\pi m)/a]|^2 \\ &\quad \times [1 - T_{(\theta+2\pi m)/a} + T_{(\theta+2\pi m)/a} e^{i\lambda}]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Заметим, что, хотя функция  $x(k) = |f(k)|^2 (1 - T_k + T_k e^{i\lambda})$  определена на всей действительной оси, новое выражение  $x(\theta = ak)$  определено в первой зоне Брилюэна  $k \in [0, 2\pi/a]$ . Делая преобразование Фурье логарифма  $x(\theta)$ , согласно уравнению (A.4), получаем асимптотическое выражение для детерминанта

$$\begin{aligned} \log \det \mathbf{X}_N^f &= N \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \log[x(\theta)] \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} n [\log x]_n [\log x]_{-n} + o(1), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

состоящее из главного члена  $\propto N$  и поправки, которая остается константой при  $N \rightarrow \infty$ . Логарифм детерминанта  $\mathbf{S}^f$  в уравнении (1.57) вычисляется, полагая  $T \equiv 0$  в (A.6). Окончательно получаем логарифм характеристической функции при помощи простого вычитания (мы заменяем угол  $\theta$  на

единичной окружности  $[0, 2\pi]$  на  $k = \theta/a$  в первой зоне Бриллюэна  $[0, 2\pi/a]$  с точностью до главного порядка по  $N$

$$\log \chi_N(\lambda) = Na \int_0^{2\pi/a} \frac{dk}{2\pi} \log(1 - \tau_k + \tau_k e^{i\lambda}), \quad (\text{A.8})$$

с эффективными вероятностями рассеяния

$$\tau_k = \frac{\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(k + 2\pi m/a)|^2 T_{k+2\pi m/a}}{\sum_{m \in \mathbb{Z}} |f(k + 2\pi m/a)|^2}. \quad (\text{A.9})$$

Для непрерывной на единичной окружности функции  $x(\theta)$ ,  $x(2\pi) = x(0)$ , сумма в (A.7) сходится и поправки к (A.8) при  $N \rightarrow \infty$  не зависят от  $N$  (аналогично для  $s(\theta) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |f[(\theta + 2\pi m)/a]|^2/a$  при вычислении  $\log \det \mathbf{S}_N^f$ ). Более сложная ситуация в случае, когда  $x(\theta)$  и/или  $s(\theta)$  терпят разрыв при переходе через зону Бриллюэна (гипотеза Фишера-Хартвига)[41]. Эта ситуация обычно имеет место в случае, когда волновая функция  $f(k)$  разрывна на поверхности Ферми  $k = 0$ . Таким образом, сумма в (A.7) расходится и следующий член в разложении (A.8) ведет себя как  $\log N$  (смотри также уравнение (1.99)),

$$\Delta \log \chi_N(\lambda) = \frac{\log^2[x(0^+)/x(0^-)] - \log^2[s(0^+)/s(0^-)]}{4\pi^2} \log N, \quad (\text{A.10})$$

а за ним следует постоянный член. Здесь число частиц  $N$  фиксировано и шум обусловлен разбиением частиц на группы; следовательно, логарифмические поправки (A.10) также обусловлены разбиением на группы (а не флуктуациями числа частиц, как в случае постоянного напряжения, см. Ур. (1.99)). Это также согласуется с исчезновением поправки (A.10) для  $T = 1$ , где  $x(\theta) = e^{i\lambda} s(\theta)$  и  $x(0^+)/x(0^-) = s(0^+)/s(0^-)$ .



## Приложение Б

### Вывод операторов $U_p$ и $M$ , используемых для эмуляции кутритов кубитами

Руководствуясь соображениями, изложенными в разделе 3.1, мы начнем с базиса счета, записанном в виде [мы берем сбалансированное состояние  $|\Psi_0\rangle$  и применяем оператор  $C_1$  из Ур. (4.42), чтобы получить остальные состояния базиса, с точностью до общей фазы]

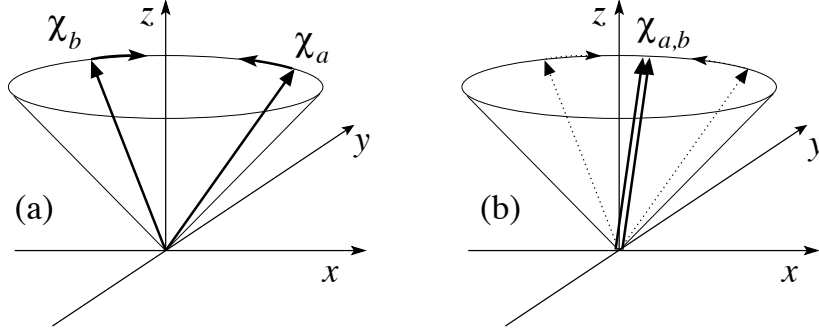
$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\rangle + e^{2\pi i/3}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{4\pi i/3}|\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|\uparrow\uparrow\rangle + e^{4\pi i/3}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{2\pi i/3}|\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\Psi_3\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle. \end{aligned} \tag{Б.1}$$

Эти состояния являются запутанными, тогда как состояния вычислительного базиса  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ ,  $|1\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$  и  $|2\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$  не запутаны. Это свойство может быть использовано для нахождения операторов  $U_p$  и  $M$  для приготовления и считывания.

Начнем с приготовляющего оператора: вместо того, чтобы искать оператор  $U_p$ , мы найдем обратный оператор  $U_p^{-1}$ , который распутывает состояние  $|\Psi_0\rangle$ . Для выполнения этой задачи мы имеем операторы  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_x^{(2)}$ ,  $\sigma_z^{(1)}$ ,  $\sigma_z^{(2)}$  и двухкубитный оператор  $\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}$ . Ниже мы будем использовать оператор условного вращения

$$U_\varphi \equiv \exp(-i\varphi \sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/4). \tag{Б.2}$$

Этот оператор сыграет решающую роль в распутывании состояний кубит-



**Рис. Б.1.** Действие  $U_\varphi$  при распутывании состояния. Векторы распутываемых компонент  $|\chi_{a,b}\rangle$  имеют один и тот же полярный угол  $\theta$ . Вращение на угол  $\varphi$  выстраивает оба вектора параллельно друг другу, если  $\varphi$  равно разнице азимутальных углов,  $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ .

тов. Рассмотрим общее (запутанное) двухкубитное состояние

$$|\phi\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\chi_a\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\chi_b\rangle_2 \quad (\text{Б.3})$$

с нормировкой  $\langle\phi|\phi\rangle = \langle\chi_a|\chi_a\rangle + \langle\chi_b|\chi_b\rangle = 1$ . Состояние  $|\phi\rangle$  не является запутанным тогда и только тогда, когда  $|\chi_a\rangle = \alpha|\chi_b\rangle$  или одно из состояний  $|\chi_a\rangle$ ,  $|\chi_b\rangle$  равно нулю. Действуя оператором  $U_\varphi$  на  $|\phi\rangle$ ,

$$U_\varphi|\phi\rangle = |\uparrow\rangle_1 e^{-i\varphi\sigma_z^{(2)}/4} |\chi_a\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 e^{i\varphi\sigma_z^{(2)}/4} |\chi_b\rangle_2, \quad (\text{Б.4})$$

мы находим, что  $U_\varphi$  распутывает  $|\phi\rangle$ , если  $\theta_a = \theta_b = \theta$  и  $\varphi = \varphi_b - \varphi_a$ , см. Рис. Б.1 (здесь углы  $\theta_{a,b}$  и  $\varphi_{a,b}$  задают направления второго спина, описываемого состояниями  $|\chi_{a,b}\rangle$ ). Более того, нам потребуется свойство оператора  $U_\varphi$  переводить произведение состояний  $|\psi\rangle_1 |\chi\rangle_2$  в произведение состояний, если  $|\psi\rangle_1$  или  $|\chi\rangle_2$  направлен вдоль оси  $z$ .

Чтобы найти оператор  $U_p^{-1}$ , распутывающий  $|\Psi_0\rangle$ , запишем это состояние в виде

$$|\Psi_0\rangle = |\uparrow\rangle_1 \frac{|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2}{\sqrt{3}} + \frac{|\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2}{\sqrt{3}}, \quad (\text{Б.5})$$

следовательно,  $|\chi_a\rangle_2 = (|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2)/\sqrt{3}$  и  $|\chi_b\rangle_2 = |\uparrow\rangle_2/\sqrt{3}$ . Последовательность операций, показанная на Рис. Б.2, распутывает состояние  $|\Psi_0\rangle$ , выстраивая векторы  $|\chi_a\rangle_2$  и  $|\chi_b\rangle_2$  вдоль диагонали в плоскости  $xy$ , после чего однокубитными операциями создается состояние  $|\psi\rangle_1|\uparrow\rangle_2$ , где

$$|\psi\rangle_1 = \sqrt{2/3}|\uparrow\rangle_1 + \sqrt{1/3}|\downarrow\rangle_1. \quad (\text{Б.6})$$

Далее однокубитными операторами  $\exp(-i\pi\sigma_z^{(1)}/4)$  и  $\exp(-i\theta\sigma_x^{(1)}/2)$  с  $\theta = 2\arctan(1/\sqrt{2})$  создаем вычислительное состояние  $|\uparrow\uparrow\rangle$  с точностью до фазы,  $U_p|\uparrow\uparrow\rangle = \exp(i\pi/4)|\Psi_0\rangle$ . Легко проверить, что эта последовательность операций дает оператор  $U_p$ , Ур. (4.44).

Конструирование обратного квантового преобразования Фурье  $M$ , необходимого для измерения, следует той же схеме, а именно, мы ищем оператор  $M$ , который распутывает состояния счѐта  $|\Psi_j\rangle$  и отображает  $|\Psi_2\rangle$  в  $|2\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$ ,  $|\Psi_1\rangle$  в  $|1\rangle = |\uparrow\downarrow\rangle$  и  $|\Psi_0\rangle$  в  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ . Это будет сделано за три последовательных шага:

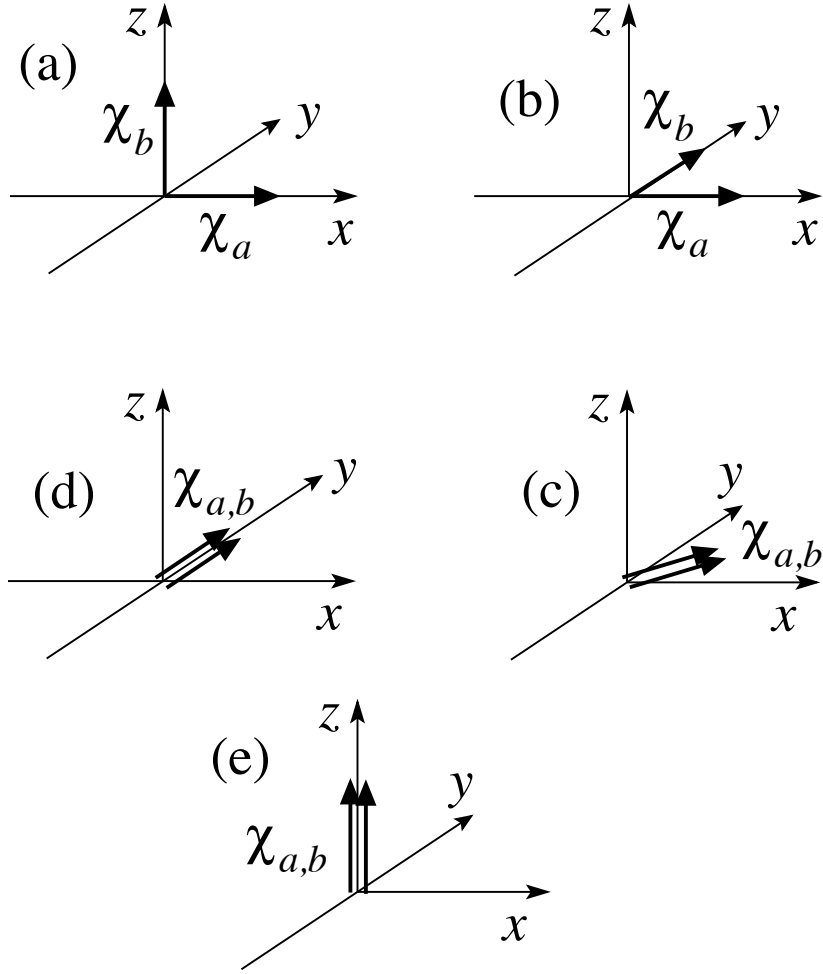
$$M = U_0U_1U_2, \quad (\text{Б.7})$$

где  $U_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  - соответствующие унитарные операторы, служащие для распутывания трех состояний счѐта  $|\Psi_j\rangle$ ,  $j = 0, 1, 2$  и производства вычислительных состояний  $|j\rangle$ ,  $j = 0, 1, 2$ .

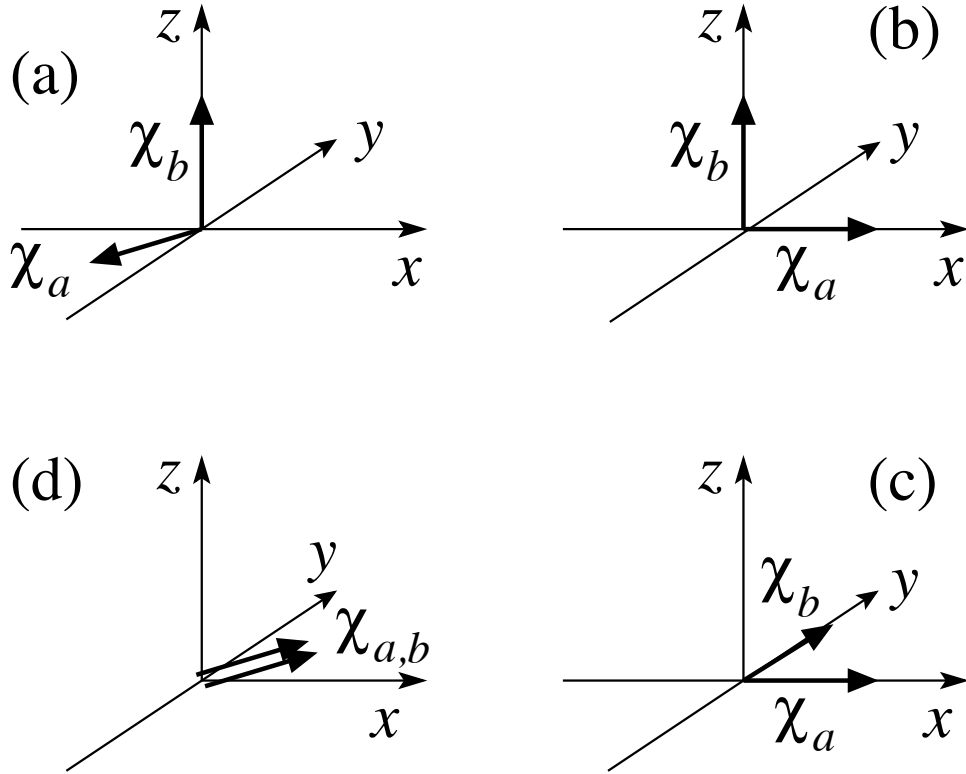
Начнем с распутывания  $|\Psi_2\rangle$ , которое запишем в виде

$$|\Psi_2\rangle = |\uparrow\rangle_1 \frac{|\uparrow\rangle_2 + e^{i4\pi/3}|\downarrow\rangle_2}{\sqrt{3}} + \frac{e^{i2\pi/3}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{3}} \quad (\text{Б.8})$$

и потребуем, чтобы оператор  $U_2$  распутал состояние  $|\Psi_2\rangle$ , оставляя четвертое состояние  $|\Psi_3\rangle$  неизменным (с точностью до фазы). Эта задача выпол-



**Рис. Б.2.** Вращения, генерирующие оператор  $U_p^{-1}$ ; показаны вращения, действующие на компоненты  $|\chi_a\rangle_2 \propto (|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2)$  и  $|\chi_b\rangle_2 \propto |\uparrow\rangle_2$  в  $|\Psi_0\rangle$ , см. Ур. (Б.5) (стрелки показывают поляризацию спиновых состояний). Первое вращение (a)  $\rightarrow$  (b) на  $-\pi/2$  вокруг  $x$ -оси направляет  $\chi_b$  вдоль  $y$ -оси. Последующее двухкубитное вращение  $U_{\pi/2}$ , см. (b)  $\rightarrow$  (c), выстраивает обе компоненты вдоль  $xy$ -диагонали; этот шаг распутывает состояние. Следующее вращение на  $\pi/4$  вокруг  $z$ -оси направляет оба состояния  $\chi_{a,b}$  вдоль  $y$ -оси, затем вращение на  $\pi/2$  вокруг  $x$ -оси выстраивает их параллельно  $z$ -оси. Окончательные два вращения кубита 1 (не показано) переводит состояние  $|\psi\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$  в состояние  $e^{-i\pi/4} |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ , совпадающее (с точностью до фазы) с состоянием счета  $|0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ .



**Рис. Б.3.** Вращения, генерирующие оператор  $U_2$ ; показаны вращения, действующие на компоненты  $|\chi_a\rangle_2 \propto (|\uparrow\rangle_2 + e^{i4\pi/3}|\downarrow\rangle_2)$  и  $|\chi_b\rangle_2 \propto |\uparrow\rangle_2$  в состоянии  $|\Psi_2\rangle$  кубита 2 в Ур. (Б.8) (стрелки показывают поляризацию спиновых состояний). Первое вращение (a)  $\rightarrow$  (b) на  $2\pi/3$  вокруг  $z$ -оси направляет компоненту  $\chi_a$  вдоль  $x$ -оси. Второе вращение на  $-\pi/2$  вокруг  $x$ -оси выстраивает  $\chi_b$  вдоль  $y$ -оси, см. (b)  $\rightarrow$  (c). Последующее двухкубитное вращение  $U_{\pi/2}$ , см. (c)  $\rightarrow$  (d), выстраивает обе компоненты вдоль  $xy$ -диагонали; этот шаг распутывает состояние. Наконец, вращения кубита 2 на  $\pi/4$  вокруг  $z$ -оси и на  $\pi/2$  вокруг  $x$ -оси завершают приготовление оператора  $U_1$  и возвращают спин 2 в направление вдоль  $z$ -оси. Состояние  $|\Psi_3\rangle$  только меняет фазу, тогда как состояния  $|\Psi_0\rangle$  и  $|\Psi_1\rangle$  остаются перепутанными, см. Ур. (Б.11).

няется оператором

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_2 &= e^{-i\pi\sigma_x^{(2)}/4} e^{-i\pi\sigma_z^{(2)}/8} e^{-i\pi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/8} \\
&\quad \times e^{i\pi\sigma_x^{(2)}/4} e^{-i\pi\sigma_z^{(2)}/3} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/3} & e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ e^{i2\pi/3} & e^{i\pi/3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}e^{-i\pi/3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}e^{i\pi/3} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{Б.9}$$

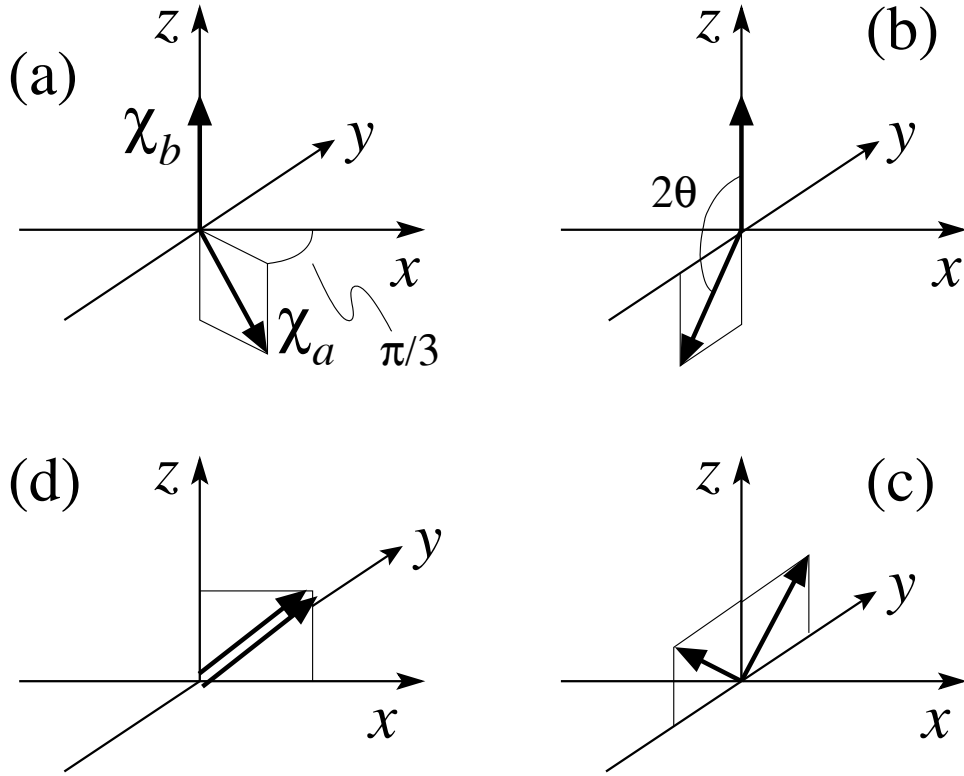
Два первые вращения готовят состояния  $|\chi_a\rangle_2$  и  $|\chi_b\rangle_2$ , чтобы затем двухкубитный оператор  $\mathbf{U}_{\pi/2}$  выстроил их в одну линию и тем самым распутал состояние, см. Рис. Б.3; последние однокубитные операторы, действующие на второй кубит, служат для приготовления состояния, на которое будет действовать оператор  $\mathbf{U}_1$ . Оператор  $\mathbf{U}_2$  оставляет состояние  $|\Psi_3\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$  параллельным самому себе,  $\mathbf{U}_2|\downarrow\downarrow\rangle = \exp(i\pi/3)|\downarrow\downarrow\rangle$ , и переводит  $|\Psi_2\rangle$  в произведение

$$\mathbf{U}_2|\Psi_2\rangle = \frac{(\sqrt{2}e^{-i\pi/3}|\uparrow\rangle_1 + e^{i\pi/3}|\downarrow\rangle_1)|\uparrow\rangle_2}{\sqrt{3}}. \tag{Б.10}$$

Два других состояния остаются запутанными:

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_2|\Psi_0\rangle &= \left( \frac{|\uparrow\rangle_1}{\sqrt{6}} + \frac{e^{-i\pi/3}|\downarrow\rangle_1}{\sqrt{3}} \right) |\uparrow\rangle_2 + \\
&\quad + \frac{e^{i\pi/2}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}, \\
\mathbf{U}_2|\Psi_1\rangle &= \left( \frac{e^{-i2\pi/3}|\uparrow\rangle_1 - |\downarrow\rangle_1}{\sqrt{6}} \right) |\uparrow\rangle_2 + \\
&\quad + \frac{e^{i5\pi/6}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{Б.11}$$

Заметим, что состояния первого кубита идентичны в обоих волновых функциях (вынося множитель  $e^{-2\pi i/3}$  в  $\mathbf{U}_2|\Psi_1\rangle$ ).



**Рис. Б.4.** Вращения, генерирующие оператор  $U_1$ ; показаны вращения, действующие на компоненты  $|\chi_a\rangle_1 \propto (|\uparrow\rangle_1/\sqrt{2} + e^{-i\pi/3}|\downarrow\rangle_1)$  и  $|\chi_b\rangle_1 \propto |\uparrow\rangle_1$  в состояниях  $U_2|\Psi_1\rangle$  и  $U_2|\Psi_0\rangle$  кубита 1, см. Ур. (Б.11) (стрелки показывают поляризацию спиновых состояний). Первое вращение (a)  $\rightarrow$  (b) на  $-\pi/6$  вокруг  $z$ -оси переводит компоненту  $|\chi_a\rangle$  в  $yz$ -плоскость. Второе вращение на  $-\theta$  вокруг  $x$ -оси располагает два состояния симметрично относительно  $z$ -оси, см. (b)  $\rightarrow$  (c). Последующее двухкубитное вращение  $U_\pi$ , см. (c)  $\rightarrow$  (d), переводит обе компоненты в  $xz$ -плоскость; этот шаг распутывает состояние. Наконец, вращение кубита 1 выстраивает его состояние вдоль  $z$ -оси.

Затем оператор  $U_1$ ,

$$U_1 = e^{-i\theta\sigma_x^{(1)}/2} e^{-i\pi\sigma_z^{(1)}/4} e^{-i\pi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/4} \quad (\text{Б.12})$$

$$\times e^{i\theta\sigma_x^{(1)}/2} e^{i\pi\sigma_z^{(1)}/12}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-i5\pi/12} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i\pi/12} & 0 \\ 0 & e^{i\pi/12} & 0 & 0 \\ \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-i11\pi/12} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}}e^{i5\pi/12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\pi/12} \end{pmatrix},$$

где  $\theta = \arctan(\sqrt{2})$ , переводит два оставшихся запутанных состояния  $U_2|\Psi_0\rangle$  и  $U_2|\Psi_1\rangle$  в произведение состояний

$$U_1U_2|\Psi_0\rangle = e^{-i5\pi/12} \frac{|\uparrow\rangle_1(|\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_2)}{\sqrt{2}}, \quad (\text{Б.13})$$

$$U_1U_2|\Psi_1\rangle = e^{i11\pi/12} \frac{|\uparrow\rangle_1(|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2)}{\sqrt{2}},$$

оставляя произведение состояний произведением состояний

$$U_1U_2|\Psi_2\rangle = e^{i3\pi/4} |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2, \quad (\text{Б.14})$$

$$U_1U_2|\Psi_3\rangle = e^{i\pi/4} |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2.$$

Действие (условных) вращений  $U_1$ , приводящих к распутыванию  $|\Psi_0\rangle$  и  $|\Psi_1\rangle$ , показано на Рис. Б.4.

Окончательно, оператор  $U_0$

$$U_0 = e^{-i\pi\sigma_x^{(2)}/4} e^{i\pi\sigma_z^{(2)}/8} e^{i\pi\sigma_z^{(1)}\sigma_z^{(2)}/8} \quad (\text{Б.15})$$

$$\times e^{i\pi\sigma_x^{(2)}/4}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$



действует как оператор Адамара на второй кубит, если первый кубит находится в состоянии  $|\uparrow\rangle_1$ , и оставляет второй кубит без изменений, если первый кубит находится в состоянии  $|\downarrow\rangle_1$ , следовательно,  $U_0$  является контролируемым оператором Адамара. Комбинированное действие  $M$  операторов  $U_2$ ,  $U_1$  и  $U_0$  переводит состояния счета в вычислительный базис

$$M|\Psi_0\rangle = e^{-i5\pi/12}|0\rangle, \quad (\text{Б.16})$$

$$M|\Psi_1\rangle = e^{i11\pi/12}|1\rangle,$$

$$M|\Psi_2\rangle = e^{i3\pi/4}|2\rangle,$$

$$M|\Psi_3\rangle = e^{i\pi/4}|3\rangle,$$

что и является искомым обратным преобразованием Фурье (с точностью до фаз).

## Список иллюстраций

1.1	Схема эксперимента . . . . .	20
1.2	Пространство параметров . . . . .	31
1.3	Транспорт $N$ частиц . . . . .	44
1.4	Фактор Фано . . . . .	61
1.5	Схема счета. Конечная температура . . . . .	67
2.1	Иллюстрация квантового алгоритма счета и записи числа частиц $n$ в двоичной форме . . . . .	76
2.2	Квантовый счет на примере 7 частиц . . . . .	79
2.3	Реализация алгоритма счета зарядовыми кубитами . . . . .	85
2.4	Проверка делимости с самоизмерением . . . . .	87
3.1	Иллюстрация счета, не использующего квантового преобразования Фурье . . . . .	97
3.2	Процесс счета и квантовые счета . . . . .	100
3.3	Спектр гамильтониана . . . . .	104
4.1	Схема реализации квантового алгоритма счета . . . . .	111
4.2	Кубит и кутрит . . . . .	119
4.3	Спин-1 кутрит . . . . .	136
4.4	Схема счета спин-1 кутритом . . . . .	138
4.5	Квантовое преобразование Фурье на триплетном секторе системы двух кубитов . . . . .	143
5.1	Квантовый вольтметр . . . . .	154
5.2	Интерферометр Маха-Цендера с кутритным счетчиком . . . . .	157

Б.1	Действие $U_\varphi$ при распутывании состояния . . . . .	169
Б.2	Вращения, дающие оператор $U_p^{-1}$ . . . . .	171
Б.3	Вращения, дающие оператор $U_2$ . . . . .	172
Б.4	Вращения, дающие оператор $U_1$ . . . . .	174

## Литература

- [1] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, JETP Lett. **58**, 230 (1993).
- [2] L.S. Levitov, H.W. Lee, and G.B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).
- [3] Yu.V. Nazarov, ed., *Quantum Noise in Mesoscopic Physics* (Kluwer Academic Publishers, 2003).
- [4] G.B. Lesovik, F. Hassler, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **96**, 106801 (2006).
- [5] A. Peres, Phys. Rev. A **30**, 1610 (1984).
- [6] Th. Martin and R. Landauer, Phys. Rev. B **45**, 1742 (1992).
- [7] H. Lee and L.S. Levitov, cond-mat/9507011 (1995).
- [8] D.A. Ivanov, H. Lee, and L.S. Levitov, Phys. Rev. B **56**, 6839 (1997).
- [9] A.V. Lebedev, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. B **72**, 245314 (2005).
- [10] J. Keeling, I. Klich, and L.S. Levitov, Phys. Rev. Lett. **97**, 116403 (2006).
- [11] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D.C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne, and Y. Jin, Science **316**, 1169 (2007).
- [12] F. Hassler, G.B. Lesovik, and G. Blatter, Phys. Rev. Lett. **99**, 076804 (2007).
- [13] J. Schliemann, J.I. Cirac, M. Kuś, M. Lewenstein, and D. Loss, Phys. Rev. A **64**, 022303 (2001).

- [14] F. Taddei and R. Fazio, Phys. Rev. B **65**, 075317 (2002).
- [15] K.E. Cahill and R.J. Glauber, Phys. Rev. A **59**, 1538 (1999).
- [16] R.J. Glauber, in *Quantum Optics and Electronics*, edited by C. DeWitt, A. Blandin, and C. Cohen-Tannoudji (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [17] S. Braungardt, A. Sen(De), U. Sen, R.J. Glauber, and M. Lewenstein, arXiv:0802.4276 (2008).
- [18] G. Burkard, D. Loss, and E.V. Sukhorukov, Phys. Rev. B **61**, R16303 (2000).
- [19] K. Schönhammer, Phys. Rev. B **75**, 205329 (2007).
- [20] G. Szegő, Math. Ann. **76**, 490 (1915).
- [21] G. Szegő, Comm. Sém. Math. Univ. Lund pp. 228–238 (1952).
- [22] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, JETP Lett. **55**, 555 (1992).
- [23] G.B. Lesovik and N.M. Chtchelkatchev, JETP Lett. **77**, 393 (2003).
- [24] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, cond-mat/9401004 (1994).
- [25] I. Neder and F. Marquardt, New J. Phys. **9**, 112 (2007).
- [26] D.V. Averin and E.V. Sukhorukov, Phys. Rev. Lett. **95**, 126803 (2005).
- [27] B.A. Muzykantskii and Y. Adamov, Phys. Rev. B **68**, 155304 (2003).
- [28] A. Shelankov and J. Rammer, Europhys. Lett. **63**, 485 (2003).
- [29] J.E. Avron, S. Bachmann, G.M. Graf, and I. Klich, Commun. Math. Phys. **280**, 807 (2008).

- [30] C.C.J. Roothaan, *Rev. Mod. Phys.* **23**, 69 (1951).
- [31] R. Courant and D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, 4th edition (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993).
- [32] M.V. Lebedev, A.A. Shchekin, and O.V. Misochko, *Quantum Electron.* **38**, 710 (2008).
- [33] A.G. Abanov and D.A. Ivanov, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 086602 (2008).
- [34] M.J.M. de Jong and C.W.J. Beenakker, *Phys. Rev. B* **49**, 16070 (1994).
- [35] F. Bodoky, W. Belzig, and C. Bruder, *Phys. Rev. B* **77**, 035302 (2008).
- [36] I. Klich, in Ref. [3].
- [37] B.A. Muzykantskii and D.E. Khmelnitskii, *Phys. Rev. B* **50**, 3982 (1994).
- [38] Yu.V. Nazarov and D.A. Bagrets, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 196801 (2002).
- [39] S. Pilgram and M. Büttiker, *Phys. Rev. B* **67**, 235308 (2003).
- [40] R.J. Brown, M.J. Kelly, M. Pepper, H. Ahmed, D.G. Hasko, D.C. Peacock, J.E.F. Frost, D.A. Ritchie, and G.A.C. Jone, *J. Phys.: Condens. Matter* **1**, 6285 (1989).
- [41] E.L. Basor, *Indiana Univ. Math. J.* **28**, 975 (1979).
- [42] W. Schottky, *Ann. Phys. (Leipzig)* **57**, 541 (1918).
- [43] A.I. Baz', *Sov. J. Nucl. Phys.* **4**, 182 (1967).
- [44] V.F. Rybachenko, *Sov. J. Nucl. Phys.* **5**, 635 (1967).

- [45] L.S. Levitov and G.B. Lesovik, cond-mat/9401004 (1994);
- [46] M. Brune, S. Haroche, V. Lefevre, J.-M. Raimond, and N. Zagury, Phys. Rev. Lett. **65**, 976 (1990).
- [47] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J.-M. Raimond, and S. Haroche, Nature **448**, 889 (2007).
- [48] L.S. Levitov, H.W. Lee, and G.B. Lesovik, J. Math. Phys. **37**, 4845 (1996).
- [49] S. Gustavsson, R. Leturcq, B. Simovic, R. Schleser, T. Ihn, P. Studerus, K. Ensslin, D.C. Driscoll, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **96**, 076605 (2006).
- [50] M.A. Nielsen and I.L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, 2000).
- [51] L.K. Grover, Proceedings of the 28-th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, (May 1996) p. 212.
- [52] P. Shor, Proceedings of the 35-th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, NM (1994) and SIAM, J. Sci. Statist. Comput. **26** 1484 (1997).
- [53] C.H. Bennett and G. Brassard, Proceedings IEEE Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York, 1984), p. 175.
- [54] D. Stucki, N. Gisin, O. Guinnard, G. Ribordy, and H. Zbinden, New Journal of Physics **4**, 41.1 (2002); see also [www.idquantique.com](http://www.idquantique.com).

- [55] M. Dobsicek, G. Johansson, V. Shumeiko, and G. Wendin, Phys. Rev. A **76**, 030306 (2007).
- [56] A.Y. Kitaev, Russ. Math. Surv. **52**, 1191 (1997).
- [57] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, and M. Mosca, Proc. R. Soc. Lond. A **454**, 339 (1998).
- [58] E. Andersson and D.K.L. Oi, Phys. Rev. A **77**, 052104 (2008).
- [59] W.K. Wootters and W.H. Zurek, Nature **299**, 802 (1982).
- [60] D. Dieks, Physics Letters A **92**, 271 (1982).
- [61] T. Hayashi, T. Fujisawa, H.D. Cheong, Y.H. Jeong, and Y. Hirayama, Phys. Rev. Lett. **91**, 226804 (2003).
- [62] J.R. Petta, A.C. Johnson, C.M. Marcus, M.P. Hanson, and A.C. Gossard, Phys. Rev. Lett. **93**, 186802 (2004).
- [63] J. Gorman, D.G. Hasko, and D.A. Williams, Phys. Rev. Lett. **95**, 090502 (2005); see also the comment/reply in *ibid* **97**, 208901 (2006).
- [64] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, M.H. Devoret, Science **296**, 886 (2002).
- [65] J. Koch, T.M. Yu, J. Gambetta, A.A. Houck, D.I. Schuster, J. Majer, A. Blais, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, Phys. Rev. A **76**, 042319 (2007).
- [66] J.A. Schreier, A.A. Houck, J. Koch, D.I. Schuster, B.R. Johnson, J.M. Chow, J.M. Gambetta, J. Majer, L. Frunzio, M.H. Devoret, S.M. Girvin, and R.J. Schoelkopf, Phys. Rev. B **77**, 180502 (2008).



- [67] Alexandre Blais, private communication.
- [68] J. Keeling, I. Klich, and L.S. Levitov, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 116403 (2006).
- [69] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D.C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne, and Y. Jin, *Science* **316**, 1169 (2007).
- [70] C. D’Helon and G.J. Milburn, *Phys. Rev. A* **54**, 5141 (1996).
- [71] P. Shor, in *Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, edited by S. Goldwasser (IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, 1994), pp. 124-134; *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* **26**, 1484 (1997); *SIAM Rev.* **41**, 303 (1999).
- [72] S. Bose and D. Home, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 050401 (2002).
- [73] C.W.J. Beenakker, D.P. DiVincenzo, C. Emary, and M. Kindermann, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 020501 (2004).
- [74] G.B. Lesovik, M.V. Suslov, and G. Blatter, *Phys. Rev. A* **82**, 012316 (2010).
- [75] R.B. Griffiths and C.-S. Niu, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3228 (1996).
- [76] R. Cleve, A. Ekert, C. Macchiavello, M. Mosca, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **454**, 339 (1998).
- [77] A.Y. Kitaev, quant-phys/9511026, 1995 and Electronic Colloquium on Computational Complexity (ECCC) TR96-003.
- [78] V. Giovannetti, S. Lloyd, and L. Maccone, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 010401 (2006).

- [79] D.M. Greenberger, M.A. Horne, and A. Zeilinger, in *Bell's Theorem, Quantum Theory, and Conceptions of the Universe*, M. Kafatos (Ed.) (Kluwer, Dordrecht, 1989), 69-72; see also arXiv:0712.0921v1.
- [80] B. Simon, in *Geometry, Spectral Theory, Groups, and Dynamics*, vol. 387 of *Contemporary Mathematics*, pp. 253–275 (American Mathematical Society, Providence, 2005).