

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Труханова Мария Ивановна

Спиновые и поляризационные эффекты в квантовых системах
многих взаимодействующих частиц

01.04.02–теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
профессор Кузьменков Л. С.

Москва – 2014

Оглавление

Введение	5
1 Электрические диполи в современных исследованиях	16
2 Квантовая гидродинамика систем многих взаимодействующих частиц с электрической дипольной поляризацией	23
2.1 Постановка задачи	23
2.2 Континуальная модель	24
2.3 Уравнение баланса импульса	26
2.4 Уравнение эволюции поляризации и потока поляризации . . .	29
3 Возбуждение волн поляризации в различных средах	35
3.1 Собственные волны в системах поляризованных нейтральных частиц	35
3.2 Собственные волны в двумерной системе заряженных частиц с электрическим дипольным моментом	40
3.3 Собственные волны в системах поляризованных заряженных частиц двух сортов	44
3.4 Влияние поляризации на дисперсионные характеристики двумерных полупроводников	48
3.5 Возбуждение волн поляризации пучком нейтральных поляризованных частиц	49
3.6 Возбуждение волн поляризации пучком электронов	51
3.7 Выводы	56

4	Спиновые эффекты в различных средах	60
5	Квантовая гидродинамика системы многих взаимодействующих частиц со спинами	68
5.1	Постановка задачи	68
5.2	Теория Паули системы многих частиц	69
5.3	Введение поля скоростей	73
5.4	Классическая завихренность	77
5.5	Уравнение баланса энергии	77
5.6	Приближении самосогласованного поля	82
5.7	Система континуальных уравнений квантовой гидродинамики спиновой плазмы	84
6	Спиновые эффекты в различных средах	90
6.1	Влияние спина на электромагнитные волны в квантовой спиновой плазме	90
6.1.1	Волны параллельные внешнему магнитному полю	93
6.2	Циркулярно-поляризованные электромагнитные волны в спиновой плазме	99
6.2.1	Линейный предел	103
6.3	Эффекты кулоновских обменных взаимодействий в электрон-ионной плазме	104
6.3.1	Электромагнитные волны в электрон-ионной плазме с обменным взаимодействием	106
6.3.2	Влияние кулоновских обменных взаимодействий на волны Ленгмюра	106
6.3.3	Влияние кулоновских обменных взаимодействий на волны в неизотермической замагниченной плазме	107
6.3.4	Низкочастотные электромагнитные колебания в замагниченной плазме	112

6.4 Основные выводы	117
Заключение	119
Литература	124

Введение

Актуальность

Метод квантовой гидродинамики позволяет исследовать поведение систем многих взаимодействующих частиц, благодаря переходу от описания в конфигурационном пространстве к описанию в реальном физическом пространстве, приводящем к представлению наблюдаемых физических величин через полевые функции различной тензорной размерности. Используя многочастичное уравнение Шредингера и основные принципы квантовой механики, метод квантовой гидродинамики открывает возможность получить замкнутую систему уравнений, учитывающую возможные взаимодействия в среде: уравнения баланса числа частиц, баланса импульса и эволюции энергии, а так же уравнения динамики намагниченности и электрической поляризации. Разрабатываемый метод позволяет исследовать свойства квантовых систем, благодаря появлению в уравнениях квантовой гидродинамики дополнительных слагаемых, имеющих исключительно квантовую природу. Кроме того, метод даёт возможность учитывать механизмы релаксации импульса, энергии и спина. Подход квантовой гидродинамики может быть применён для развития теоретического аппарата, захватывающего обширный спектр физических систем. В первую очередь, - это классическая и квантовая плазма, металлические и полупроводниковые структуры, двумерные структуры, в том числе магнитные и дипольные плёнки. Метод позволяет затрагивать задачи в совершенно разных областях науки, начиная от исследования биофизических процессов в биологических структурах, заканчивая задачами спинтроники.

Цели и задачи работы

Первой основной целью диссертационной работы является вывод уравнений квантовой гидродинамики с самосогласованным электромагнитным полем из многочастичного уравнения Шредингера с гамильтонианом, учитывающим диполь-дипольные, кулоновские и заряд-дипольные взаимодействия. Второй целью работы является применение полученной теоретической модели для расчета волн в системах многих частиц во внешнем электрическом поле. Третьей основной целью работы является вывод уравнений магнитной квантовой гидродинамики из многочастичного уравнения Шредингера с гамильтонианом, учитывающим спин-спиновые взаимодействия, а также применение полученной системы уравнений квантовой гидродинамики для расчёта волн в системах многих взаимодействующих частиц с собственными магнитными моментами во внешних полях.

Научная новизна

В диссертационной работе

1. *Впервые* дан строгий вывод системы уравнений квантовой гидродинамики частиц с собственными электрическими дипольными моментами из многочастичного уравнения Шредингера, содержащего информацию о кулоновских, диполь-дипольных и заряд-дипольных взаимодействиях. *Впервые* получены уравнения баланса импульса, эволюции поляризации и уравнение динамики потока поляризации, в которых присутствуют вклады диполь-дипольных и заряд-дипольных взаимодействий в среде. В уравнениях учитывается влияние квантового потенциала Бома. Рассмотрено приближение самосогласованного поля.
2. Для различных квантовых систем дипольных частиц, находящихся в постоянном однородном электрическом поле, в рамках единого формализма, получены законы дисперсии, в том числе *впервые* предсказано существование нового типа волн, связанных с возмущением поляризации частиц среды.

- *Впервые* рассмотрены собственные волны в двумерной системе поляризованных нейтральных частиц, наделенных собственными дипольными моментами, в качестве которой взят газ молекул оксида азота *NO*. *Впервые* предсказано существование устойчивой волны поляризации, не сопровождающейся возмущениями концентрации числа частиц и потоковых скоростей.
 - Рассмотрены собственные волны в двумерной системе заряженных частиц с электрическими дипольными моментами. *Впервые* предсказан вклад поляризации в дисперсию двумерных ленгмюровских и ионно-звуковых волн. *Впервые* установлено наличие новой неустойчивой волны поляризации в системе заряженных частиц.
 - Путем решения и анализа уравнений квантовой гидродинамики системы частиц с собственными дипольными моментами *впервые* рассмотрено возбуждение волн поляризации пучком нейтральных поляризованных частиц, а так же пучком электронов. Получена неустойчивость, вызванная потоками заряженных и нейтральных поляризованных частиц.
3. Произведен вывод уравнений квантовой гидродинамики систем многих частиц со спинами из многочастичного уравнения Паули. Получены уравнения баланса импульса, эволюции намагниченности и баланса энергии, а так же уравнение динамики завихренности, *впервые* учитывающие влияние коллективных спиновых эффектов, - спинового напряжения и спинового углового момента. Уравнение баланса энергии и динамики завихренности учитывают процессы, связанные с тепловыми флуктуациями спинов частиц.
 4. На основе системы уравнений квантовой гидродинамики многих взаимодействующих частиц со спинами:

- Рассмотрена задача об исследовании электромагнитных волн в плотной квантовой системе заряженных частиц с собственными магнитными моментами, в качестве которой выбрана среда неподвижных ионов и электронов. В рамках единого формализма, на основе двумерной системы уравнений квантовой гидродинамики, *впервые* предсказано влияние спинового углового момента, тока намагниченности и энергии намагниченности на дисперсию электромагнитных волн. *Впервые* предсказано существование новой волны с пространственной дисперсией и частотой выше циклотронной частоты спиновой прецессии.
- Исследована динамика электромагнитных волн с круговой поляризацией, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. *Впервые* получено уравнение, описывающее нелинейную динамику векторного потенциала, учитывающего помимо силы Лоренца вклад квантовой силы, обусловленной существованием квантовым потенциалом Бома, силы, возникающей из энергии намагниченности среды, а также спинового натяжения и спинового углового момента. Находится решение приведенной системы уравнений в приближении малых амплитуд колебаний.
- Для плотной квантовой электрон-ионной плазмы *впервые* решена задача об исследовании влияния эффектов кулоновского обменного взаимодействия на динамику ленгмюровских, ионно-звуковых и магнито-звуковых волн.

Объект исследования

В диссертации построена теоретическая модель систем многих заряженных и нейтральных частиц, обладающих собственными электрическими дипольными моментами. В качестве примера таких систем выступает обширный спектр сред, частицы которых обладают собственными диполь-

ными моментами или способны индуцировать дипольные моменты в присутствии внешних электрических полей. В первую очередь, это физические среды, - сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики и пьезоэлектрики, сегнетоэлектрические жидкие кристаллы, двумерные дипольные пленки, в том числе и графен, двумерный ионный газ на поверхности металла, двумерные ионные нано-кристаллы и металлические кластеры. К системам с поляризацией так же относятся почти все биологические структуры и ткани, - поверхности биологических мембран клеток, а так же липидные и белковые бислои. Запись информации на нейроны и функционирование кровеносных сосудов основаны на электрической поляризации. Недавно особый интерес возник к экспериментальным исследованиям ультра-холодной $\sim 5K$ долгоживущей (> 0.3 мс) сильно-связанной Ридберговской плазмы, состоящей из электронов и ионов оксида азота NO^+ , обладающих весьма значительными дипольными моментами.

Так же в диссертации усовершенствована система уравнений квантовой гидродинамики фермионов, обладающих собственными магнитными моментами. В качестве физических систем, находящихся в фокусе исследования, выступает плотная плазма и плазменноподобных системы заряженных и нейтральных частиц, наделенных собственными магнитными моментами, в том числе и астрофизическая плазма. Развитый теоретический аппарат позволяет исследовать волновые линейные и нелинейные процессы, свойства турбулентности и нелинейные структуры в квантовых системах частиц со спинами.

Метод исследования

В диссертации разрабатывается метод квантовой гидродинамики, позволяющий исследовать физические коллективные неравновесные свойства квантовых систем с помощью многочастичного уравнения Шредингера, включающего спиновые переменные, и определения операторов плотности числа

частиц, магнитных моментов, дипольных моментов, плотности тока и потока магнитного момента, плотности дипольного момента и плотности потока дипольного момента, а так же плотности завихренности.

Достоверность научных положений

Результаты диссертации, полученные с помощью строгих математических методов аппарата квантовой гидродинамики, являются достоверными и обоснованными, поскольку они базируются на твёрдо установленных и экспериментально проверенных положениях квантовой теории, содержат основные результаты этой теории для отдельных частиц и согласуются с классической электродинамикой сплошных сред, а так же обобщают ранее полученные результаты гидродинамики магнитных сред.

Область применения результатов

В первую очередь, результаты диссертационной работы могут быть использованы для моделирования сред, учитывающих эффект ориентации собственных электрических дипольных моментов, например, в процессах передачи информации, не сопровождающихся возмущениями плотности числа частиц и потоковых скоростей. Результаты, полученные в работе, могут быть использованы для исследования магнитных свойств металлов и магнитной плазмы, например, при определении их магнитной восприимчивости, а так же в задачах спинтроники, для расчётов конкретных физических устройств и приборов.

Научные положения выносимые на защиту

1. Из многочастичного уравнения Шредингера, с нерелятивистским гамильтонианом взаимодействий, учитывающим кулоновские, диполь - дипольные и заряд - дипольные взаимодействия в среде заряженных и нейтральных диполей, дан строгий вывод уравнений квантовой гидродинамики. Получены уравнения непрерывности, уравнение баланса импульса, уравнение эволюции поляризации и потока поляризации, содержащие информацию о неравновесных процессах с указанными взаимодействиями. Рассмотрено приближение самосогласованного поля.
2. Рассмотрены волны в квантовых системах частиц с поляризацией. Для двумерных квантовых систем многих заряженных частиц с собственными дипольными моментами, помещённых в постоянное однородное электрическое поле, в рамках единого формализма, получены решения уравнений квантовой гидродинамики в виде звуковых, ленгмюровских и поляризационных волн. Рассмотрены волны в одномерных, двумерных и трёхмерных системах нейтральных частиц, а также получена неустойчивость, вызванная потоками заряженных и нейтральных поляризованных частиц.
3. Для квантовых систем многих взаимодействующих частиц со спинами внесены существенные дополнения в пяти - моментное приближение. На основе метода квантовой гидродинамики получен вклад квантовой и спиновой части тензора плотности потока энергии, потока намагниченности и плотности потока импульса в уравнения баланса импульса, баланса энергии, уравнение динамики намагниченности и эволюции завихренности. Для плотной квантовой плазмы, получен аналитический

вклад спиновых, квантовых и обменных эффектов в законы эволюции различных типов волн.

Список публикаций

1. P. A. Andreev, L. S. Kuz'menkov, M. I. Trukhanova, *A quantum hydrodynamics approach to the formation of new types of waves in polarized two-dimension systems of charged and neutral particles*// Phys. Rev. B. - 2011. - v. **84**. - P. 245401.
2. П. А. Андреев, Л.С. Кузьменков, М. И. Труханова., *Дисперсия двумерного газа заряженных и нейтральных частиц с дипольным электрическим моментом. Метод квантовой гидродинамики.*// Динамика сложных систем. - 2010. - Т. **4**. - № 1. - С. 32.
3. Trukhanova M. Iv., *Quantum Hydrodynamics Approach to The Research of Quantum Effects and Vorticity Evolution in Spin Quantum Plasmas*// Progress of Theoretical and Experimental Physics. - 2013. - v. **2013**. - P. 111I01.
4. Trukhanova M. I., *Spin and polarization Waves in a System of Paramagnetic Particles with an Intrinsic Dipole Moment*, Russia Nano and Giga Challenges in Electronics, Photonics and Renewable Energy Symposium and Summer School, 2011 Moscow - Zelenograd.
5. Trukhanova M. Iv., *Effects of spin-orbital coupling on the propagation of whistler waves in the magnetized plasma*// The European Physical Journal D. - 2013. - v. **67**. - Issue 2.
6. Trukhanova M. I., *Spin and polarization Waves in a System of Paramagnetic Particles with an Intrinsic Dipole Moment*// Int. J. Mod. Phys. B. - 2011. - v. **26**. - №. 01. - P. 1250004.

7. Mariya Iv. Trukhanova, Kuz'menkov L. S., *Spin effects in the quantum many-particles systems*// arXiv:1403.2981v2.
8. Mariya Iv. Trukhanova, Pavel A. Andreev, *Exchange effects in magnetized quantum plasmas*// arXiv:1405.6294.
9. М. И. Труханова, *О динамике дипольного момента в двумерных системах частиц*// XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов 2010".
10. Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Trukhanova M. I., *Waves of polarization and methods of their generation*// XLVIII All-Russian conference on problems of particle physics, plasma and condensed matter physics, optoelectronics dedicated to 100th Anniversary of Professor Ya. P. Terletskii, May 15-18, Moscow, Russia, 2012.
11. М. И. Труханова, *Спиновые и спин-орбитальные эффекты в распространении вистлеров в квантовой астрофизической плазме*// XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов 2013".

Апробация результатов

Результаты докладывались на международных конференциях "Ломоносов 2010", "Ломоносов 2013", Russia Nano and Giga Challenges in Electronics, Photonics and Renewable Energy Symposium and Summer School, 2011 Moscow - Zelenograd, XLVIII All-Russian conference on problems of particle physics, plasma and condensed matter physics, optoelectronics dedicated to 100th Anniversary of Professor Ya. P. Terletskii.

Личный вклад

Автор принял основополагающее участие в проделанной работе. Задачи, представленные в диссертации, были поставлены и решены автором. Вклад автора в работы, выполненные в соавторстве, считается равнозначным.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы, включающего 215 наименований. Общий объём текста – 146 машинописных страницы с 22 рисунками.

1-я глава посвящена обзору научных достижений последних лет в области исследования физических систем с электрической дипольной поляризацией.

2-я глава посвящена выводу уравнений квантовой гидродинамики системы многих взаимодействующих заряженных или нейтральных частиц, с собственными электрическими дипольными моментами, находящихся во внешнем электрическом и магнитном полях. Принимается во внимание, что в системе частиц существуют кулоновские, диполь-дипольные и заряд-дипольные взаимодействия.

3-я глава посвящена аналитическому нахождению дисперсионных зависимостей для различных физических сред, находящихся во внешних электрических полях, в линейном приближении по амплитуде волны. Рассмотрено влияние поляризации на процесс распространения волн в двумерной системе заряженных частиц, наделенных собственными электрическими дипольными моментами, в системах поляризованных нейтральных частиц различных размерностей, в системах поляризованных заряженных частиц двух сортов. Наряду с этим, изучено возбуждение волн поляризации пучком нейтральных поляризованных частиц, а также пучком электронов. Предсказано существование нового типа волн.

4-я глава посвящена обзору публикаций последних лет, касающихся линейных и нелинейных свойств систем многих взаимодействующих частиц с собственными магнитными моментами.

5-я глава посвящена выводу уравнений квантовой гидродинамики систем многих взаимодействующих частиц с собственными магнитными моментами, находящихся во внешних электромагнитных полях, где принимается во внимание кулоновское и спин-спиновое взаимодействие. На основе метода квантовой гидродинамики получен вклад квантовой и спиновой части тензора плотности потока энергии, потока намагниченности и плотности потока импульса в уравнения баланса импульса, баланса энергии, уравнение динамики намагниченности и эволюции завихренности.

6-я глава посвящена исследованию волновых свойств в системах частиц со спинами. Получены аналитические выражения для характеристик различных типов волн в квантовой спиновой плазме, находящейся во внешнем магнитном поле. В рамках развитого формализма рассчитаны влияния новых спиновых и обменных эффектов на динамику волн.

Глава 1

Электрические диполи в современных исследованиях

Вопросы, связанные с исследованием свойств поляризации среды диполей внешними электрическими полями, представляют неугасающий интерес. Электрический диполь является системой двух разноименных точечных зарядов, расположенных на конечном расстоянии друг от друга [1] - [3]. Как известно, по своим свойствам проводить электрический ток, вещества делятся на проводники и диэлектрики. Последние характеризуются тем, что весьма плохо проводят электрический ток, являясь изоляторами, к ним относятся многие аморфные тела, кристаллы, жидкости и, в особенности, газы. Основной чертой, объединяющей все диэлектрики, является их особая способность к поляризации во внешних электрических полях, а так же отсутствие электропроводности [4]. При этом, диэлектрики, в которых центры тяжести положительных и отрицательных зарядов совпадают, т.е. отсутствует дипольный момент у молекулы или атома, образуют класс неполярных диэлектриков. Диэлектрические жидкости и газы, для которых дипольный момент отличен от нуля, даже в отсутствии внешних электрических полей, являются полярными. К полярным диэлектрикам относятся частично упорядоченные вещества или жидкие кристаллы. Их главная особенность кроется в спонтанном упорядочении дипольных моментов, и, как следствие, анизотропной

диэлектрической проницаемости ε_{ij} [5]. Электродинамика сред с пространственной дисперсией, учитывающая зависимость диэлектрической проницаемости от частоты электромагнитного поля, была развита в работах [6], [7].

Особое внимание следует обратить на молекулу оксида азота NO , поскольку из огромного количества разнообразных диэлектрических соединений в природе, оксид азота обладает магнитными и диэлектрическими свойствами одновременно, т.е. наделен как электрическим дипольным моментом $d_0 \simeq 0.158$ Д [8], [9], а значит, способен к поляризации по диполью, так и спиновым магнитным моментом, а значит, способен образовывать парамагнитный газ и существенно реагировать на внешние магнитные поля. Благодаря блестящей проникающей способности через мембрану клеток, оксид азота оказывает влияние на внутриклеточные механизмы в биологических тканях, без контакта с рецепторами [10], [11], является эндогенным регулятором метаболических и физиологических процессов. В биологических структурах оксид азота может быть обнаружен методом электронного парамагнитного резонанса [12]. Определение уровней Ландау оксида азота NO было продемонстрировано в работе [13].

Особое внимание следует уделить нецентросимметричным твёрдым диэлектрикам, к которым, в первую очередь, относятся сегнетоэлектрики, пьезоэлектрики и пьезоэлектрики. Сегнетоэлектрикам присуще три основных свойства: наличие большой диэлектрической проницаемости в определённом интервале температур, её зависимость от напряжённости приложенного поля, а так же наличие остаточной поляризации [14], [15].

Сегнетоэлектрические эффекты могут возникать и в жидких кристаллах, под которыми подразумевают все мезофазы между изотропными жидкостями и твёрдыми телами [16] - [18]. Жидкие кристаллы, в результате наличия в них центра инверсии, не обладают спонтанной электрической поляризацией. Но граничащие с твёрдыми телами жидкие кристаллы могут обладать наведенной в приповерхностном слое, отличной от нуля, поляриза-

цией [18]. Свойства динамики электрической поляризации в нематических жидких кристаллах было изучены в работе [19]. Общее феноменологическое описание флексоэлектрического эффекта в смектических жидких кристаллах, на основе исследования диполь-квадрупольных и диполь-дипольных взаимодействия между молекулами в соседних смектических слоях, было предложено в статье [20]. Феноменологическое описание упорядочения молекулярных диполей на поверхности нематического жидкого кристалла, в результате сильных диполь-квадрупольных взаимодействий, также было предложено в работе [21].

Кристаллы, в которых поляризация возникает как результат механических деформаций, получили название - пьезоэлектрики [22] - [24]. В работе [25] был продемонстрирован анализ линейного отклика электрической поляризации ионных кристаллов на однородное изменение температуры, ее градиент (термополяризационный эффект), макроскопическую деформацию и градиент макроскопическую деформацию (флексоэлектрический эффект). В работе [26], для определения локальной поляризации в хиральных смектических жидких кристаллах, был предложен метод одновременного измерения электрической проницаемости и глубины электро-оптической модуляции, используя слабые и сильные электрические поля. Было показано, что флексоэлектрическая и пьезоэлектрическая поляризации имеют один и тот же порядок. Теория поляризации пьезоэлектриков была развита в работах [27], [28]. Применение теории функционала плотности для изучения свойств пьезоэлектриков было продемонстрировано в работе [29]. Несмотря на свою давнюю историю изучения, пьезоэлектричество до сих пор является объектом теоретических и экспериментальных исследований [30], [31], [32]. Метод, разбираемый в данной работе позволяет исследовать физические процессы в диэлектриках, в том числе и в пьезоэлектриках.

Воздействие на диэлектрик внешних электрических полей приводит к электрическим, механическим и тепловым обратимым или необратимым

процессам. Поляризация является наиболее важным свойством диэлектриков, связанная с поворотом электрических диполей среды или с ограниченным (на небольшое расстояние) смещением связанных зарядов, она тем выше, чем больше напряжённость приложенного электрического поля [33]. Первое явление присуще полярным диэлектрикам, в которых каждая молекула обладает собственным дипольным моментом даже в отсутствии поля, но благодаря тепловым флуктуациям суммарная поляризация такой среды равна нулю. Во внешнем электрическом поле на каждый диполь будет действовать сила, стремящаяся расположить дипольные моменты в направлении приложенного поля, создавая упорядочение тем больше, чем выше напряжённость поля и ниже температура среды.

Двумерный электронный газ представляет большой интерес, находясь в фокусе особого внимания теоретиков и экспериментаторов на протяжении долгого времени [34] - [37]. Ионы и дырки, в отличие от электронов, могут поляризоваться во внешних электрических полях, или, их жёсткие диполи могут выстраиваться в направлении приложенного поля. Особый интерес представляют вклады возмущения поляризации в дисперсию волн, способных возникать под действием внешних возмущений в подобных физических системах. Дисперсионные характеристики двумерного электронного газа были исследованы в работах [38] - [40]. Авторами работы [40] были изучены волны возмущения зарядовой и спиновой плотности в 2D электронном газе во внешнем, перпендикулярном плоскости газа, магнитном поле, с учётом спин-орбитального взаимодействия. Вклад в зарядовую и спиновую диффузию спин-орбитального взаимодействия был теоретически изучен в работах [41], [42].

Исследование диэлектрических свойств веществ требует разработки более чёткого, по сравнению с общепринятым, теоретического подхода, развиваемого в данной работе и учитывающего не только внешние воздействия, но и взаимодействия между диполями, а так же между диполями и заряда-

ми среды. Современные теоретические исследования систем многих частиц с диполь-дипольным взаимодействием претерпевают значительный подъём [43] - [47]. На это, в первую очередь, указывают недавние эксперименты по созданию и управлению ультрахолодными газами полярных молекул с электрическими дипольными моментами [48], [49]. В контексте данной работы большой интерес представляют коллективные моды в 2D многослойных структурах. Существование незатухающих акустических плазмонов в таких физических системах было предсказано в статье [50]. Авторы работы [43], руководствуясь последними экспериментальными достижениями в создании полярных молекулярных газов в лаборатории, провели теоретическое исследование эффектов в двумерных (2D) дипольных системах с анизотропным и $1/r^3$ диполь-дипольным взаимодействием. В работе были рассчитаны коллективные моды в 2D дипольных средах, а также рассмотрены пространственно разделенные двухслойные и многослойные сверхрешетки дипольных систем, в результате чего были получены характерные черты коллективных мод в квантовых дипольных газах. Той же группой авторов [51], опираясь на эксперименты по созданию ультрахолодных полярных молекулярных газов [52] - [56], было предсказано существование экспериментально наблюдаемых состояний с нарушенной симметрией и возникновение спонтанных прослоек *superfluidity* в бислое холодных полярных молекул. Теория анизотропных ферми-жидкостей ультра-холодных фермионных полярных молекул и коллективные звуковые моды, распространяющиеся в подобных средах, были изучены в статье [57]. Из уравнения Больцмана недавно были получены коллективные моды в 3D системах полярных частиц [58].

Существует большое количество работ, в которых уделяется основное внимание влиянию электрического дипольного момента на физические процессы, происходящие в Бозе конденсате [59] - [64]. Например, в работе [59] был рассмотрен охлаждённый квази-двумерный атомный и молекулярный Бозе-Эйнштейновский конденсат, в котором диполь-дипольные взаимодей-

ствия являются превалирующими. Авторами был подсчитан вклад поляризации в дисперсию мод Боголюбова и показано, что такой двумерный 2D конденсат, в отличие от трёхмерного 3D конденсата, чьи диполи ориентируются перпендикулярно плоскости среды, является стабильным, даже в режиме, когда диполь-дипольное взаимодействие доминирует над контактным взаимодействием. Особый интерес исследования таких систем связан, прежде всего, с большой диполь-дипольной длиной рассеяния, и как следствие, большой величиной и радиусом взаимодействия по сравнению с магнитным диполь-дипольным взаимодействием в конденсате. Теоретические работы в направлении изучения поляризованного конденсата были проделаны, используя уравнение Гросса-Питаевского [65] - [67]. Влияние поляризации на динамические процессы в Бозе-конденсате было исследовано в работах [68] - [72]. В работе [71] авторами, используя приближение Хартри-Фока, была предпринята попытка рассмотрения волновых процессов в 2D Ферми-газе, находящемся во внешнем электрическом поле, ориентирующем дипольные моменты Ферми-частиц параллельно.

Как было отмечено выше, молекула оксида азота NO обладает собственным дипольным моментом. Интерес нескольких исследовательских групп, в последние годы, заметно возрос к изучению ультра-холодной $\sim 5K$ долгоживущей (> 0.3 мс) сильно-связанной Ридберговской плазмы, состоящей из электронов водородоподобных атомов и атомов щелочных металлов, у которых внешний электрон находится в высоковозбуждённом состоянии [73] - [80]. Основными свойствами таких атомов является то, что они имеют макроскопические размеры, макроскопическое время жизни и очень слабую связь электрона в атоме. Главные вопросы, касающиеся изучения ультра-холодной долгоживущей Ридберговской плазмы, связаны с тем, какую роль могут играть в образовании такой плазмы из газа Ридберга и динамики волновых процессов, различные молекулярные характеристики, такие как вращательная релаксация, динамика дипольных моментов молекул, а так

же катион-электронная рекомбинация. В последнее время в качестве такой плазмы исследуется плазма электронов e^- и ионов оксида азота NO^+ [81] - [90]. Экспериментально Ридберговскую плазму можно получить путём двух-резонансного фотовозбуждения сверхзвукового пучка молекул оксида азота NO концентрации $\sim 10^{12} 1/sm^3$, охлажденных, как правило, до температуры $\sim 1K$. Такая система развивается, порождая быстрые свободные электроны и прочную холодную квази-нейтральную плазму электронов e^- и ионов оксида азота NO^+ . Плазма, состоящая из молекул, отличается от атомной прежде всего в силу своей плотности и тем, что её положительно заряженная компонента состоит из молекулярных катионов. Следует учесть, что наличие дипольного момента у катиона оксида азота должно приводить не только к кулоновским взаимодействиям между заряженными компонентами плазмы, но и к диполь-дипольным взаимодействиям между самими катионами, дипольные моменты которых должны испытывать флуктуации при попадании такой среды во внешнее электрическое поле. Диполь-дипольные взаимодействия, тем самым, могут оказывать влияние на процессы рекомбинации этих катионов с электронами, образующей нейтральные молекулы, а так же играть роль в перераспределении плотности энергии и плотности частиц, влияя на формирование плазмы Ридберга и эволюцию волновых процессов под действием внешнего возмущения. Теоретическая модель, развитая в данной работе и предоставляющая возможность описания физических процессов с участием поляризации, позволяет изучать волновые свойства Ридберговской плазмы, исследуемой, в основном, экспериментально.

Глава 2

Квантовая гидродинамика систем многих взаимодействующих частиц с электрической дипольной поляризацией

2.1 Постановка задачи

Пространственно-временная эволюция плотности заряда, плотности тока, плотности энергии, поляризации и потока поляризации частиц с собственными электрическими дипольными моментами требует для своего описания уравнение баланса импульса, баланса энергии, динамики поляризации и потока поляризации, учитывающие многочастичные взаимодействия, а именно кулоновские взаимодействия между зарядами, диполь-дипольные взаимодействия между диполями и действие поля, создаваемого зарядами на диполь, а так же поля диполя на заряд. Квантовая гидродинамика базируется на уравнениях плотности массы, импульса и энергии, не учитывающих влияния поляризации [91], [92], [93]. В квантовой гидродинамике частиц с электрическими дипольными моментами данные уравнения должны быть модифицированы и к ним, для замыкания системы, необходимо добавить уравнения баланса поляризации (уравнение в частных производ-

ных) и уравнение потока поляризации, а так же уравнения поля, учитывающие коллективное электрическое поле, связанное с наличием у частиц диполей. Используя математический аппарат квантовой гидродинамики, мы ставим своей целью получение замкнутой системы уравнений, позволяющей описать свойства поведения систем с кулоновским, диполь-дипольным и заряд-дипольным взаимодействиями, а так же рассмотреть, на основе полученной модели, системы заряженных и нейтральных частиц, двумерные и одномерные структуры, в которых присутствуют полярные или неполярные частицы.

2.2 Континуальная модель

Рассмотрим системы N взаимодействующих частиц, обладающих массами m_j , зарядами e_j , собственными дипольными моментами \mathbf{d}_j и находящуюся во внешнем электромагнитном поле. Вывод уравнений квантовой гидродинамики для системы заряженных частиц с собственным электрическим дипольным моментом \mathbf{d}_j , которые в последствии могут быть обобщены и для газа нейтральных частиц, начинается с введения гамильтониана взаимодействия частиц

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{D}_j^2}{2m_j} + e_j \phi_{j,ext} - d_j^\alpha E_{j,ext}^\alpha \right) \quad (2.1)$$

$$- \sum_{j \neq k, k}^N \frac{1}{2} d_j^\alpha d_k^\beta G_{jk}^{\alpha\beta} + \sum_{j \neq k, k}^N \left(\frac{1}{2} e_j e_k T_{jk} + e_j d_k^\alpha C_{jk}^\alpha \right),$$

где учтено, что $D_j^\alpha = -i\hbar\partial_j^\alpha - e_j A_{j,ext}^\alpha/c$ - есть ковариантная производная для заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле, а $\phi_{j,ext}$, $A_{j,ext}^\alpha$ - скалярный и векторный потенциалы внешнего электромагнитного поля соответственно. Третье слагаемое в гамильтониане взаимодействий (2.1) описывает вклад энергии диполя во внешнем электрическом поле, четвертое слагаемое описывает действие внутренних дипольных полей на диполи, пя-

тое слагаемое отражает вклад энергии кулоновских взаимодействий, а шестое слагаемое характеризует действие поля, создаваемого зарядами на диполь и поля, создаваемого диполями на заряд. Так же в гамильтониане взаимодействий (2.1) введены функции Грина кулоновского, диполь-дипольного и заряд-дипольного взаимодействия, зависящие от расстояния между частицами среды r_{jk}

$$T_{jk} = \frac{1}{r_{jk}}, \quad G_{jk}^{\alpha\beta} = \partial_j^\alpha \partial_k^\beta \frac{1}{r_{jk}}, \quad C_{jk}^\alpha = -\partial_j^\alpha \frac{1}{r_{jk}}. \quad (2.2)$$

Построение метода квантовой гидродинамики электрически нейтральной среды начинается с введения поля концентрации частиц в окрестности точки \vec{r} физического трёхмерного пространства

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \psi^+(R, t) \psi(R, t), \quad (2.3)$$

где $dR = \prod_{j=1}^N d\mathbf{r}_j$. Дифференцируя по времени выражение для концентрации (2.3), и применяя многочастичное уравнение Шредингера на основе введённого гамильтониана (2.1)

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad (2.4)$$

приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \text{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.5)$$

Возникший в уравнении непрерывности вектор плотности тока имеет вид

$$j^\alpha(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2m_j} \{ \hat{D}_j^{+\alpha} \psi^+(R, t) \psi(R, t) + \psi^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \psi(R, t) \}, \quad (2.6)$$

Движение элементов среды происходит под действием как классического, так и квантового потенциала. Для того, чтобы выделить квантовую

силу и потоковые скорости в уравнении баланса импульса, необходимо подставить волновую функцию в экспоненциальном виде в определение основных гидродинамических величин.

Скорость j -ой частицы среды \vec{v}_j массы m_j , без учёта спина, может быть определена выражение вида

$$v_j^\alpha = \frac{1}{m_j} \partial_j^\alpha S - \frac{e_j}{m_j c} A_j^\alpha, \quad (2.7)$$

в общем случае скорость (2.7) зависит от координат всех частиц системы R , где R объединяет $3N$ координат N частиц среды, а функция S , в выражении для скорости (2.7), представляет фазу волновой функции

$$\psi(R, t) = a(R, t) e^{\frac{i}{\hbar} S(R, t)}. \quad (2.8)$$

Поле скоростей \vec{v} - есть скорость локального центра масс и определяется выражением вида

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \vec{v}(\mathbf{r}, t), \quad (2.9)$$

здесь учтена связь скорости потока жидкости \vec{v} и квантового аналога тепловой скорости каждой частицы среды \mathbf{u}_j

$$\vec{v}(\mathbf{r}, t) = \vec{v}_j(\mathbf{r}, t) - \vec{u}_j(\mathbf{r}, t). \quad (2.10)$$

2.3 Уравнение баланса импульса

Основным уравнением квантовой гидродинамики является уравнение баланса импульса, представляющее собой обобщённое уравнение Эйлера, в случае более тонкого учёта взаимодействий между частицами. Его можно получить путём дифференцирования по времени плотности тока (2.6), а также используя многочастичное уравнение Шредингера (2.4)

$$\partial_t j^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\beta \Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m} \rho(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{mc} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} j^\beta(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\gamma \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{m} P^\beta(\mathbf{r}, t) \partial^\alpha E_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) - \frac{e^2}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\alpha T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) \psi^+ \psi(R, t) \\
& - \frac{e}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\alpha C_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) d_j^\beta \psi^+(R, t) \psi(R, t) \\
& + \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\alpha G^{\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) d_j^\gamma d_k^\delta \psi^+(R, t) \psi(R, t),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = & \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{4m_j} \{ \psi^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \hat{D}_j^\beta \psi(R, t) \\
& + (\hat{D}_j^\alpha \psi)^+(R, t) \hat{D}_j^\beta \psi(R, t) + (\hat{D}_j^\alpha \psi)^+(R, t) \hat{D}_j^\beta \psi(R, t) \\
& + (\hat{D}_j^\beta \psi)^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \psi(R, t) \}
\end{aligned} \tag{2.12}$$

представляет собой тензор плотности потока импульса.

Выделим в тензоре плотности потока импульса потоковую скорость движения среды, разделив движение с тепловыми скоростями \mathbf{u}_j и движение с коллективной скоростью \mathbf{v} . Таким образом, подставляя волновую функцию в явном виде (2.8) в выражение для плотности потока импульса $\Pi^{\alpha\beta}$ (2.12), и, принимая во внимание разложение для скорости j -ой частицы среды (2.10), приходим к следующему выражению

$$\Pi^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = m\rho(\vec{r}, t) v^\alpha(\mathbf{r}, t) v^\beta(\mathbf{r}, t) + p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t), \tag{2.13}$$

В соотношение (2.13) входят слагаемые в виде градиента тензора кинетического давления $p^{\alpha\beta}$ и квантового потенциала Бома $\Lambda^{\alpha\beta}$ [91]. Тензор кинетического давления связан исключительно с тепловым движением, стремясь к нулю при $\mathbf{u}_j \rightarrow 0$. Его микроскопическое представление через тепловые скорости частиц имеет вид [91]

$$p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) m_j u_j^\alpha u_j^\beta, \quad (2.14)$$

Тензор $\Lambda^{\alpha\beta}$, пропорциональный квадрату постоянной Планка \hbar^2 , как было отмечено выше, носит исключительно квантовый характер, и является квантовым потенциалом Бома [91]

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = - \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\vec{r} - \vec{r}_j) a^2(R, t) \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x_j^\alpha \partial x_j^\beta}, \quad (2.15)$$

вычисленным в приближении невзаимодействующих частиц

$$\Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{4m} \left(\partial^\alpha \partial^\beta \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{\rho(\mathbf{r}, t)} (\partial^\alpha \rho(\mathbf{r}, t)) (\partial^\beta \rho(\mathbf{r}, t)) \right). \quad (2.16)$$

Дивергенция тензора $\Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ представима в виде

$$\partial_\beta \Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \rho(\mathbf{r}, t) \partial^\alpha \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}}{\sqrt{\rho(\mathbf{r}, t)}}. \quad (2.17)$$

Коллективные процессы в среде могут быть изучены в приближении самосогласованного поля, поскольку взаимодействие между частицами происходит через длинно-действующие силы. В этом приближении, двухчастичные функции, возникшие в уравнении баланса импульса (2.11), могут быть представлены через одночастичные функции, и система континуальных уравнений примет вид

$$\partial_t \rho(\mathbf{r}, t) + \partial_\beta (\rho(\mathbf{r}, t) v^\beta(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad (2.18)$$

$$m \rho(\mathbf{r}, t) (\partial_t + v^\beta(\mathbf{r}, t) \partial^\beta) v^\alpha(\mathbf{r}, t) + \partial_\beta p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \partial_\beta \Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \quad (2.19)$$

$$= e \rho(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) + P^\beta(\mathbf{r}, t) \partial^\alpha E_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{c} \rho(\mathbf{r}, t) \epsilon^{\alpha\beta\gamma} v^\beta(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t)$$

$$\begin{aligned}
& +P^\beta(\mathbf{r}, t)\partial^\alpha \int d\mathbf{r}' G^{\beta\gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P_\gamma(\mathbf{r}', t) - e^2\rho(\mathbf{r}, t)\partial^\alpha \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}', t) \\
& -e\rho(\mathbf{r}, t)\partial^\alpha\partial_\beta \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')P^\beta(\mathbf{r}', t) + eP^\beta(\mathbf{r}, t)\partial^\alpha\partial_\beta \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\rho(\mathbf{r}', t)
\end{aligned}$$

Анализируя полученное уравнение баланса импульса (2.19), следует отметить, что первые три слагаемых в правой части уравнения представляют собой взаимодействие заряженной поляризованной частицы с внешним электромагнитным полем. Первое слагаемое отражает влияние внешнего электрического поля на плотность заряда, третье слагаемое характеризует наличие силы Лоренца или влияние внешнего магнитного поля на движущийся заряд. Второе слагаемое в правой части уравнения (2.19) представляет собой действие неоднородного электрического поля на плотность дипольного момента. Остальные слагаемые описывают поле сил, действующих в среде как результат взаимодействий между её частицами, а именно, в результате кулоновского взаимодействия между зарядами (пятое слагаемое в правой части уравнения), действия поля зарядов на диполь (седьмое слагаемое) и поля диполей на заряд (шестое слагаемое). Четвёртое слагаемое в правой части уравнения (2.19) отражает вклад коллективного самосогласованного поля диполей, действующего на диполь.

2.4 Уравнение эволюции поляризации и потока поляризации

Полученная система уравнений является незамкнутой, поскольку в ней присутствует поле поляризации P^β среды, для которого так же должно быть получено уравнение эволюции. Введём вектор плотности дипольного момента в окрестности точки трёхмерного физического пространства \mathbf{r}

$$P^\alpha(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d_j^\alpha \psi^+(R, t) \psi(R, t), \quad (2.20)$$

После процедуры дифференцирования выражения для поляризации (2.20) по времени, и применения многочастичного уравнение Шредингера (2.4), уравнение баланса плотности дипольного момента может быть выведено в следующей форме

$$\frac{\partial}{\partial t} P^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.21)$$

Плотность потока поляризации, входящая в найденное уравнение, определяется выражением вида

$$R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{d_j^\alpha}{2m_j} (\hat{D}_j^{+\beta} \psi^+ \psi + \psi^+ \hat{D}_j^\beta \psi)(R, t) \quad (2.22)$$

Уравнение баланса поляризации (2.21) явно не содержит взаимодействий. Для более точного учёта взаимодействий в среде и для замыкания системы уравнений, следует ввести уравнение, описывающее динамику потока поляризации

$$\begin{aligned} \partial_t R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\gamma R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) &= \frac{e}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) + \frac{e}{mc} \epsilon^{\beta\gamma\delta} R^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\delta(\mathbf{r}, t) \\ &+ \frac{1}{m} \partial_\beta E_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t) \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d_j^\alpha \psi^+(R, t) d_j^\gamma \psi(R, t) \\ &+ \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\beta G^{\gamma\eta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) d_j^\alpha d_j^\gamma d_k^\eta \psi^+ \psi(R, t) \\ &- \frac{e^2}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\beta T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) d_j^\alpha \psi^+(R, t) \psi(R, t) \\ &- \frac{e}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\beta C^\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) d_j^\alpha d_k^\gamma \psi^+(R, t) \psi(R, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Первые три слагаемых в правой части уравнения (2.23) отражают действие внешних электрических и магнитных полей на плотность дипольного момента, остальные слагаемые характеризуют влияние внутренних полей, возникающих в результате взаимодействия между зарядами и диполями среды. Пятое и шестое слагаемые в правой части уравнения (2.23) отражают вклады действия полей зарядов на диполи и полей диполей на заряды, четвертое слагаемое связано с влиянием диполь-дипольных взаимодействий. В более явном виде они могут быть выражены в приближении самосогласованного поля. В уравнении (2.23) так же возникает тензор нового вида

$$R^{\alpha\beta\gamma} = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{d_j^\alpha}{4m_j} (\psi^+(R, t) (\hat{D}_j^\beta D_j^\gamma \psi)(R, t) + (\hat{D}_j^\gamma \psi)^+ (D_j^\beta \psi)(R, t) + (\hat{D}_j^\beta \psi)^+ (D_j^\gamma \psi)(R, t) + (\hat{D}_j^\beta D_j^\gamma \psi)^+ \psi(R, t)). \quad (2.24)$$

Для того, чтобы выделить потоковую скорость в тензоре (2.24), необходимо применить аналогичную процедуру, которая была использована в случае тензора плотности потока импульса (2.13), приняв во внимание тот факт, что на дипольный момент j -ой частицы влияние могут оказывать и тепловые флуктуации, в результате чего, дипольный момент приобретает вид $d_j^\alpha = \xi_j^\alpha + d^\alpha$, где ξ_j^α - есть тепловые флуктуации дипольного момента около его постоянного значения d^α . Таким образом, явный вид тензора $R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$, с выделенным в нём полем потока скоростей и дипольного момента \mathbf{d} , приобретает форму

$$R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = r^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) + \Lambda^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) + mR^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)v^\gamma(\mathbf{r}, t) + mR^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t)v^\beta(\mathbf{r}, t) - mP^\alpha(\mathbf{r}, t)v^\beta(\mathbf{r}, t)v^\gamma(\mathbf{r}, t). \quad (2.25)$$

При этом, в выражении для тензора $R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t)$ появляется вклад тепловых движений диполей

$$r^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) d_i^\alpha a^2(R, t) m_i u_i^\beta u_i^\gamma \quad (2.26)$$

и влияние аналога квантового потенциала Бома-Мадделунга

$$\Lambda^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \int dR \sum_{i=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \times \\ \times d_i^\alpha a^2(R, t) \frac{\partial^2 \ln a}{\partial x_{\beta i} \partial x_{\gamma i}}. \quad (2.27)$$

Двухчастичные функции в уравнении (2.23) отражают статистику, которую можно учесть, если исследовать эффекты, в которых будут проявляться особенности Бозе - или Ферми - частиц, к которым, первую очередь, относится система поляризованных частиц, находящаяся в состоянии Бозе-Эйнштейновского конденсата. Но, в рамках поставленной задачи, мы будем использовать приближение самосогласованного поля, в котором уравнения эволюции поляризации и потока поляризации (2.23) примут вид

$$\frac{\partial P^\alpha(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)}{\partial x^\beta} = 0, \quad (2.28)$$

$$\partial_t R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\gamma R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) \\ + \frac{e}{mc} \epsilon^{\beta\gamma\delta} R^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\delta(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} D^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta E_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t) \quad (2.29)$$

$$-\frac{e}{m} D^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta \int d\mathbf{r}' C^\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{e}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) \partial_\beta \int d\mathbf{r}' C^\gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P^\gamma(\mathbf{r}', t)$$

$$-\frac{e^2}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) \partial_\beta \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}', t) + \frac{1}{m} D^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta \int d\mathbf{r}' G^{\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P^\delta(\mathbf{r}', t),$$

здесь было использовано обозначение $D^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t)$, макроскопический вид которого может быть выбран следующим образом

$$D^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) d_j^\alpha \psi^+ d_j^\beta \psi(R, t) = \sigma \frac{P^\alpha(\mathbf{r}, t) P^\beta(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)}, \quad (2.30)$$

где σ - есть безразмерная константа. Для понимания волновых эффектов, к которым приводит внешнее электрическое поле, создающее ненулевую суммарную поляризацию, необходимо рассмотреть различные частные случаи систем заряженных и нейтральных частиц.

Для системы заряженных частиц, способных приобретать индуцированный дипольный момент или обладающих собственным дипольным моментом, уравнение (2.29) переходит в уравнение вида

$$\partial_t R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) - \frac{e^2}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) \partial^\beta \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) \quad (2.31)$$

С другой стороны, уравнения (2.18) и (2.19) могут быть переписаны в слагаемых самосогласованных электрических и магнитных полей системы зарядов и диполей

$$mn(\mathbf{r}, t)(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)v^\alpha(\mathbf{r}, t) + \partial_\beta(p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)) \quad (2.32)$$

$$= en(\mathbf{r}, t)E^\alpha(\mathbf{r}, t) + P^\beta(\mathbf{r}, t)\partial^\alpha E^\beta(\mathbf{r}, t)$$

$$+ en(\mathbf{r}, t)\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}v^\beta(\mathbf{r}, t)B_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t),$$

где $E^\alpha(\mathbf{r}, t) = E_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) + E_{int}^\alpha(\mathbf{r}, t)$ и $E_{int}^\alpha(\mathbf{r}, t) = E_q^\alpha(\mathbf{r}, t) + E_d^\alpha(\mathbf{r}, t)$. Эти поля подчиняются уравнениям $div\mathbf{E}_q(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho$ и $div\mathbf{E}_d(\mathbf{r}, t) = -4\pi div\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ где $\rho = \sum_a e_a n_a(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, самосогласованное поле диполей подчиняется уравнению поля

$$div\mathbf{E}_{int}(\mathbf{r}, t) = 4\pi\rho - 4\pi div\mathbf{P}. \quad (2.33)$$

Подобно уравнению баланса импульса (2.32), уравнение плотности потока поляризации так же может быть переписано в слагаемых самосогласованных полей

$$\partial_t R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\gamma R^{\alpha\beta\gamma}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{m} P^\alpha(\mathbf{r}, t) E^\beta(\mathbf{r}, t) \quad (2.34)$$

$$+ \frac{e}{mc} \epsilon^{\beta\gamma\delta} R^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\delta(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} D^{\alpha\gamma}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta E^\gamma.$$

Важно отметить существенную особенность развиваемого теоретического подхода. При определении плотности дипольного момента с помощью выражения (2.20), было использовано приближение жёстких диполей, которое реализуется в системе полярных частиц.

Глава 3

Возбуждение волн поляризации в различных средах

3.1 Собственные волны в системах поляризованных нейтральных частиц

Большой интерес представляет исследование собственных волн в одномерных, двумерных и трёхмерных системах нейтральных частиц, обладающих собственным электрическим дипольным моментом. Эволюция такой среды во внешнем электрическом поле должна быть рассмотрена на основе уравнения (2.28) и модифицированного уравнения динамики плотности потока дипольного момента (2.23), поскольку диполь-дипольные взаимодействия должны вносить существенный вклад в изменение потока поляризации $R^{\alpha\beta}$

$$\partial_t R^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sigma \frac{P^\alpha(\mathbf{r}, t) P^\beta(\mathbf{r}, t)}{m\rho(\mathbf{r}, t)} \times \partial^\beta \int d\mathbf{r}' G^{\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') P^\delta(\mathbf{r}', t). \quad (3.1)$$

Замкнутая система уравнений (2.18), (2.19), (2.28) и (3.1), с учётом соотношения (2.30), после линеаризации позволяет провести анализ волн поляризации в системе нейтральных частиц. Уравнения непрерывности (2.18) и баланса импульса (2.19), в данном случае, описывают динамику акустических волн, в то время как уравнения эволюции плотности дипольного мо-

мента (2.28) и динамики потока поляризации (3.1) позволяют исследовать волны поляризации, не связанные с возмущениями плотности и скорости потока дипольных частиц. Используя уравнения (2.28) и (3.1) в двумерной среде нейтральных дипольных частиц, помещённых во внешнее однородное электрическое поле $\mathbf{E} = E_0 \mathbf{z}$, перпендикулярное плоскости локализации частиц, приходим к закону дисперсии

$$\omega = \sqrt{\sigma \frac{\beta(k)}{m\rho_0}} \mid \alpha\rho_0 \mid E_0 k^{3/2}, \quad (3.2)$$

где появляется функция, зависящая от модуля волнового вектора и характеризующая диполь-дипольные взаимодействия в среде

$$\beta(k) = 2\pi \int_{\xi}^{\infty} dr \frac{J_0(r)}{r^2}, \quad (3.3)$$

здесь $\xi = r_0 k$, r_0 - ионный или атомный радиус частицы и $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ - модуль волнового вектора. Так как минимальная длина волны $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max} > 2r_0$, то $\xi \subset (0, \pi)$. Функция $\beta(\xi)$, при этом, должна быть положительна. Поскольку носителями дипольных моментов являются атомы, молекулы или ионы конечного радиуса, интеграл от функции Бесселя должен быть обрезан по нижнему пределу. Графическая зависимость функции $\beta(\xi)$ от модуля волнового вектора представлена на рис. (3.1). Дисперсионная кривая, характеризующая волну (3.2), представлена графически на рис. (3.3).

В одномерной системе диполей волна распространяется по закону, графически представленному на рис. (3.4)

$$\omega = \sqrt{\frac{\sigma\beta_1(k)}{m\rho_0}} \mid \alpha\rho_0 \mid E_0 k^2, \quad (3.4)$$

здесь функция, характеризующая взаимодействие соседних диполей в одномерном случае, приобретает вид

$$\beta_1(k) = 2 \int_{\xi}^{\infty} dr \frac{\cos(r)}{r^3}. \quad (3.5)$$

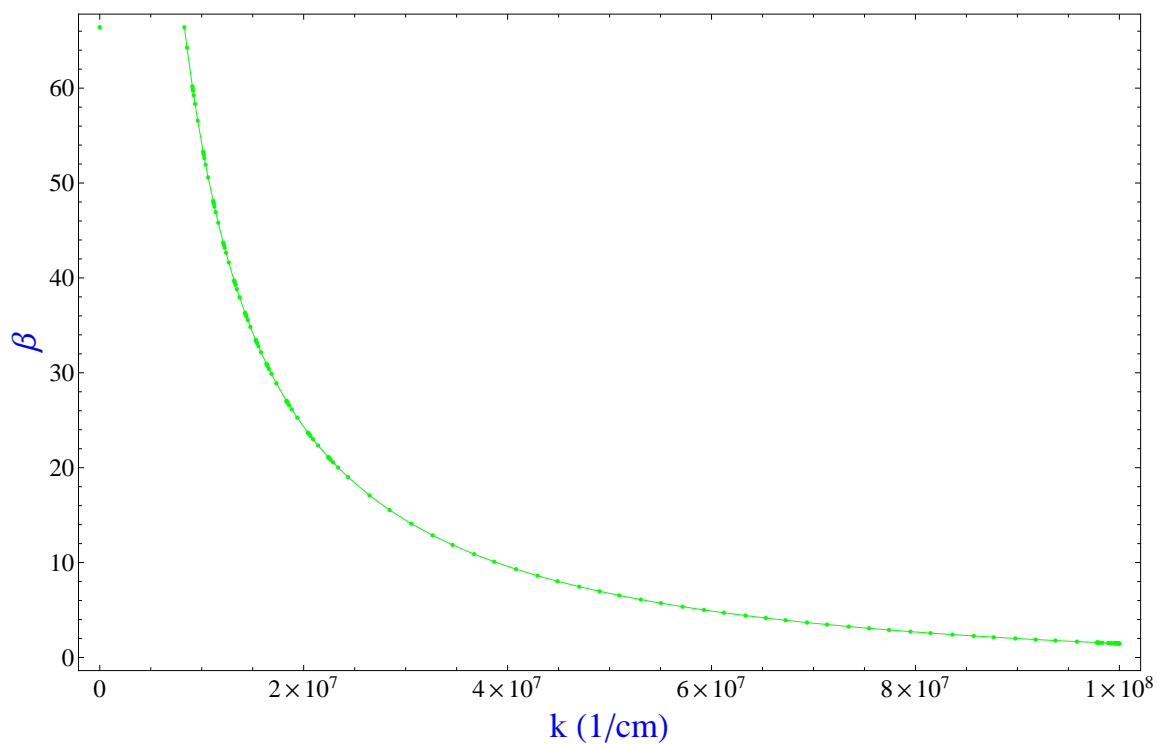


Рис. 3.1: Графическая зависимость функции $\beta(\xi)$ для двумерной системы диполей при $r_0 \sim 0.1\text{нм}$.

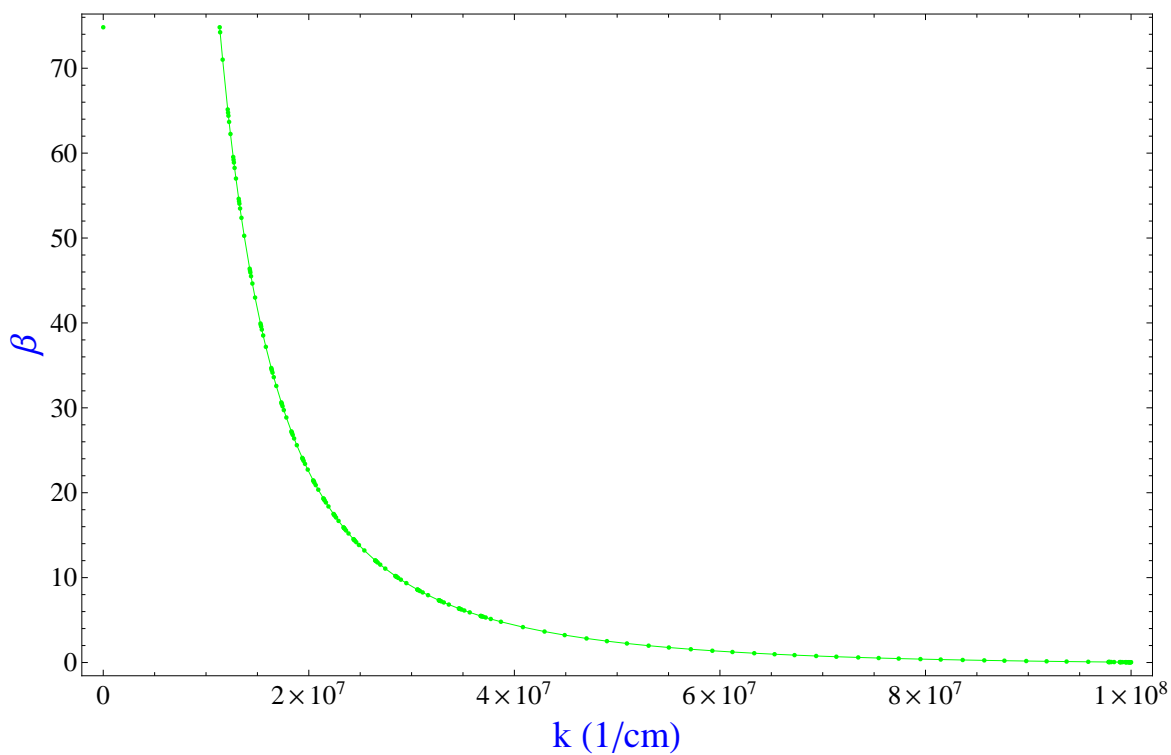


Рис. 3.2: Графическая зависимость функции $\beta_1(\xi)$ для одномерной системы диполей при $r_0 \sim 0.1\text{нм}$.

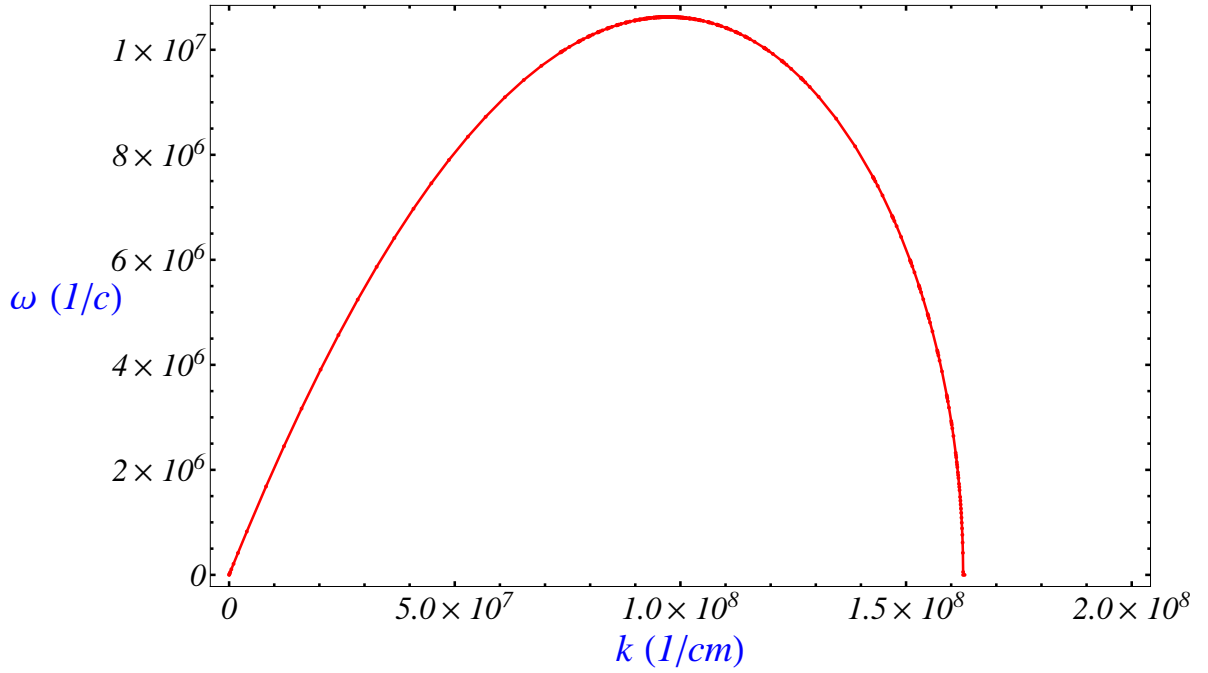


Рис. 3.3: Двумерная волна поляризации (3.2). График отражает зависимость частоты волны (Гц) от модуля волнового вектора (1/см) для следующих значений параметров среды: невозмущенная концентрация молекул оксида азота NO $\rho_0 \simeq 10^{12} \text{ см}^{-2}$, $T \sim 1\text{K}$ - температура среды, $E_0 \simeq 10^4 \text{ В/м}$ - однородное электрическое поле, поляризуемость молекулы NO во внешнем поле $\alpha = d_0^2/3k_B T \simeq 0.618 \cdot 10^{-22} \text{ см}^3$.

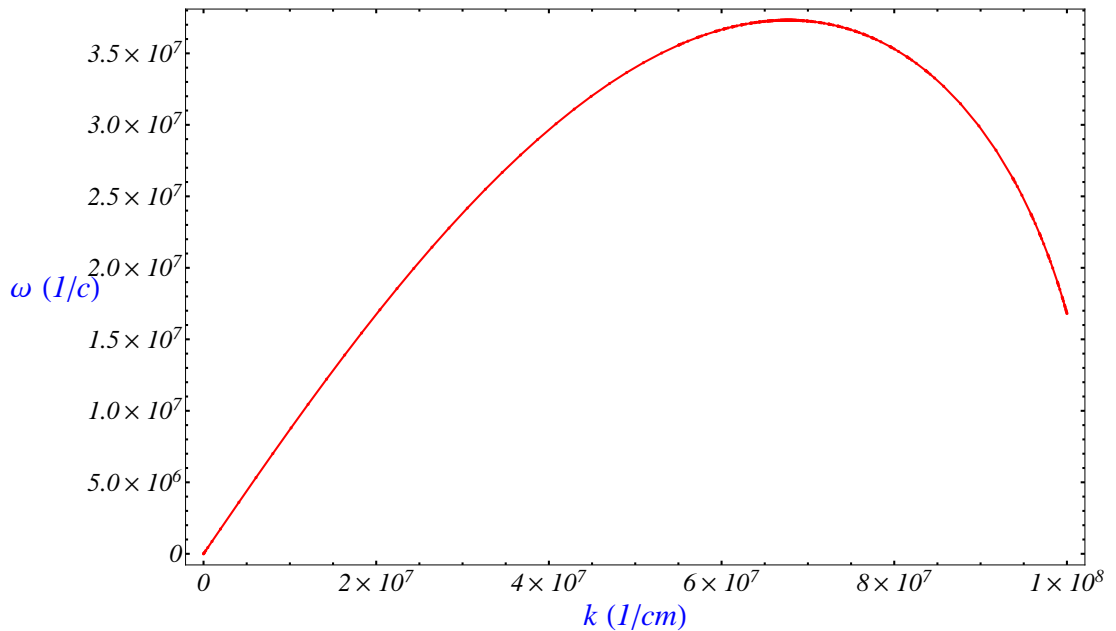


Рис. 3.4: Графическое представление одномерной волны поляризации (3.4). График отражает зависимость частоты волны (Гц) от модуля волнового вектора (1/см), невозмущенная концентрация молекул NO $\rho_0 \simeq 10^6 \text{ см}^{-1}$.

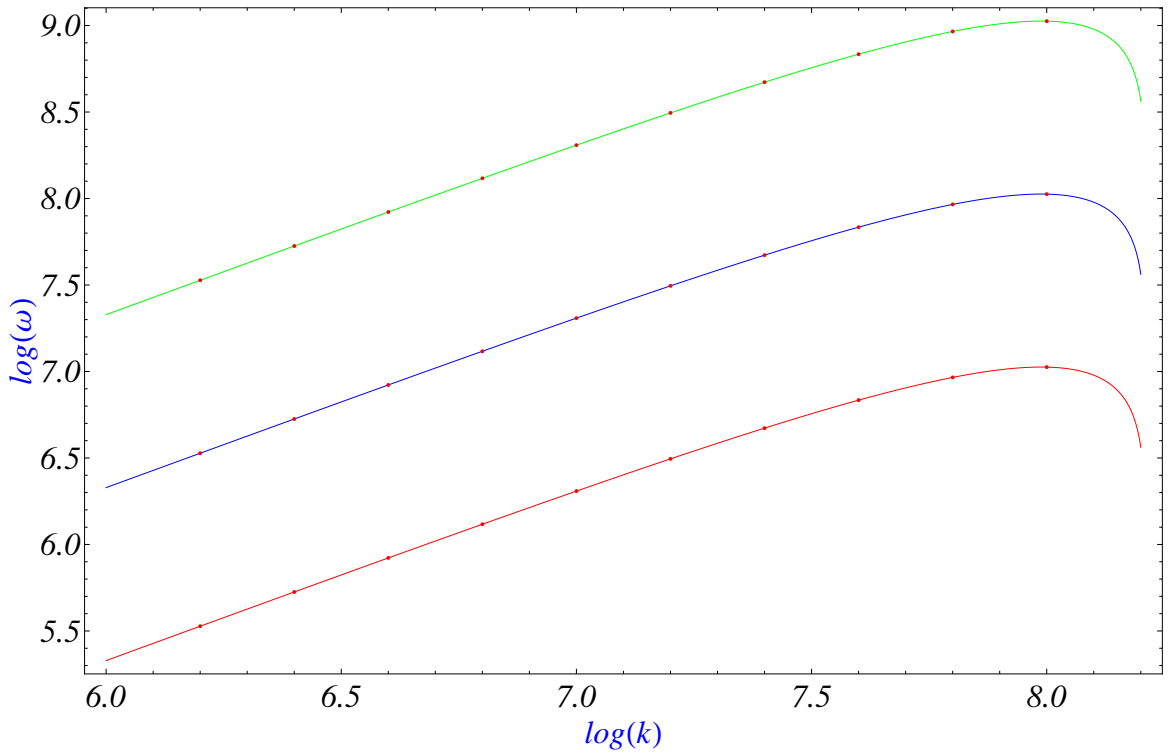


Рис. 3.5: Режимы 2D волн поляризации в зависимости от напряжённости внешнего электрического поля. Красная ветвь - $E_0 \simeq 10^4 \text{ В/м}$, синяя ветвь - $E_0 \simeq 10^5 \text{ В/м}$, зелёная ветвь - $E_0 \simeq 10^6 \text{ В/м}$.

Волновые моды в 2D (3.2) и 1D (3.4) случаях отличаются степенью модуля волнового вектора и видом коэффициентов $\beta(k)$, $\beta_1(k)$, имеющих различную зависимость от k . Функция $\beta_1(k)$ представлена рис. (3.2).

Особый интерес может представлять газ, состоящий из полярных молекул оксида азота NO , обладающих собственными дипольными моментами $d_0 \simeq 0.16 \text{ Д}$, будучи охлажденными до температур порядка $T \sim 1 \text{ К}$. Масса молекулы оксида азота $m \simeq 4.98 \cdot 10^{-23} \text{ г}$.

Взаимодействия атомных и молекулярных систем с внешними и внутренними возмущенными электрическими полями имеет огромное значение в физике и химии. В диэлектрических газах и жидкостях возникновение индуцированного дипольного момента, и как результат поляризации, связано со смещением валентных, слабо связанных электронов в атоме или ионе, а так же в результате смещения ионов в молекуле. Время установления поляризации электронного смещения $\sim 10^{-14} - 10^{-15} \text{ с}$, время установления

поляризации ионного смещения, будучи сравнимо с временем собственных колебаний иона, приблизительно равно $\sim 10^{-12} - 10^{-13}c$. Смещение зарядов в атоме или молекуле во внешних полях приводит к возникновению индуцированного дипольного момента, пропорционального приложенному полю $\vec{d}_0 = \alpha \vec{E}_0$, здесь α - поляризуемость атома, иона или молекулы. В настоящий момент существует значительное количество теоретических расчётов поляризуемости атомов и молекул во внешних полях [94], [96]. Средние экспериментальные величины поляризуемости (в Å^3) некоторых атомов и ионов [96] имеют приближённые значения $C \simeq 1.63$, $Na \simeq 24.1$, $Rb \simeq 46.8$, $Li \simeq 24.3$, $Na^+ \simeq 0.197$, $K^+ \simeq 0.879$. Поляризуемость в случае поляризации электронного смещения может быть также вычислена с помощью уравнения Клаузиуса - Мосотти [94].

Полярные молекулы обладают ненулевыми дипольными моментами, которые дезориентируются в результате теплового движения. В рамках рассматриваемого подхода, особое значение будет иметь тепловая ориентационная поляризация, которая реализуется в среде с незначительными связями между молекулами. Ориентационная поляризация связана с тем, что тепловое движение частиц будет приводить к возникновению поляризации во внешнем электрическом поле. В стационарном случае, при действии электрического поля, число поворотов в направлении поля будет превышать число обратных поворотов [95]. Поляризуемость молекулы будет обратно пропорциональна температуре T частиц $\alpha = d_0^2/3k_B T$, где k_B - постоянная Больцмана.

3.2 Собственные волны в двумерной системе заряженных частиц с электрическим дипольным моментом

Одной из основных задач является нахождения спектра собственных волн в двумерных системах заряженных частиц. В первом случае исследуем

модельную задачу, рассмотрим двумерную систему частиц или локализованный в плоскости xy газ электронов и дырок, обладающих собственными дипольными моментами. Рассмотрим малые возмущения основных физических величин около их стационарных состояний во внешнем постоянном электрическом поле, направленном вдоль оси z

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = P_0 \mathbf{z} + \delta \vec{\wp}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (3.6)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \dots$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \rho_0 + \delta \rho(\mathbf{r}, t) + \dots$$

$$\mathbf{E}_{ext}(\mathbf{r}, t) = E_0 \mathbf{z},$$

здесь ρ_0 , P_0 , и E_0 - стационарная поверхностная концентрация, наведенная плотность дипольного момента и однородное внешнее электрическое поле соответственно. Для решения поставленной задачи необходимо использовать замкнутую систему линеаризованных континуальных уравнений (2.18), (2.19), (2.28) и (2.31) относительно действительных гидродинамических функций ρ , \mathbf{v} , \mathbf{P}

$$-i\omega \delta \rho + i\rho_0 \mathbf{k} \delta \mathbf{v} = 0, \quad (3.7)$$

$$-it\omega \rho_0 \delta \mathbf{v} + mv_{si}^2 i\mathbf{k} \delta \rho + \frac{\hbar^2}{4m} ik^2 \mathbf{k} \delta \rho = -2\pi e^2 \rho_0 i\mathbf{k} \delta \rho - P_0 \beta(k) i\mathbf{k} \delta \wp^z,$$

$$-i\omega \delta \wp^\alpha + ik_\beta \delta R^{\alpha\beta} = 0, \quad -i\omega \delta R^{z\beta} = -\frac{2\pi e^2}{m} P_0 i\rho \delta k_\beta,$$

решение которой даёт дисперсионное уравнение для собственных дипольно-звуковых волн в среде заряженных поляризованных частиц во внешнем электрическом поле

$$m\omega^2 = mv_{si}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m} k^4 + 2\pi e^2 \rho_0 k + 2\pi P_0^2 \frac{\beta(k) e^2}{m\omega^2} k^4, \quad (3.8)$$

где функция $\beta(k)$ задана соотношением (3.3).

Решение дисперсионного уравнения (3.8) может быть представлено двумя ветвями дисперсии

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left(v_{si}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} k^4 + \omega_{Li2}^2 \pm \sqrt{(v_{si}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} k^4 + \omega_{Li2}^2)^2 + 8\pi\alpha^2 \rho_0^2 E_0^2 \beta(k) \frac{e^2}{m^2} k^4} \right), \quad (3.9)$$

где $\omega_{Li2}^2 = 2\pi e^2 \rho_0 k / m$ представляет частоту двумерной волны Ленгмюра. Благодаря учёту малости поляризационных эффектов в среде, дисперсионная зависимость (3.9) может быть представлена в более явном виде

$$\omega^2 = v_{si}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m^2} k^4 + \omega_{Li2}^2 + \frac{2\pi\alpha^2 \rho_0^2 E_0^2 \beta(k) e^2 k^4}{m^2 v_{si}^2 k^2 + \frac{1}{4} \hbar^2 k^4 + m^2 \omega_{Li2}^2}, \quad (3.10)$$

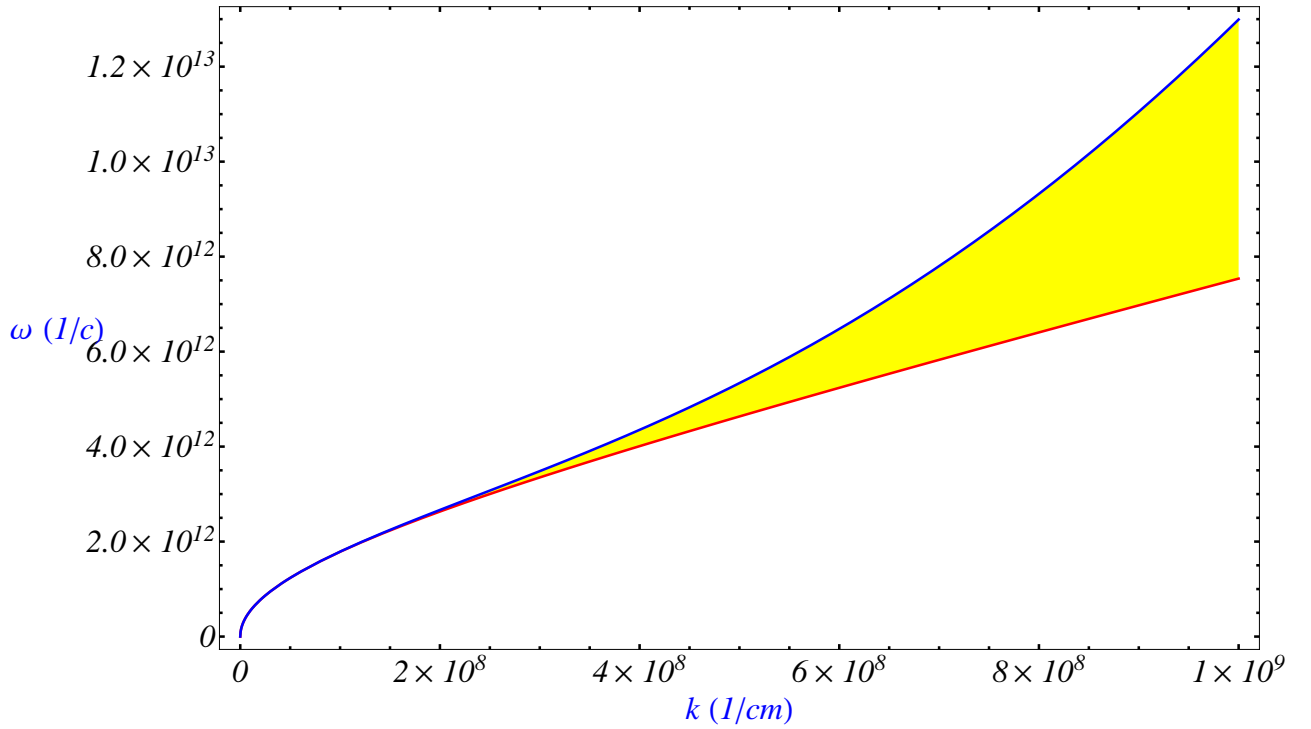


Рис. 3.6: Дисперсия двумерных ленгмюровских волн (3.10) с учётом диполь-дипольных взаимодействий между ионами. График отражает зависимость частоты волны (Гц) от модуля волнового вектора ($1/cm$) для следующих значений параметров среды: $\rho_0 \simeq 10^{12} cm^{-2}$ - невозмущенная концентрация ионов, $d_0 \simeq 10^{-18} e \cdot cm$ - индуцированный дипольный момент, $T \sim 100K$ - температура среды, $E_0 \simeq 10^5 V/m$ - однородное электрическое поле. Красная ветвь отражает дисперсию классических 2D ленгмюровских волн и синяя ветвь характеризует влияние квантового потенциала Бома.

$$\omega^2 = -\frac{2\pi\alpha^2\rho_0^2E_0^2\beta(k)e^2k^4}{m^2v_{si}^2k^2 + \frac{1}{4}\hbar^2k^4 + m^2\omega_{Li2}^2}. \quad (3.11)$$

Дисперсионное соотношение (3.10) отражает дисперсию квантовых двумерных ленгмюровских волн (рис. (3.6)) с добавкой диполь-дипольного взаимодействия.

Соотношение (3.11) характеризует дисперсию затухающей волны, как результат учёта динамики плотности дипольного момента рис. (3.7). Появление нового решения в виде закона (3.11) свидетельствует о существовании новой неустойчивой волновой моды в среде заряженных частиц с кулоновским взаимодействием.

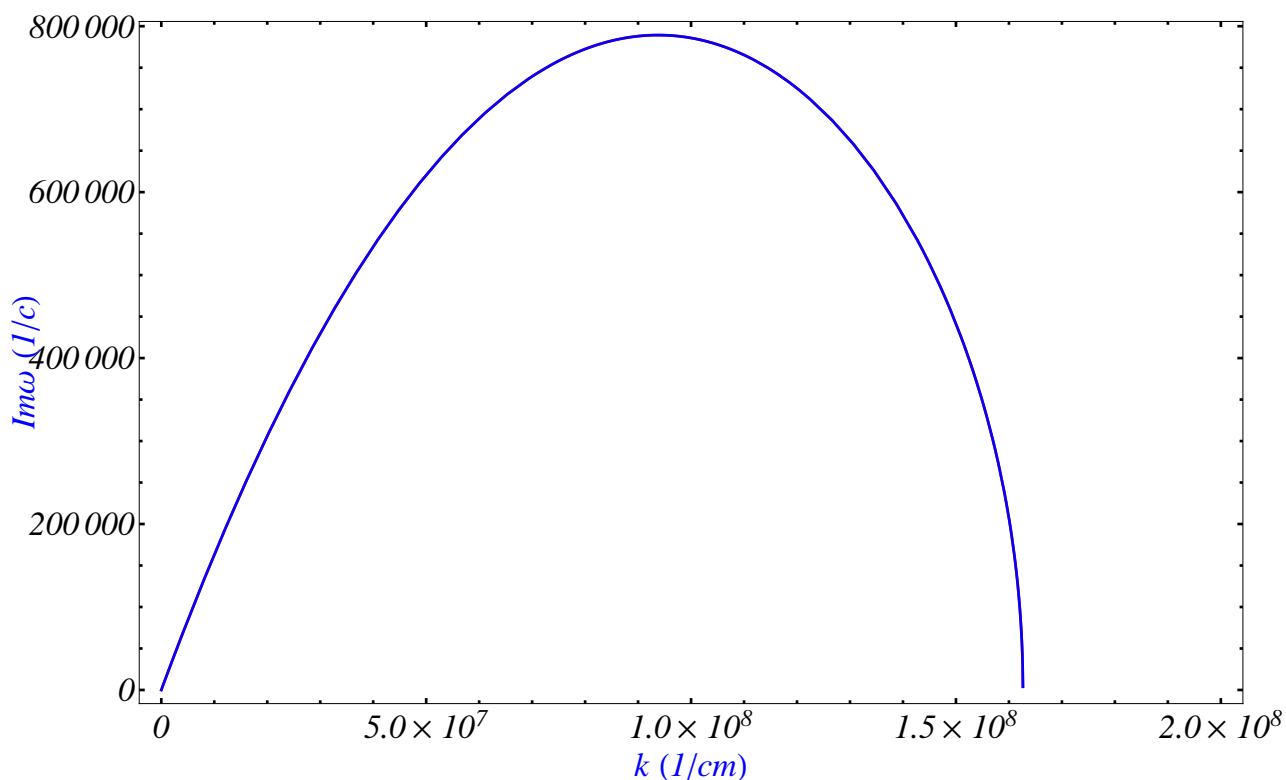


Рис. 3.7: График зависимости мнимой части двумерной волны как результат динамики поляризации (3.11). График отражает зависимость частоты волны (Гц) от модуля волнового вектора (1/см) для следующих значений параметров среды: $\rho_0 \simeq 5 \cdot 10^{12} \text{ см}^{-2}$ - невозмущенная концентрация ионов, $d_0 \simeq 10^{-18}$ СГСЭ - индуцированный дипольный момент, $\kappa = \rho_0\alpha$ - статическая электрическая восприимчивость, $T \sim 100\text{K}$ - температура среды, $E_0 \simeq 10^5 \text{ В/м}$ - однородное электрическое поле.

3.3 Собственные волны в системах поляризованных заряженных частиц двух сортов

Двумерные системы, образованные заряженными частицами двух сортов, могут быть экспериментально реализованы в тонких плёнках из металла или полупроводника, а так же в опытах с тонкими нано-размерными ионными кристаллами. В нашей задаче ионы и дырки, обладающие собственным дипольным моментом, образуют ионный кристалл. Мы учитываем, что ионы одного сорта обладают более значительными по величине дипольными моментами, чем ионы другого сорта.

Система уравнений квантовой гидродинамики, позволяющая описать поведение подобной среды, состоит из уравнения неразрывности (2.18), уравнения баланса импульса для обоих сортов частиц (2.19), а так же уравнений (2.28) и (2.29), которые описывают динамику поляризации только для сорта частиц с большим дипольным моментом. При этом, силовое поле, возникающее в правой части уравнений (2.19) и (2.29), исходит от двух сортов частиц. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим двумерную модельную систему ионов и дырок, помещенную в электрическое поле, перпендикулярное плоскости локализации частиц. Решение задачи на собственные волны в системе заряженных частиц двух сортов приводит к дисперсионной зависимости вида

$$\begin{aligned}
 & (\omega^2)^3 - \left(\omega_e^2 + v_{se}^2 k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2} + \omega_i^2 + v_{si}^2 k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_i^2} \right) (\omega^2)^2 \quad (3.12) \\
 & + \left((v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2})(v_{si}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}) k^4 + \omega_i^2 (v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}) k^2 + \omega_e^2 (v_{si}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}) k^2 \right) \omega^2 \\
 & - \frac{\beta(k) \omega_i^2 P_0^2 k^4}{\rho_0 m_i} \omega^2 + \frac{\beta(k) P_0^2 \omega_i^2}{\rho_0 m_i} (v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}) k^6 = 0,
 \end{aligned}$$

здесь $\omega_e^2 = 2\pi e^2 \rho_{e0} k / m_e$, $\omega_i^2 = 2\pi e^2 \rho_{i0} k / m_i$ - плазменные частоты электронов и ионов соответственно, $v_{se}^2 = k_B T_e / m_e$, $v_{si}^2 = k_B T_i / m_i$ - тепловые скорости электронов и ионов, k_B - постоянная Больцмана, T_e , T_i - температура электронов и ионов.

Если в качестве задачи будет рассмотрен анализ волн в плёнке металла, то индексы e и i соответствуют физическим параметрам электронов и ионов в среде. Для случая полупроводника, индекс i описывает дырки, а в рассмотрении плёнки из нано-кристалла, i параметры ионов различных сортов.

В отсутствии эффектов поляризации, дисперсионное уравнение (3.12) переходит в уравнение второй степени, решение которого имеет следующий вид

$$\omega_{0\pm}^2 = \frac{1}{2} \left(\omega_e^2 + \omega_i^2 + v_{qse}^2 k^2 + v_{qsi}^2 k^2 \pm \sqrt{(\omega_e^2 + \omega_i^2)^2 + (v_{qse}^2 k^2 - v_{qsi}^2 k^2)^2 + (\omega_e^2 - \omega_i^2)(v_{qse}^2 k^2 - v_{qsi}^2 k^2)} \right), \quad (3.13)$$

здесь

$$v_{qsa}^2 = v_{sa}^2 + \hbar^2 k^2 / 4m_a^2,$$

есть тепловая скорость движения частиц с учётом вклада квантового давления, индекс a - обозначает электроны e или ионы i плазмы. Уравнение (3.13) содержит дисперсионные характеристики волн Ленгмюра и ионно-звуковых волн. В квантовом случае, учитывая что $\omega_i^2 \ll \omega_e^2$, мы можем представить эти две волновые моды в следующем виде

$$\omega^2 = \omega_e^2 + v_{se}^2 k^2 + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} k^4, \quad (3.14)$$

и

$$\omega = \frac{k v_s \sqrt{1 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2 v_{se}^2}}}{\sqrt{1 + a_e^2 k^2 (1 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2 v_{se}^2})}}. \quad (3.15)$$

здесь использовано обозначение $a_e^2 = v_{se}^2/\omega_e^2$, $v_s = (m_e/m_i)v_{se}^2$. В предположении малости тепловых скоростей ионной компоненты по сравнению с тепловыми скоростями электронов

$$v_{si}^2 + \hbar^2 k^2/4m_i^2 \ll \omega^2/k^2 \ll v_{se}^2 + \hbar^2 k^2/4m_e^2 \quad (3.16)$$

выражение (3.15) принимает вид

$$\omega = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + a_e^2 k^2}} \left(1 + \frac{\hbar^2 k^2}{8m_e^2 v_{se}^2} \frac{1}{1 + a_e^2 k^2} \right). \quad (3.17)$$

Следует отметить, что выражение (3.15) отличается от своего классического аналога присутствием слагаемого, пропорционального \hbar^2 , которое, как было отмечено выше, появляется в результате учёта действия на скорость потока частиц квантового потенциала Бома (2.17). График (3.8) отображает эволюцию ионно - звуковых волн в классическом и квантовом случаях.

Если в уравнении (3.12) учесть влияние возмущений поляризации, можно получить новую волну. Считая вклад поляризации малым, дисперсионные характеристики нового типа волн принимают вид

$$\omega^2 = -\frac{1}{\rho_0 m_i} \frac{\beta(k) P_0^2 \omega_i^2 k^3 (v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2})}{\omega_e^2 (v_{si}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}) + \omega_i^2 (v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2}) + (v_{se}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e^2})(v_{si}^2 + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_i^2}) k^2}. \quad (3.18)$$

В приближении (3.16) мнимая часть выражения (3.18) переходит в дисперсионную зависимость двумерных волн поляризации

$$Im(\omega) = \sqrt{\frac{\beta(k)}{n_0 m_i}} P_0 k^{3/2}. \quad (3.19)$$

Возмущения плотности дипольного момента должны вызывать дополнительные вклады в уравнении (3.13). В общем виде уравнение (3.13), учитывающее вклад поляризации, имеет вид

$$\omega_{\pm}^2 = \omega_{0\pm}^2 \pm \frac{1}{\omega_{0+}^2 - \omega_{0-}^2} \times \frac{\beta(k) P_0^2 k^3 \omega_i^2}{\rho_0 m_i} \left(1 - k^2 \frac{v_{qse}^2}{\omega_{0\pm}^2} \right). \quad (3.20)$$

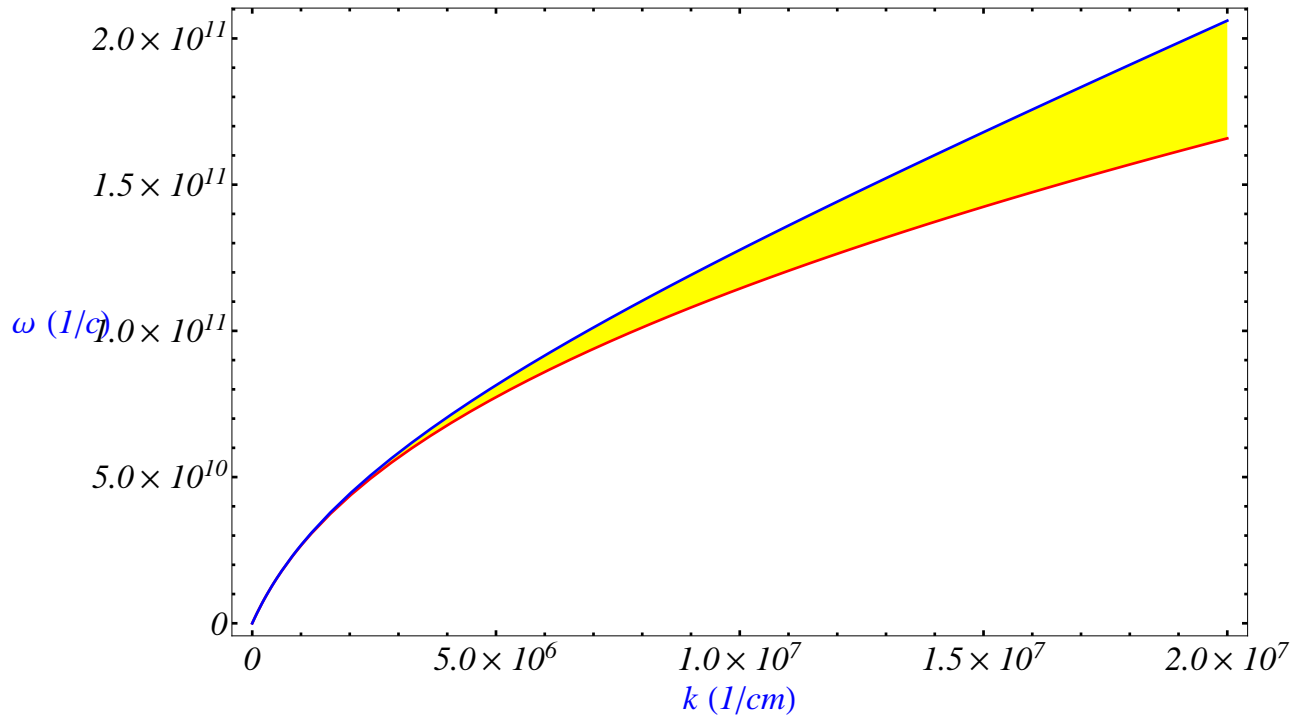


Рис. 3.8: Дисперсионная кривая отражает дисперсию двумерных ионно-акустических волн (3.15). Синяя ветвь характеризует квантовую ионно-акустическую волну, учитывающую вклад потенциала Бома, в то время как красная ветвь описывает классическое решение в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Двумерный ионный кристалл имеет следующие значения параметров $\rho_0 \simeq 10^{10} \text{ см}^{-2}$, $m \simeq 10^{-23} \text{ г}$.

3.4 Влияние поляризации на дисперсионные характеристики двумерных полупроводников

Простейшей моделью полупроводника является физическая система, состоящая из частиц трёх сортов - электронов, ионов и нейтральных атомов. При этом, атомы и ионы полупроводника, во внешних электрических полях, могут обладать собственным дипольным моментом. Динамические свойства полупроводников обычно рассматриваются как динамика электронов и дырок, которые, в свою очередь, могут образовывать связанные состояния - экситоны. Поскольку экситоны наделены дипольным моментом, диполь-дипольные взаимодействия в системе экситонов могут играть существенную роль.

Наибольший интерес представляет идея об описании взаимодействия экситонов через их дипольные моменты, а так же взаимодействия диполей с внешним полем. При этом экситоны представимы как нейтральные квазичастицы, наделённые собственным дипольным моментом. Логические следствия, вытекающие из вышеописанных представлений, есть предположения о том, что в полупроводнике могут возбуждаться акустически-подобные волны и волны поляризации, эволюция которых описывается выражениями (3.11), (3.2) и (3.4).

Электроны и дырки в полупроводнике движутся без существенного образования связанных состояний, в следствие чего возмущения в полупроводнике могут быть рассмотрены как возбуждения в системе заряженных частиц двух сортов, где под термином "дырка" подразумеваются ионы, обладающие электрическим дипольным моментом. Используя модель, описанную выше, а так же результаты, полученные для двумерных систем, состоящих из двух сортов заряженных части, могут быть исследованы элементарные возмущения в двумерной электрон-дырочной плазме (3.12) - (3.28), где индекс i должен быть применён для краткого описания дырок.

3.5 Возбуждение волн поляризации пучком нейтральных поляризованных частиц

Наиболее удачный путь генерации волн поляризации связан с распространением пучка электронов или нейтральных поляризованных частиц через вещество образца. В таких системах должна развиваться неустойчивость, приводящая к возбуждению волн в образце. Для поставленных целей должны быть использованы уравнения (2.18), (2.28), (2.32), (2.34), а также уравнения поля (2.33)

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0, \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} m\rho(\partial_t + \mathbf{v}\nabla)v^\alpha + \partial_\beta p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar^2}{2m}\rho\partial^\alpha\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \\ = e\rho E^\alpha + P^\beta\partial^\alpha E^\beta, \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}P^\alpha + \frac{\partial R^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \partial_t R^{\alpha\beta} + \frac{1}{m}\partial_\gamma R^{\alpha\beta\gamma} = \frac{e}{m}P^\alpha E^\beta \\ + \frac{1}{m}D^{\alpha\gamma}\partial_\beta E^\gamma, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$div\mathbf{E} = 4\pi\rho - 4\pi div\mathbf{P}. \quad (3.25)$$

В правой части уравнения поля (3.25) вектор поляризации \mathbf{P} равен сумме векторов поляризации среды \mathbf{P}_d и поляризации пучка \mathbf{P}_b

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_d + \mathbf{P}_b.$$

Равновесное состояние рассматриваемой системы характеризуется следующими значениями параметров среды

$$\begin{aligned}\rho_d &= \rho_{0d} + \delta\rho_d, \quad v_d^\alpha = 0 + v_d^\alpha, \\ P_d^\alpha &= P_{0d}^\alpha + \delta P_d^\alpha, \quad R_d^{\alpha\beta} = 0 + \delta R_d^{\alpha\beta}\end{aligned}\quad (3.26)$$

и пучка

$$\begin{aligned}\rho_b &= \rho_{0b} + \delta\rho_b, \quad v_b^\alpha = U\delta^{z\alpha} + \delta v_b^\alpha, \\ P_b^\alpha &= P_{0b}^\alpha + \delta P_b^\alpha, \quad R_b^{\alpha\beta} = R_{0b}^{\alpha\beta} + \delta R_b^{\alpha\beta}.\end{aligned}\quad (3.27)$$

Поляризация P_0^α пропорциональна величине внешнего электрического поля E_0^α . В задаче рассмотрен случай, когда внешнее поле существует в плоскости xz под углом φ , как $\mathbf{E}_0 = [E_0 \sin\varphi, 0, E_0 \cos\varphi]$. В этом случае тензор плотности потока поляризации $R_{0b}^{\alpha\beta}$ имеет только две ненулевых компоненты $R_{0b}^{zx} = R_{0b} \sin\varphi$ и $R_{0b}^{zz} = R_{0b} \cos\varphi$. Исследование малых возмущений равновесных состояний в рассматриваемой системе приводит к дисперсионному уравнению вида

$$1 - \frac{\omega_D^2}{\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}} - \frac{\omega_{Db}^2}{(\omega - k_z U)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m_b^2}} = 0, \quad (3.28)$$

В отсутствии среды, дисперсия поляризованного пучка имеет вид

$$\omega = k_z U \pm \sqrt{\omega_{Db}^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_b^2}}, \quad (3.29)$$

где частота диполей в пучке определяется выражением

$$\omega_{Db}^2 = \frac{4\pi\sigma P_{0b}^2 k^2}{m\rho_{0b}}.$$

В присутствии среды, вдали от условия резонанса $k_z U \simeq \omega_{Db}$,

$$\omega \simeq k_z U \pm \frac{\omega_{Db}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_D^2}{(k_z U)^2}}} = k_z U \pm i \frac{\omega_{Db}}{\sqrt{\frac{\omega_D^2}{(k_z U)^2} - 1}} \quad (3.30)$$

Для случая, когда $\omega_D \gg k_z U$ из (3.30) имеем

$$\omega = k_z U \left(1 \pm i \frac{\omega_{Db}}{\omega_D} \right).$$

Рассматривая резонансные взаимодействия нейтрального поляризованного пучка со средой, частота собственных колебаний примет вид

$$\omega = k_z U + \eta. \quad (3.31)$$

В условии резонанса пучка со средой $\omega_D \simeq k_z U$ и, учитывая $\eta \gg \frac{\hbar k^2}{m_b}$, окончательно имеем

$$\eta = \xi \sqrt[3]{\frac{\omega_{Db}^2 \omega_D^2}{2 \sqrt{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}}}}, \quad (3.32)$$

где ξ принимает вид

$$\xi = \sqrt[3]{1} = \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)$$

В качестве поляризованного во внешнем электрическом поле молекулярного пучка может быть взят пучок нейтральных молекул оксида азота NO , охлажденных до температуры $T_b \simeq 1K$, при концентрациях $\rho_{0b} \simeq 10^{13} cm^{-3}$, которые можно создать экспериментально [81], [82]. Будем считать, что молекулы в пучке движутся со средними скоростями $U \simeq 10^3 - 10^5 sm/s$. В качестве среды может быть взят пьезоэлектрический или сегнетоэлектрический кристалл.

3.6 Возбуждение волн поляризации пучком электронов

Рассмотрим пучок электронов, движущийся в направлении оси z по отношению к трёхмерной среде, состоящей из нейтральных дипольных ча-

стиц, поляризованных в основном состоянии в отсутствие внешнего электрического поля. Экспериментально такая ситуация может быть реализована при прохождении электрического пучка через кристалл пьезоэлектрика или образец ферроэлектрика, обладающего остаточной поляризацией. Используя уравнения (2.18), (2.32), (2.28), (2.34), а также уравнения поля (2.33), в линейном приближении, приходим к дисперсионному уравнению для волн, способных распространяться в системах электронный пучок - пьезоэлектрик

$$1 - \frac{\omega_{Le}^2}{(\omega - k_z U)^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2}} - \frac{\omega_D^2}{\omega^2 - \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}} = 0, \quad (3.33)$$

где квадрат дипольной частицы

$$\omega_D^2 = \frac{4\pi\sigma P_0^2 k^2}{m\rho_0}.$$

Уравнение (3.33) имеет три решения. Учитывая квантовый потенциал Бома, в отсутствие пучка, квадрат частоты волны поляризации примет вид

$$\omega^2 = \omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2} \quad (3.34)$$

Учёт квантового потенциала, в отсутствие среды, даёт дисперсию звуковых волн в пучке

$$\omega = k_z U \pm \sqrt{\omega_{Le}^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2}}. \quad (3.35)$$

Если вклад квантового потенциала равен нулю и в пределе пучка низкой плотности, решение дисперсионного уравнения примет простой вид

$$\omega \simeq k_z U. \quad (3.36)$$

Влияние поляризации среды на волны в электронном пучке отразится на законе дисперсии следующим образом

$$\omega \simeq k_z U \pm \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{1 - \frac{\omega_D^2}{(k_z U)^2}}} = k_z U \pm i \frac{\omega_{Le}}{\sqrt{\frac{\omega_D^2}{(k_z U)^2} - 1}} \quad (3.37)$$

Решение (3.37) комплексное и приводит к появлению неустойчивости при дипольной частоте $\omega_D > k_z U$, т.е. в случае длинных волн. При этом, если $\omega_D \gg k_z U$, решение перейдёт в соотношение вида

$$\omega = k_z U \left(1 \pm i \frac{\omega_{Le}}{\omega_D} \right). \quad (3.38)$$

Следует обратить внимание на то, что решение (3.37) справедливо для пучка, движущегося в трёх-мерной среде диполей в отсутствии резонанса между пучком и средой

$$k_z U \neq \omega_D. \quad (3.39)$$

Очень важно понять, как пучок влияет на дисперсию волн поляризации в отсутствии резонанса с волной пучка. Зависимость частоты от волнового вектора принимает вид

$$k_z U = \sqrt{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}}. \quad (3.40)$$

Для анализа резонансного взаимодействия, происходящего между электрическим пучком и системой диполей, решение уравнения (3.40) необходимо искать в виде

$$\omega = k_z U + \eta = \sqrt{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}} + \eta, \quad (3.41)$$

при этом уравнение для определения сдвига частоты η определяется следующим образом

$$\eta^3 \pm \frac{\hbar k^2}{m_e} \eta^2 - \frac{\omega_{Le}^2 \omega_D^2}{2\sqrt{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}}} = 0. \quad (3.42)$$

Если частотный сдвиг намного превышает квантовые добавки, или когда $\eta \gg \frac{\hbar k^2}{m_e}$, решение уравнения (3.42) будет выглядеть следующим образом

$$\eta = \xi \sqrt[3]{\frac{\omega_{Le}^2 \omega_D^2}{2\sqrt{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}}}}, \quad (3.43)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{1} = \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right). \quad (3.44)$$

В противоположном пределе $\eta \ll \frac{\hbar k^2}{m_e}$ частотный сдвиг будет комплексным

$$\eta = \pm i \sqrt{\frac{m_e}{\hbar k^2}} \frac{\omega_{Le} \omega_D}{\sqrt{2} \sqrt[4]{\omega_D^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_d^2}}}. \quad (3.45)$$

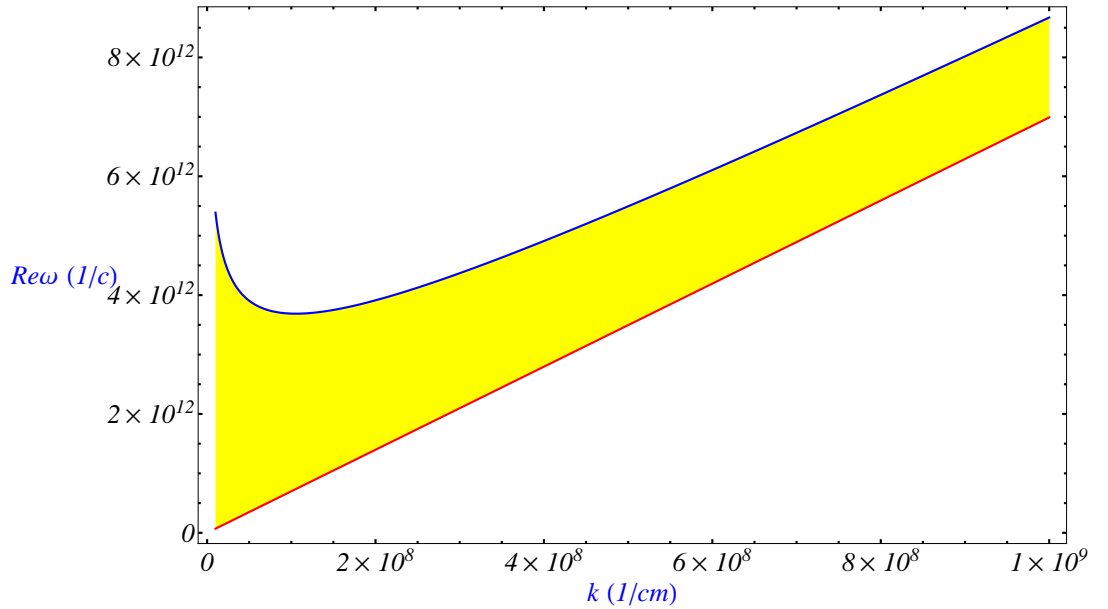


Рис. 3.9: Дисперсия собственных волн (3.41) при резонансном взаимодействии электронного пучка со средой, $\eta \ll \frac{\hbar k^2}{m_e}$. Синяя ветвь дисперсии отражает влияние возмущения поляризации в среде. Равновесная плотность пучка $\rho_{0b} = 5 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, масса электронов в пучке $m_e = 9.1 \cdot 10^{-28} \text{ г}$, скорость частиц пучка $U = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}$, концентрация молекул среды $\rho_d \simeq 10^{23} \text{ см}^{-3}$, масса $m_d \simeq 5 \cdot 10^{-23} \text{ г}$.

Из полученных результатов можно сделать следующий вывод - пучок электронов, движущийся в среде диполей, поляризованных внешним электрическим полем, приводит к неустойчивости и возрастанию амплиту-

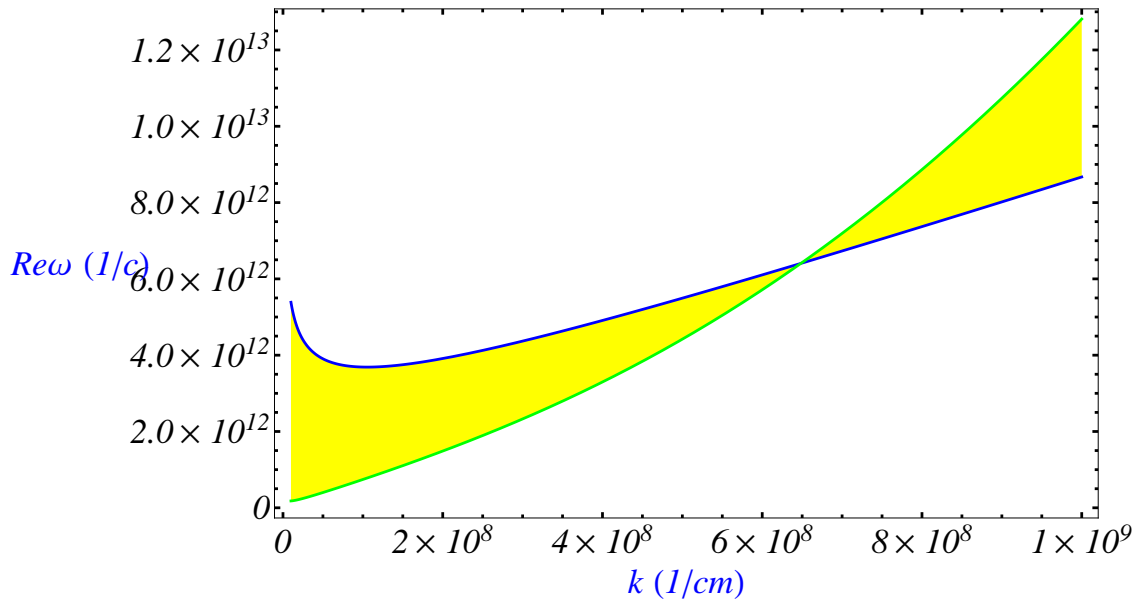


Рис. 3.10: Дисперсия собственных волн (3.41) при резонансном взаимодействии электронного пучка со средой, $\eta \ll \frac{\hbar k^2}{m_e}$. Зелёная ветвь отражает влияние потенциала Бома частиц среды $\sim \hbar^2/4m_d^2$.

ды волн поляризации. Основной целью, при этом, было исследование систем конечных размеров, в которой увеличение скорости пучка считается незначительным, в то время как бесконечный и однородный пучок электронов при своём движении во внешнем поле должен распространяться с существенным ускорением.

В качестве двумерного кристалла диполей может быть выбран двумерный графен, поскольку в последнее время особый интерес появился в направлении изучения ферроэлектрических свойств двумерных кристаллов (моно- и бислойного графена, нитрида бора и др.), имеющих гексагональную решётку. Ферроэлектрический двумерный кристалл помещается во внешнее электрическое поле, параллельное плоскости кристалла [97]. Следует напомнить, что в трёхмерных кристаллах влияние локальных полей, индуцированных диполями, в результате диполь-дипольных взаимодействий будет весьма слабым. С открытием графена [98] возник большой интерес в изучении двумерных структур, для которых локальные поля достигают весьма больших значений $E_{dip} \sim 2 \cdot 10^6$ В/см.

3.7 Выводы

Системы многих взаимодействующих частиц, с постоянными дипольными моментами, требуют особого теоретического внимания и обоснования. Наиболее простой аппарат для описания сред с поляризацией может быть сформулирован на основе квантовой гидродинамики путём введения многочастичного гамильтониана взаимодействий.

Основной задачей, поставленной в работе, было определение волновой динамики в системах нейтральных и заряженных частиц, используя метод квантовой гидродинамики. На основе многочастичного уравнения Шредингера, учитывающего вклад в энергию кулоновского, диполь-дипольного и заряд-дипольного взаимодействий, в представлении самосогласованного поля, была выведена замкнутая система континуальных уравнений: уравнение непрерывности (2.18), уравнение баланса импульса (2.19), уравнение эволюции плотности дипольного момента (2.21) и уравнение динамики плотности потока дипольного момента (2.29). Следует отдельно отметить тот факт, что уравнения эволюции поляризации и потока поляризации, для исследования механизмов поляризации, были получены впервые. Для кулоновских и диполь-дипольных взаимодействий были получены коллективные поля, определяющие динамику частиц и сами определяющиеся этой динамикой. Источником коллективного макроскопического кулоновского поля является скалярная плотность заряда ρ , в то время как источником коллективного макроскопического поля диполей является плотность дипольного момента \mathbf{P} . Для системы нейтральных дипольных частиц вклад динамики дипольных моментов становится основным. Полученный замкнутый аппарат для исследования сред с поляризацией крайне отличается от ранее предложенных, поскольку содержит уравнения движения для электрической поляризации и потока поляризации. Развитая теоретическая модель описания систем многих частиц с поляризацией была получена в приближении квазистатических диполей.

Используя выведенные уравнения, была поставлена и решена задача на возбуждение волн в различных физических системах в линейном приближении. В первую очередь, был получен спектр волн для двумерного газа заряженных дипольных частиц и газа нейтральных частиц различной размерности. Как и следовало ожидать, наличие дипольного момента приводит к дисперсии нового типа волн, а так же даёт существенный вклад в динамику ранее полученных волн. Важно отметить, что в вычислениях было учтено влияние на движение потока частиц квантового потенциала Бома, имеющего исключительно квантовый характер, и отсутствующего в классическом приближении. При этом, волны электрической поляризации, обнаруженные в системе диполей различных размерностей, обладают определённым свойством, - их частоты ω стремятся к нулю при стремлении к нулю модуля волнового вектора $k \rightarrow 0$. Важной отличительной особенностью новой волны является то, что её дисперсионная кривая имеет характерный максимум, существование которого связано с учётом диполь-дипольных взаимодействий, что свидетельствует о наличии отрицательной дисперсии. Групповая скорость такой волны меняет знак при переходе через максимум.

Была поставлена и решена задача на возбуждение волн поляризации в системах, состоящих из заряженных частиц двух сортов. В отсутствие возмущений поляризации решение даёт спектр ленгмюровских и ионно-звуковых волн, отражающих также вклад квантового потенциала Бома. При учёте возмущения плотности дипольного момента в среде, была получена новая затухающая коллективная поляризационная мода, в приближении малости тепловых скоростей ионной компоненты по сравнению с тепловой скоростью электронов, переходящая в дисперсионную зависимость волны поляризации в двумерной среде нейтральных дипольных частиц.

Так же было исследовано влияние поляризации на дисперсионные характеристики экситонов в системе электронов и дырок, в качестве которых

могут выступать дипольные ионы. Кроме того, в работе была показана возможность генерации волн в системах поляризованных частиц посредством моноэнергетического пучка нейтральных дипольных частиц, а так же с помощью пучка электронов. В последнем случае электронный пучок, проходящий через дипольную среду, находящуюся во внешнем электрическом поле, приводит к неустойчивости и возрастанию амплитуды волны поляризации.

Поляризационные моды, полученные в проделанной работе, должны быть приняты во внимание при расчётах теплоёмкости и нелинейной динамики акустических и ионно-звуковых волн, они так же могут способствовать, наряду с фононами, процессу формирования куперовских пар в сверхпроводниках. Возмущение поляризации среды может быть использовано в изучении процессов передачи информации в биологических структурах и тканях, ведь такие процессы не сопровождаются возмущениями плотности частиц и связаны исключительно с изменением их дипольного момента, приводящего к возмущению их коллективной поляризации. В биологических мембранах нервных клеток диполь-дипольное взаимодействие молекул бислоя может играть существенную роль в процессах перемещения импульса по волокну, а так же отвечать за дальнодействия между молекулами ферментов.

Развитая физическая модель позволяет исследовать линейные и нелинейные процессы в средах с электрической дипольной поляризацией, в качестве которых могут выступать металлические кластеры и плёнки, молекулярные кристаллы, сегнетоэлектрические плёнки и сегнетоэлектрические жидкие кристаллы, а так же ферроэлектрические кристаллы. Кроме того важным является изучения влияния диполь-дипольных взаимодействий на формирование и свойства холодной плазмы Ридберга, состоящей из электронов e^- и ионов оксида азота NO^+ , обладающих собственными дипольными моментами.

Результаты, представленные главах [2] и [3], были полностью отражены в пяти публикациях автора [99] - [103].

Глава 4

Спиновые эффекты в различных средах

Пространственно-временная эволюция и физические характеристики системы N заряженных или нейтральных частиц со спинами определяется в окрестности каждой точки трёхмерного физического пространства, а не в абстрактном конфигурационном пространстве, поэтому динамическая теория систем многих частиц должна строиться на языке полевых функций в трехмерном физическом пространстве.

Первые работы, связанные с построением модели квантовой гидродинамики одной бесспиновой частицы во внешнем поле, были предприняты ещё Маделунгом [104]. Конфигурационное пространство одной частицы изоморфно трехмерному физическому пространству, в этом случае переход от уравнения Шредингера к уравнениям гидродинамики сводится к введению новых обозначений для действительной и мнимой частей волновой функции ψ , в которых

$$\psi = \sqrt{n} e^{\frac{iS}{\hbar}}, \quad (4.1)$$

здесь n - амплитуда и S - фаза волновой функции соответственно. Впоследствии, благодаря геометро-гидродинамическому представлению, была построена квантовая гидродинамика частицы со спином $1/2$ [105] - [111]. В подходе авторов состояние электрона определяется заданием двух-компонентного

спинора

$$\psi^\alpha = Re^{iS/\hbar}\xi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \quad (4.2)$$

где ξ нормированная на единицу $\xi^+\xi = 1$, спиновая часть волновой функции, хранящая информацию о спиновых состояниях частицы.

Впервые, для описания систем N взаимодействующих частиц подход квантовой гидродинамики был развит в работах [91], [112] - [118]. В работе [91] было показано, что динамика заряженных частиц с кулоновскими взаимодействиями, во внешнем электромагнитном поле, может быть представлена в виде полевых уравнений микроскопической эволюции в физическом пространстве. Переход к макроскопическому описанию был получен путём локальных усреднений. Система уравнений гидродинамики (локальные законы сохранения), состоящая из уравнения баланса числа частиц, уравнения баланса импульса и уравнения баланса энергии, включала также квантовые поправки, обусловленные многочастичным квантовым потенциалом Бома. Также в работе [91] было найдено обобщение интеграла Коши для системы заряженных частиц и одночастичное нелинейное уравнение Шредингера.

Основы квантовой гидродинамики системы N взаимодействующих фермионов во внешних электромагнитных полях был развит в работах [112] - [114]. Из многочастичного уравнения Шредингера была выведена фундаментальная система уравнений эволюции фермионов: уравнение баланса числа частиц, баланса импульса, баланса намагниченности и баланса энергии. В работе [118] авторами был вычислен вклад обменных корреляций в уравнения баланса, благодаря развитому методу вычисления многочастичных функций, определённых через волновые функции. Благодаря этому подходу была получена система нестационарных уравнений для многоэлектронного атома, частным случаем которой является модель Томаса-Ферми. В работе [116] были получены уравнения магнитной гидродинамики с учётом конечной массы электрона и показано, что в линейном приближении

система полученных уравнений приводит к результатам, совпадающим с результатами многожидкостной гидродинамики. Было получено точное решение уравнений магнитной гидродинамики в виде стационарной нелинейной волны. В статье [116] был вычислен спектр плазменных, электромагнитных и спиновых волн в двухкомпонентной системе частиц с собственными магнитными моментами.

В работе [117], с помощью квантово-механического определения плотности вероятности, концентрации, плотности тока и энергии, была поставлена и решена задача о нахождении функции распределения, приводящей, в результате вычисления статистических средних, к тем же локальным величинам, которые следуют из квантовой механики. Полученная функция распределения совпадает с функцией Вигнера [119] - [124] для пространственно-однородных систем. Помимо этого, в работе получена цепочка уравнений Боголюбова, а также уравнение Лиувилля для квантовой функции распределения при произвольном числе частиц системы, и квантовое кинетическое уравнение с самосогласованным электромагнитным полем.

В последние годы, благодаря развитию экспериментальных технологий, значительный рост претерпевает интерес к изучению свойств квантовой плазмы [125] - [139]. В работе [126], на основе одночастичного уравнения Шредингера, получены уравнения квантовой кинетики для функции распределения, исходя из определения Вигнера. Показано, что в пределе $\hbar \rightarrow 0$, полученные уравнения переходят в уравнения Власова.

В статье [133] была исследована динамика и возникновение тёмных солитонов и вихрей в квантовой электронной плазме. Квантовая динамика ультрахолодной квантовой плазмы моделировалась системой уравнений Пуассона и нелинейного Шредингера. Магнитогидродинамический предел для исследования коллективных макроскопических эффектов в сильно намагниченной электрон-позитронной плазме, с учётом спиновых свойств электронов и позитронов, был использован в работе [135]. Авторами также было

рассчитано влияние спинов частиц на эволюцию одномерных альвеновских волн, подчиняющихся модифицированному уравнению Кортевега-де Фриза. В работах [137] и [140], с помощью одночастичного уравнения Шредингера, получена система уравнений квантовой гидродинамики частиц со спинами во внешних электромагнитных полях. Рассмотрен, учитывая наличие у частиц собственных магнитных моментов, магнито-гидродинамический предел электрон-ионной плазмы. Авторами также было показано, что наличие спина электрона может приводить к появлению новых нелинейных структур в электрон-позитронной плазме. Учёт спина при распространении одномерных альвеновских волн, приводит к модифицированному уравнению Кортевега-де Фриза, открывая возможность генерации нелинейных солитонов, отсутствующих в классическом пределе. В процессе исследования ферромагнитного поведения плазмы, было обнаружено, что включение влияния спина в теорию, при рассмотрении электромагнитных волн в плазме, приводит к возникновению магнитной неустойчивости, источником которой является магнитное давление. В работе [138] с помощью магнито-гидродинамической модели рассмотрено ферромагнитное поведение низкотемпературной плазмы, с включением спиновых эффектов, квантовой дисперсии частиц и эффектов вырождения.

Используя уравнения квантовой гидродинамики, включающие квантовый потенциал Бома и учитывающие наличие у частиц собственных магнитных моментов, в работе [141] был предсказан вклад спиновой динамики в магнито-звуковые солитонные волны, распространяющиеся в квантовой замагниченной плазме. Ультра-холодные лабораторные системы, в качестве которых может быть взята ультра-холодная Ридберовская плазма [142], помещенная в слабое магнитное поле, должны усиливать спиновые эффекты, приводящие к формированию спиновых солитонов. В работе [143], на основе магнитной гидродинамики, включающей токи Холла, авторами была рассмотрена пылевая плазма, в которой частицы пыли наделены собственными

дипольными магнитными моментами и массой порядка $\sim 10^{-14}$ г. Было показано, что кинетические альвеновские волны, в такой плазме, проявляют неустойчивость при низких температурах и высокой плотности плазмы. Пылевая плазма содержит новые физические явления, такие как акустические пылевые волны, пылевые ионно-акустические волны и возможность создания плазменных пылевых кристаллов [144].

Лабораторные исследования спиновой динамики частиц плазмы с квантовым спином в сильных полях, созданными с помощью интенсивных лазеров, привлекает большой интерес в изучении квантовых физических явлений [145], [146]. Влияние спина электронов и самосогласованного спин-спинового взаимодействия на эволюцию собственных волн, распространяющихся вдоль направления внешнего поля, в вырожденном электронном газе во внешнем магнитном поле, было исследовано в работе [147]. Волны, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю были рассмотрены в статье [148].

Циркулярно-поляризованные электромагнитные волны, распространяющиеся параллельно внешнему магнитному полю, или вистлеры, открытые больше чем столетие назад [149], исследуются на протяжении многих лет [150] - [153], но значительный успех в изучении влияния спиновых эффектов на свойства таких волн был достигнут только в последние годы. Вистлеры исследовались в контексте изучения волновых процессов ионосферы Земли, где они распространяются на частотах ~ 100 Гц в направлении дипольного магнитного поля Земли [154]. Эти волны были так же обнаружены в магнитосфере Земли [155], в поясах Юпитера и Сатурна. Вистлеры также исследуются в лабораторной плазме [155] - [158]. В работе [158], используя модель двумерной несжимаемой магнитной плазмы, проведено моделирование линейных вистлеров малой амплитуды и рассмотрена возможность существования топологических структур магнитного поля. Влияние спинов частиц на распространение циркулярно-поляризованных волн в намагни-

ченной плазме было исследовано в работе [159]. Авторами был рассчитан спектр волн, одна из которых распространяется на частотах ниже электронной циклотронной частоты, другая выше частоты спиновой прецессии, соответствуя спиновым модам в ферромагнетиках. Показано, что найденные спиновые поправки могут оказывать влияние на дисперсию волн только в случае плотной астрофизической плазмы, находящейся в достаточно сильных $B_0 \sim 4.4138 \times 10^{13} G$ внешних магнитных полях.

Теоретическая модель, описывающая эволюцию завихренности в астрофизической плазме $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ была построена преимущественно в работах [160] - [162]. В работе [160], с помощью численного моделирования уравнения классической завихренности, полученное в статьях [161] и [162], были исследованы немагнитные и магнитные, создаваемые магнитным напряжением, в присутствии неоднородного магнитного поля, вихри солнечной фотосферы. В работе [163] получено обобщенное уравнение квантовой завихренности для спиновой квантовой плазмы и выведен закон сохранения спиральности.

Нелинейные турбулентные процессы, ассоциирующиеся с электромагнитными волнами в плазме, исследуются в работах [164] - [166]. Авторами работы [164] рассмотрены нелинейные взаимодействия низкочастотных электронных волн Вистлера в намагниченной плазме, включающей несжимаемые электроны и неподвижные ионы. Показано, что энергия и средний квадрат завихренности переносятся по спектру турбулентности под действием внешних сил, приводя к явлению двойного каскада. Двух-жидкостная модель квантовой гидродинамики электрон-ионной плазмы допускает существование различных типов волн, отличающихся интервалами длин волн (альвеновские волны, вистлеры, быстрые и медленные магнитогидродинамические волны). На основе двух-жидкостной модели электрон-ионной плазмы (не учитывающей уравнение баланса энергии), включающей динамику ионов, изучены нелинейные взаимодействия высокочастотных альвеновских

волн. Спектр волн плазмы солнечного ветра, соответствующий высокочастотным кинетическим альвеновским волнам был получен в работах [167] - [169].

Нелинейная динамика электромагнитных волн Вистлера в магнитной плазме, без учёта электронного спина, была изучена авторами работы [170]. Используя метод ренормгруппы, развитый для различных физических систем [171] - [173], было получено динамическое уравнение для медленноменяющейся амплитуды вистлеров и показано, что амплитуды собственных волн удовлетворяют системе связанных нелинейных уравнений Шредингера.

В последние годы большой интерес проявляется к изучению поведения плотной астрофизической плазмы. Прежде всего плотная квантовая плазма встречается в астрофизических задачах, в ядрах планет и коре старых звёзд [174] - [185]. Другими яркими примерами проявления плотной квантовой плазмы являются эксперименты по изучению квантовых точек, т.е. фрагментов полупроводника или проводника, электроны или дырки которого ограничены по трём измерениям, нанопроволок, сверхмалых электронных устройств и квантовых диодов [186] - [193]. Квантовая плазма также исследуется в контексте экспериментов по рентгеновскому рассеянию в плотной плазме, при взаимодействии мощных лазеров с плазменной мишенью, а также при исследовании задач квантовых лазеров на свободных электронах [194] - [199]. Значительных результатов удалось достичь в изучении нелинейных процессов в нерелятивистской плотной квантовой плазме. В первую очередь была предсказана локализация квазистационарных структур, таких как одномерные квантовые темные солитоны и двумерные квантовые вихри, при этом долгоживущими являются пары вихрей с различной полярностью [200]. Теоретически было предсказано неустойчивость вынужденного рамановского и бриллюэновского рассеяния электромагнитной волны большой амплитуды [201].

Несмотря на большие успехи в изучении линейных и нелинейных свойств квантовой и плотной квантовой плазмы, всё же существуют проблемы, которые осложняют более глубокое изучение. В первую очередь, это сложная динамика электрон-позитронных пар в плотной плазме, которые обладают релятивистскими скоростями. Метод квантовой гидродинамики для изучения коллективных процессов в спиновых системах, развитый в последующих главах, позволяет учесть ряд особенностей спиновой плазмы. Полученная система уравнений магнитоплазмы позволяет предсказать новые свойства поведения плотной квантовой плазмы, особенно в области наноструктур и наноматериалов.

Глава 5

Квантовая гидродинамика системы многих взаимодействующих частиц со спинами

5.1 Постановка задачи

Прогресс в экспериментальном развитии изучения свойств углеродных наноструктур и наноматериалов, в которых присутствует плазма, а так же опытное исследование квантовых точек, нанопроволок, квантовых диодов, металлических наноструктур и металлических кластеров, привело к широкому теоретическому развитию представлений о квантовой плазме, спин частиц которой может оказывать существенное влияние на её волновые свойства.

Квантовая гидродинамика систем многих взаимодействующих частиц, наделенных спинами, была развита в ряде работ [112], [113], [118], где авторами были получены основные уравнения квантовой гидродинамики, исходя из многочастичного уравнения Паули.

Основной задачей настоящей работы является получить замкнутую систему уравнений магнитной квантовой гидродинамики частиц, обладающих спином: уравнение баланса импульса, эволюции намагниченности и баланса энергии. При этом мы считаем важным учесть в этих уравнениях

коллективные вклады в эволюцию среды спинов частиц, не вытекающие из многочастичного гамильтониана взаимодействий.

Важной особенностью плазмы, и в первую очередь квантовой спиновой плазмы, являются процессы турбулентности. Как было отмечено выше, двумерные вихри являются устойчивыми нелинейными образованиями в магнитной плазме. Второй задачей, поставленной в данной работе, является вывод обобщённого уравнения классической завихренности для системы многих взаимодействующих частиц, исходя из многочастичного гамильтониана взаимодействий, учитывающего кулоновские и спин-спиновые взаимодействия между частицами, а так же коллективные спиновые эффекты.

В рамках развитой, в данной работе, теоретической модели мы также ставим своей задачей исследование линейных и нелинейных свойств поведения квантовой магнитной плазмы по внешним полям.

5.2 Теория Паули системы многих частиц

Для получения системы континуальных уравнений необходимо ввести гамильтониан взаимодействий, включающий в себя энергию спин-спинового и кулоновского взаимодействий. Система заряженных и нейтральных частиц, с кулоновским взаимодействием между зарядами и дипольным спин-спиновым взаимодействием между спинами, может быть рассмотрена на основе многочастичного уравнения Шредингера-Паули

$$i\hbar \frac{\partial \psi_s(R, t)}{\partial t} = (\hat{H}\psi)_s(R, t), \quad (5.1)$$

где $R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Многочастичный гамильтониан взаимодействий такой системы имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{j=1}^N \left(\frac{\hat{D}_j^2}{2m_j} + q_j \varphi_{j,ext} - \mu_j \hat{\sigma}_j^\alpha B_{j,ext}^\alpha \right) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{j \neq k}^N q_j q_k T_{jk} - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k, k}^N \mu_j^2 F_{jk}^{\alpha\beta} \hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta, \end{aligned} \quad (5.2)$$

здесь q_j - заряд j -ой частицы, причём $q_e = -e$ или $q_p = e$ для электрона и иона соответственно, m_j - её масса, $\mu_j = g\mu_{jB}/2$ - магнитный момент электрона или иона, $\mu_{jB} = q_j\hbar/2m_jc$ - магнетон Бора j -ой частицы и \hbar - постоянная Планка. Расширенная ковариантная производная имеет вид

$$\hat{D}_j^\alpha = -i\hbar\hat{\nabla}_j^\alpha - \frac{q_j}{c}A_j^\alpha, \quad (5.3)$$

где $\mathbf{A}_{ext}, \varphi_{j,ext}$ - векторный и скалярный потенциал электромагнитного поля.

Функции Грина кулоновского и спин-спинового взаимодействий представимы выражениями

$$T_{jk} = \frac{1}{r_{jk}}, \quad F_{jk}^{\alpha\beta} = 4\pi\delta^{\alpha\beta}\delta(\vec{r}_{jk}) + \partial_j^\alpha\partial_k^\beta\frac{1}{r_{jk}}. \quad (5.4)$$

Состояние системы из N фермионов характеризуется волновой функцией в трёхмерном конфигурационном пространстве, которая для частицы со спином $1/2$ является спинором ранга N

$$\psi_s(R, t) = \psi_{s_1, s_2, \dots, s_N}(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t). \quad (5.5)$$

Первым шагом в построении модели квантовой гидродинамики является введение концентрации частиц в окрестности точки \mathbf{r} трёхмерного физического пространства. Если определить концентрацию частиц как квантовое усреднение по состояниям системы оператора концентрации в координатном представлении $\hat{\rho} = \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ мы получим выражение вида

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \psi_s^+(R, t) \psi_s(R, t), \quad (5.6)$$

здесь учтено, что суммирование ведётся по всем спиновым состояниям S системы. Применяя процедуру дифференцирования концентрации $\rho(\mathbf{r}, t)$ по времени и, используя многочастичное уравнение Паули-Шредингера (5.1) с гамильтонианом взаимодействий (5.2), приходим к уравнению непрерывности

$$\frac{\partial\rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \vec{\nabla}\vec{j}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (5.7)$$

где вектор плотности тока появляется в микроскопическом виде

$$j^\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2m_j} \left(\hat{D}_j^{+\alpha} \psi_s^+(R, t) \psi_s(R, t) \right. \\ \left. + \psi_s^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \psi_s(R, t) \right). \quad (5.8)$$

Следующим шагом является получение уравнения движения или уравнения Эйлера для спиновой квантовой плазмы. Для этого необходимо применить вышеописанную процедуру для вектора плотности тока (5.8), продифференцировав его по времени и применив многочастичное уравнение Паули-Шредингера. Таким образом, уравнение баланса импульса может быть выведено в общем виде [112]

$$\partial_t j^\alpha(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \partial_\beta \mathfrak{R}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{m} \rho(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (5.9) \\ + \frac{q}{mc} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} j_\beta(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' q^2 \partial^\alpha T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \\ + \frac{1}{m} M_\beta(\vec{r}, t) \partial^\alpha B_{ext}^\beta(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{m} \int d\mathbf{r}' \partial^\alpha F^{\gamma\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M^{\gamma\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t).$$

В уравнении (5.9) появляется новый тензор второго ранга, представляющий собой тензор плотности потока импульса, его микроскопическое выражение, совпадающее с результатами работы [91], имеет вид

$$\mathfrak{R}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{4m_j} \left(\psi_s^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha D_j^\beta \psi_s(R, t) \right. \\ \left. + (\hat{D}_j^\alpha \psi_s(R, t))^+ D_j^\beta \psi_s(R, t) + (\hat{D}_j^\beta \psi_s(R, t))^+ D_j^\alpha \psi_s(R, t) \right. \\ \left. + (\hat{D}_j^\alpha D_j^\beta \psi_s)^+(R, t) \psi_s(R, t) \right) \quad (5.10)$$

В уравнении (5.9) возникает ряд новых физических понятий, которые требуют введение в теорию новой информации. В первую очередь это информация о спиновых состояниях системы многих взаимодействующих спинирующихся частиц, которая заложена в понятии плотности магнитного момента среды. Намагниченность, тем самым, должна быть введена в теорию в своём микроскопическом представлении, как функция в окрестности точки \mathbf{r} трёхмерного физического пространства [113]

$$M^\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_s \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \mu_j \psi_s^+(R, t) \hat{\sigma}_j^\alpha \psi_s(R, t), \quad (5.11)$$

где суммирование так же ведётся по всем спиновым состояниям частиц S .

В уравнении (5.9) так же появляется вклад кулоновского и спин-спинового взаимодействий, которые характеризуются двухчастичными функциями. Где функция

$$\rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_s \int dR \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) \psi_s^+(R, t) \psi_s(R, t), \quad (5.12)$$

представляет собой двухчастичную плотность вероятности, нормированную на $N(N-1)$, нахождения двух частиц в окрестностях точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' , а функция

$$M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \sum_s \int dR \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) \mu_j \mu_k \psi_s^+ \hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta \psi_s(R, t). \quad (5.13)$$

двухчастичный тензор плотности магнитного момента [113].

Для описания среды, состоящей из магнитных частиц, уравнения баланса импульса (5.9) и закона сохранения числа частиц (5.7) недостаточно. Для замыкания полученных уравнений необходимо вывести уравнение, описывающее эволюцию вектора плотности магнитного момента [112]. Для этого необходимо продифференцировать выражение (5.11) по времени, используя многочастичное уравнение Паули-Шредингера (5.1)

$$\partial_t M^\alpha(\mathbf{r}, t) + \partial_\beta \mathfrak{S}_M^{\alpha\beta} = \frac{2\mu}{\hbar} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} M^\beta(\mathbf{r}, t) B_{ext}^\gamma(\mathbf{r}, t) \quad (5.14)$$

$$+ \frac{2\mu}{\hbar} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \int d\mathbf{r}' F^{\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M^{\beta\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t),$$

где тензор плотности потока магнитного момента $\mathfrak{S}_M^{\alpha\beta}$ принимает вид

$$\mathfrak{S}_M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mu_j}{4m_j} (\psi_s^+ \hat{\sigma}_j^\alpha \hat{D}_j^\beta \psi_s + \quad (5.15)$$

$$+ (\hat{\sigma}_j^\alpha D_j^\beta \psi_s)^+ \psi_s)(R, t).$$

Следует обратить внимание, что уравнения (5.9) и (5.14) не замкнуты до конца, поскольку содержат двухчастичные функции. Для замыкания уравнений необходимо найти функциональную зависимость двухчастичных функций от одночастичных полевых функций, таких как концентрация числа частиц ρ , плотность магнитного момента M^α и скорость потока частиц v^α . Эта задача более подробно будет рассмотрена ниже.

5.3 Введение поля скоростей

Состояние системы фермионов описывается волновой функцией в $3N$ -мерном конфигурационном пространстве, которая является спинором N -го ранга. Для выделения потоковых скоростей и представления тензорных величин, входящих в уравнения движения и динамики намагниченности, в явном виде их зависимости от функций поля, необходимо представить спинор N -го ранга в виде

$$\psi_s(R, t) = a(R, t) e^{\frac{iS}{\hbar}} \varphi_s(R, t), \quad (5.16)$$

где $S(R, t)$ и $R(R, t)$ - реальные фаза и амплитуда волновой функции соответственно, а φ , нормированный на единицу $\varphi^+ \varphi = 1$ - объект, в котором

заложена информация о состоянии спина. Скорость j -ой частицы определяется выражением вида [111]

$$\vec{v}_j = \frac{1}{m_j} (\vec{\nabla}_j S - i\hbar\varphi^+ \vec{\nabla}_j \varphi) - \frac{q_j}{m_j c} \vec{A}_j, \quad (5.17)$$

а гидродинамическая скорость связана с плотностью тока соотношением

$$\vec{j}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \vec{v}(\mathbf{r}, t). \quad (5.18)$$

Скорость j -ой частицы $\vec{v}_j(R, t)$ зависит от всех координат системы частиц R , где R - $3N$ координаты N частиц $R = (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$. Скорость потока частиц $v^\alpha(\mathbf{r}, t)$ связана со скоростью каждой частицы среды соотношением $u_j^\alpha(\mathbf{r}, R, t) = v_j^\alpha(R, t) - v^\alpha(\mathbf{r}, t)$, где $u_j^\alpha(\mathbf{r}, R, t)$ - квантовый аналог тепловой скорости каждой частицы среды.

Тензор плотности потока импульса и тензор плотности потока магнитного момента, при подстановке в их микроскопические определения (5.10) и (5.15) волновой функции (5.16), приобретают вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = m\rho(\mathbf{r}, t)v^\alpha(\mathbf{r}, t)v^\beta(\mathbf{r}, t) + \wp^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \\ + \Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \Upsilon_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t), \end{aligned} \quad (5.19)$$

и

$$\mathfrak{S}_M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = M^\alpha v^\beta(\mathbf{r}, t) + \gamma_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t). \quad (5.20)$$

Здесь тензор кинетического давления

$$\wp^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) m_j u_j^\alpha u_j^\beta, \quad (5.21)$$

определяется в своём микроскопическом представлении через произведение квантовых аналогов тепловых скоростей $u_j^\alpha(\vec{r}, R, t)$ j -ой частицы среды.

Появившийся в выражении для плотности потока импульса (5.19) тензор $\Lambda^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$, пропорционален квадрату постоянной Планка \hbar^2 и имеет исключительно квантовую природу, являясь дополнительным квантовым давлением или многочастичным квантовым потенциалом Бома (2.15), действующим даже на покоящуюся жидкость благодаря неоднородному распределению её плотности в пространстве, и определяющимся выражением (2.16).

Тензор $\Upsilon_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$ появляется в выражении для плотности потока импульса благодаря наличию в определении волновой функции информации о спиновых состояниях частиц, и может быть интерпретирован как дополнительное *спиновое напряжение* или внутреннее *спиновое давление*

$$\Upsilon_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \frac{1}{m_j} \nabla_j^\alpha s_j^\gamma \nabla_j^\beta s_j^\gamma. \quad (5.22)$$

На языке поля намагниченности, учитывая, что вектор спина \mathbf{s} связан с вектором спина j -ой частицы среды \mathbf{s}_j соотношением [202]

$$\xi_j^\alpha(\mathbf{r}, R, t) = s_j^\alpha(R, t) - s^\alpha(\mathbf{r}, t),$$

где $\xi_j^\alpha(\mathbf{r}, R, t)$ - аналог тепловых флуктуаций спинов каждой частицы. Тензор коллективного *спинового натяжения* - $\Upsilon_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t)$, с учётом тепловых флуктуаций спинов, принимает вид

$$\Upsilon_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{4m\mu^2} M_\gamma(\mathbf{r}, t) \partial^\alpha \partial^\beta \left(\frac{M^\gamma(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \right) + Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t). \quad (5.23)$$

Спиновая сила действует на покоящуюся жидкость в случае неоднородного распределения спинов частиц в пространстве, причём $Q_s^{\alpha\beta}$ - есть тензор спиновых тепловых флуктуаций

$$Q_s^{\alpha\beta}(\vec{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \frac{1}{m_j} \nabla_j^\alpha \xi_j^\gamma \nabla_j^\beta \xi_j^\gamma \quad (5.24)$$

$$-\frac{\rho}{2m}\nabla^\beta\left\{\nabla^\alpha\left(\frac{1}{\rho}\sum_S\int dR\sum_{j=1}^N\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)a^2(R,t)\xi_{j\gamma}\xi_j^\gamma\right)\right\}$$

Аналогично тому, как было получено макроскопическое разложение тензора плотности потока импульса, макроскопическое представление тензора плотности потока магнитного момента (5.15), после подстановки волновой функции в явном виде (5.16), приобретает вид

$$\mathfrak{S}_M^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = M^{\alpha\nu\beta}(\mathbf{r},t) + \gamma_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) + d_T^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t), \quad (5.25)$$

где

$$\gamma_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = -\sum_S\int dR\sum_{j=1}^N\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\frac{2\mu_j}{m_j\hbar}a^2(R,t)\varepsilon^{\alpha\mu\nu}s_j^\mu\nabla_j^\beta s_j^\nu \quad (5.26)$$

представляет собой спиновую добавку в уравнении динамики намагничённости, с которой связан внутренний *спиновый момент вращения*, который, после выделения тепловых эффектов, приобретает вид

$$\gamma_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = -\frac{\hbar}{2m\mu_j}\varepsilon^{\alpha\gamma\lambda}M_\gamma(\mathbf{r},t)\partial_\beta\left(\frac{M^\lambda(\mathbf{r},t)}{\rho(\mathbf{r},t)}\right) + \Theta_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t). \quad (5.27)$$

Последнее слагаемое $d_T^{\alpha\beta}$ в выражении для плотности потока магнитного момента связано с тепловыми флуктуациями потоковой скорости u_j^β и отражает диссипативные процессы, происходящие в среде

$$d_T^{\alpha\beta}(\mathbf{r},t) = \sum_S\int dR\sum_{j=1}^N\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j)\frac{2\mu_j}{\hbar}a^2(R,t)u_j^\beta s_j^\alpha. \quad (5.28)$$

Новый тензор (5.27) появляется в выражении для тензора плотности потока магнитного момента благодаря учёту внутренних спиновых эффектов, являясь отличным от нуля в случае неоднородного распределения спинов в пространстве, а так же в случае диссипативных процессов, связанных с тепловыми флуктуациями спинов частиц среды, наличие которых отражено в тензоре $\Theta_s^{\alpha\beta}$

$$\Theta_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = -\varepsilon^{\alpha\mu\nu} \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{2\mu_j}{m_j \hbar} a^2(R, t) \xi_{j\mu} \nabla_j^\beta \xi_j^\nu \quad (5.29)$$

Спиновый момент вращения $\gamma_s^{\alpha\beta}(\vec{r}, t)$, появившийся в уравнении баланса намагниченности, по своему виду, напоминает вклад обменной энергии кубического изотропного ферромагнетика.

5.4 Классическая завихренность

Для исследования вихревых процессов в квантовой спиновой плазме необходимо вывести квантово-гидродинамическое уравнение вихревой жидкости, учитывающее кулоновские и спин-спиновые взаимодействия между зарядами и спинами частиц среды. Первым шагом в этом направлении является введение микроскопической завихренности в окрестности точки трехмерного физического пространства \mathbf{r} в виде

$$\Omega^\alpha(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}}{2m_j} \hat{\nabla}_{j\beta} (\hat{D}_j^{+\gamma} \psi_s^+ \psi_s + \psi_s^+ \hat{D}_j^\gamma \psi_s)(R, t). \quad (5.30)$$

В явном представлении волновой функции (5.16) макроскопическое выражение классической завихренности принимает более явный вид

$$\vec{\Omega}(\mathbf{r}, t) = (\vec{\nabla} \times \vec{j})(\mathbf{r}, t), \quad (5.31)$$

5.5 Уравнение баланса энергии

Аналогично тому, как были получены спиновые вклады в уравнении баланса импульса и намагниченности, уравнение баланса энергии так же должно включать в себя влияние коллективных спиновых эффектов. Введем плотность внутренней энергии системы частиц с кулоновским и спин-спиновыми взаимодействиями в виде [112]

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}, t) = & \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{4m_j} \{ \psi_s^+ \vec{D}_j^2 \psi_s + (\vec{D}_j^2 \psi_s)^+ \psi_s \} (R, t) \quad (5.32) \\ & + \int dR \sum_{i \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{2} \psi_s^+(R, t) \{ q_j q_k T_{jk} - \mu_j \mu_k \sigma_j^\alpha \sigma_k^\beta F_{jk}^{\alpha\beta} \} \psi_s(R, t). \end{aligned}$$

Дифференцируя выражение (5.32) по времени, используя исходное уравнение Паули-Шредингера с гамильтонианом (5.2), получим уравнение баланса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{r}, t) + \vec{\nabla} \vec{Q}(\mathbf{r}, t) = qj_\alpha(\mathbf{r}, t) E_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (5.33)$$

$$+ J_M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta B_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) + A(\mathbf{r}, t),$$

где $A(\mathbf{r}, t)$ - скалярное поле плотности работы внутренних сил, совершаемой системой частиц со спинами, $\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t)$ - плотность потока внутренней энергии, включающей поток кинетической и потенциальной энергии системы. При этом плотность потока внутренней энергии оказывается равной

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = & \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{8m_j^2} \left(\psi_s^+ \mathbf{D}_j \mathbf{D}_j^2 \psi_s + (\mathbf{D}_j \mathbf{D}_j^2 \psi_s)^+ \psi_s \right) (R, t) \quad (5.34) \\ & + \mathbf{D}_j^+ \psi_s^+(R, t) \mathbf{D}_j^2 \psi_s(R, t) + (\mathbf{D}_j^2 \psi_s(R, t))^+ \mathbf{D}_j \psi_s(R, t) \\ & + \int dR \sum_{j \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{4m_j} \left(\psi_s^+(R, t) (q_j q_k T_{jk} - \mu_j^2 \sigma_j^\alpha \sigma_k^\beta F_{jk}^{\alpha\beta}) \mathbf{D}_j \psi_s(R, t) + k.c. \right) \end{aligned}$$

Последнее слагаемое $A(\mathbf{r}, t)$ в уравнении баланса энергии (5.33) обозначает скалярное поле плотности работы внутренних сил, которая складывается из работы, совершаемой кулоновским взаимодействием между частицами $A_{cl}(\mathbf{r}, t)$ и работы спин-спинового взаимодействия $A_{s-s}(\mathbf{r}, t)$ [91], [112]

$$A(\mathbf{r}, t) = A_{s-s}(\mathbf{r}, t) + A_{cl}(\mathbf{r}, t) + A_s(\mathbf{r}, t)$$

$$\begin{aligned}
A_{s-s}(\mathbf{r}, t) &= \sum_s \int dR \sum_{i \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mu_j \mu_k}{2} (\nabla_j^\gamma F_{jk}^{\alpha\beta}) \times \\
&\times \left(\frac{1}{m_j} \{ (\hat{\sigma}_k^\alpha \hat{\sigma}_j^\beta \hat{D}_j^\gamma \psi_s)^+(R, t) \psi_s(R, t) + \psi_s^+(R, t) (\hat{\sigma}_k^\alpha \hat{\sigma}_j^\beta \hat{D}_j^\gamma \psi_s(R, t)) \} \right. \\
&- \frac{1}{2m_j} \{ (\hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta \hat{D}_j^\gamma \psi_s)^+(R, t) \psi_s(R, t) + \psi_s^+(R, t) (\hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta \hat{D}_j^\gamma \psi_s(R, t)) \} \\
&\left. + \frac{1}{2m_k} \{ (\hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta \hat{D}_k^\gamma \psi_s)^+(R, t) \psi_s(R, t) + \psi_s^+(R, t) (\hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\beta \hat{D}_k^\gamma \psi_s(R, t)) \} \right)
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
A_{cl}(\mathbf{r}, t) &= \sum_s \int dR \sum_{i \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{1}{4} (q_j q_k \nabla_\alpha T_{jk}) \times \\
&\times \left(\frac{1}{m_j} \{ \hat{D}_j^{+\alpha} \psi_s^+(R, t) \psi_s(R, t) + \psi_s^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \psi_s(R, t) \} \right. \\
&+ \frac{1}{2m_j} \{ \hat{D}_j^{+\alpha} \psi_s^+(R, t) \psi(R, t) + \psi_s^+(R, t) \hat{D}_j^\alpha \psi_s(R, t) \} \\
&\left. - \frac{1}{2m_k} \{ \hat{D}_k^{+\alpha} \psi_s^+(R, t) \psi(R, t) + \psi_s^+(R, t) \hat{D}_k^\alpha \psi_s(R, t) \} \right)
\end{aligned}$$

Работа, которая появляется без вклада операторов

$$\begin{aligned}
A_s(\mathbf{r}, t) &= \sum_s \int dR \sum_{i \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mu_j \mu_k}{2} (\nabla_j^\gamma F_{jk}^{\alpha\beta}) \varepsilon^{\mu\beta\nu} \times \\
&\times \left(\frac{2\mu_j}{\hbar} B_{ext}^\mu \psi_s^+(R, t) \hat{\sigma}_j^\nu \hat{\sigma}_k^\alpha \psi_s(R, t) + \frac{2\mu_k}{\hbar} B_{ext}^\mu \psi_s^+(R, t) \hat{\sigma}_j^\alpha \hat{\sigma}_k^\nu \psi_s(R, t) \right) \\
&- \sum_s \int dR \sum_{i \neq k}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{\mu_j \mu_k}{2} (\nabla_j^\gamma F_{jk}^{\alpha\beta}) \varepsilon^{\eta\alpha\nu} \times
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{i \neq k} \frac{2\mu_i \mu_k}{\hbar} F_{jk}^{\mu\eta} \psi_s^+(R, t) (\sigma_i^\mu \sigma_j^\beta \sigma_k^\nu + \sigma_j^\beta \sigma_k^\nu \sigma_i^\mu) \psi_s(R, t) \\
& \times \sum_{i \neq k} \frac{2\mu_i \mu_j}{\hbar} F_{jk}^{\mu\eta} \psi_s^+(R, t) (\sigma_i^\mu \sigma_j^\nu \sigma_k^\beta + \sigma_j^\nu \sigma_k^\beta \sigma_i^\mu) \psi_s(R, t).
\end{aligned}$$

После выделения поля скоростей и поля спинов, благодаря подстановки волновой функции в явном виде (5.16) в определение плотности потока энергии (5.34) и плотности работы, а так же учитывая макроскопическое разложение тензора плотности потока импульса (5.19) и плотности потока магнитного момента (5.27), полученные в предыдущем разделе, уравнение баланса энергии (5.33) примет вид

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \epsilon(\mathbf{r}, t) + \vec{\nabla} \vec{q}(\mathbf{r}, t) + \frac{\hbar^2}{4m\rho(\mathbf{r}, t)} \{ \partial_\alpha \rho(\mathbf{r}, t) \} \{ \partial^\beta \rho(\mathbf{r}, t) \} \partial_\beta v^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\hbar^2}{4m} \partial_\alpha \partial^\beta \rho(\mathbf{r}, t) \partial_\beta v^\alpha(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar^2}{4m\mu^2} M_\gamma(\mathbf{r}, t) \partial_\alpha \partial^\beta \left(\frac{M^\gamma(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \right) \partial_\beta v^\alpha(\mathbf{r}, t) \\
& + Q_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \nabla_\beta v^\alpha(\mathbf{r}, t) + p^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta v_\alpha(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar^2}{4m} \partial_\alpha (\rho(\mathbf{r}, t) \partial_\alpha \partial^\beta v^\beta(\mathbf{r}, t)) \\
& = d_T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) \partial_\beta B_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) - \frac{\hbar}{2m\mu} \varepsilon^{\alpha\mu\nu} M_\mu(\mathbf{r}, t) \partial_\beta \left(\frac{M^\nu(\mathbf{r}, t)}{\rho(\mathbf{r}, t)} \right) \nabla_\beta B_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) \\
& \quad + \nabla_\beta B_{ext}^\alpha(\mathbf{r}, t) \Theta_s^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) + \aleph(\mathbf{r}, t).
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_s^{\alpha\beta}(\vec{r}, t) &= \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \frac{1}{m_j} \nabla_j^\alpha \xi_j^\gamma \nabla_j^\beta \xi_j^\gamma \quad (5.38) \\
& - \frac{\rho}{2m} \nabla^\beta \left\{ \nabla^\alpha \left(\frac{1}{\rho} \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \xi_{j\gamma} \xi_j^\gamma \right) \right\}
\end{aligned}$$

и

$$d_T^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, t) = \sum_S \int dR \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \frac{2\mu_j}{\hbar} a^2(R, t) u_j^\beta s_j^\alpha. \quad (5.39)$$

Учитывается, что плотность энергии состоит из плотности кинетической и плотности удельной энергии

$$\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \frac{m\mathbf{v}^2(\mathbf{r}, t)}{2} + \rho(\mathbf{r}, t) \epsilon(\mathbf{r}, t). \quad (5.40)$$

Уравнение (5.37), замкнутое выражениями (5.38) и (5.39), представляет собой обобщенное уравнение баланса внутренней энергии, учитывающее влияние плотности спина частиц. Третье, четвертое и восьмое слагаемые в левой части уравнения (5.37) отражают влияние на энергию квантового давления или квантового потенциала Бома, а седьмое слагаемое - тензора кинетического давления. Пятое слагаемое в левой части отражает влияние *спинового натяжения* (5.23). Второе слагаемое в правой части уравнения (5.37) связано с действием на энергию *спинового углового момента* (5.27), отличного от нуля даже в отсутствии магнитных полей, но если средний спин частиц распределен неоднородно. Влияние тепловых флуктуаций спина и скоростей частиц характеризуется наличием шестого слагаемого в левой части, а так же первого и третьего слагаемых в правой части уравнения.

Плотность удельной энергии $\rho\epsilon$ системы взаимодействующих фермионов должна быть представлена в форме

$$\begin{aligned} \rho\epsilon(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) & \left(\frac{m_j \mathbf{u}_j^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta_j a}{a} + \frac{1}{2m_j} |\nabla_\alpha s_j^\alpha|^2 \right) \\ & + \frac{q^2}{2} \int d\mathbf{r}' T(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) - \frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' F^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) \end{aligned} \quad (5.41)$$

как видно из выражения (5.41), удельная внутренняя энергия включает в себя кинетическую энергию тепловых флуктуаций частиц (первое слагаемое), второе слагаемое, пропорциональное квадрату постоянной Планка,

вытекает из квантового потенциала Бома, как результат действия квантового давления, третье слагаемое в выражении (5.41) связано с внутренними свойствами системы фермионов и отражает вклад в энергию внутреннего *спинового давления*, существование которого вытекает из неоднородного распределения спинов частиц в пространстве. Плотность удельной энергии включает в себя также плотность потенциальной энергии кулоновского и спин-спинового взаимодействия между частицами.

Плотность потока тепловой кинетической энергии q^α приобретает обобщённый вид

$$q^\alpha(\mathbf{r}, t) = \int dR \sum_j^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) a^2(R, t) \left[u_j^\alpha \left(\frac{m_j \mathbf{u}_j^2}{2} - \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\Delta_j a}{a} + \frac{1}{2m_j} |\nabla_\alpha s_j^\alpha|^2 \right) - \frac{\hbar^2}{2m_j} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} \left(u_{j\beta} \frac{\partial \ln a}{\partial x_j^\beta} \right) - \frac{\hbar^2}{4m_j} \frac{\partial^2 u_{j\beta}}{\partial x_j^\alpha \partial x_j^\beta} + \frac{u_{j\beta}}{m_j} \partial^\alpha s_{j\gamma} \partial^\beta s_j^\gamma \right] \quad (5.42)$$

5.6 Приближении самосогласованного поля

Электрические и магнитные взаимодействия, приводящие к изменениям квантовых состояний частиц, представляются в виде суперпозиции взаимодействий через коллективное самосогласованное поле и непосредственных корреляций между частицами. Двухчастичные функции, появляющиеся в уравнениях квантовой гидродинамики, а именно, двухчастичная плотность вероятности и двухчастичная намагничённость, появляющаяся за счёт взаимодействия собственных магнитных моментов могут быть записаны в виде [112]

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \int dR \sum_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) (\psi^+ \psi)(R, t) \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) \rho(\mathbf{r}', t) + \eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned}
M^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) &= \int dR \sum_{jk} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_k) \mu^2 \psi_S^+(\sigma_j^\alpha \sigma_k^\beta) \psi(R, t) \\
&= M^\alpha(\mathbf{r}, t) M^\beta(\mathbf{r}', t) + \mu^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t),
\end{aligned} \tag{5.44}$$

Первые слагаемые в разложениях двухчастичных функций представляют взаимодействие в среде через самосогласованное поле, в то время, как вторые слагаемые характеризуют взаимодействие через корреляции, где $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$, $\mu^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ - корреляционные функции. Волновая функция ψ автоматически учитывает статистику. Отличие гидродинамики бозонов и фермионов характеризуется в различие выражений для функций поля, отвечающих за взаимодействие. Отличия, вызванные симметрией и антисимметрией волновой функции, сводятся к описанию среды симметричным и антисимметричным произведением одночастичных волновых функций, по аналогии с методом Хартри-Фока. Двухчастичная плотность вероятности имеет вид

$$\rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = N(N-1) \int dR_{N-2} \langle \rho_1, \rho_2, \dots | \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} \rangle \langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | \rho_1, \rho_2, \dots \rangle, \tag{5.45}$$

В случае бозонов имеем

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}', R_{N-2} | \rho_1, \rho_2, \dots \rangle &= \sum_f \sqrt{\frac{n_f}{N}} \langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}', R_{N-2} | \rho_1, \rho_2, \dots, (\rho_f - 1), \dots \rangle = \\
&= \sum_f \sum \sqrt{\frac{\rho_f}{N}} \sqrt{\frac{\rho_{f'}}{N-1}} \langle \mathbf{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}' | f' \rangle \langle R_{N-2} | \rho_1, \dots, (\rho'_f - 1), \dots, (\rho_f - 1), \dots \rangle \\
&\quad + \sum_f \sqrt{\frac{\rho_f(\rho_f - 1)}{N(N-1)}} \langle \vec{r} | f \rangle \langle \mathbf{r}' | f \rangle \langle R_{N-2} | \rho_1, \dots, (\rho_1 - 2), \dots \rangle.
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Двухчастичная намагниченность и поляризация принимают в случае бозонной среды, приобретают вид

$$\mu^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{f, f'} \rho_f \rho_{f'} \psi_f^*(\vec{r}) \hat{\sigma}_f^\alpha \psi_f(\vec{r}) \psi_{f'}^*(\mathbf{r}') \hat{\sigma}_{f'}^\beta \psi_{f'}(\mathbf{r}') \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_f \rho_f (\rho_f + 1) \psi_f^*(\vec{r}) \hat{\sigma}_f^\alpha \psi_f(\mathbf{r}) \psi_f^*(\mathbf{r}') \hat{\sigma}_f^\beta \psi_f(\mathbf{r}') \\
& + \sum_{f,f'} \rho_f \rho_{f'} \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{\sigma}_f^\alpha \psi_f(\mathbf{r}') \psi_{f'}^*(\mathbf{r}') \hat{\sigma}_{f'}^\beta \psi_{f'}(\mathbf{r})
\end{aligned}$$

Аналогично, двухмесячные функции фермионов задаются выражением

$$\mu^{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{f,f'} \rho_f \rho_{f'} \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{\sigma}_f^\alpha \psi_f(\mathbf{r}') \psi_{f'}^*(\mathbf{r}') \hat{\sigma}_{f'}^\beta \psi_{f'}(\mathbf{r}) \quad (5.48)$$

$$- \sum_{f,f'} n_f n_{f'} \psi_f^*(\mathbf{r}) \hat{\sigma}_f^\alpha \psi_f(\mathbf{r}') \psi_{f'}^*(\mathbf{r}') \hat{\sigma}_{f'}^\beta \psi_{f'}(\mathbf{r}),$$

$$\rho_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{f,f'} \rho_f \rho_{f'} |\psi_f(\mathbf{r})|^2 |\psi_{f'}(\mathbf{r}')|^2 - \sum_{f,f'} \rho_f \rho_{f'} \psi_f^*(\mathbf{r}) \psi_f(\mathbf{r}') \psi_{f'}^*(\mathbf{r}') \psi_{f'}(\mathbf{r}). \quad (5.49)$$

5.7 Система континуальных уравнений квантовой гидродинамики спиновой плазмы

В приближении самосогласованного поля уравнения сохранения числа частиц (5.7), уравнение баланса импульса (5.9), уравнение эволюции намагниченности (5.14) и уравнение динамики классической вортисити (5.30), учитывающие квантовые и спиновые добавки, для системы электронов или позитронов, так же ионов, ($p=e, i$) принимают вид

- уравнение непрерывности

$$\partial_t \rho_p + \vec{\nabla} \cdot (\rho_p \vec{v}_p) = 0, \quad (5.50)$$

- уравнение баланса импульса

$$m_p \rho_p (\partial_t + v_p^\beta \partial_\beta) \vec{v}_p = q_p \rho_p \vec{E}_{ext} + \frac{1}{c} \vec{j}_{pe} \times \vec{B}_{ext} - \vec{\nabla} \wp_p \quad (5.51)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m_p}\rho_p\vec{\nabla}\left(\frac{\Delta\sqrt{\rho_p}}{\sqrt{\rho_p}}\right)+M_{p\beta}\vec{\nabla}B_{ext}^\beta-\partial_\beta Q_s^{\alpha\beta}+\frac{\hbar^2}{4m\mu^2}\partial_\beta\left\{M_p^\gamma\vec{\nabla}\partial^\beta\left(\frac{M_p^\gamma}{\rho_p}\right)\right\}$$

$$-\rho_p\vec{\nabla}\int d\mathbf{r}'q_p^2T(\mathbf{r},\mathbf{r}')\rho_p(\mathbf{r}',t)+M_{p\gamma}\vec{\nabla}\int d\mathbf{r}'F^{\gamma\delta}(\mathbf{r},\mathbf{r}')M_p^\delta(\mathbf{r}',t),$$

- уравнение эволюции вектора намагниченности

$$(\partial_t+v_p^\beta\partial_\beta)\vec{M}_p=\frac{2\mu_p}{\hbar}\vec{M}_p\times\vec{B}_{ext}+\frac{\hbar}{2m_p\mu_p}\partial_k\left\{\vec{M}_p\times\partial^k\left(\frac{\vec{M}_p}{\rho_p}\right)\right\}\quad(5.52)$$

$$-\partial_\beta\Theta_s^{\alpha\beta}-\partial_\beta d_t^{\alpha\beta}+\frac{2\mu_p}{\hbar}\epsilon^{\alpha\beta\gamma}M_p^\beta\int d\mathbf{r}'F^{\gamma\delta}(\mathbf{r},\mathbf{r}')M_p^\delta(\mathbf{r}',t),$$

- уравнение динамики классической завихренности $\vec{\omega}_p=\vec{\nabla}\times\vec{v}_p$

$$\partial_t\vec{\omega}_p=\vec{\nabla}\times(\vec{v}_p\times\vec{\omega}_p)-\vec{\nabla}\left(\frac{1}{m_p\rho_p}\right)\times\vec{\nabla}\wp_p+\frac{1}{m_p}\vec{\nabla}\left(\frac{M_{pk}}{\rho_p}\right)\times\vec{\nabla}B_{ext}^k\quad(5.53)$$

$$+\frac{1}{cm_p}\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\rho_p}\vec{j}_{pe}\times\vec{B}\right)+\frac{\hbar^2}{4m_p^2\mu_p^2}\vec{\nabla}\left(\frac{M_p^\nu}{\rho_p}\right)\times\vec{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_p}\nabla_k(\rho_p\nabla^k\left\{\frac{M_p^\nu}{\rho_p}\right\})\right\}$$

$$-\frac{q_p}{m_p c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\frac{1}{m_p}\vec{\nabla}\left(\frac{M_{p\gamma}}{\rho_p}\right)\times\vec{\nabla}\int d\mathbf{r}'F^{\gamma\delta}(\mathbf{r},\mathbf{r}')M_p^\delta(\mathbf{r}',t).$$

Обсудим полученные результаты по-порядку. Первое и второе слагаемые в правой части уравнения (5.51) представляют силу Лоренца, действующую на плотность движущегося заряда во внешнем электромагнитном поле. Третье слагаемое представляет действие кинетического давления. Четвёртое слагаемое в правой части (5.51) отражает влияние квантовой силы, как

результата влияния квантового потенциала Бома. Пятое и девятое слагаемые характеризуют вклад силы, возникающей благодаря учёту энергии намагниченности среды во внешнем магнитном поле и внутренних полях, как следствие диполь-дипольных взаимодействий магнитных моментов. Восьмое слагаемое есть вклад внутренних электрических полей, возникающих в результате Кулоновских взаимодействий соседних зарядов.

Седьмое слагаемое в (5.51) представляет собой действие *спинового намагничивания* (5.23), оказывающего влияние на элемент жидкости даже в отсутствии внешних электромагнитных полей, стремясь выстроить соседние спины параллельно друг другу. Шестое слагаемое в правой части уравнения баланса импульса отражает действие тепловых флуктуаций спина.

Первое и пятое слагаемые в правой части уравнения (5.52) эволюции намагниченности отражают действие крутящего углового момента (5.27) на магнитный момент или, в случае системы многих взаимодействующих частиц, на вектор намагниченности среды, внешних и внутренних магнитных полей. Второе слагаемое в правой части уравнения (5.52) отражает действие *спинового углового момента*, стремящегося повернуть вектор намагниченности в среде с неоднородным распределением спинов частиц в пространстве, даже в отсутствии внешних магнитных полей. Наличие подобной спиновой добавки идентично по своей форме вкладу энергии обменных взаимодействий в изотропных ферромагнетиках, что влечёт за собой генерацию спиновых волн. Третье и четвертое слагаемые отражают вклад тепловых флуктуаций спинов, а так же тепловых скоростей отдельных частиц.

Уравнение (5.53) является расширенным или обобщённым уравнением динамики классической завихренности, где $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$. В правой части уравнения (5.53) отражены различные механизмы, ассоциирующиеся с возникновением вихревых потоков в жидкости. Второе слагаемое в правой части характеризует гидродинамические процессы бароклиной генерации завихренности, и связано с присутствием градиента плотности частиц сре-

ды. Третье и седьмое слагаемые характеризуют вклад энергии намагничённости среды, во внешних и внутренних, как результат диполь-дипольных взаимодействий между магнитными моментами, магнитных полях, в процессы возникновения вихревых потоков и связаны с нелинейными эффектами, возникающими в средах с неоднородным распределением намагничённости \vec{M}_p . Четвёртое слагаемое в правой части уравнения (5.53) отражает вклад магнитного давления и магнитных натяжений в возникновение вихревых потоков в жидкости. Шестое слагаемое связано с действием вихревых электрических полей на жидкость. Пятое слагаемое отражает механизмы генерации завихренности в отсутствии магнитных полей, и может быть интерпретировано как результат действия *спинового натяжения* (5.23) внутри жидкости. Важно отметить, что квантовый потенциал Бома не вносит вклада в возникновение вихревых процессов.

Система уравнений (5.51) - (5.53) может быть переписана в терминах самосогласованных электрических и магнитных полей, создаваемых движущимися зарядами q_p и спинами \vec{s}_p частиц среды, без учета тепловых флуктуаций спинов

$$m_p(\partial_t + v_p^\beta \partial_\beta) \vec{v}_p = q_p \vec{E} + \frac{q_p}{c} \vec{v}_{pe} \times \vec{B} - \frac{\vec{\nabla} \wp_p}{\rho_p} \quad (5.54)$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2m_p} \vec{\nabla} \left(\frac{\Delta \rho_p}{\rho_p} - \frac{(\nabla \rho_p)^2}{2\rho_p^2} \right) + \frac{2\mu_p}{\hbar} s_{p\beta} \vec{\nabla} B_{eff}^\beta,$$

$$(\partial_t + v_p^\beta \partial_\beta) \vec{s}_p = \frac{2\mu_p}{\hbar} \vec{s}_p \times \vec{B}_{eff}. \quad (5.55)$$

Уравнение динамики удельной энергии ϵ_p

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla \right) \epsilon_p(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{\rho_p} \vec{\nabla} \vec{q}(\mathbf{r}, t) + \frac{p_p^{\alpha\beta}}{\rho_p}(\mathbf{r}, t) \nabla_\beta v_p^\alpha(\mathbf{r}, t) \quad (5.56)$$

$$+ \frac{\hbar^2}{4m_p \rho_p^2(\mathbf{r}, t)} \{ \nabla_\alpha \rho_p(\mathbf{r}, t) \} \{ \nabla^\beta \rho_p(\mathbf{r}, t) \} \nabla_\beta v_p^\alpha(\mathbf{r}, t)$$

$$-\frac{\hbar^2}{4m_p\rho_p}\nabla_\alpha\nabla^\beta\rho(\mathbf{r},t)\nabla_\beta v_p^\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{m_p}s_{p\gamma}(\mathbf{r},t)\nabla_\alpha\nabla^\beta s_p^\gamma(\mathbf{r},t)\nabla_\beta v_p^\alpha(\mathbf{r},t)$$

$$-\frac{2\mu_p}{m_p\hbar}\varepsilon^{\alpha\mu\nu}s_{p\mu}(\mathbf{r},t)\nabla_\beta s_p^\nu(\mathbf{r},t)\nabla_\beta B_{ext}^\alpha(\mathbf{r},t) + \aleph(\mathbf{r},t).$$

Уравнение эволюции завихренности $\vec{\Omega}_p$

$$\partial_t\vec{\Omega}_p = \vec{\nabla} \times (\vec{v}_p \times \vec{\Omega}_p) - \vec{\nabla} \left(\frac{1}{m_p\rho_p} \right) \times \vec{\nabla} \wp_p + \frac{2\mu_p}{\hbar m_p} \vec{\nabla} s_k \times \vec{\nabla} B_{eff}^k \quad (5.57)$$

где $\vec{\Omega}_p = \vec{\omega}_p + \frac{q_p}{m_p c} \vec{B}$ - есть обобщённая завихренность и эффективное магнитное поле

$$\vec{B}_{eff} = \vec{B} + \vec{B}_s,$$

включающее общее магнитное поле \vec{B} и внутреннее спиновое поле \vec{B}_s , возникающее как результат неоднородного распределения спинов в пространстве

$$\vec{B}_s = \frac{c}{q_p\rho_p} \nabla_k (\rho_p \nabla^k \vec{s}_p). \quad (5.58)$$

Общее вихревое магнитное поле \vec{B} возникает в результате суммарного движения зарядов среды (электронов и ионов), и в результате существования вихревой намагниченности $\vec{M}_p = 2\rho_p\mu_p\vec{s}_p/\hbar$, возникающей вследствие присутствия ненулевого спина \vec{s}_p . Система уравнений (5.54) - (5.57) должна быть замкнута законом Фарадея

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.59)$$

и законом Ампера

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (5.60)$$

здесь полный ток генерируется не только свободными зарядами, но и намагниченностью системы частиц $\vec{j} = \vec{j}_e + \vec{j}_m$, учитывая спиновый ток $\vec{j}_m =$

$2\mu/\hbar\vec{\nabla} \times (\rho\vec{s})$. Для системы частиц нескольких сортов ($p = e, i$) суммарный ток имеет вид

$$\vec{j} = \sum_p q_p \rho_p \vec{v}_p + \sum_p \frac{2c\mu_p}{\hbar} \vec{\nabla} \rho_p \times \vec{s}_p + \sum_p \frac{2c\mu_p}{\hbar} \rho_p \vec{\nabla} \times \vec{s}_p$$

Полученная замкнутая система уравнения (5.54) - (5.57) для спиновой плазмы, с учетом спиновых добавок, обобщает результаты, полученные в работе [202]. Появление новых коллективных спиновых добавок в уравнении баланса спина (5.55), влияющих на эволюцию спина даже в отсутствие внешних магнитных полей, приводит к возникновению спиновых волн. Рассмотрим систему нейтральных частиц со спинами, помещенную в плоскости xy во внешнем однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно плоскости среды $\mathbf{B}_0 = B_0\mathbf{z}$. В линейном приближении дисперсионные свойства спиновых волн подчиняются закону

$$\omega^2 = \omega_g^2 + \frac{|s_0|}{m} k^2. \quad (5.61)$$

Глава 6

Спиновые эффекты в различных средах

6.1 Влияние спина на электромагнитные волны в квантовой спиновой плазме

Коллективные осцилляции электронов проявляются в возникновении электромагнитных волн круговой поляризации или вистлеров в магнитной плазме. В исследовании спектра этих волн ионная составляющая не принимается во внимание, в первую очередь, благодаря частотному режиму $\Omega_c \ll \omega < \omega_c$, характеризующемуся значительным превосходством частоты волны над ионной циклотронной частотой Ω_c , где ω_c - есть циклотронная частота электронов. Спектральные свойства классических вистлеров и их влияние на турбулентность были рассмотрены в работах [164], [165]. Масштаб длины рассматриваемых волн определяется из условия $c/\Omega_p < \lambda < c/\omega_p$, где Ω_p и ω_p - ионная и электронная плазменные частоты соответственно. В вистлерах, электроны создают ток проводимости и намагниченности, в то время как неподвижные ионы обеспечивают нейтральный фон квантовой спиновой плазмы, которая может быть описана на основе уравнений непрерывности (5.50), уравнения баланса импульса (5.54) и уравнения динамики завихренности (5.57), замкнутых уравнением эволюции спина (5.55) и си-

стемой уравнений полей (5.59), (5.60). Задача состоит в получении спектра двумерных электромагнитных волн в квантовой магнитной плазме, состоящей из несжимаемых электронов $\rho = \rho_0 = const$ и неподвижных ионов. При этом общий ток складывается из тока свободных зарядов и тока намагниченности $j_m = 2\rho_0\mu_e\vec{\nabla} \times \vec{s}/\hbar$, где \vec{s} - вектор спина электронов. Из закона Ампера (5.60) скорость электронов имеет вид

$$\vec{v}_e = -\frac{c}{4\pi\rho_0e}\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{g}{2m_e}\vec{\nabla} \times \vec{s} \quad (6.1)$$

где учтено, что $q_e = -e$ - заряд электрона, $\mu_e = -g\mu_B/2$, $\mu_B = e\hbar/2m_e c$, где g - фактор электрона $g = 2.00231$, m_e - электронная масса, ρ_0 - невозмущенная электронная плотность. В задаче учтено, что электронная плотность постоянна, из уравнения неразрывности (5.50) следует отсутствие дивергенции потоковой скорости электронов $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_e = 0$. Все физические величины представляют сумму невозмущенного состояния и малого возмущения $f = f_0 + f_1$

$$\vec{B}(\mathbf{r}, t) = B_0\mathbf{y} + \delta\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad \vec{s}_e(\mathbf{r}, t) = s_0\mathbf{y} + \delta\mathbf{s}(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (6.2)$$

$$\rho_e(\mathbf{r}, t) = \rho_0, \quad \vec{v}_e(\mathbf{r}, t) = \delta\vec{v}(\mathbf{r}, t) + \dots, \quad \vec{\omega}_e(\mathbf{r}, t) = \vec{\omega}_0 + \delta\vec{\omega}(\mathbf{r}, t) + \dots,$$

где B_0 - внешнее магнитное поле, параллельное оси y , \mathbf{s}_0 - вектор начального состояния спина, направленного противоположно внешнему магнитному полю и $\vec{\omega}_e = \vec{\nabla} \times \vec{v}_e - \frac{e}{m_e c}\vec{B}$. Линеаризованное уравнение эволюции вихревых движений в плазме (5.57) для электронной компоненты примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \times \delta\vec{v} - \frac{e}{m_e c}\delta\vec{B}) + \frac{e}{m_e c}\vec{\nabla} \times (\delta\vec{v} \times \vec{B}_0) = 0 \quad (6.3)$$

Линейные возмущения физических величин δf должны быть пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{x})$, где ω - частота волны, и $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ - квадрат волнового вектора. Трёхмерное уравнение (6.3) замкнутое уравнением динамики спина (5.55) может быть переведено в двумерное путём равенства

нулю производной по направлению \mathbf{z} , $\partial/\partial z = 0$, используя разделение магнитного поля на две скалярные составляющие

$$\delta\vec{B} = \vec{z} \times \vec{\nabla}\psi + b\vec{z}.$$

В линейном приближении, не принимая во внимание вклады тепловых флуктуаций векторов спина, уравнение (6.3) принимает вид

$$\omega\left\{1 + d_e^2 k^2 + \frac{d_e^2 \omega_\mu \tanh(\alpha)}{\omega^2 - \tilde{\omega}_g^2} (k^2 \tilde{\omega}_g - k_y^2 \omega_c)\right\} b \quad (6.4)$$

$$+ d_e^2 k_y \left\{ \omega_c k^2 + \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha)}{\omega^2 - \tilde{\omega}_g^2} (k_y^2 \omega_c \omega_g - k^2 \omega^2) \right\} \psi = 0$$

$$\omega\left\{1 + d_e^2 k^2 + \frac{d_e^2 k_y^2 \omega_\mu \tanh(\alpha)}{\omega^2 - \tilde{\omega}_g^2} (\tilde{\omega}_g - \omega_c)\right\} \psi + d_e^2 k_y \left\{ \omega_c + \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha)}{\omega^2 - \tilde{\omega}_g^2} (\omega_c \tilde{\omega}_g - \omega^2) \right\} b = 0 \quad (6.5)$$

здесь $d_e = c/\omega_{pe}$ - масштаб длины электрона, $\omega_{pe}^2 = 4\pi e^2 \rho_0/m_e$ - плазменная частота электрона, ω_c - циклотронная частота электрона, термодинамическое ослабление спина отражено параметром $\alpha = \mu_B B_0/k_B T_e$. Частота спиновой волны, возникающей в результате влияния внутреннего *спинового углового момента*

$$\tilde{\omega}_g = \frac{g\omega_c}{2} + \frac{k^2 \hbar}{2m_e} \tanh(\alpha),$$

имеет спиновую добавку к частоте спиновой прецессии $\omega_g = g\omega_c/2$, пропорциональную коэффициенту ослабления спина $\tanh(\alpha)$, $\omega_\mu = g^2 \hbar/8m_e d_e^2$ - частота, которая отражает вклад тока намагниченности в возникновение вихревого магнитного поля в уравнении поля (5.60), и \hbar - постоянная Планка. Слагаемые, пропорциональные частоте ω_μ дают вклад в дисперсию волн даже в отсутствии внешнего магнитного поля B_0 . Спиновые вклады приводят к изменению закона дисперсии для колебаний плазмы, причём эти

изменения становятся существенными при условии $\omega < \omega_g \sim \omega_\mu$. Более того, невозмущенное макроскопическое спиновое состояние описывается термодинамически равновесной спиновой конфигурацией. Это означает, что в теории учитывается ослабление состояния спина как результат его термодинамических флуктуаций, что приводит к значениям $|s_0|$ ниже $\hbar/2$. В квантовой случае термодинамически равновесное распределение векторов спина электронного газа приводит к созданию намагниченности вида

$$\vec{M}_0 = \rho_0 \mu_B \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T_e}\right) \hat{B},$$

где $\tanh(\mu_B B_0/k_B T_e)$ - функция Бриллюэна и \hat{B} - единичный вектор в направлении магнитного поля.

Исходя из этого, когда временные масштабы значительно больше, чем период ларморовой прецессии, вектор невозмущенного состояния спина может быть аппроксимирован следующим образом

$$\vec{s} = \frac{\hbar}{2} \frac{q_p}{|q_p|} \tanh\left(\frac{\mu_B B_0}{k_B T_e}\right) \hat{B} = \frac{\hbar}{2} \frac{q_p}{|q_p|} \tanh(\alpha) \hat{B}, \quad (6.6)$$

где, для электрона соответственно $q_p = -e$.

6.1.1 Волны параллельные внешнему магнитному полю

Рассмотрим волны, распространяющиеся в направлении внешнего магнитного поля, для которых $k = k_y$, тогда дисперсионное уравнение, для нормированных длины на $d_e = c/\omega_{pe}$ и временного масштаба на $\omega_c = eB_0/m_e c$, примет вид

$$(1 + d_e^2 k^2) \omega_k^3 - (\omega_c - \omega_\mu) d_e^2 k^2 \omega_k^2 + ((\omega_\mu \tilde{\omega}_g - \tilde{\omega}_g^2 - \omega_\mu \omega_c) d_e^2 k^2 - \tilde{\omega}_g^2) \omega_k + \tilde{\omega}_g^2 d_e^2 k^2 - \tilde{\omega}_g \omega_\mu d_e^2 k^2 = 0, \quad (6.7)$$

Считая, что вклад тока намагниченности в уравнение дисперсии мал, т.е. когда $\omega_\mu < \omega_c$, решение кубического уравнения (6.7) может быть представлено ω_k в следующей форме

$$\omega_1 = \frac{\omega_c d_e^2 k^2}{1 + d_e^2 k^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha)}{\tilde{\omega}_g + (\tilde{\omega}_g - \omega_c) d_e^2 k^2} \right\}, \quad (6.8)$$

и

$$\omega_2 = \tilde{\omega}_g - \frac{\hbar}{2m_e} \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha) d_e^2 k^4}{\tilde{\omega}_g + (\tilde{\omega}_g - \omega_c) d_e^2 k^2}, \quad (6.9)$$

Первая ветвь дисперсии (6.8), представленная на рисунке (6.1), отражает дисперсию низко-частотных волн $\omega < \omega_c$ в спиновой плазме $\omega_c \sim 10^{11}$ Гц, $d_e \simeq 10^{-6}$ см. Её отличие от классической волновой моды $\omega = k^2/(1+k^2)$, рассчитанной в работе [139], характеризуется присутствием в законе дисперсии (6.8) слагаемых, пропорциональных, нормированной на циклотронную частоту, спиновой частоте ω_μ , отражающей вклад спинового тока в скорость электронов. Учёт влияния возмущений плотности спина отражается в сдвиге волновой ветви относительно классического решения. Эта волна завихренности, распространяющаяся вдоль силовых линий внешнего магнитного поля, связана с тем, что электронный ток, а так же ток намагниченности генерируют собственные магнитные поля. Их возмущения приводят к изгибу силовых линий магнитного поля через действие силы Лоренца, не создавая возмущений плотности среды ρ . Сдвиг частоты вниз, по отношению к классическому решению, пропорционален ω_μ и имеет вид

$$\Delta\omega_1 = \frac{\omega_c d_e^2 k^2}{1 + d_e^2 k^2} \times \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha)}{\tilde{\omega}_g + (\tilde{\omega}_g - \omega_c) d_e^2 k^2}, \quad \Delta\omega_2 = \frac{\omega_\mu \tanh(\alpha) (\tilde{\omega}_g - \omega_c) d_e^2 k^2}{\tilde{\omega}_g + (\tilde{\omega}_g - \omega_c) d_e^2 k^2}. \quad (6.10)$$

Важно отметить, что помимо тока намагниченности, на волну, представленную выражением (6.8), влияние оказывает также коллективный спиновый момент, вклад которого пропорционален $\sim \hbar/m_e$. График (6.3) отражает действие различных спиновых эффектов на распространение волны (6.8). Как видно из графика, исключение влияния спинового момента на динамику спина приводит к возникновению неустойчивости.

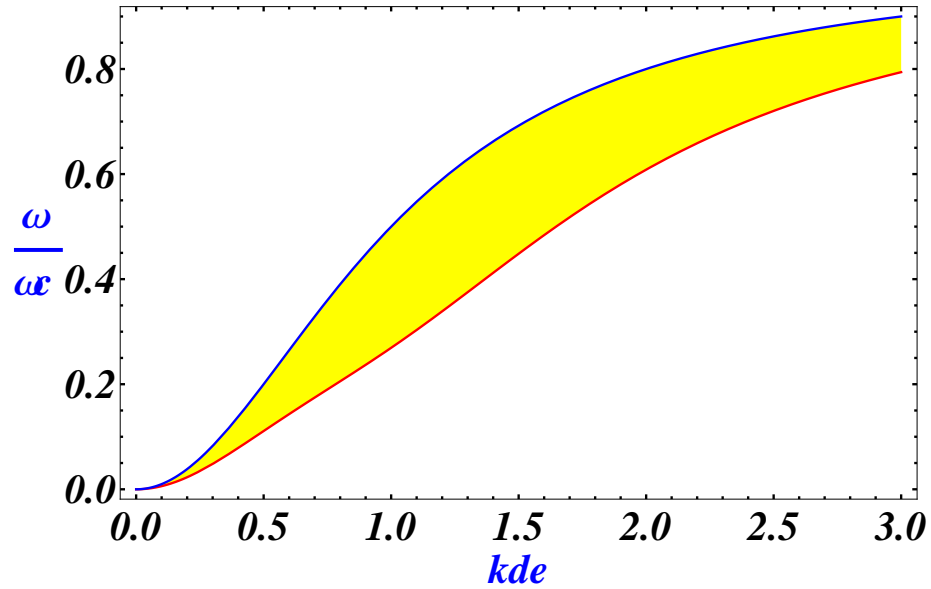


Рис. 6.1: Спектр электромагнитной волны (6.8) в случае нормированных частоты и длин волн, $B_0 = 2 \times 10^4 \text{ Гс}$, $\rho_0 = 5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $m_e = 9.1093 \times 10^{-28} \text{ г}$, $T_e \sim 10 \text{ К}$. Синяя ветвь представляет классическое решение в отсутствие возмущений плотности спина, и красная ветвь отражает вклад тока намагниченности в генерацию вихревого магнитного поля.

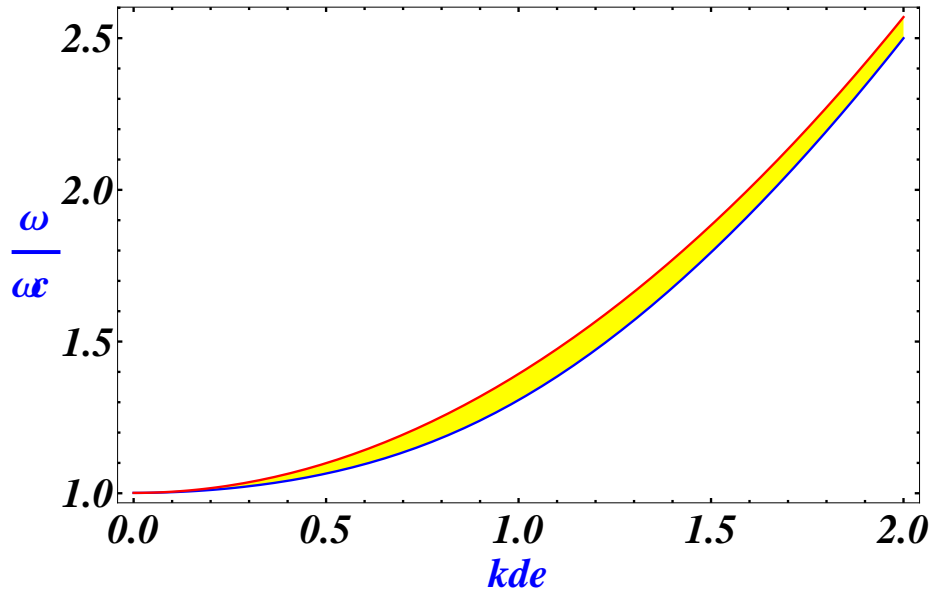


Рис. 6.2: Спектр волны (6.9) в случае нормированных частоты и длин волн, $B_0 = 2 \times 10^4 \text{ Гс}$, $\rho_0 = 5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $m_e = 9.1093 \times 10^{-28} \text{ г}$. Синяя ветвь представляет классическое решение в отсутствие возмущений плотности спина и красная ветвь связана с влиянием нового спинового углового момента.

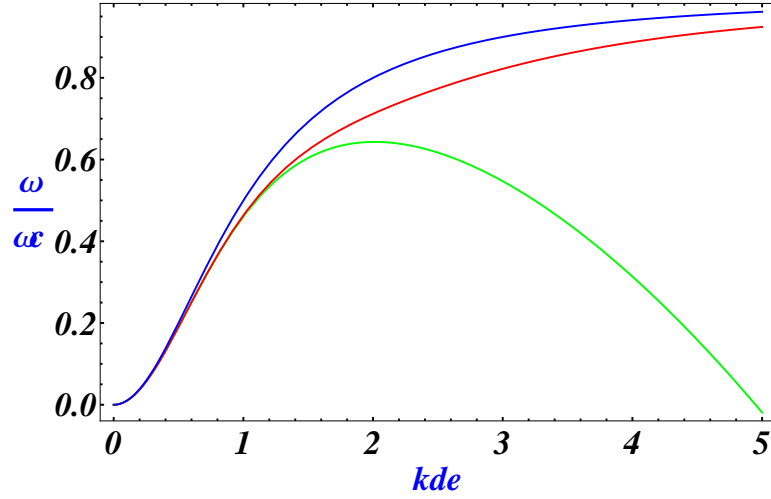


Рис. 6.3: Спектр электромагнитной волны (6.8) в случае нормированных частоты и длин вол, $B_0 = 2 \times 10^4 \text{ Гс}$, $\rho_0 = 5 \cdot 10^{23} \text{ см}^{-3}$, $m_e = 9.1093 \times 10^{-28} \text{ г}$, $T_e \sim 10 \text{ К}$. Синяя ветвь представляет классическое решение, красная ветвь характеризует вклад тока намагниченности в генерацию вихревого магнитного поля и влияние спинового момента на динамику спина. Зелёная ветвь связана с вкладом исключительно от тока намагниченности и не учитывает влияние спинового момента.

Спектр этих волн делится на два режима в зависимости от длины волны, создавая короткий режим, для которого $kd_e > 1$, $\omega_k \sim 1$ и длинноволновой режим $kd_e < 1$, $\omega_k \sim k^2$.

Вторая волновая ветвь (6.9), изображённая на рисунке (6.2), характеризует дисперсию нового типа волн, возникающих в результате спиновой динамики. Их частота оказывается так же сдвинутой относительно ненормированной частоты спиновой прецессии $\tilde{\omega}_g = g\omega_c/2 + k^2\hbar \tanh(\alpha)/2m_e$ благодаря влиянию на эволюцию магнитного поля спинового тока. Важно отметить, что выражение для ω_g является расширенным, и включает действие внутреннего *спинового углового момента вращения*, приводящего к возникновению в среде спиновой волны

$$\tilde{\omega}_g = \frac{g\omega_c}{2} + \frac{\hbar \tanh(\alpha)}{2m_e} k^2. \quad (6.11)$$

Важно отметить, что новая волновая мода (6.9) по отношению к циклотронной частоте спиновой прецессии $g\omega_c/2$ появляется только в результате учёта влияния спинового момента вращения, поскольку $\tilde{\omega}_g - \omega_c \simeq k^2 \hbar \tanh(\alpha)/2m_e$.

- Возможность экспериментального наблюдения

Эффекты квантового вырождения начинают играть определённую роль при температурах электронов T_e ниже или сравнимых с температурами Ферми $T_F = \hbar^2(3\pi^2\rho_0)^{2/3}/2m_e k_B$, где k_B - есть постоянная Больцмана. В этом случае тепловая длина волны де Бройля электронов становится равной среднему межэлектронному расстоянию $\lambda_B = \lambda/\sqrt{2\pi m_e k_B T_e} \sim n_e^{-1/3}$, а сама квантовая плазма становится бесстолкновительной, когда среднее расстояние между электронами приближается к боровскому радиусу $a = 0.53\text{Å}$ [203]. В случае вырождения эффект блокировки Паули уменьшает частоты электрон-электронных и электрон-ионных столкновений.

Макроскопическое невозмущенное значение спина $|s_0|$ может быть взято равным $\hbar/2$ только в случае действия достаточно сильных магнитных полей $B_0 \sim 4.4138 \times 10^{13}\text{Г}$ порядка критического поля и значительных плотностях электронного газа $\rho_0 \sim 10^{30}\text{1/см}^3$, при которых начинают проявляться квантовые эффекты. Давление Ферми становится важным, когда температура Ферми T_F приближается к термодинамической температуре T_e , при этом $T_F/T_e \sim \hbar^2 \rho_0^{2/3}/mk_B T_e$. Влияние квантового потенциала Бома-Маделунга становится важным при низких температурах и весьма значительных плотностях, эффекты, связанные с потенциалом Бома описываются параметром $\hbar\omega_p/k_B T_e$. Для спиновых эффектов ситуация не так проста и связана с конкретной геометрией полей. Альвеновские эффекты характеризуются параметром $\hbar^2\omega_p^2/mc^2 k_B T_e$, а магнито-акустические эффекты параметром $\mu_B B_0/k_B T_e$ [137], [138].

Трёхмерная турбулентность квантовой плазмы исследуется в сверхплотной плазме, получаемой методом лазерного сжатия плазмы [203], где концентрация электронов $\rho_0 \simeq 10^{27} \text{1/см}^3$ и в плазме астрофизических объектов.

Спектральные свойства двумерных электромагнитных волн характеризуются значениями циклотронной частоты электронов $\omega_c \simeq 10^{11} \text{ Гц}$ при величинах внешнего поля $B_0 \sim 10^4 G$. Влияние тока намагниченности на динамику волны характеризуется частотой $\omega_\mu = g^2 \hbar \tanh(\alpha) / 8m_e d_e^2$. Принимая во внимание малость энергии намагниченности $\mu_B B_0 < k_B T_e$ по сравнению с тепловой энергией, $\tanh(\alpha) \simeq \alpha$, $\omega_\mu \leq \omega_c$, зависимость температуры электронов от концентрации представлены графически рис. (6.4).

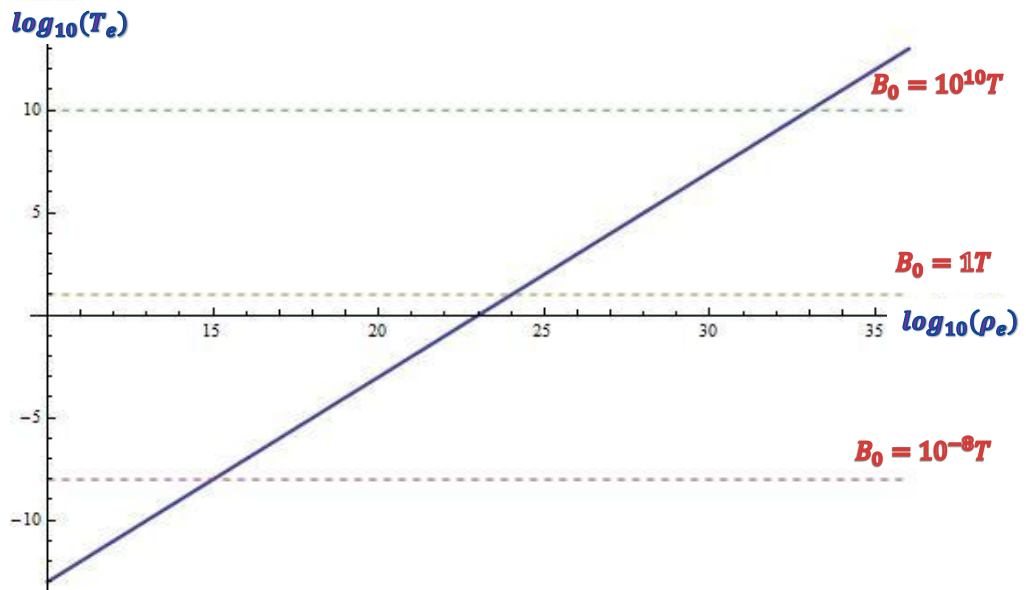


Рис. 6.4: Графическая зависимость значений температуры электронов (К) от концентрации электронов (см^{-3}) при различных значениях внешнего магнитного поля для случая, когда спиновые эффекты оказывают влияние на дисперсию двумерных электромагнитных волн.

6.2 Циркулярно-поляризованные электромагнитные волны в спиновой плазме

Рассмотрим задачу о распространении электромагнитных волн вдоль внешнего магнитного поля $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ в квантовой электрон-ионной плазме, где равновесное значение скорости компонентов плазмы равно нулю. Основной целью является нахождение уравнения нелинейной динамики амплитуды таких волн в случае квантовой спиновой плазмы. Для этого, руководствуясь подходом, развитым в работе [170], введём малые возмущения физических величин около положения их равновесия в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \epsilon \mathbf{A} & \varphi &\rightarrow \epsilon \phi & \mathbf{v}_e &\rightarrow \epsilon \mathbf{v} \\ \rho_e &\rightarrow \rho_0 + \epsilon \rho, & \mathbf{s} &\rightarrow \mathbf{S}_0 + \epsilon \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

здесь ϵ является малым положительным параметром, формально введённым в теорию, который будет равным единице в конце расчётов, $\phi_{j,ext}, \mathbf{A}_{ext}$ - возмущения скалярного и векторного потенциалов электромагнитного поля. Стационарное состояние характеризуется постоянной плотностью числа частиц $\rho_0 = const$, равной нулю скоростью потока $\mathbf{v}_0 = 0$, и нулевыми стационарными амплитудами векторного и скалярного потенциалов соответственно $\mathbf{A}_0 = 0, \phi_0 = 0$. Плотность спина так же подвержена малым возмущениям, где \mathbf{S}_0 невозмущенное значение спина равно для простоты $|S_0| = \hbar/2$. Предполагается, что в основном состоянии спин направлен противоположно внешнему магнитному полю $\mathbf{S}_0 = S_0 \mathbf{e}_x$. Как и в предыдущей задаче ионы не вносят вклада в эволюцию электронов, поскольку ионная плазменная частота намного меньше плазменной частоты электронов $\Omega_P \ll \omega_p$. Основными уравнениями, используемыми для решения поставленной задачи должны стать уравнение неразрывности (5.50), уравнение баланса импульса (5.54) и уравнение динамики плотности спина (5.55) электронов

$$\partial_t n_e + \nabla(\rho_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad (6.13)$$

$$(\partial_t + v_e^\beta \partial_\beta) \vec{v}_e + \frac{1}{m_e \rho_e} \vec{\nabla} p_e - \frac{\hbar^2}{2m_e^2} \vec{\nabla} \left(\frac{\Delta \sqrt{\rho_e}}{\sqrt{\rho_e}} \right) \quad (6.14)$$

и

$$= -\frac{e}{m_e} (\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v}_e \times \vec{B}) + \frac{2\mu}{m_e \hbar} s_\beta \vec{\nabla} B^\beta - \frac{1}{m_e^2 \rho_e} \partial_\beta (\rho_e s^\gamma \vec{\nabla} \partial_\beta s_\gamma)$$

$$(\partial_t + v_e^\beta \partial_\beta) s^\alpha = \frac{2\mu}{\hbar} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} s^\beta B^\gamma + \frac{1}{m_e \rho_e} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} s_\beta \partial_\mu (\rho_e \partial^\mu s^\gamma), \quad (6.15)$$

где m_e - масса электрона, e - заряд электрона, c - скорость света, s^α - спин, $\mu = -g/2\mu_B$, μ_B - электронный магнитный момент $\mu_B = e\hbar/2m_e c$, где g - фактор электрона $g \simeq 2.0023193$. Также, \mathbf{B}, \mathbf{E} - вектора магнитных и электрических полей, $p_e = k_B T_e \rho_e$ - кинетическое давление электронного газа, k_B постоянная Больцмана и $T_e = \hbar^2 (3\pi^2 \rho_e)^{2/3} / 2k_B m_e$ - температура электронного газа. Система уравнений (6.13) - (6.15) должна быть замкнута уравнениями поля

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (6.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (6.17)$$

где $\vec{j} = -e\rho_e \vec{v}_e + c\mathbf{j}_M$ - есть общая плотность тока, состоящая из плотности зарядового тока и спинового тока $\vec{j}_M = 2\mu \nabla \times (\rho_e \mathbf{s}) / \hbar$.

В рамках поставленной задачи электрические и магнитные поля могут быть представлены соответственно через скалярный и векторный потенциалы

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (6.18)$$

подчиняющиеся волновому уравнению

$$\square \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} e\rho_e \mathbf{v}_e - \frac{8\pi\mu}{\hbar} \nabla \times (\rho_e \mathbf{s}), \quad (6.19)$$

в калибровке Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \mathbf{A} = 0 \quad (6.20)$$

Согласно методу медленно меняющегося параметра [170], общее решение уравнений (6.13), (6.14) и (6.15), - ρ , \mathbf{A} , ϕ , \mathbf{S} and \mathbf{v} можно искать в виде разложения

$$\hat{\Psi} = \hat{\Psi}(\vec{x}, \vec{\zeta}, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \epsilon^j \hat{\Psi}_j \quad \hat{\Psi} = (\rho, \mathbf{A}, \phi, \mathbf{v}, \mathbf{S}), \quad (6.21)$$

где все гидродинамические величины и физические поля зависят от пространственных координат, причём $\vec{\zeta} = \epsilon \vec{x}$ - есть медленная пространственная координата.

Используя уравнения (6.19), (6.20), (6.13), (6.14), (6.15) и условие (6.21), уравнения для всех порядков возмущений примут вид

$$\partial_t \rho_j + \nabla(\rho_j \mathbf{v}_j) = \delta_j, \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_t v_j^\alpha = & -\frac{v_T^2}{\rho_0} \nabla^\alpha \rho_j + \frac{\hbar^2}{4m_e^2 \rho_0} \nabla^\alpha \Delta \rho_j - \frac{e}{m_e} E_j^\alpha + \\ & + \frac{1}{m_e^2} \mathbf{S}_0 \nabla^\alpha \Delta \mathbf{S}_j - \omega_c \mathbf{v}_j \times \mathbf{e}_x + W_j^\alpha, \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$\partial_t S_j^\alpha = \frac{2\mu}{\hbar} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} (S_0^\beta B_j^\gamma + S_j^\beta B_0^\gamma) + \frac{1}{m_e} \epsilon^{\alpha\beta\gamma} S_0^\beta \Delta S_j^\gamma + \gamma_j, \quad (6.24)$$

$$\square \mathbf{A}_j = \frac{4\pi}{c} e \rho_0 \mathbf{v}_j - \frac{8\pi\mu}{\hbar} \rho_0 \nabla \times \mathbf{S}_j + \xi_j, \quad (6.25)$$

калибровка Лоренца

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \nabla \mathbf{A}_j = \varpi_j. \quad (6.26)$$

Проводя простые манипуляции с системой уравнений (6.22) - (6.26), можно получить уравнением для векторного потенциала \mathbf{A}_j , замкнутое уравнением эволюции спина (6.24)

$$\square \frac{\partial^2 \vec{A}_j}{\partial t^2} + \omega_c \square \frac{\partial \vec{A}_j}{\partial t} \times \vec{e}_x - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_j}{\partial t^2} + \omega_p^2 \vec{\nabla} \cdot (\nabla \mathbf{A}_j) - v_T^2 \square \vec{\nabla} \cdot (\nabla \mathbf{A}_j) \quad (6.27)$$

$$+ \eta_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial^2 \vec{S}_j}{\partial t^2} + \omega_c \eta_0 \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} (\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{S}_j}{\partial t})_\beta + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} \Delta \square \vec{\nabla} \cdot (\nabla \mathbf{A}_j) + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} \eta_0 \Delta \vec{\nabla} \cdot (\nabla, \nabla \times \mathbf{S}_j)$$

$$- v_T^2 \eta_0 \vec{\nabla} \cdot (\nabla, \nabla \times \mathbf{S}_j) - \frac{4\pi e \rho_0}{m_e^2 c} \mathbf{S}_0 \vec{\nabla} \Delta \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \frac{4\pi e \rho_0}{c} \frac{\partial \vec{W}_j}{\partial t} + \frac{\partial^2 \vec{\xi}_j}{\partial t^2}$$

$$+ \omega_c \frac{\partial \vec{\xi}_j}{\partial t} \times \vec{e}_x + \omega_p^2 \vec{\nabla} \varpi_j - v_T^2 \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\xi}_j) - \frac{4\pi e}{c} v_T^2 \vec{\nabla} \delta_j + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} \Delta \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{\xi}_j) + \frac{\hbar^2}{4m_e^2} \frac{4\pi e}{c} \Delta \vec{\nabla} \delta_j,$$

здесь введено обозначение $\eta_0 = 8\pi\rho_0\mu/\hbar$ и $\omega_p^2 = 4\pi e^2\rho_0/m_e$ - есть плазменная частота электронов, $\omega_c = eB_0/m_e c$ - циклотронная частота электрона и $v_T^2 = k_B T_e/m_e$ - тепловая скорость электронов. Уравнение (6.27) является обобщённым уравнением эволюции волн, параллельных внешнему магнитному полю [170]. Проанализируем слагаемые, входящие в уравнение (6.27). Первые пять слагаемых в левой части уравнения (6.27) и первые шесть слагаемых в правой части характерны для классического электронного газа. Они отражают действие силы Лоренца и кинетического давления на динамику векторного потенциала. Шестое и седьмое слагаемые в левой части уравнения описывают вклад тока намагниченности и связаны с возмущениями плотности спина. Восьмое и девятое слагаемые в левой части уравнения характеризуют действие квантовой силы (2.16), связанной с возмущениями электронной плотности, в результате действия квантового давления или квантового потенциала Бома. Одиннадцатое слагаемое отражает влияние спинового натяжения (5.23). В правой части уравнения (6.27) представлены слагаемые источников δ_j , W_j^α , γ_j , ξ_j и ϖ_j , которые в нулевом приближении обращаются в ноль. Последние два слагаемых в правой части вносят вклад квантового потенциала Бома в нелинейную динамику возмущений векторного потенциала \vec{A}_j . Следуя методу малых возмущений, решение уравнения

(6.27) в нулевом порядке может быть представлено в форме

$$\vec{A}_0 = \sum_k \mathbf{A}_k^0 \alpha_k e^{i(kx - \omega_k t)}, \quad (6.28)$$

где, α_k - есть бесконечное множество комплексных амплитуд, которые зависят от медленно меняющейся переменной $\vec{\zeta} = \epsilon \vec{x}$, но не зависят от быстро меняющейся пространственной переменной \vec{x} и времени t .

6.2.1 Линейный предел

Используя уравнения (6.27), замкнутое уравнением (6.24), дисперсионное соотношение для вистлеров, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$ принимает вид

$$n_R^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)} - \frac{g^2 \omega_p^2 |S_0| k^2}{4\omega^2 m_e (\omega \pm \tilde{\omega}_g)}, \quad (6.29)$$

где $n_R = ck/\omega$ - есть показатель преломления волны, $\omega_p^2 = 4\pi e^2 \rho_0 / m_e$, $\omega_c = eB_0 / m_e c$ и $\tilde{\omega}_g = g/2\omega_c + \hbar k^2 / 2m_e$ - плазменная частота электронов, циклотронная частота и частота спиновой прецессии соответственно, g - фактор электрона, $g \simeq 2.0023193$ и $|S_0| = \hbar/2$ - невозмущенное состояние спина. Закон дисперсии (6.29) обобщает ранее изученные классические решения для систем частиц с собственными магнитными моментами, в том числе и аналитические решения, включающие действие тока намагниченности, которые были получены в работах [204], [205], поскольку включает действие спинового углового момента (5.27). Дисперсионное соотношение (6.29) может быть переписано с выделением спиновой частоты ω_μ

$$n_R^2 \left(1 + \frac{\omega_\mu}{\omega \pm \left(\frac{g}{2}\omega_c + \frac{\hbar}{2m_e} k^2 \right)} \right) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_c)}, \quad (6.30)$$

где

$$\omega_\mu = \frac{g^2 \omega_p^2 \hbar}{8c^2 m_e} \quad (6.31)$$

- частота, возникающая благодаря учёту плотности спинового тока. Два первых слагаемых в правой части уравнения (6.29) появляются благодаря

генерации вихревого магнитного поля электронным током и дают вклад в дисперсию электромагнитных волн в случае классической плазмы. Третье слагаемое появляется благодаря действию тока намагниченности, ассоциирующегося с вихревым спиновым магнитным полем B_{spin}^β .

Найденное уравнение для векторного потенциала (6.27) может быть использовано для расчёта нелинейных задач.

6.3 Эффекты кулоновских обменных взаимодействий в электрон-ионной плазме

Влияние обменных кулоновских взаимодействий на динамику квантовой электрон-ионной плазмы было исследовано в работе [206]. Кинетическая модель плазмы с обменными взаимодействиями между электронами была развита в работах [207] и [208]. Влияние магнитного поля и спина на эволюцию волновых процессов в плазме с кулоновскими обменными взаимодействиями не учитывалось ранее. Основной целью данной работы является рассмотрение влияния обменных эффектов на распространение волн в замагниченной квантовой плазме.

Рассмотрим среду, состоящую из электронов $p = e$ и ионов $p = i$, помещенную во внешнее магнитное поле. Система уравнений квантовой гидродинамики замагниченной плазмы (5.50) - (5.52), в слагаемых самосогласованных полей, состоит из уравнения непрерывности (5.50)

$$\partial_t \rho_e + \nabla(\rho_e \mathbf{v}_e) = 0, \quad \partial_t \rho_i + \nabla(\rho_i \mathbf{v}_i) = 0, \quad (6.32)$$

уравнения баланса импульса (5.51) для электронов и ионов,

$$\begin{aligned} m_e \rho_e (\partial_t + \mathbf{v}_e \nabla) \mathbf{v}_e + \nabla p_e - \frac{\hbar^2}{4m_e} \rho_e \nabla \left(\frac{\Delta \rho_e}{\rho_e} - \frac{(\nabla \rho_e)^2}{2\rho_e^2} \right) \\ = -e \rho_e \left(\mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{int} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}_{ext}] \right) + 2^{4/3} e^2 \sqrt{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_e} \nabla \rho_e, \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\begin{aligned}
& m_i \rho_i (\partial_t + \mathbf{v}_i \nabla) \mathbf{v}_i + \nabla p_i - \frac{\hbar^2}{4m_i} \rho_i \nabla \left(\frac{\Delta \rho_i}{\rho_i} - \frac{(\nabla \rho_i)^2}{2\rho_i^2} \right) \\
& = e \rho_i \left(\mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{int} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}_{ext}] \right) + 2^{4/3} e^2 \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_i} \nabla \rho_i. \quad (6.34)
\end{aligned}$$

уравнения баланса спина электронов (5.55)

где m_e и m_i - массы электронов и ионов, ρ_e и ρ_i - электронная и ионная плотности, \mathbf{v}_e и \mathbf{v}_i - потоковые скорости электронов и ионов соответственно, c - скорость света, так же учтено, что $q_e = -e$ - заряд электрона, $q_i = e$ - заряд иона.

Следует отметить, что последние слагаемые в правой части уравнений (6.33), (6.34) включают поле сил Кулоновских обменных взаимодействий между электронами и ионами соответственно. Следуя основным принципам работы [206], поле сил кулоновских обменных взаимодействий трёхмерной среды фермионов может быть представлено в виде

$$\mathbf{F}_{Ca} = \xi_{3D} q_a^2 \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_a} \nabla \rho_a \quad (6.35)$$

где для частично поляризованной системы

$$\xi_{3D} = (1 + \eta)^{4/3} - (1 - \eta)^{4/3}. \quad (6.36)$$

Коэффициент ξ_{3D} пропорционален спиновой поляризации, поэтому параллельная конфигурация спинов двух соседних фермионов уменьшает энергию кулоновских обменных взаимодействий, в то время как антипараллельная конфигурация спинов увеличивает энергию обменных взаимодействий. Коэффициент поляризуемости η определяется через заселённости уровней со спинами вверх $\rho \uparrow$ и спинами, направленными вниз $\rho \downarrow$, через соотношение

$$\eta = \frac{|\rho \uparrow - \rho \downarrow|}{\rho \uparrow + \rho \downarrow}.$$

6.3.1 Электромагнитные волны в электрон-ионной плазме с обменным взаимодействием

Рассмотрим малые возмущения основных гидродинамических величин около их положений равновесия. Будем считать, что система помещена во внешнее однородное магнитное поле, направленное вдоль оси z . Линейные возмущения физических величин, таких как потоковая скорость электронов и ионов ($p = e, p = i$) $\mathbf{v}_p = \delta\mathbf{v}_p$, концентрация $\rho_p = \rho_{0p} + \delta\rho_p$, спин электронов $\mathbf{s}_e = s_0\mathbf{y} + \delta\mathbf{s}$, где $s_0 = -\hbar/2 \tanh(\mu_B B_0/k_B T_e) = -\tanh(\alpha)$, магнитное поле $B_0\mathbf{z} + \delta\mathbf{B}$, должны быть пропорциональны $\exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r})$, где ω - частота волны, и $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ - квадрат волнового вектора.

6.3.2 Влияние кулоновских обменных взаимодействий на волны Ленгмюра

Решение в линейном приближении системы уравнений (6.32) - (6.34) приводит к закону дисперсии трёхмерных квантовых волн Ленгмюра

$$\omega_{Le,3D}^2 = \frac{4\pi e^2 \rho_{0,3D}}{m_e}. \quad (6.37)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_{Le,3D}^2 - \zeta_{3D} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \frac{e^2}{m_e} \sqrt[3]{\rho_{0e}} k^2 \\ + \vartheta_{3D} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \rho_{0e}^{2/3}}{3m_e^2} k^2 + \frac{\hbar^2 k^4}{4m_e^2}, \end{aligned} \quad (6.38)$$

где волна (6.38) представлена на рис. (6.5). Первое слагаемое в законе дисперсии (6.38) пропорционально невозмущенной электронной плотности $\sim \rho_{0e}$ и растёт быстрее, чем второе слагаемое, пропорциональное $\sim \rho_{0e}^{1/3}$. Третье слагаемое имеет промежуточную скорость роста, будучи пропорционально $\sim \rho_{0e}^{2/3}$. Кулоновские обменные эффекты будут превалировать над вкладом давления Ферми, когда невозмущенная концентрация $\sim \rho_{0e} \leq$

10^{24}см^{-3} , что реализуется в металлах и полупроводниках, но в астрофизических объектах, для которых $\sim \rho_{0e} \leq 10^{28}\text{см}^{-3}$, давление Ферми должно быть выше, чем кулоновские обменные эффекты.

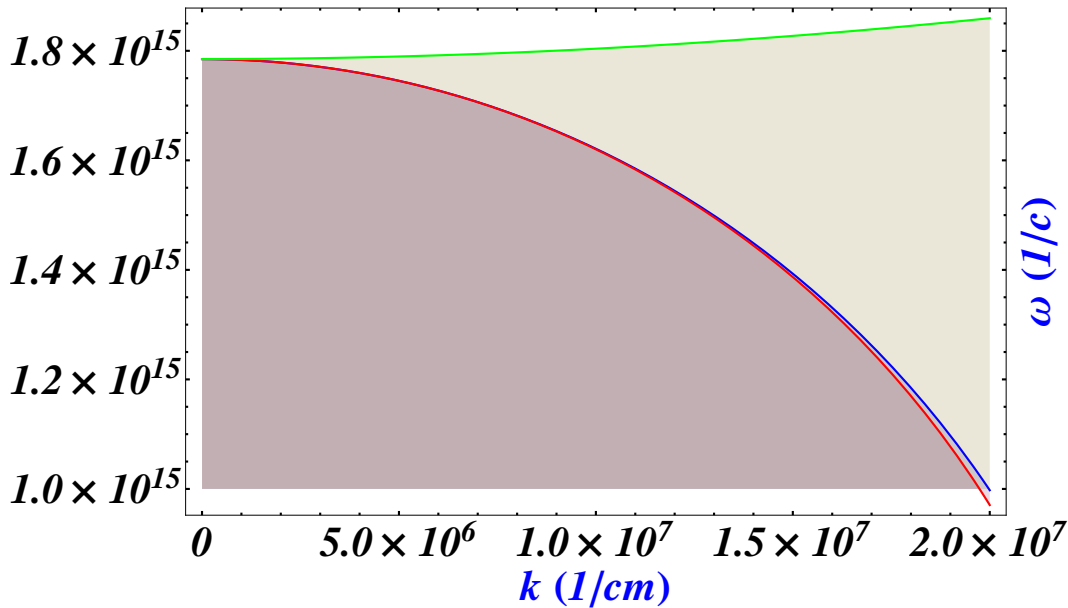


Рис. 6.5: График отражает изменение частоты квантовых волн Ленгмюра $\omega(k)$, которые описываются уравнением (6.38), в зависимости от модуля волнового вектора k . Зелёная ветвь описывает классическую высокочастотную волну Ленгмюра, красная и синяя ветви характеризуют влияние кулоновских обменных эффектов и квантового потенциала Бома, где невозмущенная концентрация электронов $\rho_{0e} \simeq 10^{21}\text{см}^{-3}$, $\eta = 1$.

6.3.3 Влияние кулоновских обменных взаимодействий на волны в неизотермической замагниченной плазме

Впервые ионно-акустические волны в неизотермической квантовой плазме при условии $T_e \gg T_i \approx 0$ и $\Omega_e^2 \gg \omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ были исследованы в работе [209]. При этих условиях существуют две волновые ветви ионно-акустических волн. Одна ветвь реализуется на частотах $\omega < \Omega_i$, в то время как другая $\omega > \Omega_i$.

Дисперсионное уравнение ионно-акустических волн имеет вид

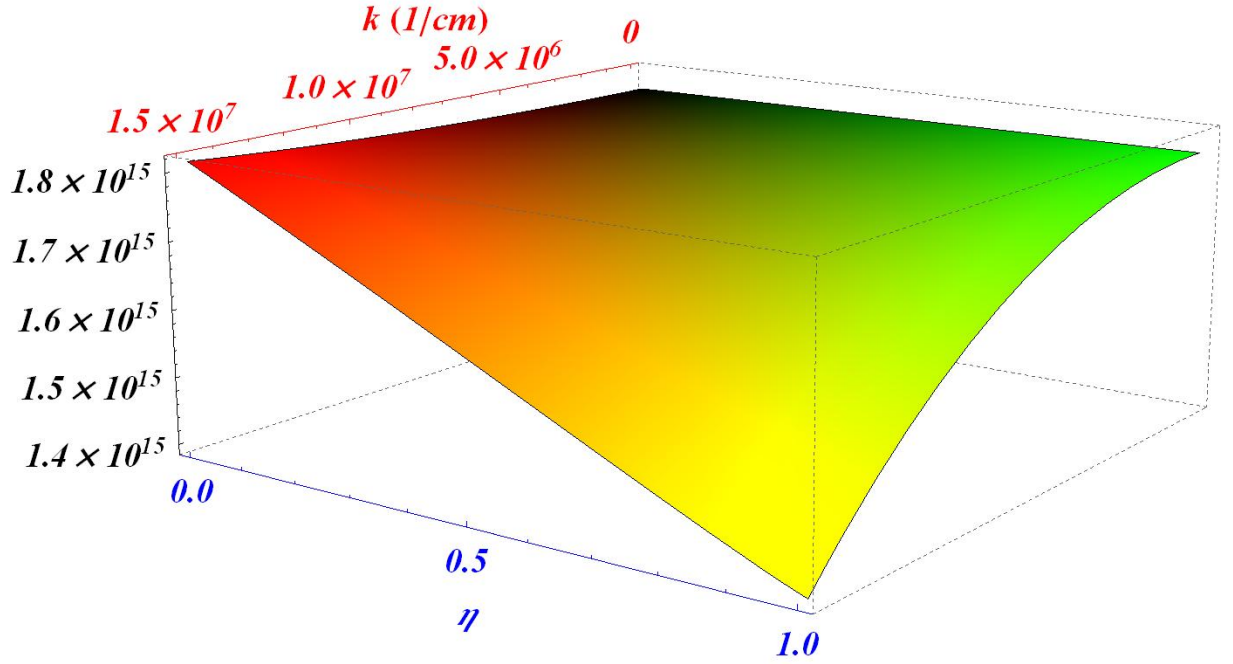


Рис. 6.6: График показывает изменение частоты квантовых волн Ленгмюра $\omega(k, \eta)$, которые описываются уравнением (6.38), в зависимости от модуля волнового вектора k и коэффициента поляризуемости η , где $\rho_{0e} \simeq 10^{21} \text{ см}^{-3}$.

$$1 - \frac{k_{\perp}^2 \omega_{Li}^2}{k^2(\omega^2 - \Omega_i^2)} - \frac{k_z^2 \omega_{Li}^2}{k^2 \omega^2} + \frac{\omega_{Le}^2}{k^2 v_{Te}^2} = 0, \quad (6.39)$$

где v_{Te}^2 - тепловая скорость электронов. Используя приближение $\omega_{Li}^2 \gg \Omega_i^2$ и $\theta \neq 0$, имеем

$$\omega_+^2 = \frac{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2(1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2)}{1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2}, \quad (6.40)$$

и

$$\omega_-^2 = \frac{\omega_{Li}^2 \Omega_i^2 \cos^2 \theta}{\omega_{Li}^2 + \Omega_i^2(1 + \omega_{Li}^2/k^2 v_s^2)}, \quad (6.41)$$

где скорость

$$v_s^2 = -\xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_{0e}} + \vartheta_{3D} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \rho_{0e}^{2/3}}{3m_e m_i} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i}. \quad (6.42)$$

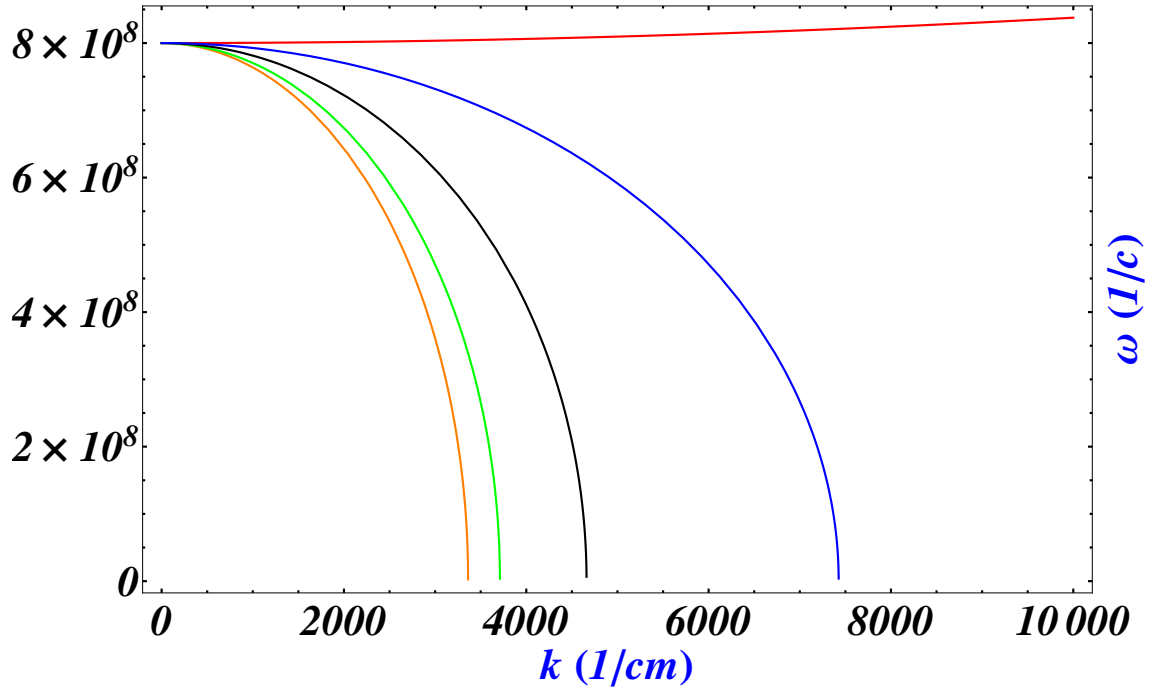


Рис. 6.7: График представляет дисперсию длинноволновых ионно-акустических волн частоты $\omega(k)$, подчиняющихся уравнению (6.40), в зависимости от модуля волнового вектора k . **Красная** ветвь описывает дисперсию ионно-акустической волны, для которой тепловая скорость определяется давлением Ферми, **оранжевая** ветвь характеризует влияние обменных взаимодействий в системе, для которой $\eta = 1$, **зелёная** ветвь характеризует случай частично поляризованной системы с коэффициентом поляризуемости $\eta = 0.8$, **чёрная** ветвь - $\eta = 0.5$ и **синяя** ветвь - $\eta = 0.2$. Параметры среды: $B_0 \simeq 5 \cdot 10^5$ Г - однородное магнитное поле, $\rho_0 \simeq 10^{18} \text{ см}^{-3}$ - равновесная концентрация.

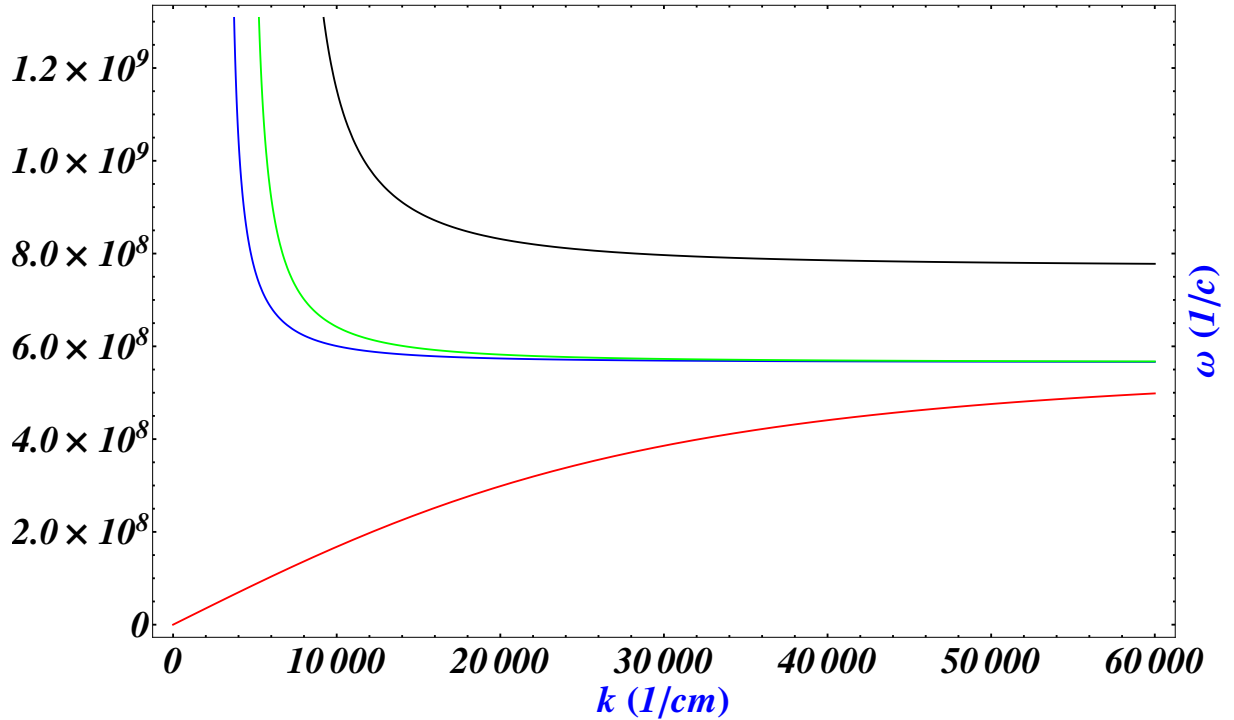


Рис. 6.8: График представляет дисперсию длинноволновых ионно-акустических волн частоты $\omega(k)$, подчиняющихся уравнению (6.41), в зависимости от модуля волнового вектора k . **Красная** ветвь отражает дисперсионные характеристики длинноволновых ионно-акустических волн, для которых тепловые скорости определяются давлением Ферми и **синяя** ветвь представляет влияние обменных взаимодействий в случае полностью поляризованной системы $\eta = 1$, **зелёная** ветвь - $\eta = 0.5$ и **чёрная** ветвь - $\eta = 0.2$. Параметры среды: $B_0 \simeq 5 \cdot 10^5$ Г - однородное магнитное поле, $\rho_0 \simeq 10^{18} \text{ см}^{-3}$ - равновесная концентрация.

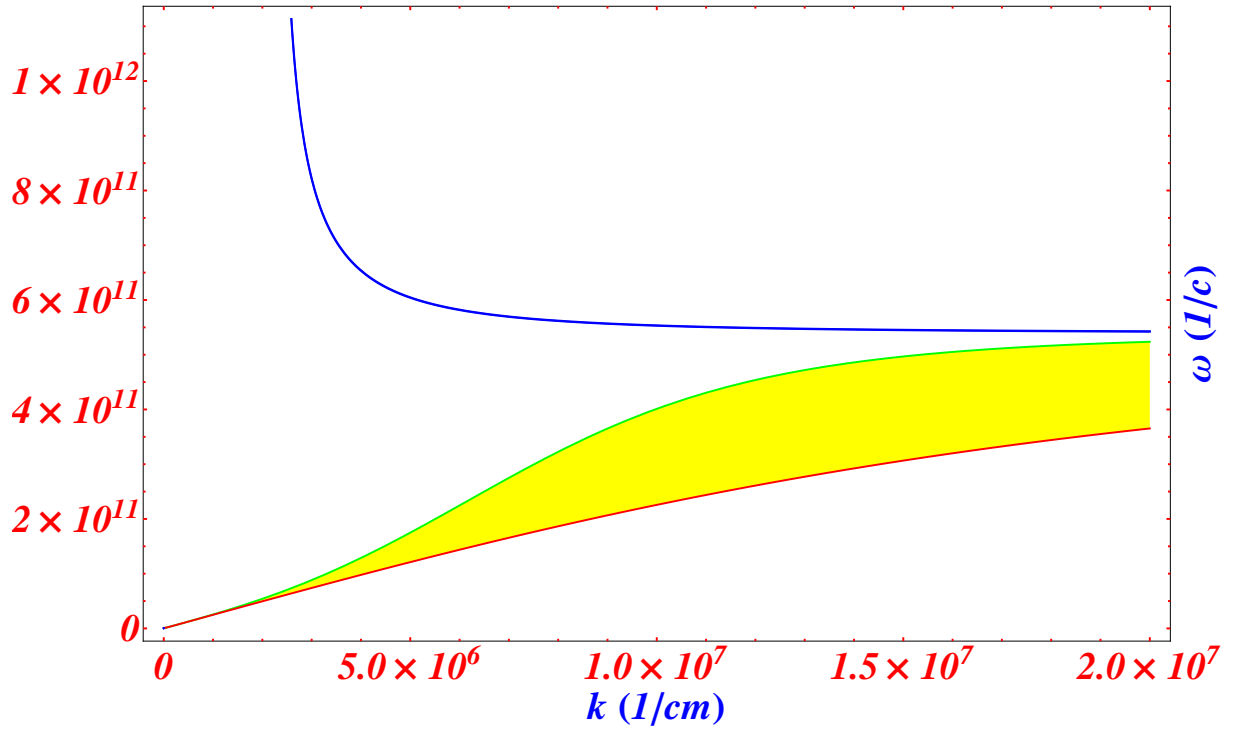


Рис. 6.9: График представляет дисперсию коротковолновых ионно-акустических волн частоты $\omega(k)$, подчиняющихся уравнению (6.38), в зависимости от модуля волнового вектора k . Зелёная ветвь отражает дисперсионные характеристики квантовых ионно-акустических волн (6.40), красная ветвь характеризует дисперсию классических ионно-акустических волн, которые следуют из уравнения (6.40) если слагаемые, пропорциональные \hbar^2 равны нулю. Синяя ветвь отражает дисперсию волны в случае, когда обменные взаимодействия доминируют над давлением Ферми.

содержит вклад кулоновских обменных взаимодействий, отражённых первым слагаемым. Второе слагаемое характеризует давление Ферми и для частично поляризованной системы частиц

$$\vartheta_{3D} = \frac{1}{2}((1 + \eta)^{5/3} - (1 - \eta)^{5/3}). \quad (6.43)$$

Третье слагаемое отражает влияние квантового потенциала Бома.

Решения уравнения (6.39) для различных коэффициентов поляризуемости представлено на рис. (6.7), (6.8) и (6.9).

Для волны, распространяющейся параллельно приложенному магнитному полю $\theta = 0$, закон дисперсии ионно-акустических волн принимает вид

$$\omega^2 = \Omega_i^2 \quad (6.44)$$

и

$$\omega^2 = \left(-\xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_{0e}} + \vartheta_{3D} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \rho_{0e}^{2/3}}{3m_e m_i} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i} \right) \times$$

$$\times \frac{\omega_{Li}^2 k^2}{\omega_{Li}^2 + k^2 \left(-\xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_{0e}} + \vartheta_{3D} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \rho_{0e}^{2/3}}{3m_e m_i} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i} \right)} \quad (6.45)$$

6.3.4 Низкочастотные электромагнитные колебания в замагниченной плазме

Рассмотрим низкочастотные электромагнитные волны [210] при условии $T_e \gg T_i$ и исследуем действие кулоновских обменных эффектов на эволюции таких волн.

В случае волн низких частот в длинноволновом пределе $k \rightarrow 0$, дисперсионное уравнение медленных и быстрых магнито-акустических волн имеет вид

$$\omega = kv_A \cos \theta \quad (6.46)$$

и

$$\omega = kv_{\pm}, \quad (6.47)$$

где **альвеновская** скорость

$$v_A = c \frac{\Omega_i}{\omega_{Li}} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0 m_i}} \quad (6.48)$$

и

$$v_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(v_A^2 + v_s^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta} \quad (6.49)$$

Для волны, распространяющейся параллельно внешнему магнитному полю $\cos \theta \simeq 0$, закон дисперсии (6.47) имеет вид

$$\omega_{\pm} = k \begin{cases} v_A, \\ v_s. \end{cases} \quad (6.50)$$

Рассмотрим продольные волны, распространяющиеся перпендикулярно внешнему магнитному полю. Закон дисперсии таких волн (6.47) имеет форму

$$\omega^2 = k^2 \left(v_A^2 + v_i^2 - \xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_{0e}} + \vartheta_{3D} \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 \rho_{0e}^{2/3}}{3m_e m_i} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i} \right), \quad (6.51)$$

$$\vartheta_{3D} = \frac{1}{2}[(1 + \eta)^{5/3} + (1 - \eta)^{5/3}], \quad (6.52)$$

$$\xi_{3D} = [(1 + \eta)^{4/3} - (1 - \eta)^{4/3}].$$

График (6.10) иллюстрирует различные режимы плазмы в при коэффициенте поляризуемости $\eta = 1$. Давление Ферми $\sim v_{Fe}^2 \sim \rho_{0e}^{2/3}$ становится важным, когда температура Ферми достигает термодинамической температуры, при концентрациях плазмы $\rho_0 \geq 10^{25} \text{см}^{-3}$. The Альвеновская мода описывается первым слагаемым v_A^2 в правой части выражения (6.51). Эффекты, возникающие под действием магнитного давления, пропорционального величине внешнего магнитного поля $v_A^2 \sim \rho_0^{-1}$. Влияние магнитного давления становится важным при $\rho_0 \leq 10^{20} \text{см}^{-3}$ и величинах внешних полей

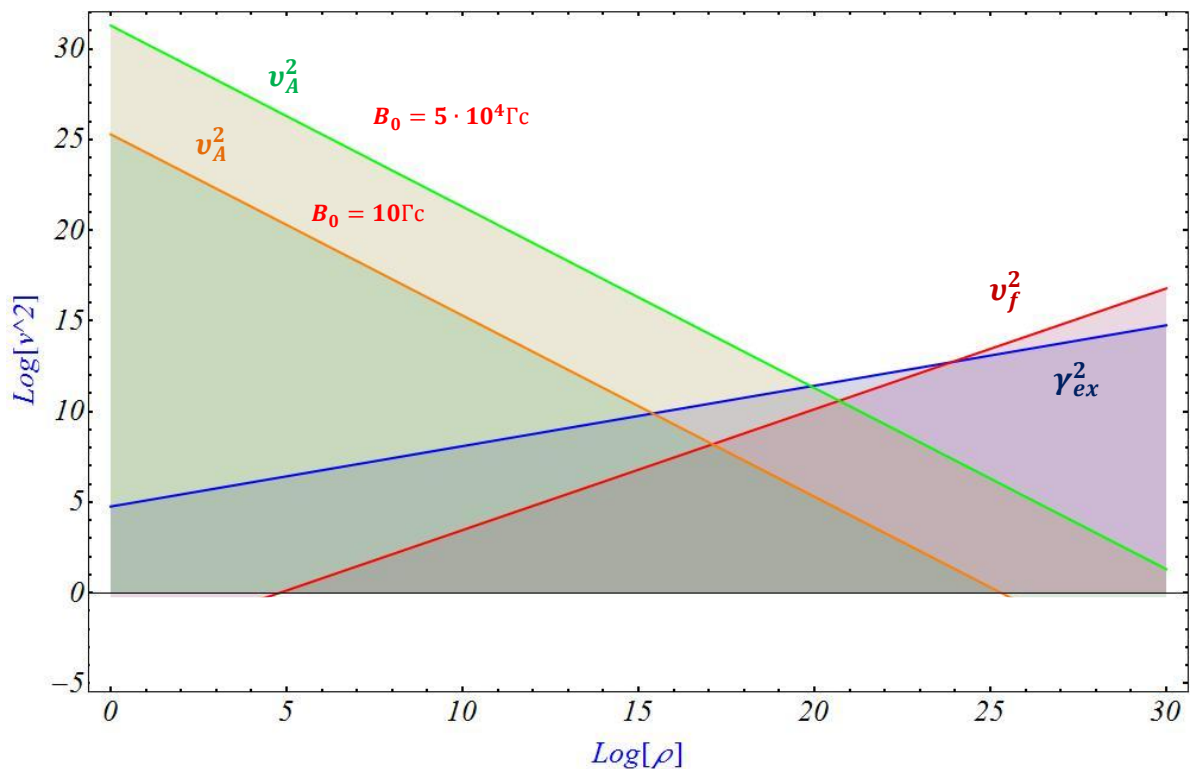


Рис. 6.10: На графике представлены различные режимы волны (6.51) в зависимости от равновесной концентрации числа частиц ρ_0 . Как видно из графика, при величине внешнего магнитного поля $B_0 \simeq 5 \cdot 10^4$ Гс, при концентрации $\rho_0 \leq 10^{20}$ $1/\text{см}^3$, благодаря влиянию магнитного давления $\sim v_A^2$, волна будет распространяться на альвеновских скоростях, а давление Ферми и обменные взаимодействия не вносят существенного вклада в волну. С другой стороны, при концентрациях, превышающих или сравнимых с $\rho_0 \geq 10^{25}$ $1/\text{см}^3$ вклад давления Ферми $\sim v_f^2$ должен превышать обменные эффекты. Обменные эффекты $\sim \gamma_{ex}^2$ будут доминировать над давлением Ферми только при концентрациях в пределах $10^{20} \leq \rho_0 \leq 10^{24}$ $1/\text{см}^3$, что приведёт к неустойчивости волны и её затуханию.

$B_0 \simeq 5 \cdot 10^4 \text{ Г}$. Эффекты кулоновского обменного взаимодействия пропорциональны $\sim \gamma_{ex}^2 \sim \rho_{0e}$ и проявляются в режимах $10^{20} \leq \rho_0 \leq 10^{24} \text{ см}^{-3}$. Влияние кулоновского обменного взаимодействия приводит к возникновению неустойчивости и затуханию волны. Давление обменных взаимодействий $\sim \gamma_{ex}^2 = \xi_{3D} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{\rho_{0e}} e^2 / m_i$ является отрицательным слагаемым и приводит к неустойчивости. Стабильность может сохраниться при более значительных величинах внешних магнитных полей $B_0 \sim 10^7 \text{ Г}$.

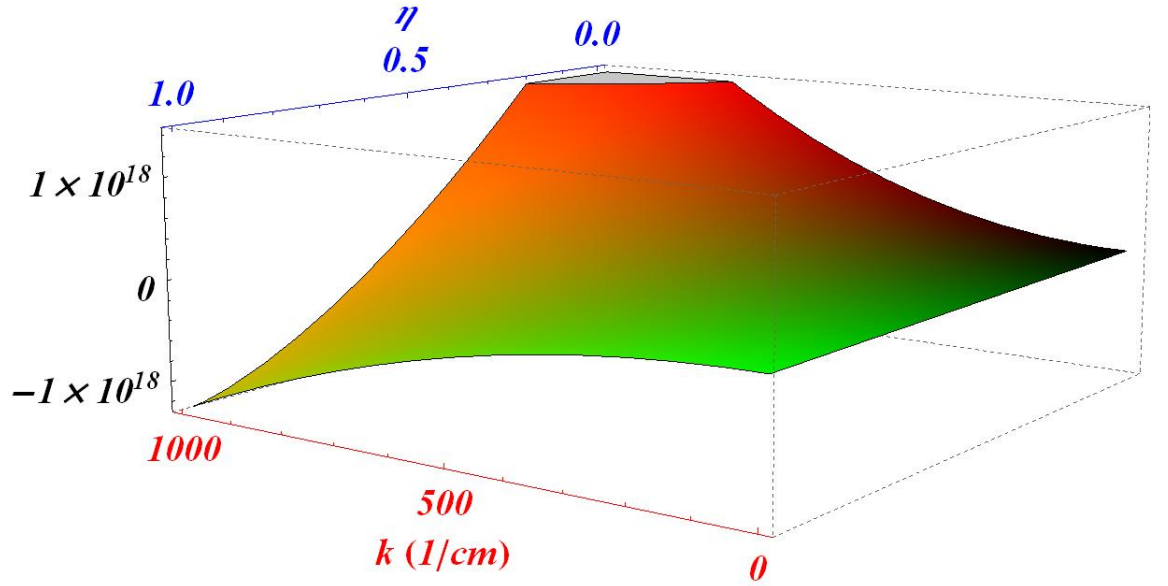


Рис. 6.11: 3D график отражает дисперсионные характеристики магнито-звуковых волн в плотной квантовой плазме, подчиняющихся закону (6.51), где обменные эффекты играют основополагающую роль. График представляет зависимости квадрата частоты волны $\omega^2(k, \eta)$ от модуля волнового вектора k и коэффициента поляризуемости η , $\rho_{0e} \simeq 10^{23} \text{ см}^{-3}$.

Рассмотрим предел коротких волн $k \rightarrow \infty$. В этом режиме

$$\omega(k, \theta) = \Omega_i \cos \theta \times \left[1 - \frac{\left[2 \left(-\xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{n_{0e}} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i} \right) + \sin^2 \theta v_A^2 \right] \Omega_i^2}{2k^2 v_A^2 \left(-\xi_{3D} \frac{e^2}{m_i} \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} \sqrt[3]{n_{0e}} + \frac{\hbar^2 k^2}{4m_e m_i} \right)} \right], \quad (6.53)$$

Дисперсия магнито-акустической волны в пределе коротких волн $k \rightarrow \infty$ представлена на рис. (6.12).

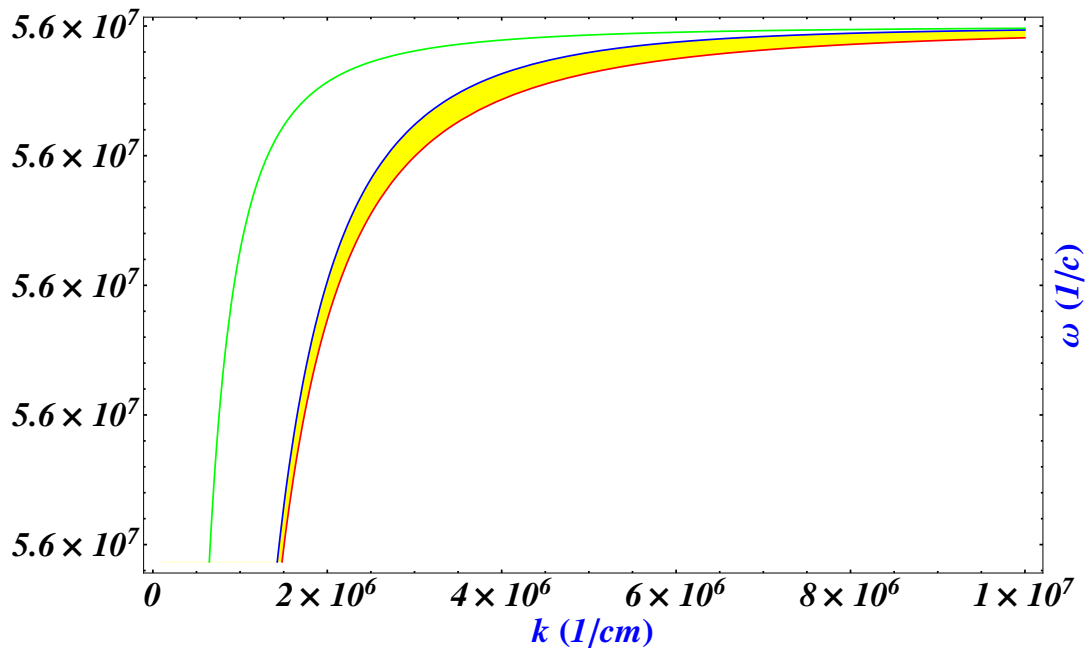


Рис. 6.12: График представляет дисперсию магнито-звуковых волн, подчиняющихся закону (6.53) в пределе коротких длин волн $k \rightarrow \infty$, где обменные взаимодействия приняты во внимание. *Красная* ветвь представляет классический закон дисперсии, *синяя* ветвь отражает влияние квантового потенциала Бома и *зелёная ветвь* отражает влияние кулоновских обменных взаимодействий.

Модель квантовой гидродинамики, учитывающая электрон-электронные кулоновские обменные взаимодействия, для замагниченной квантовой плазмы, приводит к возможности существоваия неустойчивых волновых решений.

6.4 Основные выводы

На основе полученных в диссертации уравнений магнитной квантовой гидродинамики многих взаимодействующих частиц с собственными магнитными моментами, была поставлена и решена задача о возмущении электромагнитных волн в линейном приближении. Рассмотрена нейтральная плазма, состоящая из электронов и неподвижных ионов. На основе полученной двумерной системы уравнений эволюции завихренности (6.4), учитывающей влияние тока намагниченности и спинового углового момента, в линейном приближении найден закон дисперсии волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю (6.8), (6.9). Найденные решения обобщают ранее полученные классические законы дисперсии (6.8), указывая на сдвиг волновой ветви в результате действия тока намагниченности и полученного впервые спинового момента вращения (5.27), а так же отражают возможность генерации новой волновой моды. Новое волновое решение (6.9) возникает как результат действия спинового момента вращения. Длина волны таких волн сравнима со скин-слоем электрона.

В диссертации рассмотрена динамика циркулярно-поляризованных электромагнитных волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю, в системе электронов и неподвижных ионов со собственными магнитными моментами. Получено уравнение эволюции векторного потенциала циркулярно-поляризованной электромагнитной волны (6.27), учитывающее вклад квантового потенциала Бома (2.16), энергии намагниченности среды, спинового напряжения (5.23) и спинового углового момента (5.27). Полученное уравнение приводит к обобщению классического закона дисперсии циркулярно-поляризованных электромагнитных волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю.

Для электрон-ионной плазмы исследовано влияние кулоновских обменных взаимодействий на динамику различных типов волн. Проведено численное моделирование влияния кулоновских обменных взаимодействий

на динамику трёхмерных волн Ленгмюра (6.38), на длинноволновые и коротковолновые ионно-акустические волны (6.40), (6.41) и низкочастотные магнито-звуковые (6.51). Показано, что кулоновские обменные эффекты могут приводить к неустойчивости волны.

Все результаты, представленные в главах [5] и [6], были полностью отражены в пяти публикациях автора [211] - [215].

Заключение

В диссертационной работе получены следующие результаты

- В диссертации представлен последовательный подход к описанию систем многих взаимодействующих частиц, наделенных электрическим дипольным моментом. На основе предложенного подхода дан строгий вывод уравнений квантовой гидродинамики из многочастичного уравнения Шредингера, включающего в свою структуру кулоновские взаимодействия между зарядами, диполь-дипольные взаимодействия между диполями и заряд-дипольные взаимодействия между зарядами и диполями, обусловленные действием коллективных полей диполей на заряд и коллективных кулоновских полей на диполь. Были получены уравнение баланса числа частиц, уравнение баланса импульса (2.19), уравнение эволюции плотности дипольного момента (2.28) и плотности потока дипольного момента (2.29). Уравнение эволюции потока поляризации, исходя из метода квантовой гидродинамики, было получено в теории впервые. Предложенный теоретический подход может быть рассмотрен в качестве фундаментального для расчетов неравновесных коллективных процессов в различных средах с поляризацией. В первую очередь, это среды полярных частиц.
- На основе представленной замкнутой системы уравнений квантовой гидродинамики поставлены и решены ряд задач. В линейном прибли-

жении поставлена и решена задача о получении дисперсионных характеристик волн поляризации в одно- и двумерных системах нейтральных дипольных частиц (3.2), (3.4). Предсказано существование волн поляризации, не сопровождающихся возмущениями потоковой скорости и плотности числа частиц. Отличительной особенностью волн поляризации является стремление их частоты к нулю при $k \rightarrow 0$. Важной отличительной особенностью новой волны является то, что её дисперсионная кривая имеет характерный максимум, существование которого связано с учётом диполь-дипольных взаимодействий, что свидетельствует о наличии отрицательной дисперсии. Групповая скорость такой волны меняет знак при переходе через максимум. В качестве среды был рассмотрен газ молекул оксида азота NO , обладающих собственными дипольными моментами.

Для модели двумерной квантовой системы многих заряженных частиц, наделенных собственными электрическими дипольными моментами, находящихся во внешнем однородном электрическом поле, получен спектр собственных волн. В выражении для двумерных волн Ленгмюра (3.10) рассчитан вклад диполь-дипольных взаимодействий между диполями, а так же предсказано существование затухающей волны нового типа (3.11), связанной с возмущением динамики поляризации. В качестве среды может быть рассмотрена двумерная поверхность металла, на которой находится газ электронов и дырок, а так же двумерные ионные кластеры.

Рассмотрена задача о возмущении волн поляризации в двумерной среде, состоящей из заряженных частиц двух сортов, с собственными дипольными моментами. В качестве исследуемой среды может быть взят нано-размерный ионный кристалл. Получена дисперсионная зависимость волн Ленгмюра и ионно-звуковых волн, учитывающих вклад квантового потенциала Бома и собственных дипольных моментов ча-

стиц (3.15). Для рассмотренной системы найдена волна поляризации (3.18), которая является неустойчивой.

В диссертационной работе так же поставлена и решена задача о возбуждении волн поляризации пучком нейтральных частиц (3.30), наделенных собственным дипольным моментом, а так же пучком электронов (3.37).

Полученные решения могут быть использованы при исследовании свойств различных физических систем, к которым относятся - металлические кластеры и плёнки, молекулярные кристаллы, сегнетоэлектрические плёнки и сегнетоэлектрические жидкие кристаллы, а так же ферроэлектрические кристаллы. Кроме того, важным является изучения влияния диполь-дипольных взаимодействий на формирование и свойства холодной плазмы Ридберга, состоящей из электронов e^- и ионов оксида азота NO^+ , обладающих собственными дипольными моментами. Важно отметить, что поляризационные моды могут вносить вклад в процесс формирования Куперовских пар в сверхпроводниках. Физические эффекты в системах дипольных частиц могут быть использованы для конструирования различных сред. Изучение волновых свойств дипольноупорядоченных сред, на основе развитого теоретического подхода, может помочь в решении задач микроэлектроники, где эффекты поляризации используются в применении сегнетоэлектрических пленок при разработке различных функциональных устройств.

- Согласно основным представлениям квантовой гидродинамики электрона, на эволюцию его движения действуют не только электрический, но и квантовый потенциал. В системе уравнений квантовой гидродинамики магнитной среды, состоящей из частиц со спином $1/2$, влияние спиновых и квантовых вкладов не учитывается. Для явного учёта коллективного влияния спинов частиц системы, необходимо подставить

волновую функцию, содержащую информацию о спиновых состояниях частиц системы, в определение основных гидродинамических величин. В диссертации, на основе представлений квантовой гидродинамики многих взаимодействующих частиц, получен вклад квантовой и спиновой части тензора плотности потока энергии, потока намагниченности и плотности потока импульса в уравнения баланса импульса, баланса энергии, уравнение динамики намагниченности и эволюции завихренности. Полученные спиновые добавки характеризуют влияние внутреннего коллективного *спинового натяжения* (5.23) и внутреннего коллективного *спинового углового момента вращения* (5.27), создаваемого неоднородным распределением спинов, на динамику потоковой скорости (5.51), на эволюцию плотности спина (5.52), а так же плотности внутренней энергии системы частиц со спином (5.37). Учитываются тепловые эффекты, возникающие в результате тепловых флуктуаций спинов около их средних значений.

Квантовая гидродинамика вихревых процессов в системах частиц с собственными магнитными моментами допускает замкнутую формулировку, при условии решения проблемы исследования свойств турбулентной жидкости набором полевых функций. В диссертации получено уравнение, описывающее эволюции завихренности (5.53) для квантовой системы многих взаимодействующих частиц со спинами, исходя из многочастичного гамильтониана взаимодействий, учитывающего вклад кулоновского и спин-спинового взаимодействий. Полученное уравнение содержит вклад внутренних коллективных спиновых магнитных полей, и не содержит слагаемых квантового потенциала Бома.

- На основе замкнутого формализма гидродинамики квантовых систем многих взаимодействующих частиц исследована динамика электромагнитных возбуждений в замагниченной спиновой плазме. В линейном приближении исследованы спектральные свойства электромагнитной

волны в спиновой плазме на основе двумерных уравнений эволюции магнитного поля (6.4), полученных из уравнения эволюции завихренности, и учитывающих влияние возмущений плотности спина. В линейном приближении найден закон дисперсии волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю (6.8), (6.9). Решение (6.8) обобщает ранее полученное классическое решение. Второе решение (6.9) отражает возможность генерации новой волновой моды, с частотой, близкой и выше циклотронной частоты спиновой прецессии. Существование закона дисперсии (6.9) связано с действием спинового момента вращения (5.27), приводящего к генерации спиновой волны (6.11).

На основе системы уравнений квантовой гидродинамики многих взаимодействующих частиц со спинами исследована динамика циркулярополяризованных электромагнитных волн, распространяющихся параллельно внешнему магнитному полю. Получено нелинейное уравнение, описывающее процессы динамики векторного потенциала (6.27), учитывающего помимо силы Лоренца, так же вклад квантовой силы, обусловленной существованием квантовым потенциалом Бома (2.16), коллективного спинового натяжения (5.23), спинового момента вращения (5.27) и силы, возникающей из энергии намагниченности среды. Находится решение приведенной системы уравнений в приближении малых амплитуд колебаний.

- На основе расширенной системы уравнений, характеризующей поведение электрон-ионной плазмы во внешнем магнитном поле (6.32) - (6.34), включающей силу кулоновских обменных взаимодействий (6.35), поставлена и решена задача об исследовании влияния кулоновских обменных эффектов на дисперсию ленгмюровских, ионно-звуковых и магнито-звуковых волн в линейном приближении. Проведено численное моделирование и показано, что кулоновские обменные взаимодействия мо-

гут приводить к неустойчивости волны в зависимости от концентрации электронов и спиновой поляризации системы.

Результаты, полученные в диссертации, дополняют уже ранее полученные решения и устанавливают новые решения, допускающие экспериментальную проверку.

Литература

1. *Тамм И. Е.*, Основы теории электричества, — Издание 9-е, М.: Наука. — 1976.
2. *Сивухин Д. В.*, Общий курс физики, 2 изд., М.: ФИЗМАТЛИТ. — 1983.
3. *Ландау Л. Д.*, Лифшиц Е. М., Теория поля. — Издание 7-е, исправленное. — М.: Наука. — 1988.
4. *Браун В.*, Диэлектрики, пер. с англ., М.: Издательство иностранной литературы. 1961.
5. *Беляков В. А.*, Жидкие кристаллы, М.: Знание. — 1986. *Сонин А. С.*, Введение в физику жидких кристаллов, М.: Знание. — 1983.
6. *А.А. Рухадзе, В.П. Силлин*, Электродинамика сред с пространственной дисперсией, УФН. — 1961. — v. **74**. - С.223–267.
7. *А.А. Рухадзе, В.П. Силлин*, Линейные электромагнитные явления в плазме// УФН. — 1962. — v. **76**(1).
8. *A. Gijsbertsen, W. Siu, M. F. Kling, P. Johnsson, P. Jansen, S. Stolte, and M. J. J. Vrakking*, Direct Determination of the Sign of the NO Dipole Moment// Phys. Rev. Lett. - 2007. - v. **99**, - P. 213003.
9. *C. A. Burrus and J. D. Graybeal*, Stark Effect at 2.0 and 1.2 Millimeters Wavelength: Nitric Oxide// Phys. Rev. - 1958. - v. **109**. - P. 1553.
10. *А.А. Сосунов*, Оксид азота как межклеточный посредник// Московский государственный университет им. Н.П. Огарева, Саранск.

11. *И.П. Серая, Я.Р. Нарциссов*, Современные представления о биологической роли оксида азота// Межрегиональный институт цитохимии, Москва, - 2002.
12. *Ванин А.Ф.* Оксид азота и его обнаружение в биосистемах методом электронного парамагнитного резонанса// УФН. — 2000. — Т. **170**. — № 4. — С.455–458.
13. *Yasuyuki Kimura and Ken Takazawa*, Landau levels of molecules: Angular-momentum coupling between cyclotron motion and core rotation// Phys. Rev. A. - 2014. - v. **89**. - P. 023427.
14. *Лайнс М., Гласс А.*, Сегнетоэлектрики и родственные им материалы, пер. с англ., М.: Мир. – 1981.
15. *Струков Б. А., Леванюк А. П.*, Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах, М.: Наука. – 1983.
16. *Сонин А.С., Струков Б.А.* Введение в сегнетоэлектричество. М.: Знание. – 1970.
17. *Вакс В. Г.* Введение в микроскопическую теорию сегнетоэлектриков.— М.: Наука. — 1973.
18. *Блинов Л. М., Береснев Л. А.* Сегнетоэлектрические жидкие кристаллы// УФН. — 1984. — v.**143**. — С.391–428 .
19. *Stefan Grandner, Sebastian Heidenreich, Patrick Ilg, Sabine H. L. Klapp, and Siegfried Hess*, Dynamic electric polarization of nematic liquid crystals subjected to a shear flow// Phys. Rev. E. - 2007. — v.**75**. - P. 040701(R).
20. *A. V. Emelyanenko and M. A. Osipov*, Theoretical model for the discrete flexoelectric effect and a description for the sequence of intermediate smectic phases with increasing periodicity// Phys. Rev. E. - 2003. — v.**68**. - P. 051703.

21. *M. A. Osipov, T. J. Sluckin, and S. J. Cox*, Influence of permanent molecular dipoles on surface anchoring of nematic liquid crystals// *Phys. Rev. E.* - 1997. — v.**55**. - P. 464.
22. *Devonshire, A.F.*, Theory of Ferroelectrics. *Philosophical Magazine, Advances in Physics.* — 1954. — v.**3**. - P.10(5).
23. *Boyer, L.L., et al.*, First principles calculations for ferroelectrics – A vision. *Ferroelec.*, — 1990. — v.**111**. — P.1.
24. *Cohen, R.E.*, Origin of ferroelectricity in oxide ferroelectrics// *Nature.* – 1992. – v.**358**. – P.136-138.
25. *Таганцев А. К.*, Пиро-, пьезо-, флексоэлектрический и термополяризационный эффекты в ионных кристаллах// *УФН.* – 1987. — Т.**152**. –С. 423–448.
26. *W. Kuczynski and J. Hoffmann*, Determination of piezoelectric and flexoelectric polarization in ferroelectric liquid crystals// – 2005. *Phys. Rev. E.* — v.**72**. –P. 041701.
27. *King-Smith, R.D. and D. Vanderbilt*, Theory of polarization of crystalline solids. *Phys. Rev. B.* –1993. — v.**47**(3). – P.1651-1654.
28. *Resta, R.*, Macroscopic polarization in crystalline dielectrics: the geometric phase approach. *Rev. Mod. Phys.* –1994. — v.**66**. – P.899-915.
29. *Fiolhais, C., F. Nogueira, and M. Marques, eds.* A Primer in Density Functional Theory// *Lecture Notes in Physics.* - 2003. — v.**620**. Springer: New York. – P.256.
30. *Priya Gopal, Nicola A. Spaldin*, Polarization, piezoelectric constants, and elastic constants of ZnO, MgO, and CdO// –2006. — v.**35**. - Issue 4. - P. 538-542.

31. *Starr M. B., Shi J. and Wang X. D.*, Piezopotential-Driven Redox Reactions at the Surface of Piezoelectric Materials// *Angewandte Chemie-International Edition*. – 2012. — v.**51**. — P. 5962–5966.
32. *Mantini G., Gao Y., D’Amico A., Falconi C. and Wang Z.*, Equilibrium piezoelectric potential distribution in a deformed ZnO nanowire// *Nano Research*. – 2009. — v.**2**. — P. 624–629.
33. *Поплавко Ю.М.*, Физика диэлектриков. Киев: Вища школа. –1980.
34. *A. Kitaev*, *Ann. Phys. (N.Y.)*. Fault-tolerant quantum computation by anyons // — 2003. — v.**303**. — Issue 1. — P.2-30.
35. *S. Das Sarma, C. Nayak and S. Tewari*. Proposal to stabilize and detect half-quantum vortices in strontium ruthenate thin films: Non-Abelian braiding statistics of vortices in a $p_x + ip_y$ superconductor// *Phys. Rev. B*. — 2006. — v.**73** — P.220502(4).
36. *S. Tewari, S. Das Sarma, C. Nayak, C. W. Zhang and P. Zoller*. Quantum Computation using Vortices and Majorana Zero Modes of a $p_x + ip_y$ Superfluid of Fermionic Cold Atoms// *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — v.**98**. — P.010506(4).
37. *Ningning Hao, Ping Zhang, Jian Li, Wei Zhang, Yupeng Wang*, arXiv:1004.5471.
38. *H. C. A. Oji and A. H. MacDonald*. Magnetoplasma modes of the two-dimensional electron gas at nonintegral filling factors// *Phys. Rev. B*. — 1986. — v.**33**. — P.3810–3818.
39. *E. Batke, D. Heitmann, C.W. Tu*. Plasmon and magnetoplasmon excitation in two-dimensional electron space-charge layers on GaAs// *Phys. Rev. B*. –1986. — v.**34**. — P.6951–6960.

40. *L. J. Xu, X. G. Wu.* Charge-density and spin-density excitations in a two-dimensional electron gas with Rashba spin-orbit coupling// Phys. Rev. B. — 2006. — v.**74**. — P.165315(7).
41. *A. A. Burkov, Alvaro S. Nunez and A. H. MacDonald.* Theory of spin-charge-coupled transport in a two-dimensional electron gas with Rashba spin-orbit interactions// Phys. Rev. B — 2004. — v.70. — P.155308(8).
42. *J. B. Miller, D. M. Zumbuhl, C. M. Marcus, Y. B. Lyanda-Geller, D. Goldhaber-Gordon, K. Campman, and A. C. Gossard.* Gate-Controlled Spin-Orbit Quantum Interference Effects in Lateral Transport// Phys. Rev. Lett. — 2003. — v.**90**. — P.076807(4).
43. *Qiuzi Li, E. H. Hwang, and S. Das Sarma.* Collective modes of monolayer, bilayer, and multilayer fermionic dipolar liquid// Phys. Rev. B. — 2011. — v.**82**. — P.235126(11).
44. *Kechedzhi K. and S. Das Sarma,* Plasmon anomaly in the dynamical optical conductivity of graphene// Phys. Rev. B. — 2013. v.**88**. — P.085403(12).
45. *S. Das Sarma and Qiuzi Li.,* Intrinsic plasmons in two-dimensional Dirac materials// Phys. Rev. B. — 2013. — v.**87**. — P.235418(19).
46. *E. H. Hwang and S. Das Sarma.* Surface polar optical phonon interaction induced many-body effects and hot-electron relaxation in graphene// Phys. Rev. B. — 2013. — v.**87**. — P.115432(10).
47. *D. S. L. Abergel, R. Sensarma, and S. Das Sarma.* Density fluctuation effects on the exciton condensate in double-layer graphene// Phys. Rev. B. — 2012. — v.**86**. — P.161412(5).
48. *S. Ospelkaus, K.-K. Ni, G. Quémener, B. Neyenhuis, D. Wang, M. H. G. de Miranda, J. L. Bohn, J. Ye, and D. S. Jin,* Controlling the Hyperfine State of Rovibronic Ground-State Polar Molecules// Phys. Rev. Lett. — 2010. — v.**104**. —P. 030402.

49. *K.-K. Ni, S. Ospelkaus, D. J. Nesbitt, J. Ye, and D. S. Jin*, Phys. Chem. Chem. Phys. – 2009. – v.**11**. –P. 9626.
50. *S. Das Sarma and A. Madhukar*. Collective modes of spatially separated, two-component, two-dimensional plasma in solids// Phys. Rev. B. — 1981. — v.**23**. — P.805–815.
51. *Roman M. Lutchny, Enrico Rossi, and S. Das Sarma*. Spontaneous interlayer superfluidity in bilayer systems of cold polar molecules// Phys. Rev. A. — 2010. — v.**82**. — P.061604(4).
52. *Micheli A. et al.* Cold polar molecules in two-dimensional traps: Tailoring interactions with external fields for novel quantum phases// Phys. Rev. A. — 2007. — v.**76**. — P.043604(4).
53. *Gorshkov A. V. et al.* Suppression of Inelastic Collisions Between Polar Molecules With a Repulsive Shield// Phys. Rev. Lett. — 2008. — v.**101**. — P.073201(4).
54. *Cooper N. R. and Shlyapnikov G. V.* Stable Topological Superfluid Phase of Ultracold Polar Fermionic Molecules// Phys. Rev. Lett. — 2009. — v.**103**. — P.155302(4).
55. *Wang D.-W., Lukin M. D., and Demler E.* Quantum Fluids of Self-Assembled Chains of Polar Molecules// Phys. Rev. Lett. — 2006. — v.**97**. — P.180413(4).
56. *Buchler H. P., Demler E., Lukin M., Micheli A., Prokof'ev N., Pupillo G., and Zoller P.* Strongly Correlated 2D Quantum Phases with Cold Polar Molecules: Controlling the Shape of the Interaction Potential// Phys. Rev. Lett. — 2007. — v.**98**. — P.060404(4).
57. *Ching-Kit Chan, Congjun Wu, Wei-cheng Lee, S. Das Sarma*. Anisotropic-Fermi-liquid theory of ultracold fermionic polar molecules: Landau

- parameters and collective modes// Phys. Rev. A. — 2010. — v.**81**. — P.023602(16).
58. *S. Ronen and J. Bohn*, Zero sound in dipolar Fermi gases // Phys. Rev. A. - 2010. — v.**81**. - P. 033601.
59. *Uwe R. Fischer*. Stability of quasi-two-dimensional Bose-Einstein condensates with dominant dipole-dipole interactions// Phys. Rev. A. — 2006. — v.**73**. — P. 031602(R).
60. *S. Yi and L. You*. Phys. Rev. A. — 2000. — v.**61**. — P.041604(4). Trapped atomic condensates with anisotropic interactions//
61. *S. Kotochigova, P. S. Julienne, and E. Tiesinga*, Phys. Rev. A. — 2003. — v.**68**. — P.022501(4).
62. *L. Santos, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein*. Roton-Maxon Spectrum and Stability of Trapped Dipolar Bose-Einstein Condensates// Phys. Rev. Lett. — 2003. — v.**90**. — P.250403(4).
63. *J. Armaitis, R. A. Duine, and H. T. C. Stoof*. Quantum Rotor Model for a Bose-Einstein Condensate of Dipolar Molecules// Phys. Rev. Lett. —2013. — v.**111**. P.215301(5)
64. *Ronen Rapaport, Gang Chen, Steven Simon, Oleg Mitrofanov, Loren Pfeiffer, and P. M. Platzman*. Electrostatic traps for dipolar excitons// Phys. Rev. B. — 2005. — v.**72**. — P.075428(5).
65. *L. Santos, G.V. Shlyapnikov, P. Zoller, and M. Lewenstein*, Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases// Phys. Rev. Lett. — 2000. — v.**85**. — P.1791–1794.
66. *S. Yi and L. You*, Trapped condensates of atoms with dipole interactions// Phys. Rev. A. — 2001. — v.**63**. — P.053607(14).

67. *K. Goral and L. Santos*, Ground state and elementary excitations of single and binary Bose-Einstein condensates of trapped dipolar gases// Phys. Rev. A. — 2002. — v.**66**. — P.023613(12).
68. *Yongyong Cai, Matthias Rosenkranz, Zhen Lei, and Weizhu Bao*, Mean-field regime of trapped dipolar Bose-Einstein condensates in one and two dimensions// Phys. Rev. A. — 2010. — v.**82**. — P.043623(10).
69. *I. Sapina, T. Dahm, and N. Schopohl*, Ground-state and collective modes of a spin-polarized dipolar Bose-Einstein condensate in a harmonic trap// Phys. Rev. A. — 2010. — v.**82**. — P.053620(25).
70. *T. F. Jiang and W. C. Su*, Ground state of the dipolar Bose-Einstein condensate// Phys. Rev. A. — 2006. — v.**74**. — P.063602(6).
71. *Y. Yamaguchi, T. Sogo, T. Ito, and T. Miyakawa*, Density-wave instability in a two-dimensional dipolar Fermi gas// Phys. Rev. A. — 2010. — v.**82**. — P.013643(7).
72. *T. Miyakawa, T. Sogo, and H. Pu*, Phase-space deformation of a trapped dipolar Fermi gas// Phys. Rev. A. — 2008. — v.**77**. — P.061603(4).
73. *J. P. Morrison, C. J. Rennick, J. S. Keller, E. R. Grant*. Evolution from a Molecular Rydberg Gas to an Ultracold Plasma in a Seeded Supersonic Expansion of NO// Phys. Rev. Lett. — 2008. — v.**101**. — P.205005(4).
74. *M. P. Robinson, B. L. Tolra, M. W. Noel, T. F. Gallagher, and P. Pillet*, Spontaneous Evolution of Rydberg Atoms into an Ultracold Plasma// Phys. Rev. Lett. — 2000. — v.**85**. — P.4466–4469.
75. *E. A. Cummings, J. E. Daily, D. S. Durfee, and S. D. Bergeson*, Ultracold neutral plasma expansion in two dimensions // Phys. Plasmas. — 2005. — v.**12**. — P.123501(5).

76. *W. Li, P. J. Tanner, and T. F. Gallagher*, Dipole-Dipole Excitation and Ionization in an Ultracold Gas of Rydberg Atoms// *Phys. Rev. Lett.* — 2005. — v.**94**. — P.173001(4).
77. *Yasuyuki Kimura*. Electric-field-induced resonances of highly excited molecules// *Phys. Rev. A.* — 2009. — v.**79**. — P.043412(6).
78. *Motomichi Tashiro*. Application of the R-matrix method to photoionization of molecules// *J. Chem. Phys.* — 2010. — **132**. — P.134306.
79. *N. Saquet, J. P. Morrison, M. Schulz-Weiling, H. Sadeghi, J. Yiu, C. J. Rennick, E. R. Grant*, On the formation and decay of a molecular ultracold plasma// *arXiv:1103.0053v1*. — 2011.
80. *C. J. Rennick, J. P. Morrison, J. Ortega-Arroyo, P. J. Godin, N. Saquet, E. R. Grant*, Charge, density and electron temperature in a molecular ultracold plasma// *arXiv:0911.0466v2*. — 2010.
81. *Morrison J. P., Rennick C. J. and Grant E. R.*, Very slow expansion of an ultracold plasma formed in a seeded supersonic molecular beam of NO// *Phys. Rev. A.* — 2009. — v.**79**. — P.062706(7).
82. *Vitrant G., Raimond J., Gross M. and Haroche S.*, Rydberg to plasma evolution in a dense gas of very excited atoms// *J. Phys. B.* — 1982. — v.**15**. — P.0022-3700.
83. *Killian T. C., Kulin S., Bergeson S. D., Orozco L. A., Orzel C. and Rolston S. L.*, Creation of an Ultracold Neutral Plasma// *Phys. Rev. Lett.* — 1999. v.**83**. — P.4776-4779.
84. *Dorozhkina D. S. and Semenov V. E.*, Exact Solution of Vlasov Equations for Quasineutral Expansion of Plasma Bunch into Vacuum// *Phys. Rev. Lett.* — 1998. — v.**81**. — P.2691-2694.
85. *Pohl T., Pattard T. and Rost J. M.*, Plasma formation from ultracold Rydberg gases// *Phys. Rev. A.* — 2003. — v.**68**. — P.010703(4).

86. *Pohl T., Pattard T. and Rost J. M.*, Kinetic modeling and molecular dynamics simulation of ultracold neutral plasmas including ionic correlations// *Phys. Rev. A.* — 2004. — v.**70**. — P.033416(12).
87. *Viteau M., Chotia A., Comparat D., Tate D. A., Gallagher T. F. and Pillet P.*, Melting a frozen Rydberg gas with an attractive potential// *Phys. Rev. A.* — 2008. — v.**78**. — P.040704(4).
88. *Robicheaux F.*, Ionization due to the interaction between two Rydberg atoms // *J. Phys. B.* — 2005. — v.**38**. — P.S333.
89. *Erman P., Karawajczyk A., RachlewKallne E. and Stromholm C.*, Photoionization and photodissociation of nitric oxide in the range 9–35 eV// *J. Chem. Phys.* — 1995. — v.**102**. — P.3064.
90. *Giusti-Suzor A. and Jungen C.*, Theoretical study of competing photoionization and photodissociation processes in the NO molecule// *J. Chem. Phys.* — 1984. — v.**80**. — P.986.
91. *Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов*, Квантовая гидродинамика систем частиц с кулоновским взаимодействием и квантовый потенциал Бома// *ТМФ.* — 1999. — v.**118**:2. — С.287–304.
92. *М. А. Дрофа, Л. С. Кузьменков*, Континуальный подход к системам многих частиц с дальнодействием. Иерархия макроскопических полей и некоторые физические следствия// *ТМФ.* — 1996. — v.**108**:1. — С.3–15.
93. *Л. С. Кузьменков*, Полевая форма динамики и статистика систем частиц с электромагнитным взаимодействием// *ТМФ.* — 1991. — v.**86**:2. — С.231–243.
94. *K. D. Bonin and V. V. Kresin*, Electric-Dipole Polarizabilities of Atoms, Molecules and Clusters// *World Scientific. Singapore.* — 1997.

95. *Щербаченко Л.А.*, Физика диэлектриков: Методическое пособие// Иркутск — 2005.
96. *M. P. Bogaard and B. J. Orr*, Molecular Structure and Properties// in Physical Chemistry. Ed. A. D. Buckingham (Butterworths, London). — 1975. — Vol.2.
97. *S. A. Mikhailov*, Ferroelectric instability of two-dimensional crystals// Phys. Rev. B. — 2013. — v.88. — P.195410(4).
98. *Ji Feng, Liang Qi, Jian Yu Huang, and Ju Li*, Geometric and electronic structure of graphene bilayer edges// Phys. Rev. B. — 2009. — v.80. — P.165407(7).
99. *П. А. Андреев, Л. С. Кузьменков, М. И. Труханова.*, Дисперсия двумерного газа заряженных и нейтральных частиц с дипольным электрическим моментом. Метод квантовой гидродинамики// Динамика сложных систем. — 2010. — v.4. — № 1. — С.32-42.
100. *P. A. Andreev, L. S. Kuz'menkov, M. I. Trukhanova*, A quantum hydrodynamics approach to the formation of new types of waves in polarized two-dimension systems of charged and neutral particles// Phys. Rev. B. — 2011. — v. 84. — P. 245401(15).
101. *Trukhanova M. I.*, Spin and polarization Waves in a System of Paramagnetic Particles with an Intrinsic Dipole Moment// Int. J. Mod, Phys. B. — 2011. — v. 26. — №. 01. — P. 1250004(15).
102. *М. И. Труханова*, О динамике дипольного момента в двумерных системах частиц// XVII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов — 2010".
103. *Andreev P. A., Kuz'menkov L. S., Trukhanova M. I.*, Waves of polarization and methods of their generation// XLVIII All-Russian conference on

- problems of particle physics, plasma and condensed matter physics, optoelectronics dedicated to 100th Anniversary of Professor Ya. P. Terletskii, May 15-18, Moscow, Russia, 2012.
104. *E. Madelung*. Quantenteorie in hydrodynamischer form// Z. Phys. — 1926. — v.**40**. — P.332.
 105. *T. Takabayasi*, On the Formulation of Quantum Mechanics associated with Classical Pictures// Prog. Theor. Phys. — 1952. — v.**8**. — P.143-182.
 106. *T. Takabayasi, J. P. Vigiér*, Description of Pauli Matter as a Continuous Assembly of Small Rotating Bodies// Prog. Theor. Phys. — 1957. — v.**18**. — P.573-590.
 107. *T. Takabayasi*, Vortex, Spin and Triad for Quantum Mechanics of Spinning Particle.I // Prog. Theor. Phys. — 1983. — v.**70**. — P.1-17.
 108. *T. Takabayasi*, Remarks on the Formulation of Quantum Mechanics with Classical Pictures and on Relations between Linear Scalar Fields and Hydrodynamical Fields // Prog. Theor. Phys. — 1953. — v.**9**. — P.187-222.
 109. *T. Takabayasi*, The Vector Representation of Spinning Particle in the Quantum Theory, I // Prog. Theor. Phys. — 1955. — v.**14**. — P.283-302.
 110. *Vigiér G. P.*, C.R. Acad. Sci. Paris. — 1952. — v.**235**. — P.1107.
 111. *P. R. Holland*, The Quantum Theory of Motion (Cambridge University Press, Cambridge). — 1993.
 112. *Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, В. В. Федосеев*. Микроскопическая квантовая гидродинамика систем фермионов. I// ТМФ. — 2001. — v.**126**:1. — С.136–148.

113. *Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, В. В. Федосеев*. Микроскопическая квантовая гидродинамика систем фермионов. II// ТМФ. — 2001. — v.**126**:2. — С.258–270.
114. *L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov*, Local equilibrium approximation in quantum statistics of fermions// International Journal of Theoretical Physics, Group Theory and Nonlinear Optics. — 2004. — v.**11**. — P.1-32.
115. *И. М. Алешин*, Магнитная гидродинамика с учетом инерции электронов. Некоторые точные решения// ТМФ. — 1998. - v. 116:3 - с. 349–361.
116. *Андреев П.А. Кузьменков Л.С.*, О собственных волнах в двухкомпонентной системе частиц с магнитными моментами//Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. - 2007. - N.5. - С.5-7. [Moscow University Physics Bulletin, - 2007, - v.62, - No.5, - p.271-276.]
117. *Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов*, О функциях распределения в квантовой механике и функциях Вигнера// ТМФ. — 2002. — v.**131**:2. — С.231–243.
118. *L. S. Kuz'menkov, S. G. Maksimov*, International Journal of Theoretical Physics, Group Theory and Nonlinear Optics. — 2004. — v.**11**. — P.33-59.
119. *Wigner E.*, Phys. Rev. — 1932. — v.**40**. — 749.
120. *Wilhelm H. E.*, Hydrodynamic Model of Quantum Mechanics// Phys. Rev. D. — 1970. — v.**1**. — P.2278–2285.
121. *Manfredi G, Haas F.*, Self-consistent fluid model for a quantum electron gas// Phys. Rev. B. — 2001. — v.**64**. — P.075316(7).
122. *Moyal J. E.*, Proc. Cambr. Philos. Soc. — 1949. — v.**45**. — P.99.
123. *Klimontovich Yu. L.*, Statistical Physics. Harwood Acad. Publ. — 1986.

124. *Dan Anderson, Bjorn Hall, Mietek Lisak, and Mattias Marklund.* Statistical effects in the multistream model for quantum plasmas// Phys. Rev. E. — 2002. — v.**65**. — P.046417(5).
125. *F. Haas, G. Manfredi, and M. R. Feix,* Multistream model for quantum plasmas// Phys. Rev. E. — 2000. — **62**. — P.2763–2772.
126. *F. Haas,* A magnetohydrodynamic model for quantum plasmas // Phys. Plasmas. — 2005. — v.**12**. — P.062117.
127. *L. G. Garcia, F. Haas, L. P. L. de Oliveira, and J. Goedert,* Modified Zakharov equations for plasmas with a quantum correction// Phys. Plasmas — 2005. — v.**12**. — P.012302.
128. *P. K. Shukla,* A new dust mode in quantum plasmas // Phys. Lett. A. — 2006. — v.**352**. — P.242-243.
129. *F. Haas, L. G. Garcia, J. Goedert, and G. Manfredi,* Quantum ion-acoustic waves// Phys. Plasmas. — 2003. — v.**10**. — P.3858.
130. *P. K. Shukla and L. Stenflo,* Jeans instabilities in quantum dusty plasmas// Phys. Lett. A. — 2006. — v.**355**. —Issues 4–5. — P.378-380.
131. *P. K. Shukla,* New drift modes in a nonuniform quantum magnetoplasma// Phys. Lett. A. — 2006. — v.**357**. —Issue 3. — P.229-231.
132. *P. K. Shukla, L. Stenflo, and R. Bingham,* Shielding of a slowly moving test charge in a quantum plasma// Phys. Lett. A. — 2006. — v.**359**. —Issue 3. — P.218-219.
133. *P. K. Shukla and B. Eliasson,* Formation and Dynamics of Dark Solitons and Vortices in Quantum Electron Plasmas// Phys. Rev. Lett. — 2006. — v.**96**. — P.245001(4).

134. *P. K. Shukla and B. Eliasson*, Nonlinear Interactions between Electromagnetic Waves and Electron Plasma Oscillations in Quantum Plasmas// Phys. Rev. Lett. — 2007. — **99**, — P.096401(4).
135. *G. Brodin and M. Marklund*, Spin solitons in magnetized pair plasmas// Phys. Plasmas. — 2007. — v.**14**. — P.112107.
136. *M. Marklund and G. Brodin*, Dynamics of Spin-1/2 Quantum Plasmas// Phys. Rev. Lett. — 2007. — v.**98**. — P.025001(4).
137. *G. Brodin and M. Marklund*, Spin magnetohydrodynamics// New J. Phys. — 2007. — **9**. — P.277(11).
138. *G. Brodin and M. Marklund*, Ferromagnetic behavior in magnetized plasmas// Phys.Rev. E. — 2007. — **76**. — P.055403(4).
139. *D. Shaikh and P. K. Shukla*, Fluid Turbulence in Quantum Plasmas// Phys. Rev. Lett. — 2007. — v.**99**. — P.125002(4)
140. *M. Marklund, G. Brodin*, ICTP Summer College on Plasma Physics, Trieste 30 July - 24 August. — 2007.
141. *M. Marklund, B. Eliasson, P. K. Shukla*, Magnetosonic solitons in a fermionic quantum plasma// Phys. Rev. E. — 2007. — v.**76**. — P.067401(4).
142. *G. A. Mourou, T. Tajima, and S. V. Bulanov*, Optics in the relativistic regime// Rev. Mod. Phys. — 2006. — v.**78**. — P.309–371.
143. *Jens Zamanian, Gert Brodin, Mattias Marklund*, Dynamics of a dusty plasma with intrinsic magnetization// New J. Phys. — 2009. — v.**11**. — P.073017(10).
144. *J. H. Chu and Lin I*, Direct observation of Coulomb crystals and liquids in strongly coupled rf dusty plasmas// Phys. Rev. Lett. — 1994. — v.**72**. — P.4009–4012.

145. *M. W. Walser, D. J. Urbach, K. Z. Hatsagortsyan, S. X. Hu, and C. H. Keitel*, Spin and radiation in intense laser fields// Phys. Rev. A. — 2002. — v.**65**. — P.043410(14).
146. *R. Arvieu, P. Rozmej, and M. Turek*, Spin dynamics of wave packets evolving with the Dirac Hamiltonian in atoms with high atomic number Z // Phys. Rev. A. — 2000. — v.**62**. — P.022514(8).
147. *Л. С. Кузьменков, С. Г. Максимов, В. В. Федосеев*, Дисперсия волн в парамагнитных системах// Вестн. Моск. Ун-та. — 2000. — v.**3**. — №.5. — С.3-5.
148. *Л. С. Кузьменков, Д. Э. Харабадзе*, Волны в системах частиц с собственными магнитными моментами. (метод квантовой гидродинамики)// Известия вузов. Физика. — 2004. v.**47**. — №.4. С.87-93.
149. *W. H. Preece*, Nature (London). — 1894. —v. **49** — P.554.
150. *R. L. Stenzel*, Geophys. Res. Lett. — 1976. — v.**3**. — P.61.
151. *Scholer, M., and Burgess, D.*, Whistler waves, core ion heating, and nonstationarity in oblique collisionless shocks// Phys. Plasmas, — 2007. — v.**14**. — P.072103.
152. *M. Starodubtsev and C. Krafft*, Resonant Cyclotron Emission of Whistler Waves by a Modulated Electron Beam// Phys. Rev. Lett. — 1999. — v.**83**. — P.1335–1338.
153. *Rudolf Treumann and Thomas E. X. Bernold*. Radiation from a Whistler Soliton in Interaction with a Plasma Wave// Phys. Rev. Lett. —1981. — v.**47**. — P.1455–1458.
154. *Helliwell, A.*, Whistlers and Related Ionospheric Phenomena// Stanford University Press, Stanford, CA. — 1965.

155. *Wei, X. H., Cao, J. B., Zhou, G. C., Santolk, O., Rme, H., Dandouras, I., Cornilleau-Wehrin, N., Lucek, E., Carr, C. M., Fazakerley, A.*, Journal of Geophysical Research. — 2007. — v.**112**. — A10. — P.A10225(10).
156. *Stenzel, R. L., Urrutia, J. M.*, Force-free electromagnetic pulses in a laboratory plasma// *Phy. Rev. Lett.* — 1990. — v.**65**. — P.2011–2014.
157. *Urrutia J. M. and Stenzel, R. L.*, Transport of Current by Whistler Waves// *Phy. Rev. Lett.* — 1988. — v.**62**. P.272–275.
158. *Eliasson, B.; Shukla, P. K.*, Dynamics of Whistler Spheromaks in Magnetized Plasmas// *Phys. Rev. Lett.* — 2007. — v.**99**. — P.205005(4).
159. *A. P. Misra, G. Brodin, M. Marklund, P. K. Shukla*, Circularly polarized modes in magnetized spin plasmas// arXiv:1006.4878.
160. *Stein, R. F., Nordlund, A.*, Simulations of Solar Granulation. I. General Properties// *ApJ.* — 1998. — v.**499**. — P.914(23).
161. *Emonet T., Moreno-Insertis F.*, The Physics of Twisted Magnetic Tubes Rising in a Stratified Medium: Two-dimensional Results// *ApJ.* — 1998. — v.**492**, — P.804(18).
162. *Emonet T., Moreno-Insertis F.*, The Physics of Twisted Magnetic Tubes Rising in a Stratified Medium: Two-dimensional Results// *Rast M. P., ApJ.* — 2001. — v.**549**. — P.1212(9).
163. *Swadesh M. Mahajan, Felipe A. Asenjo*, Vortical Dynamics of Spinning Quantum Plasmas: Helicity Conservation// *Phys. Rev. Lett.* — 2011. — v.**107**. — P.195003(4).
164. *Dastgeer Shaikh, P. K. Shukla*, Spectral Properties of Electromagnetic Turbulence in Plasmas// *Nonlin. Processes Geophys.* — 2009. — v.16. — P.189-196.

165. *Shaikh, D., and Zank, G. P.*, Three-dimensional simulations of turbulent spectra in the local interstellar medium// Nonlin. Processes Geophys. — 2007. — v.**14**. — P.351-359.
166. *S. Dastgeer*, Generation of Coherent Structures in Electron Magnetohydrodynamics// Physica Scripta. — 2004. — v.**69**. — P.216.
167. *Goldstein, M. L., Roberts, D. A., Fitch, C. A.*, J. Geophys. Res. — 1994. — v.**99**. — 11519.
168. *Servidio, S., Matthaeus, W. H., and Carbone, V.*, Statistical properties of ideal three-dimensional Hall magnetohydrodynamics: The spectral structure of the equilibrium ensemble// Phys. Plasmas — 2008. — v.**15**. — P.042314.
169. *Shaikh, D.*, Whistler Wave Cascades in Solar Wind Plasma// Mon Not Royal Astrono. Soc. — 2009.
170. *Salvatore De Martino, Mariarosaria Falanga, Stephan I. Tzenov*, Whistleron Gas in Magnetized Plasmas// Phys. Plasmas. — 2005. — v.**12**. — P.072308(7).
171. *L.Y. Chen, N. Goldenfeld and Y. Oono*, Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory// Physical Review E. — 1996. — v.**54**. — P.376–394.
172. *S.I. Tzenov*, Contemporary Accelerator Physics// World Scientific. Singapore. — 2004.
173. *S.I. Tzenov*, Soliton gas in space-charge-dominated beams// New Journal of Physics. — 2004. — v.**6**. — P.19(4).
174. *P. Chen and T. Tajima*, Testing Unruh Radiation with Ultraintense Lasers// Phys. Rev. Lett. — 1999. — v.**83**. — P.256–259.

175. *M. Horányi, T.W. Hartquist, O. Havnes, D.A. Mendis, and G.E. Morfill*, Dusty plasma effects in Saturn's magnetosphere// *Rev. Geophys.* — v.**42**. — 2004. — Issue 4. — P.RG4002.
176. *P.K. Shukla and A.A. Mamun*, *Introduction to Dusty Plasma Physics*// Institute of Physics Publishing, Bristol. — 2000.
177. *L. Dunne, S. Eales, R. Ivison, H. Morgan, and M. Edmunds*, Type II supernovae as a significant source of interstellar dust// *Nature*. — 2003. — v.**424**. — P.285-287.
178. *O. Krause, S.M. Birkmann, G.H. Rieke, D. Lemke, U. Klaas, D.C. Hines, and K.D. Gordon*, No cold dust within the supernova remnant Cassiopeia A// *Nature*. — 2004. — v.**432**. — P.596-598.
179. *J.S. Heyl and L. Hernquist*, Electromagnetic shocks in strong magnetic fields// *Phys. Rev. D*. — 1998. — v.**58**. — P.043005(10).
180. *Meszaros P.*, *High Energy Radiation from Magnetized Neutron Stars*// Chicago: Univ. of Chicago Press. — 1992.
181. *Lai D.*, Matter in strong magnetic fields// *Rev. Mod. Phys.* — 2001. — v.**73**. — P.629–662.
182. *Chabrier G., Douchin F., Potekhin A. Y.*, *J. Phys. Condens. Matter*. — 2002. — v.**14**. — 9133.
183. *Beskin V. S., Gurevich A V, Istomin Ya. N.*, *Physics of the Pulsar Magnetosphere*// Cambridge: Cambridge Univ. Press. — 1993.
184. *Merav Opher, Luis O. Silva, Dean E. Dauger, Viktor K. Decyk and John M. Dawson*. Nuclear reaction rates and energy in stellar plasmas: The effect of highly damped modes// *Phys. Plasmas*. — 2001. — v.**8**. — P.2454.
185. *Shapiro S. L.*, *Teukolsky S* *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*// Weinheim: Wiley-VCH. — 2004.

186. *Y. Y. Lau, D. Chernin, D. G. Colombant, and P.-T. Ho*, Quantum extension of Child-Langmuir law// *Phys. Rev. Lett.* — 1991. — v.**66**. — P.1446–1449.
187. *L. K. Ang, W. S. Koh, Y. Y. Lau and T. J. T. Kwan*, Space-charge-limited flows in the quantum regime// *Phys. Plasmas*. — 2006. — v.**13**. — P.056701.
188. *Shukla P. K., Eliasson B.*, Nonlinear Theory for a Quantum Diode in a Dense Fermi Magnetoplasma// *Phys. Rev. Lett.* — 2008. — v.**100**. — P.036801(4).
189. *Barnes W.L., Dereux A., Ebbesen T.W.*, Surface plasmon subwavelength optics// *Nature*. — 2003. — v.**424**. — P.824-830.
190. *Chang D. E., A. S. Sorensen, P. R. Hemmer, M. D. Lukin*. Quantum Optics with Surface Plasmons// *Phys. Rev. Lett.* — 2006. — v.**97**, — P.053002(4).
191. *Markovich P. A. et al.* Semiconductor Equation// Wien: Springer. — 1990.
192. *Abrahams E., Kravchenko S. V., Sarachik M. P.*, Metallic behavior and related phenomena in two dimensions// *Rev. Mod. Phys.* — 2001. — v.**73**. — P.251–266.
193. *Magnus W.C. J, Schoenmaker W.J.*, Quantum Transport in Submicron Devices// Berlin: Springer. — 2002.
194. *Lee H. J. et al.* X-Ray Thomson-Scattering Measurements of Density and Temperature in Shock-Compressed Beryllium// *Phys. Rev. Lett.* — 2009. — v.**102**. — P.115001(4).
195. *Hu S. X., Keitel C. H.*, Spin Signatures in Intense Laser-Ion Interaction// *Phys. Rev. Lett.* — 1999. — v.**83**. — P.4709–4712.

196. *Mourou G. A., Tajima T., Bulanov S. V.*, Optics in the relativistic regime// Rev. Mod. Phys. — 2006. — v.**78**. — P.309–371.
197. *Marklund M., Shukla P. K.*, Nonlinear collective effects in photon-photon and photon-plasma interactions// Rev. Mod. Phys. — 2006. — v.**78**. — P.591–640.
198. *Norreys P. A. et al.* Phys. Plasmas. — 2009. — v.**16**. — 041002.
199. *Drake R. P.*, Phys. Plasmas. — 2009. — v.**16**. — 055501.
200. *Ivonin I A, Pavlenko V P, Persson H.* Phys. Rev. E. — 1999. — v.**60**. — P.492.
201. *Shukla P. K., Eliasson B.*, Nonlinear Interactions between Electromagnetic Waves and Electron Plasma Oscillations in Quantum Plasmas// Phys. Rev. Lett. — 2007. — v.**99**. — P.096401(4).
202. *Pavel A. Andreev, Felipe A. Asenjo, Swadesh M. Mahajan*, On a consistent macroscopic description for a spin quantum plasma with interparticle interactions// arXiv:1304.5780.
203. *П. К. Шукла, Б. Элиасон*, Нелинейные аспекты квантовой физики плазмы// УФН. —2010. — Т. 180. —№ 1. С.55-82.
204. *Кузьменков Л. С., Харабадзе Д. Э.* Электромагнитная волна с круговой поляризацией в системах частиц с собственным магнитным моментом. //Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. - 2005. - N.4. - С. 19–21.
205. *Кузьменков Л. С., Харабадзе Д. Э.* Волны в системах частиц с собственным магнитным моментом. (метод квантовой гидродинамики)// Известия вузов. Физика. - 2004. - т. 47. - N.4. - С. 87–93.
206. *Pavel A. Andreev*, Exchange effects in Coulomb quantum plasmas: Dispersion of waves in 2D and 3D mediums// arXiv:1403.6075.

207. *J. Zamanian, M. Marklund, G. Brodin*, Exchange effects in plasmas: The case of low-frequency dynamics // *Phys. Rev. E*. - v. **88**. - 2013. - P. 063105.
208. *J. Zamanian, M. Marklund, G. Brodin*, arXiv: 1402.7240.
209. *M. V. Kuzelev, A. A. Rukhadze*, *Phys. Usp.* - 1999. - v. **42**. - P. 603.
210. *Ахиезер А.И., Ахиезер И.А., Половин Р.В. и др.* Электродинамика плазмы// - 1974. -М.: «Наука».
211. *Trukhanova M. Iv.*, Quantum Hydrodynamics Approach to The Research of Quantum Effects and Vorticity Evolution in Spin Quantum Plasmas// *Progress of Theoretical and Experimental Physics*. - 2013. - v. **2013**. - P. 111I01.
212. *Trukhanova M. Iv.*, Effects of spin-orbital coupling on the propagation of whistler waves in the magnetized plasma// *The European Physical Journal D*. - 2013. - v. **67**. - Issue 2.
213. *Mariya Iv. Trukhanova, Kuz'menkov L. S.*, Spin effects in the quantum many-particles systems// arXiv:1403.2981v2.
214. *М. И. Труханова*, Спиновые и спин-орбитальные эффекты в распространении вистлеров в квантовой астрофизической плазме// XX Международная конференция студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов 2013".
215. *Mariya Iv. Trukhanova, Pavel A. Andreev*, Exchange effects in magnetized quantum plasmas// arXiv:1405.6294.