

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Московский физико-технический
институт (государственный университет)»**

На правах рукописи

Зябловский Александр Андреевич

**Оптика и магнитооптика лазеров на основе фотонных
кристаллов и метаматериалов**

01.04.13 – Электрофизика, электрофизические установки

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
главный научный сотрудник ИТПЭ РАН
Пухов Александр Александрович

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Аналитический обзор существующих результатов	11
1.1. Описание взаимодействия электромагнитного поля с усиливающей слоистой средой	11
1.1.1. Уравнения Максвелла-Блоха	11
1.1.2. Описания усиливающих сред при помощи диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью. Соотношения Крамерса-Кронинга для диэлектрической проницаемости	14
1.2. <i>PT</i> -симметрия	16
1.2.1. Операторы пространственной инверсии и обращения времени	16
1.2.2. Необходимое и достаточное условие действительности собственных значений <i>PT</i> -симметричного гамильтониана	20
1.2.3. Фазовый переход с нарушением <i>PT</i> -симметрии собственных решений	22
1.2.4. <i>PT</i> -симметрия в электродинамике	23
1.2.5. Фазовый переход в двумерных <i>PT</i> -симметричных электроди- намических системах	25
1.2.6. Неортогональность собственных функций неэрмитового гамильтониана с действительными собственными значениями	28
Глава 2. Распространение электромагнитных волн по диэлектрическому слою, содержащему усиливающую среду	30
2.1. Введение	30
2.2. Падение электромагнитных волн по нормали на усиливающий слой. Подходы Френеля и Эйри	31
2.3. Временная задача о прохождении полубесконечного электромагнитного импульса через усиливающий слой при падении по нормали к поверхности	39
2.4. Падение электромагнитных волн под углом на усиливающий слой	48
2.5. Выводы	53
Глава 3. Распространение электромагнитных волн по фотонному кристаллу, содержащему усиливающую среду	56
3.1. Введение	56
3.2. Построение ряда по парциальным волнам Эйри для фотонного (электромагнитного) кристалла	57

3.3. Лазерная генерация в разрешенной зоне фотонного (электромагнитного) кристалла, содержащего усиливающую среду	59
3.4. Лазерная генерация в запрещенной зоне фотонного (электромагнитного) кристалла, содержащего усиливающую среду	62
3.5. Выводы	67
Глава 4. Лазер с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле	69
4.1. Введение	69
4.2. Уравнения динамики лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле	70
4.3. Стационарные режимы генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле	73
4.4. Аналитическое описание стационарных режимов генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле	77
4.5. Линейный анализ устойчивости	80
4.6. Характерные времена включения/выключения лазерной генерации	81
4.7. Вывод уравнений лазера во внешнем магнитном поле	83
4.8. Выводы	89
Глава 5. Фазированная решетка спазеров	90
5.1. Введение	90
5.2. Система уравнений для фазированной решетки спазеров	94
5.3. Синхронизация колебаний дипольных моментов отдельных спазеров в фазированной решетке	97
5.4. Сверхизлучение от фазированной решетки спазеров	98
5.5. Диаграмма направленности излучения от фазированной решетки спазеров	101
5.6. Механизм синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных спазеров в фазированной решетке	102
5.7. Краевые эффекты в фазированной решетке спазеров	103
5.8. Выводы	106
Глава 6. <i>PT</i>-симметрия в электродинамике	107
6.1. Введение	107
6.2. <i>PT</i> -симметрия в реальных электродинамических системах	108

6.3. Влияние дисперсии на возможность наблюдения фазовых переходов в PT -симметричных и квази- PT -несимметричных электродинамических системах	112
6.4. Выводы	115
Заключение	116
Список цитируемой литературы	120

Введение

Актуальность темы

Развитие новых разделов электродинамики, таких как электродинамика метаматериалов и плазмоники, поставило во главу угла вопрос о применении усиливающих сред в композитных материалах. Действительно, наличие высоких потерь в метаматериалах и плазмонных композитах препятствует реализации многих схем и приборов на их основе. Одним из предложенных решений является фотонный кристалл, в котором чередуются слои метаматериала и активной среды [1].

Фотонные кристаллы – важный класс композитных материалов. Отличительной особенностью фотонных кристаллов является наличие запрещенных зон в спектре пропускания электромагнитных волн. Наличие широкополосных запрещенных зон позволяет создавать на основе фотонных кристаллов устройства, концентрирующие и преобразующие электромагнитные импульсы, с характерными размерами в несколько длин волн. Например, высокодобротные оптические резонаторы, волноводы, делители электромагнитных импульсов и т.п. Для практических применений бывает выгодно помещать внутрь композитных материалов усиливающие компоненты. Наличие усиления приводит к изменению электромагнитных свойств фотонных кристаллов и метаматериалов. В диссертации рассмотрены два примера усиливающих слоистых сред: *PT*-симметричные системы [2,3] и фотонные кристаллы, содержащие усиливающие компоненты. В обоих случаях усиление принципиально меняет свойства электромагнитных структур.

В качестве альтернативы устройствам на основе фотонных кристаллов в последние годы рассматриваются их аналоги, включающих плазмонные наноструктуры [4-10]. В таких устройствах плазмонные наноструктуры играют роль резонаторов, nanoантенн, концентраторов электромагнитных полей. Использование плазмонов открывает возможность управления электромагнитными полями на наномасштабе. В то же время, для плазмонных структур характерны высокие потери, поэтому задача о компенсации потерь крайне актуальна. Использование усиливающих компонент необходимо и для создания генераторов электромагнитного поля (спазеров) с характерными размерами, много меньшими длины волны испускаемого излучения, которые служат для генерации когерентных ближних полей.

В настоящее время теория композитов на основе усиливающих сред далека от своего завершения, и в литературе ведется дискуссия по поводу фундаментальных свойств таких композитов. Поэтому исследование взаимодействия электромагнитных волн с различными композитными структурами и изучение режимов генерации лазеров с резонаторами на основе композитных материалов является **актуальной задачей**, решение которой поможет в решении проблемы увеличения быстродействия вычислительных устройств.

Цели диссертационной работы

Целью диссертационной работы является теоретическое исследование электромагнитных свойств слоистых сред, метаматериалов и плазмонных композитов, содержащих усиливающие компоненты, по следующим направлениям.

1. Исследование прохождения электромагнитных волн через слоистые среды, содержащие усиливающие компоненты.
2. Изучение режимов генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле.
3. Численное и теоретическое исследование явления самосинхронизации колебаний дипольных моментов в двумерной решетке спазеров.
4. Исследование влияния дисперсии диэлектрической проницаемости на свойства *PT*-симметричных и квази-*PT*-симметричных электродинамических систем.

Научная новизна

1. Впервые найдены критерии формирования запрещенной зоны в фотонном кристалле, содержащем усиливающие слои. Определена граница между разрешенной и запрещенной зонами фотонного кристалла, содержащего усиливающие слои.
2. Определена область применимости френелевского подхода для расчета распределения поля в фотонном кристалле, содержащем усиливающие слои. Показано, что френелевский подход применим при малом числе ячеек фотонного кристалла на частотах из разрешенной зоны и при большом числе ячеек на частотах из запрещенной зоны.
3. Обнаружен эффект подавления лазерной генерации в фарадеевском лазере с анизотропным резонатором при наложении внешнего статического магнитного поля.
4. Впервые показано, что в двумерной решетке спазеров взаимодействие наночастиц через квантовые точки соседних спазеров может приводить к синхронизации колебаний

дипольных моментов отдельных наночастиц. Результатом синхронизации являются эффекты сверхизлучения и сужения диаграммы направленности.

5. Доказана невозможность наблюдения фазового перехода при изменении частоты электромагнитного поля в *PT*-симметричных и квази-*PT*-симметричных системах.

Достоверность результатов

Достоверность результатов, представленных в диссертации, подтверждается совпадением теоретических результатов с результатами численного моделирования, публикациями в ведущих мировых научных журналах и докладами на международных конференциях.

Научная и практическая ценность

Результаты данной диссертационной работы посвящены широко обсуждаемым научным проблемам, и все они имеют перспективные практические применения. Так, проблема взаимодействия излучения с усиливающими средами, которая до недавних пор казалась решенной, недавно получила новое развитие благодаря появлению новых видов композитных сред (метаматериалов) и фотонных кристаллов. В частности, известно, что электромагнитная волна с частотой из запрещенной зоны фотонного кристалла экспоненциально затухает при распространении вглубь такой слоистой структуры [11]. В то же время, электромагнитная волна, распространяясь по усиливающей среде, экспоненциально возрастает. Вопрос о том, как будет распространяться электромагнитная волна в запрещенной зоне фотонного кристалла, содержащего усиливающие компоненты, до сих пор обсуждается. Всестороннему рассмотрению данной проблемы посвящена первая часть диссертационной работы. Также исследован вопрос об условиях лазерной генерации в запрещенной зоне фотонного кристалла и обнаружены качественные отличия этого режима от генерации в разрешенной зоне. Показано, что, несмотря на наличие усиливающей среды, свойство запрещенной зоны подавлять распространение излучения сохраняется. Кроме того, в работе решена задача о взаимодействии электромагнитной волны с однородным усиливающим слоем в условиях полного внутреннего отражения. Развита теория может быть использована для разработки активных оптических устройств, обеспечивающих управление излучением с помощью запрещенных зон слоистых систем.

В современных вычислительных устройствах обработка информации обычно осуществляется электронными компонентами схем, а её передача происходит по

оптическим каналам. Для преобразования электрического сигнала в оптический (и обратно) используют лазеры с токовой накачкой. Информация кодируется интенсивностью лазерного излучения, поэтому очень важно уметь быстро включать и выключать лазерную генерацию [12]. В диссертации показано, что в лазере с анизотропным резонатором генерация может подавляться внешним магнитным полем за время порядка 10^{-10} сек, что позволит использовать их в качестве источников когерентного излучения в оптических линиях передачи информации.

Для аналогичных целей может быть использовано излучение от двумерной решетки спазеров. На практике применение подобных систем ограничено низкой эффективностью преобразования энергии накачки в энергию электромагнитного поля и отсутствием направленности генерируемого излучения. В данной диссертационной работе показано, что в двумерной решетке спазеров взаимодействие наночастиц через квантовые точки соседних спазеров может приводить к синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных наночастиц. В результате излучение от системы становится узконаправленным, а его суммарная интенсивность повышается на два порядка. Предложенное устройство чрезвычайно интересно для применений в открытой оптической связи и, в частности, есть перспектива создания на его основе первой оптической фазированной решетки.

Рост интенсивности излучения при синхронизации спазеров в двумерной решетке связан с эффектом сверхизлучения Дике [13]. Сама синхронизация возникает из-за ближнепольного взаимодействия наночастиц с квантовыми точками соседних спазеров. Учитывая, что на расстояниях, меньших длины волны, ближнепольное взаимодействие гораздо сильнее взаимодействия через дальнее поле, описанный в работе механизм синхронизации открывает возможность экспериментального наблюдения сверхизлучения от наноразмерных систем.

Последняя глава диссертации посвящена исследованию влияния дисперсии диэлектрической проницаемости на свойства PT -симметричных систем. Подобные структуры сочетают в себе усиливающие и поглощающие среды [14,15]. В публикациях последних пяти лет предсказано большое количество новых эффектов в PT -симметричных системах, таких как фазовый переход с нарушением PT -симметрии решений [3,14,15]; было предложено несколько оптических устройств на основе PT -симметричных систем [16-19], в том числе, требующих для своей работы сохранения PT -симметрии в конечной полосе частот [2,3]. Подобные системы могут применяться для создания более компактных линий связи и оптических переключателей, управляемых электрическим

током. Однако возможность практической реализации PT -симметричных систем, особенно в диапазоне частот, до сих пор не исследовалась. В диссертационной работе показано, что выполнение условия PT -симметрии в любом конечном интервале частот противоречит принципу причинности, из-за чего многие из предсказанных эффектов в реальных системах наблюдаться не могут, а предложенные устройства не обладают заявленными свойствами. Результаты, полученные в данной главе, указывают на необходимость учета частотной дисперсии усиливающей среды при разработке волноводов и переключателей на основе PT -симметричных структур.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту

1. Разрешен парадокс о сверхусилении волн в запрещенной зоне фотонного кристалла, содержащего усиливающие слои. Волна, проходящая через достаточно толстый образец такого кристалла, ослабляется. В частности, если частота перехода усиливающей среды принадлежит запрещенной зоне, то лазерная генерация подавляется с увеличением числа слоев в системе.
2. Предложена схема фарадеевского лазера с анизотропным резонатором, в котором с помощью внешнего статического магнитного поля можно включать и выключать лазерную генерацию.
3. В двумерной решетке спазеров взаимодействие наночастиц через квантовые точки соседних спазеров может приводить к синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных наночастиц. Определены условия возникновения такой синхронизации с учетом радиационных потерь.
4. Синхронизация колебаний спазеров приводит к их сверхизлучению, то есть к увеличению интенсивности излучения. В результате спазеры из генераторов ближних полей превращаются в генераторы дальних полей. Широкоапертурные решетки спазеров можно использовать в качестве источников узконаправленного излучения.
5. Условие PT -симметрии электродинамической системы может выполняться только в дискретном наборе частот и не может выполняться в любом конечном интервале частот.
6. Невозможно наблюдать фазовый переход при изменении частоты электромагнитного поля в PT -симметричных и квази- PT -симметричных электродинамических системах.

Апробация результатов

Основные результаты работы докладывались на следующих международных и российских конференциях: 2nd IEEE International Workshop on THz Radiation (TERA'2010),

Sevastopol, Ukraine, 10-14 September 2010; Международная конференция "Фундаментальные проблемы оптики - 2010". С.-Петербург, Россия, 18-22 октября 2010; 53-я научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 25-26 ноября 2010; Двенадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва, Россия, 4-7 апреля 2011; International Conference Days on Diffraction'2011 (DD'2011), St. Petersburg, Russia, May 30 – June 3, 2011; International Conference on Materials for Advanced Technologies'2011 (ICMAT 2011), Singapore, June 26-July 1 2011; Moscow International Symposium on Magnetism (MISM'2011), Moscow, Russia, 21–25 August, 2011; 54-я научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 25-26 ноября 2011; Тринадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва, Россия, 14-16 мая 2012; International Conference Days on Diffraction'2012 (DD'2012), St. Petersburg, Russia, May 30 – June 3, 2012; 12th International Conference on Near-Field Optics and Nanophotonics (NFO'12), San Sebastian, Spain, 3-7 September; Metamaterials 2012: The 6th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics, St. Petersburg, Russia, 17-22 September, 2012; 55-я научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 19-22 ноября 2012; Четырнадцатая ежегодная научная конференция ИТПЭ РАН, Москва, Россия, 4-7 апреля 2013; International Conference Days on Diffraction'2013 (DD'2012), St. Petersburg, Russia, May 27–31, 2013; International Conference on Materials for Advanced Technologies'2013 (ICMAT'2013), Singapore, June 30 – July 5; 56-я научная конференция МФТИ, Москва, Россия, 19-22 ноября 2013

Публикации

По теме диссертации опубликовано 17 работ, в том числе 9 статей в ведущих рецензируемых научных журналах и других изданиях, включенных в список ВАК.

Личный вклад соискателя

Все изложенные в диссертации оригинальные результаты получены лично автором, либо при его непосредственном участии. Автор принимал непосредственное участие в выборе объектов исследования, постановке задач, разработке теоретических подходов, численном моделировании и обсуждении полученных результатов.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения и списка литературы из 132 наименований. Общий объем 127 страниц, в том числе 32 рисунка.

Глава 1

Аналитический обзор существующих результатов

1.1. Описание взаимодействия электромагнитного поля с усиливающей средой

1.1.1. Уравнения Максвелла-Блоха

Рассмотрим распространение электромагнитного поля по немагнитной среде, которая описывается некоторым пространственным распределением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{mat}(\omega, \mathbf{r})$ и проводимости $\sigma(\omega, \mathbf{r})$. Кроме того, в среде имеются активные атомы, обеспечивающие накачку. При наличии большого числа фотонов в модах излучения электромагнитное поле можно описывать классическими уравнениями Максвелла [20,21]. Одновременно, активные атомы можно рассматривать как двухуровневые квантовые системы (ДУС), взаимодействующие с электромагнитным полем за счет своей поляризации $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$.

В таком случае уравнения Максвелла для электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и магнитного $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ полей записываются в следующем виде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \varepsilon_{mat} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} - электрическое и магнитное поле. Возьмем ротор от обеих частей уравнения (1) и продифференцируем по времени уравнение (2). Затем подставив второе получившееся уравнение в первое, исключим магнитное поле:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \varepsilon_{mat} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} \quad (5)$$

Отдельная квантовая двухуровневая система может находиться в возбужденном (верхнем) $|e\rangle$ или основном (нижнем) $|g\rangle$ состояниях с относительными вероятностями

ρ_{ee} и ρ_{gg} , так что $\rho_{ee} + \rho_{gg} = 1$. В этом базисе ДУС описывается матрицей плотности -

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{gg} & \rho_{ge} \\ \rho_{eg} & \rho_{ee} \end{pmatrix}, \text{ которая подчиняется уравнению [22-26]}$$

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}] + \hat{R} \quad (6)$$

Здесь \hat{H} – гамильтониан, состоящий из невозмущенного гамильтониана ДУС

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} E_g & 0 \\ 0 & E_e \end{pmatrix} \text{ и гамильтониана ее взаимодействия с электрическим полем}$$

$$\hat{H}_{\text{вз}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{d}_{ge} \mathbf{E}^* \\ -\mathbf{d}_{eg} \mathbf{E} & 0 \end{pmatrix}, \text{ где матричные элементы оператора дипольного момента } \mathbf{d}_{ge}$$

считаются вещественными величинами. Оператор \hat{R} отвечает за релаксацию в ДУС, явный вид которой будет определен позже. Без учета этого слагаемого уравнение (6) поэлементно записывается следующим образом:

$$i\hbar \frac{d\rho_{gg}}{dt} = \mathbf{d}_{ge} \mathbf{E}^* \rho_{eg} - \mathbf{d}_{eg} \mathbf{E} \rho_{ge} \quad (7)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{ee}}{dt} = -\mathbf{d}_{ge} \mathbf{E}^* \rho_{eg} + \mathbf{d}_{eg} \mathbf{E} \rho_{ge} \quad (8)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{ge}}{dt} = \hbar\omega_{\text{ДУС}} \rho_{ge} + \mathbf{d}_{ge} \mathbf{E}^* (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \quad (9)$$

$$i\hbar \frac{d\rho_{eg}}{dt} = -\hbar\omega_{\text{ДУС}} \rho_{eg} - \mathbf{d}_{eg} \mathbf{E} (\rho_{ee} - \rho_{gg}) \quad (10)$$

где $\omega_0 = (E_e - E_g) / \hbar$ – частота перехода двухуровневой системы.

Переменные в (7)-(10) имеют ясный физический смысл. Разность диагональных элементов матрицы плотности $D = \rho_{ee} - \rho_{gg}$ является разностью вероятностей обнаружить ДУС на верхнем и нижнем уровнях и называется инверсией населенностей. Из недиагональных элементов получается средний дипольный момент ДУС:

$$\mathbf{p}(t) = \langle \hat{\mathbf{d}} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}(t) \hat{\mathbf{d}}) = \rho_{ge} \mathbf{d}_{eg} + \rho_{eg} \mathbf{d}_{ge}, \text{ где оператор дипольного момента } \hat{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}_{eg} \\ \mathbf{d}_{ge} & 0 \end{pmatrix}$$

и $\mathbf{d}_{ge} = \mathbf{d}_{eg}^*$. Для этих переменных (7)-(10) с добавлением релаксационных членов оператора \hat{R} получаются уравнения [22-26]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau_p} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + \omega_0^2 \mathbf{p} = -\frac{2\omega_0 |\mathbf{d}_{ge}|^2 D \cdot \mathbf{E}}{\hbar}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{\tau_D} (D - D_0) = \frac{i}{\hbar} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t}. \quad (12)$$

Времена релаксации поляризации τ_p и инверсии населенности τ_D соответствуют временам продольной и поперечной релаксации в теории магнитного резонанса, а D_0 - величина инверсной населенности в отсутствии поля.

Допустим, что ДУС распределены в пространстве с некоторой концентрацией $\nu(\mathbf{r})$. Умножим уравнения (11) и (12) на эту концентрацию и обозначим поляризацию этой усиливающей среды - $\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(t)\nu(\mathbf{r})$, как и в уравнении (5), плотность инверсии населенностей - $n(\mathbf{r}, t) = D(t)\nu(\mathbf{r})$ и величину, определяющую интенсивность накачки - $n_0(\mathbf{r}) = D_0\nu(\mathbf{r})$. Тогда получим уравнения на поляризацию среды и инверсную населенность [22,27,28]

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau_p} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \omega_0^2 \mathbf{P} = -\frac{2\omega_0 |\mathbf{d}_{ge}|^2 n \mathbf{E}}{\hbar}, \quad (13)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\tau_n} (n - n_0) = \frac{i}{\hbar} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}, \quad (14)$$

где $\tau_n = \tau_D$ и $\tau_p = \tau_p$.

Хотя последние два уравнения содержат только временные производные, входящие в них функции зависят от координаты, т.е. уравнения (13), (14) являются локальными. Заметим также, что \mathbf{d}_{ge} в общем случае также может быть функцией координаты.

Уравнения (5), (13), (14) описывают взаимодействие электромагнитного поля с двухуровневой квантовой системой и называются уравнениями Максвелла–Блоха. Поскольку, при таком рассмотрении электромагнитное поле описывается классическими уравнениями Максвелла, а усиливающая среда квантово-механическими уравнениями на матрицу плотности, то такое приближение называют полуклассическим [22-26].

1.1.2. Описания усиливающих сред при помощи диэлектрической проницаемости с отрицательной мнимой частью. Соотношения Крамерса-Кронинга для диэлектрической проницаемости

При рассмотрении распространения света в усиливающей среде часто используется классическое описание среды через диэлектрическую проницаемость с отрицательной мнимой частью. Такое описание получается из полуклассических уравнений Максвелла-Блоха. В одномерном случае, когда все физические величины зависят только от координаты z и времени, уравнения Максвелла-Блоха записываются в виде:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_{mat}(z)}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} + \frac{2}{\tau_p} \frac{\partial P}{\partial t} + \omega_0^2 P = -\frac{2\omega_0 |\mathbf{d}_{ge}|^2 n E}{\hbar}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{\tau_n} (n - n_0) = \frac{2}{\hbar \omega_0} E \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (17)$$

Электрическое поле $E(z, t)$ направлено перпендикулярно оси z и имеет фиксированную поляризацию.

Переходя к Фурье-представлению, правую часть последнего уравнения (17) надо записать в виде $\frac{1}{2\hbar\omega_0} \left(E^* \frac{\partial P}{\partial t} + E \frac{\partial P^*}{\partial t} \right)$ (смотри [29]). При этом $n(z)$ перестает зависеть от времени. В случае если времена затухания поляризации и инверсной населенности усиливающей среды много меньше времени затухания электрического поля и $|\omega - \omega_0| \ll \omega$ (ω - частота электрического поля), то переменные P и n можно исключить, получив одно уравнение на электрическое поле:

$$\frac{\partial^2 E(z, \omega)}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{gain}(z, \omega) E(z, \omega) = 0. \quad (18)$$

В этом случае усиливающая среда описывается эффективной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_{gain}(\omega) = \varepsilon_{mat} + \alpha \frac{\omega_0}{\omega} \frac{-i + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega / \tau_p}}{1 + \beta |E|^2 + \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega / \tau_p} \right)^2}, \quad (19)$$

имеющей отрицательную мнимую часть при $n_0 > 0$ (смотри также [23,30-32]), здесь $\alpha = 4\pi |\mathbf{d}_{ge}|^2 \tau_p n_0 / \hbar$, $\beta = |\mathbf{d}_{ge}|^2 \tau_n \tau_p / \hbar^2$, ε_{mat} - диэлектрическая проницаемость матрицы в которую помещена усиливающая (поглощающая) среда.

Из-за зависимости ε_{gain} от E уравнение (18) представляет собой нелинейное уравнение Гельмгольца, описывающее распределение поля гармоник $E(z, \omega)$ по z . Уменьшение мнимой части $\varepsilon_{gain}(\omega)$ с увеличением интенсивности поля $E(z, \omega)$ связано с подавлением инверсии населенностей КТ за счет индуцированного излучения. Однако при малой величине поля излучения,

$$|E|^2 \ll \frac{\hbar^2}{|\mathbf{d}_{ge}|^2 \tau_p \tau_n} = \beta^{-1} \quad (20)$$

распространение по усиливающей среде можно описывать с помощью независимой от поля диэлектрической проницаемости, частотная дисперсия которой имеет вид «антирезонанса», а мнимая часть – отрицательна:

$$\varepsilon_{gain} = \varepsilon_{mat} - \frac{2\alpha\omega_0 / \tau_p}{-2i\omega / \tau_p + \omega_0^2 - \omega^2}. \quad (21)$$

Получившаяся диэлектрическая проницаемость является аналитической функцией в верхней полуплоскости комплексных частот, поэтому для неё выполняются соотношения Крамерса-Кронига [29]:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, x) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', x)}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (22)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', x) - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (23)$$

Заметим, что использование нелинейного уравнения Гельмгольца (18) позволяет учесть влияние интенсивности поля на свойства среды лишь ниже порога генерации. Это связано с тем, что начало лазерной генерации наступает, как правило, на частоте, отличной от частоты падающей волны (смотри, например, [33]).

1.2. PT-симметрия

1.2.1. Операторы пространственной инверсии \hat{P} и обращения времени \hat{T}

Исторически первым псевдоэрмитовым гамильтонианом с действительными спектром был PT -симметричный [34]. PT -симметричность гамильтониана означает, что он коммутирует с операторами обращения времени \hat{T} и пространственной инверсии \hat{P}

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T}. \quad (24)$$

Действие оператора пространственной инверсии \hat{P} сводится к замене знака всех координат ($x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$) [35]. В результате тройка ортов системы координат из правой переходит в левую, полярные векторы меняют направление на противоположное ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}, \mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}, \mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}$), а аксиальные векторы не изменяются ($\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}$), где \mathbf{r} - координата в пространстве, \mathbf{p} - импульс, \mathbf{E} и \mathbf{H} - электрическое и магнитное поле.

В квантовой механике среднее значение оператора физической величины сопоставляется классическому значению этой величины. Так как при пространственной инверсии классические импульс и координата меняют знак, то средние $\langle \mathbf{p} \rangle$ и $\langle \mathbf{r} \rangle$ также должны менять знак. Следовательно, операторы импульса и координаты при пространственной инверсии преобразуются по правилу

$$\hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P} = -\hat{\mathbf{r}}, \quad (25)$$

$$\hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P} = -\hat{\mathbf{p}}, \quad (26)$$

где $\hat{\mathbf{r}}$ и $\hat{\mathbf{p}}$ - операторы координаты и импульса. В соответствии с этим оператор момента количества движения $\hat{\mathbf{j}}$ остается неизменным при пространственной инверсии

$$\hat{P}^+ \hat{\mathbf{j}} \hat{P} = \hat{\mathbf{j}}. \quad (27)$$

Кроме того, при инверсии системы координат должна сохраняться нормировка волновой функции, поэтому оператор инверсии унитарен $\hat{P}^+ \hat{P} = \hat{1}$.

По теореме Вигнера [36,37] операторы симметрии могут быть либо линейными и унитарными операторами, либо антилинейными и антиунитарными операторами. В соответствии с определением линейный оператор не изменяет c -числовые множители в уравнениях

$$\hat{Q}_L c\psi(\mathbf{r}, t) = c\hat{Q}_L\psi(\mathbf{r}, t), \quad (28)$$

а антилинейный оператор приводит к их комплексному сопряжению

$$\hat{Q}_{AL}c\psi(\mathbf{r},t) = c^* \hat{Q}_{AL}\psi(\mathbf{r},t). \quad (29)$$

Таким образом, чтобы выяснить является ли оператор \hat{P} линейным или антилинейным необходимо определить действие этого оператора на мнимую единицу: $\hat{P}^+ i \hat{P}$. Воспользовавшись тем, что канонические коммутационные соотношения

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = -i\hbar \quad (30)$$

должны оставаться инвариантными при пространственной инверсии [38], получаем

$$\begin{aligned} -\hat{P}^+ i \hat{P} \hbar &= \hat{P}^+ [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] \hat{P} = \hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \hat{P} - \hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{r}} \hat{P} = \hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P} \hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P} - \hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P} \hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P} = \\ &= \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{r}} = [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = -i\hbar \end{aligned} \quad (31)$$

где учтено, что $\hat{P}^+ \hat{P} = \hat{1}$. Следовательно, $\hat{P}^+ i \hat{P} = i \hat{1}$ и \hat{P} - линейный унитарный оператор [36]¹.

Так как двукратное применение операции пространственной инверсии возвращают систему в исходное состояние, то волновые функции $\psi(\mathbf{r},t)$ и $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t)$ могут отличаться только фазовым множителем: $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t) = e^{i\phi}\psi(\mathbf{r},t)$. Для того чтобы четность волновой функции была наблюдаемой физической величиной необходимо, чтобы оператор пространственной инверсии был эрмитовым. Единственный фазовый множитель, при котором оператор пространственной инверсии эрмитов $\hat{P}^+ = \hat{P}$ равен единице: $\hat{P}^2\psi(\mathbf{r},t) = \psi(\mathbf{r},t)$. Предполагая, что волновая функция является скаляром и учитывая, что \hat{P} - линейный унитарный оператор [35], получим

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r},t) = \psi(-\mathbf{r},t), \quad (32)$$

Унитарное преобразование любого произведения операторов импульса и координаты сводится к такому же произведению преобразованных операторов

$$\hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P} = (\hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P}), \hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P} = (\hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P}), \dots \quad (33)$$

¹Оператор \hat{U} называют унитарным, если $\langle \hat{U}\psi | \hat{U}\varphi \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle$ и антиунитарным, если $\langle \hat{U}\psi | \hat{U}\varphi \rangle = \langle \varphi | \psi \rangle$. В обоих случаях оператор \hat{U} сохраняет норму волновой функции, так как $\hat{U}^+ \hat{U} = \hat{1}$ [39].

Если гамильтониан системы можно представить в виде полинома от операторов импульса и координаты, то

$$\hat{P}^+ \hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) \hat{P} = \hat{H}(\hat{P}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{P}, \hat{P}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{P}, t) = \hat{H}(-\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (34)$$

Система является \hat{P} - инвариантной, если её гамильтониан не изменяется при инверсии координат, т.е. если

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t) = \hat{H}(-\hat{\mathbf{p}}, -\hat{\mathbf{r}}, t). \quad (35)$$

Действие оператора обращения времени \hat{T} означает замену $t \rightarrow -t$ во всех уравнениях и временных зависимостях физических величин [35]. В результате все физические величины, линейно зависящие от производной по времени, меняют знак при обращении времени ($\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$, $\mathbf{j} \rightarrow -\mathbf{j}$), а физические величины не зависящие от времени не изменяются ($\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$).

Действуя аналогично (25)-(27), получаем правила преобразования операторов при обращении времени

$$\hat{T}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{T} = \hat{\mathbf{r}}, \quad (36)$$

$$\hat{T}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{T} = -\hat{\mathbf{p}}, \quad (37)$$

$$\hat{T}^+ \hat{\mathbf{j}} \hat{T} = -\hat{\mathbf{j}}. \quad (38)$$

Обращение времени сохраняет нормировку волновой функции. Для того чтобы выяснить является оператор обращения времени линейным или антилинейным, необходимо определить действие оператора обращения времени на мнимую единицу: $\hat{T}^+ i \hat{T}$. Действуя аналогично (30), (31), получаем

$$\begin{aligned} -\hat{T}^+ i \hat{T} \hbar &= \hat{T}^+ [\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] \hat{T} = \hat{T}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} \hat{T} - \hat{T}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{r}} \hat{T} = \hat{T}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{T} \hat{T}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{T} - \hat{T}^+ \hat{\mathbf{p}} \hat{T} \hat{T}^+ \hat{\mathbf{r}} \hat{T} = \\ &= -\hat{\mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \hat{\mathbf{r}} = -[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = i \hbar \hat{1} \end{aligned} \quad (39)$$

Это означает, что \hat{T} - антилинейный и антиунитарный оператор [36] (смотри сноску 1).

Так как двукратное применение операции обращения времени возвращают систему в исходное состояние, то волновые функции $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $\hat{T}^2 \psi(\mathbf{r}, t)$ могут отличаться только фазовым множителем: $\hat{T}^2 \psi(\mathbf{r}, t) = e^{i\phi} \psi(\mathbf{r}, t)$. Для определения фазового множителя подействуем оператором \hat{T}^3 на волновую функцию $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$\hat{T}^3\psi(\mathbf{r},t)=\hat{T}(\hat{T}^2\psi(\mathbf{r},t))=\hat{T}(e^{i\phi}\psi(\mathbf{r},t))=e^{-i\phi}\hat{T}\psi(\mathbf{r},t)=\hat{T}^2(\hat{T}\psi(\mathbf{r},t)). \quad (40)$$

Таким образом, функция $\hat{T}\psi(\mathbf{r},t)$ под действием оператора \hat{T}^2 приобретает фазовый множитель $e^{-i\phi}$, а волновая функция $\psi(\mathbf{r},t)$ фазовый множитель $e^{i\phi}$. Поскольку под действием оператора \hat{T}^2 функция $(\psi(\mathbf{r},t)+\hat{T}\psi(\mathbf{r},t))$ может измениться только на общий фазовый множитель, то $e^{-i\phi}=e^{i\phi}$ и $\hat{T}^2\psi(\mathbf{r},t)=\pm\psi(\mathbf{r},t)$. Предполагая, что волновая функция является скаляром и, учитывая, что \hat{T} - антилинейный и антиунитарный оператор, получаем правило обращения времени для волновой функции [35]

$$\hat{T}\psi(\mathbf{r},t)=\psi^*(\mathbf{r},-t). \quad (41)$$

В частности, для плоской волны $\psi(x,p,t)=A\exp(-i\omega t+ikr)$ действие оператора обращения времени приводит к изменению направления распространения на противоположное

$$\hat{T}(A\exp(-i\omega t+ikr))=A^*\exp(-i\omega t-ikr). \quad (42)$$

Поскольку оператор \hat{T} антиунитарен, для него также выполняется соотношение (33), иными словами,

$$\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T}=(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}), \quad \hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}^2\hat{T}=(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T})(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T}). \quad (43)$$

Действуя аналогично (34), получаем

$$\hat{T}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t)\hat{T}=\hat{H}^*(\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{T},\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{T},t)=\hat{H}^*(-\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t). \quad (44)$$

Система является \hat{T} - инвариантной, если её гамильтониан не изменяется при обращении времени, т.е.

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t)=\hat{H}^*(-\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t). \quad (45)$$

Объединяя условия (34) и (44), получаем правило преобразования гамильтониана при одновременном действии операторов \hat{P} и \hat{T}

$$\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t)\hat{P}\hat{T}=\hat{H}(\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{\mathbf{p}}\hat{P}\hat{T},\hat{P}^+\hat{T}^+\hat{\mathbf{r}}\hat{P}\hat{T},t)=\hat{H}^*(\hat{\mathbf{p}},-\hat{\mathbf{r}},-t). \quad (46)$$

Следовательно, гамильтониан является PT -симметричным, если

$$\hat{H}(\hat{\mathbf{p}},\hat{\mathbf{r}},t)=\hat{H}^*(\hat{\mathbf{p}},-\hat{\mathbf{r}},-t). \quad (47)$$

Условие (47) можно переписать в виде аналогичном условию (24)

$\hat{P}\hat{T}\hat{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t) = \hat{H}(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)\hat{P}\hat{T}$. Для гамильтонианов вида

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\mathbf{r}), \quad (48)$$

где m - масса и V - потенциальная энергия частицы, условие PT -симметричности (47) сводится к тому, что действительная часть потенциала была четной функцией, а мнимая часть потенциала была нечетной функцией координаты

$$V(\mathbf{r}) = V^*(-\mathbf{r}). \quad (49)$$

Для неэрмитового PT -симметричного гамильтониана $\hat{H}(\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{r}}, t, \mu)$, зависящего от некоторого параметра μ , собственные значения систем могут быть как действительными, так и комплексными. Если при вариации параметра μ спектр собственных значений гамильтониана из действительного становится комплексным², то говорят о фазовом переходе [34,40].

1.2.2. Необходимое и достаточное условие действительности собственных значений PT -симметричного гамильтониана

Для того чтобы собственные значения PT -симметричной системы $\{E_k\}$ были действительными, необходимо и достаточно, чтобы её собственные решения $\{\psi_k\}$ были PT -симметричными [34,40]. Действительно, пусть ψ_k - PT -симметричное собственное решение системы с гамильтонианом \hat{H}

$$\psi_k = \hat{P}\hat{T}\psi_k \quad (50)$$

с собственным значением E_k

$$\hat{H}\psi_k = E_k\psi_k \quad (51)$$

Поддействуем последовательно на обе части уравнения (51) оператором $\hat{P}\hat{T}$

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{P}\hat{T}E_k\psi_k, \quad (52)$$

²В качестве μ может фигурировать, например, заряд частицы, константа связи и т.п.

Если гамильтониан системы \hat{H} удовлетворяет условию PT -симметрии (24), (47), то при учете PT -симметричности ψ_k (50), левая часть (52) преобразуется к виду:

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{H}\psi_k. \quad (53)$$

С учетом того, что оператор инверсии \hat{P} линеен, а оператор обращения времени \hat{T} антилинеен, для PT -симметричного решения ψ_k правая часть (52) преобразуется к виду:

$$\hat{P}\hat{T}E_k\psi_k = E_k^*\psi_k. \quad (54)$$

Объединяя (53) и (54), получаем

$$\hat{H}\psi_k = E_k^*\psi_k. \quad (55)$$

Уравнения (51) и (55) совместны только при условии $E_k = E_k^*$. Таким образом, PT -симметричность решения ψ_k является достаточным условием действительности собственного значения E_k PT -симметричного гамильтониана \hat{H} .

Докажем теперь, что PT -симметричность решения ψ_k является и необходимым условием действительности собственных значений PT -симметричного гамильтониана с невырожденным спектром. Предположим, что собственные значения системы действительны $E_k \in \mathbb{R}$, а собственные решения ψ_k PT -несимметричны

$$\hat{P}\hat{T}\psi_k = \psi', \quad (56)$$

где ψ' - неизвестная волновая функция. Подействуем оператором $\hat{P}\hat{T}$ на стационарное уравнение Шредингера для ψ_k (51)

$$\hat{P}\hat{T}\hat{H}\psi_k = \hat{P}\hat{T}E_k\psi_k, \quad (57)$$

пользуясь условием PT -симметричности гамильтониана (24) и действительностью его собственных значений E_k запишем

$$\hat{H}(\hat{P}\hat{T}\psi_k) = E_k(\hat{P}\hat{T}\psi_k), \quad (58)$$

используя уравнение (55) получаем

$$\hat{H}\psi' = E_k\psi'. \quad (59)$$

Таким образом, функция ψ' является собственной функцией гамильтониана \hat{H} с собственным значением E_k . Если спектр гамильтониана \hat{H} невырожден, то $\psi' = \psi_k$ и из (55) следует, что ψ_k является собственной функцией оператора $\hat{P}\hat{T}$

$$\hat{P}\hat{T}\psi_k = \psi' = \psi_k. \quad (60)$$

Случай PT -симметричного гамильтониана с вырожденным спектром рассмотрен в обзоре [40], где показано, что PT -симметричность собственных решений гамильтониана также является необходимым и достаточным условием действительности собственных значений. Другими словами, пока собственные значения гамильтониана E_k действительны, его собственные решения PT -симметричны. Если же собственные значения комплексны, то собственные функции гамильтониана не являются собственными функциями оператора $\hat{P}\hat{T}$.

1.2.3. Фазовый переход с нарушением PT -симметрии собственных решений

В линейных системах, в которых гамильтониан \hat{H} коммутирует с линейным оператором симметрии \hat{P} , собственные решения гамильтониана всегда \hat{P} -симметричны [41], поэтому в таких системах невозможно наблюдать фазовый переход с изменением \hat{P} -симметрии. Для того чтобы собственные решения гамильтониана \hat{H} , коммутирующего с оператором \hat{P} , могли быть \hat{P} -несимметричными, \hat{P} должен быть нелинейным оператором. В этих случаях, при варьировании параметров гамильтониана может происходить фазовый переход от \hat{P} -симметричных собственных решений к \hat{P} -несимметричным, что и наблюдается в PT -симметричных системах, благодаря антилинейности оператора $\hat{P}\hat{T}$ [34]. Симметрия собственных решений гамильтониана напрямую связана с действительностью его собственных решений: PT -симметричные собственные решения имеют действительные собственные значения, а PT -несимметричные собственные решения имеют комплексные собственные значения (смотри раздел 1.2.2 и [40]).

В теории Гинзбурга-Ландау для количественной характеристики фазового перехода используют параметр порядка - η , который равен нулю в симметричной фазе и отличен от нуля в несимметричной фазе [42]. В случае PT -симметричных систем в качестве такого параметра можно выбрать величину

$$\eta = \sum_k \left| \text{Im}(E_k) \right|, \quad (61)$$

где сумма берется по всем собственным решениям гамильтониана. Введенный таким образом параметр порядка η равен нулю в симметричной фазе и возрастает при увеличении несимметричности собственных решений. При исследовании фазовых переходов в PT -симметричных системах основное внимание обычно уделяют рассмотрению зависимости мнимых частей собственных значений (параметра порядка) от параметров гамильтониана, а не симметрии собственных решений.

1.2.4. PT -симметрия в электродинамике

В работах [14,15] концепция PT -симметрии была перенесена из квантовой механики в электродинамику. В электродинамику понятие PT -симметрии можно ввести следующим образом. В двумерном и одномерном случаях уравнения Максвелла сводятся к скалярному уравнению Гельмгольца [43]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon(x, z) \right) E(x, z) = 0, \quad (62)$$

которое совпадает со стационарным уравнением Шредингера [44]

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_k(x, z) + \frac{2m(V(x, z) - E_k)}{\hbar^2} \psi_k(x, z) = 0, \quad (63)$$

если сделать формальную замену $V(x, z) - E_k \rightarrow (\omega/c)^2 \varepsilon(x, z)$, $\psi_k(x, z) = E(x, z)$ и $-\hbar^2/2m \rightarrow 1$. Так как в квантовой механике, условие PT -симметрии для системы с гамильтонианом вида (48) сводится к требованию на потенциальную энергию $V(x, z) = V^*(-x, -z)$, то, по аналогии, между потенциальной энергией в квантовой механике и диэлектрической проницаемостью в электродинамике, условие PT -симметричности системы определяют, как условие на диэлектрическую проницаемость среды

$$\text{Re } \varepsilon(\omega, x, z) = \text{Re } \varepsilon(\omega, -x, -z), \quad (64)$$

$$\text{Im } \varepsilon(\omega, x, z) = -\text{Im } \varepsilon(\omega, -x, -z) \quad (65)$$

В случае электродинамических систем с диэлектрической проницаемостью, зависящей только от одной координаты, аналогия между уравнениями Гельмгольца и

уравнениями Шредингера становится ещё более явной. Действительно, пусть диэлектрическая проницаемость системы зависит только от координаты x . Рассмотрим распространение по такой системе линейно-поляризованной вдоль оси y электромагнитной волны с амплитудой $E(x)$. В этом случае задача о распространении волны сводится к скалярной [43], и для нахождения распределение поля необходимо решить уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x) E = 0. \quad (66)$$

Так как диэлектрическая проницаемость не зависит от координаты z , то решение уравнения (66) можно искать в виде произведения двух функций [43]

$$E(x, z) = g(z) f(x), \quad (67)$$

которые находятся из уравнений [43]

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(x) f(x) = k_z^2 f(x), \quad (68)$$

$$\frac{\partial^2 g(z)}{\partial z^2} + k_z^2 g(z) = 0. \quad (69)$$

Из уравнения (69) получаем, что

$$g(z) = A_1 \exp(ik_z z) + A_2 \exp(-ik_z z), \quad (70)$$

где коэффициенты A_1, A_2 определяются из граничных условий, а константа разделения k_z^2 является собственным значением уравнения (68).

Уравнение (68) совпадает с одномерным стационарным уравнением Шредингера с гамильтонианом (48), в котором $p^2/2m \rightarrow \partial^2/\partial x^2$, $V(x) \rightarrow (\omega/c)^2 \varepsilon(x)$, $E \rightarrow k_z^2$ и $\psi(x) \rightarrow f(x)$. Это позволяет перенести в электродинамику результаты, полученные в рамках PT -симметричной квантовой механики. Оператор \hat{P} в этом случае сводится к инверсии по оси x , а оператор \hat{T} к комплексному сопряжению.

1.2.5. Фазовый переход в двумерных PT -симметричных электродинамических системах

Рассмотрим PT -симметричный одномерный фотонный (электромагнитный) кристалл, элементарная ячейка которого состоит из двух слоев одинаковой толщины d . Ось x направлена перпендикулярно слоям (Рис. 1), действительная часть диэлектрической проницаемости одинакова во всех слоях, а мнимая часть диэлектрической проницаемости в соседних слоях отличается знаком:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_R + (-1)^n i\varepsilon_I, \quad \varepsilon_R > 0, \quad \varepsilon_R, \varepsilon_I \in \mathbb{R}, \quad (71)$$

где $n=1,2$ - номер слоя в ячейке. Пусть по системе в направлении z распространяется линейно-поляризованная вдоль оси y электромагнитная волна (смотри рисунок 1) $E_y(x, z) = f(x) \exp(ik_{eff}z)$, где k_{eff} - эффективный волновой вектор в направлении распространения волны. Дисперсионное уравнение для k_{eff}^2 в такой системе сводится к двум уравнениям [45,46]

$$\operatorname{tg}(\beta_l d / 2) \operatorname{ctg}(\beta_g d / 2) = -\beta_l / \beta_g, \quad (72)$$

$$\operatorname{tg}(\beta_l d / 2) \operatorname{ctg}(\beta_g d / 2) = -\beta_g / \beta_l, \quad (73)$$

где $\beta_l = \sqrt{k_0^2 (\varepsilon_R + i\varepsilon_I) - k_{eff}^2}$, $\beta_g = \sqrt{k_0^2 (\varepsilon_R - i\varepsilon_I) - k_{eff}^2}$ и $k_0^2 = (\omega / c)^2$.

Уравнение (72) соответствует быстро затухающей волне [45,46] даже в среде без потерь и усиления, поэтому этот случай мы не будем рассматривать. Уравнению (73) соответствует распределение поля в ячейке $f(x)$, имеющий вид [45,46]

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\beta_l x) - \frac{\cos(\beta_g d) - \cos(\beta_l d)}{\sin(\beta_g d) + \sin(\beta_l d)} \sin(\beta_g x), & x \in [0, d] \\ \cos(\beta_g x) + \frac{\cos(\beta_g d) - \cos(\beta_l d)}{\sin(\beta_g d) + \sin(\beta_l d)} \sin(\beta_g x), & x \in [-d, 0], \end{cases} \quad (74)$$

где $x=0$ определяет плоскость, разделяющую слои внутри ячейки.

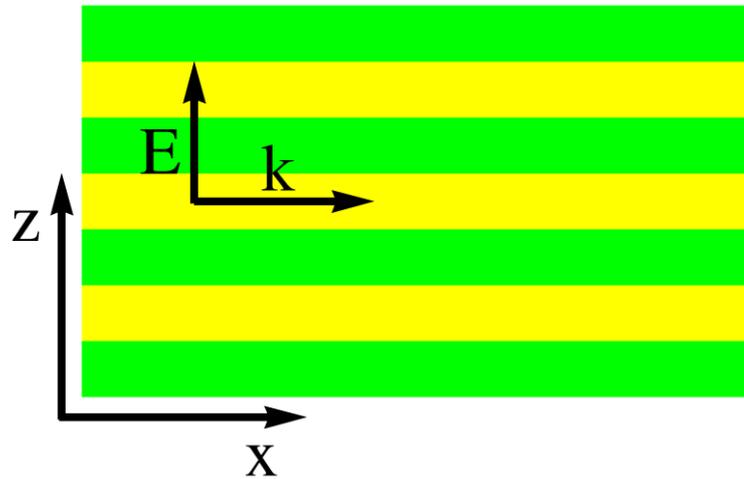


Рис. 1. Двумерная PT -симметричная система с $\varepsilon(x, z) = \varepsilon^*(-x, z)$. Цветом отмечены разные значения мнимой части диэлектрической проницаемости, стрелками обозначены направление электрического поля и волнового вектора.

Из уравнения (73) следует, что при значениях мнимой части ε_I диэлектрической проницаемости меньших некоторого критического ε_I^{cr} , для любой частоты существует два собственных решения с различными действительными волновыми векторами k_{eff} . При значениях мнимой части диэлектрической проницаемости больших критического волновые векторы k_{eff} становятся комплексными (Рис. 2), причем их действительные части совпадают, а мнимые отличаются знаком. Ниже ε_I^{cr} распределение поля $f(x)$ PT -симметрично (Рис. 3а), выше ε_I^{cr} распределение поля в системе перестает быть PT -симметричным (Рис. 3б). Таким образом, переход от действительного волнового вектора к комплексному сопровождается изменением симметрии собственных решений $f(x)$ от PT -симметричных к PT -несимметричным (Рис. 3). Следовательно, в системе наблюдается фазовый переход, связанный со спонтанным нарушением PT -симметрии решения $f(x)$ при увеличении модуля мнимой части диэлектрической проницаемости ε_I .

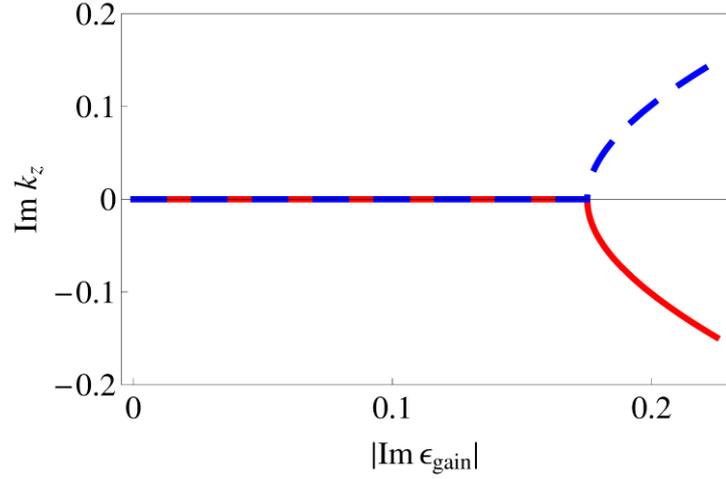


Рис. 2. Зависимость мнимой части волнового вектора от величины мнимой части диэлектрической проницаемости.

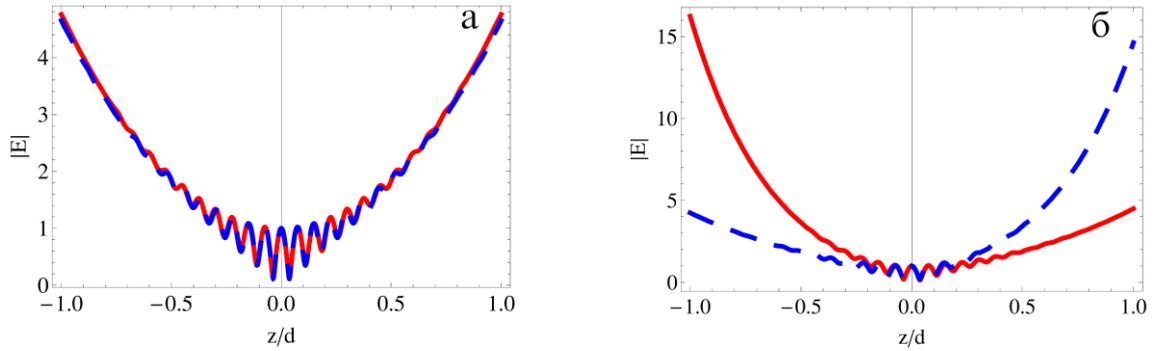


Рис. 3. Распределение поля в ячейке фотонного (электромагнитного) кристалла с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_n = \varepsilon_R + (-1)^n i\varepsilon_I$, $\varepsilon_R > 0$, $\varepsilon_R, \varepsilon_I \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2$ (а) ниже точки фазового перехода $\varepsilon_I < \varepsilon_I^{cr}$, (б) выше точки фазового перехода $\varepsilon_I > \varepsilon_I^{cr}$: сплошной и штриховой линиями обозначены амплитуды для двух разных собственных мод системы.

Рис. 3 иллюстрирует ситуацию. Ниже точки фазового перехода собственные решения PT -симметричны. Амплитуда поля в слое с потерями равна амплитуде поля в слое с усилением (Рис. 3а), в результате диссипация энергии в слое с потерями компенсируется притоком энергии в слое с усилением $\text{Im} \varepsilon_{gain} |E_{gain}|^2 + \text{Im} \varepsilon_{loss} |E_{loss}|^2 = 0$. Иными словами энергия поля сохраняется, что соответствует действительному значению волнового вектора. Выше точки фазового перехода собственные решения PT -несимметричны, амплитуды поля в слое с потерями и в слое с усилением не равны друг

другу (Рис. 3а) и $\text{Im} \varepsilon_{\text{gain}} |E_{\text{gain}}|^2 + \text{Im} \varepsilon_{\text{loss}} |E_{\text{loss}}|^2 \neq 0$. Затухание поля в слое с потерями больше не компенсируется усилением поля в усиливающем слое. В результате возможно распространение электромагнитного поля по системе с затуханием или с усилением.

1.2.6. Неортогональность собственных функций неэрмитового гамильтониана с действительными собственными значениями

Пусть все собственные значения E_k неэрмитового гамильтониана \hat{H} с дискретным спектром действительны. В этом случае, из временного уравнения Шредингера

$$i \frac{\partial |\psi_k\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi_k\rangle, \quad (75)$$

следует, что для собственного решения гамильтониана $|\psi_k(t)\rangle = \exp(iE_k t) |\psi_k(0)\rangle$ норма волновой функции $\langle \psi_k(t) | \psi_k(t) \rangle$ является сохраняющейся во времени величиной

$$\langle \psi_k(t) | \psi_k(t) \rangle = \langle \psi_k(0) | \exp(-iE_k t) \exp(iE_k t) | \psi_k(0) \rangle = \langle \psi_k(0) | \psi_k(0) \rangle. \quad (76)$$

Однако в отличие от эрмитового гамильтониана собственные функции гамильтониана \hat{H} , принадлежащие к различным действительным собственным числам, не являются ортогональными. Для доказательства этого умножим эрмитово-сопряженное уравнение Шредингера

$$-i \frac{\partial \langle \psi_n |}{\partial t} = \langle \psi_n | \hat{H}^+ \quad (77)$$

на $|\psi_k\rangle$ справа, а уравнение (75) слева на $\langle \psi_n |$, и вычтем их друг из друга

$$i \left(\langle \psi_n | \frac{\partial |\psi_k\rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \psi_n |}{\partial t} |\psi_k\rangle \right) = \langle \psi_n | \hat{H} - \hat{H}^+ | \psi_k \rangle = i \frac{\partial \langle \psi_n | \psi_k \rangle}{\partial t} \quad (78)$$

Если собственные функции гамильтониана ортогональны, $\langle \psi_n | \psi_k \rangle = 0$, тогда $(\partial \langle \psi_n | \psi_k \rangle) / \partial t = 0$. Если набор функций $|\psi_k\rangle$ полный, то в этом случае из (78) следует, что $\hat{H} = \hat{H}^+$, т.е. то, что гамильтониан системы \hat{H} эрмитов. Чтобы неэрмитовый гамильтониан имел действительные собственные значения, необходимо либо чтобы для $n \neq k$ $\langle \psi_n | \psi_k \rangle \neq 0$, либо чтобы набор собственных волновых функций гамильтониана не составлял полный базис.

В обзоре рассматривается важный частный случай систем с PT -симметричными гамильтонианами ($\hat{P}\hat{T}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T}$). Если все собственные значения такого гамильтониана действительны, то можно показать (смотри доказательство в [47]), что система его собственных функций полна. Следовательно, его собственные функции неортогональны.

Заметим, что из (76) следует сохранение нормы только для собственных функций гамильтониана. Из неортогональности этих функций следует, что норма произвольной волновой функции $\psi = \sum_k c_k |\psi_k\rangle$ может не сохраняться во времени. В самом деле

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \psi | \psi \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial \left(\sum_n c_n^* \langle \psi_n | \sum_k c_k |\psi_k\rangle \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(\sum_{k,n} c_n^* c_k \langle \psi_n | \psi_k \rangle \right)}{\partial t} = \\ &= \sum_n |c_n|^2 \frac{\partial \langle \psi_n | \psi_n \rangle}{\partial t} + \sum_{n \neq k} c_n^* c_k \frac{\partial \langle \psi_n | \psi_k \rangle}{\partial t} = \sum_{n \neq k} c_n^* c_k \frac{\partial \langle \psi_n | \psi_k \rangle}{\partial t} \neq 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Для произвольной волновой функции сохраняющейся величиной является $\langle \psi | \hat{P} | \psi \rangle$.

Действительно, умножив уравнение (75) слева на $\langle \psi | \hat{P}$, уравнение (77) справа на $\hat{P} | \psi \rangle$ и сложив их получим

$$i \frac{\partial \langle \psi | \hat{P} | \psi \rangle}{\partial t} = \langle \psi | \hat{H}^+ \hat{P} - \hat{P} \hat{H} | \psi \rangle \quad (80)$$

Если $\hat{H}^+ = \hat{T}\hat{H}\hat{T}$, то $\hat{H}^+ \hat{P} - \hat{P} \hat{H} = \hat{T}\hat{H}\hat{T}\hat{P} - \hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{T}\hat{P} - \hat{T}\hat{P}\hat{H} = \hat{H}\hat{P}\hat{T} - \hat{P}\hat{T}\hat{H} = 0$. В этом случае, $\langle \psi | \hat{P} | \psi \rangle$ является сохраняющейся во времени величиной, Следовательно, для построения на основе PT -симметричных гамильтонианов с действительными собственными значениями замкнутой квантовой механике необходимо переопределить скалярное произведение, а в качестве бра-вектора надо брать вектор $\langle \psi | \hat{P}$. При этом правила нахождения средних от физических величин приобретает вид $\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{P} \hat{A} | \psi \rangle$.

Глава 2

Распространение электромагнитных волн по диэлектрическому слою, содержащему усиливающую среду

2.1. Введение

Вопрос об отражении плоской волны, падающей на усиливающую среду, имеет долгую историю [48-52], полную противоречий и неясных мест. В частности, в [48] теоретически исследуется отражение волны от границы раздела двух сред, одна из которых является усиливающей. При этом сначала рассматривается прохождение волны через усиливающий слой конечной толщины, а коэффициент отражения находится из решения одномерного волнового уравнения с использованием максвелловских граничных условий [53]. Ниже такой подход будем называть подходом Френеля. Далее в [48] осуществляется предельный переход к полубесконечному слою. Найденный таким образом коэффициент отражения R от усиливающего полупространства оказывается больше единицы. Это означает, что в полупространстве, заполненном усиливающей средой, распространяется только одна встречная волна, идущая из бесконечности и несущая энергию навстречу падающей волне, что находится в явном противоречии с принципом причинности.

Такое решение было подвергнуто критике в [50], где было отмечено, что волны, «возникающие при последовательных отражениях от границ слоя, образуют, при достаточно большом d , расходящийся ряд и решения просто нет». Фактически, это соответствует расходимости ряда парциальных волн Эйри [54,55]. Налицо явное противоречие: подход Френеля дает конечный результат, а ряд Эйри расходится. Заметим, что для диссипативных сред результат суммирования ряда Эйри всегда согласуется с предсказаниями подхода Френеля.

В [50] для разрешения этого парадокса вместо стационарной задачи о прохождении бесконечной плоской волны было предложено рассматривать прохождение импульса. Утверждалось, что, если внутри слоя имеет место бесконечный рост амплитуды импульса со временем, то преобразование Фурье от амплитуды поля $E(z, \omega)$ не существует. Следовательно, и представление поля в виде суммы монохроматических волн в этом случае некорректно. Вместо этого было предложено раскладывать поле по волнам с экспоненциально возрастающей амплитудой (смотри также [56]), в соответствии с

обобщенным преобразованием Фурье [57,58]. При этом контур интегрирования на комплексной плоскости частот в обратном преобразовании Фурье располагается выше всех полюсов подынтегральной функции. В действительности, полюса, лежащие выше вещественной оси, дают экспоненциально растущую во времени поправку к обычному решению, полученному в рамках френелевского подхода.

2.2. Падение электромагнитных волн по нормали на усиливающий слой.

Подходы Френеля и Эйри

Рассмотрим задачу о нормальном падении полубесконечного синусоидального цуга с плавным фронтом на усиливающий слой конечной толщины d . Пусть, для определенности, цуг падает слева направо. Предполагая условие (20) выполненным, пренебрежем на первом этапе нелинейностью, т.е. будем использовать диэлектрическую проницаемость вида (21) в уравнении (18). Линейность задачи позволяет перейти к Фурье-представлению амплитуды $E(z, t)$. В этом случае наше рассмотрение сводится к задаче о прохождении плоской волны через однородный слой с отрицательной мнимой частью диэлектрической проницаемости $\text{Im} \varepsilon_{\text{gain}} < 0$, когда распределение поля $E(z, \omega)$ представляется в виде произведения распределения поля при единичной падающей волне $g(z, \omega)$ на амплитуду падающей волны. Вид функции $g(z, \omega)$ находится из решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (18) с использованием максвелловских граничных условий непрерывности полей (подход Френеля):

$$g(z, \omega) = \begin{cases} \exp(ik_0 z) + r \exp(-ik_0 z), & z < 0, \\ a \exp(ik_0 z \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}}) + b \exp(-ik_0 z \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}}), & 0 < z < d, \\ t \exp(ik_0 (z - d)), & z > d. \end{cases} \quad (81)$$

Амплитуды r , a , b , t находятся из сшивки тангенциальных компонент полей на границах слоя $z = 0$ и $z = d$ [29]:

$$r(d) = - \frac{(Z_1^2 - Z_2^2) \left(\exp(-ik_0 d \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}}) - \exp(ik_0 d \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}}) \right)}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0 d \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0 d \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}})} \quad (82)$$

$$t(d) = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}})} \quad (83)$$

$$a(d) = \frac{2Z_2(Z_1 + Z_2)\exp(-ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}})}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}})} \quad (84)$$

$$b(d) = \frac{2Z_2(Z_1 - Z_2)\exp(ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}})}{(Z_1 + Z_2)^2 \exp(-ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}}) - (Z_1 - Z_2)^2 \exp(ik_0d\sqrt{\varepsilon_{gain}})} \quad (2.5)$$

где $Z_1 = 1$ и $Z_2 = 1/\sqrt{\varepsilon_{gain}}$ – характеристические импедансы вакуума и среды, а k_0 – волновое число в вакууме.

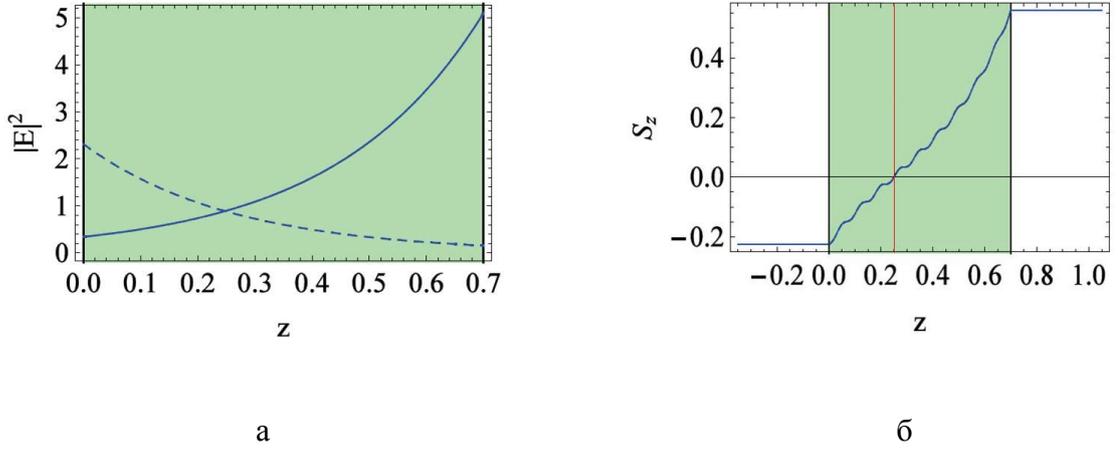


Рис. 4. Результаты расчета электрического поля $E(z, \omega)$ в рамках подхода Френеля. (а) Падающая (сплошная линия) и встречная (штриховая линия) волны. (б) Поток энергии S_z в слое толщиной $d > d_0$. Усиливающий слой закрашен. Частота падающей волны ω равна частоте перехода ω_0 , диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{gain} = 2 - 0.182i$ получена из формулы (21) при значениях параметров, характерных для усиливающих сред с полупроводниковыми квантовыми точками [59].³

³Во всех численных расчетах мы использовали параметры, характерные для усиливающих сред с полупроводниковыми КТ [59]: $\omega_0 = 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $\tau_p = 3 \cdot 10^{-14} \text{ c}$, $\tau_n = 5 \cdot 10^{-13} \text{ c}$, $n_0 = 2.15 \cdot 10^{18} \text{ атомов/см}^3$, $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = (1.5 \cdot 10^{-17})^2 \text{ дин} \cdot \text{см}^3$, $\varepsilon_0 = 2$ в усиливающем слое ($0 < z < d$) и 1 вне него. Далее для удобства сравнения результатов было проведено обезразмеривание системы (1.15)-(1.17), при котором время (t , τ_p , τ_n)

Отметим, что поле волны в слое является суммой полей двух волн (рис. 4). Одна из них, имеющая положительную действительную часть волнового числа и положительную z -компоненту вектора Пойнтинга, возрастает (усиливается) вглубь слоя. Эту волну будем называть «падающей», а вторую, соответственно, «встречной». «Встречная» волна убывает вглубь слоя и имеет отрицательную компоненту S_z вектора Пойнтинга. Отношение величин электрических полей этих двух волн на правой границе слоя $z = d$ однозначно определяется импедансом прошедшей волны, и, таким образом, не зависит от толщины слоя. Так как «встречная» волна (штриховая линия на рис. 4а), двигаясь, справа налево, усиливается, то при достаточно большой толщине слоя на левой границе $z = 0$ она по интенсивности превысит «падающую» (сплошная линия на рис. 4а). Плоскость $z = z^*$, определяемая равенством интенсивностей прямой и обратной волн, характеризуется также нулевым потоком энергии, проходящим через эту плоскость. При $z < z^*$ поток энергии направлен влево, при $z > z^*$ – вправо. Расстояние d_0 от плоскости $z = z^*$ до правой границы слоя нетрудно получить из уравнений (82)-(85) и условия равенства интенсивностей волн, двигающихся в пластинке навстречу друг другу. Таким образом

$$d_0 = \frac{1}{4k_0\kappa} \ln \left[\frac{(n_{gain} + 1)^2 + \kappa_{gain}^2}{(n_{gain} - 1)^2 + \kappa_{gain}^2} \right], \quad (86)$$

где $n_{gain} = \text{Re} \sqrt{\varepsilon_{gain}}$ и $\kappa_{gain} = \text{Im} \sqrt{\varepsilon_{gain}}$. Заметим, что d_0 зависит от уровня накачки κ_{gain} , и для одного и того же образца может быть как меньше, так и больше толщины образца d .

На самом деле, выражение (86) для d_0 является приближенным. Оно найдено из условия равенства интенсивностей волн в пластинке. Но это условие не гарантирует равенство нулю потока энергии

$$S_z = \frac{c}{4\pi} \left[n_{gain} (a(d_0)a^*(d_0) - b(d_0)b^*(d_0)) + 2\kappa_{gain} \text{Im}(a(d_0)b^*(d_0)) \right]. \quad \text{Из последнего}$$

выражения видно, что при ненулевой мнимой части волнового числа $\text{Im} k = \kappa_{gain}$ встречные волны при наличии разности фаз между ними создают интерференционный

измерялось в единицах τ_p , координата – в единицах $c\tau_p$, частота ω_0 – в единицах τ_p^{-1} , E и P – в единицах $\sqrt{\hbar n_0} / \tau_p$, n – в единицах n_0 , $|\mathbf{d}_{ge}|^2$ – в единицах $\hbar / (n_0 \tau_p)$. В результате получаем значения безразмерных параметров $\omega_0 = 30$, $\tau_p = 1$, $\tau_n = 167$, $n_0 = 1$, $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, при этом константы c и \hbar исчезают из уравнений.

вклад в поток энергии [60]. Интерференционная поправка проявляется в виде мелкой ряби на рис. 4б, которая несколько смещает точку, где $S_z = 0$. Однако, как правило, это влияние незначительно.

При толщине слоя, большей d_0 , как указывалось выше, внутри слоя появляется область, где поток энергии направлен навстречу падающей волне (рис. 4б). Из непрерывности потока энергии внутри слоя и его постоянства вне слоя следует, что при $d > d_0$ коэффициент отражения больше единицы. При дальнейшем увеличении толщины слоя подход Френеля предсказывает рост области, где преобладает «встречная» волна, убывающая слева направо и несущая энергию справа налево, навстречу «падающей» волне [48]. Энергия переносится слева направо лишь в слое толщины d_0 , примыкающем к задней границе слоя. Важно отметить, что при увеличении толщины слоя подход Френеля (81) предсказывает стремление коэффициента прохождения T к нулю, а коэффициента отражения R – к конечному значению (рис. 5). Таким образом, предельный переход к полупространству ($d/d_0 \rightarrow \infty$) дает коэффициент отражения больше единицы и распространяющуюся по полупространству «встречную» волну (смотри [48]).

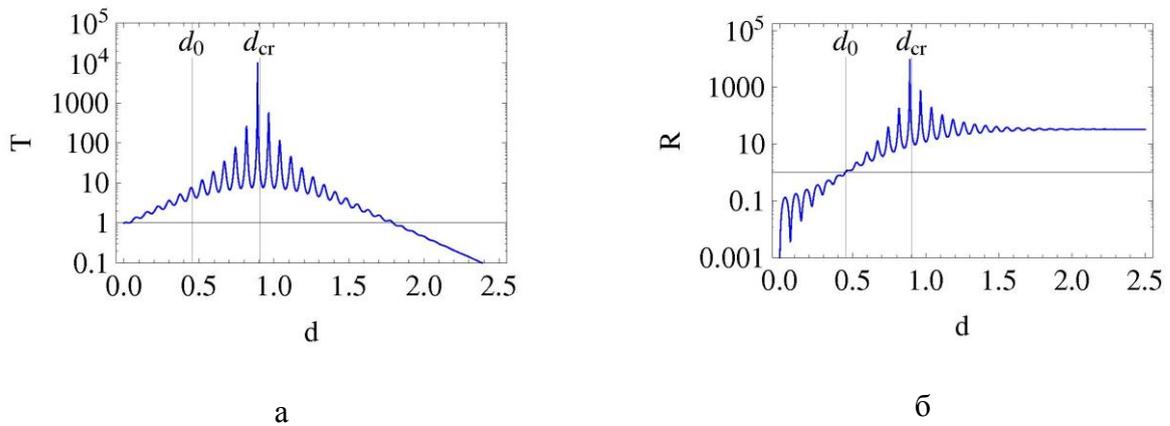


Рис. 5. Коэффициенты (а) прохождения T по интенсивности и (б) отражения R по интенсивности от усиливающего слоя в зависимости от его толщины d , рассчитанные в рамках подхода Френеля. Параметры те же, что на рис. 1.

В случае диссипативных сред результат расчета распределения поля, использующий подход Френеля (81), совпадает с результатом суммирования парциальных волн ряда Эйри, возникающих при последовательных переотражениях волн от границ слоя [61,62]. В случае усиливающего слоя результаты применения подходов Эйри и Френеля могут отличаться. Рассмотрим построение Эйри (рис. 6) подробнее.

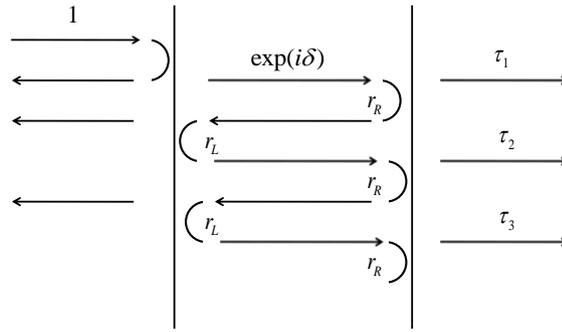


Рис. 6. Процедура Эйри для нахождения коэффициентов отражения и прохождения от пластинки как последовательность переотражений. В случае однородного слоя

$$r_L = r_R = -r_\infty.$$

Падающая волна единичной амплитуды рассеивается на передней поверхности образца. В результате получается отраженная волна с амплитудой

$$r_\infty = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}, \quad (87)$$

и прошедшая волна с амплитудой

$$t_{\infty 1} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}, \quad (88)$$

где r_∞ и $t_{\infty 1}$ – коэффициенты отражения и прохождения в задаче о полупространстве. Обычно предполагается, что прошедшая волна должна быть «падающей» [50], т.е. иметь $\text{Re}Z_2 > 0$. Эта волна распространяется по образцу, и на правой границе ($z = d$) ее амплитуда приобретает множитель $\exp(i\delta)$, $\delta = k_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}} d$. После этого она проходит через правую границу с коэффициентом $t_{\infty 2} = 2Z_2 / (Z_1 + Z_2)$, так что амплитуда первой прошедшей через образец волны равна $\tau_1 = t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}}} d)$. Часть волны отражается от правой границы образца с коэффициентом отражения $-r_\infty$, превращаясь во «встречную» волну. Затем она проходит по образцу справа налево, отражается от левой границы с коэффициентом отражения $-r_\infty$, превращается в «падающую» и движется слева направо до границы образца. При прохождении границы этой «падающей» волной возникает вторая прошедшая парциальная волна с амплитудой, равной $\tau_2 = \tau_1 q$, где

$$q = r_{\infty}^2 \exp(2ik_0 \sqrt{\varepsilon_{gain}} d) = r_{\infty}^2 \exp(2i\delta). \quad (89)$$

Амплитуда каждой последующей парциальной волны получается умножением на множитель q (знаменатель геометрической прогрессии). В результате полный коэффициент прохождения дается рядом

$$t = t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_{gain}} d) (1 + r_{\infty}^2 \exp(2i\delta) + \dots) = t_{\infty 1} t_{\infty 2} \exp(ik_0 \sqrt{\varepsilon_{gain}} d) \sum_{n=0}^{\infty} (r_{\infty}^2 \exp(2i\delta))^n. \quad (90)$$

Просуммировав прогрессию (90), приходим к выражению (82)-(85).

Заметим, что прогрессия (90) сходится только при $|q| < 1$. Это условие соответствует либо отсутствию усиления, либо, при его наличии, малой толщине слоя, $d < d_{cr}$. При $d = d_{cr}$ модуль q обращается в единицу. При $d < d_{cr}$ ослабление волны за счет выхода ее из образца превышает усиление за счет прохода по усиливающей среде. Величина d_{cr} ровно в два раза превышает величину d_0 и определяется выражением

$$d_{cr} = 2d_0 = \frac{1}{2k_0 \kappa_{gain}} \ln \left[\frac{(n_{gain} + 1)^2 + \kappa_{gain}^2}{(n_{gain} - 1)^2 + \kappa_{gain}^2} \right]. \quad (91)$$

При $d > d_{cr}$ ряд Эйри (90) расходится, а подход Френеля (81) дает для амплитуды прошедшей волны конечный результат.

Таким образом, при $d > d_{cr}$ подходы Френеля и Эйри дают разные результаты. Для того чтобы установить какой из методов дает правильный результат при $d > d_{cr}$ было проведено численное FDTD-моделирование решения уравнений Максвелла-Блоха (15)-(17), корректно описывающих усиливающую среду. Рассматривалась временная задача о нормальном падении на усиливающий слой полубесконечного синусоидального цуга с плавным передним фронтом. Для сравнения с подходами Френеля и Эйри находилось стационарное распределение поля, возникающее после окончания переходного процесса.

Из рис. 7а видно, что в области значений параметров задачи, для которых ряд Эйри (90) сходится ($d < d_{cr}$), имеется согласие результатов численных и обоих аналитических подходов. При толщинах $d_{cr} < d < d_{las}$ ряд Эйри (90) расходится, но подход Френеля и результаты численного моделирования дают совпадающие результаты (рис. 7б). При толщинах, больших некоторого значения d_{las} , начинается лазерная генерация, и значения

поля, полученные в ходе численного эксперимента, начинают превышать результат, полученный с использованием подхода Френеля (рис. 7в). Это связано с нарушением условия (20), и установившееся решение не описывается в линейном приближении, т.е. по Френелю.⁴

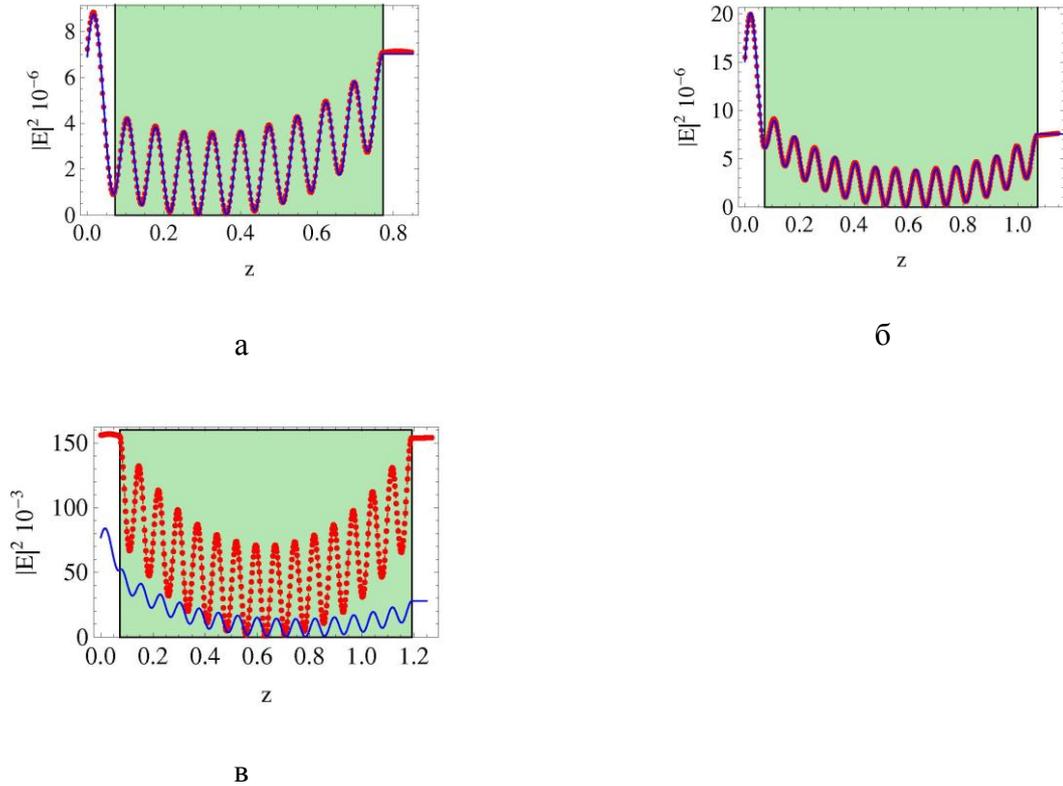


Рис. 7. Интенсивность электрического поля, рассчитанная в рамках подхода Френеля (81) (сплошные линии) и по уравнениям Максвелла-Блоха (15)-(17) (пунктирные линии) при прохождении волны (а) через слой с толщиной $d = 0.7$, меньшей критического значения $d_{cr} \approx 0.905$; (б) через слой толщины $d = 1$, большей критического значения, когда генерация все еще отсутствует; и (в) через слой толщиной $d = 1.12$, когда возникает лазерная генерация. Частота падающей волны ω равна частоте перехода ω_0 , а дипольный момент КТ $|\mu|^2 = 0.0145$, интенсивность падающей волны равна (а) 10^{-6} , (б) 10^{-6} , (в) 10^{-3} в безразмерных единицах.

Построение ряда Эйри (90) весьма наглядно описывает прохождение полубесконечного цуга волн через слой вещества. Однако для усиливающей среды оно

⁴Область значений d вблизи d_{cr} будет рассмотрена ниже.

должно проводиться по-разному для случаев $d < d_{cr}$ и $d > d_{cr}$. Действительно, по построению r_∞ – это коэффициент отражения в задаче об отражении плоской волны от полупространства. Величина r_∞ зависит от того, с какой волной в слое «сшивается» падающая из вакуума волна.

Если брать, как это обычно делается для диссипативных сред [63], волну, переносящую энергию вглубь слоя, то при $d < d_{cr}$ модуль знаменателя геометрической прогрессии $q = r_\infty^2 \exp(2i\delta)$ ($\delta = k_0 \sqrt{\varepsilon_{gain}} d$) оказывается меньше единицы $|q| < 1$, и ряд Эйри по «падающим» волнам сходится к выражению (82)-(85), получаемому из подхода Френеля.

Если же в процедуре Эйри считать, что решение в полубесконечной среде является «встречной» волной [48], несущей энергию к границе $z = 0$ из бесконечности, то величины импеданса Z_2 и комплексной фазы δ меняют знак. В результате знаменатель прогрессии (90) становится равным $1/q$. Формально это означает, что при $d > d_{cr}$ ряд Эйри по «встречным» волнам сходится, причем к результату расчета по Френелю (82)-(85).

Проведенный выше анализ показывает, что результат (82)-(85), полученный в рамках подхода Френеля, можно рассматривать как аналитическое продолжение суммы ряда Эйри (90) в область $d > d_{cr}(\omega)$ на плоскости комплексных частот. Иными словами, при $d < d_{cr}$ нужно использовать ряд Эйри по «падающим» волнам, а при $d > d_{cr}$ – по «встречным» волнам. Заметим, что при $d = d_{cr}$ ($|q| = 1$) ни один из этих рядов не сходится. Если $q \neq 1$, то предел $d \rightarrow d_{cr} + 0$ суммы ряда (90) по «встречным» волнам совпадает с пределом $d \rightarrow d_{cr} - 0$ суммы ряда (90) по «падающим» волнам. Напомним, что лазерной генерации пока еще нет. Использование ряда по «встречным» волнам эквивалентно продолжению функции $1/(1-q)$ за радиус ее сходимости. Действительно [64]:

$$\frac{1}{1-q} / (1-q) = -\frac{1/q}{1-1/q} = -\frac{1}{q} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n. \quad (92)$$

Таким образом, мы получаем полное соответствие между рядами Эйри и результатом френелевского подхода во всех рассмотренных выше случаях.

2.3. Временная задача о прохождении полубесконечного электромагнитного импульса через усиливающий слой при падении по нормали к поверхности

Для того чтобы выяснить причину несоответствия, казалось бы, надежного френелевского подхода (рис. 7в) результатам численного решения системы Максвелла-Блоха, рассмотрим временную задачу о прохождении полубесконечного электромагнитного импульса через усиливающий слой. Пусть передний фронт цуга $E_0(z, t)$ достигает точку $z=0$ в момент времени $t=0$, а форма импульса задается выражением

$$E_0(z=0, t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ (1 - \exp(-t/\sigma)) \exp(-i\Omega t), & t > 0, \end{cases} \quad (93)$$

где Ω – несущая частота цуга, σ – ширина фронта.

Корректное нахождение спектра такого импульса

$$e_0(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} E_0(t) \exp(i\omega t) dt, \quad (94)$$

требует определенной аккуратности [65], поскольку $E_0(z=0, t)$ не является финитной функцией (она не убывает при $t \rightarrow +\infty$). Здесь можно использовать стандартный прием [58], когда находится спектр произведения $E_0(z=0, t) \exp(-\gamma t)$, а γ затем устремляется к нулю. В результате получается выражение

$$e_0(\omega) = -\frac{1}{2\pi\sigma(\omega - \Omega)(\omega - \Omega + i/\sigma)}, \quad (95)$$

В отсутствие слоя, в соответствии с линейным уравнением Гельмгольца (18), (21), каждая гармоника $e_0(\omega) \exp(-i\omega t)$ поля, заданного в точке $z=0$, создает сразу во всем пространстве бегущую направо плоскую волну $e_0(\omega) \exp(-i\omega t) \exp(i\omega z/c)$. Сумма этих плоских волн

$$\begin{aligned} E_0(z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) \exp(-i\omega t) \exp(i\omega z/c) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) \exp(-i\omega(t - z/c)) d\omega = \\ &= E_0(0, t - z/c) \end{aligned} \quad (96)$$

равна полю импульса, распространяющегося с течением времени направо без изменения его формы (пунктирная кривая на рис. 8а). Заметим, что $E_0(z, t) = 0$ при $z/c > t$, что находится в соответствии с принципом причинности.

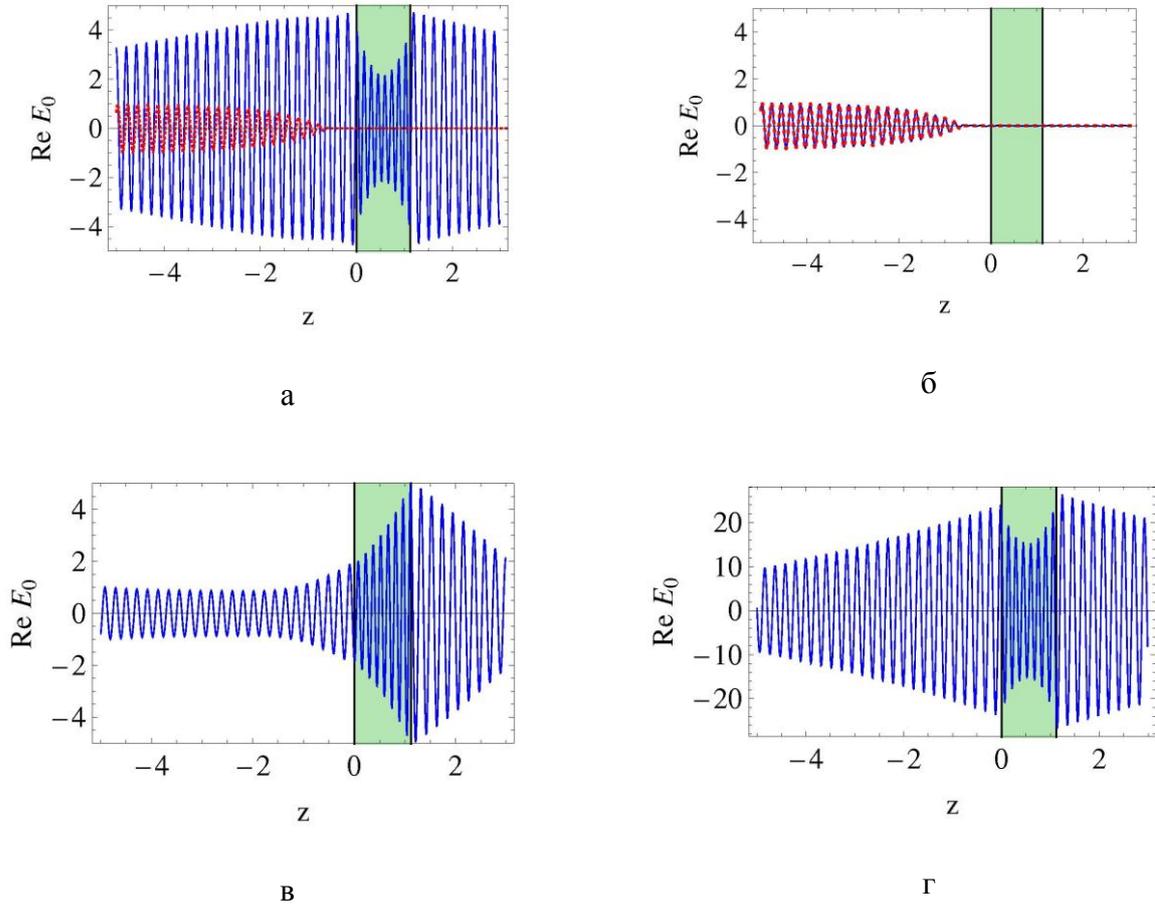


Рис. 8. Результат расчета распределения поля в импульсе, падающем на слой усиливающей среды. (а) Подход Френеля. Момент времени $t = 0$, когда передний фронт цуга не дошел до слоя. Сплошной линией показано распределение поля, найденное по формуле (97), пунктирной линией показано истинное распределение поля в импульсе; (б) то же, рассчитанное по модифицированному подходу Френеля (обсуждается ниже); (в) усиление поля импульса (модифицированный френелевский расчет) при $t = 5.5$; (г) поле импульса в более поздний момент времени $t = 15.5$, выходящее на локализованное собственное состояние с комплексной частотой. Параметры соответствуют рис. 4.

При наличии слоя, расположенного в области $z \in [0, d]$, полное (падающее плюс рассеянное) поле импульса должно также подчиняться принципу причинности, т.е. рассеянная волна должна отсутствовать до достижения передним фронтом импульса левой границы слоя $z = 0$. При $t < 0$ полное поле должно быть равно $E_0(0, t - z/c)$.

Фурье-гармоника полного поля при наличии слоя равна произведению амплитуды падающей гармоники $e_0(\omega)$ на передаточную функцию $g(z, \omega)$ из (81). Напомним, что эта функция была найдена в рамках подхода Френеля. Она выражает распределение поля в системе вакуум/слой/вакуум при нормальном падении на нее плоской волны единичной амплитуды.

Временная зависимость поля при этом находится обратным преобразованием Фурье:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega. \quad (97)$$

В случае диссипативного слоя или усиливающего слоя толщины $d < d_{cr}$ указанная процедура действительно дает правильную форму исходного импульса: $E(z, t) = E_0(0, t - z/c)$. Однако при $d > d_{las} \geq d_{cr}$, где d_{las} – толщина, при которой начинается лазерная генерация (смотри ниже), получается отличное распределение поля (сплошная линия на рис. 8а). Как видно из рисунка 8а, рассеянная волна появляется до того как передний фронт импульса дошел до слоя, т.е. имеется явное нарушение принципа причинности. Это нарушение указывает на необходимость модификации подхода Френеля.

Как известно, принцип причинности определяет аналитические свойства передаточной функции $g(z, \omega)$, которая по своей природе является функцией отклика, как функции комплексной частоты ω [29]. Функция $g(z, \omega)$ имеет особенности в виде полюсов на плоскости ω в точках $\omega_j = \text{Re } \omega_j + i \text{Im } \omega_j$, $j = 1, 2, \dots$, соответствующих собственным модам слоя как открытого резонатора [66,67]. Положение полюсов на плоскости ω определяется из условия обращения в ноль знаменателей, одинаковых для всех амплитуд поля (82)-(85)

$$\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{gain}(\omega)} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{gain}(\omega)} + 1} \right)^2 \exp\left(2i \frac{\omega}{c} d \sqrt{\varepsilon_{gain}(\omega)} \right) = 1, \quad (98)$$

что равносильно условию $q = 1$.

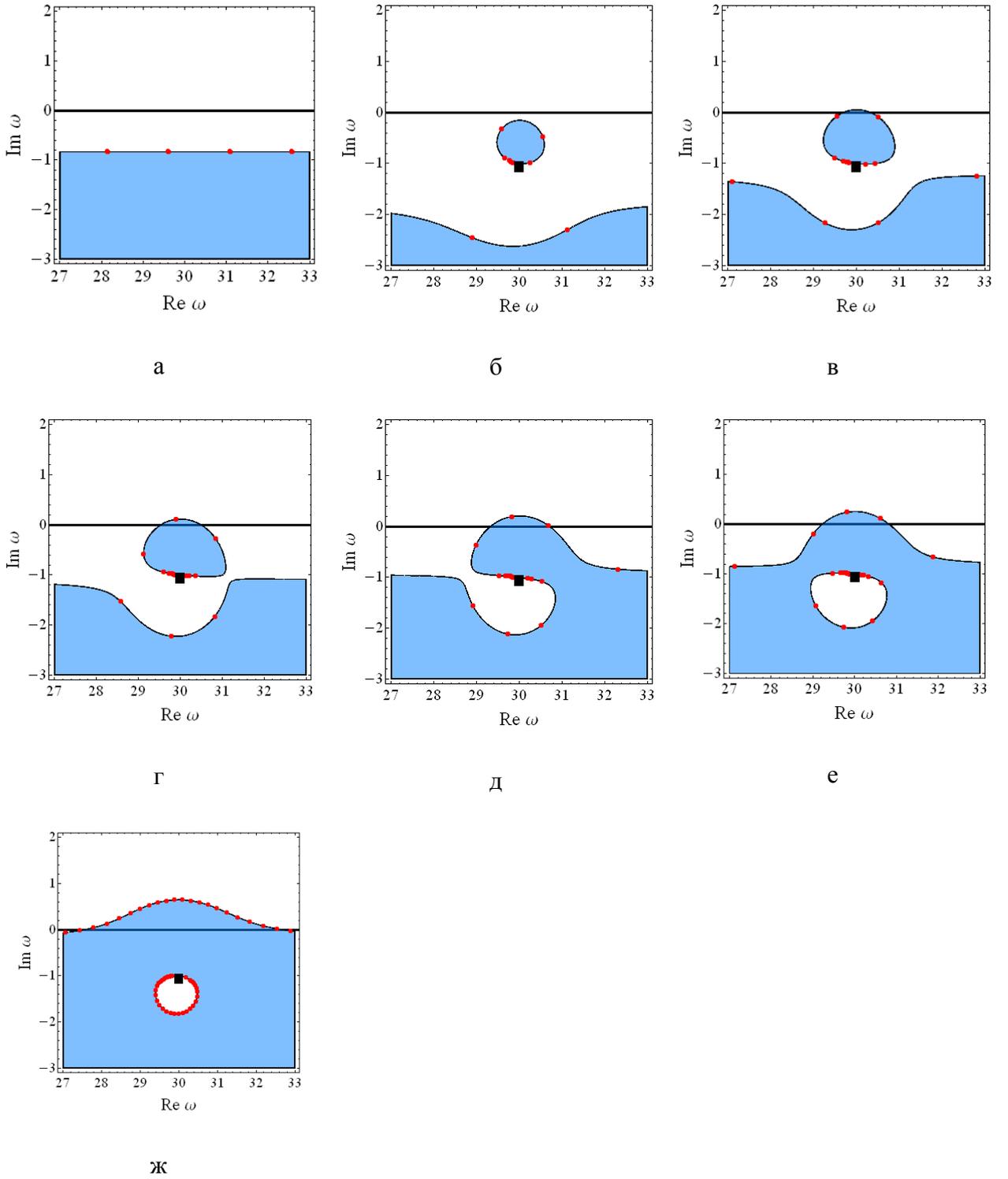


Рис. 9. Полюса функции отклика $g(z, \omega)$ обозначены точками, квадратиком обозначен полюс диэлектрической проницаемости, области $d > d_{cr} \approx 0.905$ затемнены; (а) квантовые точки отсутствуют ($|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0$), толщина слоя $d = 1.5$; (б) квантовые точки присутствуют ($|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$), толщина слоя $d = 0.7$; (в) $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, $d = 1.0$; (г) $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, $d = 1.12$; (д) $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, $d = 1.5$; (е) $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, $d = 2.0$; (ж) $|\mathbf{d}_{ge}|^2 = 0.0145$, $d = 7.0$.

Параметры соответствуют рис. 4.

При отсутствии усиления (диссипативный слой), все полюса функции $g(z, \omega)$ располагаются в нижней полуплоскости комплексной частоты ω (рис. 9а). В этом случае обратное преобразование Фурье (97) дает физически осмысленный результат.

В случае усиливающего слоя, в соответствии с (98), образуются дополнительные полюса (рис. 9б), которые при увеличении накачки (параметр α в формуле (21)) переходят в верхнюю полуплоскость комплексной частоты ω (рис. 9г), что впервые происходит при $d = d_{las}(\alpha)$. Как правило, касание оси $\text{Im } \omega = 0$ линией $|q| = 1$ происходит при $d = d_{cr} < d_{las}$. В случае $d_{cr} < d < d_{las}$ существует диапазон действительных частот, когда ряд Эйри расходится, но лазерной генерации нет (рис. 9в), и как следствие, ряд Эйри по «встречным» волнам и расчеты с использованием формул Френеля дают правильный результат.

Если делать обратное преобразование Фурье обычным образом (97) [29], то появление полюсов в верхней полуплоскости приводит к нарушению принципа причинности. В этом случае выражение (97) должно быть модифицировано [50,56], исходя из того, что передаточная функция $g(z, \omega)$ по своей природе является функцией отклика. Чтобы получить временное представление функции отклика $G(z, t) = (2\pi)^{-1} \int_C g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega$, удовлетворяющей принципу причинности ($G(z, t) = 0$ при $t < 0$), контур интегрирования C в обратном преобразовании Фурье

$$E(z, t) = \int_C e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega \quad (99)$$

должен быть проведен выше всех имеющихся полюсов. Далее он может быть деформирован таким образом, что (99) принимает вид суммы интеграла по вещественной оси и всех вычетов в полюсах [50,56]:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e_0(\omega) g(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega - 2\pi i \sum_j \text{res}(g(\omega_j, z)) e_0(\omega_j) \exp(-i\omega_j t) \quad (100)$$

Заметим, что интеграл по вещественной оси ω в выражении (100) совпадает с результатом, полученным в рамках стандартного подхода Френеля (97). Как мы видели выше (рис. 8а), само по себе первое слагаемое в (100) приводит к нарушению принципа

причинности. Интегрирование же по новому контуру добавляет вычеты в дискретном наборе частот ω_j в виде растущих со временем слагаемых $\sim \exp(-i \operatorname{Re} \omega_j t) \exp(\operatorname{Im} \omega_j t)$ [50,56,68]. Добавление этих дискретных мод согласует схему расчета с принципом причинности, т.е. до момента достижения передним фронтом импульса границы слоя отраженная волна отсутствует (рис. 8б). Будем называть далее модифицированным френелевским подходом расчет поля волны с учетом описанных выше дискретных мод.

Каждое собственное решение в (100), возникающее на частоте одного из полюсов, представляет собой экспоненциально возрастающее со временем поле, локализованное в слое и экспоненциально убывающее при удалении от него (рис. 8г) [50,56,68]. Это убывание связано с тем, что вне усиливающего слоя мнимая часть волнового числа положительна, $\operatorname{Im}(\omega/c) > 0$. Таким образом, пренебрежение вкладом дискретного спектра полюсов в (100) является причиной ошибок, возникающих во френелевском подходе. Именно корректный учет вклада этих полюсов обеспечивает выполнение принципа причинности при анализе задачи. Экспоненциальное нарастание поле во времени связано с развитием лазерной генерации в слое.

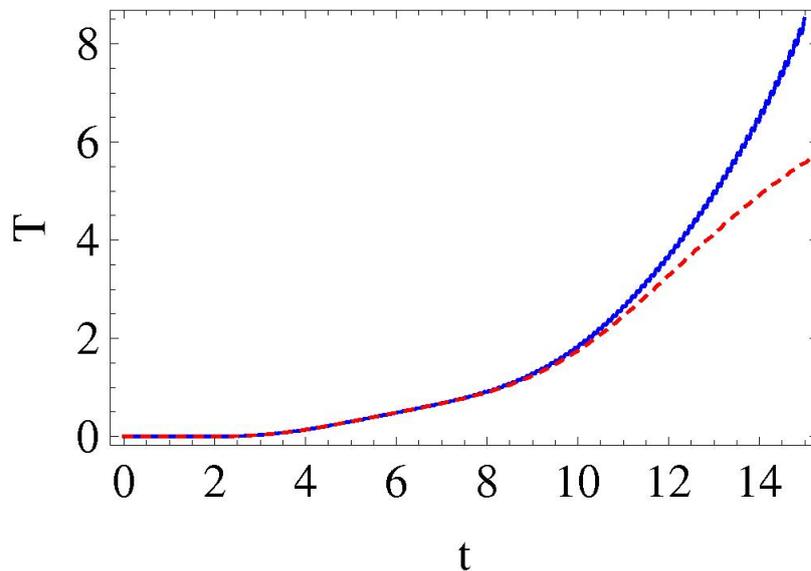


Рис. 10. Зависимость коэффициента прохождения, рассчитанного модифицированным методом Френеля (сплошная линия) и полученного численным решением уравнений Максвелла-Блоха (штриховая линия), от времени при падении полубесконечного синусоидального импульса на усиливающий слой. Интенсивность падающей волны равна

$$10^{-6} \text{ в единицах } \sqrt{\hbar n_0 / \tau_p}, \text{ смотри сноску 3.}$$

Поскольку модифицированный френелевский подход был получен из линеаризованных уравнений Максвелла-Блоха, он вполне корректно описывает поведение поля на линейной стадии развития генерации, когда поле удовлетворяет критерию малости (20) (смотри рисунок 10). Однако с течением времени поле неограниченно возрастает. При этом усиливается в основном прошедшая через слой волна (рис. 8в), а не отраженная, как предсказывает расчет в рамках стандартного подхода Френеля [48]. Получение стационарных значений поля возможно только в рамках нелинейного подхода.

Важно отметить связь между полюсами функции отклика и критической толщиной слоя. Положение полюсов определяется уравнением (98), а критическая толщина (91) определяется нарушением условия сходимости ряда Эйри, т.е. фактически этим же равенством (98), но взятым по модулю. Следовательно, все полюса лежат на кривых, определяемых условием $d = d_{cr}(\omega)$, где ω принимает комплексные значения (рис. 9). При достаточно большой толщине слоя (или достаточно сильной накачке, определяемой коэффициентом α в уравнении (21)) на вещественной оси частот появляется область, где $d > d_{cr}(\omega)$. В этой области ряд Эйри перестает сходиться (пересечение закрашенной области с осью абсцисс на рис. 9в), но френелевский подход (97) все еще дает ответ, совпадающий с численным расчетом решения уравнений (15)-(17) (рис. 9в). Лазерная генерация возникает при несколько большей толщине слоя d_{las} (или величине накачки), когда один из полюсов переходит в верхнюю полуплоскость (рис. 9г), и только тогда подход Френеля дает неправильный ответ. Таким образом, условие расходимости ряда Эйри является необходимым, но не достаточным условием начала лазерной генерации, и может использоваться только в качестве приближенной оценки условия возникновения генерации.

Интересной особенностью задачи является движение полюсов по комплексной плоскости с увеличением толщины слоя. Полюса двигаются вдоль кривой $d = d_{cr}(\omega)$, при этом они могут выходить в верхнюю полуплоскость и снова возвращаться в нижнюю полуплоскость. В результате, по мере увеличения d , генерация то возникает, то пропадает. Таким образом, может существовать целый набор толщин d_{las} , максимальное значение которых d_{th} . При толщинах больших d_{th} в верхней полуплоскости всегда оказывается не менее одного полюса, после этого генерация с возрастанием толщины слоя уже не исчезает.

Как указывалось выше, пока генерации нет, стандартный френелевский подход дает тот же результат, что и решение нелинейных уравнений Максвелла-Блоха. Данное утверждение проиллюстрировано на рис. 11, где изображена зависимость стационарного значения коэффициента прохождения T от толщины слоя при некоторой фиксированной частоте. Видно, что отклонение распределения поля, полученного путем решения уравнений Максвелла-Блоха, от стандартного френелевского⁵ происходит при таких значениях d , когда в верхней полуплоскости комплексной частоты ω появляются полюса.

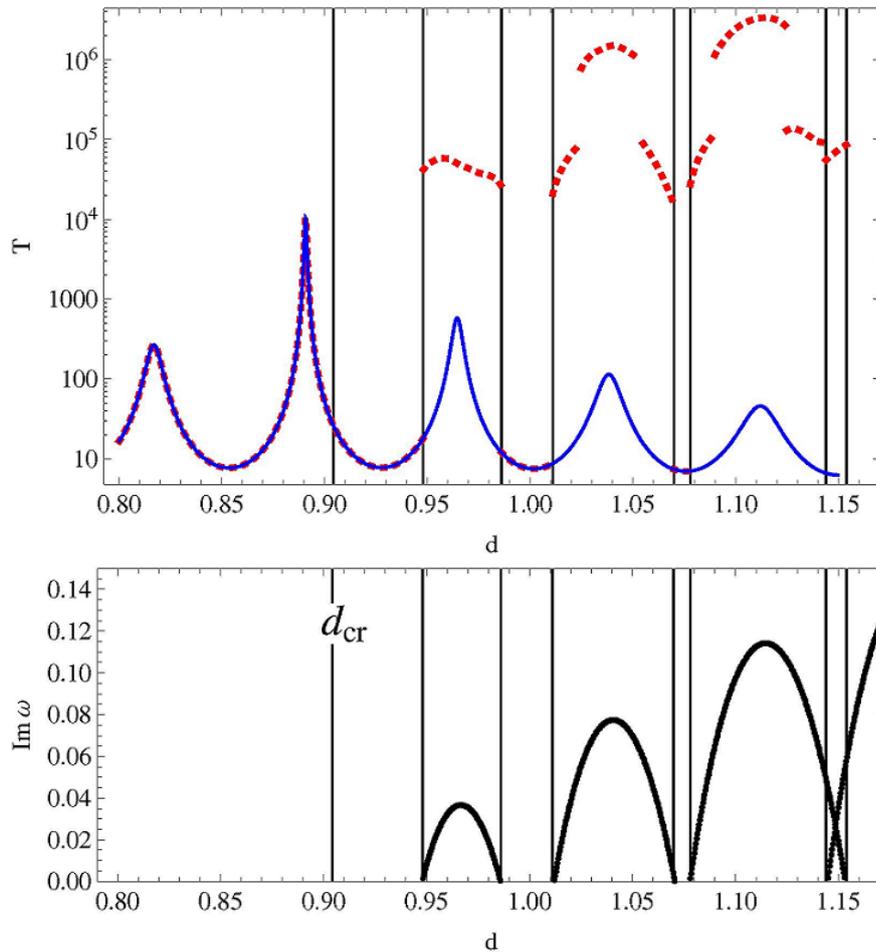


Рис. 11. Верхний рисунок: коэффициент прохождения через слой, рассчитанный по методу Френеля (сплошная линия) и найденный из численного решения уравнений Максвелла-Блоха (штриховая линия), в зависимости от толщины слоя. Нижний рисунок: положение полюсов, имеющих $\text{Im } \omega > 0$, в зависимости от толщины слоя. Интенсивность

⁵Отметим, что нарушение условия сходимости ряда Эйри не всегда приводит к отклонению фактического распределения поля от френелевского.

падающей волны равна 10^{-6} .

Отметим, что на частотах, отличных от частоты лазерной генерации, френелевский подход предсказывает плавное изменение стационарной интенсивности прошедшей волны от толщины. При некоторых значениях толщины наблюдаются максимумы интенсивности прошедшей волны (рис. 11). Нелинейные же уравнения Максвелла-Блоха предсказывают в этой зависимости скачки интенсивности (рис. 11) даже в случае бесконечно малой интенсивности падающей волны. Однако эти скачки наблюдаются отнюдь не на тех толщинах, где находятся пики интенсивности, а на каждой из толщин, где начинается или заканчивается лазерная генерация. В этих точках происходит выход полюса в верхнюю полуплоскость комплексных частот (начинается лазерная генерация) или уход полюса в нижнюю полуплоскость (прекращается лазерная генерация).

На частотах падающей волны, близких к частоте генерации, при приближении к d_{las} френелевский подход дает бесконечно большое увеличение поля. Нелинейные же уравнения Максвелла-Блоха предсказывают конечные значения поля, причем в нелинейном режиме лазерной генерации зависимость интенсивности прошедшей волны от толщины образца имеет явно выраженный гистерезисный характер (рис. 12), что связано с бистабильностью слоя в режиме лазерной генерации (наиболее просто физика этого явления описывается в рамках модели «мода поля-двухуровневый атом» [22]).

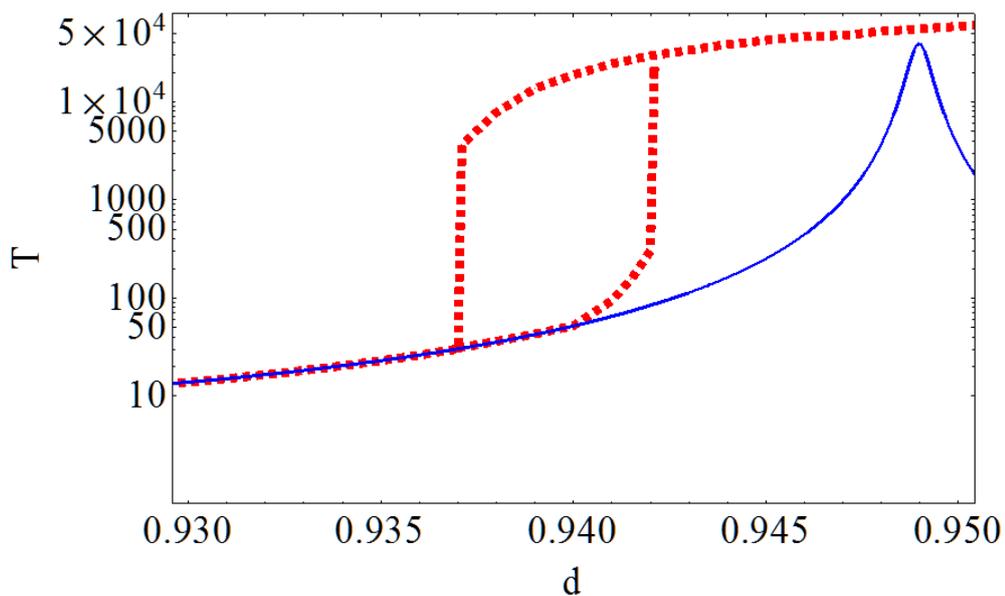


Рис. 12. Коэффициент прохождения электромагнитной волны через усиливающий слой от толщины усиливающего слоя. Интенсивность падающей волны равна 10^{-2} .

При частоте падающей волны, отличной от частоты генерации, возможность начала генерации и переход в нелинейный режим связана с наличием у падающего цуга переднего фронта, содержащего все частотные гармоники. Контроль амплитуды несущей волны даст совпадение с френелевским подходом вплоть до толщины d_{las} и последующий скачок интенсивности (рис. 11) при превышении этой толщины.

2.4. Падение электромагнитных волн под углом на усиливающий слой

Рассмотрим теперь случай наклонного падения волны на усиливающий слой, окруженный средой с диэлектрической проницаемостью ε_e . Формулы Френеля (81)-(85) и ряды Эйри (90), полученные нами для случая нормального падения, будут иметь тот же вид, если произвести замену $\sqrt{\varepsilon_{gain}} \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi}$ и $Z_2 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi}$, $Z_1 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi$ для s -поляризации и $Z_2 \rightarrow \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} / \varepsilon_{gain}$, $Z_1 \rightarrow \cos \phi / \sqrt{\varepsilon_e}$ для p -поляризации, где ϕ – угол падения, ε_e – диэлектрическая проницаемость среды из которой падает электромагнитная волна.

Из формул Френеля следует, что для усиливающего или диссипативного слоя при увеличении его толщины d коэффициент прохождения T стремится к нулю, а коэффициент отражения R – к отличной от нуля константе. В полубесконечной усиливающей или диссипативной среде остается только одна убывающая от границы волна. Различие между диссипативной и усиливающей средой состоит в направлении вектора Пойтинга: в первом случае он направлен от границы вглубь полупространства, во втором – к границе.

Как и в случае нормального падения, формулы Френеля становятся неверными при возникновении лазерной генерации, т.е. при наличии полюсов функции отклика в верхней полуплоскости комплексной частоты. Положение полюсов определяется уравнением

$$q = \left(\frac{\sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} - \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi}{\sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} + \sqrt{\varepsilon_e} \cos \phi} \right)^2 \exp\left(2i\omega d \sqrt{\varepsilon_{gain} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} / c\right) = 1. \quad (101)$$

Полюса функции отклика расположены на кривой, определяемой из амплитудных условий лазерной генерации:

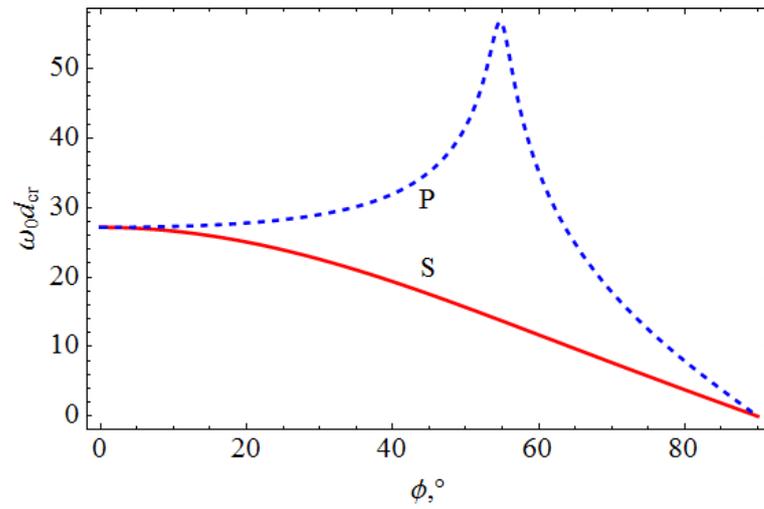
$$|r_\infty|^2 \exp\left(2\omega d \operatorname{Im} \sqrt{\varepsilon_{\text{gain}} - \varepsilon_e \sin^2 \phi} / c\right) = 1, \quad (102)$$

где $r_\infty = (Z_1 - Z_2) / (Z_1 + Z_2)$.

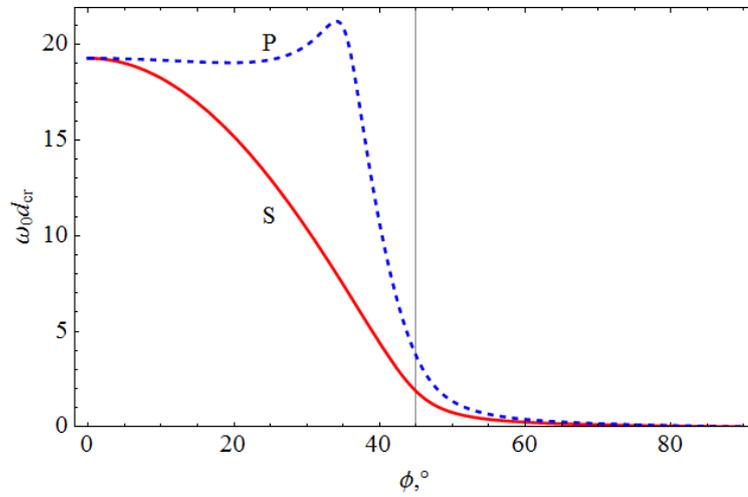
Для того чтобы определить, при какой толщине усиливающего слоя $d_{\text{las}}(\phi)$ начинается лазерная генерация, удобно проследить за эволюцией кривой (102) на комплексной плоскости частот при изменении толщины слоя. В отличие от нормального падения, при падении под углом, существует два принципиально различных случая.

Если усиливающая среда окружена оптически менее плотной средой, $\operatorname{Re} \varepsilon_{\text{gain}} > \varepsilon_e$, то ситуация полностью аналогична случаю нормального падения. При $d < d_{\text{cr}}(\phi)$ ряд Эйри по «падающим» волнам сходится, а при $d > d_{\text{cr}}(\phi)$ не сходится, и полюса передаточной функции могут переходить в верхнюю полуплоскость. Критическая толщина слоя, при которой начинается лазерная генерация, зависит от угла падения. Для р-поляризации $d_{\text{las}}(\phi) \rightarrow \infty$ при падении под углом Брюстера ϕ_{Br} (рис. 13а). Это связано с тем, что при точном выполнении условия Брюстера отсутствуют отражение и слой перестает быть резонатором. Из-за наличия усиления диэлектрическая проницаемость слоя имеет мнимую часть, а, следовательно, и отличный от единицы импеданс. Поэтому $d_{\text{las}}(\phi_{\text{Br}})$ остается конечной величиной.

Если же слой находится в оптически более плотном диэлектрике $\operatorname{Re} \varepsilon_{\text{gain}} < \varepsilon_e$, то появляется область полного внутреннего отражения (правее вертикальной линии на рис. 13б). В этой области величина d_{cr} уменьшается с ростом угла падения, но это не означает, что область $\phi > \phi_{\text{TIR}}$ благоприятствует лазерной генерации, т.к. это только амплитудное условие, а требуется еще фазовое (переход полюса).



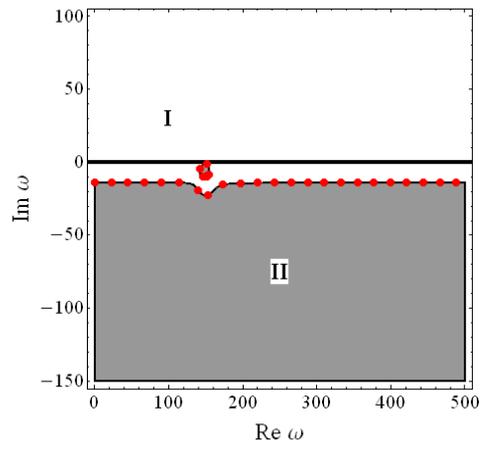
а



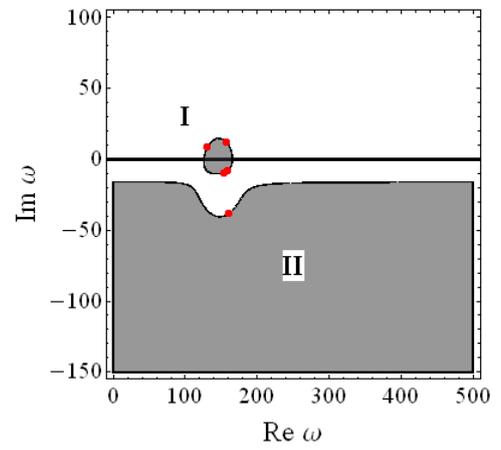
б

Рис. 13. Зависимость критической толщины слоя от угла для s- (сплошные линии) и р- (штриховые линии) поляризаций. (а). Нерезонансная часть диэлектрической проницаемости слоя $\varepsilon_{mat} = 2$ (смотри уравнение (19)), слой находится в вакууме. (б). Слой с $\varepsilon_{mat} = 1$ в диэлектрике с $\varepsilon_e = 2$.

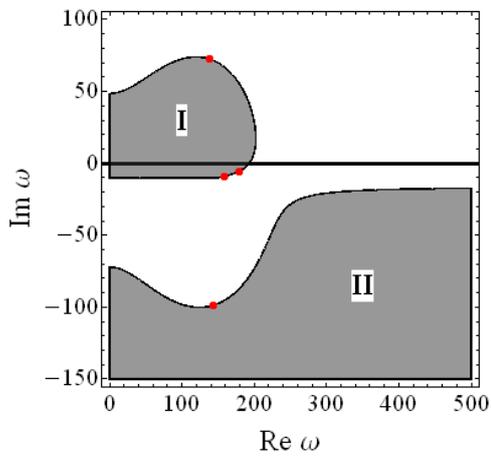
При углах падения ϕ , меньших угла полного внутреннего отражения ϕ_{TIR} , кривая (102) и полюса функции отклика ведут себя аналогично случаю нормального падения (рис. 14а). С ростом угла падения увеличивается область, где сходится ряд Эйри по убывающим волнам, а полюса функции отклика движутся по кривой (102) по часовой стрелке (рис. 14а, б, в, г).



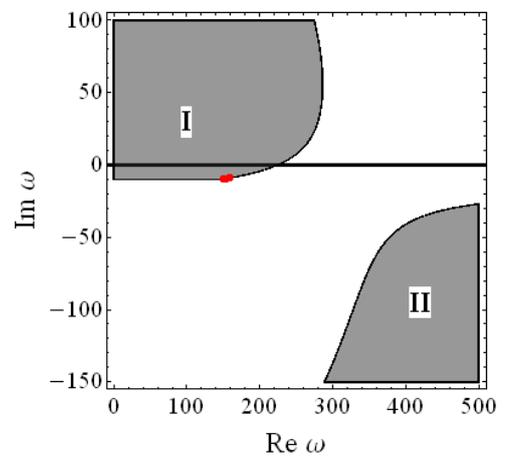
а



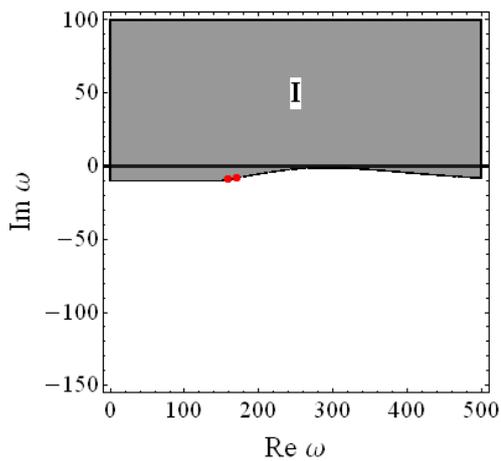
б



в



г



д

Рис. 14. Положение полюсов передаточной функции в комплексной плоскости при различных углах падения. Серым цветом выделена область расходимости ряда Эйри по «падающим» волнам при нормальном падении: (а) нормальное падение $\phi = 0.0$, (б) угол

падения $\phi = 0.9 \cdot \phi_{TIR}$, (в) угол падения $\phi = 0.99 \cdot \phi_{TIR}$, (г) угол падения $\phi = 0.999 \cdot \phi_{TIR}$, (д) угол падения больше угла полного внутреннего отражения $\phi = 1.01 \cdot \phi_{TIR}$.

При углах падения, больших критического, области сходимости и области расходимости ряда Эйри меняются местами (рис. 14д). С увеличением толщины слоя область, где ряд Эйри по возрастающим волнам сходится, уменьшается, поэтому теперь кривая (102), лежащая между областями сходимости, с увеличением толщины слоя опускается в комплексной плоскости частот. Таким образом, при углах падения больше угла полного внутреннего отражения лазерная генерация возможна лишь при малой толщине усиливающего слоя и исчезает с увеличением толщины слоя. Полюса, расположенные на кривой (102), с увеличением угла падения продолжают двигаться по ней по часовой стрелке (рис. 14) [69], и при $\phi \rightarrow \phi_{TIR}$ оказываются вблизи частоты перехода ω_0 .

Интересно отметить, что угол, при котором меняются местами области сходимости, в точности равен углу полного внутреннего отражения в отсутствие усиления: $\phi_{cr} = \phi_{TIR} = \arcsin \sqrt{\varepsilon_{mat} / \varepsilon_e}$. Здесь ε_{mat} – действительная часть диэлектрической проницаемости без учета дисперсии (смотри уравнение (19)). Более ожидаемой была бы величина $\phi_{cr} = \arcsin \sqrt{\text{Re } \varepsilon_{gain}(\omega) / \varepsilon_e}$. Однако заметим, что инверсия областей сходимости ряда Эйри (рис. 14) определяется свойствами системы при $\omega \rightarrow \infty$, где из-за конечности линии усиления $\varepsilon_{gain} \rightarrow \varepsilon_{mat}$. При этом падающая волна усиливаться не будет, и при углах, больших угла полного внутреннего отражения $(\varepsilon_{mat} - \varepsilon_e \sin^2 \phi) < 0$ при действительных частотах сходится ряд по убывающим волнам.

Таким образом, при $\phi < \phi_{cr}$ лазерная генерация начинается с увеличением толщины усиливающего слоя, а при $\phi > \phi_{cr}$ лазерная генерация возможна только при малой толщине усиливающего слоя. Угол, при котором происходит переход от одного типа поведения к другому $\phi_{cr} = \phi_{TIR} = \arcsin \sqrt{\varepsilon_{mat} / \varepsilon_e}$ определяется значением диэлектрической проницаемости без учета дисперсии. При таком же угле происходит переход от возрастающих волн, распространяющихся в слое, к убывающим [50,69].

2.5. Выводы

До тех пор, пока в слоистой системе, содержащей усиливающие слои, отсутствует лазерная генерация, применимо описание с использованием эффективной диэлектрической проницаемости ε_{gain} с отрицательной мнимой частью.

Существует иерархия толщин усиливающего слоя $d_0 < d_{cr} \leq d_{las} \leq d_{th}$. Во всех рассмотренных случаях существует толщина усиливающего слоя d_0 , начиная с которых коэффициент отражения от слоя становится больше единицы. Далее, по мере роста толщины системы достигается критическая толщина d_{cr} усиливающего слоя, при превышении которой ряд Эйри по «падающим» волнам расходится. При толщинах, меньших d_{cr} , ряд Эйри сходится к результату, полученному в рамках подхода Френеля (решение линейного волнового уравнения), который, в свою очередь, совпадает с решением, получаемым из численного решения уравнений Максвелла-Блоха.

Иная ситуация возникает при превышении толщиной порогового значения d_{las} , когда начинается лазерная генерация. Вместо линейного режима, предсказываемого френелевским подходом, возникает нелинейное стационарное решение (рис. 7в). В этом случае, даже если интенсивность поля во френелевском решении достаточно мала и, казалось бы, можно не учитывать изменение инверсной населенности под действием поля, уравнения Максвелла-Блоха (15)-(17) дают решение большой амплитуды, при которой указанная нелинейность становится определяющей. Точным условием возникновения лазерной генерации является выход полюсов линейной функции отклика $g(\omega)$ (81) в верхнюю полуплоскость комплексных частот ω .

Построение ряда Эйри весьма наглядно описывает прохождение полубесконечного электромагнитного импульса через слой вещества. Однако для усиливающей среды оно должно проводиться по-разному для случаев $d < d_{cr}$ и $d > d_{cr}$. Действительно, при построении ряда Эйри используется величина r – коэффициент отражения в задаче об отражении плоской волны от полупространства. Величина r зависит от того, с какой волной в слое «сшивается» падающая из вакуума волна. Если брать, как это обычно делается для диссипативных сред [54], волну, переносящую энергию вглубь слоя, т.е. «падающую» волну, то при $d < d_{cr}$ модуль знаменателя геометрической прогрессии $q = r_{\infty}^2 \exp(2i\delta)$ оказывается меньше единицы, и ряд Эйри по «падающим» волнам сходится к выражению (82)-(85), получаемому из подхода Френеля.

Если же строить ряд из предположения, что решение в полубесконечной среде является «встречной» волной [48], то величины импеданса Z_2 и комплексной фазы δ в уравнениях (87)-(89) меняют знак. В результате знаменатель прогрессии становится равным $1/q$, и при $d > d_{cr}$ уже ряд Эйри по «встречным» волнам (92) сходится, причем к результату расчета Френелевским методом.

Проведенный в работе анализ показывает, что результат, полученный в рамках подхода Френеля (82)-(85), можно рассматривать как аналитическое продолжение суммы ряда Эйри (90) в область $d > d_{cr}(\omega)$ на плоскости комплексных частот (закрашенные участки на рис. 9). Иными словами, при $d < d_{cr}$ нужно использовать ряд Эйри по «падающим» волнам, а при $d > d_{cr}$ – по «встречным» волнам. При $d = d_{cr}$ ($|q| = 1$) ни один из рядов не сходится, но если $q \neq 1$, то пределы сверху и снизу при $d \rightarrow d_{cr} \pm 0$ совпадают.

Переход от ряда Эйри по «падающим» волнам к ряду Эйри по «встречным» волнам эквивалентен аналитическому продолжению функции $1/(1-q)$ из окрестности $q = 0$, где $1/(1-q) = \sum_n q^n$, в окрестность $|q| = \infty$, где $1/(1-q) = -(1/q)/(1-1/q) = -(1/q) \sum_{n=0}^{\infty} (1/q)^n$ [64]. Таким образом, мы получаем полное соответствие между рядами Эйри и результатом Френелевского подхода: ответ, полученный в подходе Френеля, является той же аналитической функцией, чье разложение в ряд представляет собой ряды Эйри. По аналогии с модифицированным подходом Френеля, к ряду Эйри по встречным волнам необходимо добавить сумму вычетов в полюсах, определяемых условием $q(\omega) = 1$. Это прибавляет бесконечно растущие во времени слагаемые в тех областях параметров, где есть лазерная генерация.

Физическим параметром, определяющим условие начала генерации, является путь, проходимый лучом по слою. При падении под углом этот путь отличается от толщины слоя. В результате модам, распространяющимся под углом, соответствуют меньшие значения толщин $d_0, d_{cr}, d_{las}, d_{th}$. В частности, при стремлении угла падения к $\pi/2$ эти величины стремятся к нулю (рис. 13). В случае пучка с конечной апертурой в его разложении по плоским волнам всегда присутствуют волны с углами падения близкими к $\pi/2$. Для таких волн необходимо учитывать, что их путь ограничен шириной пучка или поперечным размером системы. Действительно, накачка осуществляется не во всей слое, а лишь в ограниченной области, как в случае поверхностно-излучающих лазеров с

вертикальным объемным резонатором (vertical cavity surface-emitting lasers — VCSELs) [70-74]. Выходя за пределы этой области, волны попадают в область поглощения.

При падении электромагнитной волны под углом ϕ существенными оказываются явления Брюстера и полного внутреннего отражения. При ненулевой мнимой части ε_{gain} угол Брюстера и угол полного внутреннего отражения будут комплексными. Однако для р-поляризации при падении под углом ϕ равным углу Брюстера ϕ_{Br} при отсутствии накачки $d_{las}(\phi)$ имеет максимум (рис. 13а) Это связано с тем, что при точном выполнении условия Брюстера отсутствуют отражение и слой перестает быть резонатором. В случае полного внутреннего отражения существует действительный критический угол ϕ_{cr} , равный углу полного внутреннего отражения ϕ_{TIR} при отсутствии накачки, выше и ниже которого поведение системы качественно отличается. При углах падения ϕ , меньших критического ϕ_{cr} , ситуация аналогично случаю нормального падения. С ростом толщины слоя в системе начинается лазерная генерация. При углах падения ϕ , больших критического ϕ_{cr} , лазерная генерация возможна лишь при малой толщине усиливающего слоя и исчезает с увеличением толщины слоя.

Глава 3

Распространение электромагнитных волн по фотонному (электромагнитному) кристаллу, содержащему усиливающую среду

3.1. Введение

Рассмотрим распространение электромагнитных волн по конечной периодической многослойной системе, в которой усиливающие слои чередуются со слоями без усиления и без потерь (фотонному кристаллу, содержащему усиливающую среду). Задача о падении волны на фотонный кристалл имеет свои особенности, связанные, прежде всего, с наличием разрешенных и запрещенных зон, определяющих поведение поля на масштабе нескольких элементарных ячеек фотонного кристалла. Также в зависимости от частоты падающего света меняется распределение интенсивности поля в пределах одной ячейки фотонного кристалла (эффект Боррманна [75]), в результате чего интенсивность поля в усиливающих слоях может превосходить интенсивность поля в одиночном слое при одинаковых амплитудах падающих волн. Добавление в фотонный кристалл усиливающей среды помимо всего прочего приводит к перестройке его зонной структуры, из-за изменения действительной части диэлектрической проницаемости $\text{Re} \varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$ слоев, содержащих усиливающие компоненты. Эти особенности проявляются уже в самом простом случае, когда фотонный кристалл представляет собой последовательность усиливающих слоев, разделенных слоями вакуума, с толщинами d_1 и d_2 и диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_{\text{gain}}(\omega)$ ($\text{Im} \varepsilon_{\text{gain}}(\omega) < 0$) и $\varepsilon_2 = 1$ соответственно.

Простейшим способом нахождения коэффициентов прохождения и отражения для фотонного кристалла является метод Т-матриц [63]. Применительно к фотонным кристаллам метод Т-матриц эквивалентен подходу Френеля для однородного слоя. Подход Эйри тоже можно обобщить на случай фотонного кристалла, заменяя плоские волны блоховскими.

В работе рассмотрено ограничение линейной стадии распространения волн по фотонному кристаллу, так как основное внимание уделялось подпороговым явлениям. Нелинейная же оптика фотонных кристаллов в настоящее время является бурно развивающейся областью, изложение результатов которой требует отдельного рассмотрения (смотри [69,76]).

3.2. Построение ряда по парциальным волнам Эйри для фотонного (электромагнитного) кристалла

В разделе 2.2 подход Эйри был подробно проанализирован для единичного однородного слоя, когда распространение волны рассматривается как последовательность переотражений внутри слоя. Этот метод возможно обобщить на случай произвольного числа слоев. В фотонном кристалле есть два собственных решения, которые являются блоховскими волнами $E^\pm = f^\pm(z) \exp(\pm i k_B z)$. Для построения ряда Эйри по блоховским волнам достаточно знать блоховское волновое число k_B и импедансы Z^\pm (или адмитансы $\zeta^\pm = 1/Z^\pm$) этих волн⁶. Заметим, что в отличие от блоховского волнового числа k_B , определенного с точностью до вектора обратной решетки, импеданс волны Z^\pm в данной точке определен однозначно, хотя и меняется внутри элементарной ячейки. Учитывая связь между магнитным и электрическим полями в волне $H = -i/k_0(\partial E/\partial z)$, находим $\zeta^\pm = \pm k_B/k_0 - i/k_0(\partial \ln f^\pm/\partial z)$. Второе слагаемое периодически зависит от z и соответствует вкладу пред экспоненты блоховской волны. В отсутствие потерь и усиления импеданс Z^\pm принимает комплексные значения в разрешенной зоне и чисто мнимые – в запрещенной [45]. Волновое число k_B , соответственно, принимает вещественные и комплексные значения. Этим и определяется основное отличие разрешенной и запрещенной зон. Появление мнимой части диэлектрической проницаемости размывает границы зон, но качественно основные закономерности сохраняются.

Процесс переотражений (ряд Эйри) конструируется следующим образом. Падающая из вакуума и отраженная волны, имеющие импедансы $+1$ и -1 , порождают внутри фотонного кристалла блоховскую волну, имеющую импеданс $Z^+ = 1/\zeta^+$ и амплитуду электрического поля $t_L = 2/(\zeta^+ + 1)$ (рис. 2.3). Эта волна затем распространяется по фотонному кристаллу, приобретая в конце образца фотонного кристалла множитель $\exp(i\delta)$, где $\delta = k_B N(d_1 + d_2)$. Затем она отражается от правой границы, причем отраженная волна имеет импеданс $Z^- = 1/\zeta^-$, а прошедшая $Z = 1$. Коэффициент прохождения волны E^+ в вакуум равен $t_R = (\zeta^- - \zeta^+)/(\zeta^- - 1)$, так что амплитуда первой

⁶ Ниже будет предполагаться, что пред экспоненциальные функции нормированы так, что они равны единице при $z = 0$. Связь ζ^\pm с k_B подробно рассматривается в [44].

прошедшей парциальной волны равна $\tau_1 = t_L t_R \exp(i\delta)$. При этом происходит отражение от правой границы с коэффициентом $r_R = (1 - \zeta^+) / (\zeta^- - 1)$. Затем происходит прохождение волны E^- через образец фотонного кристалла и ее отражение от левой границы с коэффициентом $r_L = -(1 + \zeta^-) / (1 + \zeta^+)$. Отраженная волна E^+ вновь проходит через фотонный кристалл, так что вторая парциальная волна, вышедшая из фотонного кристалла, имеет амплитуду $\tau_2 = q\tau_1$, где

$$q = r_R r_L \exp(2i\delta). \quad (103)$$

Далее итерации проводятся аналогично, так что n -я парциальная волна имеет амплитуду $\tau_n = q^{n-1} \tau_1$. В результате коэффициент прохождения можно представить в виде ряда:

$$t = t_L t_R \exp(i\delta) \sum_{n=0}^{\infty} q^n. \quad (104)$$

Формально суммируя ряд, получим выражение

$$t = \frac{t_L t_R \exp(ik_B N(d_1 + d_2))}{1 - r_L r_R \exp(2ik_B N(d_1 + d_2))}, \quad (105)$$

которое, как легко убедиться, тождественно совпадает с результатом применения метода T -матриц (при условии выбора волны E^+ в качестве прошедшей из вакуума в фотонный кристалл, т.е. «падающей» по терминологии, введенной в разделе 2.2).

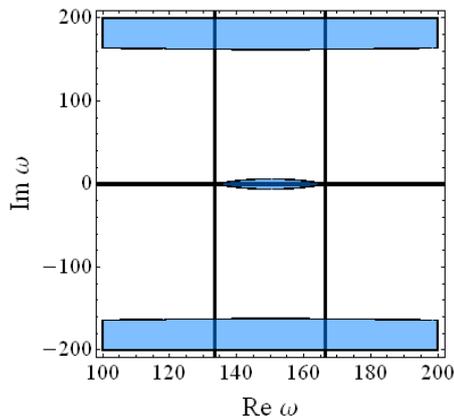
В дальнейшем наблюдается полная аналогия со случаем единичного усиливающего слоя: расходимость на какой-либо частоте ряда Эйри по «падающим» волнам не является достаточным условием для лазерной генерации. Более того, как будет показано в дальнейшем, это условие является необходимым лишь в том случае, если частота линии накачки ω_0 лежит в разрешенной зоне фотонного кристалла. В случае же, когда частота линии накачки лежит в запрещенной зоне, необходимое условие начала лазерной генерации связано с расходимостью ряда Эйри по «встречным» волнам [77].

3.3. Лазерная генерация в разрешенной зоне фотонного кристалла, содержащего усиливающую среду

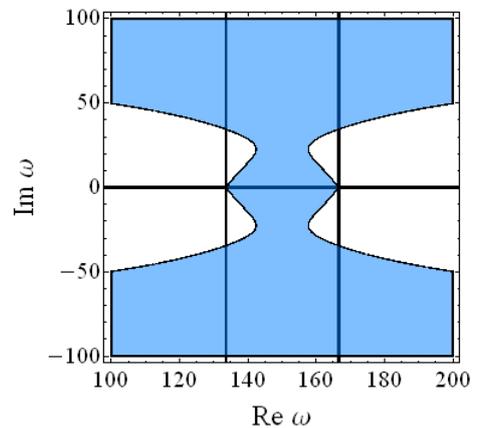
В разрешенной зоне знаки действительной и мнимой частей k_B противоположны. «Падающая» волна усиливается при прохождении по фотонному кристаллу. Граница сходимости ряда Эйри, на которой расположены все полюса передаточной функции, определяется, как и в случае единичного усиливающего слоя, условием $|q|=1$ (q находится по формуле (103))

$$|r_L r_R \exp(2ik_B N(d_1 + d_2))| = 1. \quad (106)$$

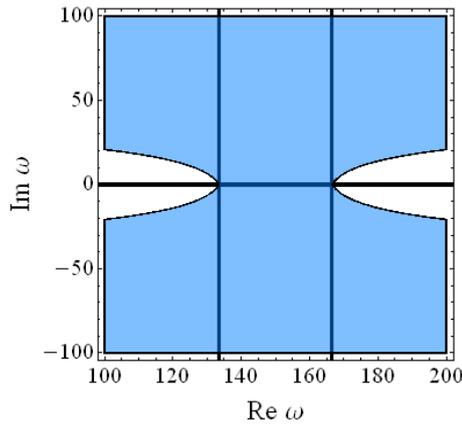
Отметим принципиальное отличие случая образца, состоящего из одной ячейки фотонного кристалла от случая однородного слоя. Если накачка отсутствует и можно пренебречь потерями, то вместо рис. 9а мы имеем рис. 15а. Области, где ряд Эйри по «падающим» волнам расходится затемнены. Для одной ячейки существуют три таких области. Одна окружает область действительных частот, соответствующих запрещенной зоне ФК. Также появляется область в верхней полуплоскости. Увеличение числа слоев ведет к смыканию этих областей, и к заполнению области с действительной частью частоты принадлежащей запрещенной зоне (рис. 15б, в). Однако, как и в случае одного слоя, все полюса лежат в нижней полуплоскости.



а



б



в

Рис. 15. Образование запрещенной зоны ФК: (а) одна ячейка, (б) две ячейки, (в) четыре ячейки. Усиление и потери отсутствуют.

Поскольку величина q (103) увеличивается с ростом числа ячеек фотонного кристалла N , то условие расходимости ряда Эйри можно представить как превышение числом слоев критического значения $N > N_{cr}$, по аналогии с критической толщиной однородного слоя. Действительно, при $N < N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам и метод Френеля (метод Т-матриц) дают одинаковый результат, при $N > N_{cr}$ расчет методом Т-матриц даёт конечный результат, а ряд Эйри по «падающим» волнам расходится. Функция $N_{cr}(\omega)$, будучи вещественной функцией комплексной переменной ω , задает кривую на комплексной плоскости частот $|q(N_{cr}(\omega))| = 1$.

Накачка изменяет не только мнимую, но и действительную часть диэлектрической проницаемости. Это ведет к деформации кривой $|q(\omega)| = 1$ (106), но качественно динамика движения полюсов в зависимости от толщины (числа ячеек) напоминают случай единичного усиливающего слоя (рис. 16).

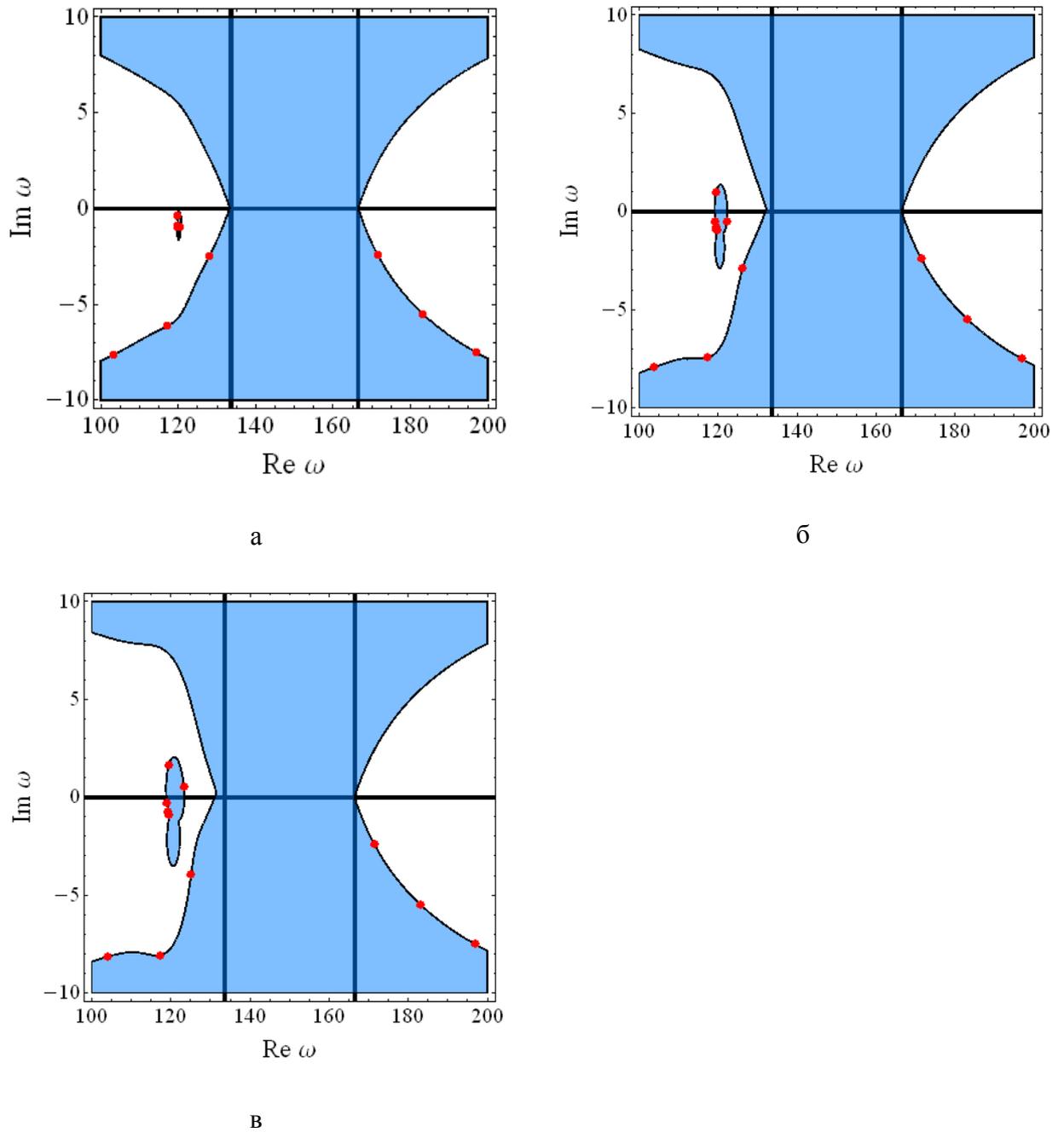


Рис. 16. Положение кривой $|q|=1$ в комплексной плоскости частот (черная кривая) и положение полюсов (обозначены точками) при различной интенсивности накачки.

Особенности возникают лишь вблизи границы с запрещенной зоной.

Критическое число слоев $N_{cr}(\omega)$ уменьшается в разрешенных зонах вблизи их границ из-за уменьшения групповой скорости блоховских волн. Причем этот эффект сильнее проявляется на нижней границе запрещенной зоны из-за концентрации энергии электрического поля в усиливающих слоях, имеющих большие значения ε (эффект

Боррманна [75]), так что вблизи нижней границы запрещенной зоны проще получить генерацию (рис. 17).

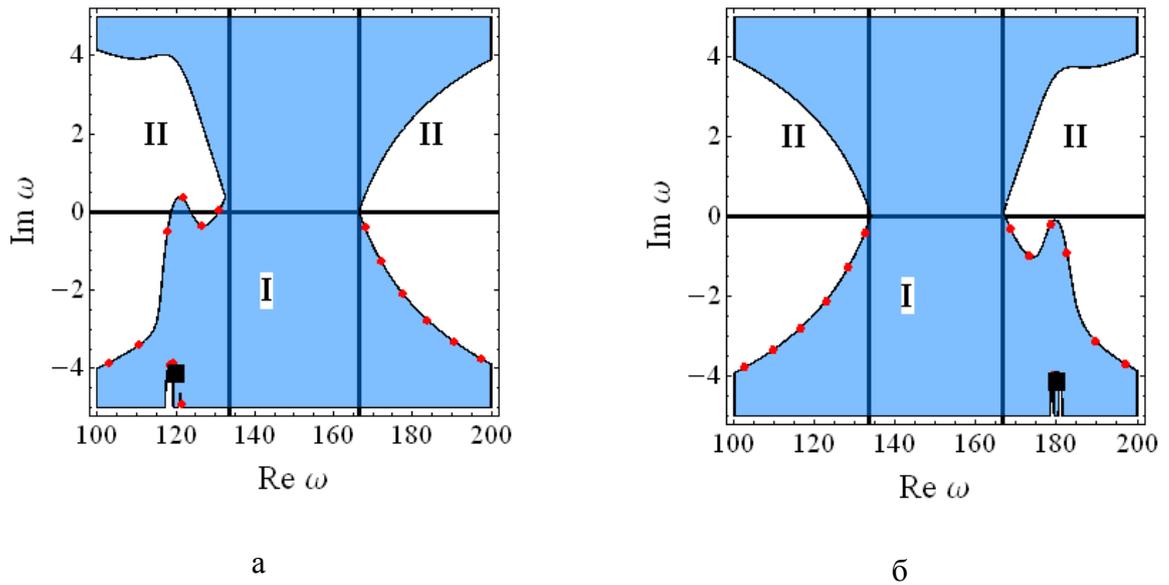


Рис. 17. Расположение полюсов функции отклика ФК на комплексной плоскости частот при частотах накачки на нижней и верхней границах запрещенной зоны. Темным и светлым отмечены области сходимости ряда Эйри по «падающим» и по «встречным» волнам, соответственно.

3.4. Лазерная генерация в запрещенной зоне фотонного (электромагнитного) кристалла, содержащего усиливающую среду

Если частота накачки лежит в запрещенной зоне, то в отличие от случая разрешенной зоны зависимость порога генерации от числа ячеек фотонного кристалла носит немонотонный характер (рис. 18). Это связано с тем, что запрещенная зона существует лишь в бесконечном фотонного кристалла. Формирование свойств запрещенной зоны происходит по мере увеличения числа ячеек фотонного кристалла. При малом числе ячеек фотонного кристалла - N зависимость от N напоминает случай разрешенной зоны (раздел 3.3)⁷. С ростом числа ячеек пороговое значение накачки α_{th} , необходимое для начала лазерной генерации, уменьшается (число ячеек от 1 до 4).

⁷ Ниже под разрешенной и запрещенными зонами будет пониматься не только множества действительных частот, но и соответствующие им полосы на комплексной области частот.

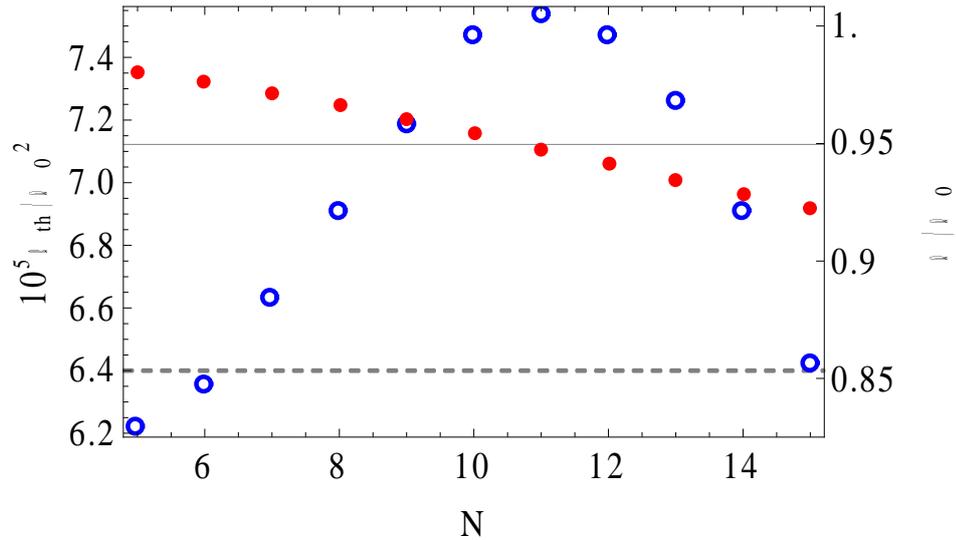


Рис. 18. Пороговое значение α_{th} (кольца) и частота генерации ω , нормированная на частоту центра запрещенной зоны ω_0 (круги) в зависимости от числа ячеек фотонного кристалла N . Штриховой линией отмечена граница запрещенной зоны фотонного кристалла, не содержащей усиливающей среды, сплошной линией обозначена граница запрещенной зоны ФК, содержащей усиливающую среду.

При большем числе ячеек фотонного кристалла зависимость порогового значения накачки α_{th} от толщины изменяется, также меняется и топология областей сходимости рядов Эйри. Теперь на частотах запрещенной зоны граница сходимости ряда Эйри окружает область сходимости ряда по «падающим» волнам (белая область I на рис. 19а). Одновременно существует и область сходимости того же ряда в разрешенной зоне (область II). Вне этих областей ряд Эйри по «падающим» блоховским волнам (104) расходится. Однако при малой накачке лазерная генерация не наступает, так как все полюса передаточной функции лежат ниже вещественной оси частот, в окрестности полюса диэлектрической проницаемости ε_{gain} (рис. 19а).

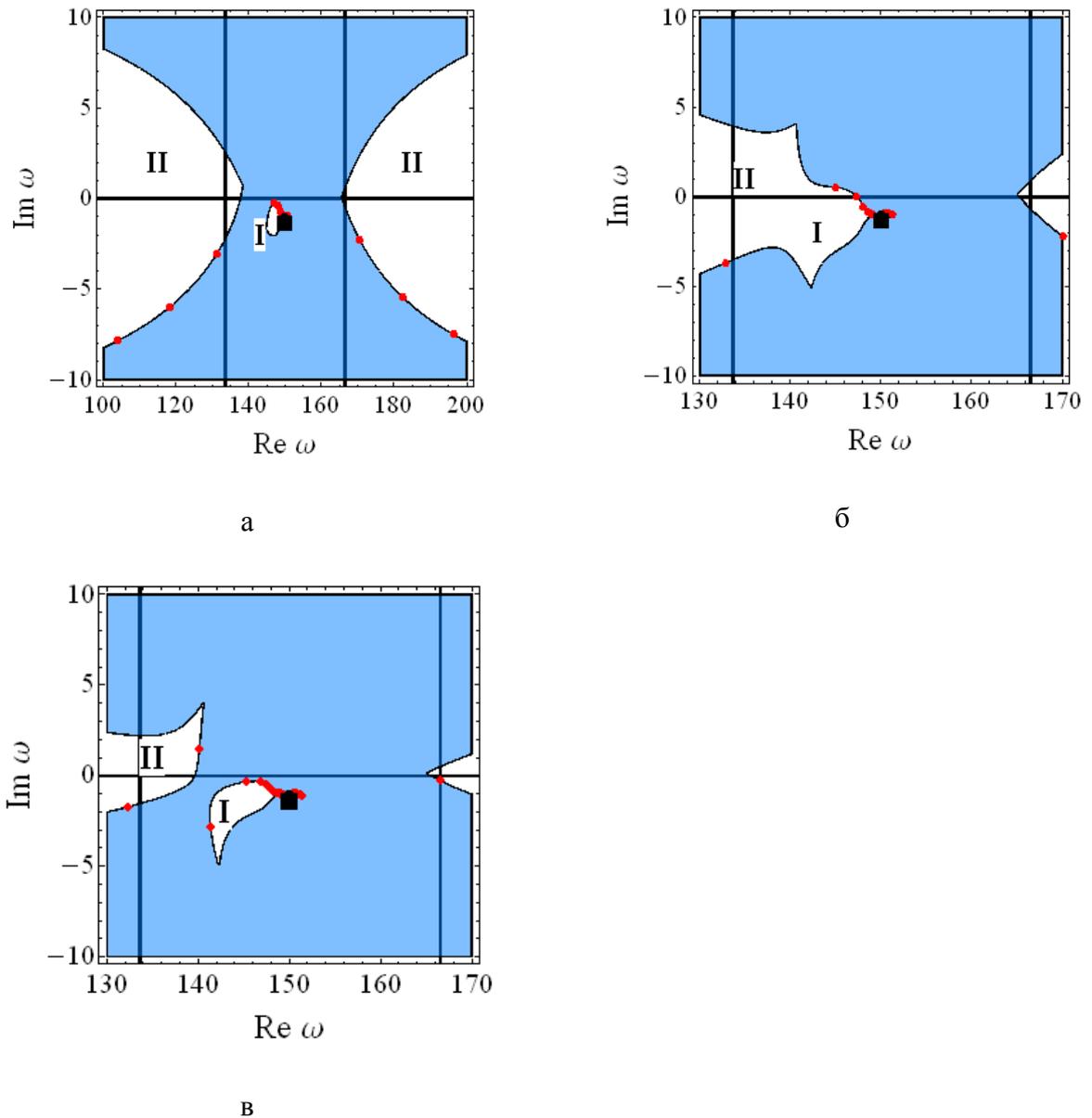


Рис. 19. Расположение полюсов передаточной функции фотонного кристалла в комплексной плоскости частот (отмечены точками) при различном числе ячеек ФК. Квадратиком отмечен полюс диэлектрической проницаемости. В не закрашенных областях сходится ряд Эйри по «падающим» волнам, закрашены области, где этот ряд расходится: (а) 10 ячеек ФК, (б) 12 ячеек ФК, (в) 14 ячеек ФК.

Область I увеличивается с ростом накачки (рис. 19б), так что ее граница рано или поздно пересекает действительную ось, и один из полюсов выходит в верхнюю полуплоскость. Возникает лазерная генерация на частоте из запрещенной зоны (рис. 19б). При этом указанная область сходимости может, как остаться обособленной, так и объединиться с аналогичной областью, существующей в разрешенной зоне (рис. 19б). Во втором случае возможен переход полюсов из запрещенной зоны в разрешенную. Однако

при увеличении числа слоев вновь происходит обособление областей (рис. 19в). При дальнейшем увеличении числа слоев полюса, находящиеся на границе области I, движутся вниз, а полюса, находящиеся на границе области II, движутся вверх. При большом числе слоев генерация возможна лишь на границе области II.

Переход полюса из зоны I в зону II приводит к немонотонной зависимости пороговой накачки от числа ячеек фотонного кристалла (рис. 18). Пока полюс находится на границе области I, рост числа ячеек приводит к росту α_{th} (круги на рис. 18). Но после перехода полюса в область II поведение меняется на обратное. При этом частота генерации монотонно смещается в сторону нижней границы запрещенной зоны.

Таким образом, когда линия усиления находится в области I, генерация возможна лишь при малом числе ячеек $N < N_{cr}$. Увеличение числа ячеек, в конце концов, приводит лишь к генерации на частотах области II, что возможно из-за конечной ширины линии усиления. При достаточно малой ширине линии усиления области I и II не объединяются. Тогда полюса из области I не могут перейти в область II, и рост числа слоев подавляет генерацию. Тем не менее, в разрешенной зоне с ростом числа слоев, из-за конечной ширины линии усиления, генерация рано или поздно наступает.

Заметим, что область II захватывает как разрешенную, так и запрещенную зону. Это связано с тем, что увеличение параметра усиления α меняет диэлектрическую проницаемость ε_{gain} (смотри (21)). Таким образом, возникновение лазерной генерации в той части области II, которая лежит в запрещенной зоне, можно интерпретировать как изменение зонной структуры фотонного кристалла. Действительно, когда мы меняем параметр усиления α , меняется не только мнимая, но и действительная часть $\varepsilon_{gain}(\alpha)$. Если рассмотреть вспомогательный фотонный кристалл, усиливающий слой в котором заменен на слой с диэлектрической проницаемостью $\text{Re} \varepsilon_{gain}(\alpha)$, то запрещенная зона этого вспомогательного фотонного кристалла оказывается уже, чем у исходного фотонного кристалла с $\alpha = 0$ (рис. 20). При этом область II целиком лежит в разрешенной зоне вспомогательного фотонного кристалла [77].

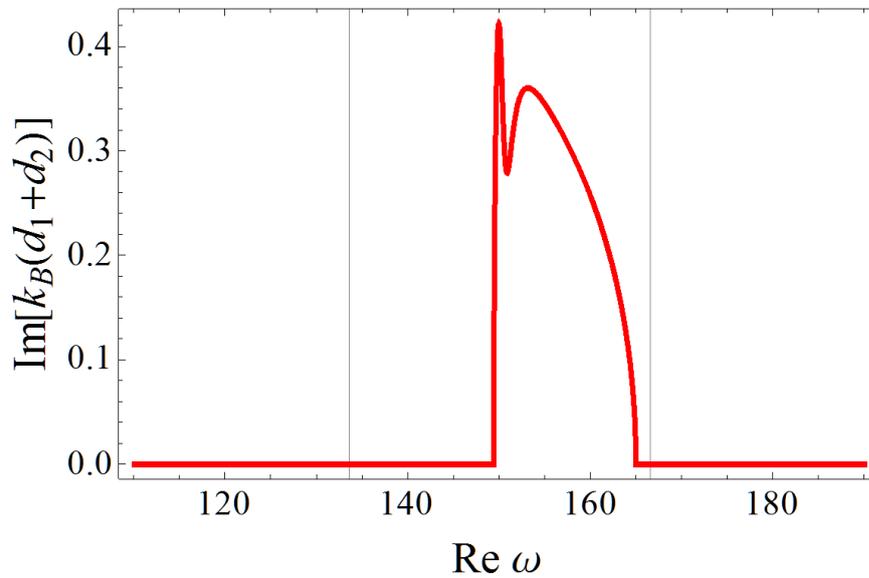


Рис. 20. Зависимость мнимой части k_B вспомогательного ФК от несущей частоты падающего цуга. Вертикальными линиями отмечены границы запрещенной зоны для ФК без усиления.

Таким образом, при $N < N_{th}(\alpha)$ в верхней полуплоскости всегда есть хотя бы один полюс передаточной функции, так что наблюдается лазерная генерация. При $N_{th} < N < N_{las}(\alpha)$ полюса передаточной функции могут заходить и выходить из верхней полуплоскости, при этом лазерная генерация то начинается, то прекращается. При $N_{las} < N < N_{cr}(\alpha)$ ряд Эйри по «падающим» волнам не сходится (кривая (106) касается действительной оси частот снизу), но полюсов в верхней полуплоскости нет, лазерная генерация не наблюдается. При $N > N_{cr}(\alpha)$ ряд Эйри по «падающим» волнам сходится (кривая (106) не касается действительной оси частот снизу).

Область II в которой лазерная генерация возможна только при $N > N_{cr}(\alpha)$ разумно назвать разрешенной зоной фотонного кристалла, содержащего усиливающую среду, а область I запрещенной зоной того же фотонного кристалла. Таким образом, граница между разрешенной и запрещенной зоной фотонного кристалла, содержащего усиливающую среду, определяется по смене зависимости порогового значения накачки $\alpha_{th}(N)$ от числа ячеек фотонного кристалла (сплошная горизонтальная линия на рис. 18).

3.5. Выводы

В разрешенной зоне фотонного кристалла распространение электромагнитных волн аналогично случаю распространения по однородному слою, содержащему усиливающую среду. При числе ячеек фотонного кристалла меньшего критического $N < N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам и метод Френеля (метод Т-матриц) дают одинаковый результат, при $N > N_{cr}$ расчет методом Т-матриц даёт конечный результат, а ряд Эйри по «падающим» волнам расходится. Однако, пока $N < N_{las}$ результаты, полученные по методу Френеля, остаются верными. При $N > N_{las}$ один из полюсов передаточной функции переходит в верхнюю полуплоскость комплексных частот, в системе начинается лазерная генерация. В результате линейное описание усиливающей среды становится не применимым. С ростом числа ячеек N пороговое значение накачки α_{th} , необходимое для начала лазерной генерации, уменьшается.

В запрещенной зоне фотонного кристалла при $N < N_{th}$ в верхней полуплоскости всегда есть хотя бы один полюс передаточной функции, так что наблюдается лазерная генерация. При $N_{th} < N < N_{las}$ полюса передаточной функции могут заходить и выходить из верхней полуплоскости, при этом лазерная генерация то начинается, то прекращается. При $N_{las} < N < N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам не сходится (кривая (106) касается действительной оси частот снизу), но полюсов в верхней полуплоскости нет, лазерная генерация не наблюдается. При $N > N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам сходится. Пороговое значение накачки α_{th} немонотонно зависит от числа ячеек. При малом числе ячеек α_{th} убывает с ростом числа ячеек, при числе ячеек порядка 5 убывание α_{th} сменяется ростом. Возникновение лазерной генерации на частотах из запрещенной зоны нуждается в пояснении. Дело в том, что в фотонном кристалле без усиления и без диссипации не существует собственных мод системы. Добавление в фотонный кристалл усиливающей среды приводит к изменению действительной части диэлектрической проницаемости $\text{Re} \varepsilon_{gain}(\alpha)$. Если рассмотреть вспомогательный фотонный кристалл, усиливающий слой в котором заменен на слой с диэлектрической проницаемостью $\text{Re} \varepsilon_{gain}(\alpha)$, то запрещенная зона этого вспомогательного фотонного кристалла оказывается уже, чем у исходного фотонного кристалла с $\alpha = 0$. При этом лазерная генерация возможна только на частотах из разрешенной зоны вспомогательного ФК. Поэтому возникновение лазерной генерации на частотах из запрещенной зоны можно

интерпретировать как изменение зонной структуры фотонного кристалла. Тем не менее, зависимость величины пороговой накачки α_{th} от числа ячеек принципиально отличается на частотах из разрешенной зоны реального фотонного и разрешенной зоны вспомогательного фотонного кристалла. В разрешенной зоне реального фотонного кристалла с ростом числа ячеек α_{th} всегда уменьшается, а в разрешенной зоне вспомогательного фотонного кристалла α_{th} может, как убывать, так и возрастать с ростом числа ячеек. Границу между разрешенной и запрещенной зоной реального фотонного кристалла, содержащего усиливающую среду, предлагается определить по смене зависимости порогового значения накачки $\alpha_{th}(N)$ от числа ячеек фотонного кристалла (сплошная горизонтальная линия на рис. 18).

Глава 4

Лазер с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле

4.1. Введение

Лазеры являются основными компонентами оптических схем, обеспечивающими генерацию когерентного излучения. Применения лазеров в системах оптической передачи информации требуют миниатюризации устройств, что делает традиционные лазеры непригодными для таких целей. Шагом в этом направлении являются лазеры с распределенной обратной связью, в которых роль резонатора играет фотонный кристалл с дефект-модой [78-81]. Развитием технологии лазеров с распределенной обратной связью являются поверхностно-излучающие лазеры с вертикальным резонатором [12].

Стандартный поверхностно-излучающий лазер с вертикальным резонатором имеет вид фотонного кристалла (брэгговского зеркала) с резонансной полостью [12,82-88], генерация в котором происходит в направлении, перпендикулярном поверхности слоев. Активную среду помещают в резонансную полость или в брэгговские зеркала.

В лазерах с вертикальным резонатором, благодаря малому размеру резонатора, легко реализуется одномодовый режим лазерной генерации [86,89]. При этом, благодаря высокой добротности вертикального резонатора, удается стабилизировать VCSEL относительно температурных флуктуаций. Основную чувствительность к ним проявляет линия усиления; если она много шире линии резонатора, то именно последняя определяет частоту лазерной генерации (затягивание частоты) [12,90,91]. Такая стабилизация частоты делает лазеры с вертикальным резонатором еще более привлекательными для практических применений.

Моды идеального VCSEL без анизотропии резонатора и усиливающей среды вырождены по поляризации излучения. Однако конкуренция мод приводит к тому, что в реальных VCSEL излучение линейно поляризовано, а направление поляризации определяется, например, малой клиновидностью слоев фотонного кристалла, которая неизбежно возникает при его изготовлении. Кроме того, нужного направления поляризации излучения VCSEL можно добиться, используя при его изготовлении анизотропную полость [92-94], или же осуществляя накачку через квантовые проволоки или анизотропные квантовые точки [12,95-97]. Поляризация излучения VCSEL чувствительна не только к анизотропии, но и к другим малым воздействиям, например, к

магнитооптическому взаимодействию. Последнее очень удобно с практической точки зрения, так как позволяет управлять генерацией лазера с помощью внешнего стационарного магнитного поля.

Лазеры во внешнем магнитном поле рассматривались довольно давно. В основном это были так называемые зеемановские лазеры, в которых магнитооптический эффект возникает в усиливающей среде [98,99]. Часто удобнее пространственно разделить усиливающую и магнитную среды, в таком случае лазер называется фарадеевским [100]. Особый интерес вызывает фарадеевский VCSEL, где, в случае накачки в виде квантовой ямы, был обнаружен переход к генерации эллиптической поляризации при включении внешнего магнитного поля [101,102].

В данной работе исследуются стационарные режимы генерации VCSEL, включающего анизотропные и гиротропные (магнитооптические) слои в случае накачки с линейной анизотропией. Такая накачка осуществляется двумя слоями абсолютно анизотропных квантовых проволок, один из которых создает только x -поляризацию, другой – только y -поляризацию. Показано, что при достаточно большой линейной анизотропии генерируется линейная поляризация; при малой анизотропии магнитооптическое взаимодействие приводит к генерации эллиптической поляризации. При условии, когда одна мода находится ниже, а другая – выше порога генерации, магнитооптическое взаимодействие может привести к полному подавлению генерации, т.е. лазер может быть выключен магнитным полем. Заметим, что данный эффект не возникает в магнитооптических лазерах на квантовых ямах [101-103], описываемых так называемой SFM моделью активной среды [104-107]. В соответствии с этой моделью, усиление мод в VCSEL происходит в результате взаимодействия с двумя системами носителей в квантовой яме, генерирующих соответственно правую и левую круговые поляризации. В нашем же случае две системы носителей взаимодействуют, соответственно, с x - и y - линейными компонентами поля.

4.2. Уравнения динамики лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле

В зависимости от взаимного расположения усиливающей и магнитооптической сред (зеемановский и фарадеевский лазеры), свойств усиливающей среды (анизотропия, времена релаксации) и значений параметров резонатора (анизотропия, гиротропия),

магнитооптические лазеры демонстрируют самое разнообразное поведение, включающее генерацию круговой, эллиптической или линейной поляризации на одной или многих частотах.

Рассмотрим частный случай фарадеевского лазера на основе фотонного кристалла с дефектом из магнитооптической среды (например, железо-иттриевый гранат). Одномерный фотонный кристалл представляет собой систему слоев, перпендикулярных оси z , диэлектрическая проницаемость которых предполагается анизотропной с осью анизотропии, параллельной оси x . В сочетании с гиротропией магнитооптического слоя, система в целом описывается тензором диэлектрической проницаемости вида

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & ig & 0 \\ -ig & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (107)$$

В качестве усиливающей среды возьмем два слоя квантовых проволок с взаимно-перпендикулярной ориентацией, параллельных осям x и y соответственно [108]. Между слоями квантовых проволок в резонаторной полости поместим магнитооптическую среду (рис. 21). Таким образом, рассматриваемый нами лазер является поверхностно-излучающим фарадеевским лазером (смотри раздел 4.1).

Для простоты, рассмотрим случай полной анизотропии, когда один слой квантовых проволок взаимодействует только с x -поляризованным электромагнитным полем, а другой – только с y -поляризованным. Данное приближение обосновано потому, что система квантовых проволок излучает преимущественно параллельное себе направление поляризации [108]. Этот эффект связывают как с влиянием анизотропии на зонную структуру [109,110], так и с электродинамическими свойствами квантовых проволок [111,112].

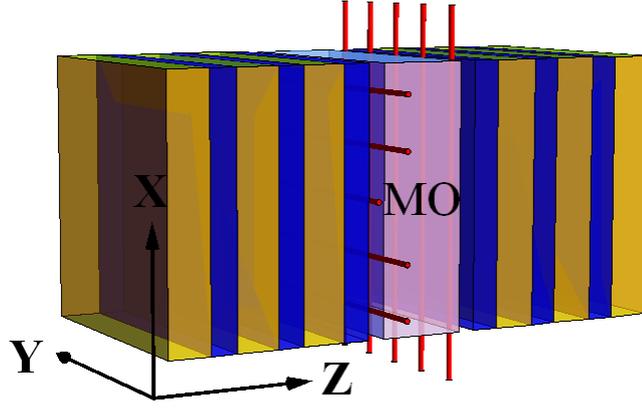


Рис. 21. Геометрия системы. Желто-синим цветом обозначены слои фотонных кристаллов, играющие роль брэгговских зеркал. В полости между фотонными кристаллами располагаются квантовые проволоки, а между ними – магнитооптическая среда.

В качестве динамических переменных лазера рассмотрим амплитуды x - и y -компонент электрического поля a_x , a_y , поляризацию x - и y - ориентированных квантовых проволок σ_x , σ_y и инверсию населенностей квантовых проволок n_x , n_y . Динамика генерации описывается системой уравнений (смотри раздел 4.7)

$$\frac{\partial a_x}{\partial \tau} + (1/Q_x + i\Delta_x / \omega_0) a_x + 4\pi \langle g \rangle a_y = -2\pi i \sigma_x \quad (108)$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial \tau} + (1/Q_y + i\Delta_y / \omega_0) a_y - 4\pi \langle g \rangle a_x = -2\pi i \sigma_y \quad (109)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau} + \sigma_x / (\omega_0 \tau_p) = i a_x n_x \quad (110)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \tau} + \sigma_y / (\omega_0 \tau_p) = i a_y n_y \quad (111)$$

$$\frac{\partial n_x}{\partial \tau} + (n_x - n_x^{(0)}) / (\omega_0 \tau_n) = i (a_x^* \sigma_x - a_x \sigma_x^*) \quad (112)$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial \tau} + (n_y - n_y^{(0)}) / (\omega_0 \tau_n) = i (a_y^* \sigma_y - a_y \sigma_y^*) \quad (113)$$

где $\tau = \omega_0 t$, τ_n и τ_σ – времена релаксации инверсной населенности и поляризации, и введены обозначения Q_x , Q_y для добротностей собственных мод резонатора в отсутствие

внешнего магнитного поля ($g = 0$), когда эти моды имеют линейные x - и y - поляризации. Аналогично, при $g = 0$ заданы отклонения собственных частот x - и y - поляризованных мод Δ_x, Δ_y от частоты перехода усиливающей среды ω_0 («отстройки»).

Заметим, что поляризация и собственные частоты мод меняются как за счет магнитооптического взаимодействия ($g \neq 0$), так и за счет наличия лазерной накачки. Эти эффекты учитываются системой уравнений (108)-(113).

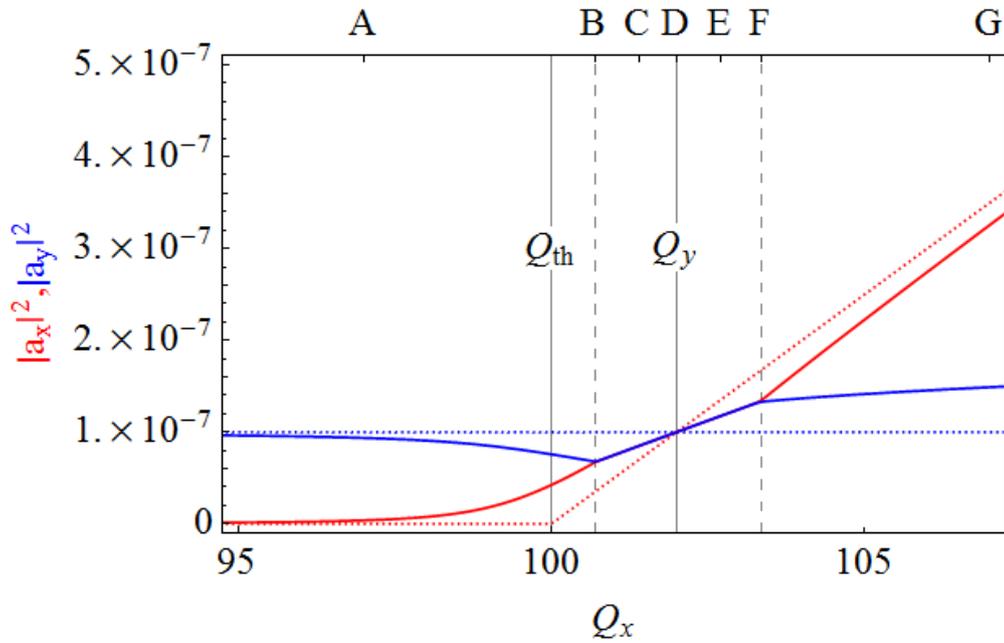
4.3. Стационарные режимы генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле

Режимы генерации лазера, описываемого системой уравнений (108)-(113) зависят от магнитооптической постоянной g и добротностей Q_x, Q_y . Для простоты считаем параметры накачки обеих систем квантовых проволок одинаковыми ($n_x^{(0)} = n_y^{(0)} = n_0$), а собственные частоты мод резонатора – равными частоте перехода в усиливающей среде ($\Delta_x = \Delta_y = 0$).

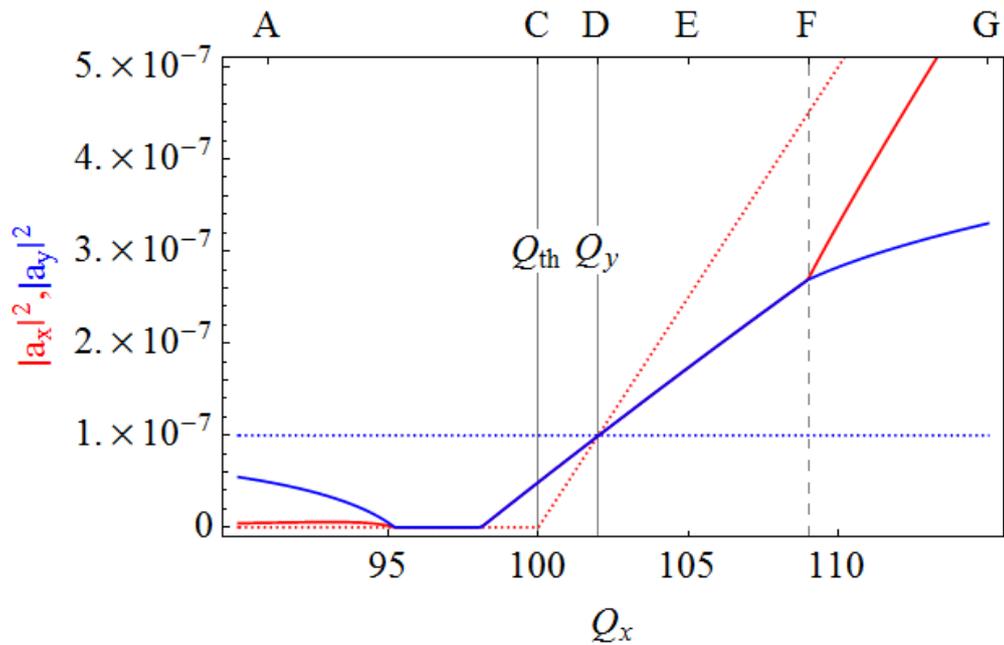
В отсутствие внешнего магнитного поля гиротропия отсутствует ($g = 0$), и моды с x - и y - линейной поляризацией возбуждаются независимо друг от друга соответствующими системами квантовых проволок (смотри рис. 21). Заметим, что порог лазерной генерации зависит от добротности. Поэтому, если мы зафиксируем для удобства анализа интенсивность накачки n_0 , то лазерная генерация будет появляться при переходе добротности через пороговое значение Q_{th} . Также зафиксируем добротность одной из линейно поляризованных мод (y - поляризованной) выше порогового значения генерации ($Q_y > Q_{th}$), и рассмотрим поведение системы в зависимости от Q_x . Благодаря взаимной независимости линейных мод, получим постоянную амплитуду генерации для y -поляризованной моды и пороговое поведение для x -поляризованной моды (рис. 22, пунктирные кривые).

В случае, когда $Q_x > Q_{th}$, поскольку разность фаз между независимыми модами может быть любой, излучение лазера эллиптически поляризовано. При наличии магнитооптического взаимодействия между линейно поляризованными модами лазера, x - и y - поляризованные компоненты электрического поля взаимно синхронизируются. В результате поляризация становится линейной, а направление поляризации определяется

соотношением амплитуд x - и y -поляризованных компонент. Соответствующая область параметров обозначена буквой «G» на рис. 22а, поляризация показана на рис. 22б. Заметим, что возможность генерации линейной поляризации при наличии магнитооптического взаимодействия, возникающая при достаточно сильной анизотропии, была известна и раньше в газовых лазерах [99].



a



б

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
						

В

Рис. 22. . Интенсивность генерации x - и y -компонент поля в зависимости от добротности Q_x , когда величина Q_y фиксирована на значении $1.02 \cdot Q_{th}$ (а) при слабом $g = 0.25 \cdot 10^{-5}$ и (б) сильном $g = 1.25 \cdot 10^{-5}$ магнитооптическом взаимодействии. Пунктиром показан случай без взаимодействия ($g = 0$). (в) таблица соответствия между латинскими буквами на графиках (а), (б) и видом поляризации излучения. Использованы следующие параметры:

$$\omega_0 \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}, \tau_n = 10^{-11} \text{ c}, \tau_\sigma = 10^{-13} \text{ c}, \text{ т.е. } \omega_0 \tau_n = 10^4, \omega_0 \tau_\sigma = 10^2.$$

В случае, когда добротности мод в отсутствие магнитного поля расположены по разные стороны от порога ($Q_x < Q_{th} < Q_y$), при включении магнитного поля появляется малая компонента поля с x - поляризацией. При этом разность фаз осцилляций x - и y -поляризованных компонент равна π . Поляризация в этом случае линейная, почти параллельная оси y (обозначено «А» на рис. 22а, в).

Переход между описанными режимами происходит в узкой области в окрестности точки $Q_x = Q_y$, где амплитуды осцилляций строго равны, а разность фаз меняется между π и 0 (рис. 22а). Это соответствует переходу между ортогональными линейными поляризациями через эллиптическую и круговую (смотри рисунок 22в, буквы соответствуют обозначениям на рис. 22а). Указанная область сильного взаимодействия мод в окрестности точки равенства их параметров увеличивается с увеличением магнитооптической константы, заходя даже в подпороговую область (рис. 22б). Как видно из рисунка, взаимодействие над- и подпороговой мод может привести как к «пробуждению» подпороговой моды, так и к полному подавлению генерации. Область сильного взаимодействия автоколебательных систем, известная как язык Арнольда, показана на рис. 23. Правая половина этой области соответствует генерации эллиптической поляризации (круговой при условии $Q_x = Q_y$), левая половина – подавлению генерации.

Интересно, что понижение добротности подпороговой моды приводит к переходу от режима, где лазер выключен, к режиму генерации надпороговой моды. С практической

же точки зрения более интересно, что выключение лазера можно произвести при помощи включения статического магнитного поля, что соответствует вертикальному смещению на рис. 23.

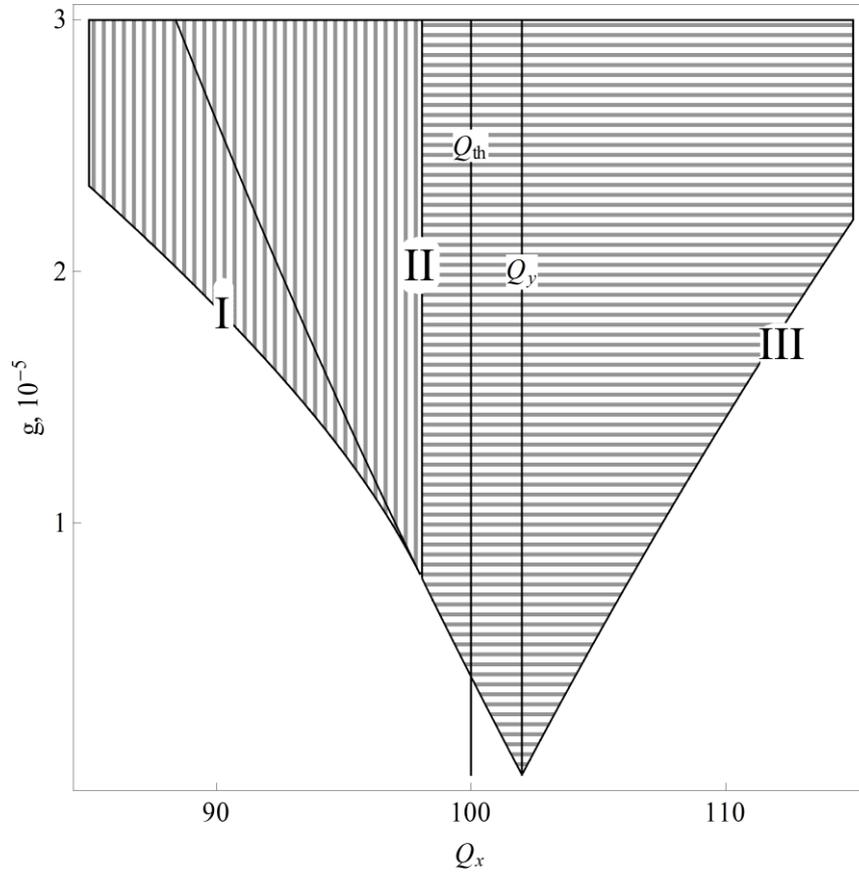


Рис. 23. Режимы генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле. Белым цветом отмечена область, где происходит лазерная генерация линейно поляризованного излучения (x- и y-поляризованные компоненты поля синхронизированы по фазе); горизонтальной штриховкой – область, где происходит лазерная генерация эллиптически поляризованного излучения с частотой, смещенной относительно частоты перехода активной среды (x- и y-поляризованные компоненты поля синхронизированы по амплитуде); вертикальной штриховкой – область подавления лазерной генерации.

Граница I, определяемая условием $(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - 1/Q_x)(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - 1/Q_y) = -(4\pi\langle g \rangle)^2$ (нарушение неравенства (136)), соответствует нарушению устойчивости нулевого решения при действительном собственном числе. Граница II может определяться либо обращением амплитуды стационарного решения в ноль (условие $\left(\frac{Q_x + Q_y}{Q_x Q_y}\right) = 8\pi\omega_0\tau_\sigma^{eff} n_0$, соответствующее нарушению неравенства (131)), либо нарушением устойчивости

нулевого решения при комплексном собственном числе (условие $\frac{Q_x + Q_y}{Q_x Q_y} > 4\pi\omega_0\tau_\sigma n_0$,

соответствующее нарушению неравенства (135)). Граница III определяется переходом

$|\cos(\varphi_y - \varphi_x)|$ через 1 (условие $\left| \left(\frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y} \right) \right| = 8\pi |g|$), соответствующее нарушению неравенства (130)).

4.4. Аналитическое описание стационарных режимов генерации лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле

Найдем аналитически условия перехода между режимами генерации, т.е. границы языка Арнольда. Для этого найдем стационарные решения системы (108)-(113). Очевидно, что нулевое решение ($a_x = a_y = \sigma_x = \sigma_y = 0$, $n_x = n_y = n_0$) является стационарным. Ненулевые стационарные решения находятся путем замены временных производных: $\partial / \partial \tau = i\delta\omega / \omega_0$ для a_x , a_y , σ_x , σ_y и $\partial / \partial \tau = 0$ для n_x , n_y . Рассмотрим случай отсутствия отстройки по частоте ($\Delta_x = \Delta_y = 0$), варьируя только добротности Q_x , Q_y

$$i(\delta\omega / \omega_0)a_x + (1/Q_x)a_x + 4\pi\langle g \rangle a_y = -2\pi i\sigma_x \quad (114)$$

$$i(\delta\omega / \omega_0)a_y + (1/Q_y)a_y - 4\pi\langle g \rangle a_x = -2\pi i\sigma_y \quad (115)$$

$$i(\delta\omega / \omega_0)\sigma_x + \sigma_x / (\omega_0\tau_\sigma) = ia_x n_x \quad (116)$$

$$i(\delta\omega / \omega_0)\sigma_y + \sigma_y / (\omega_0\tau_\sigma) = ia_y n_y \quad (117)$$

$$(n_x - n_0) / (\omega_0\tau_n) = i(a_x^* \sigma_x - a_x \sigma_x^*) \quad (118)$$

$$(n_y - n_0) / (\omega_0\tau_n) = i(a_y^* \sigma_y - a_y \sigma_y^*) \quad (119)$$

Для последовательного исключения переменных из системы (114)-(119) выполним следующие операции. Выразим из уравнений (116), (117) величины σ_x , σ_y и подставим результат в уравнения (118), (119). Затем выразим n_x , n_y и подставим результат в

уравнения (116), (117). Далее, получившиеся выражения подставим в (114), (115). В результате, после преобразований, получим систему уравнений на a_x , a_y

$$i(\delta\omega/\omega_0)a_x + a_x/Q_x + 4\pi\langle g \rangle a_y = \frac{2\pi\omega_0\tau_\sigma[1-i\delta\omega\tau_\sigma]a_x n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_x|^2} \quad (120)$$

$$i(\delta\omega/\omega_0)a_y + a_y/Q_y - 4\pi\langle g \rangle a_x = \frac{2\pi\omega_0\tau_\sigma[1-i\delta\omega\tau_\sigma]a_y n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_y|^2} \quad (121)$$

Представляя поле через модуль и фазу, $a_x = |a_x|\exp(i\varphi_x)$ и $a_y = |a_y|\exp(i\varphi_y)$, получим

$$Q_x^{-1} + 4\pi\langle g \rangle \left| \frac{a_y}{a_x} \right| \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \frac{2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_x|^2} \quad (122)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} + 4\pi\langle g \rangle \left| \frac{a_y}{a_x} \right| \sin(\varphi_y - \varphi_x) = -\frac{2\pi\omega_0\delta\omega\tau_\sigma^2 n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_x|^2} \quad (123)$$

$$Q_y^{-1} - 4\pi\langle g \rangle \left| \frac{a_x}{a_y} \right| \cos(\varphi_y - \varphi_x) = \frac{2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_y|^2} \quad (124)$$

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} - 4\pi\langle g \rangle \left| \frac{a_x}{a_y} \right| \sin(\varphi_x - \varphi_y) = -\frac{2\pi\omega_0\delta\omega\tau_\sigma^2 n_0}{1+(\delta\omega\tau_\sigma)^2 + 2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_y|^2} \quad (125)$$

Вблизи порога генерации амплитуда поля мала, так что слагаемыми $2\omega_0^2\tau_n\tau_\sigma|a_{x,y}|^2$ в уравнениях (122)-(125) можно пренебречь по сравнению с единицей. Вычитая (123) из (125), получим

$$4\pi\langle g \rangle \left(\left| \frac{a_y}{a_x} \right| - \left| \frac{a_x}{a_y} \right| \right) \sin(\varphi_y - \varphi_x) = 0. \quad (126)$$

Уравнение (126) имеет два решения:

1. $\sin(\varphi_y - \varphi_x) = 0$, что означает синфазные колебания x - и y - компонент электрического поля. Таким образом, излучение лазера является линейно поляризованным. Из (123), (125) также получаем, что $\delta\omega = 0$, т.е. генерация происходит на частоте перехода усиливающей среды.

2. $|a_x| = |a_y| = a$, т.е. колебания происходят с одинаковой амплитудой, но разной фазой, которая находится, при вычитании уравнения (124) из (122):

$$\cos(\varphi_y - \varphi_x) = \frac{1}{8\pi \langle g \rangle} \frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y}. \quad (127)$$

Амплитуда генерации находится из уравнений (122) и (124), но слагаемым $2\omega_0^2 \tau_n \tau_\sigma |a|^2$ пренебрегать теперь нельзя, поскольку именно оно отвечает за уменьшение инверсии населенностей полев и определяет амплитуду генерации

$$a = \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_0 \tau_n} \left(\frac{Q_x Q_y}{Q_x + Q_y} \right) n_0 - \frac{1}{2\omega_0^2 \tau_n \tau_\sigma^{eff}}}, \quad (128)$$

где величина $\tau_\sigma^{eff} = \tau_\sigma / (1 + \delta\omega^2 \tau_\sigma^2)$ введена с учетом отклонения $\delta\omega$ частоты генерации от частоты перехода, возникающего в рассматриваемом случае. Для того чтобы найти $\delta\omega$, исключим из уравнений (123), (125) величину $(\varphi_y - \varphi_x)$, воспользовавшись (127).

Пренебрегая слагаемыми, квадратичными по $|a_{x,y}|^2$ и $\delta\omega^2$, получим выражение

$$\delta\omega = \frac{4\pi\omega_0}{1 + 2\pi\omega_0^2 \tau_\sigma^2 n_0} \sqrt{1 - \frac{1}{64\pi^2 \langle g \rangle^2} \left(\frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y} \right)^2}. \quad (129)$$

Поскольку, в соответствии с уравнением (127), разность фаз $(\varphi_y - \varphi_x)$ не равна нулю, решение является эллиптически поляризованным, а при $Q_x = Q_y$ поляризация становится круговой.

Видно, что второе решение может существовать только при условиях

$$\left| \left(\frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y} \right) \right| < 8\pi \langle g \rangle, \quad (130)$$

$$\left(\frac{Q_x + Q_y}{Q_x Q_y} \right) < 8\pi\omega_0 \tau_\sigma^{eff} n_0. \quad (131)$$

следующих, соответственно, из (4.21) и (4.22).

Вне рассматриваемой здесь области параметров (при больших значениях $\langle g \rangle$ или большой анизотропии $(Q_x - Q_y)/Q_x$), кроме найденных нами решений, возможен случай, когда x - и y - поляризованные моды осциллируют с разными частотами.

Таким образом, возможно три стационарных режима работы рассматриваемого лазера:

1. нулевое решение $a_x = a_y = \sigma_x = \sigma_y = 0$ и $n_x = n_y = n_0$;
2. решение с линейной поляризацией при $\delta\omega = 0$;
3. решение с эллиптической поляризацией с $|a_x| = |a_y|$ и $\delta\omega \neq 0$, которое переходит в решение с круговой поляризацией при $Q_x = Q_y$.

Третье решение может существовать только при выполнении условий $8\pi|\langle g \rangle| \geq \left| \frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y} \right|$ и $\frac{Q_x + Q_y}{2Q_x Q_y} < 4\pi\omega_0\tau_\sigma^{\text{eff}} n_0$. Условие

$$8\pi|\langle g \rangle| = \left| \frac{Q_x - Q_y}{Q_x Q_y} \right|, \quad (132)$$

соответствует условию подавления лазерной генерации внешним магнитным полем.

4.5. Линейный анализ устойчивости

Для того чтобы определить, при каких параметрах системы реализуется каждое из решений, проанализируем их устойчивость. Для этого представим амплитуду поля как отклонение $\delta a_{x,y}$ от стационарного состояния $a_{x,y}^0$: $a_{x,y} = a_{x,y}^0 + \delta a_{x,y}$. Рассматривая нулевое решение в качестве стационарного, после исключения членов второго порядка по отклонениям от стационарного состояния, перепишем уравнения (120), (121) в виде

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_y \end{pmatrix} = \omega_0 \begin{pmatrix} 2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - 1/Q_x & -4\pi\langle g \rangle \\ 4\pi\langle g \rangle & 2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - 1/Q_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_y \end{pmatrix}. \quad (133)$$

Устойчивость определяется собственными значениями матрицы из правой части (133)

$$\lambda_{\pm} = \left(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - \frac{Q_x + Q_y}{2Q_x Q_y} \right) \pm \sqrt{\left(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 + \frac{Q_x - Q_y}{2Q_x Q_y} \right)^2 - (4\pi\langle g \rangle)^2}, \quad (134)$$

а именно, решение устойчиво, если действительные части обоих собственных значений отрицательны: $\text{Re}(\lambda_{\pm}) < 0$. Это условие принимает вид

$$\frac{Q_x + Q_y}{Q_x Q_y} > 4\pi\omega_0\tau_\sigma n_0, \quad (135)$$

если под корнем находится отрицательная величина: $\left(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 + \frac{Q_x - Q_y}{2Q_x Q_y}\right)^2 < (4\pi\langle g \rangle)^2$, и

$$\left(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - \frac{1}{Q_x}\right)\left(2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 - \frac{1}{Q_y}\right) > -(4\pi\langle g \rangle)^2 \quad (136)$$

в противоположном случае.

Для случая решения с эллиптической поляризацией анализ устойчивости проводится аналогично, но он не дает каких-либо новых параметров: область устойчивости решения с эллиптической поляризацией совпадает с областью существования решения (130), (131).

Границы областей, полученные при анализе стационарных решений и их устойчивости (смотри подпись к рисунку 23), совпадают с границами областей, полученными при численном моделировании системы уравнений (108)-(113).

Условие (132) показывает, что лазер может быть выключен магнитным полем, несмотря на чрезвычайно малые значения магнитооптической постоянной: при $Q_{x,y} \sim 100$ и $(Q_x - Q_y)/Q_{x,y} \sim 0.01$ получаем $\langle g \rangle \sim 10^{-5}$, т.е. вполне реальное значение.

4.6. Характерные времена включения/выключения лазерной генерации

С практической точки зрения особый интерес представляет возможность включения и выключения лазерной генерации. Характерные времена включения и выключения лазерной генерации определяются из линейного анализа устойчивости решений системы (120), (121).

Для реализации режима подавления лазерной генерации необходимо присутствие внешнего магнитного поля, причем при превышении магнитооптической постоянной

значения $4\pi \langle g \rangle > 2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 + \frac{Q_x - Q_y}{2Q_x Q_y}$ характерное время выключения лазерной генерации

не зависит от величины магнитного поля и задается формулой

$$t_{\text{выкл}} = \frac{1}{\omega_0} \frac{2Q_x Q_y}{4\pi\omega_0\tau_\sigma Q_x Q_y n_0 - (Q_x + Q_y)}. \quad (137)$$

Если уменьшить магнитооптическую постоянную до минимальной величины, при которой возможно выключение генерации, время выключения стремится к конечной величине. При реальных параметрах системы величина $t_{\text{выкл}}$ имеет значение порядка 10^{-10} сек.

Характерное время включения лазерной генерации определяется в отсутствие внешнего магнитного поля. Оно равно наибольшему из двух времен

$$t_+ = \frac{1}{\omega_0} \frac{Q_x}{2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 Q_x - 1}, \quad (138)$$

$$t_- = \frac{1}{\omega_0} \frac{Q_y}{2\pi\omega_0\tau_\sigma n_0 Q_y - 1}, \quad (139)$$

и также имеет значение порядка 10^{-10} сек.

Полученные оценки времен включения и выключения лазерной генерации, как правило, больше характерного времени изменения магнитооптической постоянной при включении/выключении магнитного поля и сравнимы со временами включения/выключения лазерной генерации при токовой модуляции оптического сигнала [12]. Поэтому предложенный магнитоуправляемый лазер является достаточно быстрым устройством, допускающим интеграцию в оптические схемы.

4.7. Вывод уравнений лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле

Рассмотрим одномерный резонатор, включающий гиротропные и анизотропные среды⁸. Координату вдоль волновода обозначим z , соответственно вектор электрического поля будет лежать в плоскости xu . Распределение электрического поля в резонаторе \mathbf{E} находится из первого уравнения Максвелла-Блоха (15)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{\hat{\varepsilon}(z)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}. \quad (140)$$

где $\hat{\varepsilon}(z)$ - тензор диэлектрической проницаемости. Поляризация активной среды является результатом усреднения отдельных дипольных моментов активных частиц по малому объему: $\mathbf{P}(z, t) = \mathbf{p}(t)\nu(z) = \langle \mathbf{d} \rangle \nu(z)$ (смотри раздел 1.1.1). Анизотропию и гиротропию среды будем рассматривать как возмущение, для этого представим $\hat{\varepsilon}(z)$ как сумму изотропной части $\varepsilon_0(z)\hat{I}$, где \hat{I} - единичная матрица и добавки $\delta\hat{\varepsilon}(z)$. В этом случае (140) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} + \frac{\delta\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}. \quad (141)$$

Считая $\delta\hat{\varepsilon}$ малой величиной, найдем поле в нулевом приближении, когда резонатор изотропен. Для этого, представим поле в резонаторе в виде суммы двух линейных поляризаций, тогда из (140) получим

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_x}{\partial t^2}, \quad (142)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_y}{\partial t^2}. \quad (143)$$

Правые части уравнений (142), (143) описывает взаимодействие поля с поляризацией активной среды $\mathbf{P} = \{P_x, P_y\}$. Обозначим частоту перехода в активной среде ω_0 , тогда

⁸ В случае лазера с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле, анизотропия связана со структурой резонатора (например, клиновидностью слоев фотонного кристалла), а гиротропия с влиянием внешнего магнитного поля на магнитооптический слой, помещенный в резонатор (см. раздел 4.2).

зависимость \mathbf{P} от времени можно представить как колебания с несущей частотой ω_0 и с медленно меняющейся во времени амплитудой

$$\mathbf{P}(z, t) = \boldsymbol{\sigma}(z, t) \cdot \exp(i\omega_0 t) \quad (144)$$

где $|\partial\boldsymbol{\sigma}/\partial t| \ll \omega_0 |\boldsymbol{\sigma}|$.

Выберем резонатор таким образом, чтобы одна из собственных частот невозмущенного резонатора ω_r была близка к ω_0 ($|\omega_r - \omega_0| \ll \omega_0$). В отсутствие накачки $\mathbf{P} = 0$ распределение поля E_0 в этой моде подчиняется уравнению

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} + \varepsilon_0(z) \frac{\omega_r^2}{c^2} E_0 = 0 \quad (145)$$

Благодаря близости частот ω_0 и ω_r мы можем использовать одномодовое приближение [22-26]. Представим поле в виде произведения функции, зависящей от координат, и функции, зависящей от времени, т.е. запишем решение системы уравнений (142), (143) в виде

$$\mathbf{E}^{(0)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{W}} \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} E_0(z) \exp(-i\omega_0 t) \quad (146)$$

где введен нормировочный множитель $W = \frac{\omega_0}{8\pi c} \int \varepsilon_0(z) E^2 dz$, и $a_{x,y}(t)$ представляют собой медленные амплитуды x - и y -компонент поля. В приближении медленных амплитуд в уравнениях на поле пренебрегают слагаемыми $\ddot{a}_{x,y}(t)$. Заметим, что $\mathbf{E}^{(0)}(z, t)$ является нулевым приближением по анизотропии и гиротропии уравнения (140).

При выводе уравнений на $a_{x,y}(t)$ учтем возмущение первого порядка по анизотропии и гиротропии - $\delta\hat{\varepsilon}$. Для этого введем неизвестные функции $\delta E_x(z)$, $\delta E_y(z)$

$$\mathbf{E}^{(1)}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{W}} \left\{ \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \end{pmatrix} E_0(z) + \begin{pmatrix} a_x(t) \delta E_x(z) \\ a_y(t) \delta E_y(z) \end{pmatrix} \right\} \exp(-i\omega_0 t) \quad (147)$$

Для упрощения изложения произведем вывод уравнений на $a_{x,y}(t)$ в два этапа. Сначала выведем эти уравнения, используя распределение поля в нулевом приближении (142), (143). Затем покажем, что учет поправок первого порядка $\delta E_x(z)$, $\delta E_y(z)$ к распределению поля приводит к добавлению членов, пропорциональных произведению параметра малости теории возмущений $\delta\hat{\varepsilon}$ на параметр малости одномодового

приближения $\delta\omega = \omega_r - \omega_0$. В силу малости $\delta\omega$ членами порядка $\delta\hat{\varepsilon} \cdot \delta\omega$ мы будем пренебрегать. В результате (147) сводится к (146).

Получим уравнение на временные амплитуды, для чего умножим обе части уравнения (140) на $E_0 \mathbf{e}_x$, и вычтем из полученного уравнения уравнение (145), умноженное на E_x , и затем обе части полученного уравнения проинтегрируем по z . В полученное уравнение в качестве \mathbf{E} подставим $\mathbf{E}^{(0)}$ в виде (146). В результате получаем выражение

$$\int \left[E_0 \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x^{(0)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 E_0}{\partial z^2} \mathcal{E}_x^{(0)} \right] dz + \frac{2i\omega_0 \dot{a}_x}{c^2} \sqrt{W} \exp(-i\omega_0 t) + \frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{c^2} a_x \sqrt{W} \exp(-i\omega_0 t) + 8\pi \frac{\omega_0^2}{c^2} \sqrt{W} (\langle \delta\varepsilon_x \rangle a_x + i \langle g \rangle a_y) \exp(-i\omega_0 t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int E_0 (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_x) dz, \quad (148)$$

где $\langle \delta\varepsilon_x \rangle = \int \delta\varepsilon_{xx} E^2 dz / \int \varepsilon_0 E^2 dz$, $i \langle g \rangle = \int \delta\varepsilon_{xy} E^2 dz / \int \varepsilon_0 E^2 dz$ и \mathbf{e}_x , \mathbf{e}_y - единичные вектора вдоль оси x и y . В уравнении (148) отброшена величина, пропорциональная $\dot{a}_x \delta\hat{\varepsilon}$, т.е. произведение параметров малости теории возмущений и одномодового приближения (точнее, приближения медленных амплитуд). Хотя эти параметры малости независимы и один может быть много больше другого, существенным является именно больший из них, и пренебрежение квадратичными величинами является обоснованным.

Интеграл в (148), содержащий выражение в квадратных скобках, сводится к поверхностному интегралу (в рассматриваемом одномерном случае – к значениям функции на границах резонатора) и в итоге дает вклад в добротность, обусловленный выходом излучения через стенки резонатора [24]. В результате получаем

$$\dot{a}_x + (\omega_0 / Q_x + i\Delta_x) a_x + 4\pi\omega_0 \langle g \rangle a_y = -2\pi i \omega_0 p_x, \quad (149)$$

и аналогично

$$\dot{a}_y + (\omega_0 / Q_y + i\Delta_y) a_y - 4\pi\omega_0 \langle g \rangle a_x = -2\pi i \omega_0 p_y. \quad (150)$$

Здесь введены обозначения для выражения, возникающего в правых частях:

$$p_{x,y} \exp(-i\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{W}c} \int E (\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{x,y}) dz, \quad (151)$$

а также для отстройки по частоте

$$\Delta_{x,y} = \omega_r - \omega_0 - 4\pi\omega_0 \langle \delta\varepsilon'_{x,y} \rangle. \quad (152)$$

Таким образом, вещественная часть анизотропии $\delta\varepsilon'_{x,y}$ приводит к смещению частот двух мод резонатора от частоты перехода. Мнимая часть, $\delta\varepsilon''_{x,y}$, вносит вклад в потери ($\omega_0 / Q_{x,y}$), наряду с потерями на выход поля из резонатора. Потери для x - и y -компонент могут быть различны (анизотропия потерь), например, из-за клиновидности слоев. Заметим, что для нас существенна даже малая анизотропия, порядка магнитооптического фактора.

Докажем теперь, что для записи первого приближения теории возмущений для решения временного уравнения (140) достаточно использовать выражение для поля в нулевом приближении (146). Для этого учтем поправки к полю в первом приближении теории возмущений (147).

Снова умножим обе части уравнения (140) на $E_0 \mathbf{e}_x$, и вычтем из полученного уравнения уравнение (145), умноженное на E_x , и затем обе части полученного уравнения проинтегрируем по z , но теперь в качестве \mathbf{E} подставим $\mathbf{E}^{(1)}$ в виде (147). При добавлении $\delta E_x(z)$, $\delta E_y(z)$ в первом слагаемом под интегралом появится выражение

$$a_x(t) \frac{\varepsilon_0}{c^2} \omega_0^2 E_0 \delta E_x(z) / \sqrt{W}, \quad \text{а во втором слагаемом выражение} \\ -\varepsilon_0(z) \frac{\omega_r^2}{c^2} a_x(t) E_0 \cdot \delta E_x(z) / \sqrt{W}. \quad \text{В результате получим } a_x(t) \int \left(\frac{\omega_0^2 - \omega_r^2}{c^2} \varepsilon_0 E_0 \right) \delta E_x dz / \sqrt{W}.$$

Как отстройка по частоте $\omega_0^2 - \omega_r^2$, так и изменение поля δE_x являются малыми величинами. Произведением малых величин пренебрежем по сравнению с членами, пропорциональными только одной из них. Это обосновывает использование поля в виде (146) для вывода уравнений первого порядка для амплитуды поля.

Перейдем к выводу уравнения на поляризацию. В общем случае, динамика поляризации описывается уравнением [22-26]

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + (1/\tau_p + i\omega_0) \mathbf{P} = \frac{i}{\hbar} n \cdot \mathbf{d}(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}). \quad (153)$$

Здесь $n(z, t)$ – инверсия населенностей активной среды (усредненная по малому объему, как это выше сделано для поляризации), τ_p – время релаксации поляризации, \mathbf{d} – векторный недиагональный матричный элемент дипольного момента. Для того чтобы получить уравнение на амплитуды поляризаций, определенной в соответствии с (151), умножим уравнение (153) на $E \mathbf{e}_x$ и проинтегрируем по z . В результате получим

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{p_x}{\tau_p} = \frac{i\omega_0}{\sqrt{W}\hbar c} \int n \cdot (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_x) (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}) dz. \quad (154)$$

Далее, раскладывая поле по модам (146) в правой части и вводя новые переменные

$$n_{\alpha\beta} = \frac{\omega_0}{c} \frac{1}{W\hbar\omega_0} \int n \cdot (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\beta) dz, \quad (155)$$

где индексы α и β принимают значения x, y , получим уравнение

$$\frac{\partial p_x}{\partial t} + \frac{p_x}{\tau_p} = i\omega_0 (n_{xx} a_x + n_{xy} a_y), \quad (156)$$

и аналогично

$$\frac{\partial p_y}{\partial t} + \frac{p_y}{\tau_p} = i\omega_0 (n_{yx} a_x + n_{yy} a_y), \quad (157)$$

Уравнения на инверсию населенностей получаются из уравнения [22-26]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{(n - n_0)}{\tau_n} = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{E}^* \mathbf{P} - \mathbf{E} \mathbf{P}^*), \quad (158)$$

Для того чтобы получить уравнение на величины $n_{\alpha\beta}$, определенные в соответствии с выражением (155), умножим (158) на $(\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\beta)$ и проинтегрируем по z

$$\frac{\partial n_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{(n_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta}^{(0)})}{\tau_n} = \frac{i}{W\hbar^2 c} \int (\mathbf{E}^* \mathbf{P} - \mathbf{E} \mathbf{P}^*) (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\beta) dz, \quad (159)$$

Правую часть (159) преобразуем, подставляя электрическое поле в виде разложения $E(z, t) = a_\gamma(t) \mathbf{e}_\gamma E(z) \exp(-i\omega_0 t) / \sqrt{W}$, где γ принимает значения x, y , и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование

$$\frac{\partial n_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{(n_{\alpha\beta} - n_{\alpha\beta}^{(0)})}{\tau_n} = \frac{i}{W^{3/2} \hbar^2 c} \int (a_\gamma^* \mathbf{P} - a_\gamma \mathbf{P}^*) \cdot \mathbf{e}_\gamma E (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\alpha) (\mathbf{d} \cdot E \mathbf{e}_\beta) dz, \quad (160)$$

Таким образом, инверсия населенностей описывается тремя переменными: n_{xx} , n_{yy} , n_{xy} (по определению, $n_{yx} = n_{xy}$).

Далее, рассмотрим случай, когда накачка осуществляется через два слоя квантовых проволок. В одном слое, расположенном в точке $z = z_x$, проволоки ориентированы вдоль оси x , в другом, расположенном в точке $z = z_y$, вдоль оси y . Накачка x - и y -поляризованных мод в этом случае происходит независимо. Действительно, в этом случае

поляризация сконцентрирована в указанных двух слоях: $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{e}_{x,y}) \sim \delta(z - z_{x,y})$, так что интеграл в уравнении (154) исчезает

$$p_{x,y} \exp(-i\omega_0 t) = \frac{\omega_0}{\sqrt{W}c} E(z_{x,y}) (\mathbf{P}(z_{x,y}) \cdot \mathbf{e}_{x,y}). \quad (161)$$

Аналогичная зависимость характерна и для инверсной населенности n , так что инверсия населенностей теперь задается двумя величинами

$$n_{xx} = \frac{1}{W\hbar c} n(z_x) d_x^2 E^2(z_x), \quad (162)$$

$$n_{yy} = \frac{1}{W\hbar c} n(z_y) d_y^2 E^2(z_y), \quad (163)$$

тогда как третья величина $n_{xy} \equiv 0$ потому, что произведение $(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_x)(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} \mathbf{e}_y) = 0$ в любой точке пространства. В результате уравнения (160) преобразуется к виду

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial t} + \frac{(n_{xx} - n_{xx}^{(0)})}{\tau_n} = i\omega_0 \frac{a_x^* p_x - a_x p_x^*}{w_x}, \quad (164)$$

$$\frac{\partial n_{yy}}{\partial t} + \frac{(n_{yy} - n_{yy}^{(0)})}{\tau_n} = i\omega_0 \frac{a_y^* p_y - a_y p_y^*}{w_y}. \quad (165)$$

Здесь $w_{x,y} = W(\hbar\omega_0)^2 / (d_{x,y} E(z_{x,y}))^2$ коэффициенты взаимодействия, имеющие размерность энергии. Заметим, что индекс γ в (4.54) пробегает оба значения x, y , однако слагаемое с $\gamma = y$ в уравнении на n_{xx} исчезает, т.к. оно пропорционально $\delta(z - z_y)$, но при $z = z_y$ $n_{xx} = 0$.

Примем $\xi = \sqrt{(w_x + w_y)/2}$ за единицу энергии и поляризации. Тогда, вводя обозначения $a_{x,y} = e_{x,y} / \xi$, $\sigma_{x,y} = p_{x,y} / \xi$ и изменяя единицу отсчета времени, $\tau = \omega_0 t$, перепишем уравнения (149), (150); (156), (157) и (164). (165) в виде

$$\frac{\partial a_x}{\partial \tau} + (1/Q_x + i\Delta_x / \omega_0) a_x + 4\pi \langle g \rangle a_y = -2\pi i \sigma_x \quad (166)$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial \tau} + (1/Q_y + i\Delta_y / \omega_0) a_y - 4\pi \langle g \rangle a_x = -2\pi i \sigma_y \quad (167)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \tau} + \frac{\sigma_x}{\omega_0 \tau_p} = i(n_{xx} a_x + n_{xy} a_y) \quad (168)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial \tau} + \frac{\sigma_y}{\omega_0 \tau_p} = i(n_{yx} a_x + n_{yy} a_y) \quad (169)$$

$$\frac{\partial n_{xx}}{\partial \tau} + \frac{(n_{xx} - n_{xx}^{(0)})}{\omega_0 \tau_n} = i \frac{w_x + w_y}{2w_x} (a_x^* \sigma_x - a_x \sigma_x^*) \quad (170)$$

$$\frac{\partial n_{yy}}{\partial \tau} + \frac{(n_{yy} - n_{yy}^{(0)})}{\omega_0 \tau_n} = i \frac{w_x + w_y}{2w_y} (a_y^* \sigma_y - a_y \sigma_y^*) \quad (171)$$

Переобозначая $\sqrt{\frac{w_x + w_y}{2w_y}} a_{x,y}$ и $\sqrt{\frac{w_x + w_y}{2w_y}} \sigma_{x,y}$ за новые амплитуды поля $a_{x,y}$ и

поляризации $\sigma_{x,y}$, и упрощая обозначения, $n_x \equiv n_{xx}$, $n_y \equiv n_{yy}$, получим систему уравнений (108)-(113).

4.8. Выводы

Рассмотрен магнитоуправляемый поверхностно-излучающий лазер с вертикальным резонатором (MO VCSEL). Показано, что в зависимости от величины внешнего магнитного поля возможны три режима работы лазера: отсутствие генерации для обеих линейных поляризаций, стационарная генерация с эллиптической поляризацией на смещенной частоте (относительно частоты резонатора) и стационарная генерация с линейной поляризацией на частоте, равной частоте резонатора. При изменении величины внешнего магнитного поля, можно переходить от одного режима к другому.

Предложено использовать магнитоуправляемый поверхностно-излучающий лазер с вертикальным резонатором (MO VCSEL) в качестве магнито-переключаемого источника когерентного излучения в оптических схемах, для чего определено время включения/выключения лазера. Полученные значения времени переключения имеют порядок 10^{-10} сек. Таким образом, предложенный магнитоуправляемый лазер является достаточно компактным и быстрым устройством, допускающим интеграцию в оптические схемы.

Глава 5

Фазированная решетка спазеров

5.1. Введение

Современные микросхемы производят вычисления при помощи электрических сигналов, в тоже время для быстрой и надежной передачи данных на большие расстояния используют оптоволоконные линии. Таким образом, для того, чтобы передать информацию от одного "компьютера"⁹ к другому необходимо преобразовать электрический сигнал в оптический, передать его по оптоволоконной линии, а затем преобразовать обратно оптический сигнал в электрический.

В настоящее время для конвертации электрического сигнала в оптический и обратно в основном используют поверхностно-излучающие лазеры (VCSEL). Такие лазеры представляют собой фотонный кристалл с резонансной полостью, в которую помещается усиливающая среда. Лазерная генерация поверхностно-излучающем лазере развивается в направлении перпендикулярном поверхности фотонного кристалла. VCSEL имеют существенные преимущества по сравнению с другими типами лазеров:

во-первых, поверхность, с которой происходит лазерной излучение, может быть сделана центрально-симметричной и существенно большей длины волны, что позволяет добиться узкой и симметричной диаграммы направленности испускаемого излучения. В свою очередь узкая и симметричная диаграмма направленности необходима для эффективного введения оптического сигнала в оптоволокно.

во-вторых, благодаря планарной технологии изготовления VCSEL, тестирование изготавливаемых лазеров можно проводить прямо на подложке, на которой они производятся, что существенно снижает их себестоимость при промышленном изготовлении.

в-третьих, использование в качестве материалов для слоев фотонного кристалла *GaAs* и *AlAs* позволяет добиться высокого контраста коэффициентов преломления, благодаря чему удастся создать высокодобротный резонатор, используя всего несколько

⁹Передачу данных по оптоволокну осуществляют не только между разными компьютерами, но и между отдельными процессорами внутри современных суперкомпьютеров.

периодов фотонного кристалла. В свою очередь это необходимо для эффективного охлаждения усиливающей среды.

К сожалению, особенности конструкции поверхностно-излучающего лазера накладывают фундаментальные ограничения на возможную скорость модуляции оптического сигнала. Показано, что при амплитудной модуляции сигнала, которая используется для передачи сигналов по оптоволокну, максимальная скорость передачи данных VCSEL ограничена $200 \text{ Гб} \cdot \text{сек}^{-1}$. При этом в настоящее время уже существуют VCSEL со скоростью модуляции передаваемого сигнала в $40 \text{ Гб} \cdot \text{сек}^{-1}$. Таким образом, дальнейшее развитие поверхностно-излучающих лазеров наталкивается на фундаментальные проблемы, для преодоления которых необходимо использовать принципиально новые конструктивные решения.

В качестве альтернативы лазерам с резонаторами на основе фотонных кристаллов в последние годы рассматривают источники когерентного излучения на основе композитных материалов, включающих плазмонные наноструктуры [4-10]. Ключевым элементом таких структур является генератор когерентных плазмонов - спазер (нанолазер), теоретически предложенный в 2003 году [9,113] и впервые экспериментально реализованный в 2009 году [114,115]. Схематически спазер представляет собой квантово-плазмонный прибор, состоящий из инверсно возбужденных квантовых точек, атомов или молекул, взаимодействующих с плазмонными наночастицами [9,113] или с плазмонными волноводами [114,115]. Принцип действия спазера аналогичен действию лазера – это усиление, обеспеченное инверсной населенностью, в сочетании с обратной связью, создаваемой индуцированным излучением квантовой системы. Условия для индуцированного излучения инверсной квантовой системы в поле, ранее высвеченной этой же системой, волны обеспечивается помещением квантовой системы в резонатор, локализирующий генерируемую моду. В спазере роль излучаемого поля играют поверхностные плазмоны наночастицы, локализация которых на наночастице создает условия положительной обратной связи. Другими словами, в спазере происходит генерация и усиление ближних полей наночастицы. Усиление поверхностных плазмонов происходит за счет безызлучательной передачи энергии [116] от квантовых точек. В основе процесса лежит диполь-дипольное или любое иное ближнепольное взаимодействие квантовой точки и плазмонной наночастицы. Этот механизм можно рассматривать как основной потому, что вероятность безрадиационного возбуждения плазмона в $(k \cdot r_{НЧ-КТ})^{-3}$ раз больше радиационного высвечивания фотона, где $r_{НЧ-КТ} \ll \lambda$

– расстояние между центрами наночастицы и квантовой точки и $k = 2\pi/\lambda$ (λ – длина волны в вакууме). Основными источниками потерь в спазере (нанолазере) являются джоулевы потери $I_{дж}$ в наночастице и потери на излучение дальних электромагнитных полей $I_{изл}$. Джоулевы потери в наночастице увеличиваются пропорционально объему наночастицы $I_{дж} \sim V_{НЧ} \sim r_{НЧ}^3$, а потери на излучение пропорционально квадрату объема наночастицы $I_{изл} \sim V_{НЧ}^2 \sim r_{НЧ}^6$, поэтому при больших размерах наночастицы ($r_{НЧ} \geq 50 \text{ нм}$) доминирующими являются потери на излучение, а при малых размерах наночастицы ($r_{НЧ} \leq 20 \text{ нм}$) джоулевы потери. Обычно спазерами называют генераторы когерентных плазмонов, в которых преобладают джоулевы потери ($r_{НЧ} \leq 20 \text{ нм}$), а нанолазерами генераторы когерентных дальних полей ($r_{НЧ} \geq 50 \text{ нм}$).

Основными недостатками спазеров (нанолазеров), препятствующих использованию их в качестве источников дальних электромагнитных полей, являются низкая эффективность преобразования энергии токовой накачки в энергию излучения (особенно при малых размерах наночастицы ($r_{НЧ} \leq 20 \text{ нм}$)), и не направленность излучения отдельного спазера. Последнее связано с тем, что размеры спазера много меньше длины волны испускаемого излучения из-за чего диаграмма направленности отдельного спазера совпадает с диаграммой направленности единичного диполя.

Для создания направленных источников когерентного излучения на основе спазеров было предложено использовать двумерные массивы спазеров. Действительно, если колебания электрического тока на всех спазерах в массиве будут происходить синхронизовано, то излучение от такой системы будет направленным.

К настоящему моменту было предложено несколько способов добиться синхронизации колебаний в двумерных массивах спазеров [4-10].

В первом способе форму наночастицы выбирают таким образом, чтобы в синхронизованном режиме интенсивность излучения от массива спазеров была минимальна [4,5] (Рис. 24). В результате синхронизованная мода в такой системе имеет наименьшую пороговую накачку, необходимую для начала лазерной генерации. Так как в многомодовых лазерах (которым является любая система нескольких спазеров) в результате конкуренции мод обычно выживает та мода, которая имеет наименьший порог по накачке, то в системе устанавливается синхронизованное распределение токов. Данный способ имеет два существенных недостатка: во-первых, необходимо использовать

наночастицы сложной формы (Рис. 24а); во-вторых, механизм синхронизации приводит к минимизации интенсивности излучения системы, что не позволяет создать на её основе мощный источник когерентного излучения.

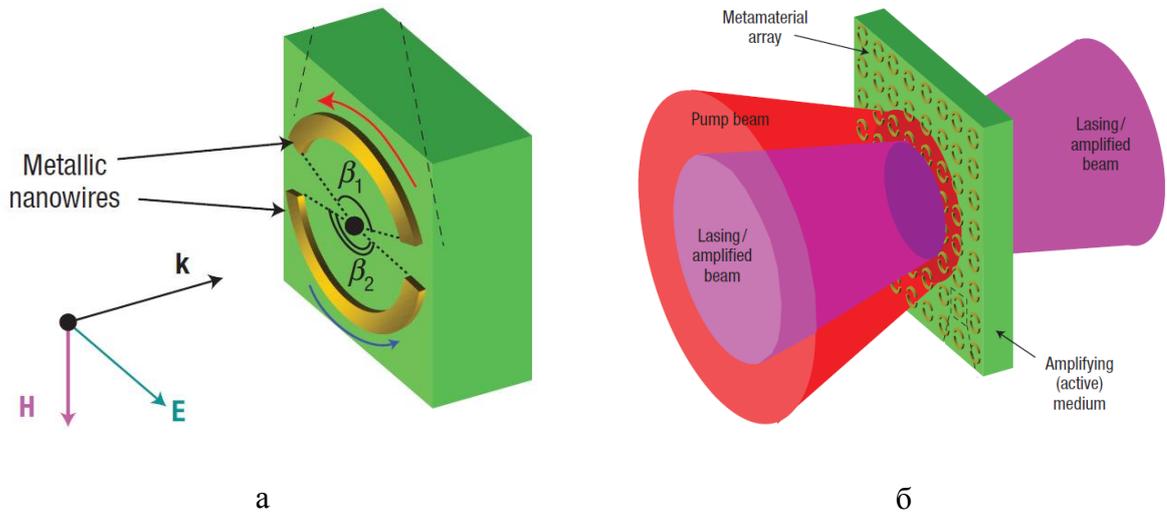


Рис. 24. (а) Схематическое изображение формы наночастицы из работы [4,5], (б) схематическое изображение массива наночастиц из работы [4,5].

Синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных наночастиц возможна также в массиве спазеров в котором наночастицы расположены в виде решетки с периодом равным длине волны [6-8]. Благодаря такому расположению излучаемые наночастицами электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль массива, всегда складываются в фазе и синхронизируют колебания на отдельных наночастицах. Описанный механизм синхронизации был экспериментально реализован в работе [105] (Рис. 25). Основным недостатком данного способа синхронизации является то, что он не позволяет сделать расстояние между наночастицами меньше, чем длина волны.

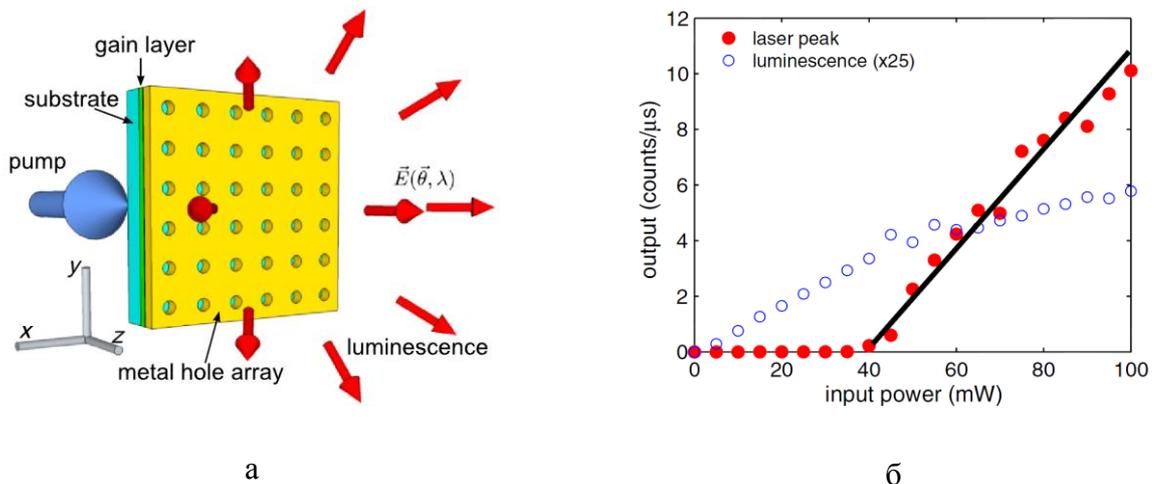


Рис. 25. (а) Принципиальная схема синхронизации колебаний в системе спазеров при расположении плазмонных наночастиц на расстоянии порядка длины волны. (б) Интенсивность излучения двумерным массивом спазеров от интенсивности накачки (красные сплошные точки), интенсивность люминесценции от интенсивности накачки умноженная в 25 раз (синие кружки). Рисунки взяты из статьи [105].

В нашей работе [117,118] был предложен способ синхронизовать колебания дипольных моментов отдельных наночастиц в двумерной периодической решетке лишенный всех выше перечисленных недостатков. Для такой синхронизации необходимо, чтобы в решетке спазеров наночастица каждого спазера взаимодействовала не только со своей квантовой точкой, но и с квантовыми точками соседних спазеров. Оказывается, что благодаря такому взаимодействию в системе спазеров возникает взаимная синхронизация колебаний спазеров, которая сохраняется при учете радиационных потерь. Мощность излучения от решетки синхронизованных спазеров в единицу телесного угла в направлении, перпендикулярном плоскости массива, растет как квадрат числа спазеров N^2 . Указанный рост обусловлен сверхизлучением [13] при малых размерах системы ($\ll \lambda$) и сужением диаграммы направленности при больших размерах. В результате, описанная система становится эффективным источником направленного когерентного излучения.

5.2. Система уравнений для фазированной решетки спазеров

В качестве модели спазера рассмотрим инвертированную квантовую систему (атом, молекула, квантовая точка), расположенную вблизи металлических эллипсоидальных наночастиц. Для простоты предположим, что квантовая система является двухуровневой системой. Эллипсоидальные наночастицы, имеющие дипольные плазмонные моды, играют роль резонаторов (рис. 26). Благодаря не сферичности наночастиц собственные частоты по-разному ориентированных дипольных мод отличаются. Для простоты будем считать, что частота моды с дипольным моментом, ориентированным вдоль главной оси эллипсоида, совпадает с частотой перехода квантовой точки, а остальные дипольные моды имеют частоты сильно отличающиеся от частоты перехода, и поэтому не возбуждаются при лазерной генерации в системе.

Расстояние между наночастицами Δ предполагается много меньше длины волны (в расчетах полагалось, что $\Delta = \lambda / 20$). Рассматриваемая система имеет форму квадрата со

стороной L , и числом спазеров $N = (L/\Delta)^2$. Отметим, что при практической реализации в качестве усиливающей среды можно использовать р-п переход вместо квантовых точек. В этом случае р-п переход формируется на специальной подложке (например, InP), а затем на р-п переход наносятся металлические (золотые/серебряные) наночастицы.

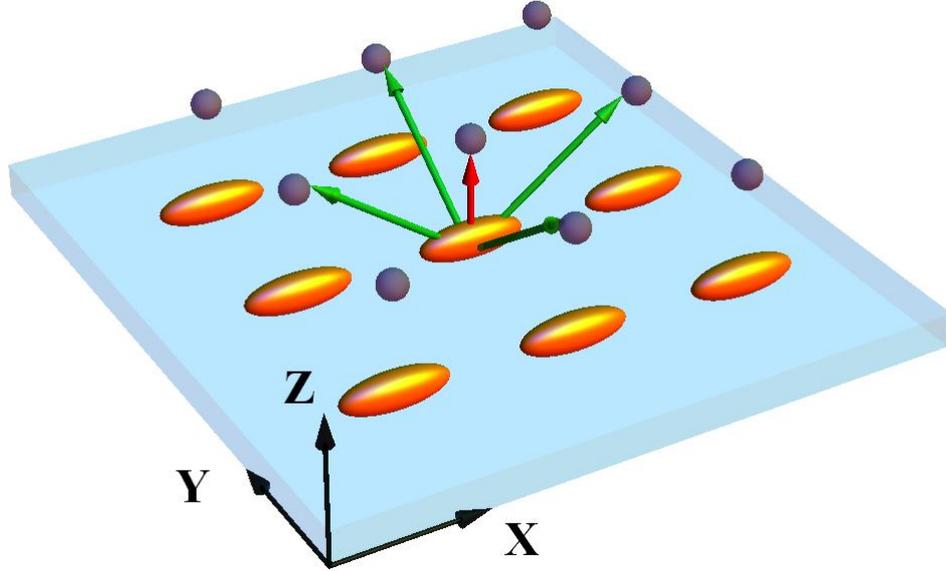


Рис. 26. Схематическое изображение фазированной решетки спазеров. Квантовые точки (сферы), взаимодействующие с дипольными модами металлических эллипсоидальных наночастиц. Красной стрелкой обозначено взаимодействие наночастицы со своей квантовой точкой, а зелеными стрелками с квантовыми точками соседних наночастиц.

Динамика спазера описывается системой трех уравнений на амплитуду дипольного момента наночастицы a , поляризацию σ и инверсию населенностей D квантовой точки смотри [119]. В двумерном массиве спазер с номером $\mathbf{n} = \{n_x, n_y\}$ взаимодействует с локальным полем $\Omega_{\mathbf{n}-\mathbf{m}} \cdot a_{\mathbf{m}} = \Omega((\mathbf{n}-\mathbf{m})\Delta) \cdot a_{\mathbf{m}}$, созданным спазером с номером $\mathbf{m} = \{m_x, m_y\}$. Проекция локального поля, создаваемого единичным диполем, на направление дипольного момента наночастицы задается выражением

$$\Omega(\mathbf{e}R) = \tau_R^{-1} \left(\frac{3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_x)^2 - 1}{R^3} - ik_0 \frac{3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_x)^2 - 1}{R^2} - k_0^2 \frac{(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_x)^2 - 1}{R} \right) \exp(ikR), \quad (172)$$

где $k_0 = \omega/c$ - волновое число в вакууме, \mathbf{e}_x - единичный вектор параллельный дипольному моменту наночастиц, \mathbf{eR} - вектор соединяющий спазер с номером \mathbf{m} со спазером с номером \mathbf{n} и τ_R^{-1} - скорость радиационного затухания. Для сферической наночастицы радиуса $r_{HЧ}$ в свободном пространстве $\tau_R^{-1} = 2 \frac{(k_0 r_{HЧ})^3}{\partial \varepsilon / \partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r}$ [119]. В общем

случае, τ_R^{-1} зависит от окружения и формы наночастицы; на частоте дипольного резонанса - ω_r , значение τ_R^{-1} связано с поляризуемостью $\alpha(\omega)$ по формуле $\tau_R^{-1} = -\frac{2}{3} \frac{k_0^3}{\partial \alpha^{-1} / \partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_r}$.

Как видно из (172) для расчета локального поля, мы ограничиваемся диполь-дипольным взаимодействием между наночастицами (без учета высших мультиполей), но учитываем эффекты запаздывания. Используемое выражение для локального поля характерно для свободного пространства, единственный учтенный нами эффект связанный с металлической пленкой – это затухание волны в пространстве (в (172) $k = k' + ik''$, и при численном моделировании использовались значения $k' = k_0$ и $k''/k' = 0.2$). Без учета этого затухания, в «идеализированной» системе, взаимодействие наночастиц не ограничивается соседними наночастицами, в результате становится существенной конечность размеров структуры, что приводит к неоднородности по массиву локальных полей, действующих на спазеры, и к возникновению различных неустойчивостей. В остальном вид локального поля качественно не влияет на поведение рассматриваемой нами системы.

В приближении «вращающейся волны» [22-26] система взаимодействующих спазеров описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\dot{a}_n + \tau_a^{-1} a_n = -i\Omega_R \sigma_n - i\Omega_{R1} \sum_{|m-n|=1} \sigma_m + i \sum_{m \neq n} \Omega_{n-m} a_m, \quad (173)$$

$$\dot{\sigma}_n + \tau_\sigma^{-1} \sigma_n = i\Omega_R a_n D_n + i\Omega_{R1} \sum_{|m-n|=1} a_m D_m, \quad (174)$$

$$\dot{D}_n + \tau_D^{-1} (D_n - D_0) = 2i\Omega_R (a_n^* \sigma_n - \sigma_n^* a_n) + 2i\Omega_{R1} \sum_{|m-n|=1} (a_m^* \sigma_n - a_m \sigma_n^*), \quad (175)$$

где a_n - дипольный момент \mathbf{n} наночастицы, σ_n - дипольный момент и D_n - инверсная населенность квантовой точки с номером \mathbf{n} , D_0 - интенсивность внешней накачки, которая считается одинаковой для всех квантовых точек. Времена релаксации

поляризации (поперечной релаксации) и инверсии населенностей (продольной релаксации) квантовых точек обозначены, соответственно, τ_σ и τ_D . Время жизни плазмонной моды определяется джоулевыми потерями и потерями на излучение $\tau_a^{-1} = \tau_J^{-1} + \tau_R^{-1}$ (в наших вычислениях $\tau_J^{-1} = 27 \cdot \tau_R^{-1}$).

В системе уравнений (173)-(175), кроме взаимодействия между наночастицами (последнее слагаемой в правой части (173)), учитывается взаимодействие наночастицы со своей квантовой точкой (первое слагаемой в правой части (173)) и с квантовыми точками соседних наночастиц (второе слагаемой в правой части (173)). Амплитуда этих взаимодействий пропорциональна частотам Раби Ω_R и Ω_{R1} , соответственно. В системе уравнений (173)-(175) также учтены радиационные потери, которые увеличиваются с ростом числа спазеров (смотри раздел 5.4). Система уравнений (173)-(175) не учитывает процессы спонтанного излучения квантовых точек, которые важны вблизи порога генерации. В работе [105] было экспериментально доказана возможность пренебрежения процессами спонтанного излучения квантовых точек существенно выше порога лазерной генерации (Рис. 25б). Следовательно, система уравнений (173)-(175) применима существенно выше порога лазерной генерации.

5.3. Синхронизация колебаний дипольных моментов отдельных спазеров в фазированной решетке спазеров

При численном решении системы уравнений (173)–(175) было показано, что при Ω_{R1} большем некоторого критического значения, в решетке спазеров колебания дипольных моментов отдельных спазеров выходят на стационар с почти однородным распределением фазы по массиву (Рис. 27). В массивах с числом спазеров N порядка 10^2 удается добиться "идеальной" синхронизации колебаний дипольных моментов по системе (Рис. 27а). В больших системах ($N \gg 10^2$) вблизи границ возникают возмущения в направлении параллельном колебаниям дипольных моментов (Рис. 27б). Этот краевой эффект имеет масштаб порядка длины волны в вакууме. При размерах системы много больших длины волны влияние краевых эффектов на интенсивность излучения от решетки спазеров и диаграмму направленности становится пренебрежимо малым.

Синхронизованный режим колебаний дипольных моментов в решетке спазеров устанавливается благодаря взаимодействию наночастиц с квантовыми точками соседних

наночастиц. Действительно, при Ω_{R1} меньше критического значения в решетке спазеров устанавливается рассинхронизованное распределение дипольных моментов (рис. 27в).

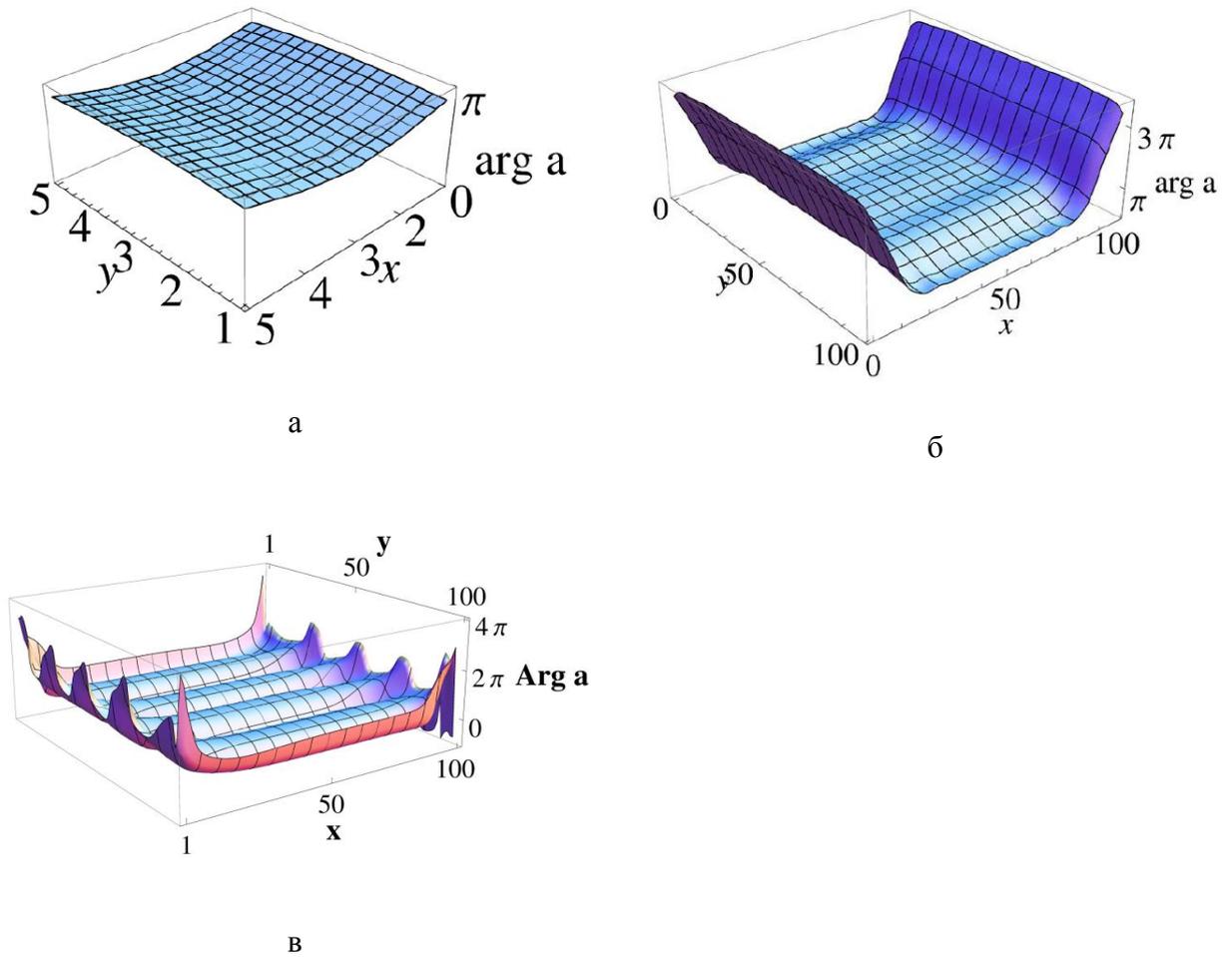


Рис. 27. Распределение фазы колебаний дипольных моментов по решетке спазеров (а) в массиве 5 на 5 спазеров при $\Omega_{R1} \neq 0$, (б) в массиве 100 на 100 спазеров при $\Omega_{R1} \neq 0$, (в) в массиве 100 на 100 спазеров при $\Omega_{R1} = 0$. По осям x - и y - номер спазера, по оси z - фаза дипольных моментов.

5.4. Сверхизлучение от фазированной решетки спазеров

В синхронизованном режиме взаимодействие спазеров через дальнее поле приводит к увеличению интенсивности излучения. Это явление более очевидно для системы малых размеров ($k_0 R \ll 1$), для которых выражение (172) преобразуется к виду

$$\Omega(\mathbf{eR}) \approx \tau_R^{-1} \left(\frac{3}{2} \frac{3(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_x)^2 - 1}{(k_0 R)^3} + i \right), \quad (176)$$

с $\text{Im}\Omega(\mathbf{eR}) \approx \tau_R^{-1}$. Когда все диполи осциллируют с одинаковой фазой и амплитудой, последнее слагаемое в (173) может быть разделено на два

$$\begin{aligned} i \sum_{m \neq n} \Omega_{n-m} a_m &= i a_m \sum_{m \neq n} \text{Re} \Omega_{n-m} - a_m \sum_{m \neq n} \text{Im} \Omega_{n-m} = \\ &= i a_m \sum_{m \neq n} \text{Re} \Omega_{n-m} - a_m (N-1) \tau_R^{-1} \end{aligned} \quad (177)$$

Второе слагаемое в правой части (177) приводит к увеличению скорости потерь для \mathbf{n} -плазмона в $(N-1)$ раз. В результате, эффективная скорость затухания становится равной $\tau_J^{-1} + N\tau_R^{-1}$ и уравнение (173) может переписано как

$$\dot{a}_n + (\tau_J^{-1} + N\tau_R^{-1}) a_n = -i\Omega_R \sigma_n - i\Omega_{R1} \sum_{|m-n|=1} \sigma_m + i \text{Re} \sum_{m \neq n} \Omega_{n-m} a_m. \quad (178)$$

Таким образом, дипольные моменты на всех наночастицах, в области $k_0 R \ll 1$, дают равный вклад в интенсивность излучения каждой наночастицы $\tau_{R_eff}^{-1} = N\tau_R^{-1}$. В этом случае полная интенсивность излучения N наночастиц пропорциональна квадрату их полного числа N^2 , что является отличительным свойством сверхизлучения [13]. Заметим, что для получения этой зависимости мы использовали выражение для полного поля диполя с учетом запаздывания (172). Следовательно, учет всех слагаемых в (172) необходим для корректного описания влияния излучения на динамику колебаний дипольных моментов в решетке спазеров.

Мощность излучения от всей решетки спазеров может быть получена, используя уравнения баланса энергии, которые следуют из (173) для стационарного режима

$$\sum_n \left[\Omega_R \text{Im}(a_n^* \sigma_n) + \Omega_{R1} \sum_{|m-n|=1} \text{Im}(a_n^* \sigma_m) \right] = \tau_J^{-1} \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n,m} \text{Im}(\Omega_{n-m}) \text{Re}(a_n^* a_m). \quad (179)$$

В соответствии с (5.5), $\text{Im}\Omega(\mathbf{eR}) \approx \tau_R^{-1}$ для $k_0 R \ll 1$. Таким образом, слагаемое $\mathbf{n} = \mathbf{m}$ в сумме $\sum_{n,m}$ может быть учтено, как $\text{Im}\Omega_{n-m} = \tau_R^{-1}$. Левая часть уравнения (179)

пропорциональна энергетическим потерям в системе. Первое же слагаемое в правой части соответствует джоулевым потерям, а второе радиационным потерям I

$$I = \frac{m\omega^2}{e^2} \sum_{n,m} \text{Im}(\Omega_{n-m}) \text{Re}(a_n^* a_m). \quad (180)$$

Мощность потерь на излучение в зависимости от числа спазеров в решетке показана на рис. 28а.

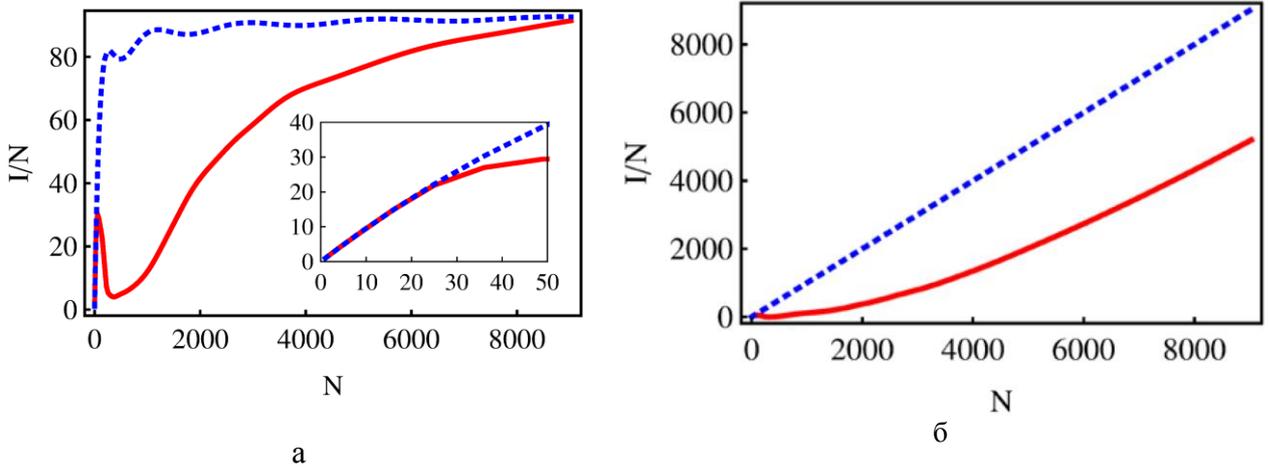


Рис. 28. График зависимости (а) интенсивности излучения в расчете на один спазер в фазированной решетке, (б) интенсивность излучения в перпендикулярном к плоскости решетки направлении в расчете на один спазер в зависимости от числа спазеров. Сплошной линией интенсивность излучения для распределения фазы получаемого из численного счета, и штриховой линией интенсивность излучения для идеально синхронизованной системы. Зависимость интенсивности для малого числа спазеров показана на вставке к рис. 28а.

При малых размерах системы все спазеры осциллируют в фазе ($N < 100$ для наших параметров) (рис. 27а). В этом случае интенсивность излучения в расчете на один спазер растет линейно с ростом числа спазеров $I_1 = I/N \sim N$. Для таких решеток интенсивность излучения совпадает с интенсивностью излучения для идеально синхронизованной системы (вставка на рис. 28а). При дальнейшем увеличении размера решетки интенсивность излучения проваливается, что связано с формированием граничных состояний (рис. 27б). Дальнейший рост приводит к синхронизации большей части массива, как видно на рис. 27б. При числе спазеров $N > 5000$ интенсивность излучения исследуемой и идеально синхронизованной системы примерно сравниваются, что происходит на фоне подавления роста суммарной интенсивности излучения. Последнее происходит по причине деструктивной интерференции от дипольных моментов спазеров, расположенных в разных частях системы.

5.5. Диаграмма направленности излучения от фазированной решетки спазеров

Для практических применений суммарная интенсивность излучения от системы спазеров часто является менее важной, чем интенсивность излучения в расчете на телесный угол в направлении перпендикулярном плоскости решетки. То, есть мощность излучения, измеряемая при помощи маленького детектора, размещенного над плоскостью решетки спазеров. Однако если вычислить суммарную мощность излучения системы диполей можно, учитывая взаимодействие в системе через полное поле излучения, то определить угловое распределение интенсивности излучения таким способом не возможно. Для того чтобы найти угловое распределение интенсивности излучения необходимо использовать электродинамический анализ излучения для найденного распределения амплитуды и фазы дипольных моментов наночастиц в фазированной решетке спазеров. Другими словами, необходимо рассматривать систему спазеров, как фазированную антенную решетку. Угловое распределение интенсивности излучения такой антенны может быть найдено при помощи Фурье преобразования от распределения токов в её апертуре [120]. В нашем случае, от распределения фаз и амплитуд дипольных моментов наночастиц по системе спазеров. В результате, угловое распределение интенсивности излучения задается формулой

$$I_{\Omega}(\mathbf{e}) = I_{\Omega}^0(\mathbf{e}) \left| \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \exp(-ik_0 \mathbf{e} \cdot \mathbf{r}_{\mathbf{n}}) \right|^2, \quad (181)$$

где \mathbf{e} - единичный вектор в направлении излучения, $\mathbf{r}_{\mathbf{n}}$ - вектор-координата диполя с номером \mathbf{n} в массиве и $I_{\Omega}^0(\mathbf{e}) = (8\pi)^{-1} ck_0^4 [|\mathbf{e} \times \mathbf{e}_x|]^2$ - интенсивность излучения единичного диполя в направлении вектора \mathbf{e} . При интегрировании (181) по всем направлениям \mathbf{e} получается выражение (180). В перпендикулярном к плоскости направлении

$I_{\Omega}(\mathbf{e}) = I_{\Omega}^0(\mathbf{e}) \left| \sum_{\mathbf{n}} a_{\mathbf{n}} \right|^2$, что дает зависимость $I_{\Omega} / N \sim N$ для синхронизованной системы любого размера.

Данное утверждение подтверждается результатами численного расчета (Рис. 28б). Интересно, что линейный рост I_{Ω} / N определяется двумя эффектами. При малых размерах системы $L < \lambda$, это происходит из-за роста интегральной интенсивности излучения, вследствие сверхизлучения [13], а при $L > \lambda$ рост I_{Ω} / N вызывается сужением диаграммы направленности, что связано с увеличением апертуры излучающей системы (Рис. 29).

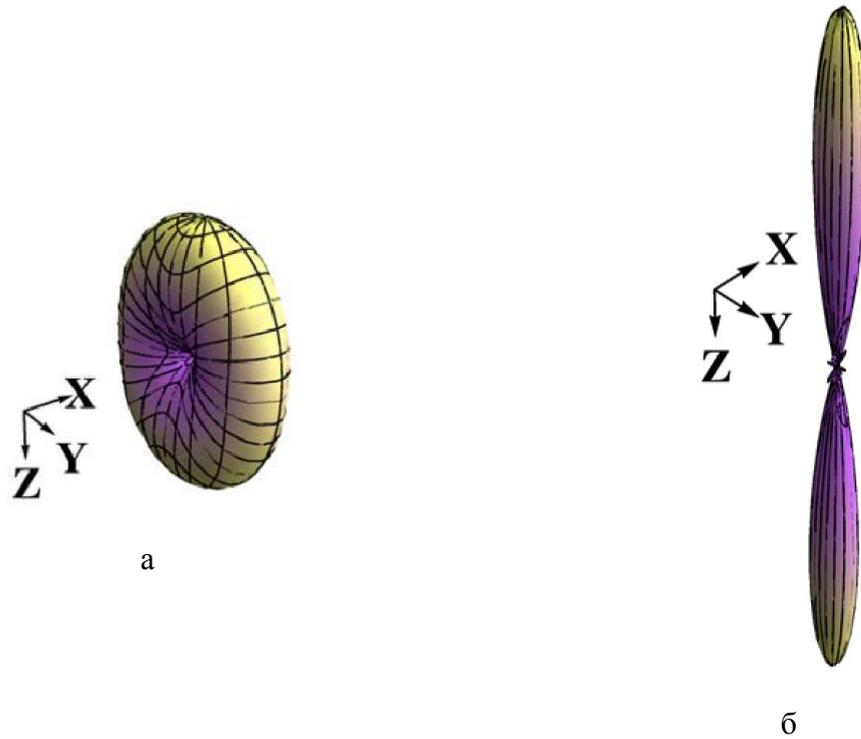


Рис. 29. Диаграмма направленности от фазированной решетки спазеров (а) для системы 5 на 5 спазеров, (б) для системы 100 на 100 спазеров.

5.6. Механизм синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных спазеров в фазированной решетке спазеров

В результате численного исследования двумерной решетки спазеров было показано, что взаимодействие наночастиц с квантовыми точками соседних наночастиц приводит к синхронизации колебаний дипольных моментов, вспомним отдельных спазеров. В многомодовых лазерах в результате конкуренции мод обычно выживает мода с наименьшим пороговым значением по накачке D_{th} [22-26,117,118]. Для системы спазеров порог по накачке задается выражением $D_{th}(\mathbf{k}) = \Omega_{R_eff}^{-2} \tau_{a_eff}^{-1} \tau_{\sigma}^{-1} (1 + \delta_{eff}^2 \tau_{a_eff}^2)$, которое идентично порогу единичного спазера [119], но с эффективными параметрами Ω_R , τ_a и расстройкой δ

$$\Omega_{R_eff} = \Omega_R + 2\Omega_{R1} (\cos k_x \Delta + \cos k_y \Delta), \quad (182)$$

$$\tau_{a_eff}^{-1} = \tau_J^{-1} + \Delta^{-2} \int \Omega(\mathbf{e}R) d^2 \mathbf{R}, \quad (183)$$

$$\delta_{eff} \approx 3\tau_R^{-1} (k_0\Delta)^{-3} (2 \cos k_x\Delta - \cos k_y\Delta), \quad (184)$$

где $\mathbf{k} = \{k_x, k_y\}$ - волновое число собственной моды дипольных колебаний в решетке спазеров.

Значение $D_{th}(\mathbf{k})$ определяется тремя множителями $\Omega_{R_{eff}}^{-2}$, $\tau_{a_{eff}}^{-1}$ и $1 + \delta_{eff}^2 \tau_{a_{eff}}^2$. Первый множитель $\Omega_{R_{eff}}^{-2}$ имеет минимум при $|\mathbf{k}| = 0$. Действительно, в синхронизованной моде поля соседних наночастиц интерферируют на квантовых точках, из-за чего соответствующие взаимодействие и переход энергии максимальны для синхронизованной моды. Этот механизм синхронизации был рассмотрен в [118]. С другой стороны, второй множитель $\tau_{a_{eff}}^{-1}$ увеличивается с ростом $|\mathbf{k}|$ из-за повышения потерь на излучение, что приводит к росту D_{th} . Из-за этого множителя рассинхронизованная мода должна иметь наименьший порог. В тоже время увеличение $\tau_{a_{eff}}^{-1}$ приводит к тому, что третий множитель $1 + \delta_{eff}^2 \tau_{a_{eff}}^2$ стремится к 1.

Таким образом, стационарная мода в системе определяется в результате конкуренции двух факторов: синхронизации из-за нелинейного диполь-дипольного взаимодействия наночастиц с соседними квантовыми точками и рассинхронизации из-за увеличения интенсивности излучения.

При наших, совершенно реалистичных, параметрах первый механизм превалирует. Следовательно, мода с $\mathbf{k} = 0$ имеет наименьший порог и именно она будет наблюдаться в стационарном режиме генерации.

5.7. Краевые эффекты

Взаимодействие наночастиц с квантовыми точками соседних наночастиц приводит к синхронизации колебаний дипольных моментов наночастиц в решетке спазеров. Однако различие между собственными частотами плазмонных дипольных резонансов соседних наночастиц может приводить к рассинхронизации. В системе спазеров частота дипольного резонанса отдельной наночастицы зависит не только от свойств самой наночастицы, но и от её окружения. Основной вклад в изменение частоты резонанса вносит взаимодействие наночастицы с соседями. В центре системы сдвиг частоты резонанса одинаков для всех спазеров. Для спазеров на границе, окружение отличается от окружения спазеров в центре

системы, из-за чего частота дипольного резонанса наночастицы на границе отличается от резонансной частоты такой же наночастицы, расположенной в центре. Последнее приводит к возникновению краевых эффектов в распределении амплитуды и фазы дипольных моментов на границе решетки (рис. 27а).

Для того чтобы устранить краевые эффекты, связанные с различием резонансных частот наночастиц в центре и на границах системы, необходимо изменить пространственное распределение наночастиц на краях таким образом, чтобы на каждой наночастице поле от остальных частиц было одинаковым, независимо от положения в решетке.

В качестве примера рассмотрим решетку спазеров, лежащую в плоскости xu , с прямоугольной ячейкой, грани которой вытянуты вдоль осей x и y . Расстояние между соседними спазерами вдоль оси x и y обозначим δx и δy , соответственно. Предположим для простоты, что на наночастице может возбуждаться только одна дипольная мода \mathbf{d} , ориентированная вдоль оси x . В этом случае поле на наночастице от соседних частиц, смещенных вдоль осей x и y пропорционально $2|\mathbf{d}|/\delta x^3$ и $-|\mathbf{d}|/\delta y^3$, соответственно. Если выбрать $\delta x = \sqrt[3]{2} \delta y$, то поле соседних наночастиц на частицы в центре массива будет равняться нулю $E_c = 0$ ¹⁰. В тоже время, поле E_1 на наночастицах, расположенных на границе системы параллельной оси y , равняется сумме полей от двух наночастиц, смещенных по оси y , и от одной наночастицы, смещенной по оси x :

$$E_1 = \frac{2|\mathbf{d}|}{\delta x^3} + 2\left(-\frac{|\mathbf{d}|}{\delta y^3}\right) = \frac{2|\mathbf{d}|}{\sqrt[3]{2} \delta y^3} + 2\left(-\frac{|\mathbf{d}|}{\delta y^3}\right) = -\frac{|\mathbf{d}|}{\delta y^3}. \quad (185)$$

Для того чтобы поля на наночастицах на краю и в центре системы были одинаковыми $E_c = E_1 = 0$, уменьшим расстояние между двумя ближайшими к границе рядами наночастиц: $\delta x_1 = \delta y$. В результате E_1 станет равным нулю, но это приведет к изменению поля на наночастицах во втором от границе ряду

¹⁰ При таком случае частоту линии усиления квантовой точки необходимо выбрать равной частоте плазмонного резонанса одиночной наночастицы.

$$E_2 = \frac{2|\mathbf{d}|}{\delta x_1^3} + \frac{2|\mathbf{d}|}{\delta x^3} + 2\left(\frac{-|\mathbf{d}|}{\delta y^3}\right) = \frac{|\mathbf{d}|}{\delta y^3}. \quad (186)$$

Для того чтобы скомпенсировать изменение поля на наночастицах из второго ряда сдвинем во всем ряду наночастицы попарно друг к другу (смотри рисунок 30) и уменьшим расстоянием между вторым и третьим рядом наночастиц так, чтобы взаимодействие между наночастицами из второго и третьего ряда осталось неизменным.

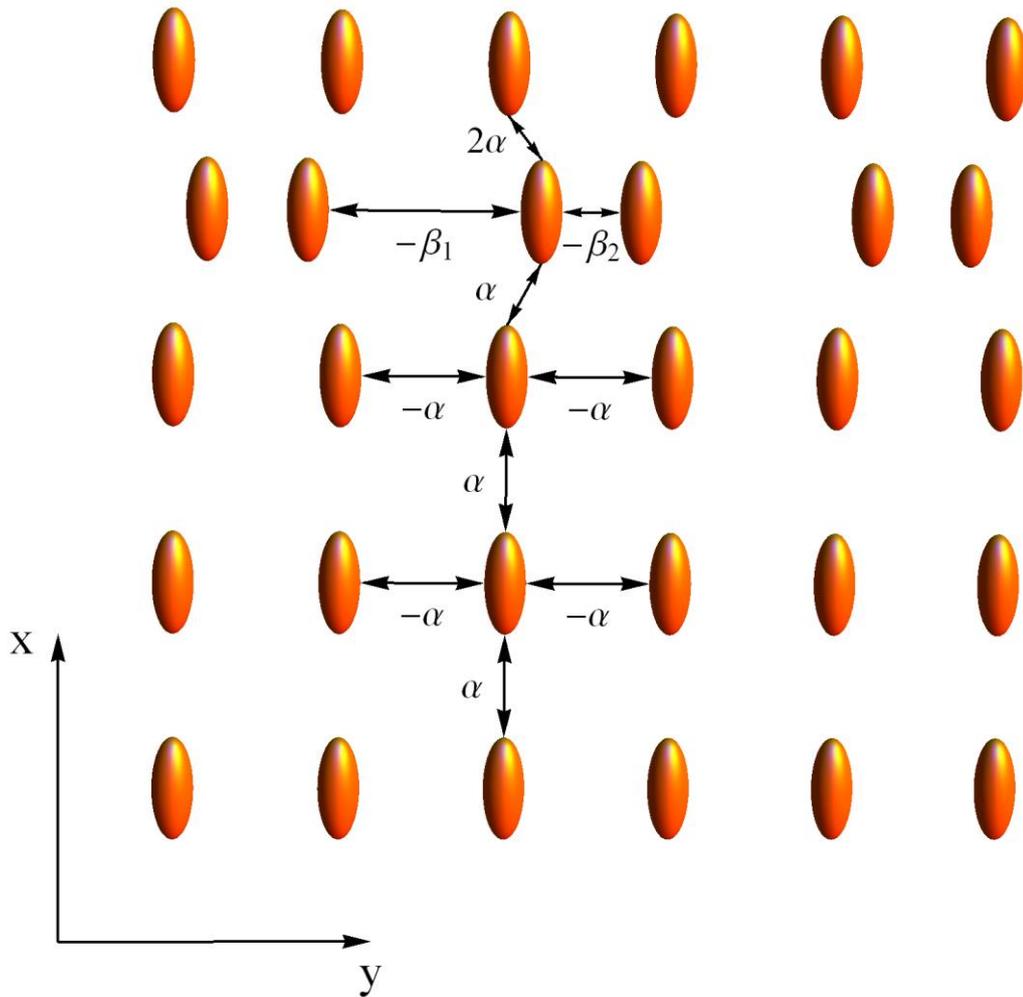


Рис. 30. Схематическое изображение расположения наночастиц вблизи границы фазированной решетки спазеров. Расстояния подобраны таким образом, чтобы

$$2\alpha + \alpha - \beta_1 - \beta_2 = 0.$$

В результате получим систему, в которой поле на наночастицах не зависит от их положения в решетке (рис. 30). В получившейся системе наличие границы не влияет на

распределение фаз дипольных моментов, что подтверждают результаты численного моделирования (рис. 31).

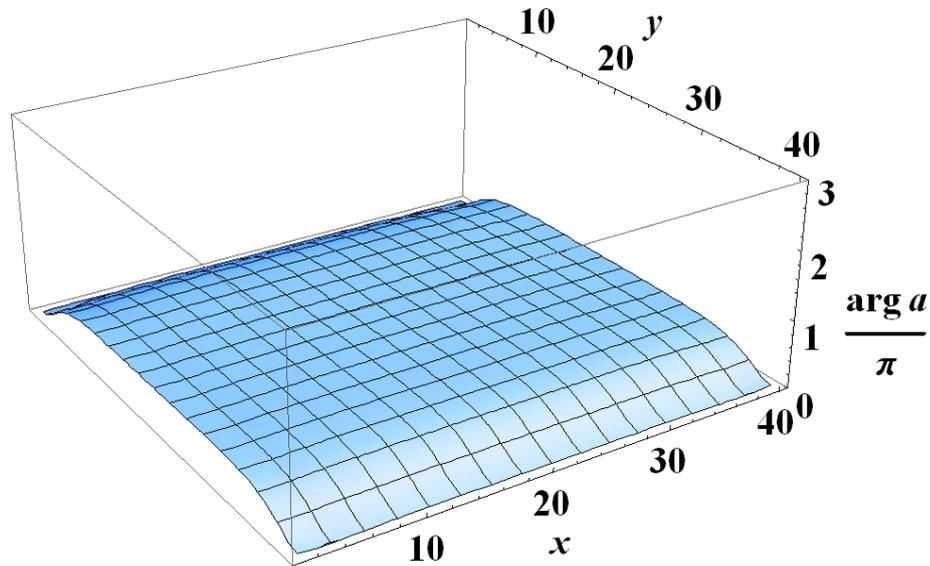


Рис. 31. Распределение фаз колебаний дипольных моментов по плоскости спазеров в решетке 40 на 40 спазеров, в котором скомпенсированы краевые эффекты в направлении оси x (смотри рисунок 30).

5.8. Выводы

Подводя итоги, в работе показано, что в двумерной решетке спазеров взаимодействие наночастиц через квантовые точки соседних спазеров может приводить к синхронизации колебаний дипольных моментов отдельных наночастиц. В результате излучение от системы становится узконаправленным, а его суммарная интенсивность повышается на два порядка. Предложенное устройство чрезвычайно интересно для применений в открытой оптической связи и, в частности, есть перспектива создания на его основе первой оптической фазированной решетки.

Рост интенсивности излучения при синхронизации спазеров в двумерной решетке связан с эффектом сверхизлучения Дике [13]. Сама синхронизация возникает из-за ближнепольного взаимодействия наночастиц с квантовыми точками соседних спазеров. Учитывая, что на расстояниях, меньших длины волны, ближнепольное взаимодействие гораздо сильнее взаимодействия через дальнее поле, описанный в работе механизм синхронизации открывает возможность экспериментального наблюдения сверхизлучения от наноразмерных систем.

Глава 6

PT-симметрия в электродинамике

6.1. Введение

В 1998 году в работе [34] было показано, что квантовые системы с неэрмитовым гамильтонианом могут обладать набором собственных состояний с действительными собственными значениями (действительным спектром). Иными словами, оказалось, что эрмитовость гамильтониана не является необходимым условием действительности его собственных значений, и на основании таких гамильтонианов можно построить новую квантовую механику [34,40,121].

Исходным пунктом такого построения является следующий факт. В случае действительных собственных значений неэрмитового гамильтониана модуль волновой функции для собственных состояний системы является сохраняющейся во времени величиной даже в областях с комплексным потенциалом. В самом деле, для любого собственного состояния гамильтониана

$$\hat{H}\psi_k = E_k\psi_k, \quad (187)$$

где ψ_k и E_k - собственное решение и собственное значение гамильтониана \hat{H} .

Подставив (187) во временное уравнение Шредингера, получим

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t} = E_k\psi_k, \quad (188)$$

Очевидно, что при любом действительном E_k модуль ψ_k будет сохраняющейся во времени величиной. Однако собственные состояния такого гамильтониана не являются ортогональными, и для создания на основе таких гамильтонианов квантовой механики, сравнимой по самосогласованности с обыкновенной, требуется переопределить понятие скалярного произведения и нормы [47] (смотри раздел 1.2.6).

Частным случаем неэрмитовых систем с действительным спектром являются *PT*-симметричные системы, которые остаются инвариантными при одновременной инверсии пространственных и временных переменных (смотри раздел 1.2.1).

В 2007 в работах [14,15] концепция PT -симметрии была перенесена из квантовой механики в электродинамику, где PT -симметричные системы демонстрируют множество необычных свойств: двойное лучепреломление [15], невзаимную дифракционную картину [15,122,123], осцилляции энергии [15,122], потере индуцированную прозрачность [124], идеальный когерентный поглотитель – лазер [2,3], нелинейное переключение [125], невзаимные Блоховские осцилляции [18,126], односторонняя невидимость [16-19] и нарушение PT -симметрии собственных решений без нарушения PT -симметрии системы [14,15,122,127] – фазовый переход, связанный со спонтанным нарушением симметрии (смотри раздел 1.2.3).

В работах [3] и [14,15] была предсказана возможность наблюдения фазовых переходов в одномерных и двумерных PT -симметричных оптических системах. Однако, условия, необходимые для наблюдения фазового перехода в реальных оптических системах, до сих пор не исследовались.

6.2. PT -симметрия в реальных электродинамических системах

В электродинамике, PT -симметрию обычно исследуют в частотной области, рассматривая решения скалярного уравнения Гельмгольца для z компоненты электрического поля E :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega, x, y) \right) E(\omega, x, y) = 0, \quad (189)$$

где $\varepsilon(\omega, x, y)$ - диэлектрическая проницаемость немагнитной среды.

По определению система является PT -симметричной если уравнение Гельмгольца (189) инвариантно относительно PT -преобразования. В одномерных системах диэлектрическая проницаемость ε и электрическое поле E зависят только одной пространственной переменной - x . В этом случае, PT -преобразование приводит к отражению относительно плоскости yz и комплексному сопряжению. В результате условие PT -симметричности системы сводится к условию на диэлектрическую проницаемость системы [14]

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, x) = \operatorname{Re} \varepsilon(\omega, -x) \quad (190)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x) = -\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, -x) \quad (191)$$

Таким образом, любая PT -симметричная система, состоит из усиливающих и поглощающих сред (За исключением тривиального случая полностью пассивных систем $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x) = 0$).

Из-за антилинейности операции PT -преобразования собственные решения уравнения Гельмгольца (189) могут быть, как PT -симметричными, так и PT -несимметричными в зависимости от мнимой части диэлектрической проницаемости [122,128]. В результате, при варьировании параметров системы может происходить фазовый переход от PT -симметричных собственных решений к PT -несимметричным [14,15,122,127] (смотри раздел 1.2.3). В любой PT -симметричной системе, PT -симметричным собственным решениям соответствуют действительные собственные значения, а PT -несимметричным собственным решениям соответствуют комплексные собственные значения [14,15,127] (смотри раздел 1.2.2). Таким образом, при рассмотрении фазового перехода в PT -симметричных системах, связанного со спонтанным нарушением симметрии, достаточно следить за изменением мнимой части собственных значений (смотри раздел 1.2.3). В одномерных системах, в качестве собственных значений рассматривают собственные значения матрицы рассеяния системы [3]; а в двумерных системах, волновые числа, определяемые из уравнения (189) [14,15,127] (смотри раздел 1.2.4).

В PT -симметричных системах, фазовый переход, связанный со спонтанным нарушением симметрии, можно наблюдать при варьировании параметров системы: частоты, мнимой части диэлектрической проницаемости и т.п. На практике, для изготовления PT -симметричной системы необходимо добиться точного совпадения модулей мнимых частей диэлектрической проницаемости в усиливающей и поглощающей средах, что достаточно сложно, и тем более, сложно управлять этими величинами, сохраняя соотношение (191) в диапазоне параметров. Поэтому, на первый взгляд, гораздо проще наблюдать фазовый переход при изменении частоты падающего на систему поля. Однако из-за дисперсии диэлектрической проницаемости условие PT -симметрии системы может выполняться только для дискретного набора частот, и нарушается в любом конечном диапазоне частот. В результате, невозможно наблюдать фазовый переход с изменением симметрии решений при изменении частоты падающего поля.

Действительно, диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega, x)$ является функцией отклика среды на внешнее поле, поэтому она должна быть аналитической в верхней полуплоскости частот, и должна удовлетворять соотношениям Крамерса-Кронига [29]:

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, x) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', x)}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (192)$$

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x) = -\frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \varepsilon(\omega', x) - \varepsilon_0}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (193)$$

где ε_0 - диэлектрическая проницаемость вакуума. Используя соотношения (192), (193) можно доказать, что условия PT -симметричности системы (190), (191) могут выполняться только для дискретного набора частот. В самом деле, если условие (190) для действительной части диэлектрической проницаемости выполняется при любых действительных частотах то, тогда из (192) получаем

$$\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, -x) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', -x)}{\omega' - \omega} d\omega' = \varepsilon_0 - \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', x)}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (194)$$

Для того чтобы одновременно с (190) выполнялось условие (191) необходимо, чтобы

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} \varepsilon(\omega', x)}{\omega' - \omega} d\omega' = 0. \quad (195)$$

Последнее возможно только для полностью пассивной системы с $\operatorname{Re} \varepsilon(\omega, x) = \varepsilon_0$ и $\operatorname{Im} \varepsilon(\omega, x) = 0$. Таким образом, в реальной электродинамической системе условия PT -симметрии (190), (191) не могут выполняться для всех действительных частот.

Невозможность существования PT -симметрии в диапазоне частот имеет простые математические причины. Давайте обозначим диэлектрическую проницаемость в точках x и $-x$, как $\varepsilon_1(\omega)$ и $\varepsilon_2(\omega)$, соответственно. Предположим, что $\varepsilon_2(\omega)$ - причинная функция то, есть аналитическая в верхней полуплоскости комплексных частот. Для действительных частот уравнения (190), (191) эквивалентны комплексному сопряжению. Так как операция комплексного сопряжения не сохраняет аналитичность, то функция $\varepsilon_2^*(\omega)$ не может использоваться вместо $\varepsilon_1(\omega)$. Аналитическая функция удовлетворяющая условиям (190), (191):

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_2^*(\omega^*). \quad (196)$$

Однако, все особенности $\varepsilon_1(\omega)$, определяемого уравнением (196), лежат в верхней полуплоскости, таким образом, $\varepsilon_1(\omega)$ не может соответствовать диэлектрической проницаемости реальной оптической среды.

Заметим, что выполнение условий *PT*-симметрии системы при всех действительных частотах не требуется для наблюдения фазового перехода с нарушением симметрии при варьировании по частоте. Достаточно, чтобы условия (190), (191) выполнялись в конечном диапазоне вблизи точки фазового перехода. Однако, это тоже невозможно. Действительно, как следует из теоремы единственности [129], если две аналитические функции совпадают на некотором интервале действительных частот, то они совпадают во всей верхней полуплоскости. Следовательно, если условие (196) выполняется на конечном диапазоне частот, то оно выполняется и во всей верхней полуплоскости. Таким образом, диэлектрическая проницаемость, которая удовлетворяет условиям *PT*-симметрии в любом конечном интервале частот, не удовлетворяет соотношениям Крамерса-Кронига, и не может быть функцией отклика среды на внешнее поле [130].

В качестве примера рассмотрим среду с диэлектрической проницаемостью с лоренцевской формой линии с центром на частоте ω_0 :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{mat} - \frac{\alpha}{\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\gamma\omega}, \quad (197)$$

где ε_{mat} - диэлектрическая проницаемость матрицы в которую помещена усиливающая (поглощающая) среда, α и γ - амплитуда и ширина линии усиления (поглощения), соответственно. Для поглощающей среды $\text{Im } \varepsilon > 0$ так, что α и γ положительные величины. Для усиливающей среды $\text{Im } \varepsilon < 0$ так, что один из параметров α или γ должен быть отрицательным. При действительных частотах, смена знака перед γ равносильна комплексному сопряжению $\varepsilon(\omega)$. В результате полюс $\varepsilon(\omega)$ из нижней полуплоскости переходит в верхнюю полуплоскость комплексных частот, что делает $\varepsilon(\omega)$ не аналитической в верхней полуплоскости частот. Таким образом, для усиливающей среды единственно правильным является выбор $\alpha < 0$ и $\gamma > 0$, который соответствует "антирезонансу" действительной части диэлектрической проницаемости [23,30-32]. При выборе $\alpha < 0$ и $\gamma > 0$ диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ оказывается аналитической в

верхней полуплоскости комплексных частот, но такой выбор не совместим с условиями PT -симметричности системы. Действительно, как показано на рисунке 6.1, когда условие (191) выполняется, условие (190) не выполняется из-за резонансного поведения действительной части диэлектрической проницаемости в поглощающей среде и "антирезонансного" поведения в усиливающей среде. Условие (190) выполняется только в одной точке $\omega = \omega_0$, что совпадает с общим правилом, следующим из соотношений Крамерса-Кронига.

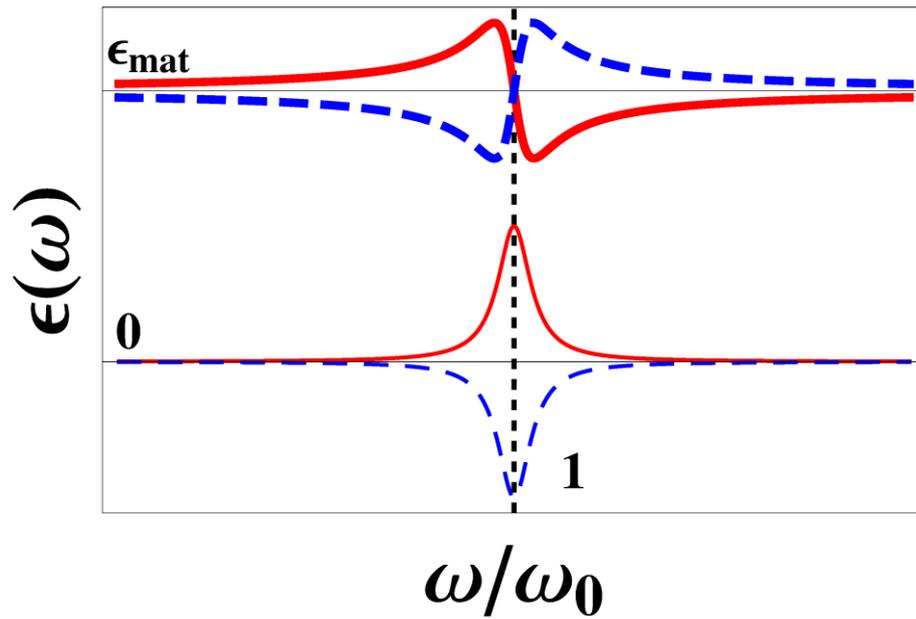


Рис. 32. Действительная (толстые линии) и мнимая (тонкие линии) часть диэлектрической проницаемости для поглощающей (сплошные линии) и усиливающей (штриховые линии) среды. Диэлектрическая проницаемость задается формулой (197).

6.3. Влияние дисперсии на возможность наблюдения фазовых переходов в PT -симметричных и квази- PT -несимметричных электродинамических системах

Невозможность создать электродинамические системы, являющиеся PT -симметричными в диапазоне частот, делает невозможным наблюдение фазового перехода со спонтанным нарушением PT -симметрии собственных решений при варьировании частоты.

В тоже время, фазовые переходы со спонтанным нарушением симметрии могут наблюдаться не только в PT -симметричных системах, а в более широком классе систем,

называемых квази- PT -симметричными, которые могут быть сведены к PT -симметричным формальным преобразованием пространственных координат [124]. Примером такой системы [124] является структура, состоящая из двух связанных параллельных волноводов. Первый волновод сделан из вещества с нулевой мнимой частью диэлектрической проницаемости $\text{Im} \varepsilon_1 = 0$, второй изготовлен из поглощающего материала $\text{Im} \varepsilon_2 = \alpha > 0$.

Предположим, что волноводы лежат в плоскости xz , и их оси направлены вдоль z . Поле в волноводах обозначим $E(z, x)$. Введем новое "поле" $e(z, x) = E(z, x) \exp(\alpha z / 2)$. Поле $e(z, x)$ подчиняется уравнению (189) с эффективной диэлектрической проницаемостью ε^{eff} , чья мнимая часть равна $-\alpha/2$ в первом и $\alpha/2$ во втором волноводах. Изменяя параметр α , можно наблюдать фазовый переход от PT -симметричного к PT -несимметричному распределению "поля" $e(z, x)$ [124]. В тоже время, "поле" $e(z, x)$ однозначно связано с полем $E(z, x)$, в первоначальной системе, поэтому при изменении симметрии $e(z, x)$ меняется пространственная симметрия $E(z, x)$. В системе происходит "скрытый" фазовый переход [124]. Заметим, что хотя собственные значения в эффективной системе действительны при PT -симметричных собственных решениях $e(z, x)$, собственные значения в реальной системе всегда комплексные.

Эффективная диэлектрическая проницаемость ε^{eff} не является функцией отклика реальной оптической системы, и, следовательно, не обязана удовлетворять соотношениям Крамерса-Кронига. Тем не менее, из-за дисперсии диэлектрической проницаемости оказывается невозможным наблюдать даже "скрытый" фазовый переход с нарушением симметрии решений в реальной оптической системе.

В работе [124], задача о нахождении зависимости распределения поля в системе двух связанных волноводов от координаты рассматривалась в приближении связанных мод, и сводилась к решению системы дифференциальных уравнений [14]

$$i \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 + \delta & \kappa \\ \kappa^* & \beta_2 + \delta^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad (198)$$

где a_1 и a_2 - амплитуды электрического поля в волноводах, $\beta_1 = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_1}$ и $\beta_2 = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_2}$ - волновые числа для несвязанных волноводов, κ - коэффициент

перекрытия между волноводами, и δ - величина изменения волнового числа из-за связи между волноводами. Амплитуды поля в волноводах одинаковы, если

$$(\beta_1 - \beta_2 + \delta - \delta^*) = (\kappa^* e^{-i\phi} - \kappa e^{i\phi}). \quad (199)$$

где ϕ - относительная фаза между полями в соседних волноводах. Так как правая часть в уравнении (199) чисто мнимая, распределение поля может быть симметричным только, если разность $\beta_1 - \beta_2$ тоже чисто мнимая. Обозначим половину разности между волновыми числами в двух волноводах за $\Delta\beta = (\beta_1 - \beta_2)/2$. Условие (199) можно переписать в виде двух условий для действительной и мнимой частей выражения слева:

$$|\text{Im}(2\Delta\beta + \delta - \delta^*)| \leq 2|\kappa|, \quad (200)$$

$$\text{Re}\Delta\beta = 0. \quad (201)$$

Таким образом, для того, чтобы собственные решения имели симметричное пространственное распределение, действительные части диэлектрической проницаемости должны быть равны $\text{Re}\varepsilon_1 = \text{Re}\varepsilon_2$, или

$$\text{Re}\varepsilon(\omega, x) = \text{Re}\varepsilon(\omega, -x). \quad (202)$$

Обобщая уравнения (194), (195) получаем

$$\text{Re}\varepsilon(\omega, x) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\varepsilon(\omega', x)}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (203)$$

$$\text{Re}\varepsilon(\omega, -x) = \varepsilon_0 + \frac{1}{\pi} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\varepsilon(\omega', -x)}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (204)$$

Из (202) и (203), (204) следует, что

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}\varepsilon(\omega', x) - \text{Im}\varepsilon(\omega', -x)}{\omega' - \omega} d\omega' = 0. \quad (205)$$

Уравнение (205) должно выполняться при всех действительных частотах (или хотя бы для всех частот из конечного интервала), что возможно только для системы с $\text{Im}\varepsilon(\omega', x) - \text{Im}\varepsilon(\omega', -x) = 0$. В этом случае условия (200), (201) всегда выполняются и собственные решения всегда симметричны. Повторяя доказательство для точной *PT*-

симметричной системы, получаем, что если величина $\text{Im}\varepsilon(\omega', x) - \text{Im}\varepsilon(\omega', -x)$ не равна нулю, то условие (201) может выполняться только при дискретном наборе частот [130].

6.4. Выводы

Из-за дисперсии диэлектрической проницаемости условия PT -симметрии (190), (191) могут выполняться только при дискретном наборе частот и не могут выполняться ни в одном конечном интервале. В результате, фазовый переход с изменением симметрии собственных решений, как в PT -симметричных, так и в квази- PT -симметричных электродинамических системах не может наблюдаться при изменении частоты падающего поля. В тоже время, не существует ограничений на наблюдение фазового перехода при варьировании интенсивности накачки (мнимой части диэлектрической проницаемости) [14,15,122,124,127].

Заключение

В работе рассмотрено распространение электромагнитных волн через слой, содержащий усиливающую среду. Сравниваются результаты, полученные по методу Френеля и методу Эйри. Показано, что существует иерархия толщин усиливающего слоя $d_0 < d_{cr} \leq d_{las}$. С ростом толщины усиливающего слоя d растет коэффициент отражения электромагнитного поля от его границы, при $d > d_0$ коэффициент отражения от слоя становится больше единицы. Далее, по мере роста толщины системы достигается критическая толщина d_{cr} усиливающего слоя, при превышении которой ряд Эйри по «падающим» волнам расходится, в тоже время решение, полученное по методу Френеля (решение линейного волнового уравнения) остается конечным¹¹. Однако, пока $d < d_{las}$ результаты, полученные по методу Френеля, остаются верными. При превышении толщиной порогового значения d_{las} в системе начинается лазерная генерация. В этом случае, даже если интенсивность поля во френелевском решении достаточно мала и, казалось бы, можно не учитывать изменение инверсной населенности под действием поля, уравнения Максвелла-Блоха дают решение большой амплитуды, при которой указанная нелинейность становится определяющей. Точным условием возникновения лазерной генерации является выход полюсов линейной передаточной функции $g(\omega)$ в верхнюю полуплоскость комплексных частот ω .

Физическим параметром, определяющим условие начала генерации, является путь, проходимый лучом по слою. При падении под углом этот путь отличается от толщины слоя. В результате модам, распространяющимся под углом, соответствуют меньшие значения толщин d_0 , d_{cr} , d_{las} . При падении электромагнитной волны под углом ϕ существенными оказываются явления Брюстера и полного внутреннего отражения. При ненулевой мнимой части ε_{gain} угол Брюстера и угол полного внутреннего отражения будут комплексными. Однако для р-поляризации при падении под углом ϕ равным углу Брюстера ϕ_{Br} при отсутствии накачки $d_{las}(\phi)$ имеет максимум, что связано с тем, что при

¹¹ При толщинах, меньших d_{cr} , ряд Эйри сходится к результату, полученному в рамках подхода Френеля, который, в свою очередь, совпадает с решением, получаемым из численного решения уравнений Максвелла-Блоха.

точном выполнении условия Брюстера отсутствуют отражение и слой перестает быть резонатором. В случае полного внутреннего отражения существует действительный критический угол ϕ_{cr} , равный углу полного внутреннего отражения ϕ_{TIR} при отсутствии накачки, выше и ниже которого поведение системы качественно отличается. При углах падения ϕ , меньших критического ϕ_{cr} , ситуация аналогично случаю нормального падения. С ростом толщины слоя в системе начинается лазерная генерация. При углах падения ϕ , больших критического ϕ_{cr} , лазерная генерация возможна лишь при малой толщине усиливающего слоя и исчезает с увеличением толщины слоя [131].

В следующей главе представленной работы рассматривается распространение электромагнитных волн через фотонный (электромагнитный) кристалл, содержащий усиливающую среду. В разрешенной зоне фотонного кристалла распространение электромагнитных волн аналогично случаю распространения по однородному слою, содержащему усиливающую среду. При числе ячеек фотонного кристалла меньшего критического $N < N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам и метод Френеля (метод Т-матриц) дают одинаковый результат, при $N > N_{cr}$ расчет методом Т-матриц даёт конечный результат, а ряд Эйри по «падающим» волнам расходится. Однако, пока $N < N_{las}$ результаты, полученные по методу Френеля, остаются верными. При $N > N_{las}$ один из полюсов передаточной функции переходит в верхнюю полуплоскость комплексных частот, в системе начинается лазерная генерация. С ростом числа ячеек N пороговое значение накачки α_{th} , необходимое для начала лазерной генерации, уменьшается.

В запрещенной зоне фотонного кристалла лазерная генерация возможна только при ячейках при $N < N_{las}$. При $N_{las} < N < N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам не сходится, но лазерная генерация не наблюдается. При $N > N_{cr}$ ряд Эйри по «падающим» волнам сходится. Пороговое значение накачки α_{th} немонотонно зависит от числа ячеек. При малом числе ячеек α_{th} убывает с ростом числа ячеек, при числе ячеек порядка 5 убывание α_{th} сменяется ростом. Возникновение лазерной генерации на частотах из запрещенной зоны можно интерпретировать как изменение зонной структуры фотонного кристалла. Границу между разрешенной и запрещенной зоной фотонного кристалла, содержащего усиливающую среду, предлагается определить по смене зависимости порогового значения

накачки $\alpha_{in}(N)$ от числа ячеек фотонного кристалла с убывания на возрастание (сплошная горизонтальная линия на рис. 18) [30, 77].

В четвертой главе рассмотрен лазер с анизотропным резонатором во внешнем магнитном поле (MO VCSEL). Показано, что в зависимости от величины внешнего магнитного поля возможны три режима работы лазера: отсутствие генерации для обеих линейных поляризаций, стационарная генерация с эллиптической поляризацией на смещенной частоте (относительно частоты резонатора) и стационарная генерация с линейной поляризацией на частоте, равной частоте резонатора. Предложено использовать лазер с анизотропным резонатором в качестве магнито-переключаемого источника когерентного излучения в вычислительных схемах, для чего определено время включения/выключения лазера. Полученные значения времени переключения имеют порядок 10^{-10} сек. Таким образом, предложенный магнитоуправляемый лазер является достаточно компактным и быстрым устройством, допускающим интеграцию в вычислительные схемы [132].

Также в работе предложен высоко направленный непрерывный источник когерентного излучения. Предлагаемый источник создается на основе фазированной решетки не когерентно накачиваемых спазеров, колебания дипольных моментов которых взаимно синхронизируются, благодаря взаимодействию наночастиц с квантовыми точками соседних спазеров. В результате синхронизации колебаний, интенсивность излучения в расчете на один спазер увеличивается на два порядка по сравнению с интенсивностью излучения изолированного спазера, что связано с эффектом сверхизлучения от системы. Рассмотренный механизм синхронизации принципиально отличается от механизма изученного Дике [13], в котором синхронизация достигается за счет взаимодействия через общее поле излучения. Благодаря тому, что самосинхронизация колебаний дипольных моментов отдельных спазеров может наблюдаться при размерах системы много больших длины волны, удастся не только увеличить интенсивность излучения в расчете на один спазер, но и добиться сужения диаграммы направленности за счет увеличения апертуры фазированной решетки спазеров. Таким образом, объединение единичных спазеров в двумерную решетку позволяет создать на их основе узконаправленный интенсивный источник когерентного излучения. Такой источник будет полезен для реализации скоростных оптических коммуникаций, благодаря тому, что спазеры обладают меньшим временем отклика на возмущение по сравнению с обычными поверхностно-излучающими лазерами.

Последняя глава диссертации посвящена исследованию влияния частотной дисперсии на свойства PT -симметричных электродинамических систем. На основе соотношений Крамерса-Кронига [29] доказывается невозможность выполнения условий PT -симметрии в любом конечном интервале частот. Показывается, что работы, в которых предлагаются PT -симметричные системы, функционирующие в диапазоне частот (смотри например [3]) являются ошибочными.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю Пухову Александру Александровичу, а так же Виноградову Алексею Петровичу и Дорофеенко Александру Викторовичу.

Список цитируемой литературы

1. Ramakrishna S., Pendry J. B. Removal of absorption and increase in resolution in a near-field lens via optical gain // *Physical Review B*. 2003. Vol. 67. P. 201101(R)
2. Longhi S. PT-symmetric laser absorber // *Physical Review A*. 2010. Vol. 82. P. 031801(R)
3. Chong Y. D., Ge L., Stone A. D. PT-symmetry breaking and laser-absorber modes in optical scattering systems // *Physical Review Letters* 2011. Vol. 106. P. 093902
4. Zheludev N. I. et al. Lasing spaser // *Nature Photonics*. 2008. Vol. 2. P. 351
5. Huang Y.-W. et al. Toroidal lasing spaser // *Scientific Reports*. 2013. Vol. 3. P. 1237
6. Suh J. Y. et al. Plasmonic bowtie nanolaser arrays // *Nano Letters*. 2012. Vol. 12. P. 5769
7. Beijnum F. et al. Surface plasmon lasing observed in metal hole arrays // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110. P. 206802
8. Zhou W. et al. Lasing action in strongly coupled plasmonic nanocavity arrays // *Nature Nanotechnology*. 2013. Vol. 8. P. 506
9. Protsenko I. E. et al. Dipole nanolaser // *Physical Review A*. 2005. Vol. 71. P. 063812
10. Protsenko I. E. et al. Dipole nano-laser // *Journal of Physics: Conference Series*. 2008. Vol. 107. P. 012010
11. Банков С. Е. Электромагнитные кристаллы. М.: Физматлит, 2010. 352 с.
12. Леденцов Н. Н., Лотт Д. А. Новое поколение вертикально-излучающих лазеров как ключевой элемент компьютерно-коммуникационной эры // *Успехи Физических Наук*. 2011. Т. 181. С. 884
13. Dicke R. H. Coherence in spontaneous radiation processes // *Physical Review*. 1954. Vol. 93. P. 99
14. El-Ganainy R. et al. Theory of coupled optical PT-symmetric structures // *Optics Letters*. 2007. Vol. 32. P. 2632
15. Makris K G et al. Beam dynamics in PT symmetric optical lattices // *Physical Review Letters*. 2008. Vol. 100. P. 103904
16. Lin Z et al. Unidirectional invisibility induced by PT-symmetric periodic structures // *Physical Review Letters*. 2011. Vol. 106. P. 213901
17. Yin X., Zhang X. Unidirectional light propagation at exceptional points // *Nature Materials*. 2013. Vol. 12. P. 175
18. Regensburger A. et al. Parity–time synthetic photonic lattices // *Nature*. 2012. Vol. 488. P. 167

19. Feng L. et al. Experimental demonstration of a unidirectional reflectionless parity-time metamaterial at optical frequencies // *Nature Materials*. 2013. Vol. 12. P. 108
20. Мандель Л., Вольф Э. Оптическая когерентность и квантовая оптика. Москва: Физматлит, 2000. 896 с.
21. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: ИЛ, 1956. 490 с.
22. Ораевский А. Н. Резонансные свойства системы “мода резонатора – двухуровневые атомы” и частотная бистабильность // *Квантовая электроника*. 1999. Т. 29. С. 137
23. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. Дифракция и волноводное распространение оптического излучения. Москва: Мир, 1989. 664 с.
24. Ханин Я. И. Основы динамики лазеров. Москва: Наука, 1999. 355 с.
25. Пантел Р., Путхов Г. Основы квантовой электроники. Москва: Мир, 1972. 384 с.
26. Скалли М. О., Зубайри М. С. Квантовая оптика. Москва: Физматлит, 2003. 512 с.
27. Luks A., Perinova V. Quantum aspects of light propagation. New York: Springer Science Business Media, 2009. 455 p.
28. Erneux T., Glorieux P. Laser dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 361 p.
29. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Москва: Физматлит, 2003. 621 с.
30. Zyablovsky A. A. et al. Light propagation in photonic crystal with gain: applicability of the negative loss approximation // *Photonics and Nanostructures - Fundamentals and Applications*. 2011. Vol. 9. P. 398
31. Kivshar Y. S., Agrawal G. P. Optical solitons: from fibers to photonic crystals. San Diego: Academic Press, 2003. 437 p.
32. Зябловский А. А. и др. Лазерная генерация в активном слое как следствие принципа причинности // *Радиотехника и электроника*. 2011. Т. **56**. С. 1142
33. Ярив А. Квантовая электроника Москва: Советское радио, 1980. 488 с.
34. Bender C. M., Boettcher S. Real spectra in non-hermitian Hamiltonians having PT symmetry // *Physical Review Letters*. 1998. Vol. 80. P. 5243
35. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Квантовая электродинамика. Москва: Физматлит, 2006. 480 с.
36. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т.1. Общая теория. Москва: Физматлит, 2003. 648 с.
37. Wigner E. P. Theoretical physics. Vienna: International Atomic energy Agency, 1963. 64 p.
38. Кемпфер Ф. Основные положения квантовой механики. Москва: КомКнига, 2007. 394 с.

39. Боголюбов Н. Н. Собрание научных трудов. Т. 10. Квантовая теория. Москва: Наука, 2008. 736 с.
40. Bender C. M. Making sense of non-hermitian Hamiltonians // Report on Progress Physics. 2007. Vol. 70. P. 947
41. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. Москва: Физматлит, 2008. 800 с.
42. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Часть 1. Москва: Физматлит, 2005. 616 с.
43. Burckhardt C. V. Diffraction of a plane wave at a sinusoidally stratified dielectric grating // Journal of the Optical Society American. 1966. Vol. 56. P. 1502
44. Виноградов А. П. и др. Поверхностные состояния в фотонных кристаллах // Успехи физических наук. 2010. Т. 180. С. 249
45. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. Москва: Наука, 1973. 343 с.
46. Рытов С. М. Электромагнитные свойства мелкослоистой среды. // Журнал Экспериментальной и Теоретической Физики. 1955. Т. 29. С. 11
47. Weigert S. Completeness and orthonormality in PT-symmetric quantum systems // Physical Review A. 2003. Vol. 68. P. 062111
48. Колоколов А. А. Отражение плоских волн от усиливающей среды // Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 21 С. 660
49. Колоколов А. А. Формулы Френеля и принцип причинности // Успехи Физических Наук. 1999. Т. 169. С. 1025
50. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов // Успехи Физических Наук. 1976. Т. 118. С. 339
51. Бойко Б. Б., Петров Н. С. Отражение света от усиливающих и нелинейных сред. Минск: Наука и техника, 1988. 205 с.
52. Романов Г. Н., Шахиджанов С. С. Усиление электромагнитного поля при полном внутреннем отражении от области инверсной населенности // Письма в ЖЭТФ. 1972. Т. 16. С. 298.
53. Джексон Д. Классическая электродинамика. Москва: Мир, 1965. 702 с.
54. Airy G. B. On the phenomena of Newton's rings when formed between two transparent substances of different refractive powers // Philosophical magazine. 1833. Vol. 2. P. 20
55. Sturrock P. A. Kinematics of growing waves // Physical Review. 1958. Vol. 112. P. 1488.
56. Skaar J. Fresnel equations and the refractive index of active media // Physical Review E. 2006. Vol. 73. P. 026605

57. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. Москва: Наука: Физматлит, 1979. 320 с.
58. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1981. 512 с.
59. Fang A., Koschny T., Soukoulis C. M. Lasing in metamaterial nanostructures // *Journal of Optics*. 2010. Vol. 12. P.
60. Plum E. et al. Towards the lasing spaser: controlling metamaterial optical response with semiconductor quantum dots // *Optics Express*. 2009. Vol. 17. P. 8548
61. Сивухин Д. В. Общий курс физики. Оптика. Москва: Физматлит, 2005. 792 с.
62. Бутиков Е. И. Оптика. Москва: Высшая школа, 1986. 255 с.
63. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Москва: Наука, 1970. 720 с.
64. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Москва: Наука, 1965. 749 с.
65. Зоммерфельд А. Лекции по теоретической физике. Т.4. Оптика. Москва: ИЛ, 1953. 490 с.
66. Ваганов Р. Б., Каценеленбаум Б. З. Основы теории дифракции. Москва: Физматлит, 1982. 280 с.
67. Вайнштейн Л. А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. Москва: Советское радио, 1966. 476 с.
68. Bahlouli H et al. Electromagnetic wave propagation in an active medium and the equivalent Schrödinger equation with an energy-dependent complex potential // *Physical Review B*. 2005. Vol. 72. P. 094304
69. Манцызов Б. И. Когерентная и нелинейная оптика фотонных кристаллов. Москва: Физматлит, 2009. 208 с.
70. Kawai S. Handbook of optical interconnects. Boca Raton: CRC Press Taylor & Francis Group, 2005. 473 p.
71. Yu S. F. Analysis and design of vertical cavity surface emitting lasers. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2003. 464 p.
72. Botez D., Scifres D. R. Diode laser arrays. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 448 p.
73. Wilmsen C. W., Temkin H., Coldren L. A. Vertical-cavity surface-emitting lasers: design, fabrication, characterization, and applications. New York: Cambridge University Press, 1999. 454 p.
74. Cheng J., Dutta N. K. Vertical-cavity surface-emitting lasers: technology and applications. Amsterdam: Gordon & Breach, 2000. 323 p.

75. Vinogradov A. P. et al. Inverse Borrmann effect in photonic crystals // *Physical Review B*. 2009. Vol. 80. P. 235106
76. Kurizki G. et al., in *Progress in optics*. North-Holland: North-Holland, 2000. 93 p.
77. Дорофеев А. В. и др. Прохождение света через композитные материалы, содержащие усиливающие слои // *Успехи Физических Наук*. 2012. Т. 182. С. 1157
78. Jiang X., Soukoulis C. M. Transmission and reflection studies of periodic and random systems with gain // *Physical Review B*. 1999. Vol. 59. P. 6159
79. Strauf S et al. *Physical Review Letters* 96 (2006)
80. Imada M. et al. Multidirectionally distributed feedback photonic crystal lasers // *Physical Review B*. 2002. Vol. 65. P. 195306
81. Notomi M. et al. Lasing action due to the two-dimensional quasiperiodicity of photonic quasicrystals with a penrose lattice // *Physical Review Letters*. 2004. Vol. 92. P. 123906
82. Iga K. Surface-emitting laser-its birth and generation of new optoelectronics field // *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*. 2000. Vol. 6. P. 1201
83. Chang-Hasnain C. J. Tunable VCSEL // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 2000. Vol. 6. P. 978
84. Steinle G., Riechert H., Egorov A. Y. Monolithic VCSEL with InGaAsN active region emitting at 1.28 μm and CW output power exceeding 500 μW at room temperature // *Electronics Letters*. 2001. Vol. 37. P. 93
85. Yuen W et al. High-performance 1.6 μm single-epitaxy top-emitting VCSEL // *Electronics Letters*. 2000. Vol. 36. P. 1121
86. Koyama F. Recent Advances of VCSEL Photonics // *Journal of Lightwave Technology*. 2006. Vol. 24. P. 4502
87. Lott J A et al. Passive cavity surface emitting laser // *Electronics Letters* 2011. Vol. 47. P. 717
88. Coldren L. A., Corzine S. W. Diode lasers and photonic integrated circuits. New York: Wiley, 1995. 594 p.
89. Unold H. J. et al. Improving single-mode VCSEL performance by introducing a long monolithic cavity // *IEEE Photonics Technology Letters*. 2000. Vol. 12. P. 939
90. Degen C., Elsaber W., Fischer I. Transverse modes in oxide confined VCSELs: Influence of pump profile, spatial hole burning, and thermal effects // *Opt. Express*. 1999. Vol. 5. P. 38
91. Mena P. V. et al. // *Journal of Lightwave Technology*. 1999. Vol. 17. P.

92. Choquette K. D., Leibenguth R. E. Control of vertical-cavity laser polarization with anisotropic transverse cavity geometries // *IEEE Photonics Technology Letters*. 1994. Vol. 6. P. 40
93. Panajotov K. et al. Impact of in-plane anisotropic strain on the polarization behavior of vertical-cavity surface-emitting lasers // *Applied Physics Letters*. 2000. Vol. 77. P. 1590
94. Yoshikawa T. et al. Polarization-controlled single-mode VCSEL // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. 1998. Vol. 34. P. 1009
95. Saito H. et al. Controlling polarization of quantum-dot surface-emitting lasers by using structurally anisotropic self-assembled quantum dots // *Applied Physics Letters*. 1997. Vol. 71. P. 590
96. Choquette K. D. et al. Gain-dependent polarization properties of vertical-cavity lasers // *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*. 1995. Vol. 1. P. 661
97. Sugisaki M et al. Optical anisotropy in self-assembled InP quantum dots // *Physical Review B*. 1999. Vol. 59. P. R5300(R)
98. Войтович А. П. Магнитооптика газовых лазеров. Минск: Наука и техника, 1984. 208 с.
99. Дьяконов М. И., Фридрихов С. А. Газовый лазер в магнитном поле // *Успехи Физических Наук*. 1966. Т. 90. С. 565
100. May A. D. et al. An alternative interpretation of the Zeeman and Faraday laser // *Physical Review A*. 1996. Vol. 53. P. 2829
101. Serrat C. et al. Polarization dynamics in a vertical-cavity laser with an axial magnetic field // *Physical Review A*. 1996. Vol. 53. P. R3731
102. Doom A. K. Polarization behavior of surface-emitting semiconductor lasers in an axial magnetic field // *Optics Communications*. 1997. Vol. 133. P. 252
103. Haeringen W. V. Polarization properties of a single-mode operating gas laser in a small axial magnetic field // *Phys. Rev.* 1967. Vol. 158. P. 256
104. Miguel M. S., Feng Q., Moloney J. V. Light-polarization dynamics in surface-emitting semiconductor lasers // *Physical Review A*. 1995. Vol. 52. P. 1728
105. Travagnin M. et al. Role of optical anisotropies in the polarization properties of surface-emitting semiconductor lasers // *Physical Review A*. 1996. Vol. 54. P. 1647
106. Erneux T. et al. Two-variable reduction of the San Miguel–Feng–Moloney model for vertical-cavity surface-emitting lasers // *Physical Review A*. 1999. Vol. 59. P. 4660
107. Masoller C., Abraham N. B. Low-frequency fluctuations in vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers with optical feedback // *Physical Review A*. 1999. Vol. 59. P. 3021

108. Lamy J. M. et al. Characterization of InAs quantum wires on (001) InP: toward the realization of VCSEL structures with a stabilized polarization // *Physica Status Solidi (a)*. 2007. Vol. 204. P. 1672
109. Любас Г. А., Болотов В. В. Влияние гофрировки гетерограницы на поляризационную анизотропию фотолюминисценции от сверхрешеток с коротким периодом // *Письма в ЖЭТФ*. 2000. Т. 72. С. 294
110. Bartnik A. C. et al. Electronic states and optical properties of PbSe nanorods and nanowires // *Physical Review B*. 2010. Vol. 82. P. 195313
111. Chen H.-Y. et al. Polarized photoluminescence from single GaN nanorods: effects of optical confinement // *Optics Express*. 2008. Vol. 16. P. 13465
112. Chen C.-Y. et al. Giant optical anisotropy of oblique-aligned ZnO nanowire arrays // *Opt. Express*. 2012. Vol. 20. P. 2015
113. Bergman D. J., Stockman M. I. Surface plasmon amplification by stimulated emission of radiation: quantum generation of coherent surface plasmons in nanosystems // *Physical Review Letters*. 2003. Vol. 90. P. 027402
114. Noginov M. A. et al. Demonstration of a spaser-based nanolaser // *Nature*. 2009. Vol. 460. P. 1110
115. Lu Y.-J. et al. Plasmonic nanolaser using epitaxially grown silver film // *Science*. 2012. Vol. 337. P. 450
116. Колоколов А. А., Скродцкий Г. В. Интерференция реактивных компонент электромагнитного поля // *Успехи Физических Наук* 1992. Т. 12. С. 165
117. Dorofeenko A. V. et al. Steady state superradiance of a 2D-spaser array // *Optics Express*. 2013. Vol. 21. P. 14539
118. Zyablovsky A. A. et al. Superradiance and synchronization of 2D spaser array // *AIP Conference Proceedings*. 2012. Vol. 1475. P. 185
119. Andrianov E. S. et al. Forced synchronization of spaser by an external optical wave // *Optics Express*. 2011. Vol. 19. P. 24849
120. Balanis C. A. *Antenna theory - analysis and design*, 3rd Ed. New York: Wiley-Interscience, 2005. 1136 p.
121. Bender C. M., Brody D. C., Jones H. F. Complex extension of quantum mechanic // *Physical Review Letters*. 2002. Vol. 89. P. 270401
122. Ruter C. E. et al. Observation of parity–time symmetry in optics // *Nature Physics*. 2010. Vol. 6. P. 192
123. Feng L. et al. Nonreciprocal light propagation in a silicon photonic circuit // *Science*. 2011. Vol. 333. P. 729

124. Guo A. et al. Observation of PT-symmetry breaking in complex optical potentials // Physical Review Letters. 2009. Vol. 103. P. 093902
125. Sukhorukov A. A., Xu Z., Kivshar Y. S. Nonlinear suppression of time reversals in PT-symmetric optical couplers // Physical Review A. 2010. Vol. 82. P. 043818
126. Longhi S. Bloch oscillations in complex crystals with PT symmetry // Physical Review Letters. 2009. Vol. 103. P. 123601
127. Klaiman S., Günther U., Moiseyev N. Visualization of branch points in PT-symmetric waveguides // Physical Review Letters. 2008. Vol. 101. P. 080402
128. Bendix O. et al. Exponentially fragile PT symmetry in lattices with localized eigenmodes // Physical Review Letters. 2009. Vol. 103. P. 030402
129. Ablowitz M. J., Fokas A. S. Complex variables: introduction and applications. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 647 p.
130. Zyablovsky A. A. et al. Causality and phase transitions in PT-symmetric optical systems // Physical Review A. 2014. Vol. 89. P. 033808
131. Vinogradov A.P. et al. Total internal reflection in gain medium slab // Applied Physics A. 2012. Vol. 107. P. 89
132. Зябловский А. А., Дорофеев А.В., Пухов А.А. Магнитоуправляемый фарадеевский лазер на основе таммовского состояния в фотонном кристалле // Материаловедение. 2011. Т. 10. С. 25