Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Московский институт электронной техники»

На правах рукописи

Авосопянц Грант Владимирович

Квантово-оптические эффекты и устройства с использованием тепловых состояний света

Специальность 01.04.21 —
«Лазерная физика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук
Богданов Юрий Иванович
Научный консультант:
кандидат физико-математических наук
Катамадзе Константин Григорьевич

Москва — 2021

Оглавление

Стр.

Введение

Разработка методов генерации и измерения квантовых состояний света имеет большое значение для задач обеспечения качества и эффективности квантовой криптографии, квантовых вычислений, квантовой метрологии и квантовых информационных технологий в целом. Долгое время для квантово-информационных задач использовались, в основном, дискретные степени свободы света, реализованные на основе поляризационных и фазовых кубитов. Уже в этом случае для восстановления квантового состояния необходимо провести достаточно большое число различных проекционных измерений, каждому измерению необходимо подвергнуть большое число представителей [1—3]. Для увеличения размерности передаваемых квантовых состояний можно переходить к парам коррелированных фотонов (кутриты и кукварты [4—6]), однако далее увеличивать размерность, таким образом, сложно, поскольку даже генерация трёхфотонных состояний уже представляет сложную экспериментальную задачу, которая пока не имеет хорошего технологического решения [7; 8]. Поэтому в последнее время всё большей популярностью пользуется кодирование квантовой информации в непрерывных переменных электромагнитного поля: в пространственных модах [9—11], в частотно-временных модах [12; 13] и в квадратурных состояниях [14].

Последний вариант особенно интересен тем, что в отличие от других случаев информация передается не фоковскими состояниями света с заданным числом фотонов, а состоянием с произвольным распределением по числу фотонов. Собственно, параметры этого распределения и являются носителями информации. Однако, для полного восстановления квадратурных состояний недостаточно лишь измерить статистику фотоотсчётов — необходимо измерить квадратурные распределения. Как правило, для этого используют технику гомодинного детектирования [15].

Возможные квадратурные состояния обладают бесконечным разнообразием, однако, в настоящий момент существует очень ограниченный набор классов состояний, доступных в эксперименте и представляющих интерес для задач квантовой оптики и квантовой информатики. Среди них – суперпозиции фоковских состояний, когерентные состояния, суперпозиция когерентных состояний (в частности, состояние кота Шредингера), сдвинутые и сжатые фоковские состояния [16]. Строго говоря, размерность таких состояний бесконечна, поэтому их измерение и восстановление является сложной задачей, требующей адекватного разумного подхода к ограничению размерности [17; 18].

В качестве отдельного класса задач можно выделить описание, генерацию и измерение состояний, представляющих собой смесь фоковских состояний. Среди них наиболее часто встречается в природе тепловое состояние, в котором фоковские состояния имеют больцмановское распределение по энергии. Несмотря на то, что тепловые состояния света являются классическими объектами, они обладают корреляциями, в частности их нормированная автокорреляционная функция в нуле $g^{(2)}(0) = 2$. Это отличительное свойство позволяет использовать такие поля в тех же приложениях, в которых себя хорошо зарекомендовали неклассические состояния света, например, бифотонные поля или сжатый вакуум. Среди них отметим фантомное изображение (ghost imaging) [19—21], квантовое освещение (quantum illumination)[22], оптическую когерентную томографию [23; 24].

Операторы рождения и уничтожения фотонов являются базовыми элементами квантовой оптики. Несмотря на то, что они неэрмитовы и неунитарны, они могут быть реализованы напрямую (но вероятностным способом) [25—28]. Таким образом, экспериментаторы получают идеальный набор инструментов, позволяющих проверять основные коммутационные соотношения [27], приготавливать состояния кота Шрёдингера и другие негауссовские квантовые состояния [25; 26; 29], реализовывать вероятностное линейное бесшумное усиление (probabilistic linear noiseless amplification) [30], сильную керровскую нелинейность [31] а также реализовывать эффект «квантового вампира» [32] на фоковских состояниях света.

Тепловые состояния света легко приготовить, и их статистика значительно меняется как при добавлении, так и при отщеплении фотонов. Поэтому тепловые состояния с отщеплением фотонов становятся очень привлекательными для демонстрации эффектов в квантовой оптике и квантовой термодинамике, таких как фотонный демон Максвелла [33], квантовый тепловой двигатель [34] и др. Кроме того, было показано, что тепловые состояния с отщеплением фотонов могут быть использованы в некоторых метрологических приложениях [35; 36].

В последнее время действие негауссовых операций (в частности, рождения и уничтожения фотонов) на многомодовые состояния света стало очень интересным в контексте квантовых вычислений в кластерных состояниях [37; 38].

Несмотря на то, что существуют некоторые методы селективного отщепления фотонов [38; 39], обычно оператор уничтожения реализуется с использованием светоделителя с малым коэффициентом отражения и однофотонного детектора, расположенного в отражённом канале. В этом случае, невозможно проконтролировать из какой оптической моды отщепляется фотон. Особый интерес представляет случай детектирования исключительно одной моды, селектирование которой реализуется, например, при гомодинном детектировании.

В настоящее время всё большее применение в квантовой информатике и в квантовых вычислениях находят линейно-оптические квантовые чипы, которые видятся хорошей платформой для построения универсального квантового вычислителя [40; 41]. Такие чипы состоят из светоделителей с произвольными коэффициентами прохождения и отражения и фазовращателей: комбинируя два таких конструктивных блока можно выполнять произвольные квантовые операции [42]. В частности квантовые чипы являются идеальным симулятором для решения задачи бозонного сэмплинга (boson sampling) [43—45]. В тоже время они находят своё применение в качестве части фотонной нейронной сети [46; 47], используются для тестирования алгоритмов Гровера [48] и Шора [49], а также на их основе конструируются источники одиночных фотонов [50—53]. В декабре 2020 года на линейно-оптическом интегральном чипе 100x100 продемонстрировали квантовое превосходство: группа китайских ученых на таком симуляторе решила задачу бозонного сэмплинга всего за 200 секунд против 2,5 миллиардов лет, которые потребовались бы на ведущем суперкомпьютере Китая [54]. Хотя авторы [55] утверждают, что задачу бозонного сэмплинга можно решить гораздо быстрее и предлагают численный подход, соединяющий классическую и квантовую физику, несомненно, что были получены весьма важные результаты. И если способы изготовления таких чипов сейчас активно развиваются, а также известны множество эффективных архитектур построения чипа [56—59], то работа над эффективными методы восстановления, так называемой передаточной матрицы, описывающей преобразование «в целом», активно ведётся в настоящее время.

Для характеризации многоканальных линейно-оптических интегральных схем в основном используют когерентные [60], либо одно- и двухфотонные квантовые состояния света [61]. По результатам измерений восстанавливается передаточная матрица, которая затем аппроксимируется некоторой унитарной матрицей. В работах [62; 63] предлагается выполнить напрямую реконструкцию унитарной матрицы чипа с помощью её параметризации в виде элементарных блоков – делителей пучка и фазовращателей. В [64—66] был предложен более общий подход по томографии неунитарных многомодовых оптических каналов с использованием когерентных состояний света и метода максимального правдоподобия, но который не допускает масштабирования из-за существенных временных затрат при восстановлении матрицы процесса (3-5 дней для светоделителя 2x2). Более практичными оказались методы характеризации линейно-оптических интегральных схем, основанные на интерферометрии состояний: метод на когерентных [60] и на бифотонных состояниях света [61]. Одним из недостатков является использование как раз двухфотонных состояний света, что ведёт к более дорогому оборудованию с экспериментальной точки зрения и к продолжительному времени накопления данных (минимум несколько часов). Другим недостатком является сильная чувствительность когерентных состояний к модуляции фаз на волоконных входах и выходах чипа, которая в итоге даст нежелательную потерю точности.

Из всего вышесказанного вытекает **актуальность** задач, направленных на разработку способов описания, приготовления и измерения многомодовых (в общем случае) тепловых состояний света с отщеплением произвольного количества фотонов и применение такого класса состояний для демонстрации важных эффектов и для характеризации линейно-оптических интегральных схем. **Объектом исследования** является условное тепловое состояние света (в общем случае многомодовое), возникающее при отщеплении заданного количества фотонов. **Предметом исследования** соответственно являются параметры и свойства возникающих квантовых состояний света.

Целью диссертационной работы является исследование преобразования тепловых состояний света линейно-оптическими многоканальными интерферометрами и операторами отщепления фотонов.

Для достижения поставленной цели были решены следующие **задачи**:

1. Исследован способ приготовления тепловых состояний света с отщеплением произвольного числа фотонов с использованием единственного однофотонного детектора.
2. Исследован процесс гауссификации тепловых состояний света с отщеплением произвольного числа фотонов под действием линейных потерь в оптической системе.

3. Исследован эффект условно нелокального управления параметрами теплового состояния за счет применения оператора уничтожения в одной из мод светового пучка.
4. Исследована проблема описания и статистического восстановления параметров подсистемы многомодового теплового состояния с отщеплением заданного числа фотонов.
5. Исследован процесс восстановления передаточной матрицы линейно-оптического многоканального интерферометра на основе корреляционных измерений тепловых полей.

Научная новизна:

1. Впервые экспериментально продемонстрировано и измерено с высокой точностью с использованием модели компаунд-распределения Пуассона семейство тепловых состояний света с отщеплением до 10 фотонов включительно с использованием единственного однофотонного детектора на основе лавинного фотодиода.
2. Впервые экспериментально исследован процесс гауссификации тепловых состояний света с отщеплением произвольного числа фотонов под действием линейных потерь в оптической системе.
3. Впервые экспериментально продемонстрирован эффект условно нелокального действия оператора уничтожения в одной из мод на тепловые состояния света.
4. Предложена и экспериментально апробирована новая модель на основе свертки компаунд-распределения Пуассона и распределения Пойа, для описания статистики фотонов подсистемы многомодовых тепловых состояний света с отщеплением заданного числа фотонов.
5. Предложен и экспериментально апробирован новый метод восстановления параметров передаточной матрицы линейно-оптического многоканального интерферометра на основе корреляционных измерений тепловых полей.

Практическая значимость. Полученные в рамках данного исследования результаты могут быть использованы с одной стороны для более точного и эффективного восстановления параметров оптических квантовых состояний света, что является крайне важным для построения масштабируемого квантового вычислительного устройства. С другой стороны уменьшение SNR (отношение сигнал-шум) у тепловых состояний света с отщеплением фотонов может быть применено для различных метрологических задач. Наконец, предложенный метод восстановления передаточной матрицы линейно-оптического многоканального интерферометра за счёт корреляционных измерений тепловых полей позволяет получать более точные значения фаз даже при наличии значительных фазовых флуктуаций во входных каналах.

В работе были использованы следующие основные **методы исследования**. При проведении экспериментальных исследований: измерение статистики фотоотсчетов и балансное гомодинное детектирование. Теоретический анализ и численное моделирование основывались на аппарате производящих функций, методе максимального правдоподобия и других стандартных методов математической статистики и квантовой оптики.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Генерация квазитеплового света с большим временем корреляции позволяет приготавливать тепловые состояния света с отщеплением заданного числа фотонов с использованием единственного однофотонного детектора на основе лавинного фотодиода. Модель компаунд-распределения Пуассона хорошо описывает экспериментально измеренные квадратурные распределения семейства тепловых состояний с отщеплением заданного числа фотонов даже при наличии неидеальностей приготовительной схемы, связанных с ограниченной квантовой эффективностью и темновыми шумами лавинного фотодиода.
2. Процесс гауссификации тепловых состояний света с отщеплением произвольного числа фотонов под действием линейных потерь в оптической системе не приводит к потере свойств негауссовости. Мера, основанная на коэффициенте эксцесса (kurtosis) квадратурного распределения не требует восстановления параметров квантового состояния, и позволяет оценить негауссовые свойства напрямую из экспериментальных данных.
3. В двухмодовом режиме эффект условно нелокального действия оператора уничтожения на квантовое состояние, которое обусловлено постселекцией квадратурных состояний посредством схемы совпадений, не требует перепутанности и может быть полностью реализован на классических тепловых состояниях света. В многомодовом режиме действие оператора уничтожения в части большого светового пучка не

приводит к изменению профиля, то есть не приводит к образованию тени, а лишь изменяет общую интенсивность пучка.

4. Экспериментально измеренная статистика фотонов подсистемы многомодового теплового состояния с отщеплением заданного количества фотонов хорошо описывается предложенной моделью на основе свертки компаунд-распределения Пуассона и распределения Пойа. Возникающая при восстановлении параметров состояния проблема мультиколлинеарности решается введением априорной информации и использованием метода Байеса.
5. Разработанный метод восстановления передаточной матрицы линейно-оптического многоканального интерферометра посредством корреляционных измерений тепловых полей позволяет с высокой точностью оценить параметры квантового чипа даже при наличии неидеальностей экспериментального оборудования.

Достоверность полученных результатов обеспечивается применением современных методов квантовой теории, математической статистики и численного моделирования. Результаты теоретических исследований и компьютерного моделирования хорошо согласуются с результатами физических экспериментов. Результаты работы многократно обсуждались на семинарах лаборатории, кафедры и международных конференциях и были опубликованы в рецензируемых международных научных изданиях

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

– XV International Conference on quantum optics and quantum information, 20-23 ноября 2017г., Минск, Белоруссия;
– 27th Annual International Laser Physics Workshop, 16-20 июля 2018г., Ноттингем, Великобритания;
– Международная конференции Микро- и наноэлектроника – 2018, 1-5 октября 2018г., Звенигород, Россия;
– Quantum–2019: From Foundations of Quantum Mechanics to Quantum Information and Quantum Metrology & Sensing, 27-31 мая 2019г., Турин, Италия;
– 28th Annual international Laser Physics Workshop, 8-12 июля 2019г., Кёнджу, Южная Корея;

- 3rd international school on quantum technologies, 1-7 марта 2020г., Сочи, Россия;
- Международный форум Микроэлектроника – 2020, 28 сентября – 3 октября 2020г., Ялта, Россия;
- Saratov Fall Meeting - Quantum Science and Technologies I, 29 сентября 2020г., Москва, Россия.
- Quantum Informatics — 2021, 30 марта - 4 апреля 2021г., Москва, Россия;

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 20 печатных изданиях, 10 из которых представляют собой статьи в изданиях, входящих в базы данных Web of Science и Scopus и рекомендованных ВАК , 10 – в тезисах докладов.

Личный вклад. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами. Все представленные в работе результаты были либо получены автором лично, либо при его непосредственном участии.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трёх оригинальных глав и заключения. Общий объем диссертации — 146 страниц, включая 50 рисунков и 2 таблицы. Библиография включает 159 наименований на 14 страницах.

Глава 1. Обзор литературы

В настоящей главе представлен обзор литературы. Рассмотрены экспериментальные реализации операторов уничтожения и рождения фотона на основе светоделителя с малым коэффициентом отражения и эффекте спонтанного параметрического рассеяния света соответственно. Показаны теоретические и экспериментальные методы измерения и восстановления оптических квантовых состояний. Рассмотрен аппарат производящих функций, как наиболее удобный способ работы с распределением вероятностей по числу фотонов. Представлены эффекты на тепловых состояниях света с отщеплением фотонов, а также оригинальный эффект квантового вампира. В заключительной части главы подробно рассмотрены линейно-оптические квантовые вычисления и методы характеризации квантовых процессов в чипе.

1.1 Операторы рождения и уничтожения фотона

Одномодовое электромагнитное поле, поляризованное вдоль оси x и ограниченное вдоль оси z в резонаторе, согласно уравнениям Максвелла имеет вид [67—70]

$$E_x(z,t) = \sqrt{\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)} q(t)\sin(kz), \tag{1.1}$$

где ω — частота моды и $k = \frac{\omega}{c}$ — волновое число, $q(t)$ — зависящий от времени множитель, имеющий размерность длины, а V — эффективный объем резонатора. Условию $z = L$ (L — длина резонатора) удовлетворяют частоты $\omega_m = c\frac{m\pi}{L}$, $m = 1, 2, \ldots$. Магнитное поле определяется следующим образом

$$B_y(z,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\sqrt{\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)} \dot{q}(t)\cos(kz). \tag{1.2}$$

Здесь $\dot{q}(t)$ имеет смысл канонического импульса «частицы» единичной массы, то есть $p(t) = \dot{q}(t)$. Классическая полная энергия или гамильтониан H есть

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \omega^2 q^2\right). \tag{1.3}$$

Как можно видеть, гамильтониан (1.3) является гамильтонианом квантового гармонического осциллятора. Теперь мы можем заменить классические канонические переменные $q(t)$ и $p(t)$ на операторы, коммутатор которых $[\hat{q},\hat{p}] = i\hbar\hat{I}$. Тогда одномодовое электромагнитное поле становится оператором

$$\hat{E}_x(z,t) = \sqrt{\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)}\hat{q}(t)\sin(kz), \tag{1.4}$$

$$\hat{B}_y(z,t) = \frac{\mu_0\varepsilon_0}{k}\sqrt{\left(\frac{2\omega^2}{V\varepsilon_0}\right)}\hat{p}(t)\cos(kz). \tag{1.5}$$

Введем неэрмитовые операторы рождения $\hat{a}^\dagger$ и уничтожения фотона $\hat{a}$ [15; 70—72]

$$\hat{a} =\frac{\omega\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}, \tag{1.6}$$

$$\hat{a}^\dagger =\frac{\omega\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2\hbar\omega}}. \tag{1.7}$$

Отметим, что действие операторов уничтожения и рождения на фоковские состояния света определяется следующим образом

$$\hat{a}\left|n\right\rangle =\sqrt{n}\left|n-1\right\rangle, \tag{1.8}$$

$$\hat{a}^\dagger\left|n\right\rangle =\sqrt{n+1}\left|n+1\right\rangle. \tag{1.9}$$

Электромагнитное поле можно переписать через операторы $\hat{a}$ и $\hat{a}^\dagger$

$$\hat{E}_x(z,t) =\mathcal{E}_0\left(\hat{a}+\hat{a}^\dagger\right)\sin(kz), \tag{1.10}$$

$$\hat{B}_y(z,t) =\mathcal{B}_0\frac{1}{i}\left(\hat{a}-\hat{a}^\dagger\right)\cos(kz), \tag{1.11}$$

где константы $\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$, $\mathcal{B}_0 = \frac{\mu_0}{k}\sqrt{\frac{\hbar\omega^3\varepsilon_0}{V}}$. Коммутатор оператов уничтожения и рождения $\left[\hat{a},\hat{a}^\dagger\right] = 1$, а соответствующий гамильтониан поля $\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}^\dagger\hat{a}+\frac{1}{2}\right)$.

Учесть временную зависимость операторов уничтожения и рождения можно с помощью уравнения Гейзенберга, тогда выражение для электрического поля в (1.10) можно переписать

$$\hat{E}_x = \mathcal{E}_0\left(\hat{a}\exp^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}\right)\sin(kz), \tag{1.12}$$

где $\hat{a} = \hat{a}(0)$ и $\hat{a}^\dagger = \hat{a}^\dagger(0)$. Теперь можно ввести, так называемые, квадратурные операторы поля

$$\hat{Q} = \frac{\hat{a} + \hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}, \tag{1.13}$$

$$\hat{P} = \frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}. \tag{1.14}$$

Квадратурные компоненты поля удовлетворяют соотношению неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta Q \Delta P \geqslant \frac{1}{2}, \tag{1.15}$$

где ΔQ и ΔP — это среднеквадратичные отклонения для квадратур поля соответственно.

В квантовой оптике для визуализации квадратурных распределений используют функции квазивероятностей, описывающие совместное распределение по Q и P: например, функция Вигнера, функция Глаубера-Сударшана, Q-функция Хусими (Husimi). Наиболее известная среди них — функция Вигнера. Важным свойством функции Вигнера является отрицательность её части значений для некоторых классов состояний. Именно поэтому она служит одним из критериев определения неклассических состояний света. Функция Вигнера $W(Q, P)$ для чистого состояния $\psi(Q)$ определяется как

$$W(Q,P) = \frac{1}{2\pi} \int \psi\left(Q + \frac{y}{2}\right) \psi^*\left(Q - \frac{y}{2}\right) e^{-iPy} dy. \tag{1.16}$$

Операторы рождения и уничтожения фотонов являются базовыми элементами квантовой оптики. Несмотря на то, что они неэрмитовы и неунитарны, они могут быть реализованы в эксперименте. Отметим, что приготовление состояний с отщеплением или добавлением фотонов обязательно является вероятностным процессом с, как правило, низкой вероятностью успеха. Самый простой способ либо отщепить, либо добавить один фотон — это слабое взаимодействие с вспомогательной модой (вакуумом), при этом детектирование фотона в этой дополнительной моде означает успешный факт реализации оператора уничтожения или рождения [70].

Рассмотрим схему, показанную на рис. 1.1a. Состояние $|\Psi\rangle$, из которого должен быть отщеплён фотон, падает на светоделитель с очень низким коэффициентом отражения. Вакуумное состояние подаётся на другой вход

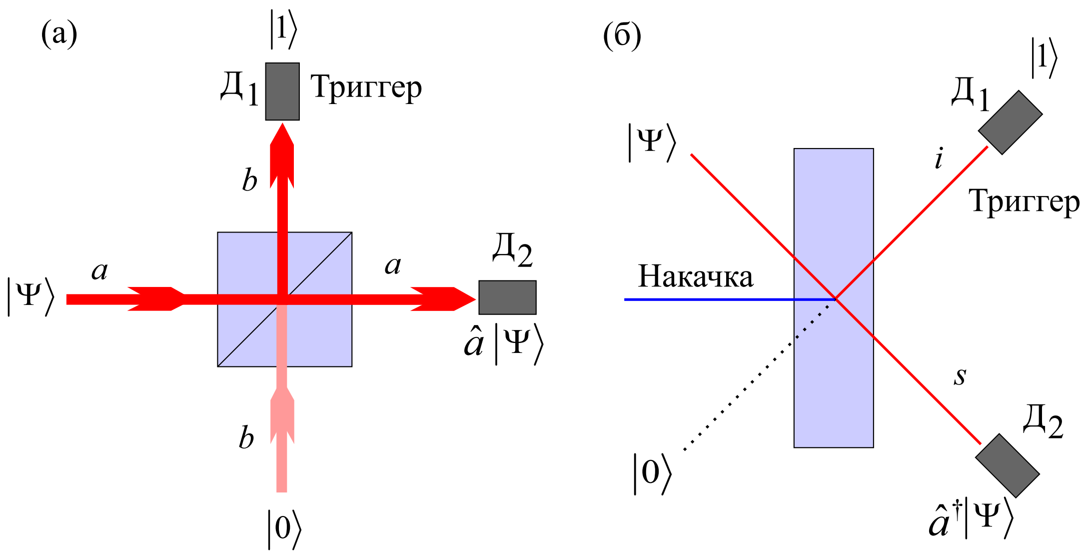

Рисунок 1.1 — Реализация оператора уничтожения (а) и добавления фотона (б).

светоделителя. Действие светоделителя на входные состояния описывается унитарным оператором

$$U = e^{i\theta\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right)}, \tag{1.17}$$

где $\theta = \arcsin\sqrt{R}$, а R — коэффициент отражения светоделителя. Тогда, состояние на выходе светоделителя можно записать в виде

$$|\Psi_{ab}\rangle \cong |\Psi\rangle|0\rangle + i\theta\left(\left(\hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right)|\Psi\rangle|0\rangle\right) = |\Psi\rangle|0\rangle + i\theta\hat{a}\,|\Psi\rangle|1\rangle \tag{1.18}$$

при условии, что коэффициент отражения является малой величиной. Состояние в моде a после детектирования одного фотона в моде b приводит к условной реализации оператора уничтожения фотона

$$|\Psi_a\rangle_{out} \sim \hat{a}\,|\Psi\rangle\,. \tag{1.19}$$

Реализация оператора рождения фотона является немного более сложным процессом. Она достигается посредством взаимодействия квантового состояния $|\Psi\rangle$ (в сигнальном канале) и накачки на нелинейном кристалле квадратичной восприимчивости [70], в котором происходит спонтанное параметрическое рассеяния света (рис. 1.1б). В первом порядке теории возмущений выходное состояние определяется как

$$|\Psi_{s,i}\rangle \cong \left[1 + \left(g\hat{a}_s^{\dagger}\hat{a}_i^{\dagger} - g^{*}\hat{a}_s\hat{a}_i\right)\right]|\Psi\rangle_s|0\rangle_i = |\Psi\rangle_s|0\rangle_i + g\hat{a}_s^{\dagger}\,|\Psi\rangle_s|1\rangle_i\,, \tag{1.20}$$

где g — коэффициент, пропорциональный длине кристалла, полю накачки и квадратичной восприимчивости среды. Состояние в сигнальном канале после детектирования одного фотона в холостом канале приводит к условной реализации оператора рождения фотона

$$|\Psi_s\rangle_{out} \sim \hat{a}_s^{\dagger} |\Psi\rangle_s . \tag{1.21}$$

1.2 Измерение и восстановление оптических квантовых состояний

В настоящее время активно используются, в основном, два способа измерения оптических квантовых состояний: измерение статистики фотоотсчётов (рисунок 1.2а) [73; 74] и балансное гомодинное детектирование (рисунок 1.2б) [75].

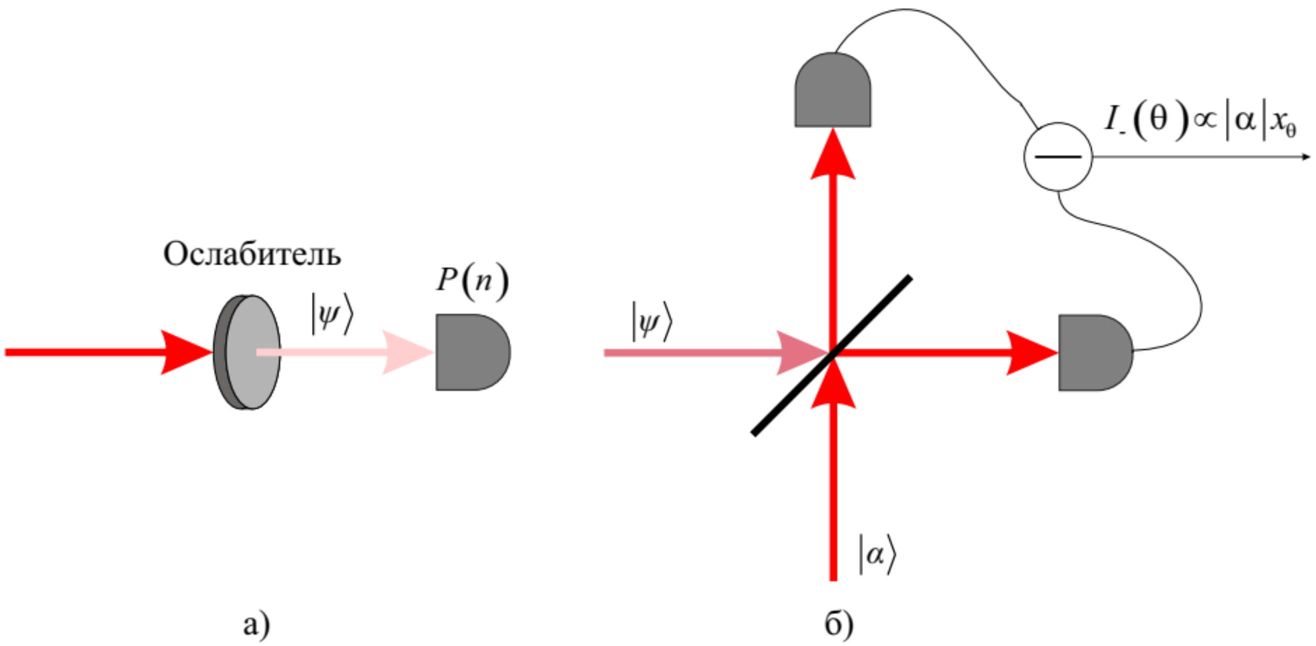

Рисунок 1.2 — Измерение статистики фотоотсчётов (а) и метод балансного гомодинного детектирования (б).

В первом случае восстанавливается распределение по числу фотонов $P(n)$, например, распределение Пуассона в случае когерентного состояния, откуда потом определяются параметры состояния. Данный подход достаточно прост с экспериментальной точки зрения, необходимо завести излучение в детектор, разрешающий число фотонов и проанализировать полученную статистику фотоотсчётов. Его использование ограничивает тот факт, что можно восстановить только модули коэффициентов разложения по фоковскому базису, но никак не их фазы.

Распределение вероятностей по числу фотонов $P(n)$ является ключевой характеристикой произвольного квантового состояния. Для работы с распределением по числу фотонов удобно использовать аппарат производящих функций $G(z)$:

$$G(z) = \sum_n P(n) z^n. \tag{1.22}$$

Вероятность обнаружить n фотонов — это n-ая производная производящей функции при нулевом аргументе $z = 0$, а факториальный момент m-ого порядка $M\left[n(n-1)\cdots(n-m+1)\right]$ (здесь $M\left[\cdots\right]$ — это операция математического ожидания) равен n — ой производной производящей функции при аргументе $z = 1$ [76—79]:

$$P(n) = \frac{G^{(n)}(0)}{n!}, \tag{1.23}$$

$$M\left[n(n-1)\cdots(n-m+1)\right] = \frac{\partial^m G(z=1)}{\partial z^m}. \tag{1.24}$$

В частности, среднее (математическое ожидание) $\langle n \rangle = G^{(1)}(1)$, а дисперсия $D(n) = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = G^{(2)}(1) + G^{(1)}(1) - \left(G^{(1)}(1)\right)^2$.

Для реализации процесса отщепления фотона используется светоделитель с малым коэффициентом отражения r и однофотонный детектор, регистрирующий факт отщепления фотона (раздел 1.1). Вероятность того, что на вход светоделителя поступит n фотонов, равна $P(n)$, при этом только один отразится с вероятностью $nr(1-r)^{n-1}$. Тогда итоговая вероятность получить состояние с $n-1$ фотоном равна $NP(n)nr(1-r)^{n-1}$, где N – нормировочный множитель. Таким образом, исходная зависимость от n в распределении $P(n)$ изменяется посредством множителя $n(1-r)^{n-1}$. Заметим, что при исчезающе малом $r \to 0$ следует учитывать только множитель n, поскольку в этом случае $(1-r)^{n-1} \to 1$. Можно выразить процесс отщепления фотона, используя операторы рождения и уничтожения:

$$\rho^{out} = C\hat{a}\rho^{in}\hat{a}^\dagger. \tag{1.25}$$

Можно показать [79; 80], что, когда коэффициент отражения светоделителя стремится к нулю $r \to 0$, производящая функция $G_1(z)$ распределения числа фотонов для состояния с одним отщеплённым фотоном определяется производной производящей функции распределения исходного состояния:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z)}{G^{(1)}(1)} = \frac{G^{(1)}(z)}{\mu}, \tag{1.26}$$

где μ – среднее число фотонов в исходном состоянии. В случаях, когда r недостаточно мало и невозможно игнорировать приведенное выше выражение, имеем:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z(1-r))}{G^{(1)}(1-r)}. \tag{1.27}$$

Применяя (1.26) K раз, находим производящую функцию для состояния с отщеплением K фотонов:

$$G_K(z) = \frac{G^{(K)}(z)}{\mu\mu_1 \cdots \mu_{K-1}}, \tag{1.28}$$

где μ_K – среднее число фотонов в состоянии с K отщеплёнными фотонами.

Выражения (1.26) и (1.28) могут использоваться как для вычисления распределения $P(n)$, так и для вычисления корреляционной функции m –го порядка:

$$g^{(m)}(0) = \frac{G^{(m)}(1)}{\mu^m} = \frac{\mu_1\mu_2 \cdots \mu_{m-1}}{\mu^{m-1}}, \ \ m = 2, 3, \ldots . \tag{1.29}$$

Рассмотрим несколько примеров.

Фоковское состояние. Распределение по числу фотонов для фоковского состояния $|m\rangle$ есть $P(n) = \delta_{m,n}$, а производящая функция – $G(z) = z^m$. После отщепления фотона (1.26) производящая функция $G(z)$ переходит в $G_1(z) = z^{m-1}$, что соответствует состоянию $|m-1\rangle$.

Когерентное состояние. Когерентное состояние может быть записано в фоковском базисе как $|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2\right) \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$, поэтому его распределение по числу фотонов определяется распределением Пуассона $P(n) = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \exp\left(-|\alpha|^2\right)$ со средним числом фотонов $\mu = |\alpha|^2$, а производящая функция $G(z) = e^{\mu(z-1)}$. Применяя операцию отщепления фотона (1.26), можно убедиться, что $G_1(z) = G(z)$, то есть когерентное состояние не меняется при отщеплении фотона.

Сжатый вакуум. Распределение по числу фотонов для сжатого вакуума есть

$$\begin{aligned} &P(2n) = \frac{1}{\cosh(|\xi|)} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}\tanh(|\xi|)\right)^{2n}, \\ &P(2n+1) = 0, \ \ n = 0{,}1, \ldots . \end{aligned} \tag{1.30}$$

Соответственно производящая функция

$$G(z) = \frac{1}{\cosh(|\xi|)\sqrt{1 - z^2 \tanh^2(|\xi|)}}, \tag{1.31}$$

а среднее число фотонов $\mu = G^{(1)}(1) = \sinh^2(|\xi|)$. Используя представленный подход, можно, например, вычислить автокорреляционную функцию n – ого порядка для сжатого вакуума

$$g^{(n)} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!} \left(\frac{1}{\sinh^2(|\xi|)} \right)^k, \tag{1.32}$$

где $\lfloor \ldots \rfloor$ – округление до ближайшего целого в меньшую сторону.

С другой стороны, метод балансного гомодинного детектирования в отличие от измерения статистики фотоотсчётов позволяет восстановить и модули коэффициентов, и фазы, но он немного сложнее. Идея гомодинного детектирования заключается в следующем: для измерения квадратурной наблюдаемой электрического поля $Q_\theta = Q\cos(\theta) + P\sin(\theta)$ достаточно совместить на сбалансированном светоделителе изучаемое поле с более мощным оптическим излучением — гомодином (локальным осциллятором) (рисунок 1.2б). Тогда в выходных каналах такого светоделителя будет наблюдаться интерференционный сигнал, который может быть измерен линейными (аналоговыми) фотодетекторами. Для того чтобы выделить зависящие от фазы гомодина флуктуации фототока на фоне постоянной компоненты, следует усилить и измерить разностный фототок. В рассматриваемой схеме, измеренные при разных значениях фазы гомодина θ значения разностного фототока соответствуют собственным значениям Q_θ квадратурного оператора. При этом, координата и импульс являются только двумя частными случаями, отвечающими фазам гомодина 0 и $\pi/2$ соответственно [15; 17; 71; 81]. Другими словами, квадратурное распределение представляет собой квадрат модуля проекции неизвестного квантового состояния $|\psi\rangle$ на собственное состояние $|Q_\theta\rangle$:

$$Pr(Q_\theta) = |\langle Q_\theta|\psi\rangle|^2. \tag{1.33}$$

Полученные в результате гомодинного детектирования данные соответствуют некоторому квадратурному распределению $P(Q_\theta)$, из которого впоследствии методами квантовой томографии определяются параметры состояния.

Кратко опишем перевод разностного напряжения V_-, получаемого на выходе балансного гомодинного детектора, в значения квадратуры в непрерывном режиме измерений, что является крайне важным в настоящем диссертационном исследовании (разделы 2.1.2, 2.2.2, 2.3.3, 3.2). Квадратурную компоненту

Q_θ можно выразить через разностное число фотонов n_- и когерентное состояние гомодина α_0 как

$$Q_\theta = \frac{n_-}{\sqrt{2}|\alpha_0|}. \tag{1.34}$$

Интересующие нас для расчётов параметры балансного гомодинного детектора следующие: коэффициент усиления разностного тока $\Gamma_- = \frac{V_-}{I_-}\frac{\text{В}}{\text{А}}$, коэффициент усиления отдельных каналов (мониторов) $\Gamma_0\frac{\text{В}}{\text{А}}$, эффективность детектора $\eta\frac{\text{А}}{\text{Вт}}$.

Разностное число фотонов равно

$$n_- = \frac{P_-\tau}{E_{ph}} = \frac{I_-\tau}{\eta E_{ph}} = \frac{V_-\tau}{\Gamma_-\eta E_{ph}}, \tag{1.35}$$

где $E_{ph} = \frac{hc}{\lambda}$ — энергия одного фотона, τ — время усреднения, P_- — мощность разностного сигнала. Аналогично, среднее число фотонов $|\alpha_0|^2$ поля гомодина

$$|\alpha_0|^2 = \frac{P_0\tau}{E_{ph}} = \frac{2V_0\tau}{\Gamma_0\eta E_{ph}}. \tag{1.36}$$

Здесь под V_0 имеется в виду среднее от суммы сигналов V_1 и V_2.

Подставляя в (1.34), получаем

$$Q_\theta = V_-\sqrt{\frac{\Gamma_0\tau\lambda}{4\Gamma_-^2\xi^2\eta V_0 hc}}, \tag{1.37}$$

где коэффициент $\xi = 1 - f_{max}\tau$ — поправка к эффективности детектора η (или коэффициенту усиления) Γ_-, связанная с фильтрацией низких частот ($f_{max} = 1$ кГц). В силу того, что спектр усилителя не воспринимает высокие частоты шумов, время усреднения должно быть больше, чем обратная ширина полосы детектирования.

Как хорошо известно, дисперсия квадратурной компоненты вакуумного состояния $\sigma_0^2 = \frac{1}{2}$ и её несоответствие экспериментально измеренной дисперсии можно объяснить неединичной квантовой эффективностью гомодинного детектора. Квадратурное распределение вакуума без учета эффективности детектора выражается нормальным распределением:

$$P(Q_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\exp\left(-\frac{Q_\theta^2}{2\sigma_0^2}\right). \tag{1.38}$$

При учёте эффективности детектора возникает переход $P(Q_\theta) \to \tilde{P}(Q_\theta)$. Это преобразование можно описать следующим образом:

$$\tilde{P}(Q_\theta) = \int K(Q_\theta, Q'_\theta)P(Q'_\theta)dQ'_\theta. \tag{1.39}$$

Ядро $K(Q_\theta, Q'_\theta)$ есть

$$K(Q_\theta, Q'_\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta} \exp\left(-\frac{(Q_\theta - Q'_\theta)^2}{2\sigma_\eta^2}\right). \tag{1.40}$$

Величина σ_η — это функция от квантовой эффективности, равная $\sigma_\eta = \sqrt{\frac{1-\eta}{2\eta}}$. То есть вместо измеренного среднеквадратичного отклонения σ_0, имеем $\sigma = f(\sigma_0, \sigma_\eta)$:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_\eta^2}. \tag{1.41}$$

Экспериментально измеренные значения среднеквадратичных отклонений квадратурной компоненты вакуума и когерентного состояний полностью соответствует уширению за счёт эффективности детектора η.

Измеренные квадратурные распределения $P(Q_\theta)$ связаны с функцией Вигнера $W(Q,P)$ квантового состояния посредством прямого преобразования Радона [82]. Это преобразование можно численно инвертировать, например, с использованием алгоритма обратной проекции (back-projection algorithm) [15; 82]

$$W(Q,P) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^{\infty} P(q_\theta, \theta) K(X\cos(\theta) + P\sin(\theta) - q_\theta) dq_\theta d\theta \tag{1.42}$$

с ядром

$$K(y) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |\xi| \exp(i\xi y) d\xi. \tag{1.43}$$

Поскольку ядро $K(y)$ неограниченно при $y = 0$, поэтому в численных реализациях обратного преобразования Радона оно подвергается фильтрации нижних частот: бесконечные пределы интегрирования в уравнении (1.43) заменяются на $\pm k_c$, причём k_c выбирается так, чтобы уменьшить числовые артефакты, связанные с реконструкцией, при сохранении основных характеристик функции Вигнера. Этот метод известен как алгоритм фильтрованной обратной проекции (filtered back-projection algorithm [15]).

Эта стратегия использовалась в первых экспериментах по томографии квантовых состояний [75; 83]. В более поздних реализациях этого алгоритма[84], промежуточный шаг в виде группировки данных и вычисления маргинальных распределений, связанных с каждой фазой, был пропущен: суммирование в уравнении (1.42) применялось непосредственно к собранным в эксперименте парам значений (θ_m, q_{θ_m})

$$W(Q,P) \cong \frac{1}{2\pi^2 N} \sum_{m=1}^{N} K(X\cos(\theta_m) + P\sin(\theta_m) - q_{\theta_m}). \tag{1.44}$$

Здесь фаза θ_m равномерно распределена в интервале от 0 до 2π.

Более общий метод восстановления функции Вигнера состояния, подвергшегося оптическим потерям, был предложен в [85], где уравнения (1.42) и (1.43) были модифицированы таким образом, чтобы учесть неединичную квантовую эффективность детектора.

Измерение распределений квадратурных наблюдаемых совместно с обратным преобразованием Радона приводит к восстановлению квантового состояния в форме функции Вигнера. Строго говоря, обратное преобразование Радона неявно предполагает, что измерения выполнены абсолютно точно и собрано неограниченное количество данных, включающее бесконечное число «срезов» в фазовом пространстве, каждый из которых включает в себя выборку бесконечного объема. Реальные данные, конечно, не удовлетворяют этим условиям. В результате часто оказывается, что реконструированное состояние содержит физически бессмысленные артефакты (например, матрица плотности имеет отрицательные собственные значения или содержит отрицательные числа на диагонали). Даже если отмеченные артефакты каким-либо способом устранены, исследователю очень трудно сделать правильные выводы о точности, надежности и эффективности, как физических измерений, так и математических методов реконструкции. Таким образом, важное с исторической точки зрения обратное преобразование Радона не является, все-таки, вполне строгим и надежным методом реконструкции квантового состояния (впрочем, это замечание относится и ко всем другим методам линейной инверсии). Кроме того, обратное преобразование Радона позволяет восстановить только функцию Вигнера, но не саму матрицу плотности. И если переход от ρ к $W(Q,P)$ легко осуществим, то обратная задача является некорректно поставленной, хоть и имеет аналитическое решение, результаты которой неверны из-за статистических флуктуаций. Другими способами восстановления состояния в форме функции Вигнера являются методы оптимизации, вносящими ещё дополнительную ошибку (например, метод модельных функций — pattern functions [86; 87]).

Для более корректной и точной реконструкции квадратурных состояний применяют подходы, основанные на методе максимального правдоподобия (МП)

[77; 88]. Предложенный изначально Фишером в начале 20 века метод МП для квантовой томографии довольно сложен в использовании ввиду оценивания большого количества параметров и плохой обусловленности поставленной задачи. Поэтому в нынешнее время получили популярность различные вариации метода МП [16; 89—92], принципиально ориентированные на томографию квантовых состояний.

Все разновидности метода МП объединяет общая идея — максимизации функции правдоподобия L. Рассматриваемая конструкция представляет собой многомерную плотность совместного распределения случайных величин, если экспериментальные данные интерпретировать как совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин. Если же имеется только одна конкретная реализация (фиксированная выборка экспериментальных данных q_{θ_m},θ_m), то функция правдоподобия, рассматриваемая как функция параметров квантового состояния, характеризует «степень правдоподобия» тех или иных значений этих параметров:

$$L = \prod_{m=1}^{N} P(q_{\theta_m},\theta_m|\rho) = \prod_{m=1}^{N} \langle q_{\theta_m},\theta_m| \, \rho \, |q_{\theta_m},\theta_m\rangle \,. \tag{1.45}$$

Затем на основе функции L составляется уравнение, решаемое итерационными способами. Например, в работе [93] предлагается решать уравнение следующего вида:

$$\rho^{(k+1)} = C\left(\hat{R}(\rho^{(k)})\rho^{(k)}\hat{R}(\rho^{(k)})\right), \tag{1.46}$$

где C — нормировочная константа, а $\hat{R}(\rho^{(k)}) \propto$ функции правдоподобия L. Существенным недостатком данного подхода является восстановление состояния только в фоковском базисе, а также реконструкция матрицы плотности ρ как смешанного состояния полного ранга. То есть требуется восстановить сразу большое число независимых параметров, и это ограничивает точность.

В работах [3—5; 18; 94] был предложен и использован корневой подход, позволяющий эффективно и с прецизионной точностью восстанавливать параметры квантовых состояний. Ключевым в корневом подходе является то, что мы оцениваем не непосредственно матрицу плотности квантового состояния ρ, а квадратный корень из нее $c = \sqrt{\rho}$ (отсюда и название метода):

$$P(q_{\theta_m},\theta_m|\rho) = \sum_{j,l,k} c^{\dagger}_{kl}\varphi^{*}_{l}(q_{\theta_m},\theta_m)\varphi_{j}(q_{\theta_m},\theta_m)c_{jk}, \tag{1.47}$$

где $\varphi_j(q_\theta,\theta)$ – набор базисных функций сдвинутых сжатых фоковских состояний:

$$\varphi_j(q_\theta,\theta) \equiv \langle q_\theta,\theta|\alpha,\xi,j\rangle = \sum_{m,l} \varphi_m(q_\theta) e^{im\theta} S_{ml} D_{lj}. \tag{1.48}$$

Здесь $j = 0,1,\ldots,s-1,s$, S_{ml} и D_{lj} – матрицы сжатия и сдвига в фоковском базисе, $|\alpha,\xi,j\rangle = \hat{S}(\xi)\hat{D}(\alpha)\,|j\rangle$ – сжатое сдвинутое фоковское состояние, а $\varphi_m(q_\theta)$ – базисная функция гармонического осциллятора.

В рамках корневого подхода уравнение правдоподобия принимает вид [94]:

$$Rc = Nc, \tag{1.49}$$

где R – матрица размерности $s \times s$, c – очищенная амплитуда вероятности, представляющая собой матрицу размерности $s \times r$ для квантового состояния ранга r, N – объем выборки. Матричные элементы R даются следующим выражением

$$R_{jl} = \frac{\varphi_j^*(q_{\theta_m},\theta_m)\varphi_l(q_{\theta_m},\theta_m)}{P(q_{\theta_m},\theta_m|\rho)}. \tag{1.50}$$

Рассматриваемая задача является линейной по форме, однако сама матрица R зависит от неизвестной квадратурной плотности $P(q_{\theta_m},\theta_m|\rho)$, поэтому, по существу, рассматриваемая задача является нелинейной и должна, вообще говоря, решаться методом итераций.

1.3 Тепловые состояния света с отщеплением фотонов

Исторически тепловые состояния света лежали в основе квантовой оптики. В 1900 году Макс Планк, изучая спектр черного тела, пришел к концепции фотонов, а в 1956 году Роберт Хэнбери Браун и Ричард К. Твисс исследовали корреляции в тепловом свете с помощью светоделителя и пары детекторов, выходы которых анализировались аналоговой электроникой, позволяющей перемножать значения фототоков и затем их усреднять. Тем самым они показали, что корреляции числа фотонов действительно существуют и использовали их для измерения углового размера звёзд [95].

Начиная с теоретического открытия бифотонных состояний света Д. Н. Клышко в 1966 году [96—98], началось активное развитие квантовой оптики.

Были выполнены различные эксперименты по демонстрации корреляционных свойств бифотонов: фантомное изображение [99], квантовое освещение [100; 101], оптическая когерентная томография [102], а также интерференция Хонга — Оу — Манделя (ХОМ) [103].

Интерференция ХОМ состоит в том, что если на оба входа 50%-ного светоделителя одновременно приходит по одному фотону пары, то на выходе они оба окажутся в одном канале при условии их абсолютной неразличимости. Такая неразличимость включает в себя и неразличимость во времени. Экспериментально эффект наблюдается в совпадениях фотоотсчетов детекторов, установленных в выходные моды светоделителя. Сканируя оптическую задержку в одном из каналов можно перейти от случая, когда фотоны различаются по времени и дают вклад в совпадения фотоотсчетов к случаю, когда различимость по времени исчезает, и совпадения отсутствуют. На графике зависимости скорости счета совпадений от оптической задержки будет наблюдаться провал при значении $\Delta\tau = 0$.

Позднее оказалось, что все перечисленные эффекты, основанные на фотонных корреляциях, могут быть реализованы с классическими тепловыми состояниями света, но с более низкой видностью [19—21; 104—106].

Одной из наиболее часто встречающихся в природе систем, описывающихся смесью фоковских состояний, является тепловое состояние, в котором фоковские состояния имеют больцмановское распределение по энергии [107]:

$$\hat{\rho} = \frac{\exp\left(-\frac{\hat{H}}{k_B T}\right)}{\mathrm{Tr}\left[\exp\left(-\frac{\hat{H}}{k_B T}\right)\right]}. \tag{1.51}$$

В фоковском базисе матрица плотности теплового источника принимает вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\,|n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{(1+\mu)^{n+1}}\,|n\rangle\langle n|\,, \tag{1.52}$$

где μ — среднее число фотонов, а $P(n)$ — распределение Бозе-Эйнштейна.

Самый очевидный способ приготовления такого состояния заключается в выделении одной пространственной и частотно-временной моды от теплового источника, например, лампы накаливания (рисунок 1.3а). Существенным недостатком такого метода является малая интенсивность излучения, или, другими словами, малое среднее число фотонов. Для того чтобы получить $\mu = 1$ в видимом диапазоне, необходимо разогреть лампу до примерно 30000 K, что, по понятным причинам, не представляется возможным. В 60-ых годах 20 века группы исследователей смогли решить данную проблему [108; 109]: оказалось, что при пропускании лазерного излучения через вращающийся матовый диск и последующем выделении одной пространственной и временной моды (рисунок 1.3б), распределение по числу фотонов после диска будет соответствовать распределению Бозе-Эйнтшейна (1.52). Такое состояние назвали квазитепловым. На данный момент времени, это самый используемый способ приготовления теплового состояния. Эффективная температура такого излучения определяется мощностью лазера, умноженной на время когерентности, а время когерентности — временем прохождения матинок (неоднородностей диска) через сечение лазерного пучка, которое может изменяться от нескольких микросекунд до нескольких секунд.

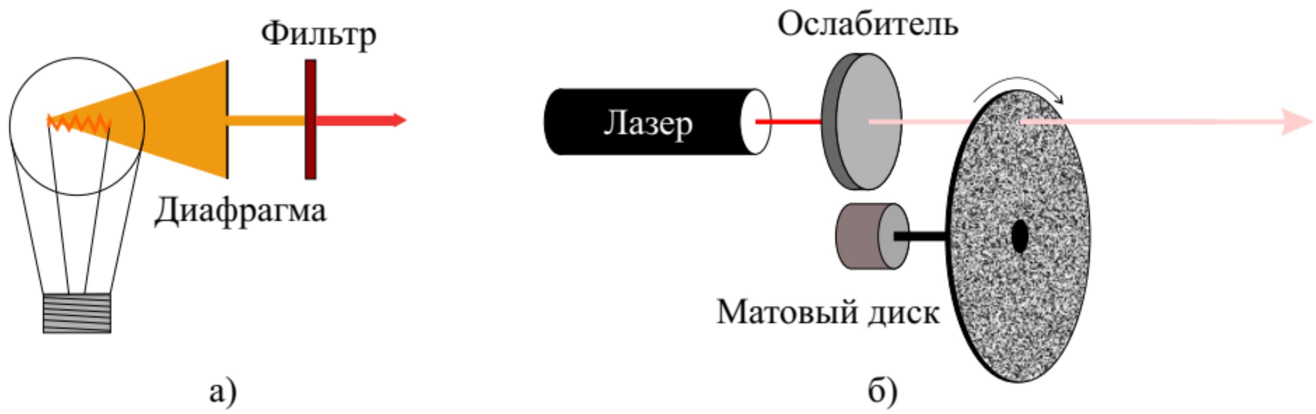

Рисунок 1.3 — Схема приготовления теплового (а) и квазитеплового состояний (а).

Функция Вигнера теплового состояния является распределением Гаусса с нулевым средним и дисперсией, зависящей от среднего числа фотонов в моде.

Интересной модификацией являются тепловые состояния с отщеплением произвольного числа фотонов. Матрица плотности теплового состояния с отщеплением K фотонов является диагональной в фоковском базисе и определяется как [110]

$$\hat{\rho}_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+K}{K} (1-x)^{K+1} x^n \left|n\right\rangle \left\langle n\right|, \; x = \frac{\mu}{1+\mu}. \tag{1.53}$$

Здесь $\binom{n+K}{K} = \frac{(n+K)!}{K!n!}$ — биномиальный коэффициент. Фактически это отрицательное биномиальное распределение [111] с параметром $r = K+1$. Среднее число фотонов в тепловом состоянии с отщеплением одного фотона равно 2μ.

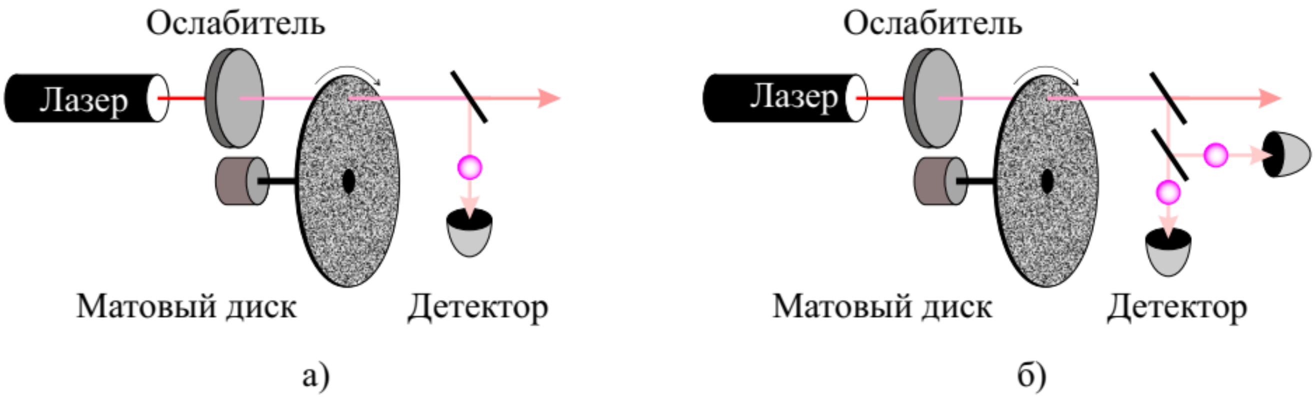

Рисунок 1.4 — Схема отщепления одного (а) и двух фотонов (б) от теплового состояния [27; 112].

Первые эксперименты по приготовлению и измерению тепловых состояний с отщеплением заданного количества фотонов были проведены группой Беллини и Заватты [27; 112]. Принципиальная схема их установки представлена на рисунке 1.4. Отщепление фотонов происходило по каскадной схеме: для отщепления K фотонов им было необходимо K однофотонных детекторов или же использовать детектор, разрешающий число фотонов.

Одним из практических применений (помимо фундаментальных) тепловых состояний с отщеплением фотонов является их использование в тепловой интерферометрии. Оказалось, что соотношение сигнал-шум SNR для такого рода состояний гораздо больше, что в свою очередь позволяет значительно увеличить чувствительность интерферометрии [36]. Схема соответствующей экспериментальной установки приведена на рисунке 1.5а.

Выходной луч узкополосного непрерывного лазера фокусируется на вращающемся матовом диске, а затем заводится в одномодовое оптическое волокно (ОМВ). Тепловой свет с одной поперечной модой, выходящий из ОМВ, затем направляется во входной порт ($\hat{a}$) интерферометра Маха-Цандера. Затем свет из выходного порта ($\hat{c}$) направляется в комбинацию из полуволновой пластины (ПВП) и поляризационного светоделителя (ПСД2) для выполнения процесса отщепления фотонов. Детектор ЛФД2 подсчитывает количество фотонов во временном окне фиксированной длины, обусловленном фактом клика детектора ЛФД. Точно так же свет из другого выходного порта ($\hat{d}$) отправляется на детектор ЛФД3. В этом эксперименте поворот полуволновой пластинки ПВП используется для управления разностью фаз между двумя состояниями ортогональной поляризации светового луча. Для каждого значения фазы находится среднее

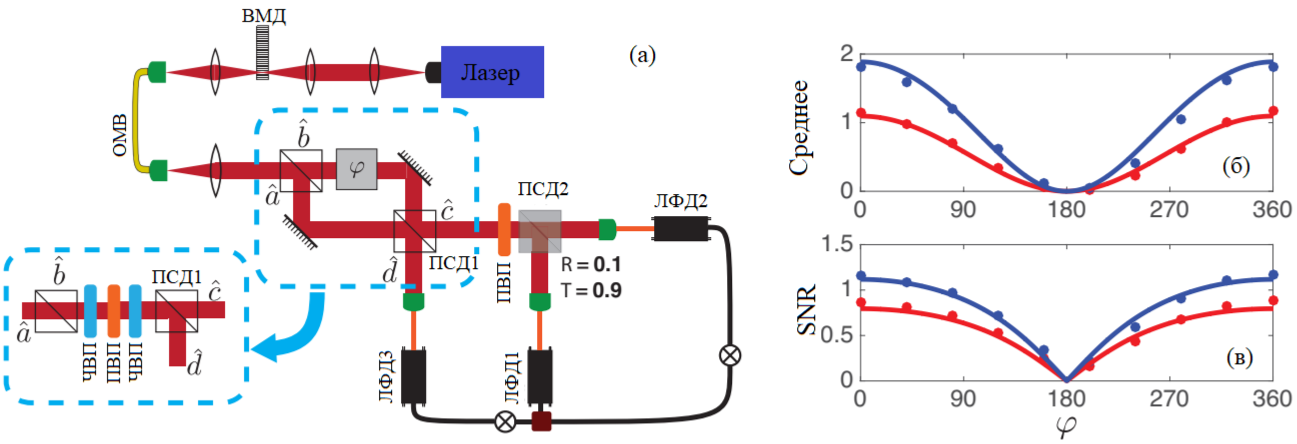

Рисунок 1.5 — Схема экспериментальной установки [36], используемой для наблюдения повышенной чувствительности интерферометрии за счёт отщепления фотонов (а). Среднее число фотонов (б) и соотношение сигнал/шум (в), измеренное на выходе интерферометра с помощью ЛФД2, как функции разности фаз между двумя плечами интерферометра. Точки представляют экспериментальные результаты, а сплошная линия — теоретические предсказания. Красным цветом показан случай без отщепления, синим — с отщеплением одного фотона. Элементы установки: ВМД — вращающийся матовый диск, ОМВ — одномодовое волокно, ПСД — поляризационный светоделитель, ЧВП — четвертьволновая пластинка, ПВП — полуволновая пластинка, ЛФД — лафинный фотодиод.

число фотонов (рисунок 1.5б) и его стандартное отклонение. Затем рассчитывается отношение сигнал/шум путем деления среднего значения на стандартное отклонение (рисунок 1.5в). На рисунках 1.5б и 1.5в красные точки показывают тепловое состояние без отщепления, а синие — с отщеплением одного фотона. Красные и синие кривые — это теоретические предсказания. Прекрасно видно увеличение отношения сигнал/шум для случая с отщеплением фотона, и это означает увеличение чувствительности тепловой интерферометрии.

Возможность произвольного «добавления» и «вычитания» отдельных фотонов в световое поле и из него может дать доступ к полной инженерии квантовых состояний и фундаментальным квантовым явлениям. Например, в работе [27] экспериментально реализовали простые чередующиеся последовательности операторов рождения и уничтожения фотонов в тепловом поле и использовали квантовую томографию для проверки особого характера возникающих в результате состояний света. Поскольку конечные состояния зависят от порядка применения этих операторов, авторы непосредственно наблюдали разные условные квадратурные распределения. Эти результаты представляют важный шаг к полному управлению квантовым состояние поля и способны предоставить новые ресурсы для протоколов квантовой информации.

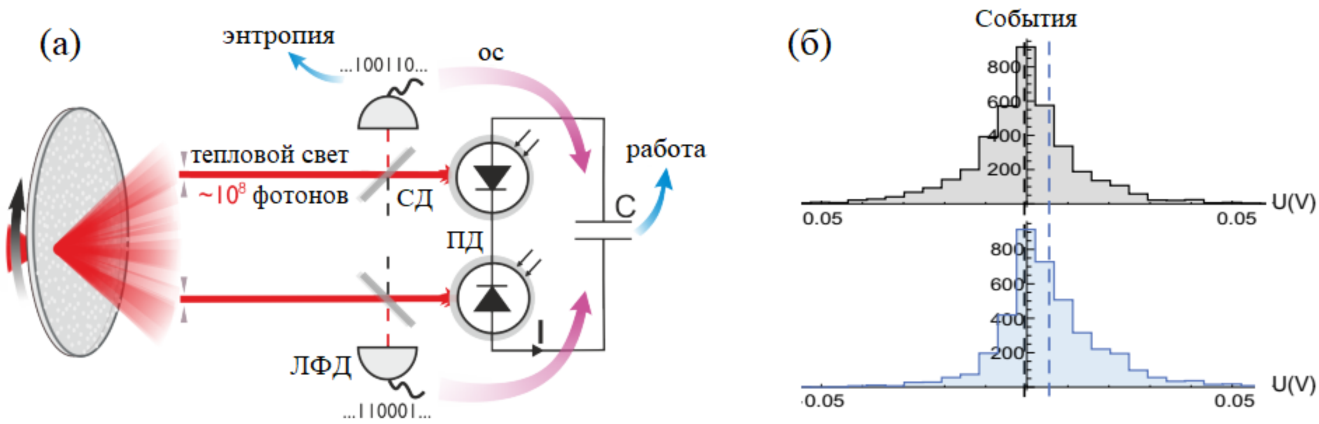

Рисунок 1.6 — Экспериментальная установка по налюдению фотонного демона Максвелла (а) [33]. Измеренные распределения напряжения на конденсаторе C (б). Серый цвет гистограммы — клики ЛФД игнорируются; синий цвет — реализована логическая операция, обусловленная кликами ЛФД: знак следа меняется, когда наблюдаются два сигнала ЛФД — клик и отсутствие клика соответственно. Элементы установки: ЛФД — лафинный фотодиод, ос — обратная связь, СД – светоделитель, ПД — пин-диод, С — конденсатор.

Состояния с отщеплением фотонов могут быть также использованы для бесшумного усиления (noiseless amplification) [30], приготовления сильной керровской нелинейности [31] и условной запутанности [113].

С другой стороны такой набор инструментов может быть использован для моделирования явлений квантовой термодинамики, в частности демона Максвелла. Идея демона Максвелла появился в 1867 году в рамках мысленного эксперимента, в котором обсуждались ограничения второго закона термодинамики. Джеймс Максвелл представил демона как микроскопическое разумное существо, способное управлять перегородкой, разделяющей два резервуара с газом, находящимся в тепловом равновесии. Демон использует перегородку для фильтрации частиц на основе их энергии, тем самым достигается несбалансированное распределение газа. Эта операция, которая, казалось, нарушала второй закон термодинамики, уменьшает энтропию газа без подвода внешней работы. Обсуждения, возникшие из-за кажущегося парадокса, сыграли фундаментальную роль в выявлении связи между информацией и термодинамикой: объем работы, извлекаемой из дисбаланса энергии, создаваемой между резервуарами в результате сортировки, ограничен информацией, полученной посредством измерения демоном энергии отдельных частиц.

В работе [33] была представлена экспериментальная реализация фотонного демона Максвелла. По аналогии с первоначальным мысленным экспериментом с частицами газа по обе стороны перегородки, авторы приготавливали тепловые состояния в двух пространственных световых модах с использованием вращающегося матового диска (рис. 1.6а). Для моделирования демона, измеряющего энергию частиц, каждая тепловая мода света распространялась через светоделитель с высоким коэффициентом прохождения, от которого отражённый свет попадал на высокочувствительный фотодетектор. В установке использовались лавинные фотодиоды, которые сигнализировали о наличии хотя бы одного фотона, давая простой двоичный результат измерения. Отдельно стоит отметить, что авторы рассматривали потребление энергии детекторами, как относящееся к демону, то есть не вычитали её из полученной работы.

В установке изменение ожидаемой энергии после измерения может быть настроено путем выбора количества света, направляемого на лавинные фотодетекторы. Если игнорировать результаты фотодетекторов, то эффект измерения сводится к пренебрежимо малым потерям, вносимым светоделителями с высоким коэффициентом пропускания. Прямая связь результатов моделирования демона может быть реализована путем перераспределения энергии теплового света на основе кликов лавинных фотодиодов, так что в среднем больше энергии в какой-то из двух мод. Посредством этой операции можно создать асимметричное распределение энергии в двух исходно равновесных тепловых модах.

Для извлечения работы световые моды падают на два пин-диода, соединенных противоположными полярностями, так что в среднем они производят нулевое напряжение, когда интенсивности света равны. Эта схема подключения пин-диода включает в себя конденсатор, который заряжается в соответствии с колеблющейся разницей энергии между двумя световыми модами. Тогда при несбалансированном распределении энергии, то есть реализации отщепления фотона в нижнем детекторе, конденсатор будет иметь ненулевое среднее напряжение, которое можно использовать для зарядки батареи (рис. 1.6б). Другими словами, авторы демонстрируют, что микроскопические измерения могут использоваться для извлечения макроскопической работы.

Можно рассмотреть работу [34], связанную с изучением фундаментальных явлений квантовой термодинамики. Авторы провели аналогию между диссипацией энергии молекул из нагретого резервуара на холодном резервуаре с процессом отщепления фотонов из многомодового теплового света. Так как среднее число фотонов при отщеплении от теплового состояния повышается, следовательно, растёт и энтропия из-за отсутствия какой-либо внешней работы. Многомодовое тепловое состояние приготавливается с помощью вращающегося матового диска импульсным лазером на длине волны 805 нм. Отщепление фотона выполняется с использованием светоделителя с коэффициентом отражения 5%. Установленный в отражённом канале массив однофотонных детекторов фиксирует многофотонное отщепление. Измерение статистики фотонов выполняется детектором, разрешающим число фотонов. Полученная в ходе измерений нормированная работа описывается следующим образом

$$\frac{\langle W\rangle}{k_B T} = \frac{1}{(1+\mu_0)^{k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\mu_0}{1+mu_0}\right)^n \frac{(n+k)!}{n!k!} \ln\left(\frac{1}{(1+\mu_0)^k}\frac{(n+k)!}{n!k!}\right). \quad (1.54)$$

Как можно видеть из (1.54) работа повышается с увеличением количества отщепляемых фотонов.

1.4 Эффект квантового вампира

В отличие от обычных оптических потерь, отщепление фотонов не меняет пространственного распределения интенсивности. Это лежит в основе эффекта «квантового вампира» [32], которому посвящен этот раздел. Рассмотрим небольшой светоделитель, помещенный в большой световой пучок (рисунок 1.7а). Если коэффициент отражения достаточно велик ($\langle n_R\rangle = \mu_R = 1$), то будет наблюдаться тень (провал) в распределении интенсивности, измеренном камерой. Теперь уменьшим коэффициент отражения светоделителя до очень малого значения: $R \ll 1$, $n_R \ll 1$ (рисунок 1.7б). В этом случае тень не наблюдается, но затем можно выбрать те временные события, когда обнаружен фотон в отраженном канале, и использовать щелчок детектора в качестве триггера для камеры. Таким образом, можно измерить распределение интенсивности при условии, что число фотонов в отраженном канале $n_R = 1$ (рисунок 1.7в). Эта ситуация очень похожа на предыдущую, показанную на рисунок 1.7а, и можно интуитивно сделать вывод, что условное распределение интенсивности снова покажет присутствие тени, но точное рассмотрение этой проблемы показывает, что начальное распределение интенсивности будет равномерно уменьшено для субпуассоновского света или увеличено для суперпуассоновского света. Это отсутствие тени было названо эффектом «квантового вампира».

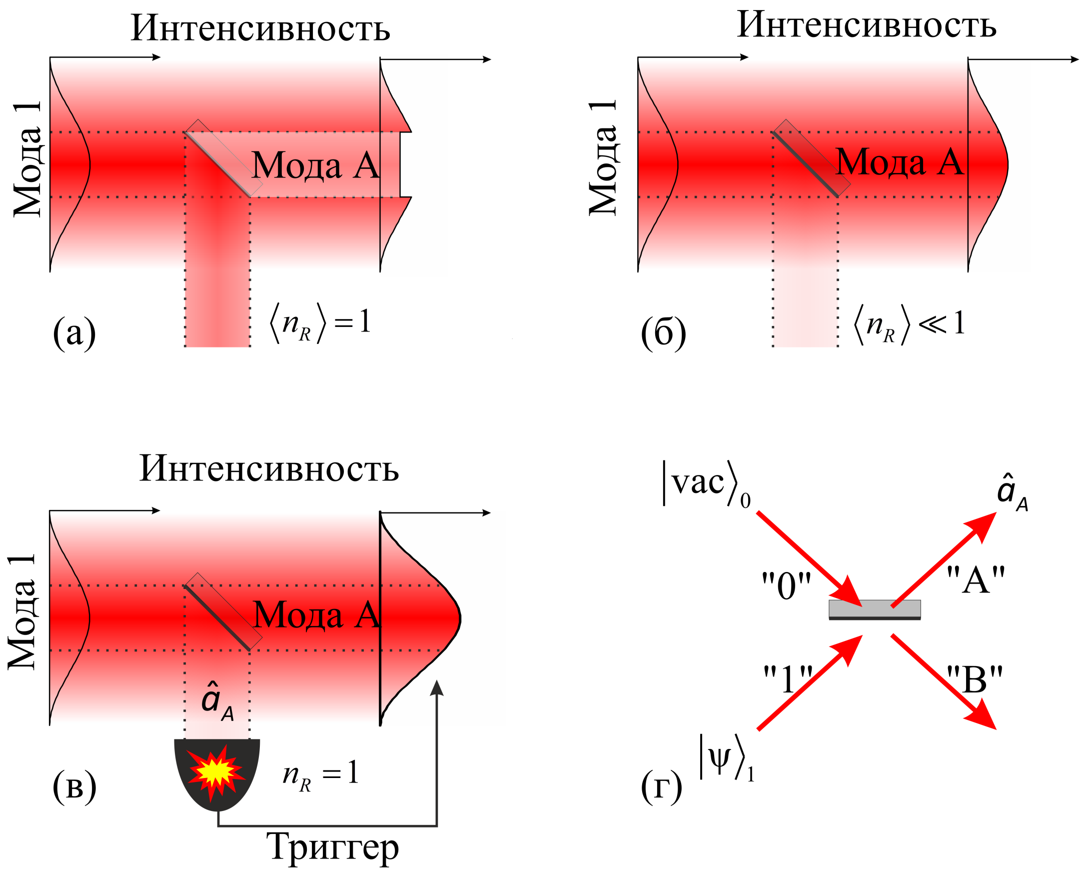

Рисунок 1.7 — Идея эффекта «квантового вампира». Светоделитель с высоким коэффициентом отражения отражает в среднем 1 фотон ($\langle n_R \rangle = 1$), внося оптические потери в часть луча (мода А) и отбрасывает тень в распределении выходной интенсивности (а). Светоделитель с низким коэффициентом отражения ($n_R \ll 1$) не отбрасывает тени (б). Однофотонный детектор регистрирует отраженные фотоны и позволяет измерять распределение интенсивности при условии ($n_R = 1$), что соответствует отщеплению фотонов в моде А (в). Это не приводит к тени, но изменяет общую интенсивность пучка. Упрощенная двухмодовая схема эффекта (г).

Для доказательства последнего утверждения отметим, что комбинация светоделителя с низким коэффициентом отражения и детектора одиночных фотонов является условной реализацией оператора отщепления фотонов 1.1. Рассмотрим квантовое состояние света $|\psi\rangle_1$, направленное на вход «1» светоделителя, вакуумное состояние $|vac\rangle_0$, направленное на вход «0» и процедуру отщепления фотона в выходной моде «А» (рисунок 1.7г). Оператор уничтожения в моде А

$\hat{a}_A = T\hat{a}_0 + R\hat{a}_1$, где T и R – коэффициенты пропускания и отражения светоделителя. Следовательно, действие оператора $\hat{a}_A$ на состояние $|\psi\rangle_1$ можно записать следующим образом:

$$\hat{a}_A \left|\psi\right\rangle_1 \left|vac\right\rangle_0 = \underbrace{T\hat{a}_0 \left|\psi\right\rangle_1 \left|vac\right\rangle_0}_{0} + R\hat{a}_1 \left|\psi\right\rangle_1 \left|vac\right\rangle_0, \qquad (1.55)$$

то есть отщепление фотона в моде «A» $\hat{a}_A \left|\psi\right\rangle_1$ приводит к отщеплению фотона в исходной моде «1» $R\hat{a}_1 \left|\psi\right\rangle_1$. Теперь можем обозначить начальную моду пучка на рисунке 1.7 как моду «1», а часть пучка, падающего на светоделитель, как моду «A» и, таким образом, можно сделать вывод, что отщепление фотонов в части пучка приводит к отщеплению фотонов во всём пучке.

В работе [32] был экспериментально продемонстрирован эффект квантового вампира на фоковских состояниях света. Когда в одной из мод применяется оператор отщепления фотона, фотон удаляется из всего начального состояния $|\psi\rangle$. Таким образом, локальное применение оператора отщепления фотона имеет условно «нелокальный» эффект, происходящий без коллапса локального состояния какой-либо из мод светового пучка. Однако, требование использования исключительно квантовых состояний (например, фоковских) не является необходимым. Данный эффект, как будет показано в разделе 2.3, может быть реализован и на классических тепловых состояниях света.

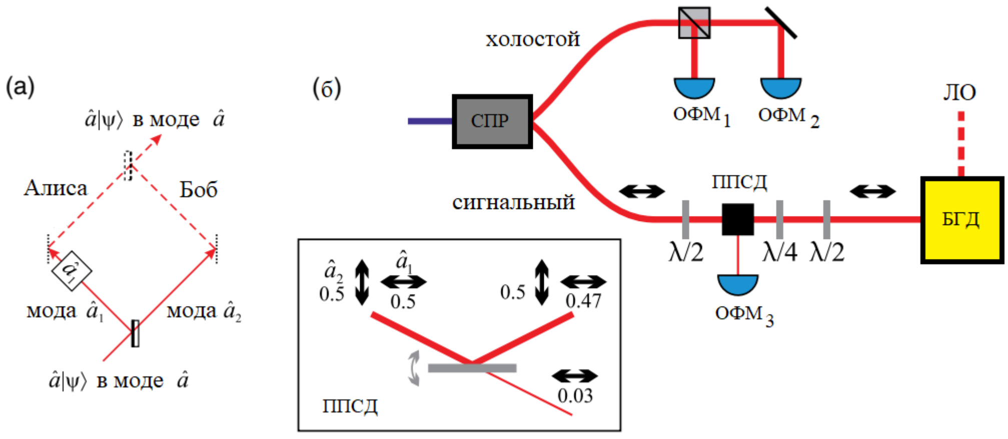

Рисунок 1.8 — Принципиальная идея эффекта «квантового вампира» (а) [32], экспериментальная установка по демонстрации эффекта «квантового вампира» (б). СПР — спонтанное параметрическое рассеяние, ОФМ — однофотонный модуль (счётчик), БГД — балансное гомодинное детектирование, ППСД — перестраиваемый поляризационный светоделитель.

Когда состояние $|\psi\rangle$ в моде, определяемой оператором отщепления фотона $\hat{a}$, разделяется между двумя удаленными направлениями, применение оператора уничтожения фотонов $\hat{a}_1$ в одном из этих направлений влияет на состояние $|\psi\rangle$ глобально. Это можно проверить путём рекомбинации мод $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ на другом светоделителе и анализе выходного состояния (рисунок 1.8а). Экспериментальная установка приведена на рисунке 1.8б. Мода $\hat{a}$ приготавливается на выходе сигнала спонтанного параметрического рассеяния света в одно- или двухфотонном фоковском состоянии. Волновые пластинки образуют интерферометр Маха-Цандера в поляризационном базисе, причём моды $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$ являются его горизонтально и вертикально поляризованными плечами соответственно. Фотон отщепляется из моды $\hat{a}_1$ на элементе ППСД (перестраиваемый поляризационный светоделитель). Его импровизированная реализация показана на вставке, стрелками и цифрами обозначены поляризации мод и их нормированные интенсивности. Коэффициент прохождения ППСД можно настроить, наклонив зеркало.

Резюмируя сказанное, стоит отметить, что тепловые состояния света и тепловые состояния с отщеплением фотонов в настоящее время позволяют реализовывать различные эффекты, которые раньше, как казалось, являются исключительно квантовыми.

1.5 Линейно-оптические квантовые вычисления

1.5.1 Линейно-оптические интегральные схемы

Для линейного оптического m — канального квантового процесса все параметры процесса могут быть определены [114] с помощью передаточной матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ размерности $m \times m$ (в общем случае, не унитарной), которая связывает комплексные амплитуды входного и выходного поля или операторы уничтожения фотонов:

$$\mathbf{E}^{out} = \hat{\mathbf{M}}\mathbf{E}^{in},\ \hat{\mathbf{a}}^{out} = \hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{a}}^{in}, \tag{1.56}$$

где $\mathbf{E} = (E_1, E_2, \ldots, E_m)^\intercal$ и $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}_1, \hat{a}_2, \ldots, \hat{a}_m)^T$ — соответствующие столбцы размерности m. Линейная связь операторов на входе и на выходе есть суть линейного приближения. Элементами передаточной матрицы являются комплексные числа

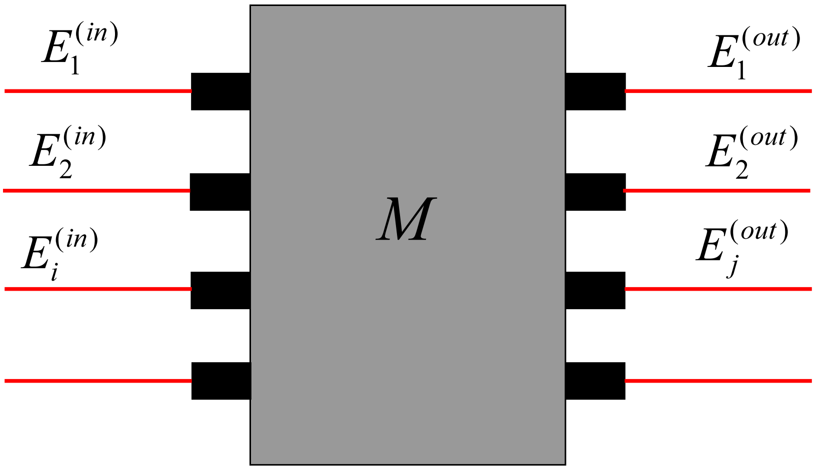

Рисунок 1.9 — Схематическое изображение процесса.

$$M = \begin{pmatrix} |M_{1,1}|e^{i\varphi_{11}} & \dots & |M_{1j}|e^{i\varphi_{1j}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |M_{i1}|e^{i\varphi_{i1}} & \dots & |M_{ij}|e^{i\varphi_{ij}} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \tag{1.57}$$

Квадраты модулей значений матричных элементов — это коэффициенты пропускания по интенсивности, и их можно определить как отношение интенсивностей

$$|M_{ij}|^2 = \frac{\langle I_i^{(out)} \rangle}{\langle I_j^{(in)} \rangle}, \tag{1.58}$$

где $\langle I_j^{(in)} \rangle$ — средняя интенсивность на j-ом входе (все остальные входы закрыты), а $\langle I_i^{(out)} \rangle$ — средняя интенсивность на i-ом выходе. Если определение модулей коэффициентов $|M_{ij}|$ является тривиальным, то измерение фаз φ_{ij} — гораздо более сложная процедура. В большинстве приложений, в частности, в квантовых вычислениях на дискретных степенях свободы фотона, где входные каналы оптической схемы освещаются фазово-нечувствительными фоковскими состояниями света, а выходные подключаются к фазово-нечувствительным детекторам, результаты не зависят от дополнительных фазовых сдвигов на входе и выходе. Это означает эквивалентность матриц M и

$$M' = \Phi^{(out)} M \Phi^{(in)}, \tag{1.59}$$

где Φ – диагональные матрицы с элементами $\Phi_{kk} = \exp(i\varphi_{kk})$. Следовательно, можно выбрать матрицы $\Phi^{(in)}$ и $\Phi^{(out)}$ таким образом, чтобы занулить фазы

$\{\varphi_{1j}\}$ и $\{\varphi_{i1}\}$ матричных элементов в первой строке и первом столбце искомой матрицы U'.

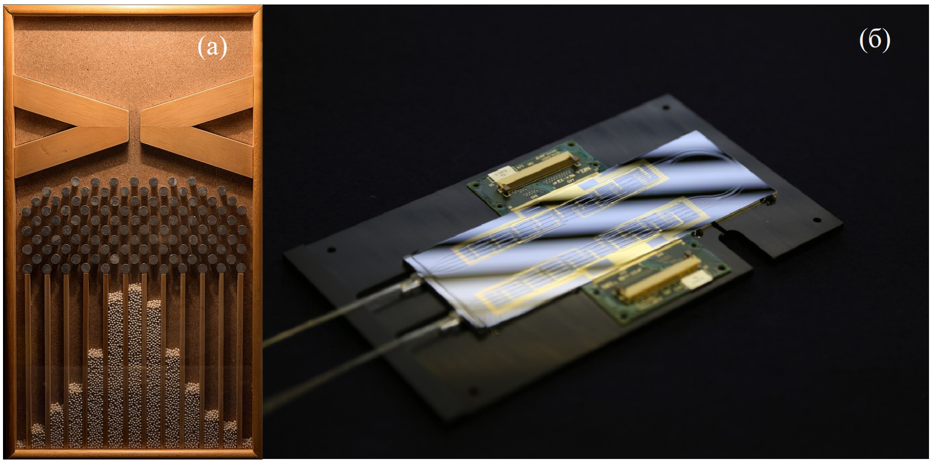

Рисунок 1.10 — Схематическое изображение доски Гальтона (а) [115]и линейно-оптической схемы (б).

Для фотонов существует оптимальная задача квантовой симуляции, решение которой гораздо эффективнее, чем на классическом компьютере. Это так называемая задача бозонного сэмплинга. Рассмотрим сначала классический аналог данной задачи. На рис. 1.10а изображена доска Гальтона — это доска с массой штырьков, куда падают шарики, и дальше шарик случайным образом на каждом штырьке падает налево или направо. И задача такой схемы рассчитать распределение шариков на выходе. В данном случае видно, что если эти шарики кидают сверху, по центру, то распределение будет близко к гауссовому распределению, это несложная классическая задача, которая легко решается. Однако, если мы аналогичным образом будем кидать в такую систему из кучи оптических светоделителей отдельные фотоны, то расчет распределения по числу фотонов на выходе этой системы — это уже сложная задача, которая требует вычисления перманента матрицы размерности $n \times n$, где n — число фотонов, а перманент — это тоже самое, что и детерминант, только при разложении на миноры нет чередования знака. У этой задачи нет упрощенных алгоритмов. Сложность такой задачи $O(2^n n)$, то есть она экспоненциально растет с увеличением числа фотонов. В то же время прямая реализация этого эксперимента (рис. 1.10б) позволяет решить ее гораздо быстрее. Чтобы вычислять перманенты быстрее современных компьютеров, достаточно порядка 60 фотонов.

В декабре 2020 года на линейно-оптическом интегральном чипе 100x100 продемонстрировали квантовое превосходство: группа китайских ученых на таком симуляторе решила задачу бозонного сэмплинга всего за 200 секунд против

2,5 миллиарда лет на ведущем суперкомпьютере Китая [54]. Хотя авторы [55] утверждают, что задачу бозонного сэмплинга можно решить гораздо быстрее и предлагают численный подход, соединяющий классическую и квантовую физику, несомненно квантовое превосходство было достигнуто.

1.5.2 Модели линейно-оптических квантовых вычислений

В линейно-оптических квантовых вычислениях самой распространённой кодировкой кубита является пространственная кодировка, когда у нас есть несколько пространственных путей, как правило, это волноводы в интегральной оптической схеме. Наличие фотона в нижнем волноводе примем за состояние $|0\rangle$, а наличие фотона в верхнем волноводе примем за состояние $|1\rangle$. Такая кодировка называется «двухпутевой кубит» (dual-rail qubit). Кроме того можно кодировать кубит временем прихода фотона. Эта степень свободы часто используется в задачах криптографии при квантовом распределении ключа.

До 2001 года квантовая обработка информации с помощью линейной оптики исследовалась в рамках не масштабируемых архитектур. Линейно-оптический протокол [116] можно рассматривать как симуляцию квантового компьютера: n кубитов представлены одним фотоном на 2^n различных путях. При таком кодировании одно- и двухкубитовые гейты легко реализуются с использованием поляризационных светоделителей и фазовращателей. Например, пусть один кубит задан одним фотоном в двух оптических модах (dual-rail): $|0\rangle_L = |10\rangle$ и $|1\rangle_L = |01\rangle$. Тогда вентиль Адамара, действующий на этот кубит, может быть реализован с помощью светоделителя 50:50 и двумя $-\pi/2$ фазовращателями (рис. 1.11а):

$$|10\rangle \to |1^{'}0^{'}\rangle + |0^{'}1^{'}\rangle\,,\; |01\rangle \to |1^{'}0^{'}\rangle - |0^{'}1^{'}\rangle\,, \tag{1.60}$$

где опущен нормировочный множитель.

Вентиль CNOT в протоколе [116] еще проще в реализации: предположим, что две оптические моды на рисунке 1.11б как-то поляризованы. Пространственная степень свободы – это управляющий кубит, а поляризационая – управляемый. Если фотон находится в вертикальной пространственной моде, он подвергается вращению поляризации, таким образом, реализуя операцию CNOT.

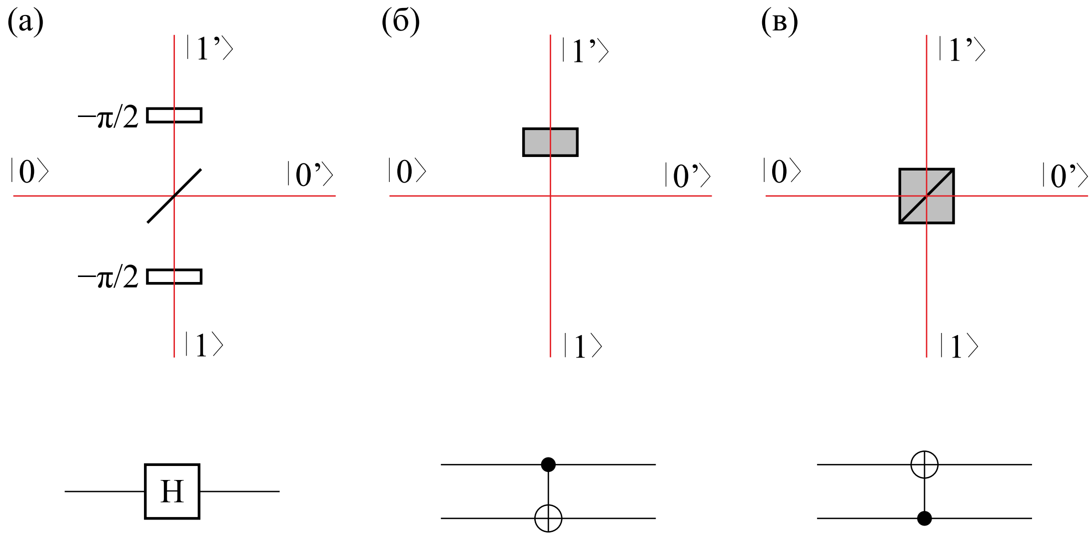

Рисунок 1.11 — Пример оптического моделирования основных квантовых логических вентилей [116]. Вентиль Адамара на «локальном» кубите с использованием симметричного светоделителя без потерь (а). Вентиль CNOT с помощью вращателя поляризации (б). Положение (локализация) и поляризация — это управляющий и управляемый кубиты соответственно. То же, что и (б), но управляющий и управляемый кубиты меняются местами с помощью поляризационного светоделителя (в).

Управляющий и управляемый кубиты можно легко поменять местами с помощью поляризационного светоделителя (рисунок 1.11в).

Поскольку для этого протокола требуется экспоненциальное количество оптических мод, это моделирование, чем полностью масштабируемый квантовый компьютер. Другие предложения в том же духе описаны в работах [117—119]. Используя это моделирование, можно реализовать классическую версию поискового алгоритма Гровера [120].

До 2001 года было широко распространено мнение, что масштабируемые оптические квантовые вычисления нуждаются в нелинейном компоненте, таком как среда Керра. Эти среды обычно характеризуются показателем преломления n_{Kerr}, который имеет нелинейную составляющую:

$$n_{Kerr} = n_0 + \chi^{(3)} E^2. \tag{1.61}$$

Здесь n_0 – обычный показатель преломления, а E^2 – оптическая интенсивность зондирующего луча с константой пропорциональности $\chi^{(3)}$. Луч, проходящий через среду Керра, будет испытывать фазовый сдвиг, пропорциональный его интенсивности.

Разновидностью стандартного эффекта Керра является кросс-керровская среда, в которой фазовый сдвиг сигнального луча пропорционален интенсивности второго зондирующего луча. На языке квантовой оптики кросс-керровская среда описывается гамильтонианом

$$\hat{H}_{Kerr} = \kappa \hat{n}_s \hat{n}_p, \tag{1.62}$$

где $\hat{n}_s$ и $\hat{n}_p$ – операторы числа фотонов для сигнальной и зондирующей мод соответственно. Можно заметить, что преобразование моды зондирующего луча с использованием этого гамильтониана приводит к фазовому сдвигу, который зависит от количества фотонов в сигнальной моде. Действительно, преобразования мод сигнального и зондирующего лучей равны

$$\hat{a}_s \to \hat{a}_s e^{-\tau \hat{n}_p},\ \hat{a}_p \to \hat{a}_p e^{-\tau \hat{n}_s},\ \tau = \kappa t. \tag{1.63}$$

Когда кросс-керровская среда помещается в одно плечо сбалансированного интерферометра Маха-Цандера, достаточно сильный фазовый сдвиг может переключить поле из одной выходной моды в другую (рисунок 1.12a). Например, если зондирующий луч представляет собой слабое оптическое поле и сигнальная мода может или не может быть заполнена одним фотоном, то детектирование выходных портов интерферометра Маха-Цандера показывает, был ли фотон в сигнальном пучке или нет. Более того, мы получаем эту информацию, не разрушая сигнальный фотон. Это называется квантовым неразрушающим измерением [121].

Нетрудно увидеть, что мы можем использовать этот механизм для создания оптического вентиля CZ с управляемой фазой для фотонных кубитов. Такие гейты дают возможность построить полностью оптический квантовый компьютер. Предположим, что наши кубиты – это одиночные фотоны с горизонтальной или вертикальной поляризацией. На рисунке 1.12b показано, как должна быть размещена среда Керра. Преобразования мод есть

$$\hat{a}_H \hat{b}_H \to \hat{a}'_H \hat{b}'_H,\ \hat{a}_V \hat{b}_H \to \hat{a}'_V \hat{b}'_H,\ \hat{a}_H \hat{b}_V \to \hat{a}'_H \hat{b}'_V,\ \hat{a}_V \hat{b}_V \to \hat{a}'_V \hat{b}'_V e^{i\tau}, \tag{1.64}$$

что означает необходимость значения керровской нелинейности $\tau = \pi$ для реализации вентиля CZ. Но на пути к реализации этого вентиля есть одна проблема. Дело в том, что существующие нелинейности в средах очень малы. То есть, конечно, для мощного лазерного излучения мы можем наблюдать, что показатель преломления зависит от приложенной интенсивности поля, но так, чтобы это

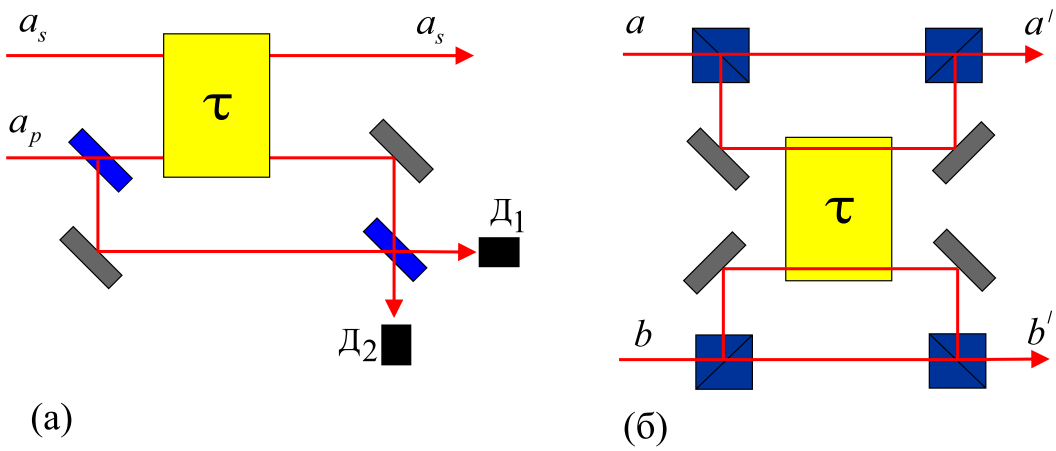

Рисунок 1.12 — Использование кросс-керровских нелинейностей (τ) в оптической обработке информации. a) Однофотонное квантовое неразрушающее измерение. Интерферометр Маха-Цандера сбалансирован таким образом, что присутствие фотона в сигнальной моде направляет зондирующее поле в темный выходной порт. b) Однофотонный вентиль CZ. Когда оба фотона в модах a и b вертикально поляризованы, двухфотонное состояние приобретает относительную фазу. Это приводит к запутываемому вентилю, которого вместе с однофотонным вращением достаточно для универсальных квантовых вычислений.

проявлялось на уровне отдельных фотонов — добиться проблематично. Конечно, можно пытаться как-то искать среды с большей нелинейностью. Более того, можно как-то попытаться увеличить поле одного фотона, потому что поле фотона, оно обратно пропорционально объему моды этого фотона. То есть если этот нелинейный участок будет в маленьком резонаторе, в котором фотон с одной стороны будет довольно долго циркулировать, а с другой стороны объем его моды будет очень маленьким, то гипотетически можно реализовать ситуацию, когда для одного и для двух фотонов набег фаз будет разный. Но пока еще существующие нелинейные элементы, дают нелинейную добавку фазы намного порядков меньше, чем то, что необходимо.

В 2001 году Книлл, Лафлэйм и Милбурн доказали [122], что возможно создать универсальные квантовые компьютеры с использовальнием только линейной оптики, одиночных фотонов и детектировании фотонов. Они предложили подробный протокол, включающий вспомогательные ресурсы (анцилла), квантовую телепортацию и исправление ошибок.

С физической точки зрения невозможно построить детерминированные двухкубитовые вентили в одномодовом и двухмодовом представлениях, потому что фотоны не взаимодействуют друг с другом. Единственный способ, которым фотоны могут напрямую влиять друг на друга, – это соотношение бозонной симметрии. Действительно, линейно-оптические квантовые вычисления используют именно это свойство, то есть коммутационное соотношение для бозонов $\left[\hat{a}, \hat{a}^{\dagger}\right] = 1$. Для ясности рассмотрим два фотона в разных пространственных модах, взаимодействующих на светоделителе 50:50 (интерференция ХОМ, подробнее в разделе):

$$|11\rangle_{ab} = \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}|00\rangle = \frac{1}{2}\left(\hat{c}^{\dagger} + \hat{d}^{\dagger}\right)\left(\hat{c}^{\dagger} - \hat{d}^{\dagger}\right)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|20\rangle_{cd} - |02\rangle_{cd}\right). \quad (1.65)$$

Хорошо видно, что бозонная природа электромагнитного поля приводит к группировке фотонов: фотон на входе светоделителя объединяются в пары. Это строго квантово-механический эффект, поскольку обычно два фотона могут в равной степени оказаться в разных выходных модах. С точки зрения квантовой интерференции, есть два пути, ведущие от входного состояния $|11\rangle_{in}$ к выходному состоянию $|11\rangle_{out}$: либо проходят оба фотона, либо оба фотона отражаются. Относительные фазы этих оптических путей определяются выражением светоделителя:

$$|11\rangle_{in} \xrightarrow{trans} \cos^2(\theta)\,|1{,}1\rangle_{out}\,,\ |11\rangle_{in} \xrightarrow{refl} -\sin^2(\theta)e^{i\varphi}e^{-i\varphi}\,|1{,}1\rangle_{out}\,. \quad (1.66)$$

Для светоделителя 50:50 $\cos^2(\theta) = \sin^2(\theta) = 1/2$ и два пути компенсируются точно, независимо от относительного значения фазы φ.

Отсутствие слагаемого $|11\rangle_{cd}$ называется эффектом Хонга-Оу-Манделя [103] (раздел 1.3), и он лежит в основе линейных оптических квантовых вычислений. Однако, как было сказано ранее, этого недостаточно для реализации детерминированных линейно-оптических квантовых вычислений и для это требуется обратить внимание на вероятностные вентили.

Как было показано в [123], почти любой двухкубитовый вентиль универсален для квантовых вычислений в дополнение к однокубитовым вентилям, но в линейной оптике обычно рассматривается вентиль с управляемой фазой CZ и вентиль CNOT. CZ-вентиль может быть построен в линейной оптике с использованием двух вентилей NS с нелинейным фазовым сдвигом (рисунок 1.13). Вентиль NS действует на суперпозицию первых трех фоковских состояний следующим образом:

$$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \xrightarrow{NS} \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle - \gamma|2\rangle\,. \quad (1.67)$$

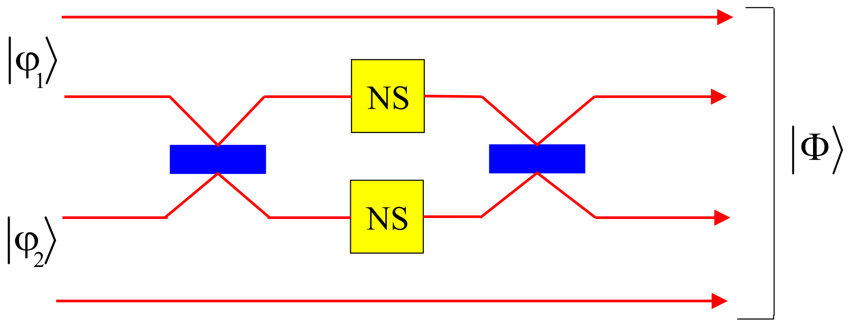

Рисунок 1.13 — Условный фазовый вентиль CZ. Этот вентиль использует два NS гейта для изменения относительной фазы двух кубитов: когда оба кубита находятся в логическом состоянии $|1\rangle$, два фотона интерферируют на светоделителе 50:50 $\left(\cos^2(\pi/4) = 1/2\right)$. Затем эффект Хонга-Оу-Манделя гарантирует, что оба фотона излучаются из одной и той же выходной моды, и тогда вентили NS вызывают относительную фазу. После рекомбинации на втором светоделителе эта фаза проявляется только в состояниях, в которых оба кубита находились в логическом состоянии $|1\rangle$.

Его действие на состояния с большим числом фотонов не имеет значения, так как оно не меняет амплитуду $|0\rangle$, $|1\rangle$ или $|2\rangle$. Рассмотрим оптическую схему, изображенную на рис. 1.13, и предположим, что входное состояние задается формулой $|\varphi_1\rangle \otimes |\varphi_2\rangle = (\alpha\,|01\rangle + \beta\,|10\rangle)\,(\gamma\,|01\rangle + \delta\,|10\rangle)$. Затем применяя преобразование светоделителя к первой и третьей модам, обнаруживаем эффект Хонга-Оу-Манделя только тогда, когда обе моды заселены одним фотоном. Тогда вентили NS вызовут фазовый сдвиг на π. Применим преобразование светоделителя повторно и получим, что

$$|\Phi\rangle = \alpha\gamma\,|0101\rangle + \alpha\delta\,|0110\rangle + \beta\gamma\,|1001\rangle - \beta\delta\,|1010\rangle\,. \qquad (1.68)$$

Это состояние больше не сепарабельно. Фактически, когда параметры схемы таковы, что $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/\sqrt{2}$, выходное состояние становится максимально запутанным. Общая вероятность вентиля CZ есть $P_{CZ} = P_{NS}^2$.

Очевидно, что сделать вентиль NS с обычным фазовращателем невозможно, потому что только состояние $|2\rangle$ должно менять фазу. А линейный оптический фазовращатель также будет индуцировать коэффициент i (или $-i$) на состояние $|1\rangle$. Однако, возможно реализовать NS-вентиль вероятностно с использованием проективных измерений. Тот факт, что два NS-вентиля могут быть использованы для создания вентиля CZ, впервые показали в [122]. Их вероятностный NS-вентиль представляет собой трехпортовое устройство, включающее две вспомогательные (анцилла) моды, выход которых измеряется

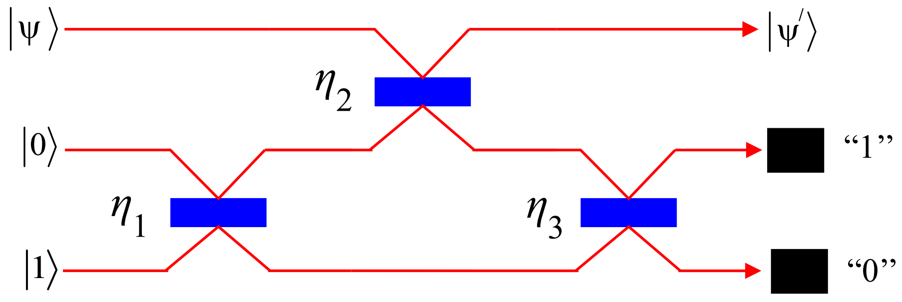

Рисунок 1.14 — NS-вентиль согласно Книллу, Лафлэйму и Милберну [122]. Коэффициенты пропускания светоделителей равны $\eta_1 = \eta_3 = 1/(4 - 2\sqrt{2})$ и $\eta_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

детекторами, разрешающими число фотонов (рисунок 1.14). Входными состояниями для анциллл являются вакуумное и однофотонное состояния, и вентиль успешно выполняет операцию, когда детекторы измеряют ноль и один фотон, соответственно. Для произвольного входного состояния $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$ это происходит с вероятностью $P_{NS} = 1/4$. Вероятность срабатывания можно увеличить, если сделать более сложную схему с бо́льшим числом вспомогательных фотонов. Тогда, если использовать n фотонов и $2n$ детекторов, то можно построить вероятностный вентиль CZ, вероятность срабатывания которого будет $\frac{n}{n+1}$. То есть, мы можем довести вероятность срабатывания до 99%, но тогда для этого нужно дополнительно использовать 100 фотонов и 200 детекторов, что является довольно ресурсозатратной реализацией вентиля.

Наконец, следующая концепция оптических вычислений называется measurement-based quantum computation или квантовые вычисления, основанные на измерении [124]. По-другому они еще называются однонаправленные вычисления, one-way computation. Это название противопоставлено тому, что в обычной гейтовой модели вычислений все квантовые преобразования реализуются с помощью унитарных операторов, которые по определению являются обратимыми, то есть все вычисления можно развернуть в обратную сторону. Но поскольку measurement-based вычисления основаны на измерениях, они могут идти только в одну сторону, то есть эти измерения являются необратимыми. Идея этих вычислений заключается в предварительном приготовлении массива перепутанных оптических кубитов. Например, за счет действия вероятностным вентилем CZ на отдельные кубиты, можно добиться их перепутывания. Повторяя многократно эту операцию с бо́льшим количеством кубитов, мы получим кластер перепутанных состояний. Тогда любая однокубитная и двухкубитная операция в этой схеме эквивалентна измерению одного или двух кубитов в кластере. И в зависимости от результатов измерений нужно дополнительно реализовать однокубитные операции над каждым из оставшихся кубитов. Поскольку однокубитные операции над фотонными кубитами выполняются эффективно, то и процедуру измерения кубитов также является эффективной. Таким образом, если получится приготовить большой кластер перепутанных состояний, становится возможным реализовать любой квантовый алгоритм. Такие схемы могут успешно масштабироваться при условии, что совместная вероятность излучения фотона, его прохождения через оптическую схему и регистрации детектором не меньше чем $\frac{2}{3}$ [125]. При этом современный технологический уровень уже довольно близок к этому порогу.

1.5.3 Характеризация квантовых операций в ЛОИС

Для характеризации квантового процесса в настоящее время существуют два вида способов квантовой томографии. В первом способе приготавливается полный набор квантовых состояний, над этим набором осуществляется преобразование квантового процесса, в виде «черного ящика» и выполняется измерение получившихся состояний. Проводя томографию приготавливаемых и преобразованных (под действием операции U) квантовых состояний можно восстановить матрицу процесса. С другой стороны можно использовать состояния Чоя-Ямилковского на входе квантовой схемы и напрямую восстанавливать квантовый процесс в виде χ-матрицы, полностью описывающей преобразование U. Существуют десятки работ по томографии одно- и двухкубитовых процессов в поляризационном базисе и имеющих довольно высокую точность восстановления, описание некоторых из них можно найти в обзоре [126]. Но их применение к линейно-оптических интегральным схемам крайне ограничено и неэффективно ввиду высокой размерности данной задачи. Крайне показательной является работа [66], в которой на основе квадратурных измерений восстанавливалась передаточная матрица светоделителя 2x2 (рисунок 1.15).

Входные состояния являлись когерентными состояниями с разной фазой, амплитудой и поляризацией. Фаза варьировалась посредством пьезо подвижки, а поляризационные степени свободы фиксировались установленными четвертьволновой и полуволновой пластинками. Далее в выходных каналах используемо-

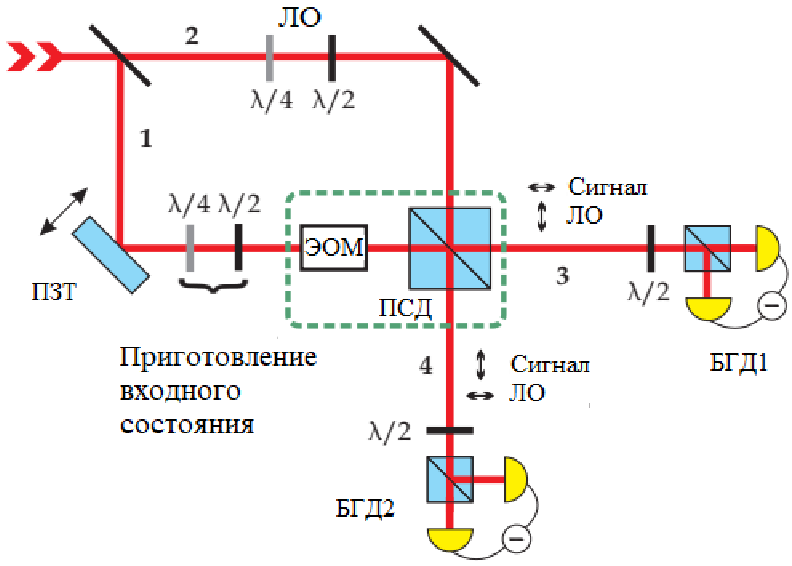

Рисунок 1.15 — Процесс томографии светоделителя (обведенный зеленой пунктирной линией) реализуется на основе когерентных состояний, фаза которых меняется посредством пьезоподвижки, а поляризационные степени свободы фиксируются установленными полуволновой и четвертьволновой пластинками [66]. ЛО — локальный осциллятор, ЭОМ — электро-оптический модулятор, ПСД — поляризационный светоделитель, БГД — балансное гомодинное детектирование.

его светоделителя выполнялись квадратурные измерения с помощью балансного гомодинного детектирования в каждом из каналов. Идея томографии квантового процесса основывалась на восстановлении передаточной матрицы U в фоковском базисе, что сразу значительно увеличивало размерность задачи. По результатам томографии восстанавливался квантовый процесс $\mathcal{E}$ в виде тензора четвертого ранга. Точность восстановления оценивалась на основе фиделити F и составила величину 95%. Причём задача оказалось настолько вычислительно сложной, что процедура томографии заняла несколько дней всего лишь для процесса размерности 2x2. Из вышесказанного непосредственно следует, что восстановление процесса в фоковском пространстве практически невозможно масштабировать на большие размерности.

Ввиду этого для томографии ЛОИС нашли применение так называемые интерференционные методы. Рассмотрим работу [61], в которой для характеризации передаточной матрицы использовались бифотонные состояния света. Метод работает в двух режимах. Если один из каналов схемы перекрыт (рис. 1.16а), а в другом находится однофотонное состояние, то по измерению

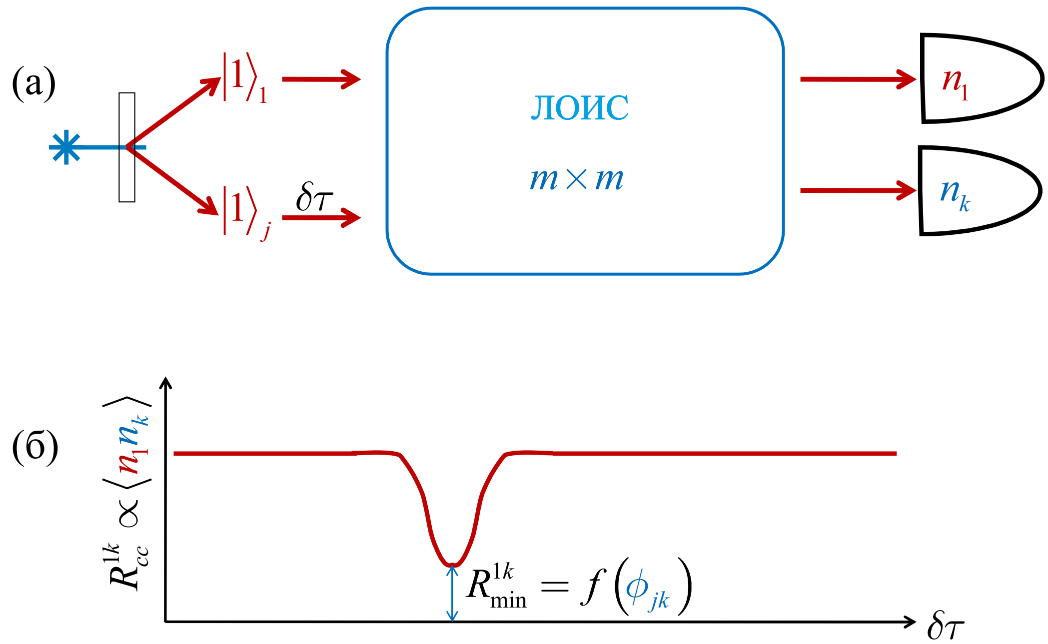

Рисунок 1.16 — Восстановление параметров методом корреляционных измерений двухфотонных состояний: (а) схема эксперимента, (б) экспериментальные данные [61].

одиночных фотоотсчетов (или интенсивности) восстанавливаются квадраты модулей соответствующих элементов U. Напротив, если однофотонные состояния находятся в обоих входных каналах (рисунок 1.16в), то при измерении на выходе совпадения фотоотсчетов (или кросскорреляционной функции), глубина провала Манделя (рис. 1.16б) зависит от косинуса фаз передаточной матрицы U. И это значение косинуса можно легко получить из проведённого измерения. Но, как известно, функция косинуса не является однозначной и на самом деле, возможно, получить только модуль фазы. Это затруднение можно обойти, положив некое реперное значение фазы положительным и провести дополнительные измерения, и таким образом определить косинусы разностей всех фаз. И вот после этого на основе проведенных измерений можно получить всего две комбинации всех фаз, которые отличаются лишь общим знаком, и этот знак не влияет на результаты экспериментов, проводимых с матрицей.

Рассмотрим другой метод, основанный на интерферометрии когерентных состояний света [60]. Подадим когерентное состояние $|\alpha_1\rangle = |\alpha\rangle$ с известной интенсивностью I в произвольный вход j, причём на других входах линейно-оптической интегральной схемы (ЛОИС) сигнал отсутствует (вакуум). Измерим интенсивность I_k для всех выходных каналах одновременно (рисунок 1.17). Та-

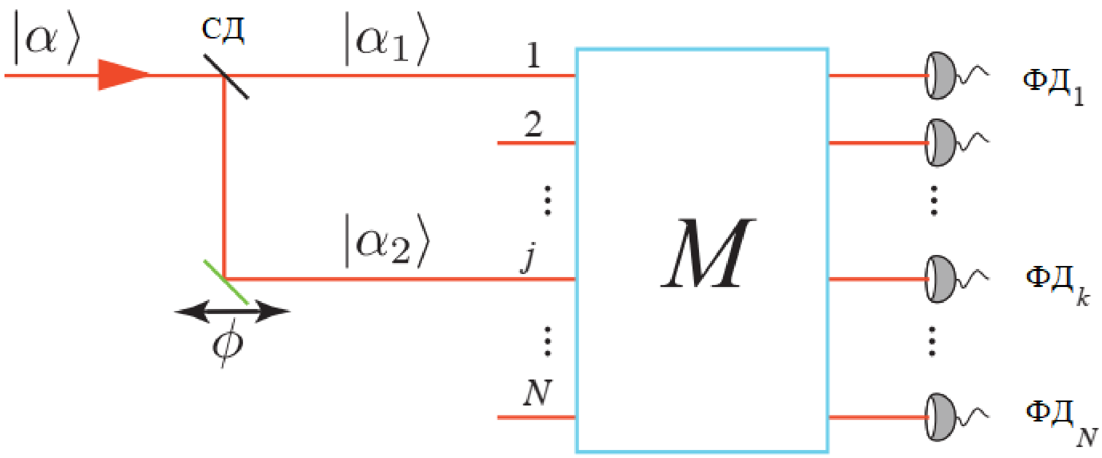

Рисунок 1.17 — Схема для характеризации ЛОИС посредством когерентных состояний света. С использованием светоделителя (СД) 50:50 и пьезо-транслятора приготавливается двухмодовое когерентное состояние. Когерентное состояние $|\alpha_1\rangle = |\alpha\rangle$ подаётся на первый вход схемы, а состояние $|\alpha_2\rangle = |\alpha e^{i\varphi}\rangle$ подаётся на j-ый вход. В последствии проводятся измерения выходных интенсивностей [60].

ким образом, определяются все модули элементов передаточной матрицы U

$$U_{kj} = \sqrt{\frac{I_k}{I}},\ k = 1,2,\ldots,N. \tag{1.69}$$

Теперь направим когерентное состояние $|\alpha\rangle$ на светоделитель 50:50 и используем пьезо-транслятор для управления относительной фазой между выходными состояниями $|\alpha_1\rangle$ и $|\alpha_2\rangle$ с одинаковыми интенсивностями I. Причём $|\alpha_1\rangle$ подаётся во входной канал «1», а $|\alpha_2\rangle = |e^{i\varphi}\alpha_1\rangle$ во входной канал j. Интенсивности выходных когерентных состояний определяются выражением

$$I_k = I|U_{k1} + U_{kj}e^{i\varphi}|^2. \tag{1.70}$$

Поскольку все элементы в первой строке и первом столбце являются действительными, выражение (1.70) преобразуется для $k = 1$

$$I_1 = I\left(U_{11}^2 + U_{1j}^2 + 2U_{11}U_{1j}\cos(\varphi)\right) \tag{1.71}$$

и для $k \neq 1$ соответственно

$$I_k = I\left(U_{k1}^2 + U_{kj}^2 + 2U_{k1}U_{kj}\cos(\varphi + \theta_{kj})\right). \tag{1.72}$$

Тогда измеряя интенсивности этих сигналов от фазы пьезо-транслятора и аппроксимируя их функцией косинуса, мы можем определить по разности восстановленных фаз искомую фазу передаточной матрицы чипа.

Представленные два интерференционных метода: на когерентных состояниях (классический способ [60]) и двухфотонных (квантовый способ [61]) имеют существенные недостатки. Во-первых, квантовый метод подразумевает приготовление двухфотонных состояний за счёт спонтанного параметрического рассеяния света, что требует сложного и дорогого экспериментального оборудования. Более того, так как данный процесс вероятностный, то время, требуемое для характеризации чипа значительно увеличивается. Классический способ на когерентных состояниях довольно просто реализовать, но ключевым его недостатком является существенная зависимость восстанавливаемых фаз от набега фаз на волоконных входах ЛОИС, от которых практически невозможно избавиться. Один из вариантов компенсации этого набега фаз состоит в как можно более быстрых измерениях интенсивности. Но это в свою очередь всё равно даст существенную ошибку в точности восстановления. Далее в главе 4 будет представлен оригинальные метод восстановления ЛОИС с помощью корреляционных измерений тепловых состояний света, и будет показано, что он объединяет в себе достоинства обоих методов, рассмотренных выше.

Глава 2. Описание, приготовление, измерение и применение тепловых состояний света с отщеплением заданного количества фотонов

В настоящей главе исследуются тепловые состояния света с отщеплением заданного количества фотонов: их описание, приготовление, измерение и применение [78; 79; 127]. В том числе рассматривается процесс гауссификации данных квантовых состояний под действием линейных потерь в оптической системе [128]. В заключительной части главы представлена экспериментальная демонстрация эффекта «квантового вампира» в двухмодовом и многомодовом режимах на тепловых состояниях света [129; 130].

2.1 Приготовление и измерение тепловых состояний с отщеплением до 10 фотонов

2.1.1 Тепловые состояния с отщеплением заданного количества фотонов

Матрица плотности теплового состояния имеет хорошо известный диагональный вид

$$\hat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} P(n) \left| n \right\rangle \left\langle n \right| , \tag{2.1}$$

где $P(n) = \mu^n/(1+\mu)^{n+1}$ – это распределение Бозе-Эйнштейна, которое является частным случаем более общего компаунд-распределения Пуассона

$$P_{\mu,a}(n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \frac{\mu^n}{a^n n!} \frac{1}{(1+\mu/a)^{n+a}}. \tag{2.2}$$

Компаунд-распределение Пуассона имеет два параметра [78; 79]: среднее число фотонов μ и параметр когерентности a. При $a = 1$ выражение (2.2) переходит в распределение Бозе-Эйнштейна, а при $a \longrightarrow \infty$ (2.2) переходит в распределение Пуассона. Распределение (2.2) позволяет описывать многомодовый тепловой свет, где параметр когерентности a определяет число мод теплового состояния

[107; 131]. Можно показать, что аналогичные распределения, но в другой параметризации, применяются для описания одномодовых тепловых состояний с отщеплением фотонов.

Производящая функция распределения (2.2) есть

$$G(z) = \left[1 + \frac{(1-z)\mu}{a}\right]^{-a}. \tag{2.3}$$

Используя (1.26) можно получить, что отщепление фотона не меняет тип распределения (2.2), а приводит только к изменению параметров a и μ следующим образом: $a_1 = a + 1$, $\mu_1 = \mu\frac{a+1}{a}$. Применяя итерационно эти соотношения, замечаем, что тепловое состояние с исходными параметрами μ_0 и $a_0 = 1$ после отщепления K фотонов переходит в состояние с параметрами

$$a_k = k + 1, \quad \mu_k = \mu_0(k+1). \tag{2.4}$$

Например, при отщеплении одного фотона среднее число фотонов в тепловом состоянии удваивается $\mu_1 = 2\mu_0$. Такой результат можно пояснить следующим образом. Отщепление фотона является вероятностным (условным) процессом, который можно выполнить с помощью светоделительной пластинки с малым коэффициентом отражения. Поэтому детектор, помещённый в отражённый канал большую часть времени не будет давать отсчётов. Однако, факт отщепления фотона означает, что, во-первых, после светоделительной пластинки фотонов меньше, чем до неё; во-вторых, количество фотонов до делителя было больше (в среднем), чем среднее число фотонов μ_0. Здесь второй фактор гораздо значимее первого. Для когерентного состояния с распределением Пуассона по числу фотонов, эти два фактора компенсируют друг друга, и поэтому отщепление не меняет среднее число фотонов у когерентного состояния.

Такое своеобразное поведение может эффективно использоваться как бесшумовое вероятностное усиление (probabilistic amplification) за счет отщепления фотонов [30], что позволяет повысить чувствительность фазы тепловой интерферометрии. С другой стороны, линейные потери ведут к уменьшению μ и сохранению a.

Используя (1.29), получаем выражение для автокорреляционной функции в нуле при отщеплении K фотонов [127]

$$g^2 = 1 + \frac{1}{a} = 1 + \frac{1}{K+1}. \tag{2.5}$$

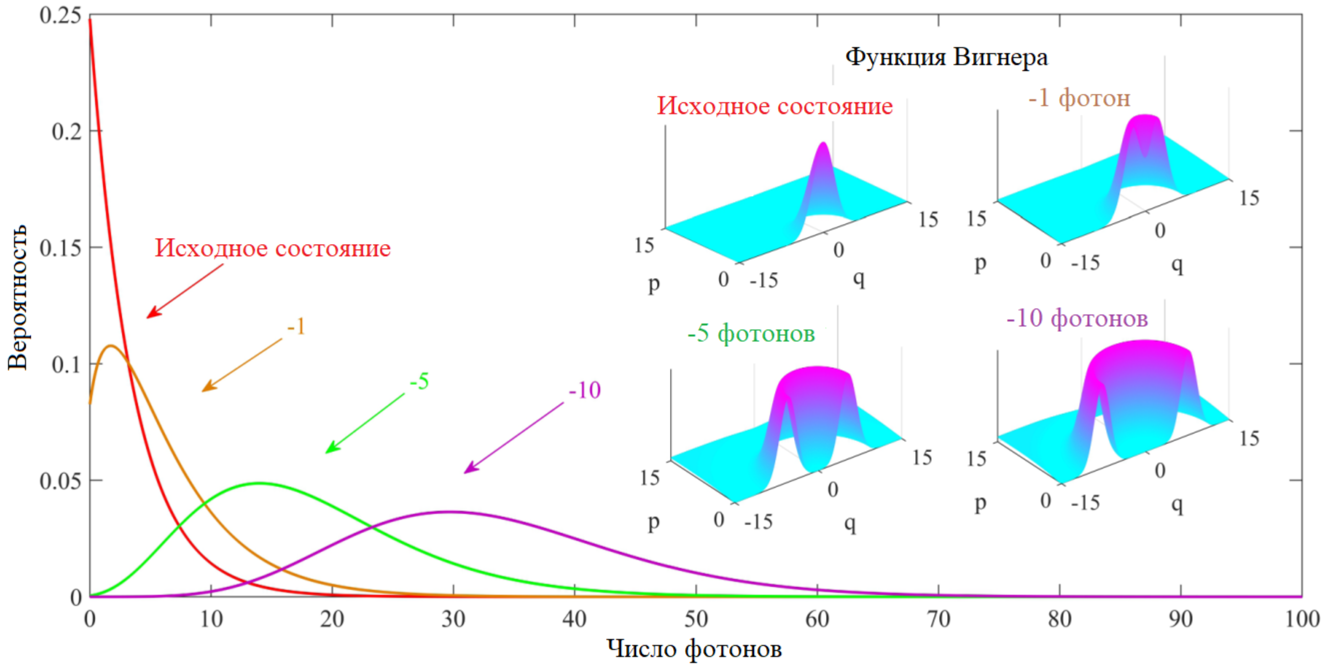

Рисунок 2.1 — Распределение по числу фотонов и функции Вигнера для исходного теплового состояния ($\mu_0 = 1$) и тепловых состояний с отщеплением K – фотонов с $K = 1, 5, 10$.

Это выражение аналогично выражению для корреляционной функции многомодового теплового света [107].

Распределение по числу фотонов для нескольких тепловых состояний с отщеплением фотонов, а также их функции Вигнера показаны на рисунке 2.1. Следуя процедуре отщепления фотонов, исходная функция Гаусса преобразуется в кольцевую негауссовскую функцию, радиус которой приблизительно пропорционален $\sqrt{\mu_K}$.

Также можно найти квадратурное распределение данного семейства состояний. По определению квадратурное распределение $P_{\mu,a}(q)$ есть

$$P_{\mu,a}(q) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{\mu,a}(n) \left|\varphi_n(q)\right|^2, \tag{2.6}$$

где $\varphi_n(q)$ – собственные функции гармонического осциллятора:

$$\varphi_n(q) = \frac{H_n(q)}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{1/2}} e^{-x^2/2}, \tag{2.7}$$

а H_n – это полиномы Эрмита.

Из представленных выше выражений, можно вычислить аналитически второй и четвертый моменты квадратурного распределения, а именно среднеквадратичное отклонение σ и куртозис K_D. Причём отклонение и куртозис напрямую связаны с параметрами μ и a распределения (2.2), что позволяет выполнять быструю оценку в ходе эксперимента по гомодинному детектированию тепловых состояний с отщеплением заданного количества фотонов

$$\sigma^2 = \mu + \frac{1}{2}, \quad K_D = 3 - 6\left(\frac{\mu}{2\mu+1}\right)^2 \frac{a-1}{a}. \tag{2.8}$$

Отметим, что выражение для среднеквадратичного отклонения работает для всех состояний, у которых функция Вигнера аксиально симметрична

2.1.2 Эксперимент

Для экспериментальной реализации способа генерации и измерения семейства тепловых состояний была создана установка, схема которой представлена на рисунке 2.2. Она представляет собой комбинацию источника квазитеплового света и схемы сбалансированного гомодинного детектирования.

Источником излучения служит гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме на длине волны 633 нм. Лазерный пучок заводится в одномодовое оптическое волокно и далее разделяется на две неравные части волоконным светоделителем. Большая часть излучения (90%) переходит в правый канал и служит гомодином, а меньшая (10%) остаётся в левом канале и используется для генерации различных квадратурных состояний. Для генерации квазитеплового состояния оно пропускается через вращающийся матовый диск [108; 109]. Далее исследуемое излучение снова пропускается через одномодовое волокно, проходит через поляризатор П1 и полуволновую пластинку ПВП1, ориентированные таким образом, чтобы после поляризационного светоделителя ПСД1 всё исследуемое излучение уходило в отражённый канал. Установленная под углом Брюстера стеклянная пластинка используется в качестве светоделителя СД, который служит для отщепления фотонов. Поляризатор П1 настраивается таким образом, чтобы коэффициент отражения составлял около 1%. Условное отщепление фотонов реализуется с помощью светоделителя с коэффициентом отражения $r = 1\%$ в сочетании с однофотонным APD детектором (Laser Components COUNT-100 C-FCD) с темновыми шумами 100 Гц и мертвым временем 50 нс, размещенным в отраженном канале.

Излучение гомодина выводится из одномодового волокна, отражается зеркалом З и попадает на другой вход поляризационного светоделителя ПСД1. Поляризатор П2 ориентирован таким образом, чтобы всё излучение гомодина проходило через светоделитель, а волоконный контроллер поляризации ВКП обеспечивал максимальное прохождение света через поляризатор П1.

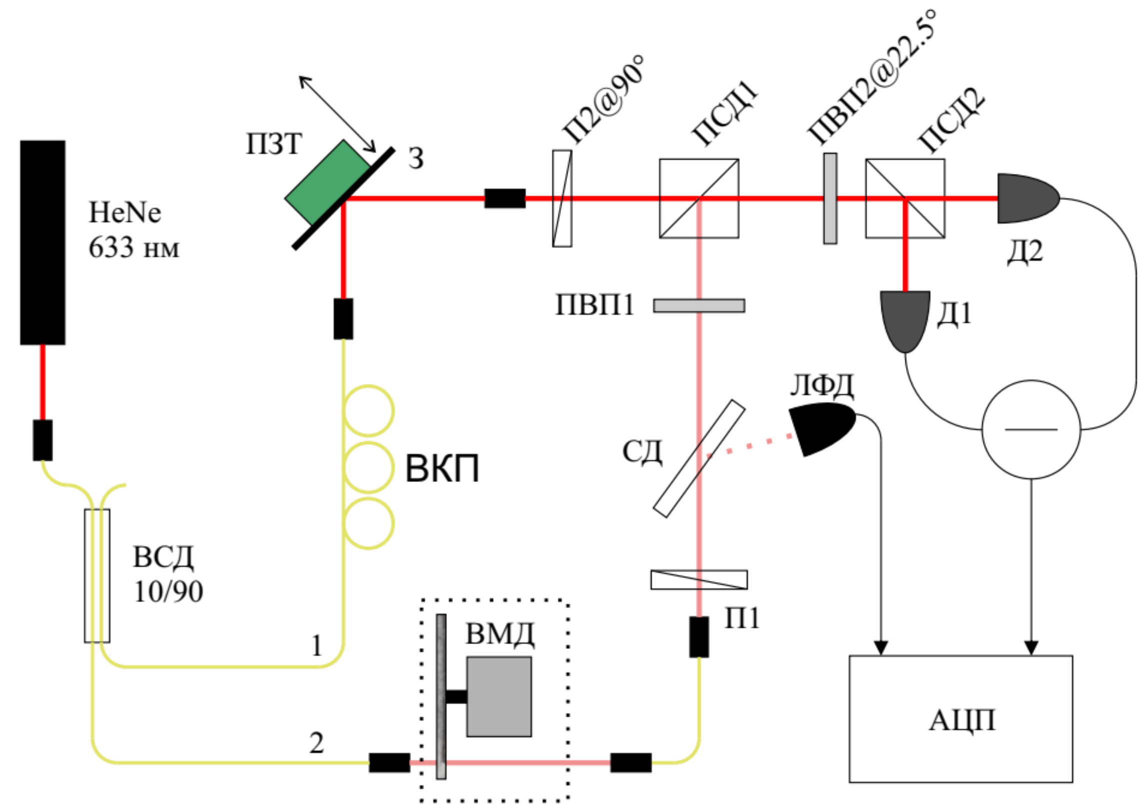

Рисунок 2.2 — Схема установки для генерации и измерения семейства тепловых состояний с отщеплением фотонов. ВСД — волоконный светоделитель, ВКП — волоконный контроллер поляризации, ВМД — вращающийся матовый диск, З — зеркало, СД — светоделитель, ПСД — поляризационный светоделитель, П — поляроид, ПВП — полуволновая пластинка, ЛФД — лавинный фотодиод, Д1 и Д2 – балансный гомодинный детектор, АЦП — аналого-цифровой преобразователь

После того, как излучение гомодина и исследуемое излучение совмещаются в одну пространственную моду светоделителем ПСД1, они снова разделяются светоделителем ПСД2. Полуволновая пластинка ПВП2 устанавливается таким образом, что и излучение гомодина и исследуемое излучение разбиваются на две равные части и интерферируют. Для регистрации интенсивности на выходах ПСД2 расположены фотодиоды, сигнал с которых отправляется на разностную схему. Затем излучение попадает в сбалансированный гомодинный детектор

(Thorlabs PDB450A) с полосой пропускания 100 кГц и квантовой эффективностью 78%.

Основное отличие предложенной установки от других – это работа в непрерывном режиме, который позволяет использовать только один ЛФД-детектор для отщепления заданного количество фотонов [79]. Это можно сделать следующим образом (рисунок 2.3). Естественная колоколообразная форма временной моды $\psi\left(t\right)$ квазитеплового света может быть описана корреляционной функцией $g^{(2)}\left(t\right)$ с шириной $\tau_{coh} = 40$ мкс. Измеренная квадратурная компонента q получается интегрированием разностного фототока I_{-} - по времени усреднения τ_a: $q \propto \int_{\tau_a} I_{-}(t)\psi(t)dt$. Выбирая время усреднения $\tau_a = 12$ мкс $< \tau_{coh}$, мы выделяем центральную часть моды $\psi(t)$. Теперь наша измеренная временная мода имеет форму прямоугольника с шириной τ_a. Каждый фотоотсчёт, зарегистрированный внутри этого τ_a–интервала, соответствует отщеплению фотона из этой временной моды. А так как мертвое время ЛФД детектора $\tau_{APD} = 50$ нс $\ll \tau_a$, то можно зарегистрировать несколько фототсчётов внутри интервала τ_a, что будет соответствовать отщеплению требуемого количества фотонов. Чтобы избежать каких-либо корреляций между временными бинами, выбираются бины, периодически разделенные $2\tau_{coh}$. Отметим, что можно использовать данные из всех временных бинов: это позволит значительно увеличить объем выборки, но измеренные значения станут статистически зависимыми и будет невозможно проверить соответствие эксперимента и теории с точки зрения стандартных критериев, в том числе невозможно будет использовать критерий адекватности $\chi^{(2)}$.

Метод отщепления заданного количества фотонов очень похож на принцип работы детектора, разрешающего число фотонов, основанного на матрице ЛФД детекторов, где несколько фотонов в одной пространственной моде могут быть независимо обнаружены различными ЛФД детекторами, размещенными в разных точках области измерения.

Измеренные условные квадратурные распределения использовались для восстановления приготовленных квантовых состояний света.

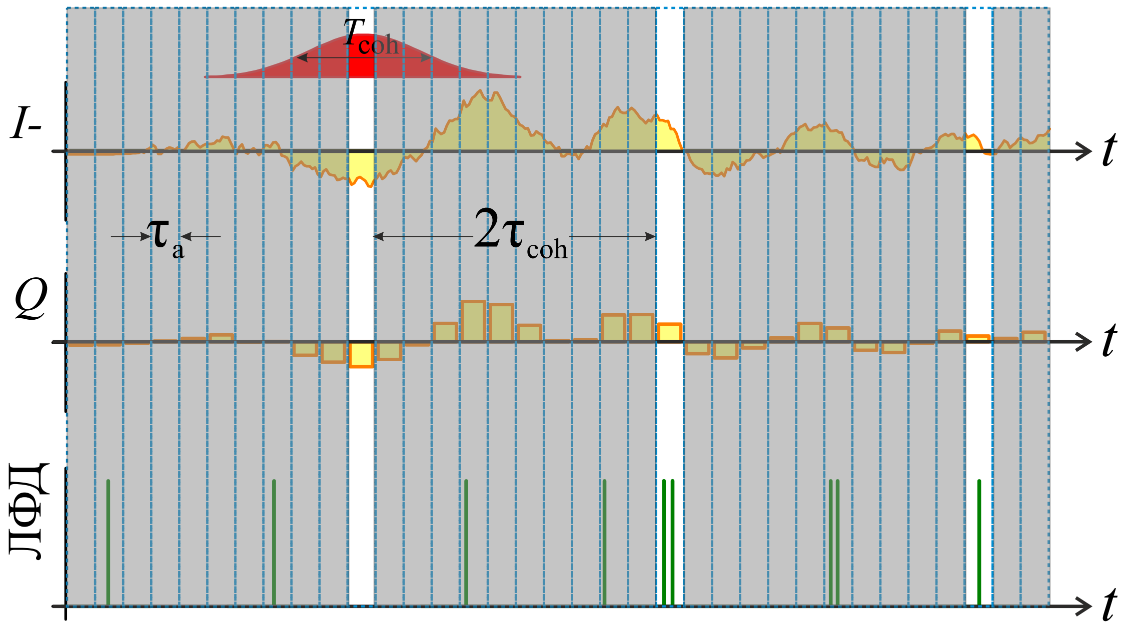

Рисунок 2.3 — Обработка экспериментальных данных. Квадратурные значения q (центральный график), полученные интегрированием разностного фототока I_- (верхний график) за интервал времени усреднения τ_a. Этот интервал меньше ширины τ_{coh} временной моды $\psi(t)$ (красный колоколообразный график), который может быть определен путем измерения корреляционной функции. Таким образом, измеряемая временная мода имеет прямоугольную форму шириной τ_a. Каждый фотоотсчёт ЛФД (нижний график) соответствует отщеплению фотона. Для дальнейшей реконструкции квантового состояния были выбраны временные интервалы, периодически разделенные на $2\tau_{coh}$.

2.1.3 Статистическое восстановление параметров теплового состояния с отщеплением заданного количества фотонов

Простой способ оценить квантовое состояние (2.2) из экспериментальных квадратурных данных основан на соотношениях (2.8). Квадратурная дисперсия σ^2 и куртозис K_D в зависимости от количества отщеплённых фотонов показаны на рисунке 2.4. Можно заметить, что экспериментальные точки расположены близко к теоретическим кривым (2.4), (2.8). Однако, для более точной реконструкции квантовых состояний, будем использовать оценку, которую дает метод максимального правдоподобия (МП). Обычно метод МП используется для восстановления матрицы плотности состояния $\hat{\rho} = \sum_{n,m=0}^{S} \rho_{n,m} |n\rangle \langle m|$, где S – предельная размерность фоковского базиса.

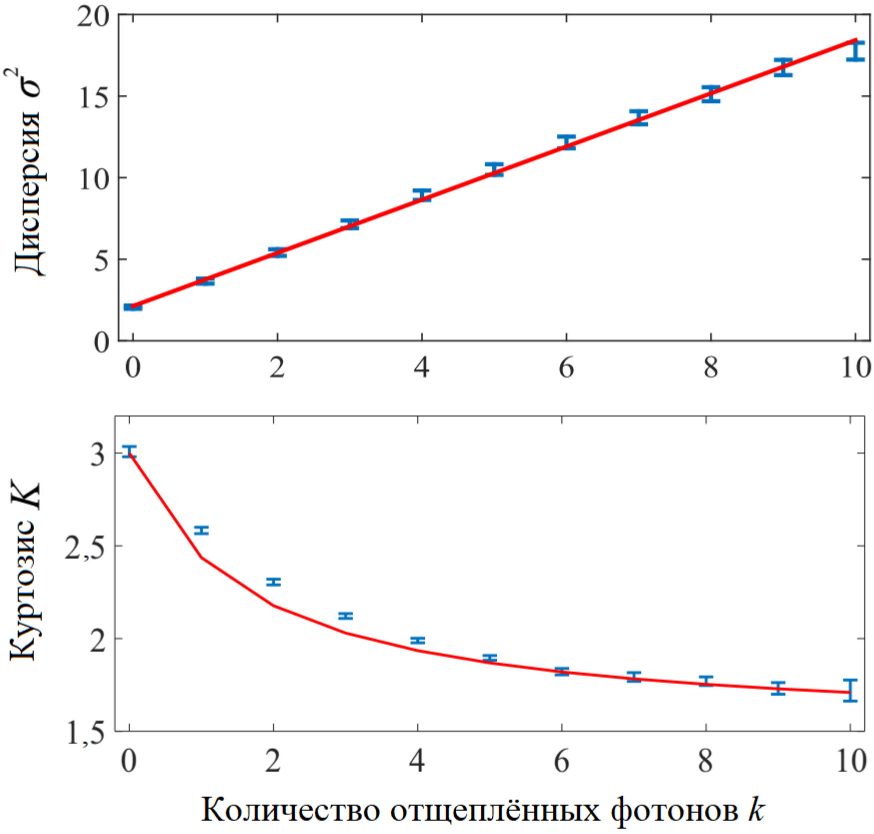

Рисунок 2.4 — Зависимости квадратурной дисперсии σ^2 и куртозиса K_D от количества отщеплённых фотонов. Точки соответствуют экспериментальным значениям, кривая – теоретические предсказания (2.4, 2.8).

Эта модель является достаточно общей, но не оптимальной, так как количество оцениваемых параметров слишком велико; более того, соответствующая задача является плохо обусловленной и требует больших вычислительных ресурсов. Следовательно, это даст в итоге достаточно низкую точность восстановления матрицы плотности. Для существенного набора экспериментально доступных квантовых состояний света, модель, основанная на базисе сжатых сдвинутых фоковских состояниях и корневом подходе, может быть использована для значительного уменьшения количества оцениваемых параметров.

Однако, более простая модель, основанная на компаунд-распределении Пуассона (2.2), требует восстановления всего лишь двух параметров a и μ, что заведомо даст более высокую точность реконструкции при максимизации функции правдоподобия. Для учета квантовой эффективности гомодинного детектора η сглаживается распределение $P_{\mu,a}(q)$ гауссовой функцией $e^{-q^2\eta/(1-\eta)}$. Однако, каждый раз следует проверять, соответствует ли восстановленное квадратурное распределение $P_{\mu,a}(q)$ экспериментальным данным $P(q)$. Это соответствие между измеренными данными и восстановленными параметрами распределения

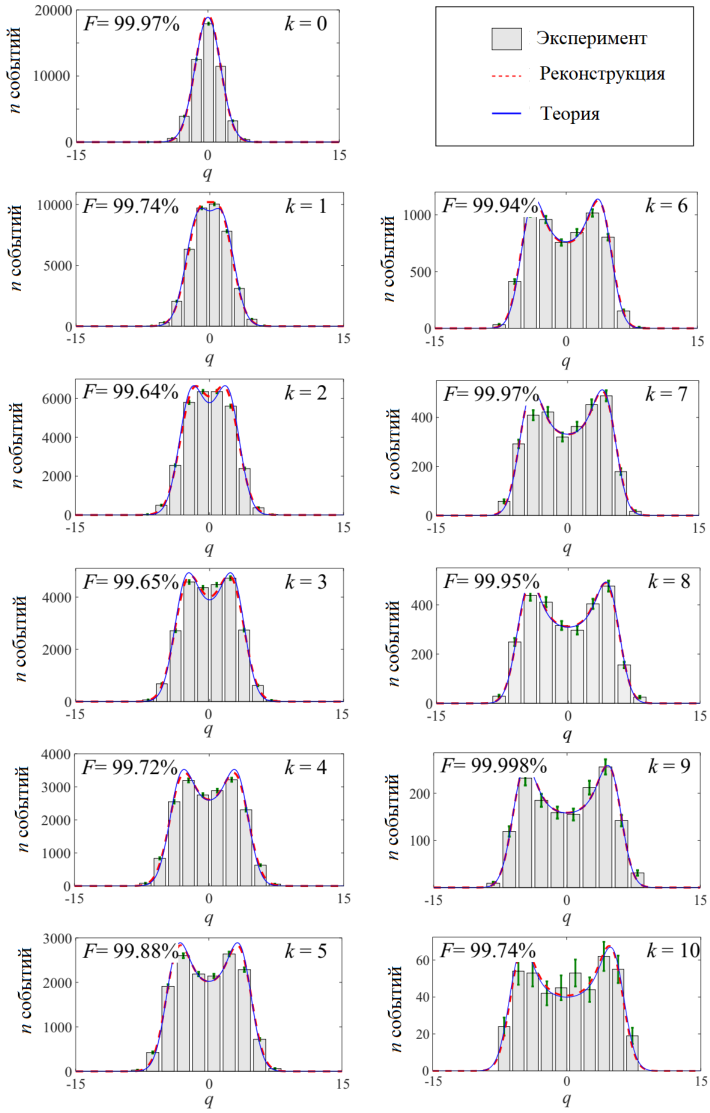

Рисунок 2.5 — Квадратурные распределения $P(q)$ тепловых состояний с отщеплением K фотонов с $K = 0 \div 10$. Экспериментальные данные представлены в виде гистограмм со статистическими ошибками. Красными пунктирными кривыми изображены восстановленные состояния, а синими кривыми показаны теоретические предсказания.

оценивалось с помощью критерия адекватности хи-квадрат χ^2

$$\chi^2 = \sum_{j}^{N_{max}} \frac{(N_j^{rec} - N_j^{exp})^2}{N_j^{rec}}, \tag{2.9}$$

где N_j^{rec}, N_j^{exp} — ожидаемое (восстановленное) и наблюдаемое число событий, N_max — число сгруппированных интервалов (не менее 5). Количественно адекватность томографического эксперимента мы характеризуем так называемым критическим уровнем значимости p, который есть вес хи-квадрат распределения с $v = N_{max} - n_par - 1$ (n_par — число параметров рассматриваемого распределения) степенями свободы выше точки χ^2. Модель признается адекватной, если $p > p_0$, где p_0 – заданный уровень значимости, который выбирается по усмотрению экспериментатора (некоторые возможные значения 0,001, 0,005, 0,01, 0,05, 0,1). Уровень значимости p был выше 0,01 для всех приготовленных и измеренных состояний. На рисунке 2.5 видно, что пунктирные красные кривые, полученные с помощью метода МП, действительно хорошо согласуются с экспериментальными квадратурными данными, представленными в виде гистограмм, и довольно близки к сплошным синим кривым, соответствующим теоретически предсказанным значениям a и μ.

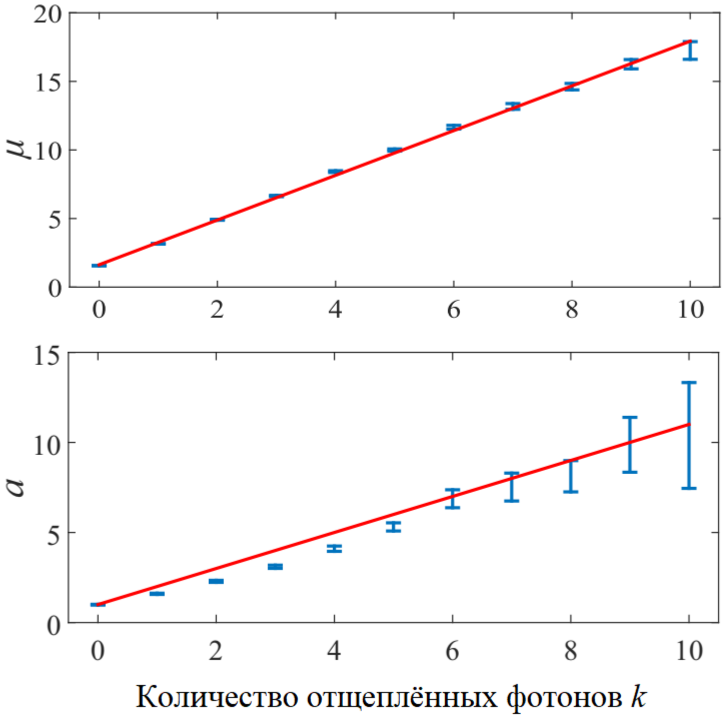

Рисунок 2.6 — Зависимости среднего числа фотонов μ и параметра когерентности a от количества отщеплённых фотонов. Точки соответствуют экспериментальным значениям, а прямые – теоретическим предсказаниям (2.4).

Были подготовлены, измерены и реконструированы одиннадцать различных квантовых состояний: а именно исходное тепловое состояние со средним числом фотонов $\mu = 1{,}63$ и тепловые состояния с отщеплением K фотонов, где $K = 1, \ldots, 10$ [79]. Восстановленные значения a и μ показаны на рисунке 2.6. Прямые соответствуют прогнозируемым значениям параметров (2.4). Как следует из рисунка, экспериментальные результаты хорошо согласуются с теоретическими предсказаниями. Погрешности восстановленных параметров рассчитывались с использованием матрицы информации Фишера. Большие погрешности для случаев $K = 9{,}10$ обусловлены небольшим объемом данных (всего 500 и 358 представителей).

Следует отметить, что, несмотря на то, что теория отщепления фотонов предсказывает целые значения параметра когерентности a (2.4), предложенная модель допускает дробные значения a (2.2), что позволяет лучше согласовать экспериментальные данные. Такие квантовые состояния можно интерпретировать как смесь состояний с различным числом отщеплённых фотонов. Например, один фотоотсчёт может быть вызван как отщеплением фотона, так и темновым (или фоновым) шумом детектора. Таким образом, отбор событий, соответствующих одному фотоотчёту, даёт смесь исходного теплового состояния и теплового состояния с одним отщеплённым фотоном.

Стоит отметить, что все экспериментальные неидеальности, такие как темновые шумы ЛФД детектора, ограниченная квантовая эффективность и т.д., не вызывают значительных отклонений от предсказаний простой теории. Мы оцениваем соответствие теоретической и экспериментальной матриц плотности с помощью фиделити F:

$$F(\hat{\rho}^{th},\hat{\rho}^{exp}) = \left(\sum_i \sqrt{\hat{\rho}^{th}_{ii}\hat{\rho}^{exp}_{ii}}\right)^2. \qquad (2.10)$$

Для всех измеренных состояний, точность восстановления составила величину больше 99%. Следует также отметить, что полученные значения точности довольно высоки, несмотря на отклонение расчётных значений параметра a от значений, предсказываемых теорией (рисунок 2.6). Это означает, что значение параметра когерентности a более чувствительно к изменениям квантового состояния, чем точность F.

В таблице 1 представлены полные результаты статистического восстановления экспериментальных данных, включая объемы выборок N, оценки погрешностей и уровни значимости p.

Таблица 1 — Результаты статистического восстановления экспериментальных данных [80]

Состояние	$\mu \pm \sigma_\mu$	$a \pm \sigma_a$	N	F, %	p
$K = 0$	3,034±0,022	0,999±0,016	50000	99,999	0,370
$K = 1$	5,983±0,051	1,605±0,036	25000	99,659	0,112
$K = 2$	9,063±0,093	2,515±0,088	12500	99,777	0,550
$K = 3$	12,261±0,150	3,149±0,147	7500	99,572	0,014
$K = 4$	15,538±0,223	4,331±0,281	4500	99,799	0,565
$K = 5$	17,957±0,244	5,198±0,350	4500	99,831	0,111
$K = 6$	21,050±0,362	6,378±0,600	2500	99,928	0,214
$K = 7$	24,732±0,410	7,045±0,665	2500	99,832	0,021
$K = 8$	27,795±0,433	8,847±0,882	2500	99,945	0,207
$K = 9$	30,536±0,999	11,259±2,680	500	99,896	0,021
$K = 10$	33,114±1,267	11,337±3,156	358	99,980	0,123

2.2 Гауссификация тепловых состояний света с отщеплением фотонов

2.2.1 Гауссификация состояний

Потеря неклассических свойств состояний одномодового поля (как гауссовых, так и негауссовых) при взаимодействии с диссипативной средой интенсивно изучается в последние десятилетия [132—134]. Совсем недавно более общие свойства затухающих негауссовских состояний, такие как эволюция смеси или эволюция различных мер неклассичности [135], были исследованы с использованием квантового оптического основного уравнения в представлении взаимодействия [136]:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) + \gamma\bar{\mu}_R(\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} + \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger). \qquad (2.11)$$

В формуле (2.11) $\hat{\rho}$ – это редуцированный оператор плотности поля, γ – константа связи между полем и резервуаром, а $\bar{\mu}_R$ – средняя степень заполнения резервуара. Это популярное основное уравнение относится к типу Линдблада и, таким образом, сохраняет как положительную определённость, так и нормировку оператора плотности. Уравнение (2.11) имеет очевидное физическое значение для описания декогеренции моды поля, связанной с термостатом. Для получения исчерпывающего материала, касающегося решений, вытекающих из уравнения

(2.11) для средних значений операторов поля, характеристических функций и плотностей квазивероятностей, можно подробнее изучить [137].

Теперь необходимо получить решение уравнения (2.11) в базисе Фока. Для этого требуется использовать разложение Вейля оператора плотности поля:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi}\int d^2\lambda\,\chi(\lambda)\,\hat{D}(-\lambda), \tag{2.12}$$

где $\chi(\lambda)$ – это характеристическая функция состояния $\hat{\rho}$, определяемая как математическое ожидание оператора сдвига $\hat{D}(\lambda) = \exp(\lambda\hat{a}^\dagger - \lambda^*\hat{a})$,

$$\chi(\lambda) = \mathrm{T}r[\hat{\rho}\hat{D}(\lambda)]. \tag{2.13}$$

Установлено, что характеристическая функция $\chi(\lambda, t)$ затухающего поля определяется её начальным состоянием $\chi(\lambda, 0)$ [135]

$$\chi(\lambda{,}t) = \chi\left(\lambda\, e^{-\frac{\gamma}{2}t}, 0\right)\exp\left[-\left(\mu_R + \frac{1}{2}\right)(1 - e^{-\gamma t})|\lambda|^2\right]. \tag{2.14}$$

Среднее число фотонов в затухающей моде поля есть

$$\mu(t) = \mu_0 e^{-\gamma t} + \mu_T(t), \tag{2.15}$$

где $\mu_T(t) := \mu_R(1 - e^{-\gamma t})$ обозначает среднюю тепловую заселенность в моде поля в момент времени t, а μ_0 - исходное среднее число фотонов.

Заметим, что затухающее уравнение (2.11) не зависит от фазы и сохраняет диагональную форму состояния при эволюции в фоковском базисе. Действительно, характеристическая функция входного фоковского состояния $\hat{\rho}(0)$ есть

$$\chi(\lambda{,}0) = \exp\left(-\frac{1}{2}|\lambda|^2\right)\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{ll}(0)\; L_l(|\lambda|^2), \tag{2.16}$$

где $\rho_{ll}(0)$ – распределение по числу фотонов, $L_l(x)$ – полином Лагерра степени l. Уравнение (2.14) дополнительно даёт

$$\chi(\lambda{,}t) = \exp\left\{-\left[\mu_T(t) + \frac{1}{2}\right]|\lambda|^2\right\}\sum_{l=0}^{\infty}\rho_{ll}(0)\; L_l\big(|\lambda|^2 e^{-\gamma t}\big). \tag{2.17}$$

Матрица плотности $\rho_{jk}(t)$ затухающего поля получается из разложения Вейля (2.12) после подстановки в выражение характеристической функции (2.17) и использования матричных элементов оператора сдвига в фоковском базисе. После несложного вычисления с переходом в полярные координаты и замены переменной в интеграле (2.12), получаем следующее разложение в ряд:

$$\rho_{jk}(t) = \delta_{jk} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{ll}(0) \int_0^{\infty} dx\, e^{-[\mu_T(t)+1]x} L_l(xe^{-\gamma t}) L_j(x). \tag{2.18}$$

Интеграл в приведенном выше уравнении можно вычислить, получив формулу [138; 139]

$$\rho_{jk}(t) = \delta_{jk} \frac{[\mu_T(t)]^j}{[\mu_T(t)+1]^{j+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \rho_{ll}(0) \left[\frac{(\mu_R+1)(1-e^{-\gamma t})}{\mu_T(t)+1}\right]^l \times$$
$$\times\, {}_2F_1\left[-j, -l; 1; \frac{e^{-\gamma t}}{(\mu_R+1)(1-e^{-\gamma t})\mu_T(t)}\right], \tag{2.19}$$

где ${}_2F_1$ - гипергеометрическая функция Гаусса. Уравнение (2.19) является общим решением для затухающей матрицы плотности как функции диагонального входного состояния в фоковском базисе. Рассмотрим предел $t \to \infty$ в уравнении (2.19). Результатом является тепловое состояние с распределением Бозэ-Эйнштейна со средней заселенностью μ_R. Таким образом, имеем дело с процессом гауссификации, а именно, эволюция в соответствии с квантовым оптическим основным уравнением в конечном итоге разрушает негауссовость, а также свойства неклассичности любого входного состояния. Частный случай уравнения (2.19) возникает для теплового контакта с термостатом при нулевой температуре ($\mu_R = 0$), т. е. для связи поля с вакуумом. Тогда при эволюции состояние (2.19) переходит в

$$\rho_{jk}(t) = \delta_{jk} \sum_{l=j}^{\infty} \binom{l}{j} \rho_{ll}(0) e^{-j\gamma t} \left(1 - e^{-\gamma t}\right)^{l-j}. \tag{2.20}$$

Уравнение (2.20) описывает как диссипацию при контакте с резервуаром с нулевой температурой, так и фотоотсчёты, в которых экспоненту $e^{-\gamma t}$ следует заменить квантовой эффективностью η детектора.

При операции отщепления K фотонов изменяется среднее число фотонов

$$\mu(K,t) = \mu_0(K+1)e^{-\gamma t} + \mu_T(t), \tag{2.21}$$

и тогда применяя представленные выше выражения, получим распределение по числу фотонов теплового состояния с отщеплением K фотонов под действием потерь

$$\begin{aligned} P(n,t|K) =& \frac{[\mu_T(t)+1]^K[\mu_0 e^{-\gamma t}+\mu_T(t)]^n}{[\mu_0 e^{-\gamma t}+\mu_T(t)+1]^{K+n+1}}\times \\ &\times {}_2F_1\left[-K,-n;1;\frac{\mu_0 e^{-\gamma t}}{(\mu_T(t)+1)(\mu_0 e^{-\gamma t}+\mu_T(t))}\right] \end{aligned} \tag{2.22}$$

Теперь, когда необходимая теория представлена, откажемся от рассмотрения термостата и будем изучать затухание именно в оптических системах. В случае $\mu_R = 0$ коэффициент $e^{-\gamma t}$ можно интерпретировать как обычный коэффициент пропускания оптической системы. Тогда распределение (2.22) можно существенно упростить, использовав параметризацию через компаунд-распределение Пуассона [128]

$$P_{\mu,a}(n,t) = P(n,t|K) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}\frac{\mu(t)^n}{a^n n!}\frac{1}{(1+\mu(t)/a)^{n+a}}, \tag{2.23}$$

где $\mu(t) = \mu e^{-\gamma t}$. Другими словами, компаунд-распределение Пуассона описывает затухающие тепловые состояния с отщеплением K фотонов с заменой $\mu(t) = \mu e^{-\gamma t}$, что кардинально упрощает выражение (2.22). Следует заметить, что оптические потери не изменяют параметр когерентности a, а только уменьшают среднее число фотонов μ в соответствии с коэффициентом пропускания системы.

В качестве примера на рисунке 2.7 представлены функции Вигнера тепловых состояний с отщеплением фотонов с параметрами $a = 1, 2, 3$ и $\mu = 2, 4, 6$. Исходные тепловые состояния с $a = 1$ являются функциями Гаусса. При $a > 1$ функция Вигнера становится кольцевой. Её негауссовость возрастает с ростом μ и a. Стрелки $\hat{a}$ соответствуют процессу отщепления фотонов, которые увеличивают оба параметра и приводят к увеличению негауссовости. Процесс оптического затухания показан стрелкой γt : он сохраняет параметр a, уменьшает μ и приводит к потере негауссовости.

Однако следует подчеркнуть, что оптическое затухание не преобразовывает тепловое состояние с отщеплением фотонов в тепловое состояние. В частности, оптические потери не способны изменить корреляционную функцию $g^{(2)} = 1 + \frac{1}{a}$.

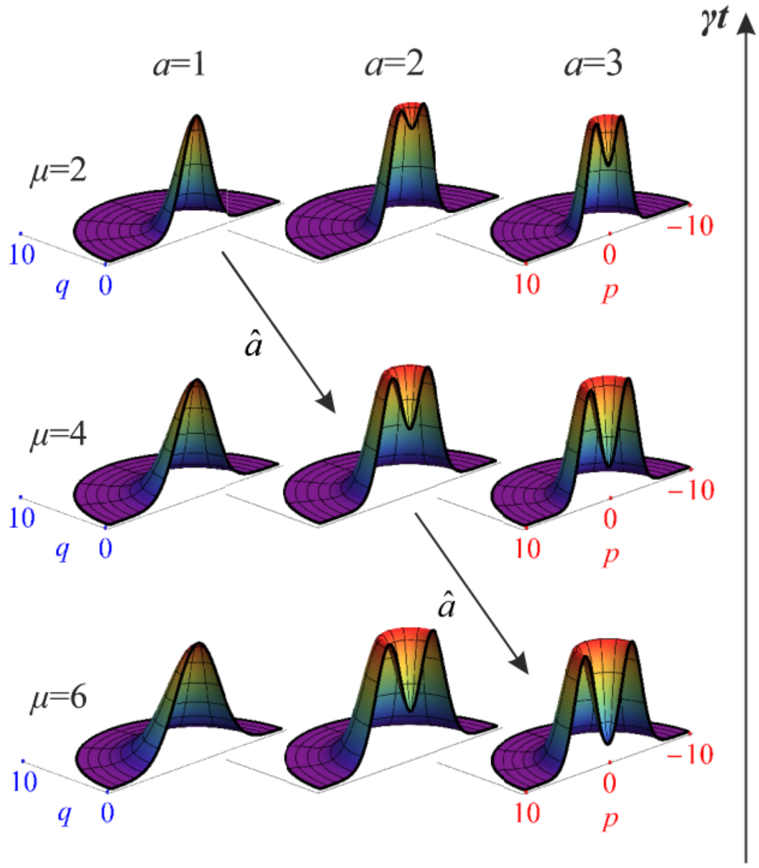

Рисунок 2.7 — Функции Вигнера тепловых состояний с отщеплением фотонов с параметрами $a = 1, 2, 3$ и $\mu = 2, 4, 6$ Стрелки $\hat{a}$ соответствуют процессу отщепления фотонов, а стрелка γt показывает эволюцию во время оптического затухания.

Для количественного описания негауссовости тепловых состояний с отщеплением фотонов (MPSTS — multi-photon subtracted thermal state) можно ввести меры, основанные на расстоянии между матрицей плотности $\hat{\rho}_{MPSTS}(\mu{,}a)$ и матрицей плотности ближайшего гауссового состояния, которое на самом деле является тепловым состоянием с тем же средним числом фотонов $\hat{\rho}_{TS}(\mu)$.

Одной из таких мер является метрика Гилберта – Шмидта, введенная для измерения негауссовости в [140—142] и применённая к анализу данного семейства состояний в [139]:

$$\delta_{HS}(\hat{\rho}_{MPSTS}) = \frac{Tr[(\hat{\rho}_{MPSTS} - \hat{\rho}_{TS})^2]}{2Tr[\hat{\rho}^2_{MPSTS}]} = \\ = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\sum_n \left(P^2_{\mu,1}(n) - 2P_{\mu,1}(n)P_{\mu,a}(n)\right)}{\sum_n P_{\mu,a}(n)}\right]. \qquad (2.24)$$

Значение этой меры $\delta_{HS}(\hat{\rho}_{MPSTS}) = 0$, если $\hat{\rho}_{MPSTS}$ является гауссовым состоянием. Следует заметить, что выражение (2.24) может быть записано в аналитическом виде [139].

Следующая рассматриваемая мера – это метрика относительной энтропии [141; 143]:

$$\begin{aligned}\delta_{RE}(\hat{\rho}_{MPSTS}) &= Tr\left[\hat{\rho}_{MPSTS}\left(\hat{\rho}_{MPSTS} - \hat{\rho}_{TS}\right)\right] = \\ &= (\mu+1)\ln(\mu+1) - \mu\ln(\mu) + \sum_n P_{\mu,a}(n)\ln(P_{\mu,a}(n)).\end{aligned} \tag{2.25}$$

Для гауссовых тепловых состояний $\delta_{RE}(\hat{\rho}_{TS}) = 0$.

Третья мера – это расстояние Бюреса [144], основанное на фиделити F Ульмана между состояниями $\hat{\rho}_{MPSTS}$ и $\hat{\rho}_{TS}$ [145; 146]:

$$\delta_F(\hat{\rho}_{MPSTS}) = 1 - \sqrt{F(\hat{\rho}_{MPSTS},\hat{\rho}_{TS})} = 1 - \sum_n \sqrt{P_{\mu,1}(n)P_{\mu,a}(n)} \tag{2.26}$$

Недостатком всех перечисленных мер является необходимость оценки матрицы плотности $\hat{\rho}$. Другой способ определения негауссовости основан на форме квадратурных распределений $P_{\mu,a}(q)$ напрямую измеряемых методом гомодинного детектирования. Это связано с тем, что используя модель компаунд-распределения Пуассона, можно вычислить аналитически центральный момент четвертого порядка – куртозис [143]:

$$K_D = \frac{m_4}{m_2^2},\ \beta_2 = K_D - 3, \tag{2.27}$$

где m_j – ый центральный момент, β_2 – эксцесс. Эта величина характеризует «плоскостность» распределения. Например, $\beta_2 = 0$ для распределения Гаусса, $\beta_2 = -1{,}2$ для равномерного распределения и $\beta_2 = 3$ для распределения Лапласа. Более того, как было показано в (2.8) в рамках модели компаунд-распределения Пуассона можно довольно просто связать второй и четвертый моменты $P_{\mu,a}(q)$ с параметрами распределения μ и a. Тогда эта мера негауссовости, нормированная от 0 до 1, может быть определена для тепловых состояний с отщеплением фотонов как

$$\delta_K(\hat{\rho}_{MPSTS}) = \frac{2}{3}|\beta_2| = \left(\frac{2\mu}{2\mu+1}\right)^2\frac{a-1}{a}. \tag{2.28}$$

Зависимости негауссовости для этих мер от параметров a и μ представлены на рисунке 2.8. Можно видеть, что метрики δ_{HS}, δ_{RE} и δ_F на основе расстояния

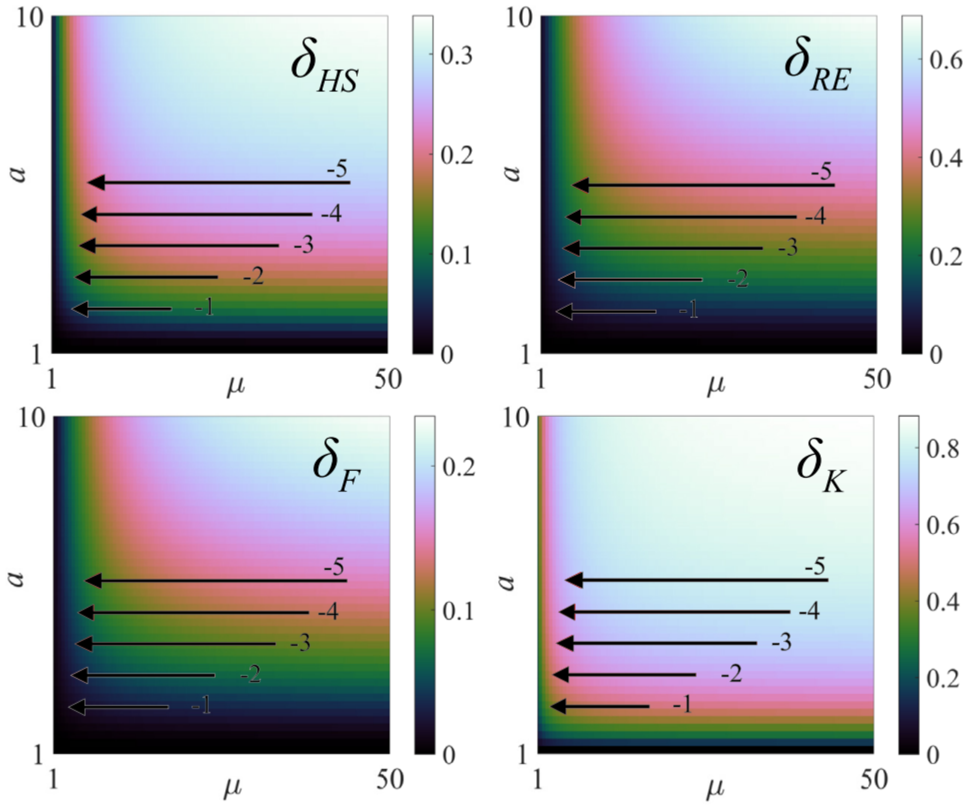

Рисунок 2.8 — Графики мер негауссовости (вид сверху) для тепловых состояний с отщеплением фотонов в зависимости от параметров a и μ. δ_{HS} – мера Гильберта–Шмидта (2.24); δ_{RE} – мера относительной энтропии (2.25); δ_F - расстояние Буреса (2.26); δ_K – мера, основанная на куртозисе квадратурного распределения (2.6). Стрелки соответствуют направлениям эволюции для тепловых состояний с отщеплением 1, 2, 3, 4 и 5 фотонов, измеренных в эксперименте.

между двумя матрицами плотности выглядят одинаково: они плавно увеличиваются с ростом a и μ. Мера δ_K, основанная на куртозисе, напротив, резко возрастает около границ графика и затем продолжает расти с гораздо меньшим градиентом. Следовательно, мы можем сделать вывод, что первые три меры, основанные на расстоянии, хорошо работают в большом масштабе с $a, \mu \gg 1$, в то время как меру, основанную на куртозисе, лучше использовать при маленьких значениях параметров.

2.2.2 Эксперимент и результаты

Чтобы наблюдать гауссификацию тепловых состояний с отщеплением фотонов во время оптического затухания, была построена простая экспериментальная установка; её принципиальная схема показана на рисунке 2.9. Эта установка подобна описанной в разделе 2.1.2. Отличие заключается в том, что оптические потери регулируются вращением полуволновой пластины ПВП1, за которой расположен поляризационный светоделитель ПСД1 [128].

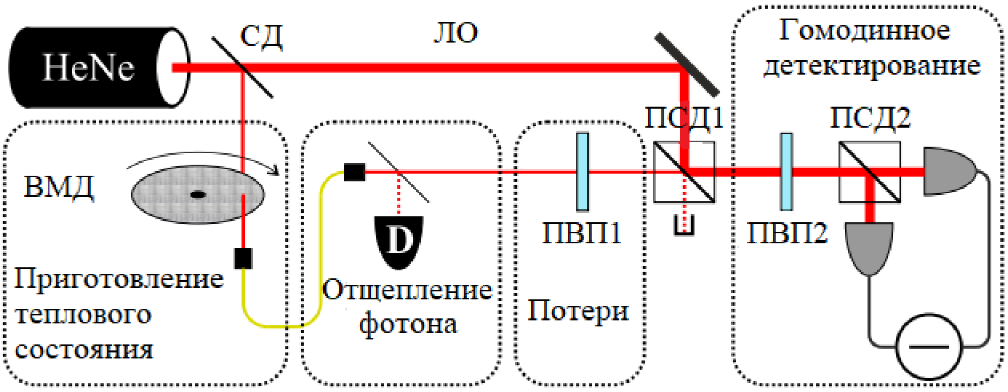

Рисунок 2.9 — Схема экспериментальной установки для приготовления и измерения затухающих тепловых состояний с отщеплением фотонов. ВМД – вращающийся матовый диск; D – однофотонный детектор; СД – светоделитель; ПСД – поляризационный светоделитель; ПВП – полуволновая пластина.

Параметры μ и a оценивались аналогичным образом с помощью метода максимального правдоподобия с использованием модели компаунд-распределения Пуассона. На рисунке 2.10 приведены измеренные квадратурные гистограммы с 3 отщеплёнными фотонами и восстановленные квадратурные распределения при различных уровнях оптических потерь. Начальное среднее число фотонов в отсутствие потерь $\mu = 34{,}6$. Как можно заметить, наблюдается хорошее соответствие между экспериментом и теоретическими предсказаниями.

Не единичная квантовая эффективность η гомодинного детектора учтена следующим образом. Она приводит к свертке квадратурного распределения $P(q)$ и распределения Гаусса с нулевым средним и дисперсией $\sigma_c^2 = \frac{1-\eta}{2\eta}$ с последующим масштабированием квадратуры с коэффициентом $\sqrt{\eta}$. Этот эффект эквивалентен преобразованию входного квантового состояния под действием дополнительных потерь η. Таким образом, после оценки параметров a и μ из

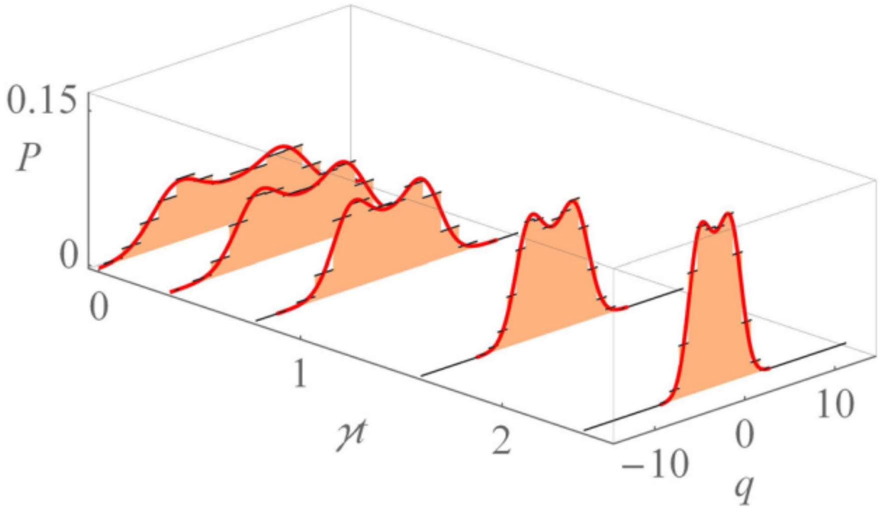

Рисунок 2.10 — Измеренные квадратурные гистограммы для теплового состояния с 3 отщеплёнными фотонами при различных уровнях оптических потерь γt. Начальное среднее число фотонов в отсутствие потерь $\mu = 34{,}6$. Красные кривые – это результаты восстановления квадратурного распределения $P(q)$ методом максимального правдоподобия.

необработанных квадратурных данных (без какого-либо масштабирования и деконволюции) среднее число фотонов было разделено на η. Однако, для меры δ_K следует учитывать, что куртозис является нормированным кумулянтом четвертого порядка. Аддитивность кумулянтов приводит к следующей связи между идеальным эксцессом квадратурного распределения β_2 и вторым и четвертым моментами измеренного квадратурного распределения $\widetilde{m}_2$ и $\widetilde{m}_4$:

$$\beta_2 = \frac{m_4 - 3m_2^2}{m_2^2} = \frac{\widetilde{m}_4 - 3\widetilde{m}_2^2}{(\widetilde{m}_2 - \eta\sigma_c^2)^2}. \tag{2.29}$$

В эксперименте были приготовлены и измерены тепловые состояния с отщеплением от одного до пяти фотонов при пяти уровнях потерь, от нуля до $\gamma t = 2{,}35$. Среднее число фотонов для исходного теплового состояния без потерь составило $\mu = 8{,}86$. Уровень потерь γt определялся из среднего числа фотонов, оцененного из безусловного квадратурного распределения.

Для параметров a и μ, а также их ошибок и ковариаций были рассчитаны три меры негауссовости: δ_{HS}, δ_{RE} и δ_F. Четвертая мера δ_K вычислялась непосредственно из второго и четвертого моментов измеренных квадратурных гистограмм. Доверительные интервалы для значений δ_K определялись численным экспериментом с использованием матрицы информации Фишера [147].

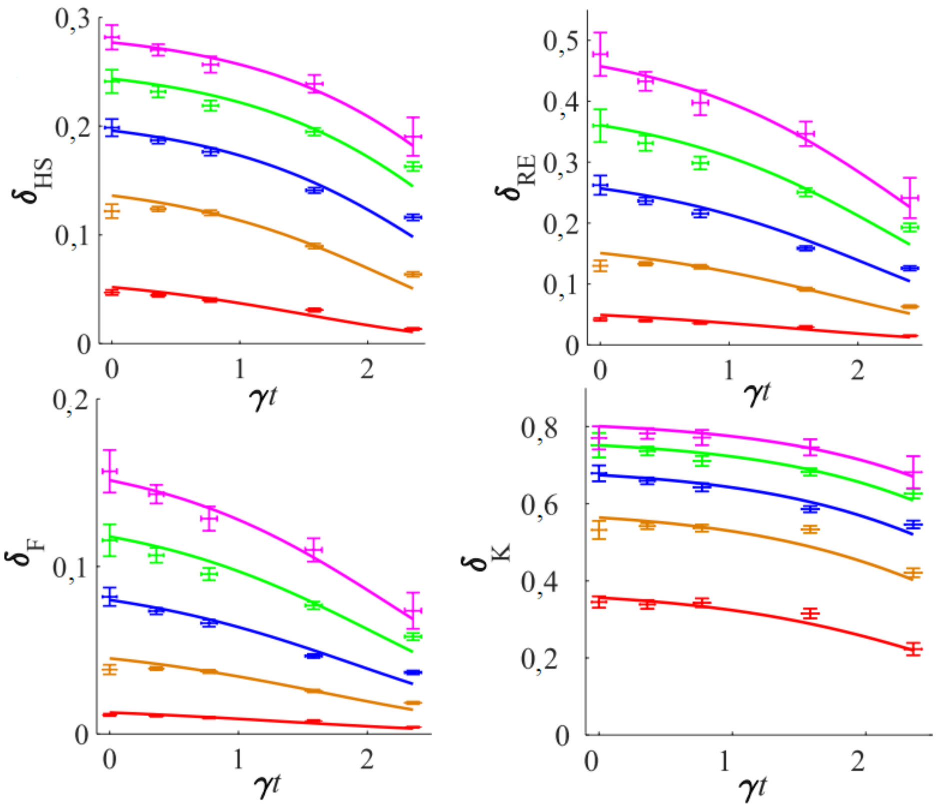

Рисунок 2.11 — Теоретические кривые и экспериментальные точки для метрик негауссовости для различных тепловых состояний с отщеплением фотонов (снизу-вверх отщепление от одного до пяти фотонов) при разных уровнях потерь γt.

Результаты представлены точками на рисунке 2.11. Теоретические значения представлены в виде кривых; снизу-вверх показаны состояния сотщеплением от одного до пяти фотонов при различных уровнях потерь γt.

Здесь следует отметить, что из-за некоторых экспериментальных недостатков оцененные параметры когерентности не достигли идеальных значений $a_K = K + 1$ для состояний с отщеплением K фотонов. Измеренные значения равны 0,94, 1,61, 2,42, 3,27, 4,34 и 5,46 для состояний с отщеплением от 0 до 5 фотонов. Таким образом, пришлось использовать эти значения для теоретических кривых на рисунке 2.11. Мы видим, что экспериментальные точки лежат близко к теоретическим кривым. Для количественной оценки соответствия между теоретической и экспериментальной матрицами плотности была рассчитана фиделити F (2.10); для всех измеренных состояний точность была выше 99%.

Однако, можно отметить некоторое расхождение между теорией и экспериментом, которое объясняется неидеальностью процесса отщепления фотонов, вызванного темновыми шумами и нестабильностью мощности и поляризации лазерного излучения.

2.3 «Квантовый вампир» на тепловых состояниях

2.3.1 Идея метода

Рассмотрим описание эффекта квантового вампира на тепловых состояниях с использованием аппарата производящих функций [129]. Для двумерного распределения вероятностей $P(k_1,k_2)$ производящая функция $G(z_1,z_2)$ задается следующей формулой:

$$G(z_1,z_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} P(k_1,k_2) z_1^{k_1} z_2^{k_2}. \tag{2.30}$$

Здесь z_1 и z_2 $(|z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant 1)$ – формальные действительные или комплексные переменные. Зная производящую функцию $G(z_1,z_2)$ и вычисляя производные в точках $(z_1 = 0, z_2 = 0)$, можно построить соответствующее распределение вероятностей:

$$P(k_1,k_2) = \frac{1}{k_1!k_2!} \frac{\partial^{k_1+k_2} G(z_1,z_2)}{\partial z_1^{k_1} \partial z_2^{k_2}}|_{z_1=0,z_2=0}. \tag{2.31}$$

Производящая функция $G(z_1,z_2)$ удовлетворяет условию нормировки $G(1,1) = 1$.

Применим теперь полученные формулы к описанию действия делителя пучка. Пусть на вход делителя пучка поступает состояние, содержащее случайное число фотонов k, а соответствующее распределение вероятностей есть $P_{in}(k)$. Предположим, что каждый фотон, независимо от других фотонов, на выходе светоделителя оказывается в первом канале с вероятностью p и, соответственно, во втором канале с вероятностью $1 - p$. Другие обозначения: $p = T = |t|^2$ – коэффициент прохождения, $1 - p = R = |r|^2$ – коэффициент отражения.

Тогда, двумерное распределение вероятностей $P_{out}(k_1,k_2)$ на выходе будет определяться произведением исходного распределения $P_{in}(k)$ и биномиального распределения:

$$P_{out}(k_1,k_2) = P_{in}(k)C_k^{k_1}T^{k_1}R^{k-k_1},\ k = k_1 + k_2. \tag{2.32}$$

На языке производящих функций учет делителя пучка приводит к преобразованию исходной переменной z в линейную комбинацию новых переменных z_1 и z_2: $z \to z' = Tz_1 + Rz_2$. Соответствующее преобразование производящих функций есть:

$$G_{out}(z_1,z_2) = G_{in}(Tz_1 + Rz_2). \tag{2.33}$$

Для теплового состояния, распределенного по двум каналам, имеем (это совместное двумерное распределение):

$$G(z_1,z_2) = \frac{1}{1 + \mu(1 - Tz_1 - Rz_2)}, \tag{2.34}$$

здесь μ – среднее число фотонов на входе делителя пучка. Чтобы найди частное одномерное (маргинальное) распределение в первом канале, нужно положить $z_2 = 1$. В результате получим: $G^A(z_1) = G(z_1,1) = \frac{1}{1+\mu T(1-z_1)}$ – это тепловое состояние со средним μT. Аналогично, во втором канале: $G^B(z_2) = G(1,z_2) = \frac{1}{1+\mu R(1-z_2)}$ – это тепловое состояние со средним μR.

Производящая функция $G_1(z)$ распределения, отвечающего отщеплению одного фотона на входе делителя пучка, определяется первой производной $G^{(1)}(z)$ от производящей функции исходного распределения:

$$G_1(z) = \frac{G^{(1)}(z)}{\mu} = \frac{1}{(1 + \mu(1 - z))^2} = \frac{1}{(1 + \mu(1 - Tz_1 - Rz_2))^2}. \tag{2.35}$$

Тот же результат получится, если отщеплять фотон в первом или втором канале. Например, для первого канала (первый множитель отвечает за нормировку):

$$G_1(z_1) = \left(\frac{\partial G(1,1)}{\partial z_1}\right)^{-1} \frac{\partial G(z_1,z_2)}{\partial z_1}. \tag{2.36}$$

Другими словами, независимо от того, где отщепляются фотоны у теплового состояния (на входе, в канале 1 или в канале 2), возникает компаунд-распределение Пуассона с параметрами (здесь K - число отщеплённых фотонов): $a_K = 1 + K$, $\mu_K = \mu(1 + K)$. Это относится не только к тепловому состоянию, но и к любому другому и связано с пост-селекцией данных. Математически $z = Tz_1 + Rz_2$, поэтому частные производные по z_1 и z_2 совпадают с производной по z с точностью до постоянного коэффициента, который не имеет существенного значения, т.к. исчезает при нормировке. Квадрат коэффициента корреляции Пирсона между каналами (коэффициент детерминации) есть:

$$r^2_{Pearson} = \frac{\mu^2 TR}{(\mu T+1)(\mu R+1)}. \tag{2.37}$$

Важно отметить, что коэффициент корреляции между каналами также не зависит от того, отщепляются ли фотоны, или нет.

Более того, если вычислить аналитически распределение $P_{out}(k_1,k_2)$ (2.32), мы получим, что оно не факторизуется, то есть реализовывать эффект квантового вампира можно и на классических состояниях света и необходимым условием является наличие корреляций у исследуемого состояния.

2.3.2 Многомодовый квантовый вампир

Рассмотрим экспериментальную реализацию эффекта квантового вампира на тепловых состояниях света в многомодовом режиме [130]. Ключевым элементом установки является пространственный модулятор света (ПМС) производства Cambridge Correlators. Как правило, ПМС представляет собой жидкокристаллическую матрицу, которая применяет определяемый пользователем пиксельный сдвиг фазы к фронту падающей волны. Поскольку ПМС является поляризационно-зависимым устройством, он изменяет только фазу диагонально поляризованного света. Таким образом, ПМС, расположенный между двумя горизонтально или вертикально ориентированными поляризаторами, работает как идеальный амплитудный модулятор [148] (собственно, именно так работает обычный жидкокристаллический дисплей).

Установка состоит из трех частей (рисунок 2.12): 1. Подготовка исходного одномодового теплового пучка; 2. Преобразование пучка (с применением оптических потерь или отщепления фотонов); 3. Измерение выходного профиля производится однопиксельной камерой [149], работающей в режиме растрового сканирования.

Тепловой свет был приготовлен путем прохождения непрерывного излучения гелий-неонового лазера через вращающийся матовый стеклянный диск (ВМД). Для одномодовой селекции свет соединён линзой Л0 с одномодовым оптоволокном ОМВ. Выходной пучок волокна коллимировался линзой Л1, пропускался через горизонтально ориентированный поляризатор П1, а затем его центральная почти однородная часть вырезалась диафрагмой.

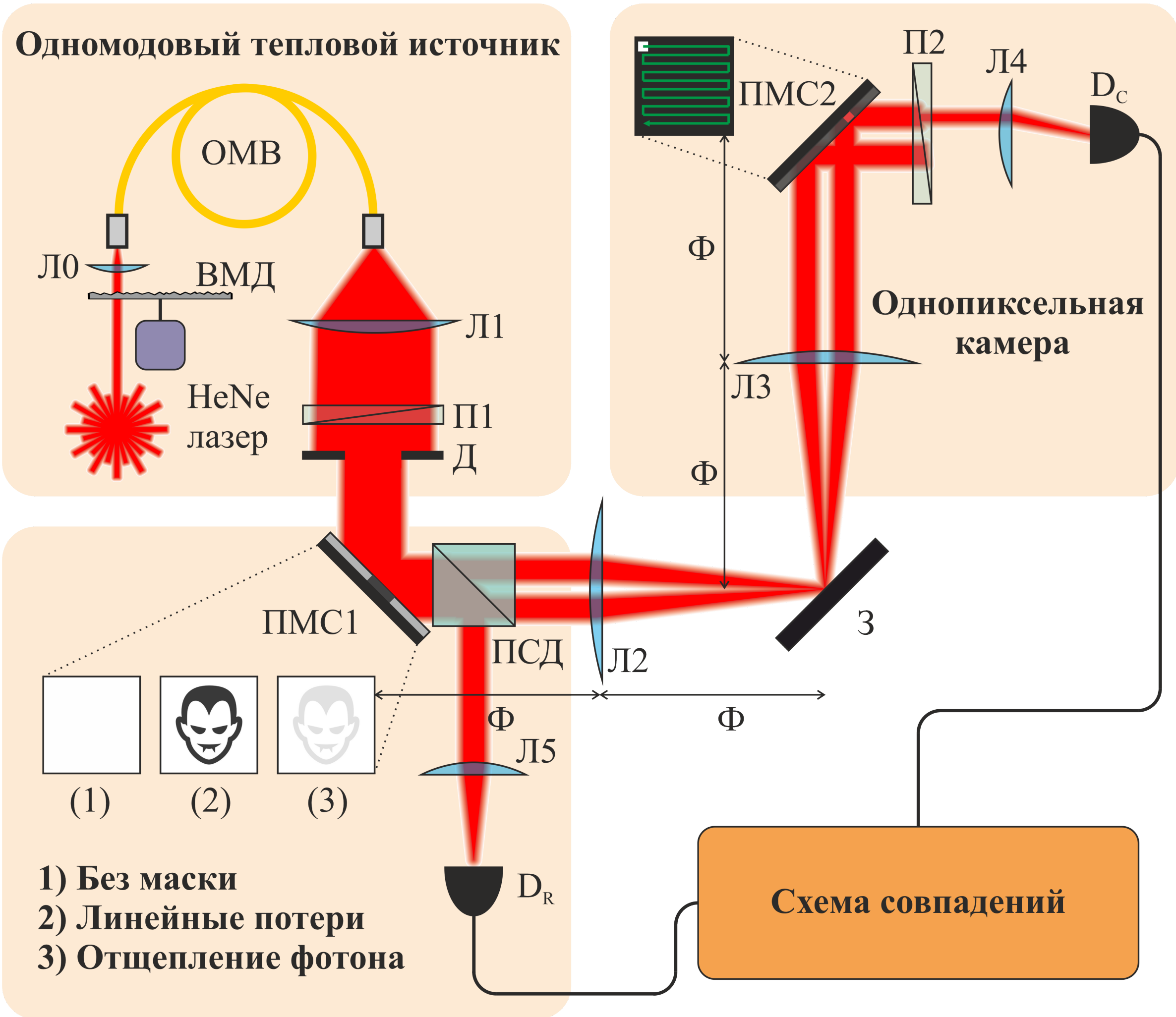

Рисунок 2.12 — Схема экспериментальной установки. Линзы Л0–Л5, ВМД — вращающийся матовый диск, ОМВ — одномодовое волокно, П1, П2 — поляроиды, ПСД — поляризационный светоделитель (П1, П2 и ПСД пропускают горизонтальную поляризацию), ПМС1,2 —- пространственнный модулятор света (чёрные пиксели вращают поляризацию на $90°$), зеркало З, D_R, D_C — однофотонные детекторы.

ПМС1 использовался для поворота поляризации входного луча (белые пиксели соответствуют горизонтальной поляризации на выходе, а черные - вертикальной). В сочетании с поляризационным светоделителем ПСД, который пропускает горизонтальную поляризацию и отражает вертикальную, ПМС1 работал как светоделитель с различным коэффициентом отражения. Использовались три типа масок, отображаемых на ПМС1: а) белая маска, которая соответствует отсутствию светоделителя, б) высококонтрастная маска для линейных потерь (рисунок 1.7а) и в) низкоконтрастная маска, действующая как светоделитель с малым коэффициентом отражения (рисунок 1.7б,в). Однофотонный детектор D_R, помещенный в отраженный канал, использовался для измерения среднего числа фотонов n_R в случае б) и запускал однопиксельную камеру, чтобы реализовать однофотонное отщепление в случае в).

Система линз Л2, Л3 в сочетании с зеркалом З формировала изображение ПМС1 на ПМС2, которое являлось основной частью однопиксельной камеры. Белая область шириной 11x11 пикселей (то есть суперпиксель) на черном фоне, нанесенная на ПМС2, выделяла часть изображения, передаваемого через поляризатор П2 и собираемого однофотонным детектором D_C. Таким образом, мы могли выполнять растровое сканирование изображения, изменяя положение суперпикселя. В режиме отщепления фотонов схема совпадения выбирает сигнал камеры (импульсы постоянного тока), соответствующий временам отщепления фотонов (импульсы D_R).

Поскольку предложенная установка работала в непрерывном режиме, временной режим всех измеряемых состояний определялся схемой детектирования и его ширина составляла 12 нс, что было намного меньше времени корреляции теплового состояния. Для каждого суперпиксельного измерения использовалось общее время сбора данных 3 секунды.

Результаты экспериментов представлены на рисунке 2.13. Исходный профиль пучка (рисунок 2.13а) был измерен, когда белая маска (1) была нанесена на SLM1. Он выглядит как почти равномерный эллипс с ярким контуром из-за дифракции луча на диафрагме. На рисунке 2.13б представлен профиль луча, прошедшего через высококонтрастную маску «вампира» (2). Видно четкое изображение «вампира» (тень). Среднее число фотонов в канале отражения n_R было измерено с помощью D_R и равно 1 (учтены квантовая эффективность детектора и потери на пропускании). На рисунке 2.13в представлен безусловный профиль луча, прошедшего через низкоконтрастную маску «вампира» (3). В этом случае $n_R = 0{,}13$ и тени различить нельзя. Наконец, на рисунке 2.13г представлен условный профиль пучка, соответствующий отщеплению фотона (когда $\mu_R = 1$), сформированный подсчетом совпадений. Несмотря на то, что эта ситуация интуитивно похожа на предыдущий случай, представленный на рисунке 2.13б, на рисунке 2.13г невозможно различить тень. С другой стороны, можно отметить, что весь профиль становится в два раза ярче. Такое поведение вызвано тем, что

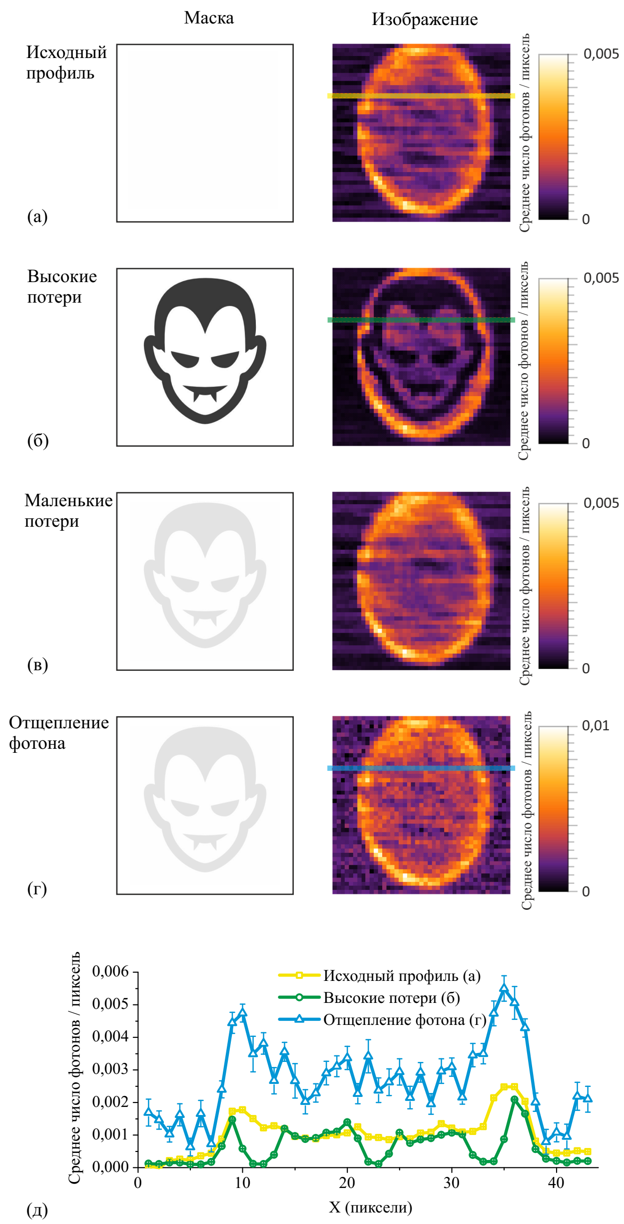

Рисунок 2.13 — Результаты экспериментов. а) Исходный профиль пучка; б) высокие потери в канале, в) низкие потери в канале, г) условный профиль, соответствующий отщеплению фотона. д) Одномерные профили: желтые квадраты - исходный профиль, зеленые кружки - большие потери в канале, синие треугольники - отщепление фотона.

оператор уничтожения, «помещенный» в часть луча, влияет на весь профиль луча. Чтобы подчеркнуть последнее утверждение, на рисунке 2.13д представлены одномерные профили пучка. Область 1D-профиля выделена цветовой шкалой на рисунке 2.13а-г. Легко видеть, что профиль при отщеплении фотона повторяет исходный профиль, но он в два раза выше.

Отметим, что в многомодовом режиме выполнена демонстрации эффекта «квантового вампира» в его первоначальном представлении: уничтожение фотона в части пучка приводит к отщеплению фотона во всём пучке, поэтому профиль пучка не меняется (не отбрасывать тень), но может изменять свою яркость. В частности, в случае теплового состояния на входе мощность пучка увеличивается вдвое. Подчеркнем, что этот эффект основан на условной реализации оператора уничтожения фотона, то есть по корреляционным измерениям. Причем входной луч должен быть одномодовым. В некотором смысле эффект «квантового вампира» противоположен методу призрачного изображения [99], где исходный луч является многомодовым: изображение, невидимое при единичных фотоотсчётах, может быть восстановлено из измерения совпадений.

2.3.3 Двухмодовый квантовый вампир

Рассмотрим экспериментальную реализацию эффекта квантового вампира на тепловых состояниях света в двухмодовом режиме [129]. Элементы установки (рисунок 2.14), отвечающие за процесс генерации и гомодинирования теплового состояния, аналогичны описанным в разделе 2.1.2. Единственное отличие состоит в установке поляроида П1 после вращающегося матового диска ВМД для выделения одной поляризационной моды (пространственная выделяется одномодовым волокном).

Далее, тепловое излучение разбивается на каналы Алисы и Боба поляризационным светоделителем ПСД1, причём исходное среднее число фотонов есть $\mu = T\mu_A + R\mu_B$, где μ_A и μ_B – среднее число фотонов в каналах Алисы и Боба. В канале Алисы отщепляется произвольное число фотонов, в канале Боба – ничего не делается (единичное преобразование). У зеркала З5 есть два положения: когда оно откинуто, измеряется канал Алисы, когда оно установлено – измеряется канал Боба. Затем проводится гомодинирование тепловых состояний света.

Эксперимент проводился при следующих параметрах: коэффициенты отражения и прохождения 50%, время когерентности теплового источника $T_{coh} =$ 120 мкс, время группировки $\tau_a = 10$ мкс. Восстановление параметров производилось с помощью метода, описанного в п.2.1.

Эффект «квантового вампира» был протестирован на тепловых состояниях с отщеплением одного и двух фотонов в моде А. Среднее число фотонов

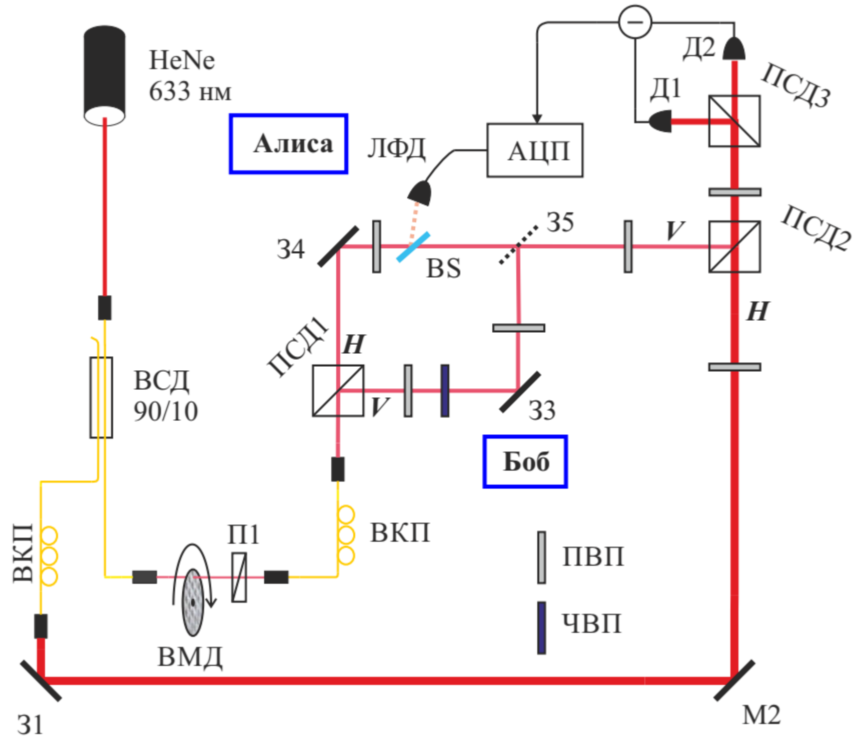

Рисунок 2.14 — Схема установки для демонстрации эффекта «квантового вампира» на тепловых состояниях света в двухмодовом режиме. ВСД – волоконный светоделитель, ВКП – волоконный контроллер поляризации, ВМД – вращающийся матовый диск, З – зеркало, СД – светоделитель, ПСД – поляризационный светоделитель, П – поляроид, ПВП – полуволновая пластинка, ЧВП – четвертьволновая пластинка, ЛФД – лавинный фотодиод, Д1 и Д2 – гомодинный детектор, АЦП – аналогоцифровой преобразователь.

исходных тепловых состояний в модах A и B равно $\mu_{0A} = 4{,}60 \pm 0{,}02$ и $\mu_{0B} = 4{,}55 \pm 0{,}03$.

Результаты эксперимента представлены на рисунке 2.15. Измеренные квадратурные распределения показаны в виде гистограмм на вставках; размер полученной выборки варьировался от 5800 до 110000, в зависимости от количества отщеплённых фотонов. Восстановленные распределения по числу фотонов, которые полностью определяют матрицу плотности, также показаны в виде гистограмм на основных графиках. Красные сплошные линии соответствуют исходным тепловым состояниям, синие пунктирные линии соответствуют тепловым состояниям с отщеплением одного фотона, а зеленые пунктирные линии - тепловым состояниям с отщеплением двух фотонов.

Левый столбец соответствует состоянию в моде A, а правый столбец — в моде B. Верхний ряд указывает исходные тепловые состояния, пока фотоот-

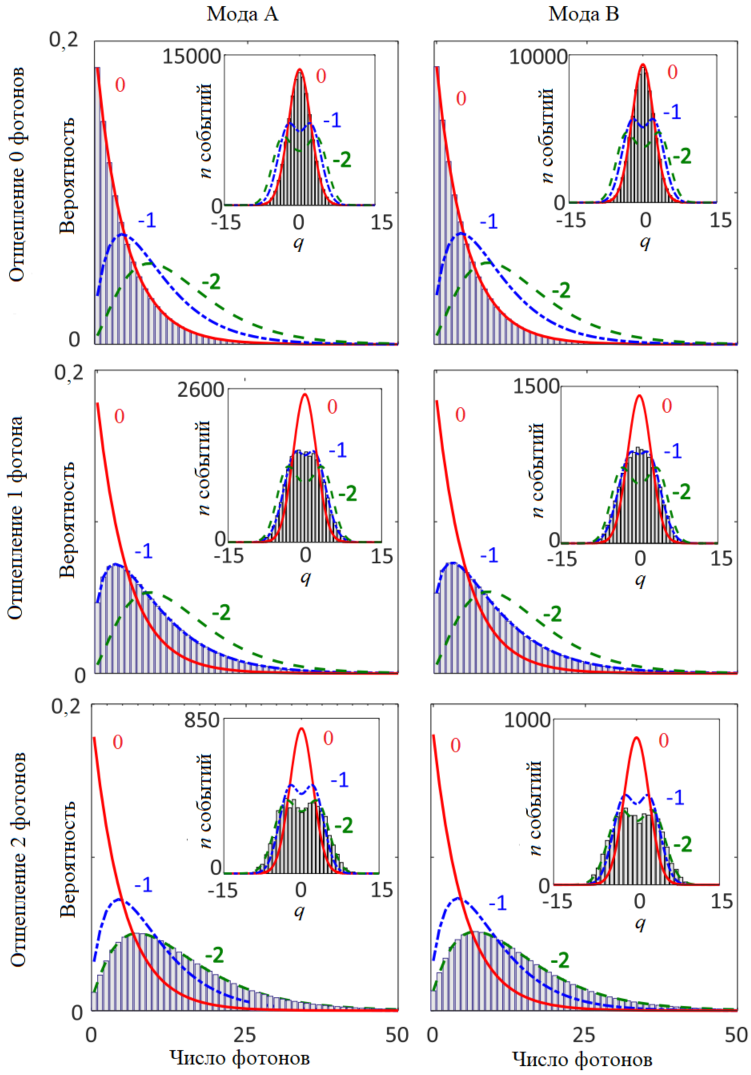

Рисунок 2.15 — Распределения по числу фотонов и квадратурные распределения для исходного теплового состояния и состояний с отщеплением одного и двух фотонов. Экспериментальные данные представлены в виде гистограмм; теоретические распределения изображены кривыми.

счет не был обнаружен, средний ряд — отщепление одного фотона в моде А, а нижний ряд — отщепление двух фотонов в моде А. Легко видеть, что отщепление фотонов в моде А изменяет не только состояние в этой моде, но также меняет состояние в моде В. Таким образом, приходим к выводу, что «условную» нелокальность эффекта квантового вампира можно продемонстрировать и с тепловыми состояниями света.

2.4 Выводы по главе 2

В данной главе было рассмотрено несколько физических экспериментов, на основе которых была проведена апробация предложенных идей.

Впервые в мире были приготовлены тепловые состояния с отщеплением 10 фотонов включительно с использованием одного однофотонного детектора на основе лавинного фотодиода. Предложенная математическая модель позволила с высокой точностью восстановить приготовленные состояния света.

Показано, что модель компаунд-распределения Пуассона позволяет значительно упростить описание диссипации среды и позволяет использовать эту же модель для исследования гауссификации тепловых состояний света с отщеплением фотонов под действием линейных потерь в оптической системе. Проведённая экспериментальная апробация показала хорошее соответствие между теорией и экспериментом.

В двухмодовом и многомодовом режимах была проведена экспериментальная демонстрации эффекта «квантового вампира» на классических тепловых состояниях света и показано, что для наблюдения данного эффекта не обязательно требуются квантовые состояния на входе: достаточно использовать состояния, имеющие корреляции по числу фотонов.

Глава 3. Многомодовые тепловые состояния с отщеплением фотонов

В настоящей главе исследуется статистика фотонов подсистемы многомодовых тепловых состояний с отщеплением фотонов. Представлена новая модель распределения по числу фотонов для данного семейства квантовых состояний [131; 150]. Экспериментально проверена согласованность теории с собранными данными. Выполнено статистическое восстановление параметров состояний и показан способ борьбы с возникающей мультиколлинеарностью между параметрами предложенного распределения [151].

3.1 Теоретическое описание статистики фотонов подсистемы многомодовых тепловых состояний с отщеплением фотонов

В главе 2 было показано, что тепловые состояния с отщеплением k фотонов описываются компаунд-распределением Пуассона $P_{cP}(n|\mu_0,a)$ (2.2) со средним числом фотонов μ_0 и параметром когерентности $a = k+1$, а соответствующая матрица плотности $\hat{\rho}_{kTS} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_{cP}(n|\mu_0,k+1)\,|n\rangle\langle n|$.

Интересно, что полное число фотонов N M-модового теплового состояния подчиняется точно такому же компаунд-распределению Пуассона $P_{cP}(N|\mu_0,a = M)$ и имеет аналогичные корреляционные свойства [107].

Общий случай схемы измерения статистики числа фотонов многомодового теплового состояния с отщеплением заданного числа фотонов показан на рисунке 3.1. Начнем с M-модового теплового состояния [131; 152]

$$\hat{\rho}_{MTS} = \bigotimes_{i=1}^{M} \hat{\rho}_{TS_i} = \bigotimes_{i=1}^{M} \sum_{n_i=0}^{\infty} P_{BE}(n_i|\mu_0)\,|n_i\rangle\langle n_i|\,, \tag{3.1}$$

где i – это индекс моды. Это состояние проходит через светоделитель с малым коэффициентом отражения, совмещенный с детектором фотонов, которые представляют собой стандартный способ условной реализации оператора уничтожения фотона. Детектирование K фотонов приводит к состоянию с от-

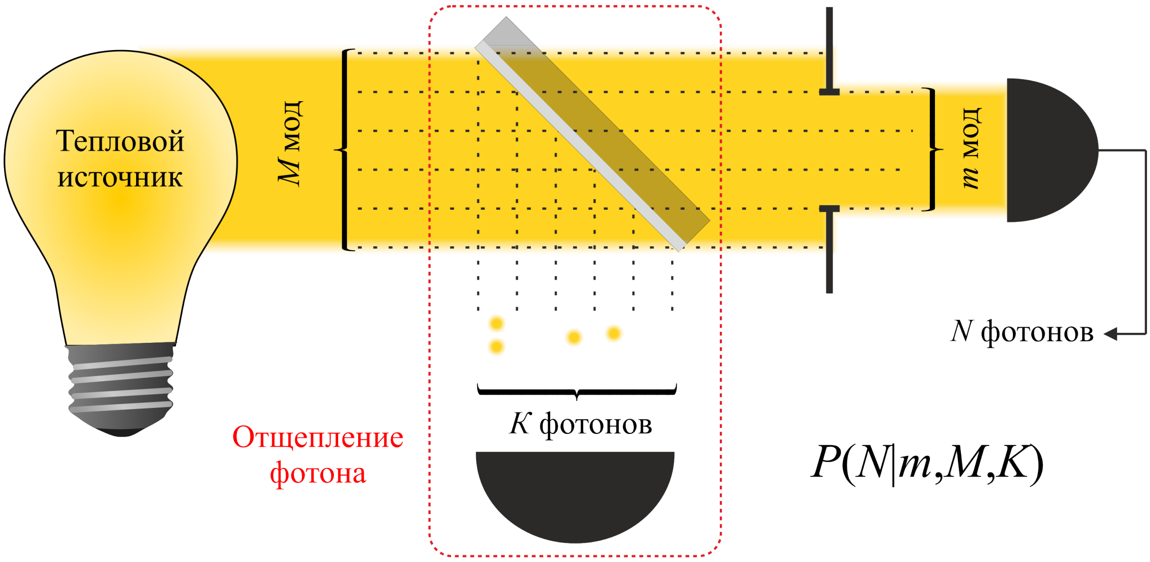

Рисунок 3.1 — Схема измерения статистики числа фотонов многомодового теплового состояния с отщеплением заданного числа фотонов.

щеплением K фотонов:

$$\hat{\rho}_{MKTS} = \sum_{k_1+\cdots+k_M=K} P(k_1,\ldots,k_M|K) \bigotimes_{i=1}^{M} \hat{\rho}_{k_i TS}, \tag{3.2}$$

где k_i обозначает количество отщеплённых фотонов в каждой i-ой моде, а $P(k_1,\ldots,k_M|K)$ – вероятность того, что ровно $k_1,k_2,\ldots,k_M$ фотонов будет отщеплено в модах $1,2,\ldots,M$ соответственно при условии, что общее количество отщеплённых фотонов равно K. Первая сумма берется по всем комбинациям индексов k_i, удовлетворяющим этому условию. И, наконец, измеряется полное число фотонов N m-модовой подсистемы (3.2).

Эквивалентность между добавлением моды и отщепления фотона для тепловых состояний света можно легко показать с помощью производящей функции $G(z)$. Как было показано в главе 2, производящая функция теплового состояния есть $G_{BE}(z|\mu_0) = [1+\mu_0(1-z)]^{-1}$, а производящая функция компаунд-распределения Пуассона $G_{cP}(z|\mu_0,a) = [1+\mu_0(1-z)]^{-a}$. Добавление еще одной моды теплового состояния приводит к умножению производящей функции на $G_{BE}(z|\mu_0)$. Следовательно, производящая функция m-модового теплового состояния равна

$$G_{MTS}(z|\mu_0,m) = [1+\mu_0(1-z)]^{-m} \equiv G_{cP}(z|\mu_0,m). \tag{3.3}$$

Отщепляя один фотон от состояния (3.3), получаем производящую функцию $G_{cP}(z|\mu_0,m+1)$. Таким образом, M-модовое тепловое состояние с отщеплением

k фотонов имеет функцию $G_{cP}(z|\mu_0,m+k)$. Следовательно, математически эквивалентность добавления моды и отщепления фотона связана с эквивалентностью возведения в степень и нормализованного дифференцирования для производящей функции $G_{BE}(z|\mu_0)$.

Теперь перейдем к общему случаю, когда отщепление K фотонов происходит в $M \geqslant m$ модах, и рассмотрим распределение по числу фотонов в m-модовой подсистеме $P_N(N|K,M,m,\mu_0)$.

Для вычисления $P_N(N|K,M,m,\mu_0)$ необходимо умножить предыдущее распределение по числу фотонов $P_{cP}(N|\mu_0,a = k + m)$ на вероятность $P_k(k|K,M,m)$ того, что из рассматриваемой подсистемы отщеплено ровно k фотонов, в то время как общее количество отщеплённых фотонов из всех M мод равно K. Наконец, суммируя вероятности всех исходов с разными k, получаем следующее выражение:

$$P_N(N|K,M,m,\mu_0) = \sum_{k=0}^{K} P_k(k|K,M,m)P_{cP}(N|\mu_0,a = k+m). \tag{3.4}$$

Вероятность $P_k(k|K,M,m)$ может быть найдена в терминах комбинаторной задачи шаров и ящиков [153]. Количество способов, которыми K идентичных шаров могут быть распределены по M различным ящикам (K фотонов можно отщепить из M мод), равно C^K_{M+K-1}. Аналогично, количество способов, которыми k фотонов могут быть отщеплены из m мод, равно C^k_{m+k-1}, а для $K-k$ фотонов, которые можно вычесть из $M-m$ мод, данной число равно $C^{K-k}_{M-m+K-k-1}$. Следовательно, искомая вероятность

$$P(k|K,M,m) = \frac{C^k_{m+k-1}C^{K-k}_{M-m+K-k-1}}{C^K_{M+K-1}}. \tag{3.5}$$

Это хорошо известное в теории вероятностей распределение Пойа [152; 154; 155], чья производящая функция равна

$$G(z|K,M,m) = {}_2F_1(-K,m,M,1-z), \tag{3.6}$$

где ${}_2F_1$ это гипергеометрическая функция Гаусса.

Множитель $P_{cP}(N|\mu_0,k+m)$ в (3.4) может быть интерпретирован как распределение по числу фотонов многомодового теплового состояния со случайным номером моды $k+m$ (сумма случайных величин, подчиненных распределению $G_{BE}(z|\mu_0)$ со случайным числом слагаемых), где m постоянно, а k подчиняется распределению Пойа (3.5). Таким образом, производящая функция искомого распределения (3.4) может быть получена правилом композиции производящих функций как составная производящая функция [111]:

$$G(z|K,M,m,\mu_0) = (G_{BE}(z|\mu_0))^m {}_2F_1(-K,m,M,1-G_{BE}(z|\mu_0)). \tag{3.7}$$

Соответствующее распределение по числу фотонов может быть вычислено согласно (1.26) и имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}P_N(N|K,M,m,\mu_0) = \frac{\mu_0^N}{(1+\mu_0)^{N+m}}\frac{1}{\Gamma(m)}\frac{\Gamma(N+m)}{\Gamma(N+1)}\frac{\Gamma(M)}{\Gamma(M-m)}\times\\ \times\frac{\Gamma(M+K-m)}{\Gamma(M+K)}{}_2F_1\left(-K,N+m,-K-M+m+1,\frac{1}{1+\mu_0}\right).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Производящая функция (3.7) порождает распределение вероятностей (3.8) только при $m < M$.

Рассматриваемое распределение (3.8) имеет следующие свойства.

1. Когда $m \longrightarrow M$ распределение (3.8) переходит в компаунд-распределение Пуассона (2.2):

$$P_N(N|K,M,m=M,\mu_0) = P_{cP}(n|\mu_0,K+M). \tag{3.9}$$

2. При $K = 0$ распределение (3.8) также переходит в компаунд-распределение Пуассона и не зависит от количества мод M:

$$P_N(N|K=0,M,m,\mu_0) = P_{cP}(N|\mu_0,m). \tag{3.10}$$

3. Среднее число фотонов равно

$$\mu = m\mu_0\left(1+\frac{K}{M}\right). \tag{3.11}$$

4. Значение автокорреляционной функции второго порядка в нуле есть

$$g^{(2)}(0) = \frac{1+1/m}{1+1/M}\left(1+\frac{1}{M+K}\right). \tag{3.12}$$

5. В отличие от компаунд-распределения Пуассона $P_{cP}(N|\mu_0,k+1)$, распределение (3.8) допускает только целые числа количества отщепленных фотонов K (в противном случае распределение расходится).

Распределение Пойа (3.6) является естественным обобщением хорошо известного биномиального распределения. Биномиальное распределение можно рассматривать как предельный случай распределения Пойа при достаточно больших M и m. Действительно, пусть $M \longrightarrow \infty$, $m \longrightarrow \infty$, а $\theta = \frac{m}{M} \longrightarrow const$. Тогда, в рассматриваемом пределе возникает производящая функция биномиального распределения, задающего число «успехов» в серии из K независимых испытаний с вероятностью "успеха" в отдельном испытании, равной θ:

$$
{}_2F_1(-K,m,M,1-z) \longrightarrow (1 - \theta(1-z))^K\,. \tag{3.13}
$$

Не менее важно, что формула (3.6) для производящей функции распределения Пойа позволяет также легко получить термодинамический предел для бозонов. Этот предел возникает тогда, когда рассматривается малая подсистема большой системы (M и K велики, а m конечно). Формально, пусть $M \longrightarrow \infty$, $K \longrightarrow \infty$, а $\mu_0 = \frac{K}{M} \longrightarrow const$. Тогда, в рассматриваемом пределе возникает производящая функция m-модового бозонного состояния:

$$
{}_2F_1(-K,m,M,1-z) \longrightarrow (1 + \mu_0(1-z))^{-m}\,. \tag{3.14}
$$

Можно сделать вывод, что распределение Бозе-Эйнштейна, одно из краеугольных камней квантовой статистической физики, является непосредственным предельным случаем более общего распределения Пойа. В свою очередь, распределение Пойа, будучи более общим, открывает путь к описанию термодинамических свойств малых квантовых систем, когда полное число мод M и число частиц K в системе не являются предельно большими величинами.

С точки зрения квантовой статистической физики распределение Пойа следует называть гипергеометрическим распределением бозонного типа, а обычное гипергеометрическое распределение- гипергеометрическим распределением фермионного типа [150].

3.2 Эксперимент и постселекция собранных данных

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 3.2. Оптическая схема представляет собой комбинацию схемы, описанной в разделе 2.1.2 и измерением статистики фотоотсчётов теплового света. Непрерывное излучение HeNe лазера разделялось волоконным светоделителем (ВСД) на два канала. Свет от первого выхода фокусировался на вращающийся диск из матового стекла (ВМД), а часть рассеянного света заводилась в одномодовое волокно (ОМВ) для подготовки одномодового теплового состояния. Небольшая часть выходного пучка из волокна была перенаправлена светоделителем (СД) 90:10 на однофотонный детектор D_k на основе кремниевого ЛФД, чтобы реализовать условный оператор уничтожения фотона. Далее излучение разделялось симметричным СД на две части. В первом канале был расположен еще один ЛФД-детектор D_n для измерения распределения фотоотсчетов. Над остальным излучением выполнялось гомодинное детектирование ГД. Лазерное излучение со второго выхода ВСД служит локальным осциллятором. Таким образом, импульсы фотоотсчетов из D_n и D_k и квадратурные значения из ГД были собраны синхронно.

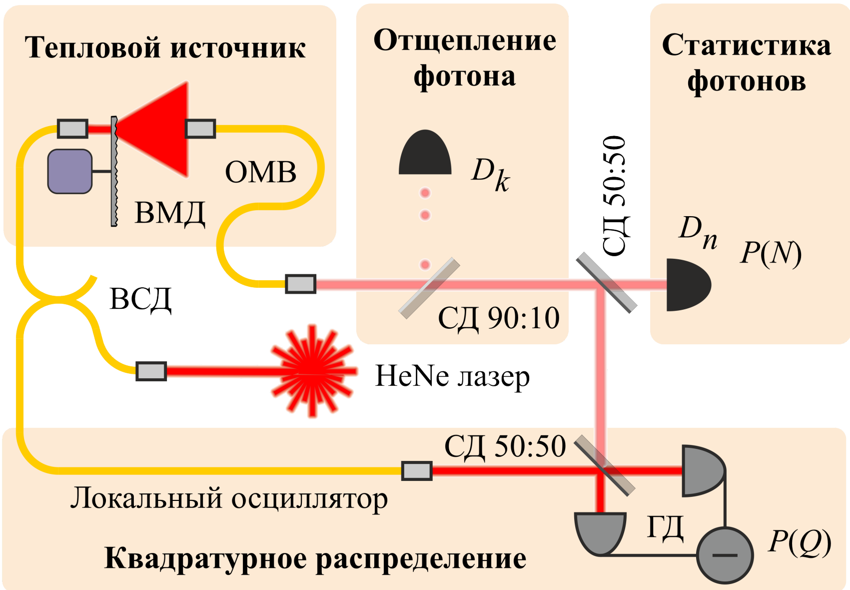

Рисунок 3.2 — Экспериментальная установка. СД – светоделитель, ВСД — волоконный светоделитель, ВМД — вращающийся матовый диск, ОМВ — одномодовое волокно, D_k и D_n — однофотонные детекторы на основе ЛФД, используемые для отщепления фотонов и измерения статистики фотоотсчётов соответственно, ГД — гомодинный детектор, используемый для регистрации квадратурного распределения.

Алгоритм обработки данных представлен на рисунке 3.3. Сначала все временные промежутки были разделены на временные интервалы шириной τ, соответствующей длительности временной моды (рисунок 3.3а). Значение τ должно удовлетворять неравенству $T_{coh} \gg \tau \gg \tau_d$, где T_{coh} – время когерентности теплового состояния, определяемое скоростью вращения ВМД, а τ_d – мертвое время однофотонного детектора. Это неравенство определяет возможность регистрации нескольких фотоотсчетов из одной оптической моды (подробности в разделе 2.1.2). В предложенном эксперименте T_{coh} = 40мкс,

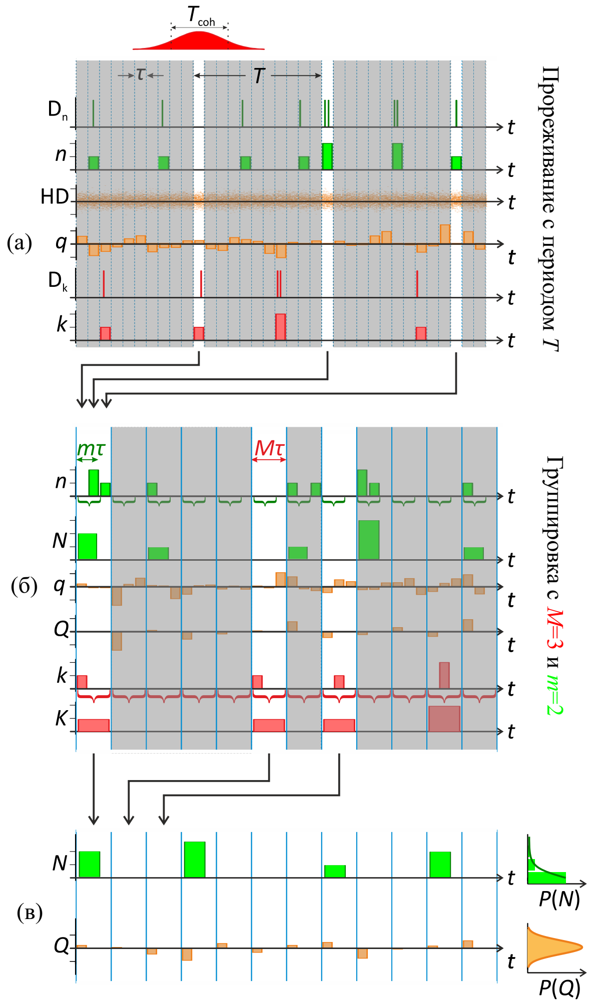

Рисунок 3.3 — Постселекция данных. а) Исходный набор данных делится на временные интервалы τ, а затем они прореживаются с периодом T, чтобы избежать межбиновых корреляций. б) Прореженные данные сгруппированы по M, и группы разделяются согласно общему количеству отщеплённнных фотонов K. Полное число фотонов N вычисляется как сумма первых $m \leqslant M$ бинов. Для группированного квадратурного значения Q выбирается первое значение ячейки q. в) Наборы данных $\{N_1, N_2, \dots\}$ и $\{Q_1, Q_2, \dots\}$, соответствующие одному и тому же значению K, собираются и подвергаются процедурам статистической оценки.

$T_d = 220$нс и $\tau = 10$мкс, поэтому неравенство соблюдается. Для каждого временного интервала вычислялись числа фотоотсчетов k и n с детекторов D_k и D_n соответственно и квадратурные значения из HD. Затем, чтобы избежать каких-либо корреляций между бинами, выбирались интервалы, которые были периодически разделены с $T = 12T_{coh}$.

Поскольку тепловое состояние пространственно одномодовое, то многомодовое состояние извлекается при сборе M временных мод. Следовательно, все некоррелированные интервалы времени группируются по M (рисунок 3.3б). Для каждого группированного интервала получаем общее количество отщеплённых фотонов K. Чтобы реализовать ситуацию, описанную на рисунке 3.1, где в итоге детектируется только часть тепловых мод, вычисляется полное количество фотонов N как сумма первых m бинов в интервале. Поскольку гомодин может выделять только одну моду, берётся только первое квадратурное значение q в интервале в качестве квадратурного значения Q интервала.

Для выделения состояния с отщеплением K фотонов выбираются интервалы с общим числом отщеплённых фотонов равным K (рисунок 3.3в). Таким образом, для каждого значения $M = 1 \div 5$, $m = 1 \div M$ и $K = 0 \div 5$ получается набор значений фотоотсчетов $\mathcal{D} = \{N_1, N_2, \dots\}$ и квадратурных значений $\mathcal{D}_Q = \{Q_1, Q_2, \dots\}$. Эти наборы данных впоследствии обрабатываются для восстановления параметров состояния с использованием моделей распределения (3.8) и $P(\mathcal{Q})$ соответственно.

Таким образом, извлекаются данные для произвольного состояния света с распределением фотоотсчетов (3.8) в широком диапазоне хорошо контролируемых параметров m, M и K. Однако установка не позволяет контролировать среднее число фотонов для каждой моды μ_0, поэтому оценка его теоретического значения выполняется на основе данных, используя выражение, полученное с помощью метода моментов

$$\mu_0 = \frac{\mu}{m\left(1 + \frac{K}{M}\right)}, \tag{3.15}$$

где μ – оценочное среднее число фотонов во всех зарегистрированных модах.

Отметим, что $P(N)$ не совсем соответствует экспериментальному распределению фотоотсчетов из-за наличия темновых отсчетов, описываемых распределением Пуассона $P_{DC}(N)$ со средним значением $\mu_{DC} = m \times 0{,}0015$. Несмотря на то, что среднее количество шумовых фотоотсчетов намного меньше, чем среднее число фотонов в одной моде (около $\mu_0 = 0{,}27$ в примерах ниже), это учитывается для повышения точности реконструкции. Результирующее распределение фотоотсчетов представляет собой свертку (3.8) и $P_{DC}(N)$.

3.3 Верификация модели

Прежде чем выполнять полноценное статистическое восстановление параметров состояния M, m, K, μ_0 хотелось бы провести верификацию модели (3.8), исходя из некоторой априорной информации. Во-первых, положим параметры M, m, K известными и точными и будем восстанавливать только μ_0 из формулы (3.15). Во-вторых, возможность восстановления будем оценивать не с помощью фиделити F, так эта мера может слабо зависеть от изменения некоторых параметров распределения, а с помощью проверки соответствия экспериментальных данных заданному теоретическому распределению. Это соответствие будем проверять на основе критерия адекватности χ^2, введенному в главе 2. Как выяснится дальше, задача восстановления всех четырех параметров распределения (3.8) является довольно нетривиальной задачей. Некоторые примеры собранных гистограмм числа фотоотсчетов $\{N\}$ и соответствующих распределений $P_N(N|K,M,m,\mu_0)$ представлены на рисунке 3.4. Для всех графиков точки со статистическими интервалами погрешностей соответствуют измеренным данным, а кривые – модели (3.8) (включая темновые отсчёты). Различное количество отщеплённых фотонов K обозначается разным стилем и цветом кривых; сверху вниз по оси y ($N = 0$): $K = 0, \dots, K = 5$.

На рисунке 3.4а представлено распределение $P_N(N|K,M,m,\mu_0)$ (3.8) при $m = M$. Как было показано выше, оно равно компаунд-распределению Пуассона (2.2), где добавление мод эквивалентно отщеплению фотонов. На рисунке 3.4б показаны одномодовые распределения по числу фотонов для $m = 1$ и $M = 1 \div 5$. Видно, что с увеличением M эффект отщепления фотонов ослабевает.

На рисунке 3.4в представлена обратная ситуация, где входное число мод M фиксировано и равно 5, а число выделяемых мод m увеличивается с 1 до 5. Снова можно отметить, что с увеличением отношения мод m/M разница между состояниями с разным число отщеплённых фотонов становится более значительной.

Для всех измеренных гистограмм разработанная модель (3.8) прошла критерий адекватности χ^2 при уровне значимости $p = 0{,}05$. Размер выборки всех состояний варьировался от 2000 до 20000. Кроме того, также демонстрируются графики среднего числа фотонов μ (рисунок 3.5а) и корреляционной функции $g^{(2)}(0)$ (рисунок 3.5в), на которых можно отметить хорошее согласие между из-

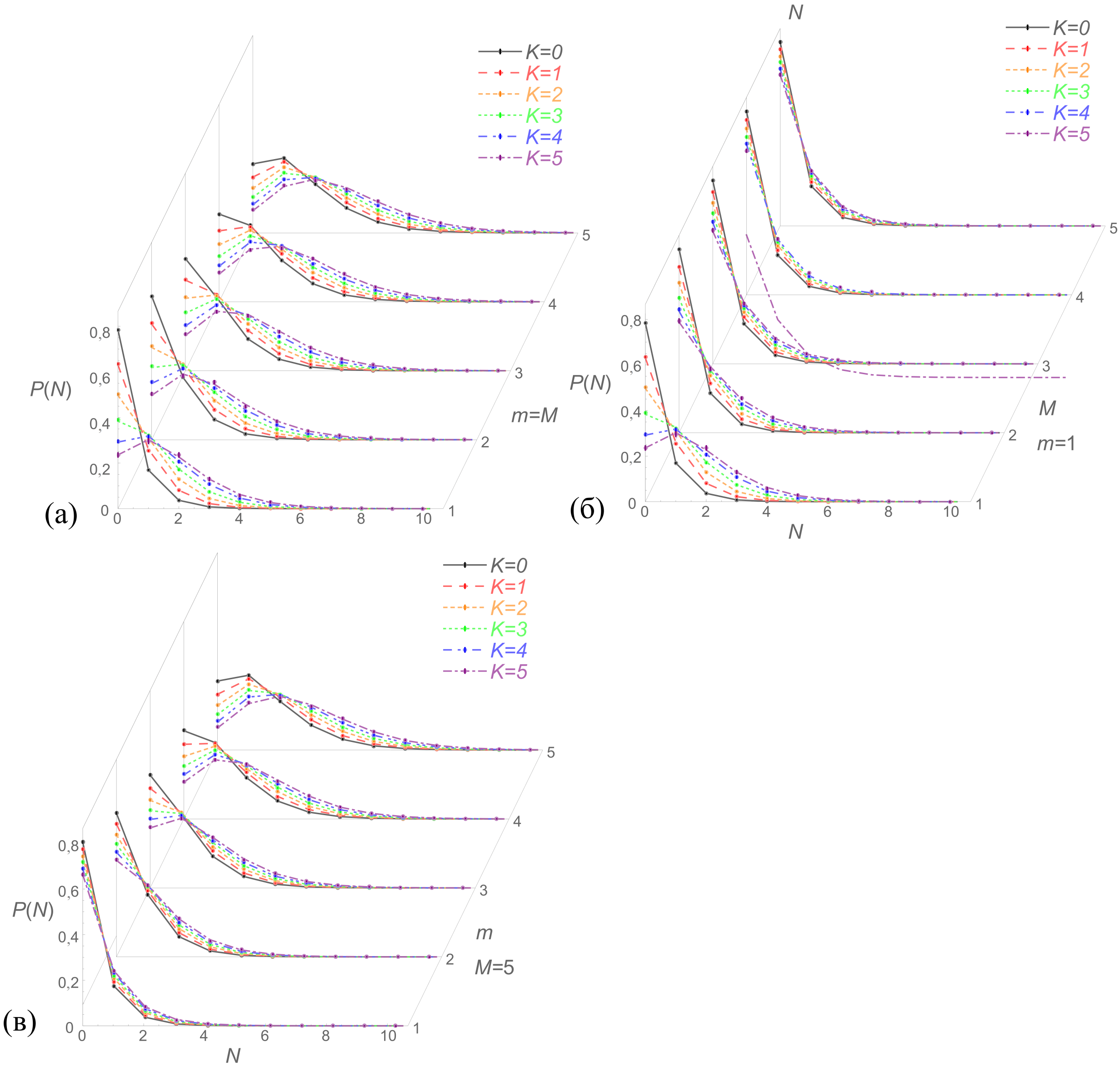

Рисунок 3.4 — Распределение по числу фотонов $P_N(N|K,M,m,\mu_0)$ (3.8) для различных $m = M$ а), для различных M и фиксированного $m = 1$ б), а также для различных m и фиксированного $M = 5$ в). Различное количество отщеплённых фотонов K обозначается разным стилем и цветом кривых: сверху вниз по оси y ($N = 0$): $K = 0, \dots, K = 5$.

меренными данными и теоретическими предсказаниями (3.11) и (3.12), включая темновые отсчёты. То есть, уверенно можно сказать, что верификация модели (3.8) успешно пройдена.

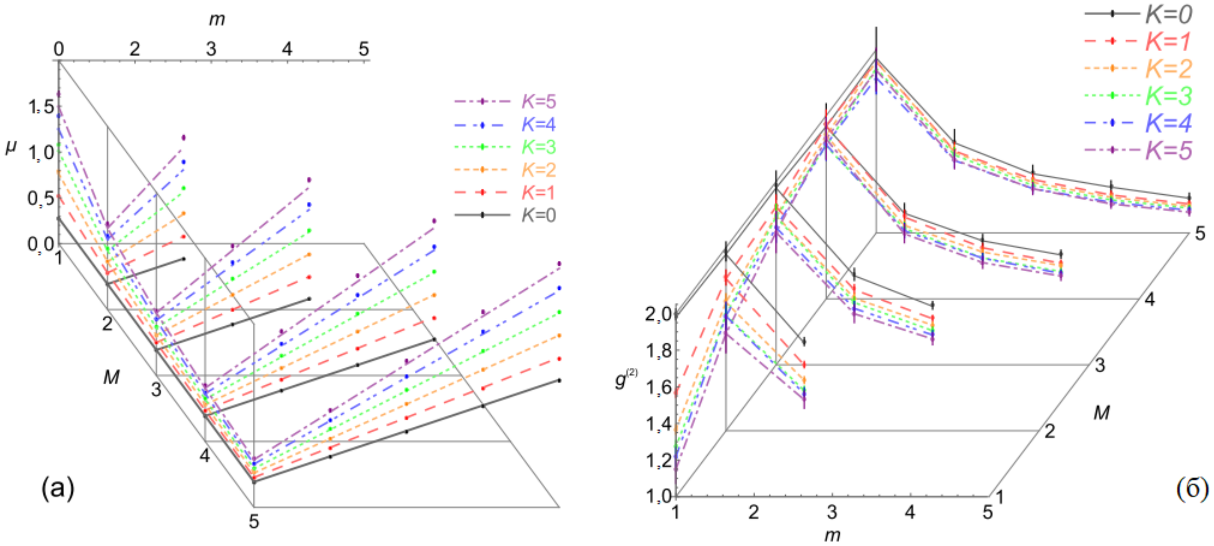

Рисунок 3.5 — Среднее число фотонов μ а) и корреляционная функция $g^{(2)}(0)$ б) для различного количества входных мод M, выделяемого числа мод m и количества отщеплённых фотонов K. Экспериментально измеренные точки сравниваются с теоретическими кривыми (3.11), (3.12). Различное количество отщеплённых фотонов K обозначается разным стилем и цветом кривых: сверху вниз $K = 5, \ldots, K = 0$ а) и $K = 0, \ldots, K = 5$ в).

3.4 Статистическое восстановление параметров состояния на основе статистики фотоотсчётов

В прошлом разделе была выполнена верификация разработанной модели, но статистическое восстановление параметров распределения не проводилось. В этом разделе подробно рассмотрим пример статистического восстановления параметров квантового состояния, основанный на эксперименте с теоретическими значениями параметров $m_t = 2$, $M_t = 3$, $K_t = 3$. Общее количество наблюдаемых событий составило $n = 58623$. Расчетное теоретическое значение среднего числа фотонов для каждой моды составило $\mu_{0,t} = 0{,}264$. Обозначим количество событий N фотоотсчетов в выборке $\mathcal{D}$ как $D(N)$. Соответствующая экспериментальная гистограмма и распределение вероятностей, основанное на теоретических значениях, показаны на рисунке 3.6а.

Сначала проведём разработку процедуры оценки параметров с использованием смоделированных данных. Затем применим эту процедуру для обработки реальных экспериментальных данных [151].

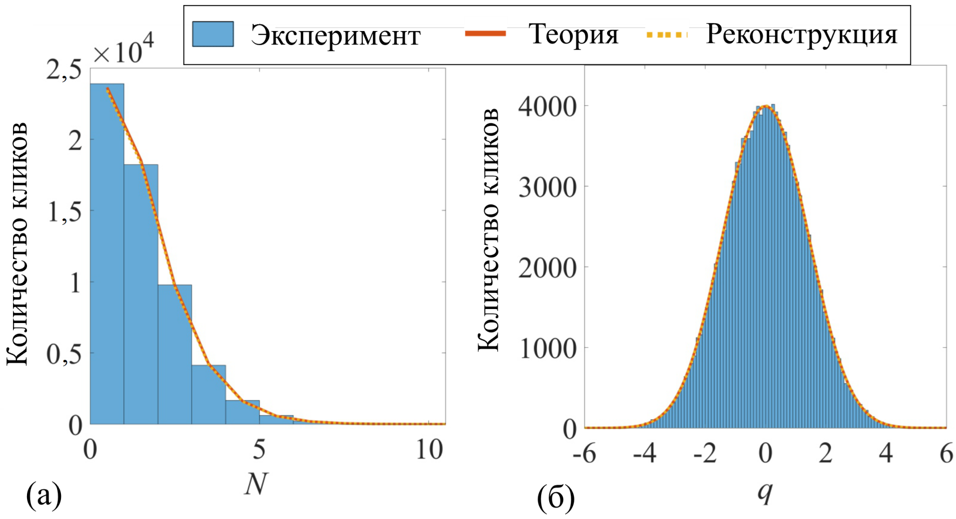

Рисунок 3.6 — Экспериментальные данные (гистограммы) в сравнении с теоретическими распределениями вероятностей (сплошные кривые) и восстановленными (штриховые кривые) значениями параметров для статистики а) фотоотсчетов и б) квадратур.

Рассмотрим фидуциальное распределение параметров $P_F(\mu_0, m, M, K|\mathcal{D})$. Это распределение можно интерпретировать как степень доверия (аналог доверительного интервала) тому, что определенный набор параметров $\{\mu_0, m, M, K\}$ задаёт набор данных $\mathcal{D}$. Это распределение равно функции правдоподобия L с точностью до константы нормировки C [156; 157]:

$$L(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D}) = \prod_{N=0,1,\dots} \left[P(N|\mu_0,m,M,K)\right]^{D(N)}. \tag{3.16}$$

Для размера выборки $n = 58623$ ширина маргинальных фидуциальных распределений по любому параметру довольно велика. Ширина маргинального распределения по K особенно велика и составляет сотни единиц. Это происходит из-за сильной корреляции между параметрами или мультиколлинеарности начального распределения (3.8). Рисунок 3.7 хорошо иллюстрирует этот эффект.

Заметим, что функция правдоподобия принимает очень маленькие значения для большого размера выборки, поэтому рассматривается её логарифм:

$$\ln L(\mu_0, m,M,K|\mathcal{D}) = \sum_{N=0,1,\dots} D(N) \ln P(N|\mu_0,m,M,K). \tag{3.17}$$

Поскольку добавление константы к заданной функции влияет только на константу пропорциональности C, можно эффективно вычислять фидуциальное распределение относительно сдвинутого логарифмического правдоподобия:

$$P_F(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D}) = C' \cdot \exp\left[\ln L(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D}) - \max_{\mu_0,m,M,K} \ln L(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D})\right]. \tag{3.18}$$

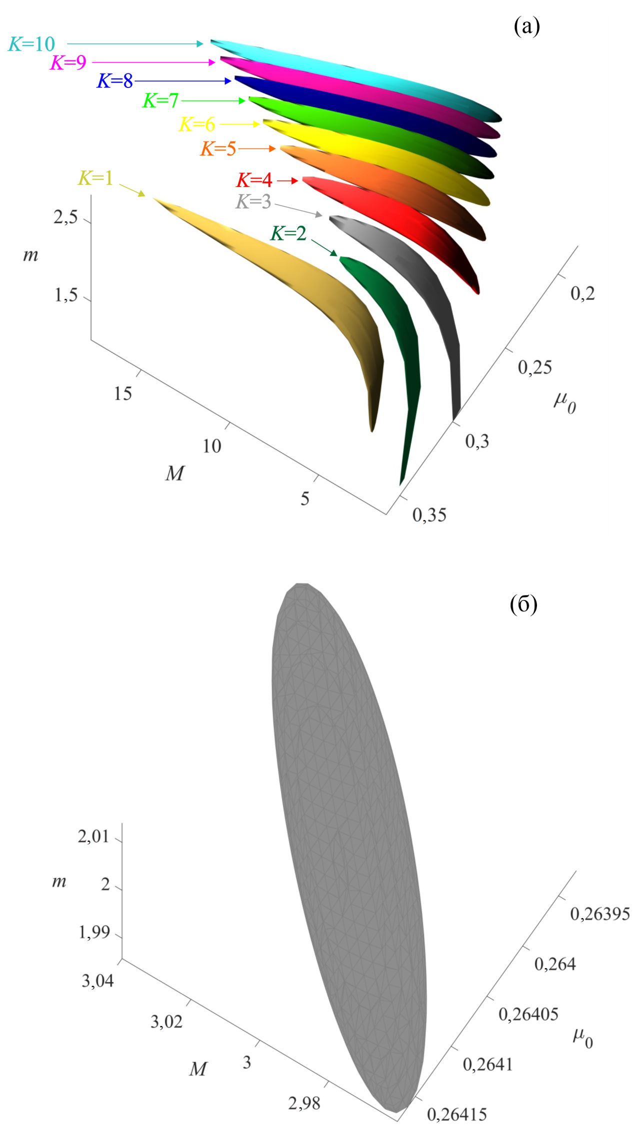

Рисунок 3.7 — Изоповерхности фидуциального распределения $P_F(\mu_0, m, M, K|\mathcal{D})$ на уровне половины максимума для фиксированных значений K. Данные $\mathcal{D}$ были получены с использованием моделирования Монте-Карло с размером выборки n и параметрами распределения $\mu_{0,t} = 0{,}264$, $m_t = 2$, $M_t = 3$, $K_t = 3$. а) $K = 1 \div 10$, $n = 58623$. б) $K = 3$, $n = 420 \cdot 10^6$.

В результате этого сдвига значения экспоненты меняются от 0 до 1. Константа C' затем вычисляется прямым интегрированием.

Чтобы количественно охарактеризовать мультиколлинеарность, можно вычислить матрицу информации Фишера $I_{u,v} = nM[(\partial_u P(\partial_v P)]$, где $\partial_u P$ – частная производная распределения по параметру u и $u, v = m, M, \mu_0$. Здесь предполагается, что параметр K фиксирован. Согласно границе Крамера-Рао, ковариационная матрица для оценок параметров распределения ограничена снизу обратной матрицей информации Фишера I^{-1}. Таким образом, число обусловленности матрицы информации Фишера (отношение максимального собственного значения к минимальному) отражает устойчивость статистических оценок по отношению к статистическим флуктуациям. Для всех практически важных значений параметров, рассмотренных в данной главе, матрица информации оказывается плохо обусловленной. В частности, для приведенного выше случая число обусловленности составляет около 7 млн. Это приводит к очень низкой точности статистических оценок.

Обратим внимание, что обратная матрица информации Фишера дает оценки дисперсии только для фиксированного значения K. Поэтому будем характеризовать точность оценивания параметров максимальной относительной погрешностью $\Delta = \max_u(\sigma_u/u_t)$ $(u = m, M, \mu_0, K)$, чтобы учесть флуктуации K. Здесь σ_u – это среднеквадратичное отклонение маргинального фидуциального распределения $P_F(\mu_0, m, M, K|\mathcal{D})$, а u_t – теоретическое значение параметра.

Мультиколлинеарность существенно усложняет процедуру восстановления параметров состояния. Для получения достаточной точности реконструкции требуется очень большой объем данных (что трудно реализовать для высоких значений K, поскольку они соответствуют относительно редким событиям). Например, численные эксперименты показывают, что для достижения точности $\Delta = 1\%$ требуется размер выборки не менее $n = 420 \cdot 10^6$ (рисунок 3.7b). Чтобы достичь $\Delta = 10\%$, необходима выборка $n = 18 \cdot 10^6$, что по-прежнему является большим набором данных.

Один из способов, позволяющих повысить точность оценки параметров, состоит в использовании априорной информации.

Обычный выбор – зафиксировать значение некоторого параметра (или набора параметров). В частности, можно контролировать количество детектируемых мод m. Например, при технике гомодинного детектирования выделяется только одна мода света ($m_t = 1$). В этом случае фидуциальное распределение принимает вид $P_F^m(\mu_0, M, K|\mathcal{D}) = C_m L(\mu_0, m = m_t, M, K|\mathcal{D})$. Графически это соответствует поперечному сечению поверхности в точке $m = m_t$ (горизонтальная линия на рисунке 3.8а), которое пересекает изоповерхности распределения только для $K = 1 \div 8$. Таким образом, фиксирование m сокращает количество возможных значений K с сотен до порядка десяти. Однако соответствующие сечения также демонстрируют сильную корреляцию параметров (рисунок 3.8в) и мультиколлинеарность.

Заметим, что для достижения $\Delta = 10\%$ требуется размер выборки не менее $n = 1{,}2 \cdot 10^6$. Для $\Delta = 1\%$ (рисунок 3.8в) требуется размер выборки $n = 4 \cdot 10^6$.

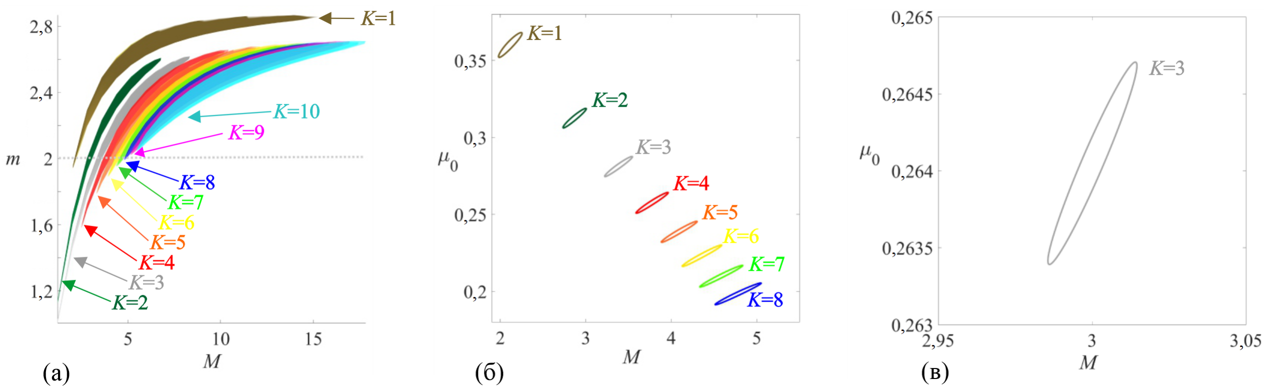

Рисунок 3.8 — а) Проекция изоповерхностей фидуциального распределения (рисунок 3.7а) на плоскость $\{M, m\}$. Горизонтальная линия соответствует плоскости с $m = m_t$. б) Сечения изоповерхностей фидуциального распределения в $m = m_t$ для $n = 58623$ б) и $n = 4 \cdot 10^6$ в). Последний случай обеспечивает единственное правдоподобное значение K ($K = 3$) и относительную ошибку $\Delta = 1\%$.

Это всё ещё довольно большой объем данных, поскольку случаи большого количества отщеплённых фотонов менее часты и требуют больше времени для сбора экспериментальных данных.

Фиксирование определенных параметров исходного распределения позволяет значительно повысить точность восстановления. Однако, это может привести к систематическим ошибкам восстановления, если выбранные априорные значения значительно отличаются от истинных значений.

Другой подход к использованию априорной информации основан на теореме Байеса [111; 158]:

$$P_B(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D}) = C_B L(\mu_0,m,M,K|\mathcal{D}) P_P(\mu_0,m,M,K). \tag{3.19}$$

Здесь $P_P(\mu_0, m, M, K)$ – это априорное распределение вероятностей возможных значений параметров. Апостериорное распределение $P_B(\mu_0, m, M, K|\mathcal{D})$ обновляет априорную информацию с учетом статистических данных $\mathcal{D}$, полученных в эксперименте.

Выберем априорное распределение в виде многопараметрического распределения, где все параметры являются независимыми:

$$P_P(\mu_0,m,M,K) = P_P^{\mu_0}(\mu_0) \cdot P_P^m(m) \cdot P_P^M(M) \cdot P_P^K(K). \tag{3.20}$$

Чтобы получить однопараметрические априорные распределения, рассмотрим условные распределения: все параметры, кроме одного, фиксированы и равны ожидаемым теоретическим значениям. Опишем условное распределение для параметра m. Построим (рисунок 3.9а) два фидуциальных распределения: $P_F^m(m|\mathcal{D})$ и $P_F^m(m|\mathcal{D}_t)$, где $P_F^m(m|\mathcal{D}) = P_F(\mu_{0,t}, m, M_t, K_t)$ и «данные» $\mathcal{D}_t$ соответствует теоретическим сгруппированным данным $D_t(N) = nP(N|\mu_{0,t}, m_t, M_t, K_t)$. Рисунок 3.9а показывает сильное перекрытие между этими распределениями, что говорит о возможности использования этого условного распределение для описания данных $\mathcal{D}$. Аналогичный результат для параметров M, μ_0 и K показан на рисунках 3.9б,в,г соответственно. Как следует из рисунка 3.9г, параметр K на самом деле является детерминированным, поскольку фидуциальная вероятность $K \neq K_t$ почти равна нулю. В связи с этим ниже рассматриваем $P_P^K(K) = \delta_{K,K_t}$.

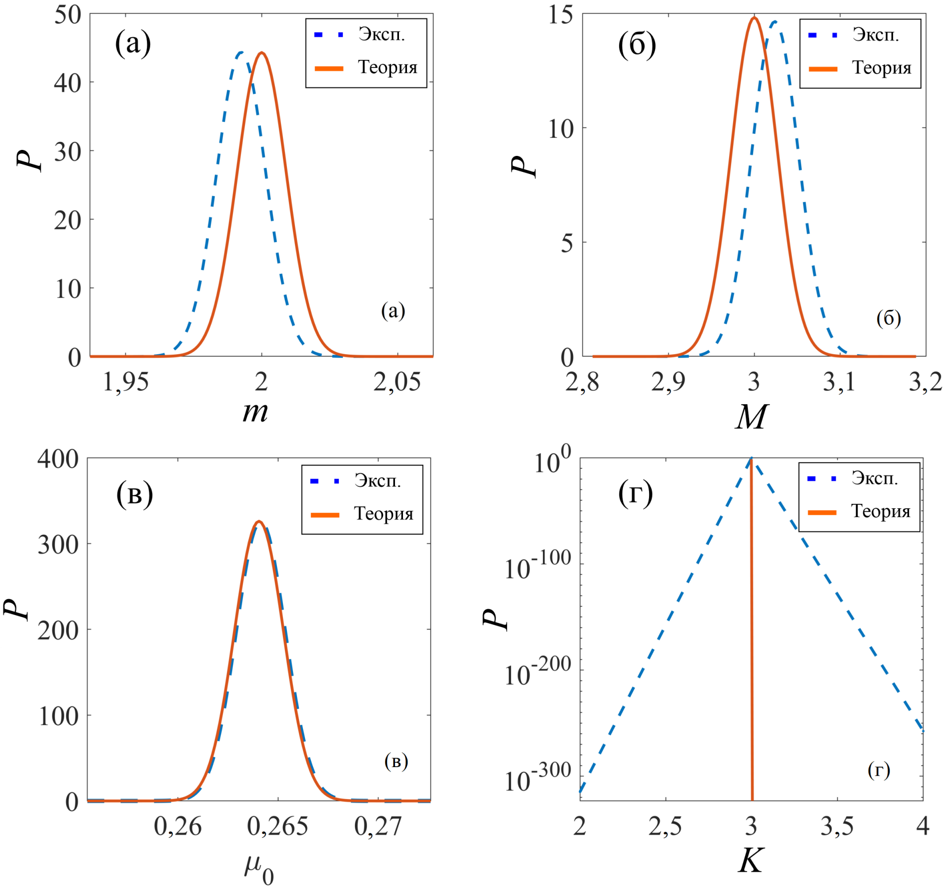

Рисунок 3.9 — Выборочное (экспериментальное) и точное (теоретическое) условные фидуциальные распределения параметров m а), M б), μ_0 в) и K г) на основе экспериментальных (пунктирные линии) и теоретических (сплошные линии) данных.

Рассматривая отдельно условные распределения, представленные выше, можно выполнить восстановление параметров с помощью метода максимального правдоподобия (МП). Возьмем для примера параметр m. Обозначим его

МП-значение как $\hat{m}_c$. Здесь и далее индекс c означает оценки, основанные на условных распределениях.

Согласно общей теории статистических оценок, в пределе большого объема выборки n МП-значение является случайной величиной с нормальным распределением $f(\hat{m}|m_c, \sigma_{m,c})$. Ожидаемое значение m_c соответствует асимптотической ($n \to \infty$) МП-оценке, а дисперсия связана с однопараметрической информацией Фишера: $\sigma^2_{m,c} = I^{-1}_{mm}$. Снова сошлёмся на исходный вывод, обозначающий $P^m_P(m) = f(m|\hat{m}_c, \sigma_{m,c})$ как априорное распределение параметра m. Аналогичным образом вычисляются априорные распределения $P^M_P(M)$ и $P^{\mu_0}_P(\mu_0)$.

Следуя описанной выше методике, была проведена оценка параметров априорных распределений для реальных экспериментальных данных $\mathcal{D}$: $\hat{m}_c =$ 1,993, $\sigma_{m,c} = 0{,}009$, $\hat{M}_c = 3{,}026$, $\sigma_{m,c} = 0{,}027$, $\hat{\mu}_{0,c} = 0{,}265$, $\sigma_{\mu_0,c} = 0{,}001$. Наблюдается тесная связь между МП и теоретическими значениями. Это еще раз свидетельствует о том, что теоретические значения, используемые для построения условных распределений, не вносят наблюдаемого смещения оценки.

Выше были получены однопараметрические априорные распределения всех рассматриваемых параметров. Их произведение образует априорное распределение с несколькими параметрами (3.20). Апостериорное распределение является произведением многопараметрического распределения (3.20) и безусловного фидуциального распределения (нормализованная функция правдоподобия). Априорное и апостериорное распределения показаны на рисунке 3.10.

Вычислим ожидаемые значения байесовского апостериорного распределения, чтобы получить точечные оценки. Полученные значения были близки к теоретическим: $\hat{m}_B = 1{,}943$, $\hat{M}_B = 3{,}084$, $\hat{\mu}_{0,B} = 0{,}274$. На рисунке 3.6а показано (пунктирная кривая) распределение (3.8) с этими значениями параметров. Полученная кривая хорошо согласуется с кривой, соответствующей теоретическим параметрам.

Таким образом, разработанный подход подразумевает использование заранее определенных теоретических значений параметров в качестве отправной точки для определения априорного распределения. Затем эти значения уточняются с помощью теоремы Байеса с учетом статистических данных.

Чтобы показать, что этот подход позволяет избежать проблемы мультиколлинеарности, построим матрицу информации, соответствующую апостериорному распределению. Прежде всего, заметим, что информация Фишера

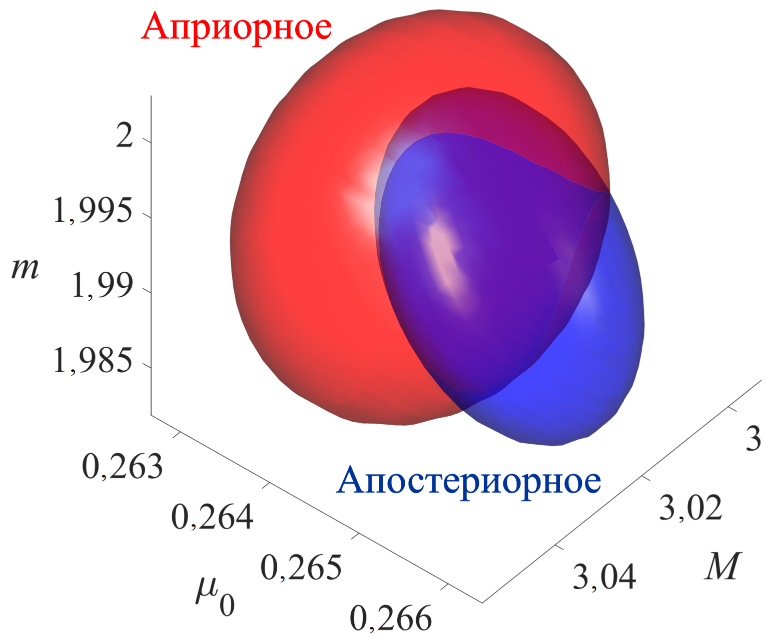

Рисунок 3.10 — Изоповерхности на уровне половины максимального значения априорного $P_P(\mu_0, m, M, K)$ и апостериорного $P_F(\mu_0, m, M, K|\mathcal{D})$ распределений вероятных значений параметров.

нормального распределения $f(\hat{m}|m_c, \sigma_{m,c})$ равна $1/\sigma^2_{m,c} = I_{mm}$ (аналогично для двух других параметров). Поскольку матрица информации Фишера произведения нескольких распределений представляет собой сумму соответствующих матриц информации для каждого распределения в отдельности, окончательно получаем

$$I_B = I + I_P, \tag{3.21}$$

где

$$I_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2_{m,c}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2_{M,c}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma^2_{\mu_0,c}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{mm} & 0 & 0 \\ 0 & I_{MM} & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mu_0\mu_0} \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

Фактически, использование априорной информации в виде произведения нормальных фидуциальных распределений МП-оценок удваивает диагональ матрицы информации исходного безусловного распределения. В нашем случае число обусловленности результирующей матрицы равно 750. Это значение значительно ниже, чем число обусловленности 7 миллионов для безусловного распределения. Следовательно, результирующая ковариационная матрица дает низкие дисперсии оценки параметров. Даже для небольшого объема данных, который был доступен в нашем эксперименте, можно было получить уровень ошибки ниже $\Delta = 1\%$.

Таблица 2 — Значения объема выборки, необходимые для достижения уровня ошибок ниже 1% и 10%, для различных методов реконструкции.

Ур. ошибки	Нет априорной информации	Фикс. m	Подход Байеса
$\Delta = 10\%$	$18 \cdot 10^6$	$1{,}2 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^2$
$\Delta = 1\%$	$42 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^6$	$5{,}8 \cdot 10^4$

В таблице 2 показаны количественные характеристики, полученные для смоделированной статистики фотоотсчётов: определяется объем выборки, необходимый для достижения уровня ошибок $\Delta = 1\%$ и $\Delta = 10\%$. А также сравниваются методы, различающиеся типами априорной информации: отсутствие какой-либо априорной информации, известное фиксированное значение m и приблизительное знание теоретических значений параметров. Таблица 2 ясно показывает огромные объемы данных, необходимые для устранения мультиколлинеарности. А байесовский метод позволяет получить уровень ошибок ниже $\Delta = 1\%$ с объемом данных, накопленных в реальном эксперименте.

Используя байесовский подход, была проведена оценка параметров 90 различных состояний с $M = 1 \div 5$, $m = 1 \div M$ и $K = 0 \div 5$. Уровень ошибок оценкок составлял от 0,0008% до 0,03% для μ_0, от 0,002% до 1,09% для m и от 0,015% до 1,89% для M.

3.5 Статистическое восстановление параметров состояния на основе квадратурных измерений

В предыдущем разделе был представлен метод восстановления параметров распределения из измеренной статистики фотоотсчётов. В этом разделе мы будем рассматривать восстановление параметров квадратурного распределения. Как было сказано выше гомодинный детектор выделяет только одну моду исследуемого состояния ($m = 1$). Рассмотрим результаты измерений состояния с $M_t = 5$, $K_t = 4$. Объем экспериментальных данных $\mathcal{D}_Q$ составил $n = 138710$ (рисунок 3.6б). Используя (3.15) с $\mu = \sigma_q^2 - 1/2$, где σ_q^2 – квадратурная дисперсия выборки, оценка среднего $\mu_{0,t} = 0{,}752$.

Переход от распределения фотоотсчётов к квадратурному распределению электромагнитного поля выполняется способом, описанным во второй главе (2.6).

Будем использовать метод, развитый в предыдущем разделе для оценки параметров (3.8) из $\mathcal{D}_Q$ (рисунок 3.6б). Для начала построим фидуциальное распределение $\tilde{P}_F(\mu_0, M, K|\mathcal{D}_Q) = C \cdot L(\mu_0, M, K|\mathcal{D}_Q)$, где функция правдоподобия имеет вид $L(\mu_0, M, K|\mathcal{D}_Q) = \prod_i \tilde{P}(Q_i|\mu_0, M, K)$.

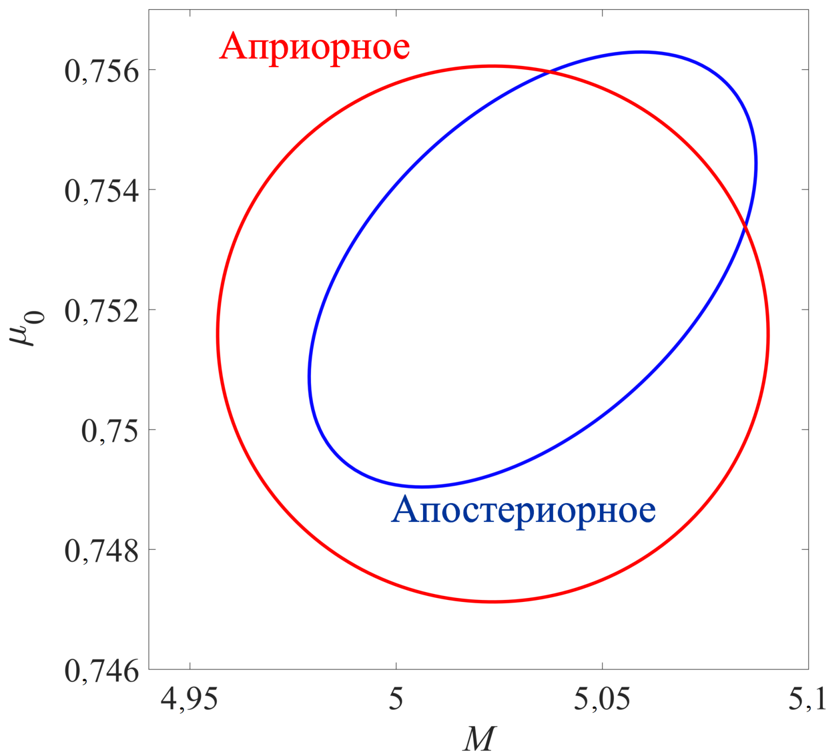

Рисунок 3.11 — Изоповерхности на уровне половины от максимального значения априорного и апостериорного распределений вероятных значений параметров.

Снова получим в ходе анализа детерминированное значение $K = K_t = 4$ и используем теоретические значения параметров для получения параметров априорного распределения точно так же, как это было сделано в предыдущем разделе: $\hat{\mu}_{0,c} = 0{,}749$, $\sigma_{\mu_0,c} = 0{,}006$, $\hat{M}_c = 5{,}064$, $\sigma_{M,c} = 0{,}096$. Апостериорное распределение показано на рисунке 3.11. Его ожидаемые значения: $\hat{M}_B = 5{,}036$, $\hat{\mu}_{0,B} = 0{,}758$.

Результирующее квадратурное распределение представлено на рисунке 3.6б вместе с экспериментальной квадратурной гистограммой и распределением, основанным на теоретических значениях параметров. Опять же, восстановленное распределение находится в хорошем соответствии с ожидаемым теоретическим.

Используя байесовский подход, были измерены 30 различных квадратурных состояний с параметрами $M = 1 \div 5$, $m = 1$ и $K = 0 \div 5$. Уровень ошибок оценок составлял от 0,0018% до 0,287% для μ_0 и от 0,044% до 0,287% для M.

3.6 Выводы к главе 3

В данной главе представлено новое распределение по числу фотонов, основанное на комбинации компаунд-распределения Пуассона и распределении Пойа, описывающее m-модовую подсистему M-модового теплового состояния при вычитании K фотонов. Были выведены простые соотношения для среднего числа фотонов μ и автокорреляционной функции в нуле. Верификация представленного распределения была проверена на основе критерия адекватности χ^2.

Далее в главе была рассмотрена проблема статистической оценки параметров многомодового теплового состояния света с отщеплением заданного количества фотонов путём анализа статистики фотонов, а также квадратурного распределения. Показано, что параметры распределения страдают значительной мультиколлинеарностью, что затрудняет их использование для безусловной оценки параметров. Эту задачу можно упростить, если зафиксировать один или несколько параметров на их истинных значениях. Однако, для более точной оценки лучше использовать априорную информацию. На основе байесовского подхода можно точно оценить параметры распределения фотоотсчётов. В частности, удалось восстановить все параметры с уровнем ошибок менее 1% для выборки размером $n = 5{,}8 \cdot 10^4$ [151].

Таким образом, разработан подход к оценке статистических параметров многомодовых тепловых состояний света с отщеплением заданного количества фотонов. Подобным образом можно решить проблему описания более сложных квантовых состояний света, которые имеют большой потенциал в области квантовых вычислений. С другой стороны, разработанная модель может быть использована и для описания отщепления фотона в случае одной моды, когда имеется ошибка выделения строго одной моды.

Глава 4. Характеризация параметров линейно-оптических интегральных схем посредством корреляционных измерений тепловых полей

В настоящей главе представлен новый метод характеризации многоканальных линейно-оптических схем посредством корреляционных измерений тепловых полей [159]. Изначальная версия разработанного метода потребовала дополнительной модификации ввиду особенной эксперимента. В главе представлены результаты численного моделирования и экспериментальная апробация нового метода характеризации линейно-оптических интегральных схем.

4.1 Идея метода

Пусть на входе имеются некоррелированные (кросскорреляционная функция в нуле равна единице) тепловые поля (рисунок 1.9) с разным средним числом фотонов (разной интенсивностью). Тогда выходные поля связаны с входными как

$$E^{out} = UE^{in}, \tag{4.1}$$

где U — унитарная передаточная матрица процесса. Выходные интенсивности первых двух каналов, выраженные через элементы передаточной матрицы U, после упрощения есть

$$\begin{gathered}\left\langle I_1^{out}\right\rangle = \left\langle |E_1^{out}|^2\right\rangle = |U_{11}|^2\left\langle |E_1^{in}|^2\right\rangle + |U_{12}|^2\left\langle |E_2^{in}|^2\right\rangle + \cdots + |U_{1j}|^2\left\langle |E_i^{in}|^2\right\rangle, \\ \left\langle I_2^{out}\right\rangle = \left\langle |E_2^{out}|^2\right\rangle = |U_{21}|^2\left\langle |E_1^{in}|^2\right\rangle + |U_{22}|^2\left\langle |E_2^{in}|^2\right\rangle + \cdots + |U_{2j}|^2\left\langle |E_i^{in}|^2\right\rangle.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Ниже для простоты описания разрабатываемого метода будет использован оптический чип размерности 2x2.

При направлении сигнала только на один из входов чипа и измерении выходных интенсивностей (и повторении так для каждого из m входов), возможно, таким образом, определить все квадраты модулей коэффициентов $|U_{ij}|^2$.

По определению нормированная автокорреляционная функция второго порядка в нуле

$$g^{(2)}(0) = \frac{\langle I_1 I_2\rangle}{\langle I_1\rangle\langle I_2\rangle}. \tag{4.3}$$

Тогда измеренный коррелятор выходных интенсивностей $\langle I_1^{out} I_2^{out}\rangle$ есть:

$$\langle I_1^{out} I_2^{out}\rangle = \langle |U_{11}E_1^{in} + U_{12}E_2^{in}|^2 |U_{21}E_1^{in} + U_{22}E_2^{in}|^2\rangle \,. \tag{4.4}$$

Хорошо известно, что поле от теплового источника имеет гауссово распределение по комплексной амплитуде

$$P\left(\mathrm{Re}E, \mathrm{Im}E\right) = \frac{1}{\pi \langle I\rangle} \exp\left(-\frac{(\mathrm{Re}E)^2 + (\mathrm{Im}E)^2}{\langle I\rangle}\right), \tag{4.5}$$

где $\langle I\rangle = \langle(\mathrm{Re}E)^2 + (\mathrm{Im}E)^2\rangle$ – средняя интенсивность. Раскрывая скобки и применяя корреляционные свойства тепловых (гауссовых) полей, а именно

$$\begin{aligned}
&\langle |E_1^{in}|^2 |E_1^{in}|^2\rangle = 2\left\langle I_1^{in}\right\rangle^2 , \\
&\langle |E_2^{in}|^2 |E_2^{in}|^2\rangle = 2\left\langle I_2^{in}\right\rangle^2 , \\
&\langle |E_1^{in}|^2 |E_2^{in}|^2\rangle = \left\langle I_1^{in}\right\rangle \left\langle I_2^{in}\right\rangle
\end{aligned} \tag{4.6}$$

и учитывая равенство нулю других корреляторов из-за некоррелированности входных тепловых полей $\langle E_1^{in} E_2^{in*}\rangle = \langle E_1^{in*} E_2^{in}\rangle = 0$, можно получить, что

$$\begin{aligned}
\langle I_1^{out} I_2^{out}\rangle = {} & 2|U_{11}|^2|U_{21}|^2\left\langle I_1^{in}\right\rangle^2 + 2|U_{12}|^2|U_{22}|^2\left\langle I_2^{in}\right\rangle^2 + \\
& + \left\langle I_1^{in}\right\rangle \left\langle I_2^{in}\right\rangle \left(|U_{11}|^2|U_{22}|^2 + |U_{12}|^2|U_{21}|^2\right) + \\
& + \left\langle I_1^{in}\right\rangle \left\langle I_2^{in}\right\rangle \left(U_{11}U_{12}^*U_{21}U_{22}^* + U_{11}^*U_{12}U_{21}^*U_{22}\right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Последнее слагаемое выражения (4.7) содержит искомую фазу. Зануляя фазы первой строки и первого столбца, можно получить, что

$$U_{11}U_{12}^*U_{21}U_{22}^* + U_{11}^*U_{12}U_{21}^*U_{22} = 2|U_{11}||U_{12}||U_{21}||U_{22}|\cos(\varphi_{22}). \tag{4.8}$$

То есть, при подаче на два входа сигналов с одинаковыми или разными интенсивностями и измерении корреляторов интенсивностей (или кросскорреляционных функций) двух различных выходов, с помощью выражения (4.7) будет получена некоторая фаза (или разность фаз) определенного элемента передаточной матрицы U. Следует заметить, что в таком случае известен только косинус фазы, а не сама фаза. Но это не является проблемой, потому что, полагая фазу элемента φ_{22} всегда положительной и вычисляя фазы $\varphi_{23}, \varphi_{32}, \varphi_{33}$ через φ_{22} (для чипа 3x3,например) при ошибке в знаке восстанавливается комплексно сопряженная матрица U, что совершенно не меняет значения корреляционных функций. Более того, данные измерения являются избыточными, так как восстановить значения фаз можно комбинируя разные входы и выходы. Но эффективнее использовать такие входы и выходы, которые соответствуют элементам первого столбца и строки (где фазы занулены), чтобы минимизировать ошибки при восстановлении.

Следовательно, квадраты модулей элементов $|U_{ij}|^2$ матрицы чипа получаются путем перекрывания всех каналов кроме одного и измерения выходных интенсивностей, а фазы элементов с учетом знака (за исключением φ_{22}) восстанавливаются из двух измерений – непосредственно самой фазы и разности фаз между ней и φ_{22} (или любой другой восстановленной, если через φ_{22} невозможно посчитать).

В реальном эксперименте всегда присутствуют неидеальности измерительного оборудования и настройки самого испытательного стенда: это потери на каплинге волоконных входов/выходов чипа и потери в самом чипе (которые закладываются в передаточную матрицу), это флуктуации фаз на входах и выходах чипа и это темновые шумы детектора. Ниже приведено рассмотрение данных неидеальностей на примере чипа 3x3.

Физически смысл потерь на каплинге состоит в ослаблении интенсивности при заведении излучения через волоконные входы чипа и выведении излучения из него. Математически это означает, что будет измеряться следующая матрица $\tilde{U}$

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\lambda_3} \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} e^{-\gamma_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\gamma_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\gamma_3} \end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

где λ и γ – это потери на входах и выходах соответственно. Используя разработанный метод, можно определить именно матрицу с потерями на каплинге, а каплинг при подключении чипа к разным установкам может быть совсем другим. Проблему с затуханием излучения в чипе никак не решить, то есть на самом деле будет восстанавливаться передаточная матрица уже с потерями. Но эти потери целиком и полностью обусловлены самим процессом изготовления чипа.

Следующая неидеальность связана с флуктуациями фаз на входах и выходах чипа. К слову, один из популярных методов восстановления параметров чипа с использованием когерентных состояний [60] сильно зависит от флуктуаций фаз. И требуется довольно хорошее оборудование и, возможно, дополнительные инструменты для их стабилизации. Использование же тепловых состояний света в виду отсутствия фазовой чувствительности является огромным преимуществом при восстановлении передаточной матрицы чипа.

Последняя и ключевая неидеальность связана с учетом темновых шумов детектора. Рассматривался случай детекторов, которые имеют гауссовые шумы по интенсивности с нулевым средним и шумовым среднеквадратическим отклонением σ_{noise}. Учёт темновых шумов при расчёте кросскорреляционной функции определяется следующим образом

$$\langle I_1 I_2 \rangle = \langle I_1^N I_2^N \rangle - \langle I_{N1} I_{N2} \rangle - \langle I_{N2} \rangle \left(\langle I_1^N \rangle - \langle I_{N1} \rangle \right) - \langle I_{N1} \rangle \left(\langle I_2^N \rangle - \langle I_{N2} \rangle \right), \quad (4.10)$$

где I_1^N, I_2^N — зашумленные интенсивности, а I_{N1}, I_{N2} — данные шума.

Для более точного восстановления элементов передаточной матрицы при учёте темновых шумов можно использовать метод максимального правдоподобия: искать такие значения фаз, которым будут более всего соответствовать измеренные значения корреляторов.

Логарифмическая функция правдоподобия для матрицы чипа 3x3 есть

$$L = \ln(P_{22} P_{23} P_{32} P_{33}), \quad (4.11)$$

где P_{ij} — это вероятность получить коррелятор выходных интенсивностей, соответствующий фазе φ_{ij}. А P_{ij} есть

$$P_{ij} = \frac{1}{\sigma_{ij}^{exp}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\langle I_i I_j(\varphi_{ij}) \rangle - \mu_{ij}^{exp})^2}{2(\sigma_{ij}^{exp})^2} \right]. \quad (4.12)$$

Здесь переменная $\langle I_i I_j \rangle$ — считается по (4.7) с некоторой фазой, которая подгоняется в ходе максимизации функции правдоподобия. А параметры μ_{ij}^{exp} и σ_{ij}^{exp} — это среднее значение и среднеквадратичное отклонение коррелятора интенсивности для истинной фазы чипа.

Следует заметить, что для восстановления параметров чипа с помощью метода косинусов (4.7) необходимо провести минимум $2K - 1$ измерений, где K — число фаз (4 фазы для чипа 3x3, например). Конечно, на практике можно провести большее количество измерений, и как было сказано выше, метод косинусов это позволяет. В дальнейшем просто значения фаз усредняются и получаются более точные значения. Но минимальное количество измерений $2K - 1$.

4.2 Методика проведения численных экспериментов

Алгоритм характеризации ЛОИС на основе интерферометрии тепловых полей построен для частного восстановления передаточной матрицы 3x3, связывающей входные и выходные поля по формуле (4.1). Все измерения проводятся с одинаковым объемом выборки N. Алгоритм состоит из 6 этапов.

Этап 1. Генерация матрицы ЛОИС. Для проверки метода, изложенного в предыдущем разделе, были проведены численные эксперименты. Генерируется случайная унитарная матрица размерности 3x3 различными методами линейной алгебры, например, с помощью QR-разложения некоторой случайной матрицы. Приведем алгоритм генерации унитарной матрицы, распределенной по мере Хаара.

1. Возьмем комплексную матрицу Z размерности $N \times N$, элементы которой являются комплексными нормально распределенными случайными величинами.
2. Применим QR-разложение матрицы Z и пусть $Z = QR$.
3. Построим следующую диагональную матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{|r_{11}|} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{r_{NN}}{|r_{NN}|} \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

   где r_{ii} — это диагональный элемент матрицы R.
4. Диагональные элементы матрицы $R' = \Lambda^{-1}R$ всегда действительны и строго положительны, поэтому матрица $Q' = Q\Lambda$ распределена по мере Хаара.

Далее полученная унитарная матрица приводится к виду с зануленными фазами первой строки и первого столбца.

Этап 2. Генерация и измерение темновых шумов используемых детекторов.

Шумы детекторов полагаются гауссовыми со средними значениями μ_{di} и среднеквадратичными отклонениями σ_{di}. Для определения среднего значения μ_{di} для каждого из двух детекторов генерируется N случайных величин, имеющих гауссово распределение, и для этих величин рассчитывается среднеарифметическое значение $\mu_{di}^{(est)}$, которое далее вычитается из полученных данных на этапах

4 и 5. Во всех численных экспериментах все средние значения μ_{di} задавались равными нулю (поскольку это не влияет на точность измерения), а σ_{di} для всех детекторов были равны некоторому значению $2R$, определяющему соотношение шум/сигнал (входная интенсивность полагалась равной 2). Восстановление СКО шумов $\sigma_{di}^{(est)}$.

Этап 3. Измерение интенсивности входных тепловых полей.

Для каждого из трех входов генерируется набор из N случайных значений поля, имеющих гауссово распределение с нулевым средним значением и среднеквадратичным отклонением σ_{si} (для всех входных полей σ_{si} полагалось равным единице). Модуль каждого значения поля возводится в квадрат и к нему прибавляется заново сгенерированное значение шума детектора. Затем рассчитывается среднее значение измеренной интенсивности и из него вычитается среднее значение шумов $\mu_{di}^{(est)}$, определенное на этапе 2. Таким образом, определяются средние значения входных интенсивностей $\langle I_i^{(in)}\rangle^{(est)}$.

Этап 4. Измерение амплитуд передаточной матрицы ЛОИС.

Для измерения амплитуды элемента U_{ij} необходимо подавать тепловое поле на i-ый вход, измерить интенсивность на j-ом выходе и взять корень из отношения выходной и входной интенсивностей. Входные интенсивности определялись на этапе 3. Выходные интенсивности определяются следующим образом. Для определения амплитуд каждого столбца матрицы ЛОИС (элементы U_{1i} и U_{2i}) генерируется заново N случайных значений поля на i-ом входе (аналогично тому, как это делалось на этапе 3). Далее для каждого входного значения поля по формуле (4.1) рассчитываются значения выходных полей (при этом поля на остальных входах считаются равными нулю). Затем, аналогично этапу 3 модуль каждого значения поля на j-ом выходе возводится в квадрат, к нему прибавляется заново сгенерированное значение шума детектора, рассчитывается среднее значение измеренной интенсивности и из него вычитается среднее значение шумов $\mu_{di}^{(est)}$. Таким образом, определяются средние значения интенсивностей на j-ом выходе при условии подачи теплового поля на i-ый вход $\langle I_{ji}^{(out)}\rangle^{(est)}$. Амплитуды матричных элементов рассчитываются как

$$|U_{ij}^{(est)}| = \sqrt{\frac{\langle I_{ji}^{(out)}\rangle^{(est)}}{\langle I_i^{(in)}\rangle^{(est)}}}. \tag{4.14}$$

Этап 4. Корреляционные измерения.

Для определения неизвестной фазы, например, φ_{22} производится следующий эксперимент. На оба входа подаются тепловые поля и измеряется коррелятор выходных интенсивностей $\langle I_1^{(out)} I_2^{(out)}\rangle$. Для моделирования такого эксперимента заново генерируется N случайных значений входных полей на первом и втором входе аналогично тому, как это делалось на этапах 3 и 4. Далее по формуле (4.1) вычисляются выходные значения полей, их модули возводятся в квадрат и к ним также добавляются заново сгенерированные случайные значения шумов детекторов.

После этого рассчитывается среднее значение произведения измеренных интенсивностей $\langle I_{112}^{(out)} I_{212}^{(out)}\rangle^{(est)}$ и его СКО $\sigma^{(est)}(I_{112}^{(out)} I_{212}^{(out)})$ (при этом в данном случае шумы не вычитаются). Фаза матричного элемента φ_{22} рассчитывается методом максимального правдоподобия. Для этого ищется максимум функции $\ln[P(\varphi_{22})]$, где

$$P(\varphi_{22}) = \frac{1}{\sigma^{(est)}\left(I_{112}^{(out)} I_{212}^{(out)}\right)\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\left(C_{12}(\varphi_{22}) - \langle I_{112}^{(out)} I_{212}^{(out)}\rangle^{(est)}\right)^2}{2\left(\sigma^{(est)}(I_{112}^{(out)} I_{212}^{(out)}\right)^2}}, \tag{4.15}$$

а коэффициент $C_{12}(\varphi_{22})$ можно получить из (4.7), и он равен

$$\begin{aligned} C_{12}(\varphi_{22}) &= 2\left(|U_{11}|^2\right)^{est}\left(|U_{21}|^2\right)^{est}\left(\langle I_1^{in}\rangle^2\right)^{est} + 2\left(|U_{12}|^2\right)^{est}\left(|U_{22}|^2\right)^{est}\left(\langle I_2^{in}\rangle^2\right)^{est} + \\ &+ \left(\langle I_1^{in}\rangle\right)^{est}\left(\langle I_2^{in}\rangle\right)^{est}\left(\left(|U_{11}|^2\right)^{est}\left(|U_{22}|^2\right)^{est} + \left(|U_{12}|^2\right)^{est}\left(|U_{21}|^2\right)^{est}\right) + \\ &+ 2\left(\langle I_1^{in}\rangle\right)^{est}\left(\langle I_2^{in}\rangle\right)^{est}|U_{11}|^{est}|U_{12}|^{est}|U_{21}|^{est}|U_{22}|^{est}\cos(\varphi_{22}) + \\ &+ \left\{\langle I_{d1} I_{d2}\rangle^{(est)} + \mu_{d2}^{(est)}\left(\langle I_{112}^{(out)}\rangle - \mu_{d1}^{(est)}\right) + \mu_{d1}^{(est)}\left(\langle I_{212}^{(out)}\rangle - \mu_{d2}^{(est)}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.16}$$

Здесь слагаемое в фигурных скобках отвечает учету шумов детекторов, а коррелятор $\langle I_{d1} I_{d2}\rangle^{(est)}$ вычисляется на основе данных, сгенерированных на этапе 2.

Этап 4 повторяется для всех оставшихся фаз передаточной матрицы при подаче и измерении сигналов на определённые входы и выходы ЛОИС.

На основе амплитуд $|U_{ij}^{(est)}|$ и фаз $\varphi_{ij}^{(est)}$ рассчитывается полная матрица ЛОИС

$$U^{(est)} = \begin{pmatrix} |U_{11}^{(est)}| & |U_{12}^{(est)}| & |U_{13}^{(est)}| \\ |U_{21}^{(est)}| & |U_{22}^{(est)}|\exp\left[i\varphi_{22}^{(est)}\right] & |U_{23}^{(est)}|\exp\left[i\varphi_{23}^{(est)}\right] \\ |U_{31}^{(est)}| & |U_{32}^{(est)}|\exp\left[i\varphi_{32}^{(est)}\right] & |U_{33}^{(est)}|\exp\left[i\varphi_{33}^{(est)}\right] \end{pmatrix}. \tag{4.17}$$

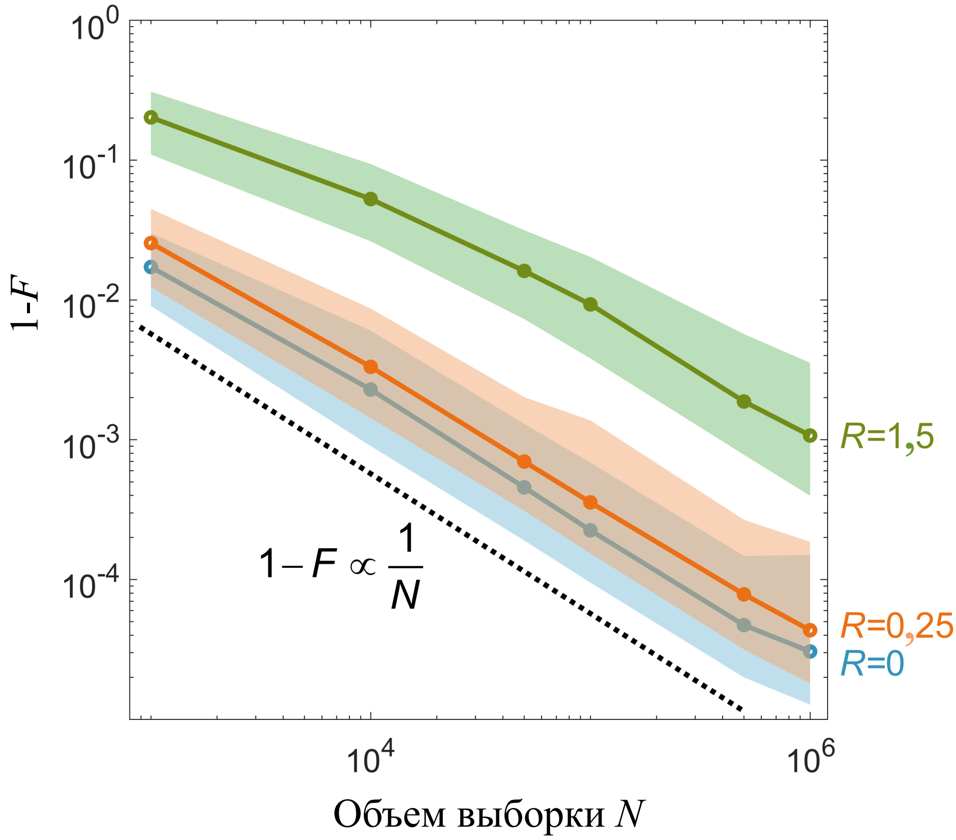

Рисунок 4.1 — Зависимость потерь точности $1 - F$ от объема выборки. Разными цветами обозначены различные значения отношения шум-сигнал. Границы погрешностей соответствуют квартилям 25% и 75%.

Этап 6. Сравнение восстановленной передаточной матрицы и исходной теоретически заданной.

Фиделити между исходной передаточной матрицей U и восстановленной U^{est} можно оценить по следующей формуле:

$$F(U,U^{(est)}) = \frac{\left|\mathrm{Tr}\left(U^{\dagger}U^{est}\right)\right|^2}{\mathrm{Tr}\left(U^{\dagger}U\right)\mathrm{Tr}\left((U^{(est)})^{\dagger}U^{est}\right)}. \tag{4.18}$$

Теперь применим предложенную методику для оценки точности восстановления линейно-оптических интегральных схем. Для этого был сгенерирован набор из 1000 неунитарных матриц размерности 3x3. Интенсивность теплового поля была одинакова во всех каналах и была равна 2. Объем выборки варьировался от 10^3 до 10^6, отношение шум-сигнал R изменялось от 0 до 1.5. По результатам восстановления матриц из набора вычислялось среднее значение фиделити, а также значения квартилей 75% и 25% (т.к. распределение фиделити не симметричное).

Зависимости потерь точности $1 - F$ от объема выборки и отношения шум-сигнал R приведены на рисунке 4.1 и 4.2. Хорошо видно, что увеличение объема

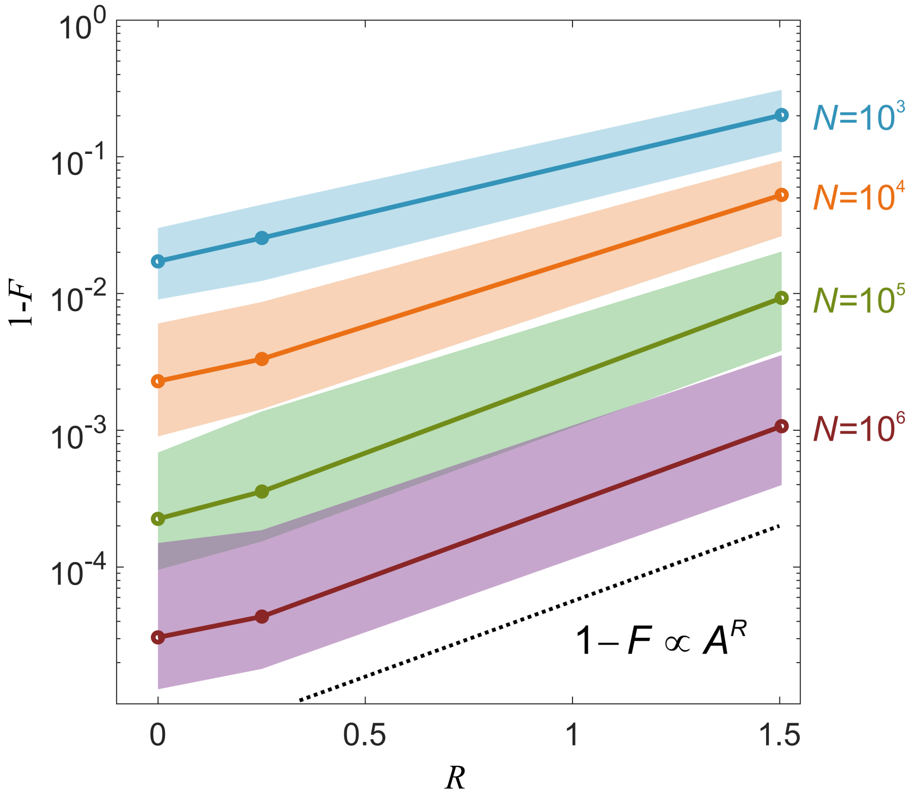

Рисунок 4.2 — Зависимость потерь точности $1 - F$ от отношения шум-сигнал R. Разными цветами обозначены различные значения размера выборки. Границы погрешностей соответствуют квартилям 25% и 75%.

выборки позволяет сгладить влияние темновых шумов и увеличить точность восстановления. Зеленая кривая на рисунке 4.1 соответствует зашумленному на 25% полезному сигналу и, начиная с выборки в 10^4 точек, мы будем иметь точность восстановления передаточной матрицы больше 99,9% и до 99,9999% при выборке в 10^6 [159].

По рисунку 4.2 можно оценить какой объем выборки нам нужно собрать, чтобы получить требуемую точность восстановления передаточной матрицы при заданных определенных значениях темновых шумов детектора. Также можно заметить хорошую устойчивость разработанного метода к темновым шумам.

К сожалению, в эксперименте очень сложно провести калибровку и оценивать значения фаз по одной точке. Это связано в основном с флуктуацией излучения лазера, небольшого изменения которого достаточно, чтобы сдвинуть значения автокорреляционных функций и в отдельных измерениях сначала входной мощности сигнала, а затем выходной. И это непосредственно приведёт к неточному восстановлению фазы. Поэтому мы улучшим разработанный метод в следующем разделе и будем восстанавливать значения фаз не в одной точке, а в зависимости кросскорреляционной функции от времени.

4.3 Временная корреляционная функция

Установим вид корреляционной функции $g(\tau) = \frac{\langle E^*(0)E(\tau)\rangle}{\langle E^*(0)E(0)\rangle} \equiv \frac{\langle E^* E(\tau)\rangle}{\langle E^* E\rangle}$ для лазерного света, прошедшего через вращающийся матовый диск (рисунок 4.3). Для этого последуем формализму, изложенному в работе [108], с той лишь разницей, что там на диск падала плоская волна, ограниченная прямоугольником со сторонами l_1 и l_2, а здесь пространственное распределение поля на диске описывается функцией Гаусса:

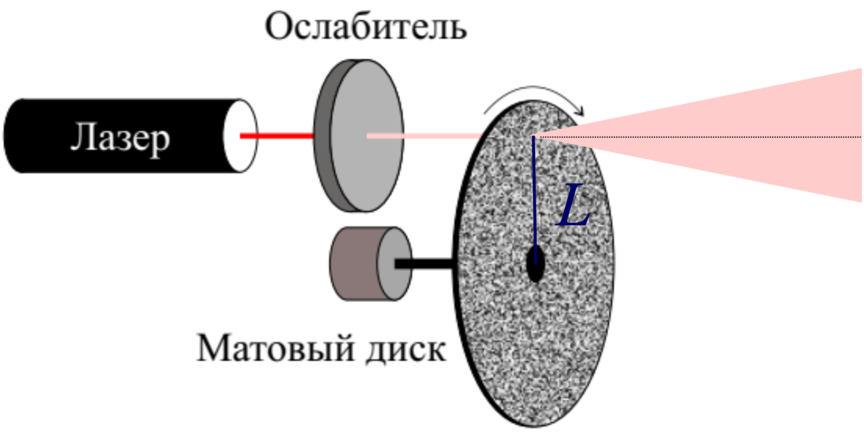

Рисунок 4.3 — Принципиальная схема расчёта.

$$E(x,y) = E_0 \frac{1}{w\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2 + (y-L)^2}{2w^2}\right], \tag{4.19}$$

где L — расстояние от центра диска до центра пучка, а w — радиус перетяжки пучка. Важной особенностью ситуации, описанной в работе [108] является то, что рассматривается свет, рассеянный под углом к нормали диска, то есть с ненулевыми поперечными компонентами волнового вектора. Будем считать, что $k_y = 0$ и ограничимся рассмотрением k_x. Тогда временная часть корреляционной функции сводится к следующему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx'' dy'' e^{-ik_x(\cos(\Omega\tau)-1)x''} e^{ik_y y'' \sin(\Omega\tau)} E(x'',y'') E(x'' - \Omega\tau L, y''). \tag{4.20}$$

Здесь Ω — круговая частота вращения диска. Интеграл (4.20) легко берется и после разложения тригонометрических функций в ряд Тейлора с точностью до нормировочного множителя имеем:

$$g(\tau) \propto \exp\left(-\frac{L^2\Omega^2\tau^2}{4w^2}\right) \exp(ik_x L\Omega\tau). \tag{4.21}$$

В выражении (4.21) первый множитель — это стандартная гауссова функция с временем корреляции $T_1 = \frac{w}{\Omega L}$, соответствующим времени прохождения точки диска через перетяжку пучка, а второй множитель — частотная набивка с периодом $T_2 = \frac{\lambda}{\alpha \Omega L}$, где λ — длина волны падающего на диск излучения, а α — угол рассеяния. Тогда с учётом нормировки корреляционная функция будет иметь вид:

$$g(\tau) = \exp\left(-\frac{L^2\Omega^2\tau^2}{4w^2}\right)\exp\left[-i(\omega_0 - \Delta)\tau\right], \;\; \Delta = k_x L\Omega. \tag{4.22}$$

Тогда частотный сдвиг Δ отвечает допплеровскому сдвигу частоты рассеянного излучения. Отметим также, что все эти выражения получены в приближении, что характерный размер мата диска много меньше перетяжки пучка.

Пусть матрица светоделителя есть

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22}e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где все неизвестные коэффициенты действительные. Если интенсивности полей на входе есть I_1^{in} и I_2^{in}, то средние интенсивности в выходных каналах определяются выражениями:

$$\langle I_1^{out}\rangle = U_{11}^2 I_1^{in} + U_{12}^2 I_2^{in}, \; \langle I_2^{out}\rangle = U_{21}^2 I_1^{in} + U_{22}^2 I_2^{in}. \tag{4.24}$$

Коррелятор выходных интенсивностей тепловых полей можно рассчитать аналогичным образом, показанным в разделе 4.1:

$$\langle I_1^{out} I_2^{out}(\tau)\rangle = \langle E_1^{out*}E_2^{out*}(\tau)E_1^{out}E_2^{out}(\tau)\rangle = \underbrace{\langle E_1^{out*}E_1^{out}\rangle}_{\langle I_1^{out}\rangle} +$$

$$+ \underbrace{\langle E_2^{out*}(\tau)E_2^{out}(\tau)\rangle}_{\langle I_2^{out}\rangle} + \langle E_1^{out*}E_2^{out}(\tau)\rangle \langle E_2^{out*}(\tau)E_1^{out}\rangle . \tag{4.25}$$

Рассчитаем каждое из слагаемых в (4.25), с учётом (4.24):

$$\langle I_1^{out}\rangle \langle I_2^{out}\rangle = U_{11}^2U_{21}^2 \langle I_1^{in}\rangle^2 + U_{12}^2U_{22}^2 \langle I_2^{in}\rangle^2 + (U_{11}^2U_{22}^2 + U_{12}^2U_{22}^2) \langle I_1^{in}\rangle \langle I_2^{in}\rangle , \tag{4.26}$$

$$\langle E_1^{out*}E_2^{out}(\tau)\rangle = \langle E_2^{out*}(\tau)E_1^{out}\rangle^* = U_{11}U_{21} \underbrace{\langle E_1^{in*}E_1^{in}(\tau)\rangle}_{\langle I_1^{in}\rangle g_1^{in}(\tau)} +$$

$$+U_{11}U_{22}e^{i\varphi} \underbrace{\langle E_1^{in*}E_2^{in}(\tau)\rangle}_{0} + U_{12}U_{21} \underbrace{\langle E_2^{in*}E_1^{in}(\tau)\rangle}_{0} + U_{12}U_{22}e^{i\varphi} \underbrace{\langle E_2^{in*}E_2^{in}(\tau)\rangle}_{\langle I_2^{in}\rangle g_2^{in}(\tau)}, \tag{4.27}$$

$$| \langle E_1^{out*} E_2^{out}(\tau) \rangle |^2 = |U_{11}U_{21} \langle I_1^{in} \rangle g_1^{in}(\tau) + U_{12}U_{22}e^{i\varphi} \langle I_2^{in} \rangle g_2^{in}(\tau)|^2 =$$
$$= U_{11}^2 U_{21}^2 \langle I_1^{in} \rangle^2 |g_1^{in}(\tau)|^2 + U_{12}^2 U_{22}^2 \langle I_2^{in} \rangle^2 |g_2^{in}(\tau)|^2 +$$
$$+2U_{11}U_{12}U_{21}U_{22}\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi} g_1^{in*}(\tau) g_2^{in}(\tau)\right]. \qquad (4.28)$$

Подставим теперь в (4.28) вид корреляционной функции (4.22). Пусть для разных источников они отличаются допплеровским сдвигом. Тогда $g_1^{in}(\tau) = G(\tau)exp[-(w_0-\Delta_1)\tau]$, $g_2^{in}(\tau) = G(\tau)exp[-(w_0-\Delta_2)\tau]$, где $G(\tau) \equiv \exp\left(-\frac{L^2\Omega^2\tau^2}{4w^2}\right)$.

В этом случае

$$|g_1^{in}(\tau)|^2 = |g_2^{in}(\tau)|^2 = G^2(\tau), \qquad (4.29)$$

$$\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi} g_1^{in*}(\tau) g_2^{in}(\tau)\right] = G^2(\tau)\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\exp(i\delta\tau)\right] = G^2(\tau)\cos(\delta\tau+\varphi), \qquad (4.30)$$

где $\delta = \Delta_2 - \Delta_1$.

Подставляя (4.29) и (4.30) в (4.28) получим:

$$| \langle E_1^{out*} E_2^{out}(\tau) \rangle |^2 = G^2(\tau)[U_{11}^2 U_{21}^2 \langle I_1^{in} \rangle^2 + U_{12}^2 U_{22}^2 \langle I_2^{in} \rangle^2 +$$
$$+2U_{11}U_{12}U_{21}U_{22} \langle I_1^{in} \rangle \langle I_2^{in} \rangle \cos(\delta\tau+\varphi)]. \qquad (4.31)$$

Наконец, подставляем (4.31) и (4.25) в (4.26), получаем:

$$\langle I_1^{out} I_2^{out}(\tau) \rangle = \left[G^2(\tau)+1\right]\left[U_{11}^2 U_{21}^2 \langle I_1^{in} \rangle^2 + U_{12}^2 U_{22}^2 \langle I_2^{in} \rangle^2\right] +$$
$$+ \langle I_1^{in} \rangle \langle I_2^{in} \rangle \left[U_{11}^2 U_{22}^2 + U_{12}^2 U_{21}^2 + 2U_{11}U_{12}U_{21}U_{22}G^2(\tau)\cos(\delta\tau+\varphi)\right] \qquad (4.32)$$

В частном случае симметричного светоделителя, когда $U_{11} = U_{12} = U_{21} = U_{22} = 1/\sqrt{2}$ и равных входных интенсивностей $\langle I_1^{in} \rangle = \langle I_2^{in} \rangle = I_0$ выражение (4.32) преобразуется к следующему простому виду

$$\frac{\langle I_1^{out} I_2^{out}(\tau) \rangle}{I_0^2} = 1 + \frac{G^2(\tau)}{2}(1+\cos(\delta\tau+\varphi)). \qquad (4.33)$$

На бесконечности эта функция равна единице, а в близи нуля – это гауссова огибающая с амплитудой 1, и с частотной набивкой, фаза которой определяется фазой светоделителя. Причем, для обычного светоделителя с фазой π в нуле получим минимум, равный 1 (аналог провала Манделя).

Аналогично можно определить автокорреляционные функции выходных интенсивностей:

$$\langle I_1^{out} I_1^{out}(\tau) \rangle = \left[G^2(\tau)+1\right]\left[U_{11}^4 \langle I_1^{in} \rangle^2 + U_{12}^4 \langle I_2^{in} \rangle^2\right] +$$
$$+(1+G^2(\tau)\cos(\delta\tau))2U_{11}^2 U_{12}^2 \langle I_1^{in} \rangle \langle I_2^{in} \rangle, \qquad (4.34)$$

$$\langle I_2^{out} I_2^{out}(\tau)\rangle = \left[G^2(\tau)+1\right]\left[U_{21}^4 \langle I_1^{in}\rangle^2 + U_{22}^4 \langle I_2^{in}\rangle^2\right] + \\ +(1+G^2(\tau)\cos(\delta\tau))2U_{21}^2 U_{22}^2 \langle I_1^{in}\rangle \langle I_2^{in}\rangle, \quad (4.35)$$

Как можно видеть, полученные выражения (4.34), (4.35) никак не зависят от фазы светоделителя, но их можно использовать для калибровки. В частном случае симметричного светоделителя, когда $U_{11} = U_{12} = U_{21} = U_{22} = 1/\sqrt{2}$ и равных входных интенсивностей $\langle I_1^{in}\rangle = \langle I_2^{in}\rangle = I_0$ выражения (4.34) и (4.35) преобразуются к следующему простому виду:

$$\frac{\langle I_1^{out} I_1^{out}(\tau)\rangle}{I_0^2} = \frac{\langle I_2^{out} I_2^{out}(\tau)\rangle}{I_0^2} = 1 + \frac{G^2(\tau)}{2}(1+\cos(\delta\tau)). \quad (4.36)$$

Заметим, что для любого светоделителя и для любых входных интенсивностей верно выражение:

$$\frac{\langle I_1^{out} I_1^{out}(0)\rangle}{I_0^2} = \frac{\langle I_2^{out} I_2^{out}(0)\rangle}{I_0^2} = 2. \quad (4.37)$$

При определении коэффициентов матрицы пропускания измеряются величины $\langle I_i^{(j)}\rangle$ — средние интенсивности в i-ом выходном канале, когда подключен только j-ый вход. Эти величины имеют следующий вид:

$$\langle I_1^{(1)}\rangle = U_{11}^2 \langle I_1^{in}\rangle, \langle I_1^{(2)}\rangle = U_{12}^2 \langle I_2^{in}\rangle, \langle I_2^{(1)}\rangle = U_{21}^2 \langle I_1^{in}\rangle, \langle I_2^{(1)}\rangle = U_{22}^2 \langle I_2^{in}\rangle. \quad (4.38)$$

Тогда выражения для нормированных автокорреляционных функций можно записать следующим образом:

$$g_{11}^{(2)}(\tau) = 1 + G^2(\tau) - 2\frac{G^2(\tau)(1-\cos(\delta\tau))\langle I_1^{(1)}\rangle \langle I_1^{(2)}\rangle}{(I_1^{out})^2} \\ g_{22}^{(2)}(\tau) = 1 + G^2(\tau) - 2\frac{G^2(\tau)(1-\cos(\delta\tau))\langle I_2^{(1)}\rangle \langle I_2^{(2)}\rangle}{(I_2^{out})^2}. \quad (4.39)$$

А нормированная кросскорреляционная функция

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = 1 + G^2(\tau) + \frac{G^2(\tau)\cos(\delta\tau+\varphi)\sqrt{\langle I_1^{(1)}\rangle \langle I_1^{(2)}\rangle \langle I_2^{(1)}\rangle \langle I_2^{(2)}\rangle}}{\langle I_1^{out}\rangle \langle I_2^{out}\rangle} - \\ - \frac{G^2(\tau)\left[\langle I_1^{(1)}\rangle \langle I_2^{(2)}\rangle + \langle I_1^{(2)}\rangle \langle I_2^{(1)}\rangle\right]}{\langle I_1^{out}\rangle \langle I_2^{out}\rangle}. \quad (4.40)$$

Полученный результат (4.40) является достаточно важным. Действительно, помимо слагаемых констант и гауссовых огибающих, остальные слагаемые

– коэффициенты, которые могут быть параметрами фита. Иными словами, выражение (4.40) можно переписать следующим образом

$$g_{12}^{(2)}(\tau) = C_1 + C_2 \exp(-C_3\tau^2)\left[\frac{1}{2} + C_4\cos(\delta\tau + \varphi)\right]. \tag{4.41}$$

Здесь C_i – параметры фита, как и искомая фаза φ. То есть в эксперименте нужно сохранить кросскорреляционную функцию $g_{12}^{(2)}(\tau)$ и фитить её кривой (4.41). Тем самым восстанавливается требуемая фаза φ.

4.4 Эксперимент по характеризации ЛОИС

Целью физических экспериментов является определение параметров некоторой неизвестной ЛОИС с помощью разработанного метода, и сравнение результатов с известным методом. Как было отмечено выше, характеризация лю-

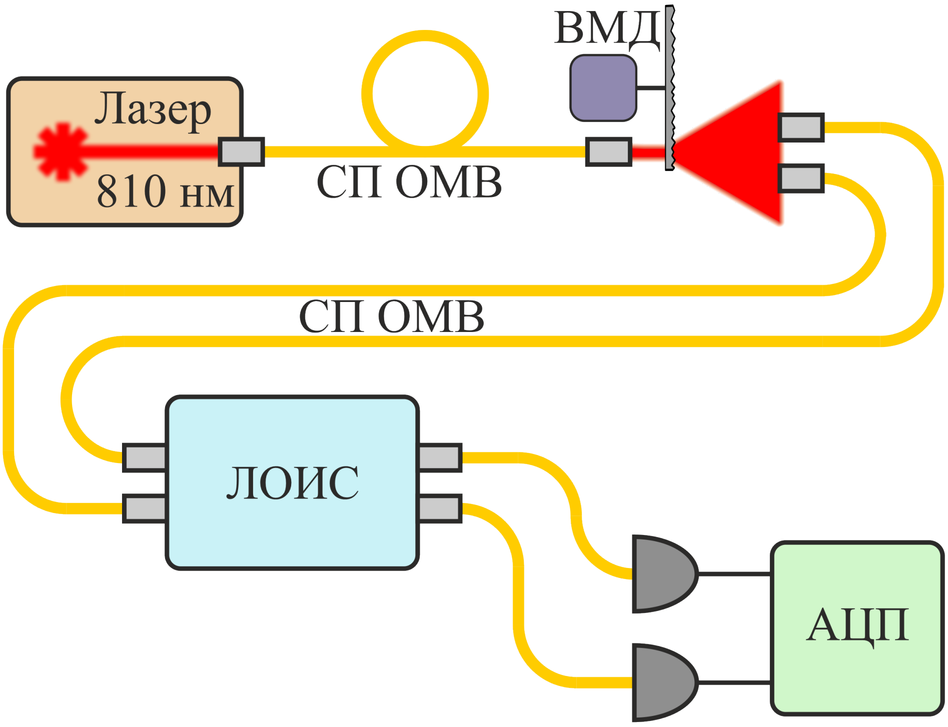

Рисунок 4.4 — Схема стенда по характеризации ЛОИС на основе корреляционных измерений интерферирующих квази-тепловых состояний. СП ОМВ — сохраняющее поляризацию одномодовое волокно, ВМД — вращающийся матовый диск, ЛОИС — линейно-оптическая интегральная схема, АЦП — аналого-цифровой преобразователь.

бой многоканальной ЛОИС в конечном итоге сводится к характеризации частей размерности 2x2, которые описываются матрицей вида (4.23), все параметры которой – действительные. При этом задача восстановления амплитуд a, b, c и d является тривиальной и сводится к процедуре измерения соответствующих коэффициентов пропускания, а наибольшую сложность представляет процедура измерения фазового параметра φ.

Этот параметр определялся двумя способами. Первый способ определения фазы матричного элемента исследуемой ЛОИС основан на разработанном методе, использующем корреляционные измерения интерферирующих квазитепловых состояний. Для проведения измерений использовался стенд, схема которого изображена на рисунке 4.4.

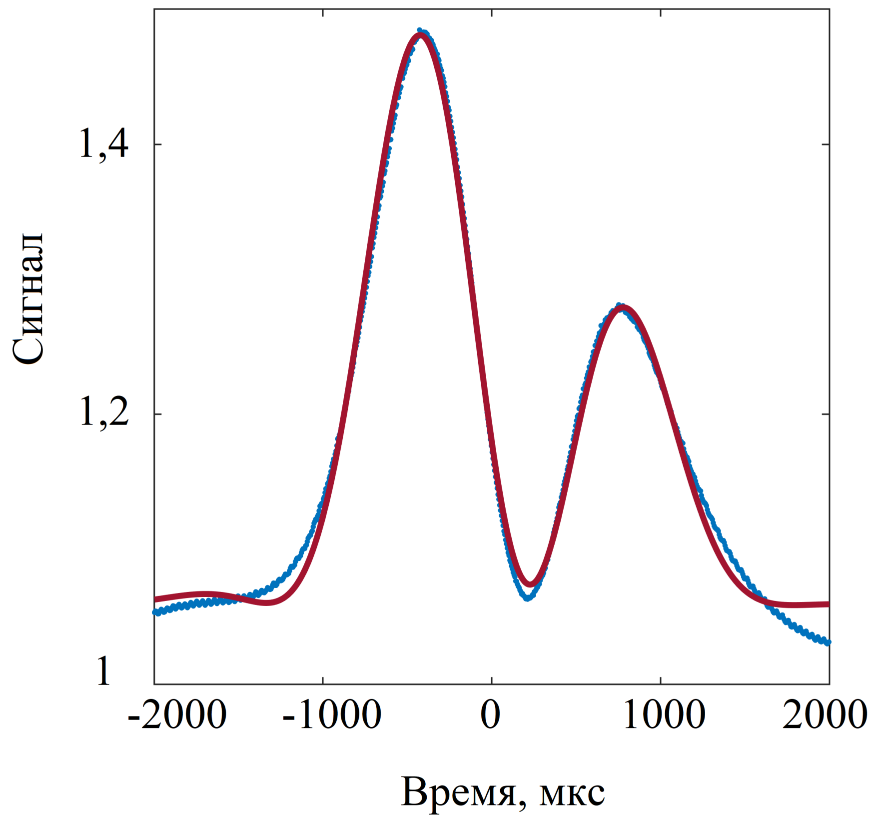

Рисунок 4.5 — Зависимость кросскорреляционной функции от времени. Точками показаны результаты эксперимента, а кривыми – результаты аппроксимации по формуле (4.41).

Излучение одномодового лазера на длине волны 810 нм, сопряженного с одномодовым оптоволокном, сохраняющим поляризацию, выводится из волокна, рассеивается на вращающемся матовом диске ВМД, и затем снова заводится в два таких же волокна. Затем оба волокна соединяются со входами исследуемой ЛОИС. Выходы ЛОИС также соединяются с оптическими волокнами, заводящими излучение в фотодетекторы, измеряющие интенсивность, сигнал с которых оцифровывается с помощью АЦП и обрабатывается на компьютере. На основе полученных временных зависимостей $I_1(t)$ и $I_2(t)$ вычисляется корреляционная функция $G^{(2)}(\tau) = \langle I_1(t) I_2(t+\tau) \rangle$, и аппроксимируется выражением (4.41). Искомая фаза матричного элемента определяется как параметр аппроксимации.

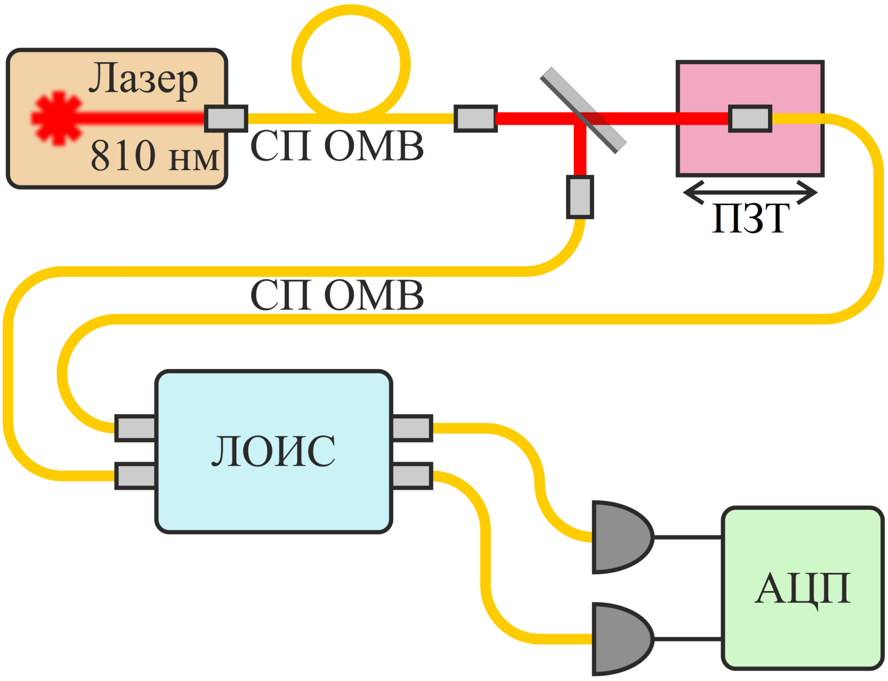

Рисунок 4.6 — Схема стенда по характеризации ЛОИС на основе интерферометрии когерентных состояний. СП ОМВ — поляризационно-сохраняющее одномодовое волокно, ПЗТ — пьезо-транслятор, ЛОИС — линейно-оптическая интегральная схема, АЦП — аналого-цифровой преобразователь

Было произведено 33 измерения значений интенсивности выходных состояний с частотой оцифровки 133 кГц. Рассчитанные 800 значений кросскорреляционной функции $g^{(2)}_{12}(\tau)$ (в одном из 33 измерений) представлены на графике на рисунке 4.5.

Искомая фаза, усреднённая по 33 измерениям, получилась равна $\varphi = 125{,}626^\circ \pm 1{,}792^\circ$, а коэффициент детерминации $R^2 = 0{,}996$.

Второй, реперный способ характеризации ЛОИС основан на использовании когерентных состояний света, описанный в разделе 1.5.3 обзора. Для проведения измерений использовался стенд, схема которого изображена на рисунке 4.6.

Излучение одномодового лазера на длине волны 810 нм, сопряженного с одномодовым оптоволокном, сохраняющим поляризацию, выводится из волокна, разделяется светоделителем на два канала, и затем снова заводится в

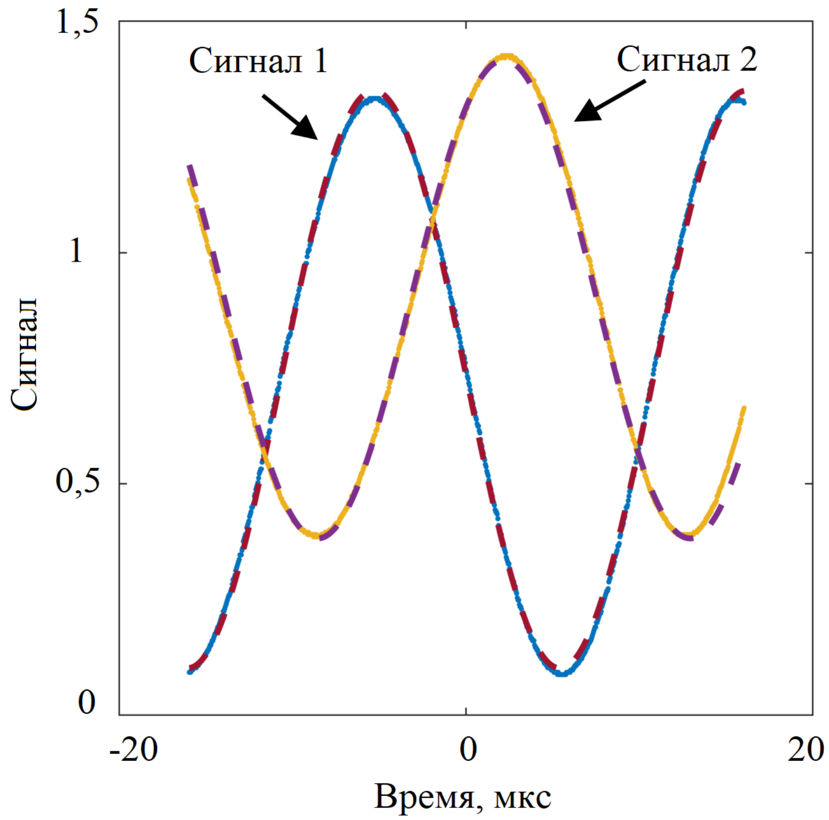

Рисунок 4.7 — Зависимость выходных интенсивностей от времени. Пунктирной кривой показаны результаты эксперимента, а сплошной кривой — результаты аппроксимации по формуле (4.42).

два таких же волокна. При этом входной каплер одного из волокон помещается на прецизионный пьезо-транслятор ПЗТ, позволяющий менять разность фаз между когерентными состояниями в оптических волокнах. Затем оба волокна соединяются со входами исследуемой ЛОИС. Выходы ЛОИС также соединяются с оптическими волокнами, заводящими излучение в фотодетекторы, измеряющие интенсивность, сигнал с которых оцифровывается с помощью АЦП и обрабатывается на компьютере. При линейном сканировании положения пьезо-транслятора зависимости выходных интенсивностей от времени имеют вид синусоид, и аппроксимируются выражениями:

$$I_{1,2}(t) = A_{1,2} + B_{1,2}\cos\left(\omega_{1,2}t - \varphi 1,2\right). \tag{4.42}$$

Искомая фаза матричного элемента определяется как $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.

Результаты зависимости интенсивностей в выходных каналах от времени при линейном сканировании положения пьезо-транслятора представлены на рисунке 4.7. Количество экспериментальных точек 800 в каждом из 33 проведенных измерений.

Искомая фаза, усреднённая по 33 измерениям, получилась равна $\varphi = 125{,}830^\circ \pm 0{,}792^\circ$, а коэффициенты детерминации $R_1^2 = 0{,}9991$ и $R_2^2 = 0{,}9982$.

Как можно видеть, результаты измерения фазы разными методами хорошо совпали и укладываются в границы погрешностей первого метода. При этом в обоих случаях экспериментальные данные были в хорошем согласии с аппроксимирующими функциями (коэффициенты детерминации: $> 0{,}996$), что говорит о том, что оба метода можно использовать для характеризации ЛОИС.

4.5 Выводы по главе 4

Разработан новый метод статистического восстановления параметров многоканальных линейно-оптических схем на основе измеренных корреляционных функций выходных тепловых полей. Изначально метод апробирован в серии из 1000 численных экспериментов, с объемом выборки от 10^3 до 10^6 точек, и было показано, что потери точности восстановления обратно пропорциональны объему выборки, и даже в случае, когда шумы детектора составляют 25% от реального сигнала при объеме выборки 10^6, можно гарантировать точность восстановления не хуже 99,9%.

Из-за особенностей экспериментального оборудования для более точной характеризации параметров ЛОИС разработанный метод был улучшен: теперь восстанавливались параметры передаточной матрицы из зависимости кросскорреляционной функции от времени. Результаты физических экспериментов также показали эффективность представленного метода на основе интерферометрии тепловых состояний. Экспериментальные данные с высокой точностью совпали с теоретической аппроксимацией (коэффициент детерминации составил 0,996), а погрешность значения фазы, полученной в результате аппроксимации, была равна $1{,}792^\circ$. В то же время, погрешность фазы, полученной в ходе аппроксимации данных интерферометрии когерентных состояний, составила $0{,}792^\circ$. С другой стороны, флуктуация фаз на волоконных входах и выходах чипах в методе на когерентных состояниях света требует как можно меньшего количества точек при измерении. Тогда как метод на тепловых состояниях требует как можно большего количества точек для компенсации неидеальности экспериментального оборудования.

Таким образом, результаты сравнения показывают, что разработанный метод позволяет проводить характеризацию ЛОИС с высокой точностью и более устойчив по отношению к инструментальным ошибкам по сравнению с другими известными методами.

Заключение

Основные результаты диссертационной работы можно кратко сформулировать следующим образом:

1. Впервые экспериментально продемонстрировано и измерено с высокой точностью семейство тепловых состояний света с отщеплением до 10 фотонов включительно с использованием единственного однофотонного детектора на основе лавинного фотодиода.
2. Впервые экспериментально исследован процесс гауссификации тепловых состояний света с отщеплением произвольного числа фотонов под действием линейных потерь в оптической системе.
3. Впервые экспериментально продемонстрирован эффект условно нелокального действия оператора уничтожения в одной из мод на тепловые состояния света в двухмодовом и многомодовом режимах.
4. Разработана и экспериментально апробирована новая модель, основанная на свертке компаунд-распределения Пуассона и распределения Пойа, для описания статистики фотонов подсистемы многомодовых тепловых состояний света с отщеплением заданного числа фотонов.
5. Разработан и экспериментально апробирован новый метод восстановления параметров передаточной матрицы линейно-оптического многоканального интерферометра на основе корреляционных измерений тепловых полей.

В заключение автор выражает благодарность научному руководителю Юрию Ивановичу Богданову за поддержку, помощь, научное руководство в множественных теоретических изысканиях и в умении применять математические методы при моделировании. Также хочется выразить большую признательность научному консультанту Константину Григорьевичу Катамадзе за его всестороннее участие, сделавшее автора экспериментатором, и постоянные мозговые штурмы, способствующие решению различных научных задач. Отдельную благодарность автор выражает Борису Игоревичу Бантышу, Андрею Юрьевичу Чернявскому, Надежде Алексеевне Борщевской, Анне Викторовне Романовой и другим сотрудникам Центра Квантовых Технологий МГУ им. М. В. Ломоносова под научным руководством Сергея Павловича Кулика за ценные обсуждения и помощь в проведении научных исследований.

Также автор благодарит Российский фонд фундаментальных исследований, Российский научный фонд и УМНИК за финансовую поддержку исследований и благодарит авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

1. Measurement of qubits / D. F. James, P. G. Kwiat, W. J. Munro, A. G. White // Physical Review A. — 2001. — Vol. 64, no. 5. — P. 052312.
2. *Řeháček J.*, *Englert B. G.*, *Kaszlikowski D.* Minimal qubit tomography // Physical Review A. — 2004. — Vol. 70, 5 A. — P. 1—13.
3. Statistical Estimation of the Efficiency of Quantum State Tomography Protocols / Yu. I. Bogdanov, G. Brida, M. Genovese, S. P. Kulik, E. V. Moreva, A. P. Shurupov // Physical Review Letters. — 2010. — Vol. 105, no. 1. — P. 010404.
4. Polarization states of four-dimensional systems based on biphotons / Yu. I. Bogdanov, E. V. Moreva, G. A. Maslennikov, R. F. Galeev, S. S. Straupe, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2006. — Vol. 73, no. 6. — P. 063810.
5. Statistical reconstruction of qutrits / Yu. I. Bogdanov, M. V. Chekhova, L. A. Krivitsky, S. P. Kulik, A. N. Penin, [et al.] // Physical Review A. — 2004. — Vol. 70, no. 4. — P. 042303.
6. *Богданов Ю. И.*, *Кривицкий Л. А.*, *Кулик С. П.* Статистическое восстановление квантовых состояний оптических трехуровневых систем // Письма в ЖЭТФ. – 2003. – Т. 78, № 6. – С. 804—809.
7. Triple photons: a challenge in nonlinear and quantum optics / K. Bencheikh, F. Gravier, J. Douady, A. Levenson, B. Boulanger // Comptes Rendus Physique. — 2007. — Vol. 8, no. 2. — P. 206—220.
8. Three-photon generation by means of third-order spontaneous parametric down-conversion in bulk crystals / N. A. Borshchevskaya, K. G. Katamadze, S. P. Kulik, M. V. Fedorov // Laser Physics Letters. — 2015. — Vol. 12, no. 11. — P. 115404.
9. Quantum Correlations in Optical Angle-Orbital Angular Momentum Variables / J. Leach, B. Jack, J. Romero, A. K. Jha, A. M. Yao, [et al.] // Science. — 2010. — Vol. 329, no. 5992. — P. 662—665.

10. Tomography of the quantum state of photons entangled in high dimensions / M. Agnew, J. Leach, M. McLaren, F. S. Roux, R. W. Boyd // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 6. — P. 062101.

11. Angular Schmidt modes in spontaneous parametric down-conversion / S. S. Straupe, D. P. Ivanov, A. A. Kalinkin, I. B. Bobrov, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2011. — Vol. 83, no. 6. — P. 060302.

12. Versatile shaper-assisted discretization of energy–time entangled photons / B. Bessire, C. Bernhard, T. Feurer, A. Stefanov // New Journal of Physics. — 2014. — Vol. 16, no. 3. — P. 033017.

13. Creating and manipulating entangled optical qubits in the frequency domain / L. Olislager, E. Woodhead, K. Phan Huy, J.-M. Merolla, P. Emplit, S. Massar // Physical Review A. — 2014. — Vol. 89, no. 5. — P. 052323.

14. *Braunstein S.*, *Pati A.* Quantum Information with Continuous Variables / ed. by S. L. Braunstein, A. K. Pati. — 1st. — Dordrecht : Springer Netherlands, 2003.

15. *Leonhardt U.* Measuring the Quantum State of Light. — 1st. — Cambridge University Press, 1997. — P. 208.

16. *Lvovsky A. I.*, *Raymer M. G.* Continuous-variable optical quantum-state tomography // Reviews of Modern Physics. — 2009. — Vol. 81, no. 1. — P. 299—332.

17. *Bogdanov Yu. I.*, *Kulik S. P.* The efficiency of quantum tomography based on photon detection // Laser Physics Letters. — 2013. — Vol. 10, no. 12. — P. 125202.

18. Статистическое восстановление оптических квантовых состояний на основе взаимно дополнительных квадратурных квантовых измерений / Ю. И. Богданов, Г. В. Авосопянц, Л. В. Белинский, К. Г. Катамадзе, С. П. Кулик, В. Ф. Лукичев // ЖЭТФ. — 2016. — Т. 150, № 2. — С. 246—253.

19. Ghost Imaging with Thermal Light: Comparing Entanglement and Classical Correlation / A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, L. A. Lugiato // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 93, no. 9. — P. 093602.

20. High-Resolution Ghost Image and Ghost Diffraction Experiments with Thermal Light / F. Ferri, D. Magatti, A. Gatti, M. Bache, E. Brambilla, L. A. Lugiato // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 94, no. 18. — P. 183602.

21. Two-Photon Imaging with Thermal Light / A. Valencia, G. Scarcelli, M. D'Angelo, Y. Shih // Physical Review Letters. — 2005. — Vol. 94, no. 6. — P. 063601.

22. Gaussian state-based quantum illumination with simple photodetection / H. Yang, W. Roga, J. D. Pritchard, J. Jeffers // Optics Express. — 2021. — Т. 29, № 6. — С. 8199.

23. *Vabre L.*, *Dubois A.*, *Boccara A. C.* Thermal-light full-field optical coherence tomography // Optics Letters. — 2002. — Vol. 27, no. 7. — P. 530.

24. A thermal light source technique for optical coherence tomography / A. Fercher, C. Hitzenberger, M. Sticker, E. Moreno-Barriuso, R. Leitgeb, W. Drexler, H. Sattmann // Optics Communications. — 2000. — Vol. 185, no. 1—3. — P. 57—64.

25. *Ourjoumtsev A.* Generating Optical Schrodinger Kittens for Quantum Information Processing // Science. — 2006. — Vol. 312, no. 5770. — P. 83—86.

26. Generation of a Superposition of Odd Photon Number States for Quantum Information Networks / J. S. Neergaard-Nielsen, B. M. Nielsen, C. Hettich, K. Mølmer, E. S. Polzik // Physical Review Letters. — 2006. — Vol. 97, no. 8. — P. 083604.

27. Probing quantum commutation rules by addition and subtraction of single photons to/from a light field. / V. Parigi, A. Zavatta, M. Kim, M. Bellini // Science. — 2007. — Vol. 317, no. 5846. — P. 1890—1893.

28. *Zavatta A.*, *Viciani S.*, *Bellini M.* Quantum-to-Classical Transition with Single-Photon-Added Coherent States of Light // Science. — 2004. — Vol. 306, no. 5696. — P. 660—662.

29. *Wenger J.*, *Tualle-Brouri R.*, *Grangier P.* Non-Gaussian Statistics from Individual Pulses of Squeezed Light // Physical Review Letters. — 2004. — Vol. 92, no. 15. — P. 153601.

30. Heralded noiseless linear amplification and distillation of entanglement / G. Y. Xiang, T. C. Ralph, A. P. Lund, N. Walk, G. J. Pryde // Nature Photonics. — 2010. — Vol. 4, no. 5. — P. 316—319.

31. Measurement-Induced Strong Kerr Nonlinearity for Weak Quantum States of Light / L. S. Costanzo, A. S. Coelho, N. Biagi, J. Fiurášek, M. Bellini, A. Zavatta // Physical Review Letters. — 2017. — Vol. 119, no. 1. — P. 013601.

32. Quantum vampire: collapse-free action at a distance by the photon annihilation operator / I. A. Fedorov, A. E. Ulanov, Yu. V. Kurochkin, A. I. Lvovsky // Optica. — 2015. — Vol. 2, no. 2. — P. 112.

33. Photonic Maxwell's Demon / M. D. Vidrighin, O. Dahlsten, M. Barbieri, M. S. Kim, V. Vedral, I. A. Walmsley // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 116, no. 5. — P. 050401.

34. *Hloušek J.*, *Ježek M.*, *Filip R.* Work and information from thermal states after subtraction of energy quanta // Scientific Reports. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 13046.

35. Enhanced Thermal Images of Faint Objects via Photon Addition / Subtraction / C. G. Parazzoli, B. A. Capron, B. Koltenbah, D. Gerwe, P. Idell, J. Dowling, C. Gerry, R. W. Boyd // Conference on Lasers and Electro-Optics. — Washington, D.C. : OSA, 2016. — FTu3C.4.

36. Quantum-enhanced interferometry with weak thermal light / S. M. Hashemi Rafsanjani, M. Mirhosseini, O. S. Magaña-Loaiza, B. T. Gard, R. Birrittella, [et al.] // Optica. — 2017. — Vol. 4, no. 4. — P. 487.

37. Hybrid discrete- and continuous-variable quantum information / U. L. Andersen, J. S. Neergaard-Nielsen, P. van Loock, A. Furusawa // Nature Physics. — 2015. — Vol. 11, no. 9. — P. 713—719.

38. Non-Gaussian quantum states of a multimode light field / Y.-S. Ra, A. Dufour, M. Walschaers, C. Jacquard, T. Michel, C. Fabre, N. Treps // Nature Physics. — 2020. — Vol. 16, no. 2. — P. 144—147.

39. Tomography of a Mode-Tunable Coherent Single-Photon Subtractor / Y.-S. Ra, C. Jacquard, A. Dufour, C. Fabre, N. Treps // Physical Review X. — 2017. — Vol. 7, no. 3. — P. 031012.

40. Integrated photonic platform for quantum information with continuous variables / F. Lenzini, J. Janousek, O. Thearle, M. Villa, B. Haylock, [et al.] // Science Advances. — 2018. — Vol. 4, no. 12. — eaat9331.

41. Linear programmable nanophotonic processors / N. C. Harris, J. Carolan, D. Bunandar, M. Prabhu, M. Hochberg, [et al.] // Optica. — 2018. — Vol. 5, no. 12. — P. 1623.

42. Universal linear optics / J. Carolan, C. Harrold, C. Sparrow, E. Martin-Lopez, N. J. Russell, [et al.] // Science. — 2015. — Vol. 349, no. 6249. — P. 711—716.

43. Integrated multimode interferometers with arbitrary designs for photonic boson sampling / A. Crespi, R. Osellame, R. Ramponi, D. J. Brod, E. F. Galvão, [et al.] // Nature Photonics. — 2013. — Vol. 7, no. 7. — P. 545—549.

44. Experimental boson sampling / M. Tillmann, B. Dakić, R. Heilmann, S. Nolte, A. Szameit, P. Walther // Nature Photonics. — 2013. — Vol. 7, no. 7. — P. 540—544.

45. *Lund A. P.*, *Rahimi-Keshari S.*, *Ralph T. C.* Exact boson sampling using Gaussian continuous-variable measurements // Physical Review A. — 2017. — Vol. 96, no. 2. — P. 022301.

46. Training of photonic neural networks through in situ backpropagation and gradient measurement / T. W. Hughes, M. Minkov, Y. Shi, S. Fan // Optica. — 2018. — Vol. 5, no. 7. — P. 864.

47. Deep learning with coherent nanophotonic circuits / Y. Shen, N. C. Harris, S. Skirlo, M. Prabhu, T. Baehr-Jones, [et al.] // Nature Photonics. — 2017. — Vol. 11, no. 7. — P. 441—446.

48. Path-polarization hyperentangled and cluster states of photons on a chip / M. A. Ciampini, A. Orieux, S. Paesani, F. Sciarrino, G. Corrielli, [et al.] // Light: Science & Applications. — 2016. — Vol. 5, no. 4. — e16064—e16064.

49. *Politi A.*, *Matthews J. C. F.*, *O'Brien J. L.* Shor's Quantum Factoring Algorithm on a Photonic Chip // Science. — 2009. — Vol. 325, no. 5945. — P. 1221—1221.

50. Chip-based array of near-identical, pure, heralded single-photon sources / J. B. Spring, P. L. Mennea, B. J. Metcalf, P. C. Humphreys, J. C. Gates, [et al.] // Optica. — 2017. — Vol. 4, no. 1. — P. 90.

51. Multidimensional quantum entanglement with large-scale integrated optics / J. Wang, S. Paesani, Y. Ding, R. Santagati, P. Skrzypczyk, [et al.] // Science. — 2018. — Vol. 360, no. 6386. — P. 285—291.

52. Generation and sampling of quantum states of light in a silicon chip / S. Paesani, Y. Ding, R. Santagati, L. Chakhmakhchyan, C. Vigliar, [et al.] // Nature Physics. — 2019. — Vol. 15, no. 9. — P. 925—929.

53. Large-scale integration of artificial atoms in hybrid photonic circuits / N. H. Wan, T.-J. Lu, K. C. Chen, M. P. Walsh, M. E. Trusheim, [et al.] // Nature. — 2020. — Vol. 583, no. 7815. — P. 226—231.

54. Quantum computational advantage using photons / H. S. Zhong, H. Wang, Y. H. Deng, M. C. Chen, L. C. Peng, [et al.] // Science. — 2021. — Vol. 370, no. 6523. — P. 1460—1463.

55. *Popova A. S.*, *Rubtsov A. N.* Cracking the Quantum Advantage threshold for Gaussian Boson Sampling. — 2021. — arXiv: 2106.01445.

56. Experimental realization of any discrete unitary operator / M. Reck, A. Zeilinger, H. J. Bernstein, P. Bertani // Physical Review Letters. — 1994. — Vol. 73, no. 1. — P. 58—61.

57. Optimal design for universal multiport interferometers / W. R. Clements, P. C. Humphreys, B. J. Metcalf, W. S. Kolthammer, I. A. Walsmley // Optica. — 2016. — Vol. 3, no. 12. — P. 1460.

58. *Fldzhyan S. A.*, *Saygin M. Y.*, *Kulik S. P.* Optimal design of error-tolerant reprogrammable multiport interferometers // Optics Letters. — 2020. — Vol. 45, no. 9. — P. 2632.

59. Robust Architecture for Programmable Universal Unitaries / M. Y. Saygin, I. V. Kondratyev, I. V. Dyakonov, S. A. Mironov, S. S. Straupe, S. P. Kulik // Physical Review Letters. — 2020. — Vol. 124, no. 1. — P. 010501.

60. Direct characterization of linear-optical networks / S. Rahimi-Keshari, M. A. Broome, R. Fickler, A. Fedrizzi, T. C. Ralph, A. G. White // Optics Express. — 2013. — Vol. 21, no. 11. — P. 13450.

61. *Laing A.*, *O'Brien J. L.* Super-stable tomography of any linear optical device. — 2012. — arXiv: 1208.2868.

62. *Tillmann M.*, *Schmidt C.*, *Walther P.* On unitary reconstruction of linear optical networks // Journal of Optics. — 2016. — Vol. 18, no. 11. — P. 114002.

63. Learning an unknown transformation via a genetic approach / N. Spagnolo, E. Maiorino, C. Vitelli, M. Bentivegna, A. Crespi, [et al.] // Scientific Reports. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 14316.

64. Quantum process tomography with coherent states / S. Rahimi-Keshari, A. Scherer, A. Mann, A. T. Rezakhani, A. I. Lvovsky, B. C. Sanders // New Journal of Physics. — 2011. — Vol. 13, no. 1. — P. 013006.

65. *Anis A.*, *Lvovsky A. I.* Maximum-likelihood coherent-state quantum process tomography // New Journal of Physics. — 2012. — Vol. 14, no. 10. — P. 105021.

66. Tomography of a multimode quantum black box / I. A. Fedorov, A. K. Fedorov, Yu. V. Kurochkin, A. I. Lvovsky // New Journal of Physics. — 2015. — Vol. 17, no. 4. — P. 043063.

67. *Gerry C. C.*, *Knight P.* Introductory Quantum Optics. — 2004. — C. 332.

68. *Fox M.* Quantum Optics: An Introduction // Quantum optics. — 2006. — T. 67. — C. 441.

69. *Скалли М. О.*, *Зубайри М. С.* Квантовая оптика. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — С. 512.

70. *Girish S. Agarwal*. Quantum optics. — 1st. — Cambridge University Press, 2012. — C. 504.

71. *Schleich W. P.* Quantum Optics in Phase Space. — 1st. — Berlin : John Wiley & Sons, 2011. — P. 716.

72. *Furusawa A.* Quantum States of Light. T. 10. — Tokyo : Springer Japan, 2015. — C. 110. — (Springer Briefs in Mathematical Physics).

73. *Arecchi F. T.*, *Berné A.*, *Bulamacchi P.* High-Order Fluctuations in a Single-Mode Laser Field // Physical Review Letters. — 1966. — Vol. 16, no. 1. — P. 32—35.

74. *Breitenbach G.*, *Schiller S.*, *Mlynek J.* Measurement of the quantum states of squeezed light // Nature. — 1997. — Vol. 387, no. 6632. — P. 471—475.

75. Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: Application to squeezed states and the vacuum / D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani // Physical Review Letters. — 1993. — Vol. 70, no. 9. — P. 1244—1247.

76. *Боровков А.* Теория вероятностей. — Либроком, 2017. — С. 656.

77. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — 1st. — Москва : Мир, 1975. — С. 648.

78. Исследование статистики фотонов с использованием компаунд-распределения Пуассона и квадратурных измерений / Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, К. Г. Катамадзе, Г. В. Авосопянц, В. Ф. Лукичев // Автометрия. — 2016. — Т. 52, № 5. — С. 71—83.

79. Multiphoton subtracted thermal states: Description, preparation, and reconstruction / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, A. A. Kalinkin, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2017. — Vol. 96, no. 6. — P. 063803.

80. Study of higher order correlation functions and photon statistics using multiphoton-subtracted states and quadrature measurements / Yu. I. Bogdanov, K. G. Katamadze, G. V. Avosopyants, L. V. Belinsky, N. A. Bogdanova, S. P. Kulik, V. F. Lukichev // The International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2016 / под ред. V. F. Lukichev, K. V. Rudenko. — 2016. — 102242Q.

81. *Vogel K.*, *Risken H.* Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase // Physical Review A. — 1989. — Vol. 40, no. 5. — P. 2847—2849.

82. *Herman G.* Image Reconstruction from Projections: The Fundamentals of Computerized Tomography. — 1st. — Academic Press, 1980. — P. 316.

83. *Dunn T. J.*, *Walmsley I. A.*, *Mukamel S.* Experimental Determination of the Quantum-Mechanical State of a Molecular Vibrational Mode Using Fluorescence Tomography // Physical Review Letters. — 1995. — Vol. 74, no. 6. — P. 884—887.

84. *Lvovsky A. I.*, *Babichev S. A.* Synthesis and tomographic characterization of the displaced Fock state of light // Physical Review A. — 2002. — Vol. 66, no. 1. — P. 011801.

85. *Butucea C.*, *Guţă M.*, *Artiles L.* Minimax and adaptive estimation of the Wigner function in quantum homodyne tomography with noisy data // The Annals of Statistics. — 2007. — Vol. 35, no. 2. — P. 465—494.

86. *D'Ariano G. M.*, *Macchiavello C.*, *Paris M. G. A.* Detection of the density matrix through optical homodyne tomography without filtered back projection // Physical Review A. — 1994. — Vol. 50, no. 5. — P. 4298—4302.

87. Sampling of photon statistics and density matrix using homodyne detection / U. Leonhardt, M. Munroe, T. Kiss, T. Richter, M. Raymer // Optics Communications. — 1996. — Vol. 127, no. 1—3. — P. 144—160.

88. *Fisher R. A.* On an absolute criterion for fitting frequency curves // Massager of Mathematics. — 1912. — Vol. 41. — P. 155—160.

89. Maximum-likelihood estimation of the density matrix / K. Banaszek, G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, M. F. Sacchi // Physical Review A. — 1999. — Vol. 61, no. 1. — P. 010304.

90. Diluted maximum-likelihood algorithm for quantum tomography / J. Řeháček, Z. Hradil, E. Knill, A. I. Lvovsky, J. Reháček, Z. Hradil, E. Knill, A. I. Lvovsky // Physical Review A. — 2007. — Vol. 75, no. 4. — P. 042108.

91. *Breitenbach G.*, *Schiller S.* Homodyne tomography of classical and non-classical light // Journal of Modern Optics. — 1997. — Vol. 44, no. 11/12. — P. 2207—2225.

92. *Rossi A. R.*, *Olivares S.*, *Paris M. G. A.* Photon statistics without counting photons // Physical Review A. — 2004. — Vol. 70, no. 5. — P. 055801.

93. *Lvovsky A. I.* Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography // Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics. — 2004. — Vol. 6, no. 6. — S556—S559.

94. *Богданов Ю. И.* Основная задача статистического анализа данных: корневой подход. — 1st. — Москва : МИЭТ, 2002. — С. 96.

95. *Hanbury Brown R.*, *Twiss R. Q.* A Test of a New Type of Stellar Interferometer on Sirius // Nature. — 1956. — Vol. 178, no. 4541. — P. 1046—1048.

96. *Клышко Д.Н.* Когерентный распад фотонов в нелинейной среде // Письма в ЖЭТФ. — 1967. — Т. 6. — С. 490–492.

97. Квантовые шумы в параметрическсх усилителях света / С. Ахманов, В. Фадеев, Р. В. Хохлов, О. Чунаев // Письма в ЖЭТФ. — 1967. — Т. 6, № 4. — С. 575—578.

98. *Harris S. E.*, *Oshman M. K.*, *Byer R. L.* Observation of Tunable Optical Parametric Fluorescence // Physical Review Letters. — 1967. — Май. — Т. 18, № 18. — С. 732—734.

99. Optical imaging by means of two-photon quantum entanglement / T. B. Pittman, Y. H. Shih, D. V. Strekalov, A. V. Sergienko // Physical Review A. — 1995. — Vol. 52, no. 5. — R3429—R3432.

100. *Lloyd S.* Enhanced Sensitivity of Photodetection via Quantum Illumination // Science. — 2008. — Vol. 321, no. 5895. — P. 1463—1465.

101. Experimental Realization of Quantum Illumination / E. D. Lopaeva, I. Ruo Berchera, I. P. Degiovanni, S. Olivares, G. Brida, M. Genovese // Physical Review Letters. — 2013. — Vol. 110, no. 15. — P. 153603.

102. Demonstration of Dispersion-Canceled Quantum-Optical Coherence Tomography / M. B. Nasr, B. E. A. Saleh, A. V. Sergienko, M. C. Teich // Physical Review Letters. — 2003. — Т. 91, № 8. — С. 083601.

103. *Hong C. K.*, *Ou Z. Y.*, *Mandel L.* Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference // Physical Review Letters. — 1987. — Vol. 59, no. 18. — P. 2044—2046.

104. Spatial second-order interference of pseudothermal light in a Hong-Ou-Mandel interferometer / J. Liu, Y. Zhou, W. Wang, R.-f. Liu, K. He, F.-l. Li, Z. Xu // Optics Express. — 2013. — Vol. 21, no. 16. — P. 19209.

105. Schmidt-like coherent mode decomposition and spatial intensity correlations of thermal light / I. B. Bobrov, S. S. Straupe, E. V. Kovlakov, S. P. Kulik // New Journal of Physics. — 2013. — Vol. 15, no. 7. — P. 073016.

106. Superresolving Imaging of Arbitrary One-Dimensional Arrays of Thermal Light Sources Using Multiphoton Interference / A. Classen, F. Waldmann, S. Giebel, R. Schneider, D. Bhatti, T. Mehringer, J. von Zanthier // Physical Review Letters. — 2016. — Vol. 117, no. 25. — P. 253601.

107. *Мандель Л.*, *Вольф Э.* Оптическая когерентность и квантовая оптика. — Пер. с анг. — Москва : Физматлит, 2000. — С. 896.

108. *Martienssen W.*, *Spiller E.* Coherence and Fluctuations in Light Beams // American Journal of Physics. — 1964. — Vol. 32, no. 12. — P. 919.

109. *Arecchi F. T.* Measurement of the Statistical Distribution of Gaussian and Laser Sources // Physical Review Letters. — 1965. — Vol. 15, no. 24. — P. 912—916.

110. *Agarwal G. S.* Negative binomial states of the field-operator representation and production by state reduction in optical processes // Physical Review A. — 1992. — Vol. 45, no. 3. — P. 1787—1792.

111. *Feller W.* An Introduction to Probability Theory and Its Applications. — 3rd. — Wiley, 1968. — P. 524.

112. Subtracting photons from arbitrary light fields: experimental test of coherent state invariance by single-photon annihilation / A. Zavatta, V. Parigi, M. S. Kim, M. Bellini // New Journal of Physics. — 2008. — Vol. 10, no. 12. — P. 123006.

113. Conditional Hybrid Nonclassicality / E. Agudelo, J. Sperling, L. S. Costanzo, M. Bellini, A. Zavatta, W. Vogel // Phys. Rev. Lett. — 2017. — Vol. 119, no. 12. — P. 120403.

114. *Scheel S.* Permanents in linear optical networks. – 2004. – arXiv: 0406127.

115. *Benirschke K.* Francis Galton: Pioneer of Heredity and Biometry // Journal of Heredity. – 2004. – T. 95, № 3. – C. 273–273.

116. *Cerf N. J.*, *Adami C.*, *Kwiat P. G.* Optical simulation of quantum logic // Physical Review A. — 1998. — Vol. 57, no. 3. — R1477—R1480.

117. *Clauser J. F.*, *Dowling J. P.* Factoring integers with Young's N -slit interferometer // Physical Review A. — 1996. — Vol. 53, no. 6. — P. 4587—4590.

118. *Summhammer J.* Factoring and Fourier transformation with a Mach-Zehnder interferometer // Physical Review A. — 1997. — Vol. 56, no. 5. — P. 4324—4326.

119. *Ekert A.* Quantum Interferometers as Quantum Computers // Physica Scripta. — 1998. — Vol. T76, no. 1. — P. 218.

120. Grover's search algorithm: An optical approach / P. G. Kwiat, J. R. Mitchell, P. D. D. Schwindt, A. G. White // Journal of Modern Optics. — 2000. — Vol. 47, no. 2/3. — P. 257—266.

121. *Imoto N.*, *Haus H. A.*, *Yamamoto Y.* Quantum nondemolition measurement of the photon number via the optical Kerr effect // Physical Review A. — 1985. — Vol. 32, no. 4. — P. 2287—2292.

122. *Knill E.*, *Laflamme R.*, *Milburn G. J.* A scheme for efficient quantum computation with linear optics // Nature. — 2001. — Vol. 409, no. 6816. — P. 46—52.

123. *Lloyd S.* Almost Any Quantum Logic Gate is Universal // Physical Review Letters. — 1995. — Vol. 75, no. 2. — P. 346—349.

124. *Browne D. E.*, *Rudolph T.* Resource-Efficient Linear Optical Quantum Computation // Physical Review Letters. — 2005. — Июнь. — Т. 95, № 1. — С. 010501.

125. *Varnava M.*, *Browne D. E.*, *Rudolph T.* How Good Must Single Photon Sources and Detectors Be for Efficient Linear Optical Quantum Computation? // Physical Review Letters. — 2008. — Февр. — Т. 100, № 6. — С. 060502.

126. *Mohseni M.*, *Rezakhani A. T.*, *Lidar D. A.* Quantum-process tomography: Resource analysis of different strategies // Physical Review A. — 2008. — Vol. 77, no. 3. — P. 032322.

127. Multiphoton subtracted thermal states: description, preparation, measurement and utilization / K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, B. I. Bantysh, Yu. I. Bogdanov, S. P. Kulik // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2018. Vol. 11022 / ed. by V. F. Lukichev, K. V. Rudenko. — SPIE, 2019. — 110222K.

128. Non-Gaussianity of multiple photon-subtracted thermal states in terms of compound-Poisson photon number distribution parameters: theory and experiment / G. V. Avosopiants, K. G. Katamadze, Y. I. Bogdanov, B. I. Bantysh, S. P. Kulik // Laser Physics Letters. — 2018. — Vol. 15, no. 7. — P. 075205.

129. How quantum is the “quantum vampire” effect?: testing with thermal light / K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, Yu. I. Bogdanov, S. P. Kulik // Optica. — 2018. — Vol. 5, no. 6. — P. 723.

130. Direct test of the “quantum vampire’s” shadow absence with use of thermal light / K. G. Katamadze, E. V. Kovlakov, G. V. Avosopiants, S. P. Kulik // Optics Letters. — 2019. — Vol. 44, no. 13. — P. 3286.

131. Multimode thermal states with multiphoton subtraction: Study of the photon-number distribution in the selected subsystem / K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, N. A. Bogdanova, Yu. I. Bogdanov, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2020. — Vol. 101, no. 1. — P. 013811.

132. *Vourdas A.*, *Weiner R. M.* Photon-counting distribution in squeezed states // Physical Review A. — 1987. — Vol. 36, no. 12. — P. 5866—5869.

133. *Milburn G. J.*, *Walls D. F.* Effect of dissipation on interference in phase space // Physical Review A. — 1988. — Vol. 38, no. 2. — P. 1087—1090.

134. Destruction of photocount oscillations by thermal noise / Z. H. Musslimani, S. L. Braunstein, A. Mann, M. Revzen // Physical Review A. — 1995. — Vol. 51, no. 6. — P. 4967—4973.

135. Finite-time quantum-to-classical transition for a Schrödinger-cat state / J. Paavola, M. J. W. Hall, M. G. A. Paris, S. Maniscalco // Physical Review A. — 2011. — Vol. 84, no. 1. — P. 012121.

136. *Heinz-Peter Breuer F. P.* The Theory of Open Quantum Systems. — 1st. — Oxford University Press, 2007. — P. 656.

137. *Dodonov V.* Loss of nonclassical properties of quantum states in linear phase-insensitive processes with arbitrary time-dependent parameters // Physics Letters A. — 2009. — Vol. 373, no. 31. — P. 2646—2651.

138. *Marian P.*, *Ghiu I.*, *Marian T. A.* Gaussification through decoherence // Physical Review A. — 2013. — Vol. 88, no. 1. — P. 012316.

139. *Ghiu I.*, *Marian P.*, *Marian T. A.* Loss of non-Gaussianity for damped photon-subtracted thermal states // Physica Scripta. — 2014. — Vol. T160. — P. 014014.

140. *Genoni M. G.*, *Paris M. G. A.*, *Banaszek K.* Measure of the non-Gaussian character of a quantum state // Physical Review A. — 2007. — Vol. 76, no. 4. — P. 042327.

141. *Genoni M. G.*, *Paris M. G. A.*, *Banaszek K.* Quantifying the non-Gaussian character of a quantum state by quantum relative entropy // Physical Review A. — 2008. — Vol. 78, no. 6. — P. 060303.

142. *Genoni M. G.*, *Paris M. G. A.* Non-gaussianity and purity in finite dimension // International Journal of Quantum Information. — 2009. — Vol. 07, supp01. — P. 97—103.

143. *Genoni M. G.*, *Paris M. G. A.* Quantifying non-Gaussianity for quantum information // Physical Review A. — 2010. — Vol. 82, no. 5. — P. 052341.

144. *Ghiu I.*, *Marian P.*, *Marian T. A.* Measures of non-Gaussianity for one-mode field states // Physica Scripta. — 2013. — Vol. T153. — P. 014028.

145. *Uhlmann A.* The “transition probability” in the state space of a -algebra // Reports on Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 9, no. 2. — P. 273—279.

146. *Uhlmann A.* Fidelity and concurrence of conjugated states // Physical Review A. — 2000. — Vol. 62, no. 3. — P. 032307.

147. *Borovkov A.* Mathematical statistics. — 1st. — New York : Gordon, Breach, 1998. — P. 570.

148. Phase-only liquid crystal spatial light modulator for wavefront correction with high precision / L. Hu, L. Xuan, Y. Liu, Z. Cao, D. Li, Q. Mu // Optics Express. — 2004. — Vol. 12, no. 26. — P. 6403.

149. Single-pixel imaging via compressive sampling / M. F. Duarte, M. A. Davenport, D. Takhar, J. N. Laska, T. Sun, K. F. Kelly, R. G. Baraniuk // IEEE Signal Processing Magazine. — 2008. — Vol. 25, no. 2. — P. 83—91.

150. Гиперпуассоновская статистика фотонов / Ю. И. Богданов, Н. А. Богданова, К. Г. Катамадзе, Г. В. Авосопянц, В. Ф. Лукичев // Письма в ЖЭТФ. — 2020. – Т. 111, 9—10(5). – С. 646–652.

151. Statistical parameter estimation of multimode multiphoton-subtracted thermal states of light / G. V. Avosopiants, B. I. Bantysh, K. G. Katamadze, N. A. Bogdanova, Yu. I. Bogdanov, S. P. Kulik // Physical Review A. — 2021. – Т. 104, № 1. – С. 013710.

152. Theoretical and experimental study of multi-mode thermal states with subtraction of a random number of photons / G. V. Avosopiants, Yu. I. Bogdanov, N. A. Bogdanova, K. G. Katamadze, S. P. Kulik // International Conference on Micro- and Nano-Electronics 2018 / ed. by V. F. Lukichev, K. V. Rudenko. — SPIE, 2019. — P. 49.

153. *Landau L.*, *Lifshitz E.* Statistical Physics. Part 1. — 1st. — Pergamon Press, 1959. — P. 484.

154. *Bogdanov Yu. I. .*, *Bogdanova N. A.*, *Dshkhunyan V. L.* Statistical Yield Modeling for IC Manufacture: Hierarchical Fault Distributions // Russian Microelectronics. — 2003. — Vol. 32, no. 1. — P. 51—62.

155. *Johnson N.*, *Kotz L.* Urn Models and Their Application: An Approach to Modern Discrete Probability Theory. — 1rd. — Wiley, 1977. — P. 402.

156. *Fisher R. A.* The fiducial argument in statistical inference // Annals of Eugenics. — 1935. — Vol. 6, no. 4. — P. 391—398.

157. *Cox D. R.* Principles of Statistical Inference. — 1st. — Cambridge : Cambridge University Press, 2006. — P. 236.

158. Bayesian Data Analysis / A. Gelman, J. Carlin, H. Stern, D. Dunson, A. Vehtari, D. Rubin. — 3rd. — Chapman, Hall/CRC Press, 2013. — P. 675.

159. Linear optical circuits characterization by means of thermal field correlation measurement / K. G. Katamadze, G. V. Avosopiants, A. V. Romanova, Yu. I. Bogdanov, S. P. Kulik // Laser Physics Letters. — 2021. — Vol. 18, no. 7. — P. 075201.

Список рисунков

Список таблиц