

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Институт физики твердого тела

На правах рукописи

Гаврилов Сергей Сергеевич

ДИНАМИЧЕСКАЯ САМООРГАНИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ
КВАЗИДВУМЕРНЫХ ЭКСИТОННЫХ ПОЛЯРИТОНОВ
В УСЛОВИЯХ РЕЗОНАНСНОГО ФОТОВОЗБУЖДЕНИЯ

специальность 01.04.07 – физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н. проф. В. Д. Кулаковский

Черноголовка, 2008 г.

Содержание

Введение	4
1 Обзор литературы	9
1.1 Экситонные поляритоны	9
1.1.1 Экситонные состояния в полупроводниковых средах	9
1.1.2 Экситон-фотонное взаимодействие	10
1.1.3 Экситонные поляритоны в планарном микрорезонаторе	12
1.2 Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние	17
1.2.1 Экситон-экситонное взаимодействие	18
1.2.2 Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние в приближении среднего поля. Оптический параметрический осциллятор	19
2 Анализ устойчивости возбуждаемой поляритонной моды	24
2.1 Квазиклассическая модель системы экситонных и фотонных состояний в активном слое планарного резонатора	24
2.2 Сдвиг резонансной энергии и бистабильность отклика возбуждаемой моды поля в активном слое	27
2.3 Перенормировка спектра поляритона. Анализ устойчивости относительно рассеяния	31
2.4 Взаимовлияние бистабильности и параметрической неустойчивости. Жесткое возбуждение поляритон-поляритонного рассеяния	34
2.5 Выводы и общие замечания о результатах второй главы	46
3 Динамическая самоорганизация системы взаимодействующих поляритонов	50
3.1 Численный анализ эволюции системы поляритонов (общие замечания)	50
3.2 Эволюция после прохождения порога неустойчивости: формирование сигнала рассеяния ($\mathbf{k}_s \approx 0$)	52
3.3 Коллективные эффекты рассеяния	59
3.4 Пороговая трансформация распределения сигнала рассеяния: результаты эксперимента. Гистерезис сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой поляритонной моды	64
3.5 Выводы и общие замечания о результатах третьей главы	72
4 Стимулированное рассеяние в условиях взаимодействия оптических ($\sigma^\pm$) компонент поля экситонной поляризации	75
4.1 Квазиклассическая модель экситон-фотонной системы в микрорезонаторе, учитывающая оптическую поляризацию	75

4.2	Мультистабильность отклика возбуждаемой моды поля в активном слое	79
4.3	Стимулированное рассеяние в общем случае произвольно поляризованной накачки. Эффект инверсии линейной поляризации	90
4.4	Выводы и общие замечания о результатах четвертой главы	94
Заключение		97
Список публикаций		99
Литература		100

Введение

Физические закономерности взаимодействия света и вещества рассматривались на протяжении всей истории естествознания. Однако бурное развитие микро- и нанотехнологии в конце XX века позволило контролируемым образом создавать объекты с размерами меньше длины волны света, что обнаружило новые аспекты этой проблемы. Были открыты квазичастицы (элементарные возбуждения), представляющие собой связанные состояния света и вещества. Один из самых интересных примеров такого рода — квазидвумерные экситонные поляритоны, возникающие в активном слое планарного полупроводникового микрорезонатора за счет *сильной связи* экситона (электрон-дырочной пары) и резонаторной фотонной моды [1].

Квазидвумерные поляритоны характеризуются чрезвычайно малой эффективной массой ($10^{-4} \div 10^{-5}$ массы электрона в вакууме) и обладают уникальной дисперсией $E_{LP}(k)$, имеющей точку перегиба в области световых квазиимпульсов (индекс ‘LP’ указывает *нижнюю* ветвь поляритонной дисперсии, совпадающую с дисперсией экситона при больших k). Система поляритонов в микрорезонаторе обнаруживает свойства слабонеидеального квазидвумерного бозе-газа; обменное взаимодействие электронов, составляющих экситонные состояния (композитные бозоны), приводит к поляритон-поляритонному рассеянию. Представляя характерный пример *открытой диссипативной системы с нелинейным взаимодействием*, система квазидвумерных поляритонов обнаруживает примечательные коллективные свойства, теоретическому исследованию которых и посвящена данная диссертация.

Актуальность темы. Ключевой эффект, анализу которого будет уделено большое внимание, наблюдается экспериментально в условиях резонансного оптического возбуждения системы квазидвумерных поляритонов. В 2000 г. было обнаружено, что возбуждение в окрестности точки перегиба дисперсии $E_{LP}(k)$ с положительной расстройкой энергии относительно резонанса [$E_p > E_{LP}(k_p)$] приводит к пороговому усилению моды $k \approx 0$, в результате чего появляется *гигантский сигнал* люминесценции резонатора в направлении нормали к поверхности [2, 3]. Последующие эксперименты показали, что с увеличением плотности накачки на несколько процентов (вблизи порога) сигнал в направлении $\sin \theta = \hbar ck/E_p \approx 0$ относительно нормали возрастает на несколько порядков [4, 5, 6].

Начиная со времени первых экспериментов, о которых сказано выше, процессы перераспределения возбуждения в системе поляритонов вызывают неослабевающий интерес. В теоретических работах была предложена модель *параметрического рассеяния* фотовозбужденных поляритонов из состояния $(\mathbf{k}_p, E_p)$ в состояния $(\mathbf{k}_s, E_s)$ и $(\mathbf{k}_i, E_i)$, получившие названия “сигнала” и “холостого сигнала” (*англ.* “idler”), соответственно, с сохранением энергии и планарного квазиимпульса: $\mathbf{k}_s + \mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p$, $E_s + E_i = 2E_p$. В том случае, когда накачка фиксирована в окрестности точки перегиба дисперсии

$E_{LP}(\mathbf{k})$, “сигнал” и “холостой сигнал” также находятся на дисперсионной кривой, и потому рассеяние идет намного более интенсивно [7, 8]. Заметим, однако, что законы сохранения предполагают сильную зависимость положения “сигнала” от импульса и частоты возбуждения, не наблюдающуюся в экспериментах.

Очерченная проблема “неравновесной конденсации” поляритонов остается не вполне решенной вплоть до настоящего времени. В частности, не совсем ясны процессы развития неустойчивости, приводящие к появлению выделенного “сигнала” в направлении $\theta = 0$, а также динамика неравновесных переходов, в которых осуществляется критическая трансформация состояния. Настоящая работа посвящена исследованию этих явлений.

Основная цель настоящей работы состоит в исследовании эффектов, приводящих к пороговой трансформации состояния системы квазидвумерных поляритонов в условиях резонансного фотовозбуждения.

Поставлены следующие задачи:

- Исследовать возможные сценарии развития параметрической неустойчивости в системе квазидвумерных поляритонов.
- Проанализировать динамику неравновесного перехода в состояние с выделенным “сигналом” стимулированного рассеяния и определить условия, в которых такой сигнал возникает под действием когерентной накачки.
- Исследовать отклик системы квазидвумерных поляритонов в зависимости от оптической поляризации возбуждения.

Теоретический формализм, в рамках которого решаются поставленные задачи, основан на квазиклассической теории слабонеидеального бозе-газа с кубичной нелинейностью во взаимодействии. Решаются уравнения, аналогичные уравнению Гросса-Питаевского в приближении среднего поля, учитывающие внешнюю накачку и экситон-экситонное взаимодействие в системе большого числа (порядка нескольких тысяч) экситонных и фотонных мод на двумерной сетке планарных квазиимпульсов. Данный подход обусловлен выбором предмета исследования: существенно коллективных эффектов в сильно неравновесной системе взаимодействующих бозонов с макрозаполненными когерентными модами, возникающими под действием когерентной накачки. Таким образом, вопрос об исходном возникновении когерентности нами не рассматривается.

Научная новизна и практическая ценность работы состоит в решении указанных выше задач, в известной мере являющихся ключевыми для понимания свойств нелинейного отклика системы планарных поляритонов в микрорезонаторе.

К защите представлены следующие основные результаты.

1. Построена теоретическая модель динамики квазидвумерных экситонных поляритонов в условиях резонансного когерентного фотовозбуждения, учитывающая процессы упругого экситон-экситонного рассеяния в приближении среднего поля. На примере численного решения уравнений эволюции показано, что процессы перераспределения возбуждения в системе поляритонов приводят к выраженному гистерезису сигнала стимулированного рассеяния в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой моды, в качественном согласии с результатами недавних экспериментов.
2. Исследован процесс развития параметрической неустойчивости в системе квазидвумерных поляритонов. Найдено, что в том случае, когда планарная проекция волнового вектора накачки фиксирована вблизи точки перегиба нижней поляритонной ветви, а частота превышает собственную частоту поляритона, в системе пороговым образом возникает многомодовая неустойчивость. Именно, сколь угодно плавный рост интенсивности накачки вблизи порога приводит к скачку интенсивности возбуждаемой поляритонной моды и быстрому заполнению множества мод в конечной двумерной области k -пространства (*жесткое возбуждение стимулированного рассеяния*).
3. Найдено, что в случае жесткого возбуждения стимулированного рассеяния становятся существенными коллективные эффекты, приводящие к появлению выделенного сигнала в направлении нормали к поверхности ($\mathbf{k}_s \approx 0$). Квазистационарное распределение интенсивности поля в активном слое резонатора обнаруживает резкие максимумы в направлениях $\mathbf{k}_s \approx 0$ (сигнал), $\mathbf{k}_p$ (накачка) и $2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s \approx 2\mathbf{k}_p$ (холостой сигнал), в хорошем качественном согласии с результатами экспериментов. Переход к такому состоянию сопровождается значительным спектральным сужением сигнальной моды ($\mathbf{k}_s$) и появлением линейных участков дисперсии в окрестностях $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_p$ и $2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$.
4. Показано, что устойчивость квазистационарного состояния с выделенным сигналом рассеяния ($\mathbf{k}_s$) обусловлена сильными корреляциями в поведении “надконденсатных” мод, имеющих значительно меньшую интенсивность. Таким образом, установлено, что теория, описывающая процесс порогового усиления сигнала в области $\mathbf{k} \approx 0$, а также свойства такого сигнала в квазистационарном режиме, принципиально несводима к моделям типа параметрического осциллятора, учитывающим только три поляритонные моды $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_p$ и $2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$.
5. Исследованы свойства системы квазидвумерных поляритонов в случае произвольной оптической поляризации возбуждения. Найдено, что поляритон-поляритонное взаимодействие приводит к неоднозначности отклика поля в активном слое резонатора; число различающихся решений, определяющих стац-

онарное состояние возбуждаемой моды, зависит от поляризации накачки и в общем случае может достигать четырех. В критических точках, в которых меняется количество и/или устойчивость стационарных решений, сколь угодно плавное изменение параметров накачки может привести к скачку состояния возбуждаемой моды. Проанализированы критические переходы, осуществляющиеся за счет изменения интенсивности и поляризации возбуждения. Показано, что даже малое отклонение поляризации накачки от строго линейной может привести к значительной циркулярной поляризации поля в активном слое.

6. Установлено, что взаимодействие экситонов с противоположными проекциями полного момента ($J_z = \pm 1$) приводит к возможности спонтанного нарушения симметрии $\sigma^\pm$ -компонент поля в активном слое резонатора в условиях строго линейной поляризации когерентной накачки. Диапазон значений интенсивности накачки, в котором наблюдается данный эффект, существенно зависит от частоты возбуждения.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинарах ИФТТ РАН, ФИАН им. П. Н. Лебедева, ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, Физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, рабочих семинарах университетов Клермон-Феррана (Франция) и Шеффилда (Великобритания), а также на международных конференциях: “Physics of Light-Matter Coupling in Nanostructures” (Мардебург, 2006 г., устный доклад), “4th Russian-French Workshop on Nanosciences and Nanotechnologies” (Гренобль, 2007 г., приглашенный доклад).

Публикации. По результатам исследований, представленных в диссертации, опубликовано пять печатных работ.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка публикаций по материалам диссертации и списка литературы.

В первой главе представлен обзор литературы, касающейся свойств квазидвумерных экситонных поляритонов в активном слое полупроводникового микрорезонатора (разд. 1.1), экситон-экситонного взаимодействия (разд. 1.2.1) и стимулированного поляритон-поляритонного рассеяния (разд. 1.2.2).

Во второй главе рассматриваются эффекты, приводящие к параметрическому рассеянию квазидвумерных поляритонов под действием когерентной накачки с положительной расстройкой от резонанса [$E_p > E_{LP}(k_p)$] в области точки перегиба дисперсионной кривой $E_{LP}(k)$. Представлена модель, позволяющая рассчитать динамику системы когерентных экситонных и фотонных мод (разд. 2.1). Показано, что с увеличением плотности возбуждения в системе возникают два типа неустойчивости: *одномодовая неустойчивость* (разд. 2.2), приводящая к характерной для нелинейного осциллятора бистабильности отклика возбуждаемой моды k_p , и *неустойчивость относительно*

параметрического рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ (разд. 2.3). В разд. 2.4 установлено, что взаимное влияние бистабильности и параметрической неустойчивости приводит к жесткому возбуждению стимулированного рассеяния — взрывообразному усилению множества поляритонных мод, происходящему пороговым образом.

В третьей главе рассматривается динамика экситонных поляритонов в ситуации жесткого возбуждения рассеяния. В разд. 3.1 описан подход к анализу нерегулярной динамики средствами численного моделирования. Раздел 3.2 содержит исследование эволюции системы выше порога рассеяния; показано, что усиление множества рассеянных мод, происходящее в фазе острого развития неустойчивости, со временем приводит к выделению некоторой сигнальной гармоники (“конденсатной моды”) в области дна нижней поляритонной ветви. В разд. 3.3 показано, что такое состояние системы является существенно коллективным и что его устойчивость поддерживается за счет сильных корреляций в поведении взаимодействующих “надконденсатных” гармоник. В разд. 3.4 проанализированы результаты недавних экспериментов и, в частности, рассмотрен эффект гистерезиса сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой поляритонной моды.

В четвертой главе представлено обобщение модели, исследованной в предыдущих главах, на случай произвольно поляризованной накачки, когда падающая волна возбуждает экситоны с различными значениями проекции полного момента $J_z = -1, +1$ (разд. 4.1). Рассматривается задача о стационарном отклике возбуждаемой моды поля в активном слое планарного резонатора (разд. 4.2); обсуждается эффект мультистабильности отклика, а также возможность неравновесных переходов, в которых осуществляются резкие изменения как амплитуды, так и состояния поляризации поля в активном слое. В разд. 4.3 рассматривается пороговая трансформация распределения поля в случае линейно поляризованной накачки и обсуждается эффект инверсии линейной поляризации в процессе параметрического рассеяния.

Разделы 2.5, 3.5 и 4.4 содержат выводы по соответствующим главам и обсуждение результатов, полученных в данной работе, в контексте предшествующих исследований.

В Заключение представлены общие результаты выполненной работы.

1 Обзор литературы

1.1 Экситонные поляритоны

1.1.1 Экситонные состояния в полупроводниковых средах

Экситоны в полупроводниковых средах [9] представляют собой связанные состояния электрон-дырочных пар, рассматриваемые как элементарные возбуждения [10, 11]. Вакуумное, в этом смысле, состояние системы соответствует такому распределению электронов, когда валентная зона кристалла является полностью занятой, а зона проводимости — пустой; характерное значение ширины энергетической щели E_g имеет порядок электронвольта. Переход валентного электрона в зону проводимости рассматривается как рождение пары разноименно заряженных электрона (e) и дырки (h), связанных кулоновским взаимодействием¹

$$U(\mathbf{x}_e, \mathbf{x}_h) = -\frac{e^2}{\varepsilon |\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_h|}$$

Такая двухчастичная система аналогична атому водорода. В частности, энергия носительного движения электрона и дырки принимает дискретные значения

$$E_{b,n} = -\frac{R}{n^2} = -\frac{\hbar^2}{2ma_B^2 n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1)$$

где $m = m_e m_h / (m_e + m_h)$ — приведенная масса, а R и $a_B = \varepsilon \hbar^2 / m e^2$ — соответственно “ридберг” и “боровский радиус” связанного состояния. Полная энергия экситона включает кинетическую энергию свободного движения центра масс электрон-дырочной пары:

$$E_x(\mathbf{k}, n) = E_g + E_{b,n} + \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2(m_e + m_h)}. \quad (2)$$

Система экситонных состояний подчинена статистике Бозе [10] в пределе бесконечно малой концентрации

$$a_B^3 N/V \rightarrow 0. \quad (3)$$

¹Сделанные предположения состоят в следующем: а) состояния внешних оболочек кристалла имеют вид $u_{\mathbf{k},j}(\mathbf{x})e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$, где $u_{\mathbf{k},j}$ — функции Блоха в энергетической зоне j , инвариантные относительно трансляции на вектор обратной ячейки; б) состояния электрона и дырки — образующих *двухчастичную* систему — принадлежат, соответственно, дну зоны проводимости и потолку валентной зоны и характеризуются эффективными массами $m_{e,h}$; в) факторы $e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ для электрона и дырки, а также кулоновский потенциал $U(|\mathbf{x}_e - \mathbf{x}_h|)$ достаточно медленно меняются на масштабе элементарной ячейки. Рассматриваются стационарные состояния электрон-дырочной пары.

В этом случае гамильтониан системы элементарных возбуждений выражается через экситонные операторы b и $b^\dagger$, удовлетворяющие бозевским правилам коммутации:

$$H_x = \sum_{\mathbf{k}} E_x(\mathbf{k}) \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (4)$$

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] \equiv b_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}'}^\dagger - b_{\mathbf{k}'}^\dagger b_{\mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \quad (5)$$

для $n = 1$.

Однако в общем случае экситоны не могут рассматриваться как бесструктурные бозе-частицы [12]. Если $a_B^3 N/V \ll 1$, матричный элемент отклонения коммутатора (5) от $\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ имеет порядок $a_B^3 N/V$. В этом можно убедиться, записав явное выражение оператора $b^\dagger$ в виде суперпозиции фермионных операторов $d_e^\dagger$, $d_h^\dagger$ рождения электрона и дырки,

$$b_{\mathbf{k}}^\dagger = \sum_{\mathbf{q}} \varphi(\mathbf{q}) d_{e, \mathbf{k}/2 + \mathbf{q}}^\dagger d_{h, \mathbf{k}/2 - \mathbf{q}}^\dagger, \quad (6)$$

где $\mathbf{q}$ — квазиволновой вектор относительного движения и

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{8\sqrt{\pi}a_B^{3/2}}{[1 + (a_B \mathbf{q})^2]^2} \quad (7)$$

— нормированная волновая функция основного ($1s$) экситонного состояния. Действительно, если

$$d_{i, \mathbf{k}} d_{i, \mathbf{k}'}^\dagger + d_{i, \mathbf{k}'}^\dagger d_{i, \mathbf{k}} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad i = e, h, \quad (8)$$

то

$$[b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} - \sum_{\mathbf{q}} \varphi\left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}}{2}\right) \varphi\left(\mathbf{q} + \frac{\mathbf{k}'}{2}\right) \left(d_{e, \mathbf{q} + \mathbf{k}}^\dagger d_{e, \mathbf{q} + \mathbf{k}'} + d_{h, \mathbf{q} + \mathbf{k}}^\dagger d_{h, \mathbf{q} + \mathbf{k}'} \right), \quad (9)$$

и

$$\left\langle \Phi_N \left| [b_{\mathbf{k}}, b_{\mathbf{k}'}^\dagger] - \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \right| \Phi_N \right\rangle \sim \frac{a_B^3 N}{V}, \quad (10)$$

где Φ_N — нормированная функция состояния системы, содержащей N экситонов.

1.1.2 Экситон-фотонное взаимодействие

Экситонные поляритоны (смешанные экситон-фотонные состояния) в объемном полупроводнике были впервые рассмотрены Дж. Хопфилдом [13]. Взаимодействие экситона, в рамках предположения (3) являющегося композитным бозоном, и фотонной моды вводится как линейная связь гармонических осцилляторов. Несколько упрощенный гамильтониан экситон-фотонной системы может быть записан в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{ph, \mathbf{k}} \left(a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{x, \mathbf{k}} \left(b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right) + \sum_{\mathbf{k}} \hbar g_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}). \quad (11)$$

Здесь $a_{\mathbf{k}}$ и $b_{\mathbf{k}}$ — операторы уничтожения, а $\omega_{ph, \mathbf{k}}$ и $\omega_{x, \mathbf{k}}$ — собственные частоты фотонной и экситонной мод (предполагается, что их состояния поляризации совпадают

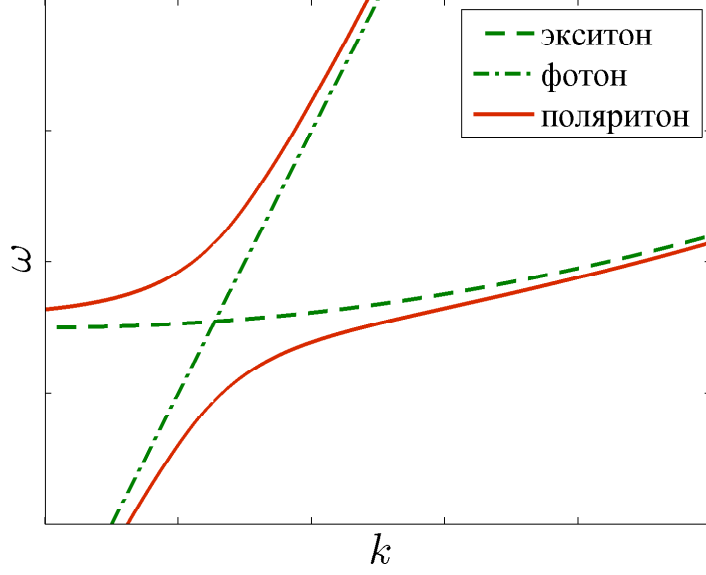


Рис. 1. Дисперсия $\omega(k)$ состояний экситона, фотона и поляритона в объемном полупроводниковом кристалле (схематически).

для всех $\mathbf{k}$, и соответствующие индексы опущены), $g_{\mathbf{k}}$ — константы связи. Уравнения Гейзенберга

$$\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, a_{\mathbf{k}}], \quad \frac{db_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H, b_{\mathbf{k}}], \quad (12)$$

записанные для системы с гамильтонианом (11), имеют вид

$$i\frac{da_{\mathbf{k}}}{dt} = \omega_{\text{ph},\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}}, \quad i\frac{db_{\mathbf{k}}}{dt} = \omega_{\text{x},\mathbf{k}}b_{\mathbf{k}} + g_{\mathbf{k}}a_{\mathbf{k}}. \quad (13)$$

Собственные частоты $\tilde{\omega}$ поляритонных состояний удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} \omega_{\text{ph},\mathbf{k}} - \tilde{\omega} & g_{\mathbf{k}} \\ g_{\mathbf{k}} & \omega_{\text{x},\mathbf{k}} - \tilde{\omega} \end{vmatrix} = 0, \quad (14)$$

откуда

$$\tilde{\omega}_{\text{LP,UP}}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}) + \omega_{\text{x}}(\mathbf{k})}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{[\omega_{\text{ph}}(\mathbf{k}) - \omega_{\text{x}}(\mathbf{k})]^2 + 4[g(\mathbf{k})]^2}; \quad (15)$$

индексы “LP” и “UP” обозначают, соответственно, “нижнюю” и “верхнюю” ветви дисперсии. На рис. 1 показана дисперсия поляритонных состояний в объемном изотропном кристалле (предполагая $\omega_{\text{ph}}(k) = c|\mathbf{k}|/\sqrt{\varepsilon\mu}$ и $\omega_{\text{x}}(k) = \text{const} + \hbar k^2/2m$).

Отметим, что, согласно (2), “объемный” (3D) экситон характеризуется определенными значениями компонент квазиволнового вектора $\mathbf{k}$, которые сохраняются в процессах превращения экситона в фотон и обратно,

$$|1 \text{ exc.}, 0 \text{ ph.}\rangle \rightarrow |0 \text{ exc.}, 1 \text{ ph.}\rangle \rightarrow |1 \text{ exc.}, 0 \text{ ph.}\rangle \rightarrow \dots$$

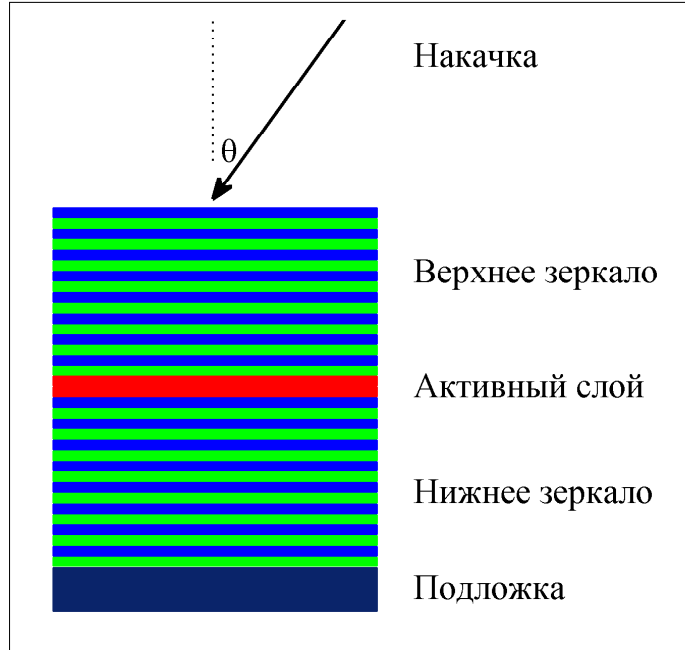


Рис. 2. Структура полупроводникового микрорезонатора (схематически). Верхнее и нижнее зеркала образованы, соответственно, 17 и 20 парами чередующихся слоев $\text{Al}_{0.13}\text{Ga}_{0.87}\text{As}$ и AlAs , имеющих оптическую толщину, равную $\lambda/4$. Активный слой резонатора образован GaAs с оптической толщиной $3\lambda/2$. В активный слой внедрены 6 квантовых ям $[\text{GaAs}-\text{In}_{0.06}\text{Ga}_{0.94}\text{As}-\text{GaAs}]$ толщиной $L_z \approx a_B \approx 10^{-6}$ см.

Эти процессы обратимы, если пренебречь конечностью размеров и дефектами структуры кристалла. В таком случае экситон-фотонная система является *замкнутой* и характеризуется самосопряженным гамильтонианом (11) — что соответствует бесконечному времени жизни “объемных” поляритонных состояний.

Размерное квантование, отвечающее локализации в активном слое планарного резонатора, меняет характер экситон-фотонного взаимодействия: система *квазидвумерных* экситонных поляритонов является *открытой диссипативной системой*.

1.1.3 Экситонные поляритоны в планарном микрорезонаторе

В настоящей работе рассматривается полупроводниковый резонатор, структура которого (рис. 2; аналогичные структуры подробно описаны в работах [1, 14]) образована двумя брэгговскими зеркалами, состоящими из чередующихся слоев AlAs и $\text{Al}_{0.13}\text{Ga}_{0.87}\text{As}$, и “активного” слоя GaAs , расположенного между ними.

Физические толщины $l_{1,2}$ каждого из слоев, образующих зеркала, определяются

длиной волны λ_0 , на которую настроен резонатор:

$$n_1 l_1 = n_2 l_2 = \frac{\lambda_0}{4}, \quad (16)$$

где $n_{1,2}$ — показатели преломления AlAs и $\text{Al}_{0.13}\text{Ga}_{0.87}\text{As}$, равные 2.95 и 3.65, соответственно. Формула (16) выражает условие синфазности (усиления) волн с длиной λ_0 , отраженных от поверхностей слоев резонатора. В идеальной — строго периодической — структуре такого типа (*фотонном кристалле*) возникает широкая запрещенная зона фотонных состояний [15, 16], которая обнаруживается в спектрах пропускания или отражения. В окрестности λ_0 пропускание брэгговского зеркала экспоненциально уменьшается с ростом числа N слоев AlAs/ $\text{Al}_{0.13}\text{Ga}_{0.87}\text{As}$, и для $N = 10 \div 20$ коэффициент отражения может достигать 99 % [14].

В том случае, когда оптическая толщина $n_{\text{cav}} \cdot l_a$ активного слоя GaAs, расположенного между брэгговскими зеркалами, составляет целое кратное $\lambda_0/2$, в середине запрещенной зоны $[E_0 = \hbar c/\lambda_0]$ появляется *резонаторная мода* — локализованное фотонное состояние [17]. С классической точки зрения, соответствующее распределение электрического поля в направлении нормали $\vec{z}$ к поверхности резонатора образует стоячую волну

$$\mathcal{E}(z, t) = \mathcal{E}_0(z) \exp\left(i \frac{2\pi c}{\lambda_0} t\right), \quad (17)$$

которая имеет максимум интенсивности $|\mathcal{E}_0(z)|^2$ в центре активного слоя. Работа [17] содержит подробный анализ эффекта локализации электромагнитного поля в активном слое (“дефекте” строго периодической структуры) вследствие размерного квантования на масштабах, сравнимых с длиной классической волны.

Таким образом, нормальная компонента k_z квазиволнового вектора резонаторной моды фиксирована условием

$$k_z = \frac{2\pi n_{\text{cav}}}{\lambda_0}. \quad (18)$$

В то же время спектр значений продольных x - и y -компонент остается непрерывным. В области

$$k_{\parallel} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \ll k_z$$

собственная энергия *двумерного фотонного состояния* имеет вид

$$E_c(k_{\parallel}) = \frac{\hbar c}{n_{\text{cav}}} \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \approx \frac{\hbar c k_z}{n_{\text{cav}}} + \frac{\hbar c}{2n_{\text{cav}} k_z} k_{\parallel}^2 = \frac{\hbar c}{\lambda_0} + \frac{\hbar c \lambda_0}{4\pi n_{\text{cav}}^2} k_{\parallel}^2. \quad (19)$$

Следовательно, двумерный (2D) фотон характеризуется эффективной массой

$$m_{\text{cav}} = \frac{\hbar n_{\text{cav}}^2}{c \lambda_0}, \quad (20)$$

которая определяется структурой резонатора. Например, для $n_{\text{cav}} = 3.54$ и $\lambda_0 = 8.52 \cdot 10^{-5}$ см находим $m_{\text{cav}} \approx 3.24 \cdot 10^{-32}$ г, что составляет $\sim 3.6 \cdot 10^{-5}$ масс электрона в вакууме.

Важно, что пропускание брэгговских зеркал резонатора является существенно конечным (ненулевым), что соответствует конечному времени жизни фотона в активном слое.² Для резонатора с добротностью Q время жизни 2D фотона в состоянии с $k_{\parallel} = 0$ составляет

$$\tau_{\text{cav}} = \frac{2\hbar Q}{E_0} = \frac{\lambda_0 Q}{\pi c} \quad (21)$$

(в частности, для $Q = 10^3$ находим $\tau_{\text{cav}} \approx 10^{-12}$ с).

Обратимся к вопросу об экситонных состояниях в активном слое планарного резонатора. Для того чтобы локализовать экситоны, в активный слой помещают квантовые ямы³ шириной $L_z \lesssim 10^{-6}$ см, которая сравнима с боровским радиусом экситона a_B . С уменьшением L_z характерная энергия размерного квантования уровней электрона и дырки $E(k_z) \sim \hbar^2/2m_{e,h}L_z^2$ превосходит энергию связи (ридберг R) объемного экситона. Локализованное — *квазидвумерное* — состояние характеризуется бóльшей, по сравнению с объемным состоянием, энергией связи ($R \rightarrow R_{2D} = 4R_{3D}$) и бóльшей плотностью силы осциллятора экситонного перехода [18, 19, 20, 21], что приводит к значительному усилению взаимодействия экситона и резонаторной фотонной моды в том случае, когда области локализации экситона и фотона совпадают в z -направлении. Отметим, что экситон-фотонное взаимодействие сохраняет компоненты планарного квазиволнового вектора $\mathbf{k}_{\parallel} = \{k_x, k_y\}$, отвечающие свободному распространению в плоскости активного слоя.

Вместе с тем, нормальная компонента квазиволнового вектора оказывается неопределенной, $\Delta k_z \sim 1/L_z$. По этой причине локализованный экситон необратимо взаимодействует с континуумом (резервуаром) фотонных состояний [22, 23], распространяющихся в z -направлении, — что приводит к конечному (и очень малому) *излучательному* времени жизни экситона в активном слое τ_x . Согласно оценке, полученной в работе [24] на основе нестационарной теории возмущений, время жизни экситона с $k_{\parallel} = 0$ в идеальной — бесконечной и однородной в плоскости (xy) — квантовой яме типа GaAs/AlGaAs с $L_z \sim a_B$ составляет $\tau_x \sim (1 \div 2) \cdot 10^{-11}$ с. Настолько же короткие излучательные времена жизни экситонов наблюдались экспериментально [25, 26].

Излучательная рекомбинация возможна лишь для состояний, находящихся внутри светового конуса; согласно расчетам [24], характерная температура, соответствующая максимальной кинетической энергии экситона, взаимодействующего со светом, состав-

²Отметим, что, помимо резонансных (2D) состояний, в фотонном кристалле есть *волноводные* моды с дисперсией $\omega_{\text{wg}}(\mathbf{k}) \propto c|\mathbf{k}|$, возникающие вследствие полного внутреннего отражения падающей волны; они, однако, несущественны для последующего анализа 2D системы, возбуждаемой в малой области планарных квазиволновых векторов $|\mathbf{k}_{\parallel}| \lesssim 5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$ и энергий $E(\mathbf{k}_{\parallel}) \sim E_0 \pm 0.01 \text{ эВ}$.

³Как правило, образуют гетеропереходы типа [GaAs—In_{1-x}Ga_xAs—GaAs] или [Al_{1-x}Ga_xAs—GaAs—Al_{1-x}Ga_xAs] в областях локализации фотонных состояний.

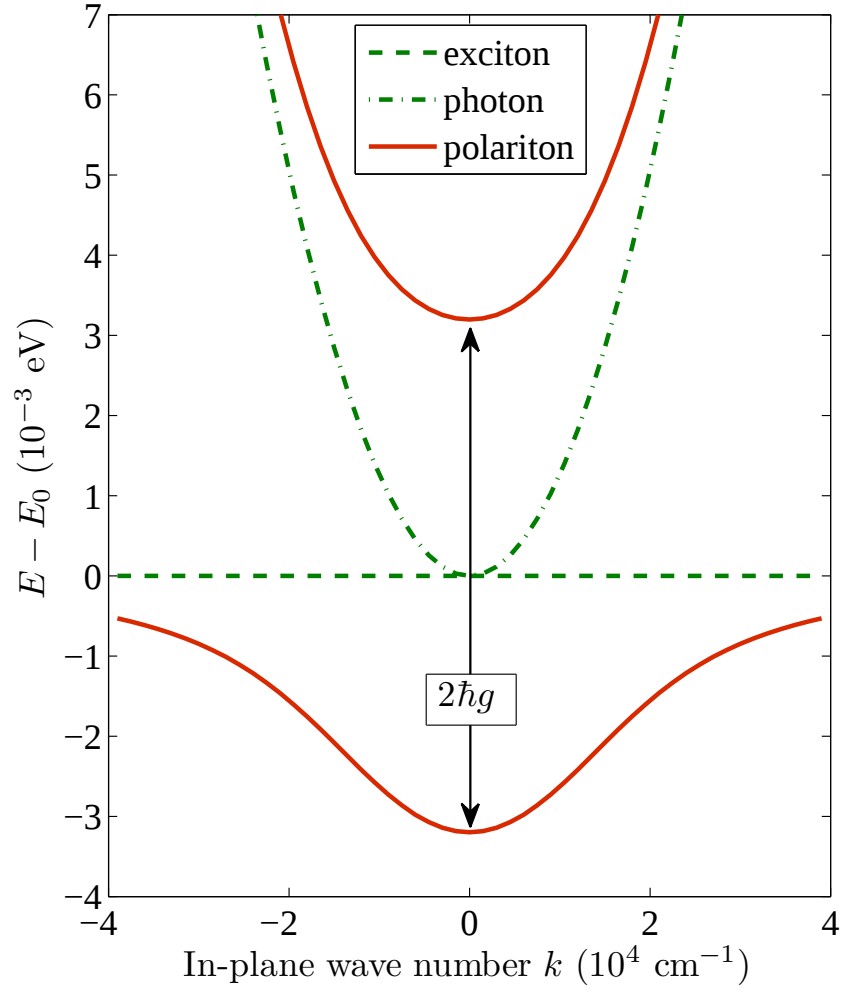


Рис. 3. Дисперсия $\hbar\omega(k_{\parallel})$ состояний экситона, фотона и поляритона в активном слое планарного GaAs резонатора. $E_0 \approx 1.454$ эВ.

ляет ~ 1 К, поэтому при высоких температурах доля таких экситонов мала. Похожие результаты были получены на основе техники функций Грина [27], а затем, в рамках аналогичного подхода, был исследован [28] случай неидеальной квантовой ямы, содержащей неоднородности $L_z(x, y)$, которые приводят к локализации экситонных состояний, или, иными словами, — к эффективному взаимодействию экситонов с разными значениями компонент планарного квазиимпульса. Этот эффект увеличивает долю состояний, взаимодействующих со светом при высоких температурах. Вместе с тем, анализ реальных систем должен учитывать процессы рассеяния экситонов на экситонах [29], фононах, свободных носителях, приводящие к потере пространственной и временной когерентности [30], и является чрезвычайно сложной задачей в сколь угодно общем случае.

Экситон-фотонное взаимодействие в активном слое планарного резонатора приво-

дит к формированию квазидвумерных экситонных поляритонов [31, 32, 33], по аналогии с объемным кристаллом (см. (11), (15) и рис. 1 и 3). Критерием здесь является условие

$$g \gg \max(\tau_{\text{cav}}^{-1}, \tau_{\text{x}}^{-1}), \quad (22)$$

означающее, что частота экситон-фотонных переходов в активном слое (частота Раби) превышает коэффициент затухания ($\gamma = \tau^{-1}$) как фотонной, так и экситонной моды. Условие (22) соответствует т. н. режиму сильной связи (strong coupling regime, [34]) — ситуации, когда экситон-фотонное взаимодействие приводит к расщеплению дисперсии состояний в области $\omega_{\text{cav}} \sim \omega_{\text{x}}$. Такое расщепление было обнаружено в 1992 г. [1] в GaAs структуре описанного типа. Экспериментальное исследование дисперсии $\omega(k_{\parallel})$ осуществляется посредством измерения угловой зависимости $I(\theta)$ сигнала фотolumинесценции резонатора [35], поскольку

$$k_{\parallel} = \frac{E_0}{\hbar c} \sin \theta \quad (23)$$

(угол θ отсчитывается от направления нормали к поверхности).

На рис. 3 показана характерная дисперсия поляритонных состояний; здесь $\hbar g \approx 3.2$ мэВ и $\hbar \gamma_{\text{x}} \sim \hbar \gamma_{\text{cav}} \approx 0.3$ мэВ для $k_{\parallel} = 0$, что соответствует параметрам реальной структуры (отметим, что $m_{\text{x}} \gg m_{\text{cav}}$, и потому энергия экситона практически постоянна в исследуемой области малых $k_{\parallel}$).

Спиновые состояния экситонных поляритонов определяются спином квазичастиц, образующих их структуру — в частности, спинами электрона и дырки, образующих экситон. В кристалле типа цинковой обманки (например, GaAs) электрон проводимости находится в S -состоянии и характеризуется значениями проекции полного момента $J_z^{(\text{e})} = S_z^{(\text{e})} = \pm 1/2$, тогда как дырка находится в P -состоянии и потому $J_z^{(\text{h})} = S_z^{(\text{h})} + L_z^{(\text{h})} = \pm 1/2, \pm 3/2$. Состояния с $|J_z^{(\text{h})}| = 1/2$ и $|J_z^{(\text{h})}| = 3/2$ соответствуют т. н. “легким” и “тяжелым” дыркам, отличающимся эффективными массами, причем в объемном кристалле эти состояния вырождены в центре валентной зоны ($\mathbf{k} = 0$). Однако в квантовой яме уровень легкой дырки находится дальше от потолка зоны, поэтому основное экситонное состояние формируется электроном и тяжелой дыркой с $|J_z^{(\text{h})}| = 3/2$. Таким образом, проекция полного момента 2D экситона принимает значения $J_z^{(\text{x})} = J_z^{(\text{e})} + J_z^{(\text{h})} = \pm 1, \pm 2$. Спин фотона равен 1, поэтому экситоны с $|J_z^{(\text{x})}| = 2$ не могут быть возбуждены оптически. В конечном итоге, спиновые состояния экситонов отвечают оптической поляризации фотовозбуждения: σ^+ и σ^- -компоненты волны накачки возбуждают поперечные экситоны с $J_z^{(\text{x})} = +1$ и $J_z^{(\text{x})} = -1$, соответственно. Приведенные соображения относятся к достаточно идеализированной системе. В зависимости от исследовательской задачи анализ реальных систем должен учитывать различные механизмы спиновой релаксации, обусловленные свойствами симметрии кристалла [36], спин-орбитальным [37] и обменным [38, 39] взаимодействиями электро-

нов и дырок (последнее, в частности, приводит к продольно-поперечному расщеплению состояний 2D экситонов [32]). Другим источником интересных поляризационных эффектов является экситон-экситонное взаимодействие, наиболее важное в контексте настоящего исследования.

1.2 Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние

Ключевой особенностью дисперсии квазидвумерных поляритонов (рис. 3) является наличие *точки перегиба* нижней поляритонной ветви (НПВ) в области $k_{\text{infl}} \sim 1.5 \cdot 10^4 \text{ см}^{-1}$, что делает чрезвычайно эффективным процесс поляритон-поляритонного рассеяния $(\mathbf{k}_{\text{infl}}, \mathbf{k}_{\text{infl}}) \rightarrow (\mathbf{k}, \mathbf{k}_{\text{infl}} - \mathbf{k})$, осуществляющийся с сохранением энергии и планарного квазиимпульса.

В настоящей работе рассматривается динамика 2D системы экситонных и фотонных мод под действием непрерывного когерентного фотовозбуждения. Падающая волна накачки с $\omega_p \sim \omega_{\text{LP}}(k_p)$ направлена под углом $\pi/2 - \theta$ к поверхности резонатора, таким, что планарная проекция волнового вектора $[k_p = (\omega_p/c) \sin \theta]$ соответствует окрестности точки перегиба НПВ. Исследуется низкотемпературный предел $T \rightarrow 0$ (реальные эксперименты проводились при $T \sim 1 \div 10 \text{ К}$). В конечном итоге, нами рассматривается случай, когда когерентная накачка возбуждает когерентные поляритонные состояния; это предположение составляет основу последующего теоретического исследования.

Отметим, что в случае достаточно малых плотностей фотовозбуждения основным механизмом взаимодействия 2D состояний с разными значениями компонент планарного квазиимпульса является рассеяние экситонов на акустических фононах. Вместе с тем, в том случае, когда импульс накачки возбуждает экситоны с $\mathbf{k}_p \neq 0$, их релаксация к основному состоянию НПВ ($\mathbf{k} = 0$) за счет рассеяния на фононах существенно подавлена в силу законов сохранения [40, 41, 42, 43, 44, 45]. Как следствие, заселенность поляритонных состояний резко уменьшается в области дна НПВ [46] (т. н. “эффект узкого бутылочного горла”).

Увеличение интенсивности накачки и, соответственно, увеличение заселенности *возбуждаемой* поляритонной моды с $\mathbf{k}_p \sim \mathbf{k}_{\text{infl}}$ приводит к появлению прямого поляритон-поляритонного рассеяния в состоянии с $\mathbf{k}_s \sim 0$ (“сигнал”) и $\mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$ (“холостой сигнал”). Малая плотность поляритонных состояний в области дна НПВ приводит к тому, что число n_s заполнения “сигнальной” моды $\mathbf{k}_s$ превышает 1 для сравнительно невысоких плотностей накачки, таких, что описание системы элементарных возбуждений в базисе 2D экситонных и фотонных мод остается физически адекватным. Достижение $n_s = 1$ соответствует *порогу бозонной стимуляции*; поляритон-поляритонное рассеяние “выше порога” приводит к качественным (макроскопическим) изменениям свойств экситон-фотонной системы.

1.2.1 Экситон-экситонное взаимодействие

Как было отмечено в разделе 1.1.1, экситоны не являются идеальными бозе-частицами. В частности, это означает, что гамильтониан электрон-дырочной системы не может быть диагонализирован точно; характерная поправка сравнима с $(N/S)a_B^2$ в случае двумерной системы. Однако эта поправка может быть эффективно учтена в экситонном представлении, путем введения ангармонических слагаемых в гамильтониан (4) [47, 48, 49, 50, 51]. Условие $(N/S)a_B^2 \ll 1$ позволяет ограничиться низшими порядками $b^\dagger b$, и помимо свободных состояний учесть только *двухчастичные* процессы рассеяния:

$$H_x = \sum_{\mathbf{k}} E_x(\mathbf{k}) b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} V b_{\mathbf{q}_1+\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}_2-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_1}. \quad (24)$$

Матричный элемент V экситон-экситонного взаимодействия нужно вычислять в пространстве фермионных состояний электронов и дырок [52, 53, 54, 55]. Для $1s$ -экситонов с одинаковыми значениями проекции полного момента ($J_z = +1$ или $J_z = -1$) V определяется обменным взаимодействием электронов и дырок, принадлежащих разным экситонам $[\{e\} \leftrightarrow \{e\}, \{h\} \leftrightarrow \{h\}]$. В работе [52] была получена оценка

$$V_{++} = V_{--} \approx 6 \frac{e^2 a_B}{S} \quad (25)$$

для $\{|\mathbf{k}|\} \ll a_B^{-1}$, и было показано, что вклады, определяемые прямым (диполь-дипольным) и обменным взаимодействиями экситонов $[\{e, h\} \leftrightarrow \{e, h\}]$, пренебрежимы по сравнению с (24,25) в области малых k .

“Фермионные” слагаемые в (9), приводящие к эффективному взаимодействию экситонов, приводят, вместе с тем, к нелинейному вкладу в экситон-фотонное взаимодействие — *насыщению экситон-фотонных переходов*:

$$H_{x-ph} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar g_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} + b_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}) - \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} V_{\text{sat}} (a_{\mathbf{q}_1+\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}_2-\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_1} + \text{H. c.}). \quad (26)$$

Согласно оценкам [55] и [56],

$$V_{\text{sat}} \approx \frac{16\pi}{7} \hbar g \frac{a_B^2}{S} \quad (27)$$

и $|V_{\text{sat}}|/V_{++} \sim 10^{-2}$, что в ряде случаев позволяет пренебречь нелинейностью экситон-фотонного перехода (второй суммой в (26)) по сравнению с эффектом экситон-экситонного рассеяния.

Обменный интеграл (25) был вычислен в приближении Хартри-Фока для системы $1s$ -экситонов, с учетом спиновых степеней свободы электронов и дырок [52]. Оказалось, однако, что такой подход не позволяет вычислить матричный элемент V_{+-} взаимодействия экситонов с *разными* значениями проекции полного момента J_z [57].

В работах [53, 57] был учтен вклад высших экситонных возбуждений, приводящий к перенормировке обменного интеграла (25) и эффективному взаимодействию $V_{+-} \neq 0$

в пространстве $1s$ -состояний. Эти результаты позволили объяснить ряд экспериментов, в которых была обнаружена сильная зависимость кинетики экситон-экситонного рассеяния от поляризации накачки, а также обосновать предшествующие феноменологические модели [58, 59, 60]. Вычисление V_{+-} для реальной системы является чрезвычайно сложным. Было, однако, показано, что в случае $(N/S)a_B^2 \ll 1$ взаимодействие экситонов с $J_z = +1$ и $J_z = -1$ является *притяжением*, т. е. $V_{+-} < 0$ [57]. В недавней работе [61] сделана косвенная оценка

$$|V_{+-}| \lesssim 10^{-1} \cdot V_{++} \quad (28)$$

на основании экспериментального исследования спиновой динамики поляритонов в GaAs микрорезонаторе.

В итоге, интересующие нас процессы взаимодействия в системе 2D экситонных ('х') и фотонных ('с') состояний могут быть описаны с помощью гамильтониана

$$\begin{aligned} H_{x-c} = & \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2}^{(c)} a_{\mathbf{k}, \sigma_1}^\dagger a_{\mathbf{k}, \sigma_2} + \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}, \sigma}^{(x)} b_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger b_{\mathbf{k}, \sigma} + \\ & + \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\mathbf{k}} \hbar g_{\mathbf{k}, \sigma_1, \sigma_2} (a_{\mathbf{k}, \sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{k}, \sigma_2} + b_{\mathbf{k}, \sigma_2}^\dagger a_{\mathbf{k}, \sigma_1}) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} V_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} b_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}, \sigma_1}^\dagger b_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}, \sigma_2}^\dagger b_{\mathbf{q}_2, \sigma_2} b_{\mathbf{q}_1, \sigma_1}, \quad \sigma_1, \sigma_2 = -1, +1. \end{aligned} \quad (29)$$

В некоторых случаях оправдано упрощенное рассмотрение системы (29) в пространстве состояний нижней поляритонной ветви:

$$H_{LP} = \sum_{\sigma} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}, \sigma}^{(LP)} l_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger l_{\mathbf{k}, \sigma} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} \tilde{V}_{\sigma_1, \sigma_2; \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} l_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{k}, \sigma_1}^\dagger l_{\mathbf{q}_2 - \mathbf{k}, \sigma_2}^\dagger l_{\mathbf{q}_2, \sigma_2} l_{\mathbf{q}_1, \sigma_1}. \quad (30)$$

Такой подход был предпринят в ряде работ (см. раздел 1.2.2) для качественного анализа динамики поляритон-поляритонного рассеяния в пределах НПВ.

1.2.2 Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние в приближении среднего поля. Оптический параметрический осциллятор

Предмет дальнейшего исследования — динамика поляритонных состояний под действием когерентной накачки. Предполагая факторизацию среднего значения произведения полевых операторов, а сами операторы полагая $\mathcal{C}$ -числами, мы используем квазиклассическое приближение среднего поля⁴. Тогда величина

$$\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(t) = \langle l_{\mathbf{k}} \rangle(t), \quad (31)$$

⁴В общем случае такое предположение оправдано для конденсатных состояний с $n \gg 1$ в пределе бесконечно слабого взаимодействия [62, 63].

где $\langle \cdot \rangle$ означает среднее по когерентному состоянию системы, соответствует классическому полю экситонной поляризации на квантовой яме⁵. Уравнения Гейзенберга для $l_{\mathbf{k}}(t)$ переходят в классические уравнения Гамильтона для $\mathcal{P}_{\mathbf{k}}(t)$

$$\frac{d\mathcal{P}_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{\delta H_{\text{LP}}[\mathcal{P}, i\hbar\mathcal{P}^*]}{\delta (i\hbar\mathcal{P}_{\mathbf{k}}^*(t))}. \quad (32)$$

Воздействие накачки далее может быть учтено как источник

$$\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 \exp(-i\omega_p t)$$

в уравнении (32) для $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$, а диссипация, связанная с конечностью времени жизни поляритона, учтена введением комплексной собственной частоты когерентной моды:

$$\omega_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})} \rightarrow \omega_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})} + i\gamma_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})}, \quad \gamma_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})} = -1/\tau_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})}. \quad (33)$$

Таким образом, уравнения движения принимают вид

$$i\hbar \frac{d\mathcal{P}_{\mathbf{k}}}{dt} = \hbar \left(\omega_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})} + i\gamma_{\mathbf{k}}^{(\text{LP})} \right) \mathcal{P}_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \tilde{V}_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{k}} \mathcal{P}_{\mathbf{q}_1} \mathcal{P}_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}}^* \mathcal{P}_{\mathbf{q}_2} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \mathcal{F}_0 e^{-i\omega_p t}. \quad (34)$$

Динамическая модель (34), предложенная в работах [7] и [8], является в достаточной мере феноменологической⁶. В частности, описанный здесь подход не позволяет рассмотреть исходное возникновение когерентного состояния и, строго говоря, неприменим в области малых плотностей накачки, когда $n < 1$; кроме того, в приближении среднего поля мы пренебрегаем квантовыми корреляциями состояний. Оказалось, однако, что система (34) позволяет описать неравновесный переход в области порога стимулированного рассеяния, когда достижение критической плотности накачки приводит к усилению некоторой когерентной моды (“сигнала рассеяния”). Уравнения типа (34) исследовались в моделях сверхпроводимости (*уравнения Гинзбурга-Ландау* [64]), бозе-конденсации (*уравнения Гросса-Питаевского* [65]) и теории лазеров [66]; возможность фазового перехода в области критического значения “управляющего параметра” является общим свойством этих моделей [67].

Самые простые свойства поляритон-поляритонного рассеяния

$$(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_s, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s), \quad (35)$$

⁵Поляризационные эффекты для простоты пока не рассматриваются, и спиновые индексы опущены; это соответствует случаю циркулярной поляризации накачки, когда можно считать, что падающая волна возбуждает экситоны в одинаковом спиновом состоянии.

⁶Аналогичный подход был впервые предпринят Н. Н. Боголюбовым [62], который исследовал бозе-систему с гамильтонианом, аналогичным (30), предполагая наличие макрозанного основного состояния (конденсатной моды).

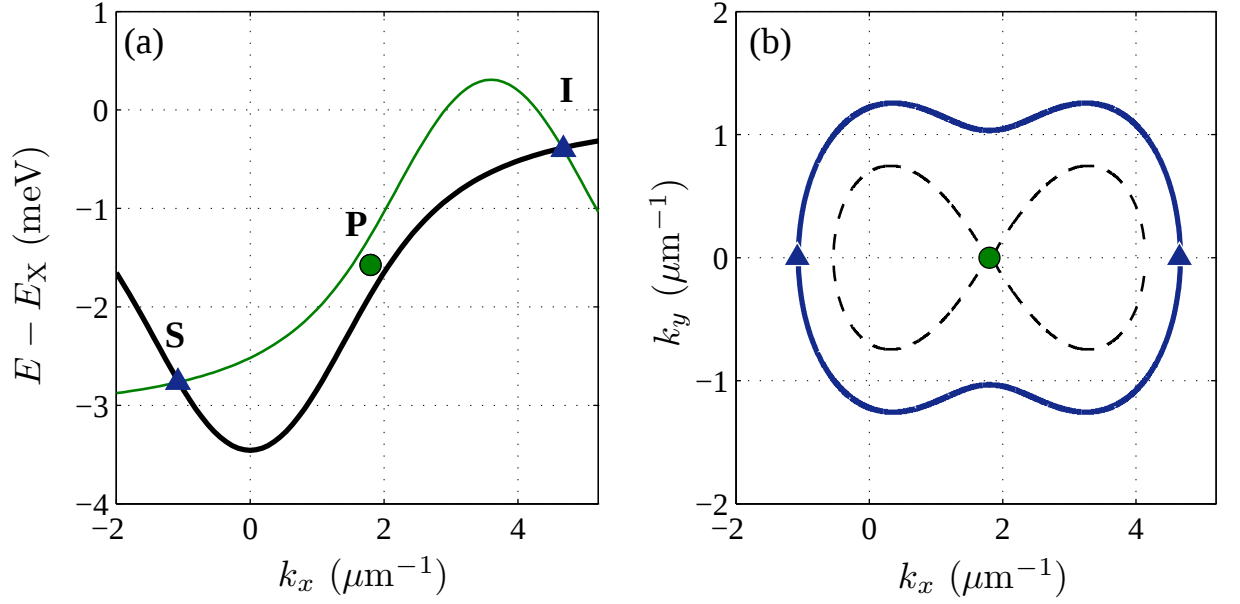


Рис. 4. Схема стимулированного поляритон-поляритонного рассеяния. Жирная и тонкая линии панели (a) соответствуют $E_{LP}(\mathbf{k})$ и $2E_p - E_{LP}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$ для $k_y = 0$; кружок и треугольники отмечают положения накачки (P), сигнала (S) и холостого сигнала (I) в координатах (k_x, E) . Пунктирная и сплошная линии панели (b) — решения уравнения (36) в случаях нулевой и положительной [как на панели (a)] расстройки $D \equiv E_p - E_{LP}(\mathbf{k}_p)$.

осуществляющегося как распад возбуждаемой поляритонной моды, можно проанализировать на основании законов сохранения энергии и планарного квазиимпульса, которые имеют вид

$$E_{LP}(\mathbf{k}) + E_{LP}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) = 2E_p \quad (36)$$

для $\tilde{V} \rightarrow 0$. Решение уравнения (36) удобно представить графически (рис. 4; здесь $|\mathbf{k}_p| = k_{px}$) как область пересечения поверхностей $E_s(\mathbf{k}) \equiv E_{LP}(\mathbf{k})$ и $E_i(\mathbf{k}) = 2E_p - E_{LP}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$. Из рис. 4b видно, что разрешенные направления рассеяния образуют характерную “восьмерку” в пространстве квазиволновых векторов, форма которой определяется параметрами $\{\mathbf{k}_p, E_p\}$ импульса фотовозбуждения.

Взаимодействие (35) приводит к перенормировке собственной энергии поляритонов $E_{LP}(\mathbf{k})$. Предположение о том, что амплитуды состояний с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ пренебрежимы по сравнению с $\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}$, позволяет рассматривать амплитуду раскачиваемой моды как *управляющий параметр* рассеяния. Это приводит к формулировке замкнутых уравнений для произвольной “сигнальной” ($\mathbf{k}_s$) и соответствующей “холостой” ($\mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$)

поляритонных гармоник:

$$i\hbar \frac{d\mathcal{P}_{\mathbf{k}_s}}{dt} = \hbar(\omega_{\mathbf{k}_s} + i\gamma_{\mathbf{k}_s}) \mathcal{P}_{\mathbf{k}_s} + 2\tilde{V}|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^2 \mathcal{P}_{\mathbf{k}_s} + \tilde{V}\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}^2 \mathcal{P}_{\mathbf{k}_i}^*, \quad (37)$$

$$i\hbar \frac{d\mathcal{P}_{\mathbf{k}_i}}{dt} = \hbar(\omega_{\mathbf{k}_i} + i\gamma_{\mathbf{k}_i}) \mathcal{P}_{\mathbf{k}_i} + 2\tilde{V}|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^2 \mathcal{P}_{\mathbf{k}_i} + \tilde{V}\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}^2 \mathcal{P}_{\mathbf{k}_s}^*, \quad (38)$$

где $\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p} = |\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}| \exp(-i\omega_p t)$ и для простоты предполагается, что $\tilde{V}$ не зависит от $\mathbf{k}$. Уравнения (37, 38) принадлежат классу моделей *оптического параметрического осциллятора* [8, 7, 68, 69, 70, 71, 72].

Из (37, 38) следует, что увеличение $|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^2$ приводит к *синему сдвигу* собственной энергии поляритона $\Delta E \sim 2\tilde{V}|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^2$. При этом эффективное значение константы затухания когерентных гармоник

$$\gamma^{(\text{ren})} : \quad |\mathcal{P}_{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i}| \sim \exp(\gamma^{(\text{ren})} t) \quad (39)$$

меняет знак по достижении критической интенсивности возбуждения, после чего амплитуды $|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i}|$ экспоненциально нарастают со временем. Критическое значение управляющего параметра

$$\tilde{V}|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}^{(\text{thr})}|^2 \sim \hbar \sqrt{\gamma_{\mathbf{k}_s} \gamma_{\mathbf{k}_i}} \quad (40)$$

соответствует *порогу параметрической неустойчивости* раскачиваемой моды относительно распада в состояния с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$.

Расчеты, представленные в работах [68, 69], показали, что множество k -состояний, теряющих устойчивость в точке порога рассеяния, образует “восьмерку” (такую же, как на рис. 4b), форма которой определяется положением накачки $\{\mathbf{k}_p, E_p\}$ и сильно зависит от амплитуды возбуждаемой моды $\tilde{V}|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}^{(\text{thr})}|$ в пороговой точке. Отметим, например, что увеличение частотной расстройки $D = E_p - E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$ приводит к смещению “сигнальной” гармоники k_{sx} (при $k_{sy} = 0$) в сторону отрицательных значений k_x .

Модель (37, 38) позволяет объяснить пороговый характер развития параметрического рассеяния, но, вообще говоря, неприменима в области значений $|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^2$ выше порога (40). В работах [7, 68, 69] предполагается, что достижение порога рассеяния приводит к *плавному* заполнению “сигнальных” мод (при малых $\gamma^{(\text{ren})} > 0$). В этих исследованиях не рассматривалась динамика возбуждаемой поляритонной моды [ее амплитуда учитывалась лишь в качестве параметра системы (37, 38)].

В других работах [8, 70, 72, 73] исследовались стационарные состояния трехмодовой системы, включающей раскачиваемую гармонику $\mathbf{k}_p$ и *фиксированные* моды “сигнала” $[\mathbf{k}_s = 0]$ и “холостого сигнала” $[\mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p]$ параметрического рассеяния; отметим, что появление выделенного “сигнала” в области $\mathbf{k} \sim 0$ соответствует данным эксперимента [4], однако не может быть обосновано в рамках модели типа (37, 38).

В работах [74, 75, 76, 77] исследована динамика возбуждаемой поляритонной моды. Было показано, что в области $D > 0$ нелинейность $H_{x-x} \sim |\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|^4$ приводит к *бистабильности* отклика $\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}(\mathcal{F}_0)$ и возможности критического перехода (“катастрофы”),

сопровождающегося скачком амплитуды $|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|$. Эффект бистабильности отклика ранее был предсказан в работе [78] для бозе-конденсата экситонов в условиях когерентной накачки с частотой выше частоты экситона. В системе квазидвумерных поляритонов скачок амплитуды возбуждаемой моды приводит к сильной неустойчивости множества мод k -пространства [поскольку $|\mathcal{P}_{\mathbf{k}_p}|$ — управляющий параметр рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$], и потому эволюция системы не может быть описана с помощью двух- или трехмодовой модели типа (34). Работы [74, 75, 76, 77] содержат исследование эволюции многомодовой системы под действием когерентной накачки в рамках квазиодномерной модели.

2 Анализ устойчивости возбуждаемой поляритонной моды

В данной главе рассматриваются эффекты, приводящие к параметрическому рассеянию квазидвумерных поляритонов под действием когерентной накачки с положительной расстройкой от резонанса [$E_p > E_{LP}(k_p)$] в области точки перегиба дисперсионной кривой $E_{LP}(k)$. Представлена модель, позволяющая рассчитать динамику системы когерентных экситонных и фотонных мод (разд. 2.1). Показано, что с увеличением плотности возбуждения в системе возникают два типа неустойчивости: *одномодовая неустойчивость* (разд. 2.2), приводящая к характерной для нелинейного осциллятора бистабильности отклика возбуждаемой моды $\mathbf{k}_p$, и *неустойчивость относительно параметрического рассеяния* $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ (разд. 2.3). В разд. 2.4 установлено, что взаимное влияние бистабильности и параметрической неустойчивости приводит к *жесткому* возбуждению стимулированного рассеяния — взрывообразному усилению множества поляритонных мод, происходящему пороговым образом. Анализ дальнейшей эволюции системы (в частности, процессов установления равновесия) составит содержание третьей главы.

2.1 Квазиклассическая модель системы экситонных и фотонных состояний в активном слое планарного резонатора

Исходным пунктом данного исследования являются квазиклассические уравнения для электрического поля $[\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)]$ и экситонной поляризации $[\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)]$ в двумерной квантовой яме, расположенной в активном слое планарного резонатора⁷ [74, 77]:

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_C(\mathbf{k}) \right] \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \alpha(\mathbf{k}) \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) + \beta(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t), \quad (41)$$

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_X \right] \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = A \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + V \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \mathcal{P}^*(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}, t) \mathcal{P}(\mathbf{q}_1, t) \mathcal{P}(\mathbf{q}_2, t) + \xi(\mathbf{k}, t). \quad (42)$$

Здесь

$$\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \mathcal{F}_0(t) \exp(-i\omega_p t) \quad (43)$$

— электрическое поле падающей электромагнитной волны накачки вдали от резонатора, которое описывается как макроразолненная фотонная мода с фиксированной частотой ω_p , волновым вектором $\mathbf{k}_p$ и амплитудой $\mathcal{F}_0(t)$, являющейся, в общем случае, медленной функцией времени. Далее, $E_C(\mathbf{k})$ — энергия резонаторной моды, E_X —

⁷Компоненты квазиволнового вектора $\mathbf{k}$ — дискретные параметры, “нумерующие” различные динамические переменные $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_1}, \mathcal{P}_{\mathbf{k}_1}, \mathcal{E}_{\mathbf{k}_2}, \mathcal{P}_{\mathbf{k}_2}, \dots$ и, строго говоря, не являющиеся аргументами функций $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$. Обозначения типа $\mathcal{E}(\mathbf{k})$ вызваны только соображениями удобства, с целью избежать написания вложенных индексов.

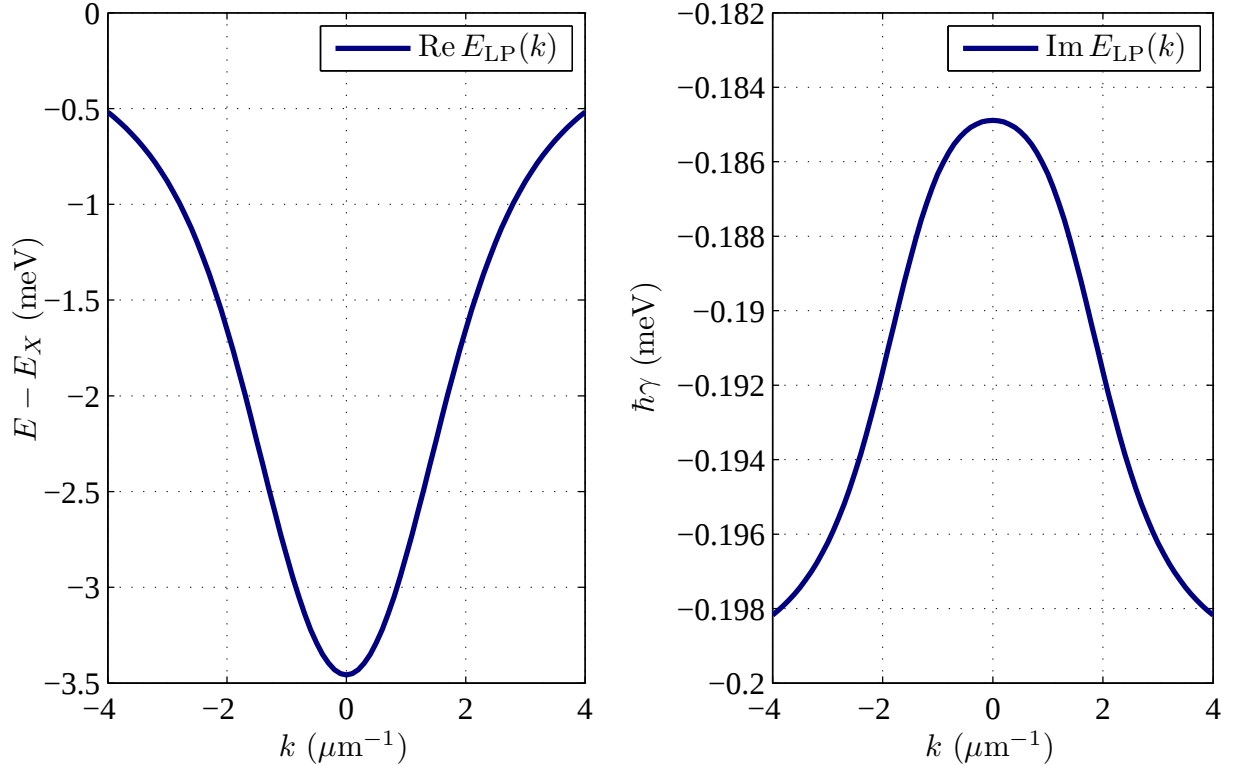


Рис. 5. Действительная и мнимая части энергии состояний нижней поляритонной ветви. Нами выбраны следующие параметры системы: добротность резонатора $Q = 4.2 \cdot 10^3$ (соответственно, $\text{Im } E_C(0) = -0.17$ мэВ), эффективная масса фотонной моды $m_{\text{cav}} = 2.8 \cdot 10^{-32}$ г, время жизни 2D экситона $\tau_x = 4$ пс ($\text{Im } E_X = -0.2$ мэВ), расщепление Раби $2\sqrt{A\beta} = 6.4$ мэВ для $\mathbf{k} = 0$, рассогласование уровней фотона и экситона $\text{Re } E_C(0) - \text{Re } E_X = -0.5$ мэВ. Результаты дальнейшего исследования не зависят от знака разности $\text{Im } E_C(0) - \text{Im } E_X$, который определяет тип экстремума (минимум или максимум) $\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k})$ в $\mathbf{k} = 0$.

энергия экситона в свободной квантовой яме; A — экситонная поляризуемость, V — константа экситон-экситонного взаимодействия, $\xi(\mathbf{k}, t)$ — случайная ланжевеновская сила:

$$\langle \xi(\mathbf{k}, t) \rangle = 0, \quad \langle \xi^*(\mathbf{k}, t) \xi(\mathbf{k}', t') \rangle \propto \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{t, t'}. \quad (44)$$

Резонансная энергия $E_C(\mathbf{k})$ и константы $\alpha(\mathbf{k})$ отклика резонатора на внешнее поле могут быть рассчитаны с помощью метода матрицы переноса. Энергия измеряется в мэВ (значения энергии являются комплексными), а экситонная поляризация и электрическое поле — в таких единицах, что $A = V = 1$ [74, 75]. Характерные параметры системы, использованные в большинстве последующих расчетов, указаны в подписи к рис. 5.

Уравнения (41, 42) описывают динамику системы когерентных экситонных и фо-

тонных мод в условиях когерентной накачки. Так же, как уравнения (34), однородная часть системы (41, 42) может быть записана в форме классических уравнений

$$\frac{d\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)}{dt} = \frac{\delta H}{\delta[i\hbar\mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t)]}, \quad \frac{d\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)}{dt} = \frac{\delta H}{\delta[i\hbar\mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t)]}, \quad (45)$$

где

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{k}} E_C(\mathbf{k}) \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + \sum_{\mathbf{k}} E_X \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} [\beta(\mathbf{k}) \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) + A \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)] + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \alpha(\mathbf{k}) \mathcal{E}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) + \\ & + \frac{1}{2} V \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_1, t) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_2, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_3, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_4, t). \end{aligned} \quad (46)$$

В общем случае функция H принимает комплексные значения, т. е. рассматриваемая нами система не является гамильтоновой; коэффициенты $\text{Im } \alpha > 0$ и $\text{Im } E_{C,X} < 0$ соответствуют отклику на накачку и излучению энергии за пределы активного слоя. Такая модель позволяет исследовать процессы *развития неустойчивости* (гл. 2) и *установления равновесия* (гл. 3) в открытой диссипативной системе двумерных состояний. Как и в разд. 1.2.2, мы предполагаем случай циркулярной поляризации накачки, когда можно считать, что падающая волна возбуждает экситоны с одинаковым спином.

В терминах собственно квазиклассического подхода уравнение (41) является уравнением Максвелла в резонансном скалярном приближении⁸, учитывающим экситонную поляризацию. Уравнение (42) есть неоднородное нелинейное уравнение Шредингера для экситонной поляризации, учитывающее когерентное внешнее возбуждение (отклик на электромагнитное поле) и стохастический ланжевеновский шум, который позволяет смоделировать квантовые флуктуации сигнала рассеяния⁹.

⁸Распределение электромагнитного поля внутри резонатора образует стоячую волну, имеющую максимум интенсивности в центре активного слоя. Следовательно, амплитуда магнитного поля в активном слое близка к нулю и потому не учитывается уравнениями (41, 42), записанными для системы 2D состояний. С другой стороны, для расчета константы отклика α и точной угловой зависимости коэффициента $\beta(\mathbf{k})$ требуется решать полную систему уравнений Максвелла для поля, распределенного в z -направлении резонатора. Мы не останавливаемся на подробном описании этих расчетов, поскольку соотношения единиц измерения полей $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$, заданные коэффициентами α , A/β и V , несущественны для дальнейшего анализа, а слабой угловой зависимостью $\beta(\mathbf{k})$ можно пренебречь по сравнению $E_C(\mathbf{k})$.

⁹ Шумовой источник в уравнении (42) нужен затем, чтобы создать *малое начальное заполнение* состояний с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_r$. Задание подходящих начальных условий системы (41, 42) (без “шума”) приводит такому же результату. Иными словами, шум задается настолько малым, что поведение системы не зависит от $\langle \xi^* \xi \rangle$ в том случае, когда система содержит по край-

В отсутствие экситон-экситонного взаимодействия и внешней накачки однородная часть системы (41, 42) приводит к характеристическому уравнению, определяющему дисперсию “свободных” поляритонов

$$E_{\text{LP,UP}}(\mathbf{k}) = \frac{E_{\text{C}}(\mathbf{k}) + E_{\text{X}}}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{[E_{\text{C}}(\mathbf{k}) - E_{\text{X}}]^2 + 4A\beta(\mathbf{k})} \quad (47)$$

(рис. 5), так что величина расщепления Раби составляет $E_{\text{UP}}(0) - E_{\text{LP}}(0) = 2\sqrt{A\beta(0)}$.

2.2 Сдвиг резонансной энергии и бистабильность отклика возбуждаемой моды поля в активном слое

Переходя к исследованию поляритон-поляритонного взаимодействия, будем рассматривать систему (41, 42), слабо отклоненную от состояния с одной макрозаполненной модой $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\text{p}}$ в режиме стационарной накачки $\mathcal{F}_0(t) = \text{const}$. Именно, рассмотрим решения вида

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_{\text{p}}} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega_{\text{p}} t}, \quad (48)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_{\text{p}}} \mathcal{P}_0 e^{-i\omega_{\text{p}} t}, \quad (49)$$

где

$$|\tilde{\mathcal{P}}/\mathcal{P}_0| \ll 1, \quad |\tilde{\mathcal{E}}/\mathcal{E}_0| \ll 1. \quad (50)$$

В предельном случае $\{\tilde{\mathcal{E}} \equiv 0, \tilde{\mathcal{P}} \equiv 0\}$ уравнения (41, 42) принимают вид

$$[E_{\text{p}} - E_{\text{C}}(\mathbf{k}_{\text{p}})] \mathcal{E}_0 = \alpha(\mathbf{k}_{\text{p}}) \mathcal{F}_0 + \beta(\mathbf{k}_{\text{p}}) \mathcal{P}_0, \quad (51)$$

$$[E_{\text{p}} - E_{\text{X}}] \mathcal{P}_0 = A\mathcal{E}_0 + V |\mathcal{P}_0|^2 \mathcal{P}_0. \quad (52)$$

Отсюда получаем уравнение для *стационарного* значения амплитуды $\mathcal{P}_0$:

$$[(E_{\text{p}} - E_{\text{C}})(E_{\text{p}} - E_{\text{X}}) - A\beta] \mathcal{P}_0 - (E_{\text{p}} - E_{\text{C}}) V |\mathcal{P}_0|^2 \mathcal{P}_0 = A\alpha\mathcal{F}_0. \quad (53)$$

Все коэффициенты $(E_{\text{C}}, E_{\text{X}}, \alpha, \beta)$ относятся к раскачиваемой гармонике поля, поэтому аргумент $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\text{p}}$ опущен.

Зависимость $|\mathcal{P}_0^2|$ от $\mathcal{F}_0^2$, начиная с некоторого положительного значения расстройки $D \equiv E_{\text{p}} - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_{\text{p}})$, является S-образной (рис. 6), причем, как будет показано далее, решение в области отрицательной производной $d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2)$ неустойчиво, что приводит к *бистабильности* отклика на внешнее поле.

Взяв квадраты абсолютных значений левой и правой частей уравнения (53) и заметив, что

$$(E_{\text{p}} - E_{\text{C}})(E_{\text{p}} - E_{\text{X}}) - A\beta = (E_{\text{p}} - E_{\text{LP}})(E_{\text{p}} - E_{\text{UP}}),$$

ней мере несколько слабо заполненных мод. Влияние шума не рассматривается в настоящей главе, посвященной исследованию устойчивости одномодового решения.

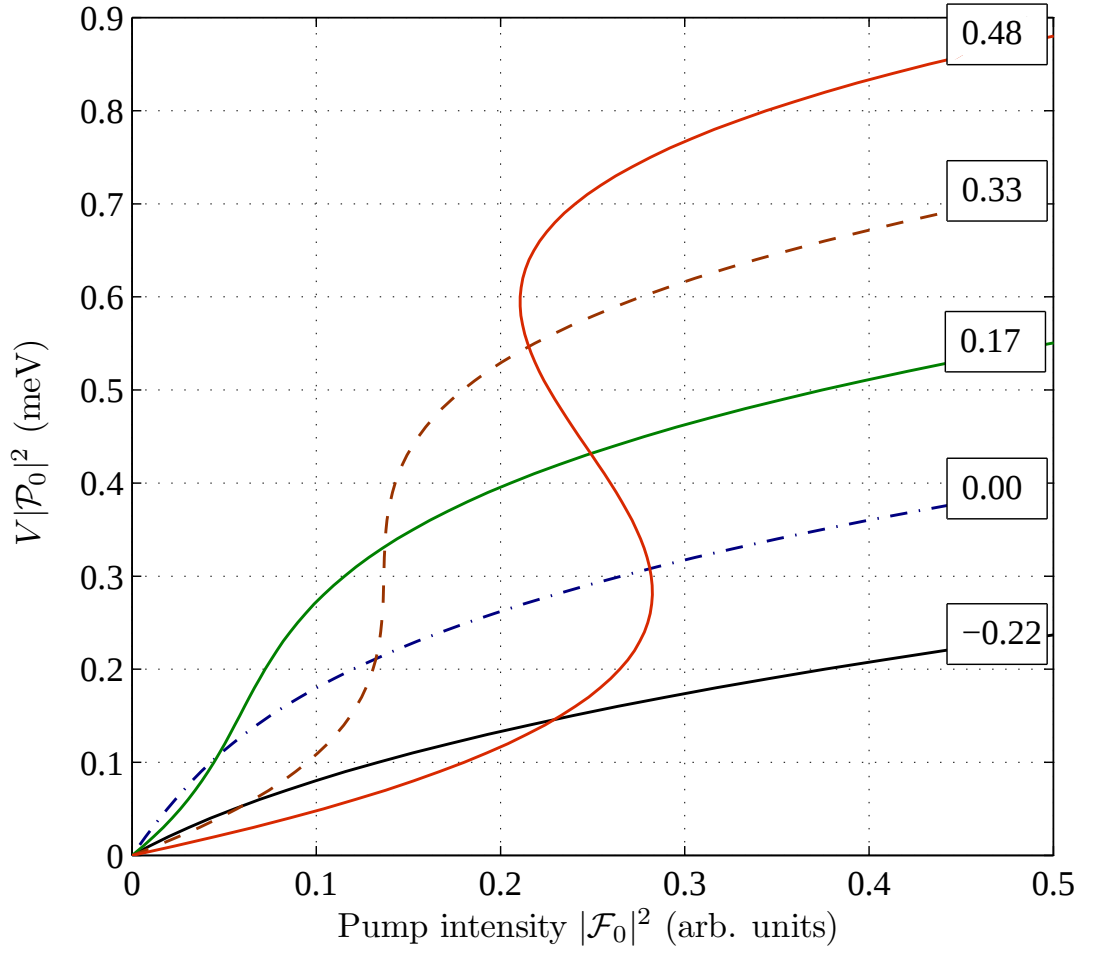


Рис. 6. Функции стационарного отклика возбуждаемой поляритонной моды. Решение уравнения (53): зависимость $V|\mathcal{P}_0|^2$ от $\mathcal{F}_0^2$ для $|\mathbf{k}_p| = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$ и некоторых значений расстройки частоты накачки $D = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$ (отметки на линиях, мэВ).

получаем

$$|\mathcal{P}_0|^2 \cdot |(E_p - E_{LP})(E_p - E_{UP}) - V(E_p - E_C)|\mathcal{P}_0|^2|^2 = |A\alpha|^2 \mathcal{F}_0^2. \quad (54)$$

Далее нас будет интересовать случай малых расстройек частоты накачки от НПВ, когда

$$|E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)| \ll |E_p - \text{Re } E_{UP}(\mathbf{k}_p)| \sim \text{Re}(E_{UP} - E_{LP}); \quad (55)$$

по этой причине уравнение (54) удобно записать в форме

$$|\mathcal{P}_0|^2 = \frac{\tilde{\alpha}^2 \mathcal{F}_0^2}{|Z - \tilde{V}|\mathcal{P}_0|^2|^2}, \quad (56)$$

где

$$\tilde{\alpha} = \left| \frac{A\alpha(\mathbf{k}_p)}{E_p - E_{UP}(\mathbf{k}_p)} \right|, \quad \tilde{V} = V \cdot \frac{E_p - E_C(\mathbf{k}_p)}{E_p - E_{UP}(\mathbf{k}_p)} \quad (57)$$

и

$$Z = E_p - E_{LP}(\mathbf{k}_p), \quad (58)$$

так что

$$\text{Re } Z = D = E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p), \quad \text{Im } Z = -\text{Im } E_{LP}(\mathbf{k}_p).$$

Для $\mathbf{k}_p = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$ и $D = 0.48 \text{ мЭВ}$ (эти параметры используются в последующих расчетах) имеем $\tilde{V}/V \approx 0.727 - 0.005 \cdot i$; в целях упрощения дальнейших формул мы будем считать это отношение вещественным, что не окажет влияния на результаты.

Условие существования области, в которой отображение $\mathcal{F}_0^2 \mapsto |\mathcal{P}_0^2|$ неоднозначно, сводится к существованию несовпадающих корней квадратного уравнения $d(\mathcal{F}_0^2)/d|\mathcal{P}_0^2| = 0$. Из (56) находим, что это имеет место в том случае, когда

$$\text{Re } Z > \sqrt{3} \cdot |\text{Im } Z|, \quad (59)$$

а соответствующие решения суть

$$(\tilde{V}|\mathcal{P}_0|^2)_{1,2} = \frac{1}{3} \left(2 \text{Re } Z \mp \sqrt{(\text{Re } Z)^2 - 3 (\text{Im } Z)^2} \right). \quad (60)$$

Согласно (58), условие (59) принимает вид

$$D > \sqrt{3} \cdot |\text{Im } E_{LP}|. \quad (61)$$

В частности, для системы, параметры которой указаны на рис. 5, бистабильность отклика возникает при $D > 0.33 \text{ мЭВ}$ для $k_p = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$ (см. рис. 6). Отметим, что из (58, 60, 61) следует оценка

$$(\tilde{V}|\mathcal{P}_0|^2)_1 \sim |\text{Im } E_{LP}|, \quad (62)$$

показывающая, что характерное значение $\mathcal{P}_0$ в точке потери устойчивости (в которой $d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2) = \infty$) определяется шириной поляритонного резонанса.

Из (56) и (58) следует, что энергия

$$E_0^{(r)}(\mathcal{P}_0) = \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) + \tilde{V} |\mathcal{P}_0|^2 \quad (63)$$

имеет смысл *резонансной энергии возбуждаемой моды* ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$) *поля на квантовой яме*. Рассмотрим, как изменится величина $E_0^{(r)}$, если помимо возбуждаемой моды система содержит иные состояния $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ с *конечными* амплитудами $\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)$. Предположим, что распределение $\mathcal{P}(\mathbf{k})$ таково, что в сумме

$$V \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \mathcal{P}^*(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}_p, t) \mathcal{P}(\mathbf{q}_1, t) \mathcal{P}(\mathbf{q}_2, t),$$

входящей в правую часть уравнения (42) для $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$, можно пренебречь слагаемыми, которые не содержат $\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)$ или $\mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p)$; имеем уравнение

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_X \right] \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) = A \mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t) + V |\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) + \\ + 2V \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 + V \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t) \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t). \quad (64)$$

Положим, далее, $\mathcal{F}(t) = \mathcal{F}_0 e^{-i\omega_p t}$ и

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) = \bar{\mathcal{P}}_0(t) e^{i\phi_0(t)} e^{-i\omega_p t}, \quad \mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t) = \bar{\mathcal{E}}_0(t) e^{i\phi_0(t)} e^{-i\omega_p t}, \quad (65)$$

где $\bar{\mathcal{P}}_0(t)$, $\bar{\mathcal{E}}_0(t)$, $\phi_0(t)$ — по предположению, *медленно* меняющиеся функции (значения $\bar{\mathcal{P}}_0$ и ϕ_0 вещественны, $\bar{\mathcal{E}}_0$ может иметь мнимую часть), так что слагаемым $\hbar(-d\phi_0/dt)\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)$, возникающим после подстановки (65) в (64), можно пренебречь по сравнению с $\hbar\omega_p \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)$, а слагаемым $i\hbar(d\bar{\mathcal{P}}_0/dt)e^{i\phi_0(t)}e^{-i\omega_p t}$ — пренебречь по сравнению с $-i(\text{Im } E_X)\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)$. Исключив малые производные, мы сможем перейти к алгебраическим уравнениям типа (51, 52) и рассчитать эффективный отклик $\tilde{\mathcal{E}}_0(\mathcal{F}_0)$, $\tilde{\mathcal{P}}_0(\mathcal{F}_0)$ в зависимости от $\{\mathcal{P}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t)\}$. Разделим (64) на $e^{i\phi_0(t)}e^{-i\omega_p t}$. Этот сомножитель исчезает во всех слагаемых, кроме последней суммы, которая принимает вид

$$V |\bar{\mathcal{P}}_0| e^{-2i\phi_0(t)} e^{2i\omega_p t} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t). \quad (66)$$

Полагая

$$\mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}) e^{i\phi(\mathbf{k}, t)} e^{-i\omega(\mathbf{k})t}, \quad \omega(\mathbf{k}) + \omega(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) = 2\omega_p, \quad (67)$$

находим, что быстро осциллирующие экспоненты $e^{-i\omega t}$ исчезают полностью. Таким же образом исключив их из уравнения (41) для $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$, получаем систему

$$[E_C(\mathbf{k}_p) - E_p] \bar{\mathcal{E}}_0 = \alpha \mathcal{F}_0 e^{-i\phi_0} + \beta(\mathbf{k}_p) \bar{\mathcal{P}}_0, \quad (68)$$

$$[E_X - E_p] \bar{\mathcal{P}}_0 = A \bar{\mathcal{E}}_0 + V (S(t) + |\bar{\mathcal{P}}_0|^2) \bar{\mathcal{P}}_0, \quad (69)$$

где

$$S(t) \equiv 2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)|^2 + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) e^{i\bar{\phi}(\mathbf{k}, t)}, \quad (70)$$

$$\bar{\phi}(\mathbf{k}, t) \equiv \phi(\mathbf{k}, t) + \phi(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) - 2\phi_0. \quad (71)$$

Уравнение, выражающее зависимость $\bar{\mathcal{P}}_0^2$ от $\mathcal{F}_0^2$, может быть представлено в “резонансной” форме по аналогии с уравнением (56):

$$\bar{\mathcal{P}}_0^2 = \frac{\tilde{\alpha}^2 \mathcal{F}_0^2}{(E_p - E_0^{(r)})^2 + (\hbar\gamma_0)^2}, \quad (72)$$

где

$$E_0^{(r)}(\{\mathcal{P}\}) = \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) + \tilde{V} \bar{\mathcal{P}}_0^2 + 2\tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 + \tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \cos \bar{\phi}(\mathbf{k}, t) \quad (73)$$

— *эффективная резонансная энергия* и

$$\hbar\gamma_0(\{\mathcal{P}\}) = \text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) + \tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \sin \bar{\phi}(\mathbf{k}, t) \quad (74)$$

— *эффективный коэффициент затухания* возбуждаемой моды поля на квантовой яме. Данные определения будут использованы в разд. 2.4 для анализа взаимовлияния эффектов бистабильности отклика возбуждаемой моды и ее неустойчивости относительно параметрического рассеяния в состоянии $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$.

В начале данного раздела отмечалось, что стационарные решения в области отрицательной производной $d|\mathcal{P}_0^2|/d|\mathcal{F}_0^2|$ неустойчивы. Этот факт не следует из уравнений типа (53) или (56), но требует специального исследования. Нам нужно вернуться к исходной системе (41, 42), сделав подстановку (48, 49, 50), и проверить, будет ли малое отклонение $\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}_p, t)$ от стационарного решения $\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) \equiv \mathcal{P}_0$ затухать или нарастать со временем. Если *малые отклонения* от предполагаемого решения (т. е. возможные флуктуации) со временем усиливаются, решение неустойчиво, причем неустойчивость может возникнуть как в самой моде $\mathbf{k}_p$ (что приводит к бистабильности отклика и возможности критической трансформации состояния), так и в какой-либо другой моде.

В следующем разделе мы рассчитаем спектр малых возмущений *над* состоянием системы, в котором она содержит единственную макрозаполненную моду $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$.

2.3 Перенормировка спектра поляритона. Анализ устойчивости относительно рассеяния

Обратимся к ситуации (48, 49, 50) и исследуем устойчивость возбуждаемой поляритонной моды с заданной амплитудой $\mathcal{P}_0$ относительно распада $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i)$.

Это можно сделать, линеаризовав систему (41, 42) по малым возмущениям комплексных амплитуд “сигнала” $\{\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t), \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)\}$ и “холостого сигнала” $\{\tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}', t), \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}', t)\}$, где $\mathbf{k}' = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}$. Получаем уравнения

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_C(\mathbf{k}) \right] \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) = \beta(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t), \quad (75)$$

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_X \right] \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) = A \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) + 2V |\mathcal{P}_0|^2 \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) + V e^{-2i\omega_p t} \mathcal{P}_0^2 \tilde{\mathcal{P}}^*(\mathbf{k}', t), \quad (76)$$

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} + E_C^*(\mathbf{k}') \right] \tilde{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}', t) = -\beta^*(\mathbf{k}') \tilde{\mathcal{P}}^*(\mathbf{k}', t), \quad (77)$$

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} + E_X^* \right] \tilde{\mathcal{P}}^*(\mathbf{k}', t) = -A^* \tilde{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}', t) - 2V |\mathcal{P}_0|^2 \tilde{\mathcal{P}}^*(\mathbf{k}', t) - V e^{2i\omega_p t} (\mathcal{P}_0^*)^2 \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t). \quad (78)$$

Правило $\omega_s + \omega_i = 2\omega_p$ позволяет искать решения вида

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, & \tilde{\mathcal{E}}^*(\mathbf{k}', t) &= \tilde{\mathcal{E}}'^*(\mathbf{k}') e^{i(2\omega_p - \omega)t}, \\ \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) &= \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}) e^{-i\omega t}, & \tilde{\mathcal{P}}^*(\mathbf{k}', t) &= \tilde{\mathcal{P}}'^*(\mathbf{k}') e^{i(2\omega_p - \omega)t}, \end{aligned}$$

что приводит к замкнутой линейной системе

$$\hbar\omega \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) \\ \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}) \\ \tilde{\mathcal{E}}'^*(\mathbf{k}') \\ \tilde{\mathcal{P}}'^*(\mathbf{k}') \end{pmatrix} = \hat{L}(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{E}}(\mathbf{k}) \\ \tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}) \\ \tilde{\mathcal{E}}'^*(\mathbf{k}') \\ \tilde{\mathcal{P}}'^*(\mathbf{k}') \end{pmatrix}, \quad (79)$$

где

$$\hat{L}(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0) = \begin{pmatrix} E_C(\mathbf{k}) & \beta(\mathbf{k}) & 0 & 0 \\ A & E_X + 2V|\mathcal{P}_0|^2 & 0 & V\mathcal{P}_0^2 \\ 0 & 0 & 2E_p - E_C^*(\mathbf{k}') & -\beta^*(\mathbf{k}') \\ 0 & -V(\mathcal{P}_0^*)^2 & -A^* & 2E_p - E_X^* - 2V|\mathcal{P}_0|^2 \end{pmatrix} \quad (80)$$

($\mathcal{P}_0$ — “управляющий параметр”).

Собственные частоты $\omega = \Omega(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ задачи (79, 80) определяют дисперсию поляритонов с учетом экситон-экситонного взаимодействия в приближении (48, 49, 50); в этом смысле мы говорим о перенормировке “свободной” дисперсии

$$E_{\text{LP,UP}}(\mathbf{k}) \mapsto E_{\text{LP,UP}}^{(\text{ren})}(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0))$$

по мере изменения интенсивности внешнего поля. Два собственных значения — например,

$$\hbar\Omega_1 = E_s \equiv E_{\text{LP}}^{(\text{ren})}, \quad \hbar\Omega_2 = E_i$$

— определяют энергию “сигнала” (s) и “холостого сигнала” (i), тогда как $\Omega_{3,4}$ относятся к верхней ветви дисперсии; при этом, в силу сохранения энергии и момента,

$$\text{Re} \{E_s(\mathbf{k}) + E_i(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})\} - 2E_p = 0, \quad (81)$$

если рассеяние осуществляется в пределах нижней поляритонной ветви.

Отметим, что перенормированная собственная энергия $\text{Re } E_{\text{LP}}^{(\text{ren})}(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$, рассчитанная для $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$, *не совпадает* с эффективной резонансной энергией $E_0^{(r)}(\mathcal{P}_0)$ возбуждаемой моды поля, определяемой выражением (63), — за исключением предельного случая, когда $\mathcal{P}_0 = 0$ и, следовательно,

$$E_0^{(r)}(\mathcal{P}_0=0) = \text{Re } E_{\text{LP}}^{(\text{ren})}(\mathbf{k}_p; \mathcal{P}_0=0) = \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p).$$

Эти величины имеют разный физический смысл. Эффективная резонансная энергия (63) определяет стационарный отклик *макрозаполненной* моды поля, осциллирующего с частотой E_p [см. (49)], на внешнее поле накачки (разд. 2.2). С другой стороны, значения $E_{\text{LP}}^{(\text{ren})}(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ определяют спектр *малых* возбуждений $\tilde{\mathcal{P}}$ над заданным состоянием с макрозаполненной модой $\mathbf{k}_p$, имеющей амплитуду $\mathcal{P}_0$.

Расчёт собственных значений Ω линейной задачи (79, 80) позволяет проанализировать устойчивость системы; именно, для произвольной гармоник $\mathbf{k}$ можно определить *инкремент нарастания* (наибольший показатель Ляпунова)

$$\Gamma(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0) = \max \{ \text{Im } \hbar \Omega_l(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0) \mid l = 1, 2, 3, 4 \}. \quad (82)$$

Если $\Gamma(\mathbf{k}) < 0$ для всех $\mathbf{k}$, то решение (48, 49) (стационарное одномодовое решение) является асимптотически устойчивым, поскольку $|\tilde{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)| \propto \exp[\Gamma(\mathbf{k})t/\hbar] \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. В противном случае инкремент нарастания положителен, $\Gamma(\mathbf{k}) > 0$, и такое решение оказывается неустойчивым *относительно рассеяния* в состояния $\{ \mathbf{k} \mid \Gamma(\mathbf{k}) > 0 \}$. Можно показать, что для самой раскачиваемой моды условие $d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2) > 0$ эквивалентно $\Gamma(\mathbf{k}_p; \mathcal{P}_0) < 0$; точнее,

$$\text{sgn } \Gamma(\mathbf{k}_p; \mathcal{P}_0) = -\text{sgn } \frac{d(\mathcal{F}_0^2)}{d|\mathcal{P}_0^2|}, \quad (83)$$

что составляет доказательство абсолютной устойчивости состояний *строго одномодовой* системы в области $d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2) > 0$ и, соответственно, неустойчивости в области $d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2) < 0$.

Мы можем рассчитать *пороговое значение* амплитуды экситонной поляризации

$$|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}| = \inf_{\Gamma(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0) \geq 0} |\mathcal{P}_0|, \quad (84)$$

определяющее нижнюю границу области неустойчивости (для системы в целом). Справедлива оценка

$$V|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|^2 \sim |\text{Im } E_{\text{LP}}|, \quad (85)$$

выражающая качественное определение порога рассеяния: “сигнальная” мода $\mathbf{k}_s \neq \mathbf{k}_p$ становится неустойчивой тогда, когда ее нарастание за счет рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_s, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s)$ полностью компенсирует затухание “в единицу времени”, определяющееся мнимой частью E_{LP} .

Подчеркнём, что в линейном приближении интенсивность поляритон-поляритонного рассеяния определяется функцией стационарного отклика “внутреннего” поля $\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)$. В зависимости от вида этой функции (а также временного профиля “включения” накачки $\mathcal{F}_0(t)$) возможны качественно различные режимы возбуждения системы.

2.4 Взаимовлияние бистабильности и параметрической неустойчивости. Жесткое возбуждение поляритон-поляритонного рассеяния

Квазиодномерная модель параметрического осциллятора [8, 72] описывает распад возбуждаемого состояния на две рассеянные гармоники — в том случае, когда, по достижении критического значения $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{(\text{thr})}$, система теряет устойчивость для “сигнального” и “холостого” состояний с *малыми* инкрементами нарастания. Предполагается, что заполнение этих состояний приводит к эффективному подавлению рассеяния в близкие состояния с меньшими значениями инкремента и что амплитуда возбуждаемой моды при этом стабилизируется. В двумерной системе такое рассеяние происходит в направлениях, образующих “восьмерку” в пространстве квазиволновых векторов ([68, 69]; разд. 1.2.2). В данной работе будет рассмотрен качественно иной сценарий развития неустойчивости.

В системах с *бистабильным откликом* параметрическое рассеяние может возникать *жестко* — в том случае, когда, по мере “включения” накачки, раскачиваемая гармоника теряет устойчивость в критической точке

$$\mathcal{F}_0^{(\text{crit})} : \lim_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0^{(\text{crit})} - 0} d|\mathcal{P}_0^2|/d(\mathcal{F}_0^2) = \infty.$$

Тогда происходит резкое увеличение её амплитуды (рис. 7), которое переводит систему в область сильной неустойчивости относительно рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$:

$$\left| \frac{\hbar}{\max_{\mathbf{k}} \Gamma(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0^{(\text{lower})})} \right| \gg \tau_{\text{LP}}, \quad \frac{\hbar}{\max_{\mathbf{k}} \Gamma(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0^{(\text{upper})})} \sim \tau_{\text{LP}}. \quad (86)$$

В общем случае сценарий эволюции системы определяется соотношением значений $|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|$, $|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|$ и $|\mathcal{P}_0^{(\text{upper})}|$, а также профилем накачки $\mathcal{F}_0(t)$; далее мы, как правило, будем полагать, что накачка “включается” достаточно медленно по сравнению с характерными временами затухания $\tau_{\text{LP}} \equiv \hbar/|\text{Im } E_{\text{LP}}|$. Отметим, что соотношение

$$V|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|^2 \sim V|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2 \sim |\text{Im } E_{\text{LP}}| \quad (87)$$

характеризует весьма общее свойство исследуемой системы в области бистабильного отклика $D > \sqrt{3} \cdot |\text{Im } E_{\text{LP}}|$ [см. формулы (62) и (85)].

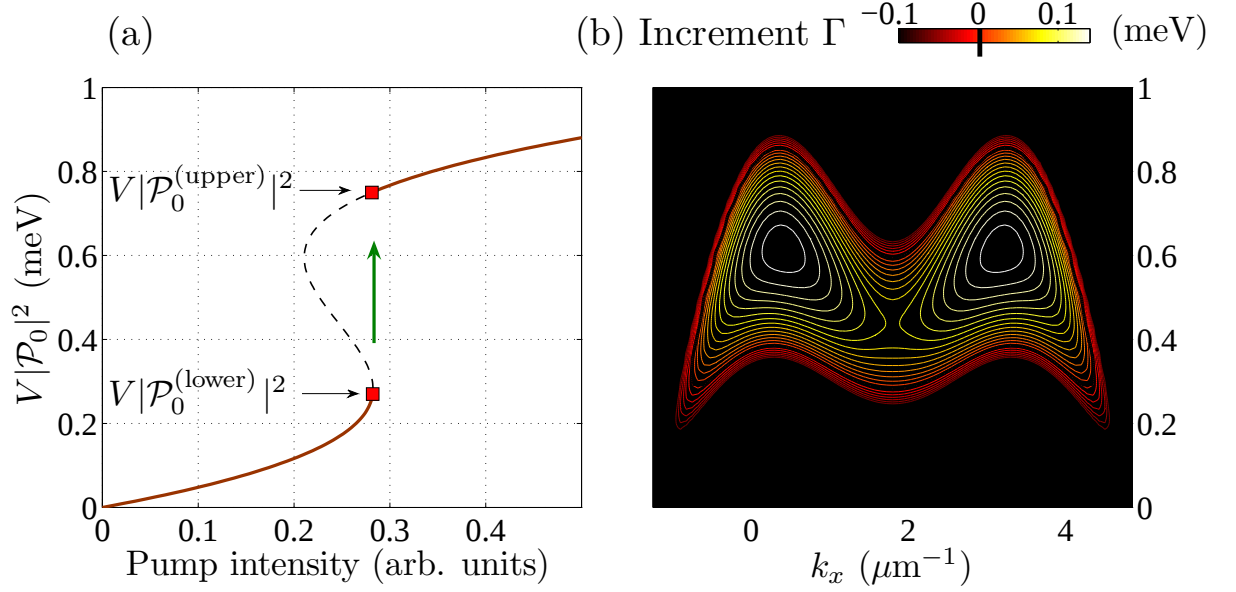


Рис. 7. (a) Функция стационарного отклика возбуждаемой моды (зависимость $V|\mathcal{P}_0|^2$ от $\mathcal{F}_0^2$) для $|\mathbf{k}_p| = k_{px} = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$ и $D = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) = 0.48 \text{ мэВ}$. Значения $V|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2$ и $V|\mathcal{P}_0^{(\text{upper})}|^2$, отвечающие скачку поля в точке потери устойчивости одно-модового решения, отмечены квадратами. (b) Зависимость инкремента нарастания Γ произвольной гармоники поля на оси $k_y = 0$ от k_x и квадрата амплитуды экситонной поляризации раскачиваемой моды, $\Gamma = \Gamma(k_x, |\mathcal{P}_0|^2)|_{k_y=0}$. Показанные контуры соответствуют диапазону значений Γ от -0.1 до 0.14 мэВ с шагом 0.01 мэВ ; черной линией отмечен контур нулевого инкремента, определяющий границу области неустойчивости. Вертикальные оси панелей (a) и (b) совпадают.

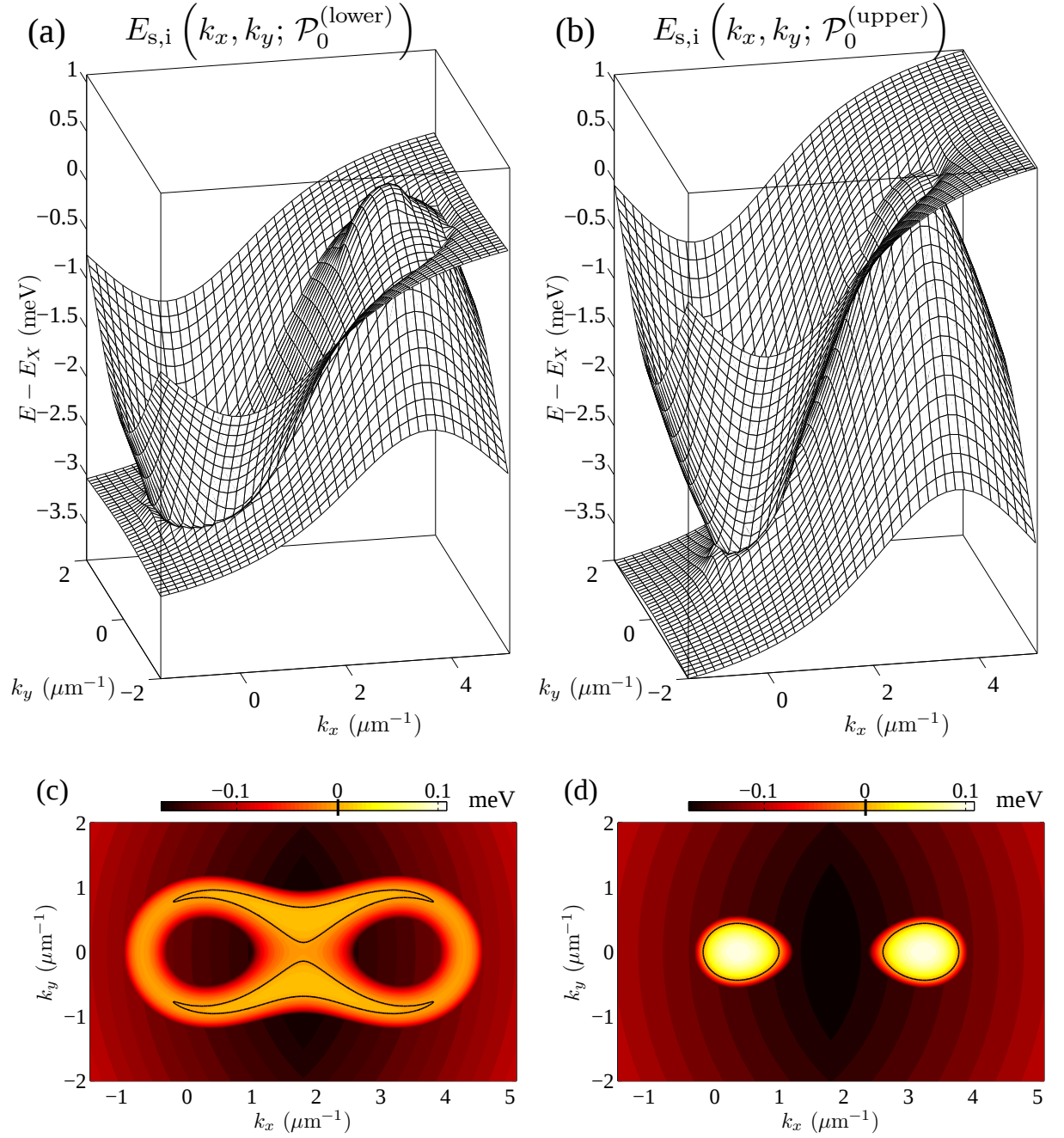


Рис. 8. (a,b) Действительная часть перенормированной энергии состояний “сигнала” и “холостого сигнала” рассеяния $\text{Re } E_{s,i}(k_x, k_y; \mathcal{P}_0)$ для $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{(\text{lower})}$ (панель a) и $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{(\text{upper})}$ (панель b). Значения $\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}$ и $\mathcal{P}_0^{(\text{upper})}$ указаны на рис. 7. Соответствующие распределения инкремента $\Gamma = \Gamma(k_x, k_y; \mathcal{P}_0)$ представлены на панелях (c) и (d). Цветовые схемы панелей (c) и (d) совпадают. Контуры нулевого инкремента, определяющие границы областей неустойчивости, отмечены черными линиями.

На рис. 7 и 8 представлена ситуация, когда $|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}| \lesssim |\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|$. В состояниях системы, относящихся к нижней ветви S-контура стационарного одномодового решения $\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)$ (рис. 7a), область пересечения дисперсионных поверхностей $E_s(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ и $E_i(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ образует характерную “восьмерку” в k -пространстве (рис. 8a). Достижение порога рассеяния (84) приводит к слабой неустойчивости $[\hbar\Gamma^{-1} \gg \tau_{\text{LP}}]$ этой же области k -состояний (рис. 8c) согласно законам сохранения. С другой стороны, рост плотности накачки при $\mathcal{F}_0 \gtrsim \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{lower})})$ должен привести к бифуркации решения — исчезновению “нижнего” устойчивого состояния — и переходу на верхнюю ветвь S-контура. Это означает резкое увеличение амплитуды раскачиваемой моды $|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)|$ и *синий сдвиг*

$$\Delta(\text{Re } E_X^{(\text{ren})}) \sim 2V \left(|\mathcal{P}_0^{(\text{upper})}|^2 - |\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2 \right) \quad (88)$$

собственной энергии экситона, перенормированной за счет взаимодействия

$$(\mathbf{k}, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_p, \mathbf{k}) : \quad H_{X-X}^{(1)} = 2V \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}_0^* \mathcal{P}_0 \mathcal{P}^*(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}) \quad (89)$$

($\mathcal{P}_0$ — параметр, Δ означает “изменение”). Согласно законам сохранения, дисперсионные поверхности “сигнала” и “холостого сигнала” рассеяния сдвигаются в противоположные стороны, т. е.

$$\Delta(\text{Re } E_{s,i}) = \pm \Delta(\text{Re } E_{\text{LP}}^{(\text{ren})}).$$

В соответствии с этим пересечение $\text{Re } E_s(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ и $\text{Re } E_i(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ для $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0^{(\text{upper})}$ (и, вообще, для всех достаточно больших значений $|\mathcal{P}_0|$, которым соответствует широкий диапазон значений внешней накачки) образовано компактными областями $\mathbf{k}$ вокруг $\mathbf{k}_s \sim 0$ и $\mathbf{k}_i \sim 2\mathbf{k}_p$ (рис. 7 и 8b). *Площадь* области пересечения является существенно конечной, поскольку взаимодействие

$$(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) : \quad H_{X-X}^{(2)} = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \left(\mathcal{P}_0 \mathcal{P}_0 \mathcal{P}^*(\mathbf{k}) \mathcal{P}^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \text{с. с.} \right), \quad (90)$$

учтенное элементами $\hat{L}_{2,4} = V\mathcal{P}_0^2$ и $\hat{L}_{4,2} = -\hat{L}_{2,4}^*$ матрицы (80), приводит к характерному “склеиванию” дисперсионных поверхностей¹⁰; по этой причине формула (88)

¹⁰ Это соответствует т. н. “антиэрмитову связыванию” собственных состояний. В качестве примера можно привести матрицу

$$\begin{pmatrix} \omega_1 + i\gamma & X \\ -X^* & \omega_2 + i\gamma \end{pmatrix},$$

которая имеет собственные значения $\Omega_{1,2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + i\gamma \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)^2 - |X|^2}$. Вещественные части $\Omega_{1,2}$ совпадают в области $|\omega_1 - \omega_2| \leq 2|X|$, тогда как значения мнимых частей ($\text{Im } \Omega_{1,2}$) расталкиваются на $2|X|$ при $\omega_1 = \omega_2$. Матрица (80) обладает аналогичными свойствами. В частности, площадь области “склеивания” поверхностей $\text{Re } E_s(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ и $\text{Re } E_i(\mathbf{k}; \mathcal{P}_0)$ растет с увеличением максимума инкремента $\max_{\mathbf{k}} \Gamma(\mathbf{k}, \mathcal{P}_0)$.

не является точной. Распределение инкремента $\Gamma = \Gamma(k_x, k_y; \mathcal{P}_0^{(\text{upper})})$, представленное на рис. 8d, обнаруживает *сильную неустойчивость* $[\hbar\Gamma^{-1} \sim \tau_{\text{LP}}]$ множества k -состояний вокруг $\mathbf{k}_s \sim 0$ и $\mathbf{k}_i \sim 2\mathbf{k}_p$.

В том случае, когда $|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}| > |\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|$, все состояния нижней ветви S-контура являются абсолютно устойчивыми. Превышение критического значения амплитуды накачки $\mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{lower})})$ приводит к “прыжку” на верхнюю (ставшую единственной) ветвь устойчивости одномодовых состояний, и, как и в случае, описанном выше, происходит *жесткое* возбуждение поляритон-поляритонного рассеяния.

Нам осталось рассмотреть ситуацию, когда

$$|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}| < |\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}| \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}) \lesssim \mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}), \quad (91)$$

т. е. амплитуда накачки соответствует нижней ветви S-контура *одномодового* решения, однако такое состояние неустойчиво относительно распада $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$ и начинается *медленное*, в сравнении с “временем жизни”, заполнение сигнальных мод¹¹. Нарастание суммарной интенсивности рассеянных мод приводит к синему сдвигу *резонансной энергии* (73) возбуждаемой моды поля. Это означает уменьшение эффективной расстройки частоты возбуждения

$$D^{(\text{eff})}(\{\mathcal{P}\}) = E_p - E_0^{(r)}(\{\mathcal{P}\})$$

(т. е. эффективное приближение к резонансу), что, в свою очередь, приводит к нарастанию амплитуды возбуждаемой моды $|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0; \{\mathcal{P}\})|$, т. к. для состояний *нижней* ветви S-контура

$$|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0; D_1^{(\text{eff})})| > |\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0; D_2^{(\text{eff})})| \quad \text{при} \quad \sqrt{3} \cdot |\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)| < D_1^{(\text{eff})} < D_2^{(\text{eff})}. \quad (92)$$

Таким образом, рост $V \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k})|^2$ приводит к росту $V|\mathcal{P}_0|^2$ и, следовательно, к дальнейшему увеличению инкремента “сигнальных” состояний, т. е. возникает положительная обратная связь сигнала и возбуждаемой моды. Другими словами, система постепенно “затягивается” в область всё большей параметрической неустойчивости в случае сколь угодно малого *исходного* превышения порога рассеяния $\mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}) > 0$. Ниже будет представлено более строгое обоснование данного утверждения.

¹¹ Случай (91) соответствует достаточно высоким значениям расстройки накачки D . Действительно, из формулы (60) следует, что $|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2$ растет с увеличением $\text{Re } Z = D$ при $D \gtrsim 2 \cdot |\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)|$, тогда как значение $|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|^2$ остается практически постоянным. Если теперь предположить, что по сравнению со временем жизни поляритона накачка включает-ся “бесконечно медленно” (что соответствует экспериментальным условиям режима непрерывного возбуждения), мы придем к ситуации (91) в достаточно широкой области частот накачки.

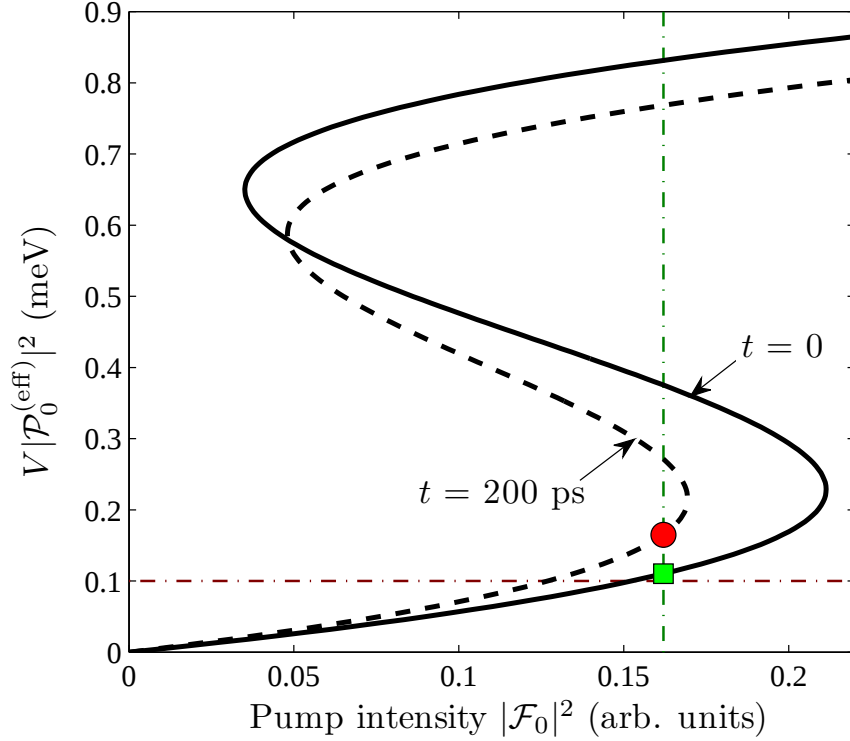


Рис. 9. Функция квазистационарного отклика возбуждаемой поляритонной гармоники (зависимость $V|\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}|^2$ от $\mathcal{F}_0^2$) в случае (91). Горизонтальная прямая $V|\mathcal{P}_0|^2 = 0.10$ meV соответствует порогу (84) неустойчивости *одномодового* решения, вертикальная прямая — фиксированной интенсивности накачки $\mathcal{F}_0^2 = 0.162$ (отн. ед.). Сплошная кривая соответствует моменту $t = 0$ и совпадает с функцией отклика строго одномодовой системы. Пунктирная кривая — решение уравнения (94) для $t = 200$ пс. Функция (95) рассчитана путем численного решения полной системы (41, 42). Маркеры “квадрат” и “кружок” показывают значения $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ для $t = 0$ и $t = 200$ пс, соответственно, и также отвечают решению полной системы (41, 42). Явная зависимость от времени величин $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p; t)|^2$ и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{E}(\mathbf{k}; t)|^2$ показана на рис. 10. Излучательное время жизни экситона составляет 20 пс ($\text{Im } E_X = -0.04$ мэВ), все остальные параметры системы совпадают с теми, что указаны в подписи к рис. 5. Параметры накачки: $|\mathbf{k}_p| = 1.8$ мкм $^{-1}$, $D = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) = 0.48$ мэВ.

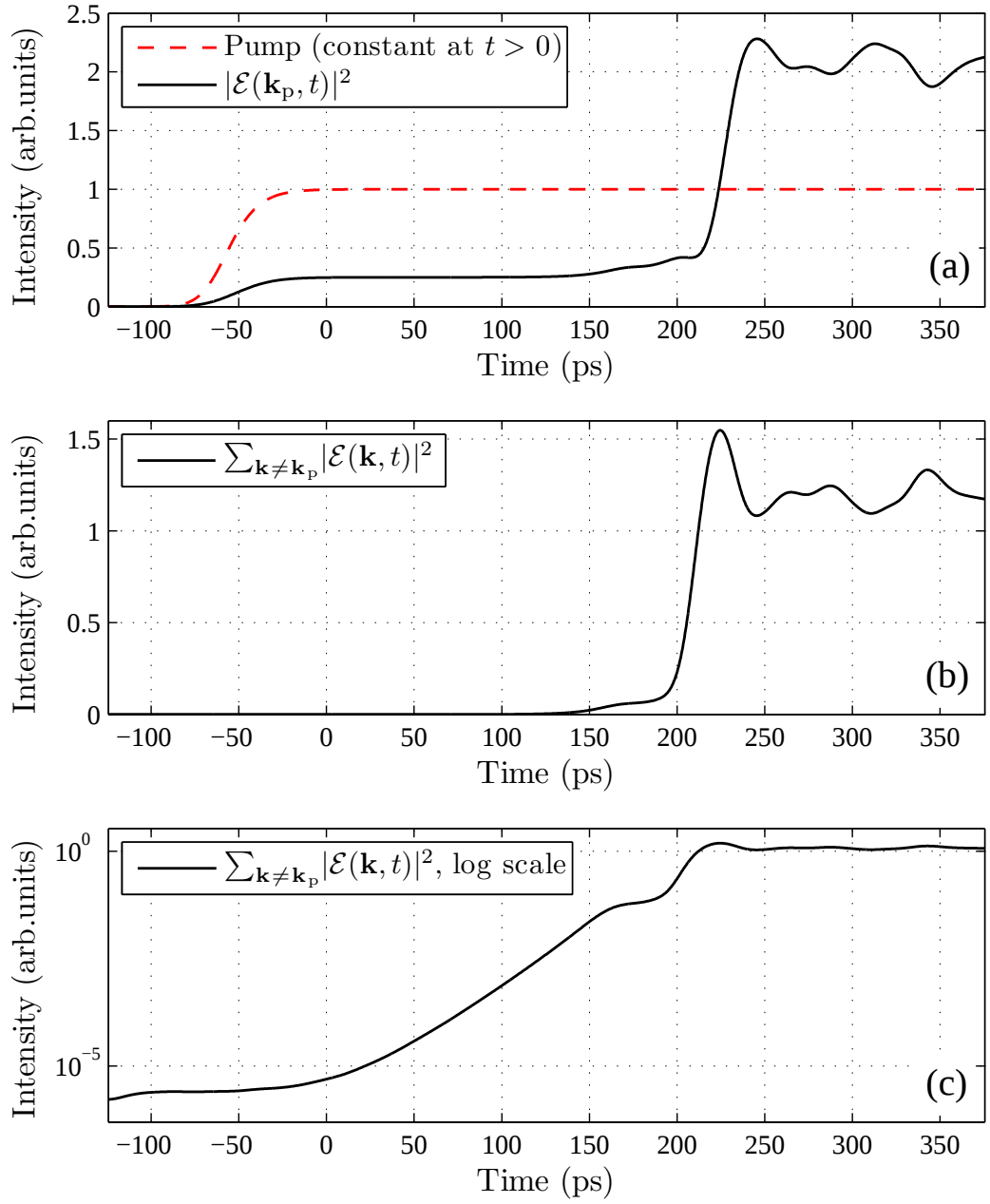


Рис. 10. Явная зависимость от времени величин $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p; t)|^2$ (панель *a*) и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{E}(\mathbf{k}; t)|^2$ (панели *b* и *c*, на последней использован логарифмический масштаб оси ординат), рассчитанная путем решения системы (41, 42) и соответствующая примеру, представленному на рис. 9. Форма возбуждающего импульса $|\mathcal{F}(t)|^2$ показана на панели *a* в относительных единицах (пунктирная кривая). При $t > 0$ накачка постоянна и соответствует вертикальной прямой на рис. 9. Динамика системы после “прыжка”, происходящего при $t \approx 200$ пс, пока не обсуждается; соответствующие вопросы будут рассмотрены в гл. 3.

С целью проиллюстрировать этот процесс вычислим функцию *квазистационарного* отклика возбуждаемой моды с учетом обратного влияния “сигнала”, рассеянного в состоянии с $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$:

$$\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}(\mathcal{F}_0; t) = \mathcal{P}_0^{(\text{eff})}(\mathcal{F}_0; \{\mathcal{P}(t)\}); \quad (93)$$

Зависимость $|\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}|^2$ от $\mathcal{F}_0^2$ (рис. 9) определяется решениями кубического уравнения

$$|\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}|^2 \cdot \left| E_p - E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) - \tilde{V}S(t) - \tilde{V}|\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}|^2 \right|^2 = \tilde{\alpha}^2 |\mathcal{F}_0|^2 \quad (94)$$

[см. (72)], где

$$S(t) \equiv 2 \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 + e^{-2i \arg \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t); \quad (95)$$

в разд. 2.2 показано, что колы скоро амплитуды $|\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|$ меняются со временем *медленно*, функция $S(t)$ является так же медленно меняющейся (вторая сумма в формуле (95) не зависит от $e^{-i\omega_{\text{LP}}(\mathbf{k})t}$).

Отметим, что критическое значение амплитуды внешнего поля, соответствующее граничной точке нижней ветви S-контура,

$$\mathcal{F}_0^{(\text{crit})}(t) : \lim_{\mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F}_0^{(\text{crit})}(t) - 0} \frac{d}{d(\mathcal{F}_0^2)} |\mathcal{P}_0^{(\text{eff})}(\mathcal{F}_0; t)|^2 = \infty,$$

уменьшается со временем вследствие уменьшения значения эффективной расстройки $D^{(\text{eff})}(\{\mathcal{P}(t)\})$. Если, по мере относительно плавного заполнения сигнальных гармоник, разность $\mathcal{F}_0^{(\text{crit})}(t) - \mathcal{F}_0$ уменьшится до нуля ($\mathcal{F}_0$ — заданная амплитуда накачки), система окажется в области притяжения верхней ветви S-контура, что приведет к скачку $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|$ и переходу в жесткий режим рассеяния (см. рис. 10). Это доказывает, что плавный переход к состоянию с нулевой или отрицательной эффективной расстройкой (в котором достигается равновесие с накачкой) в рассматриваемом случае невозможен.

Приведем более строгое обоснование данного механизма развития неустойчивости: покажем, что по достижении точки порога рассеяния, находящейся на нижней ветви S-контура, возникает положительная обратная связь сигнала и возбуждаемой моды, приводящая к скачку интенсивности поля в активном слое. Вернемся к обозначениям (57), (65), (67) и (71), введенным в разд. 2.2, и запишем формулу (72) в виде

$$\bar{\mathcal{P}}_0^2 = \frac{\tilde{\alpha}^2 \mathcal{F}_0^2}{|Z - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2|^2} = \frac{\tilde{\alpha}^2 \mathcal{F}_0^2}{(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2)^2 + (Z_2)^2}, \quad (96)$$

где

$$Z_1(t) = \text{Re } Z(t) = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) - 2\tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} [\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)]^2 - \tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \cos \bar{\phi}(\mathbf{k}, t), \quad (97)$$

$$Z_2(t) = -\text{Im } Z(t) = \text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) + \tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \sin \bar{\phi}(\mathbf{k}, t). \quad (98)$$

Вычислим приращение $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)$ квазистационарной интенсивности возбуждаемой моды за счет изменения Z в некоторый момент времени (считая, что накачка $\mathcal{F}_0$ постоянна):

$$\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2) = -\frac{2\tilde{\alpha}\mathcal{F}_0^2 \left[\left(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \right) \left(\delta Z_1 - \tilde{V}\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2) \right) + Z_2\delta Z_2 \right]}{\left[\left(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \right)^2 + Z_2^2 \right]^2},$$

откуда

$$\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2) = \frac{2\tilde{\alpha}^2\mathcal{F}_0^2 \left[\left(\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 - Z_1 \right) \delta Z_1 - Z_2\delta Z_2 \right]}{\left[\left(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \right)^2 + Z_2^2 \right]^2 - 2\tilde{V}\tilde{\alpha}^2\mathcal{F}_0^2 \left(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \right)}. \quad (99)$$

Знаменатель выражения (99) обращается в нуль в точках $(\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2)_{1,2}$ бифуркации состояния возбуждаемой моды (с заданным Z), являющихся корнями квадратного уравнения $d(\mathcal{F}_0^2)/d(\bar{\mathcal{P}}_0^2) = 0$; в этом можно убедиться, подставив $|\mathcal{F}_0|^2$ из (96) и $(\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2)_{1,2}$ из (60) [см. также рис. 11]. Следовательно, на нижней ветви S-контура значения знаменателя положительны. Для того чтобы выяснить знак $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)$ в зависимости от Z и δZ , нужно определить знак выражения

$$\delta X = \left(\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 - Z_1 \right) \delta Z_1 - Z_2\delta Z_2, \quad (100)$$

стоящего в числителе (99). В согласии с уравнением (76), процессу распада возбуждаемой моды $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$ отвечает соотношение

$$\sin \bar{\phi}(\mathbf{k}, t) \equiv \sin \arg \left[\mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) (\mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t))^2 \right] < 0. \quad (101)$$

Оценим значения $\delta Z_{1,2}$ в случае *наиболее интенсивного* распада, когда $\bar{\phi}(\mathbf{k}, t) = -\pi/2$ для всех $\mathbf{k}$. Имеем

$$\begin{aligned} \delta Z_1(t) &= -4\tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \delta \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) = -4\tilde{V}\hbar^{-1} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} [\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)]^2 \Gamma(\mathbf{k}, t) \delta t, \\ \delta Z_2(t) &= -2\tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \delta \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) = -2\tilde{V}\hbar^{-1} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \Gamma(\mathbf{k}, t) \delta t \end{aligned}$$

(значения всех $\bar{\mathcal{P}}$ вещественны). Таким образом, $\delta Z_1 < 0$ и $\delta Z_2 < 0$, при этом $\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 - Z_1 < 0$ [см. (60)] и $Z_2 < 0$; следовательно,

$$\delta X = \left(Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \right) |\delta Z_1| - |Z_2| \cdot |\delta Z_2|. \quad (102)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |\delta Z_1| - |\delta Z_2| &= \tilde{V}\hbar^{-1} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \left[2(\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t))^2 + (\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t) - \bar{\mathcal{P}}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t))^2 \right] \Gamma(\mathbf{k}, t) \delta t \geq \\ &\geq |\delta Z_1|/2, \end{aligned} \quad (103)$$

откуда $|\delta Z_1| \geq 2|\delta Z_2|$, причем равенство достигается в случае строго симметричного относительно $\mathbf{k}_p$ распределения $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k})$. На нижней ветви S-контура выполняются соотношения

$$Z_1 > \sqrt{3} \cdot |Z_2|, \quad \tilde{V} \bar{\mathcal{P}}_0^2 < \frac{2Z_1}{3} \quad (104)$$

[см. (59) и (60)], с помощью которых мы оценим *минимальное* значение величины $\delta X/\delta t$, определяющей знак $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)$ на нижней ветви, для заданного распределения $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k})$ и $\bar{\phi}(\mathbf{k}) = -\pi/2$ для всех $\mathbf{k}$. Положив $|\delta Z_1| = 2|\delta Z_2|$ (что, согласно (102) и (103), также соответствует условию минимума $\delta X/\delta t$), находим

$$\left. \frac{\delta X(t)}{\delta t} \right|_{\bar{\phi}=-\frac{\pi}{2}} > 2 \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right] \cdot |Z_2(t)| \cdot \tilde{V} \hbar^{-1} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 \Gamma(\mathbf{k}, t). \quad (105)$$

Ниже порога рассеяния, когда $\mathcal{F}_0 < \mathcal{F}_0(\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}) < \mathcal{F}_0^{(\text{crit})}$, имеем тривиальный результат $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)/\delta t = \delta X/\delta t = 0$, поскольку $\Gamma(\mathbf{k}) < 0$ для всех $\mathbf{k}$ и, соответственно, $\mathcal{P}(\mathbf{k}) = 0$ для всех $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$. Выше порога сумма по $\mathbf{k}$, входящая в правую часть соотношения (105), принимает только положительные значения, причем $|\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 \Gamma(\mathbf{k}, t) \geq 0$ для всех $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$, поскольку моды, *устойчивые* относительно рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, имеют либо нулевую интенсивность, либо нулевой инкремент нарастания, а неустойчивые моды характеризуются положительным инкрементом. Следовательно, $\delta X/\delta t > 0 \Rightarrow \delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)/\delta t > 0$, т.е. рост $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2$ действительно приводит к росту $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ и дальнейшему увеличению инкремента сигнальных состояний. С течением времени эффективная резонансная частота (73) приближается к частоте накачки, что приводит к увеличению $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)/\delta t$, — однако и коэффициент затухания (74), который дает *отрицательный* вклад в значение $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)$, нарастает при этом за счет ускорения рассеяния. Таким образом, осуществляются конкурирующие процессы приближения к резонансу и сглаживания резонансного пика вследствие роста потерь. Смысл соотношения (105) — и результат, составляющий цель предшествующих вычислений — состоит в том, что скорость изменения амплитуды раскачиваемой моды в области *нижней* ветви S-контура принимает только положительные значения *несмотря на рост эффективного коэффициента затухания*. Другими словами, это означает, что с течением времени нуль знаменателя (99) достигается¹² раньше, чем точка смены знака числителя (99), совпадающая с точкой смены

¹²Формально говоря, знаменатель выражения (99) может и не иметь нулей в случае малых $\mathcal{F}_0$. Однако нужно заметить, что, по определению, $\mathcal{F}_0$ превосходит порог рассеяния, т.е. $V|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)|^2 \gtrsim [\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_s) \cdot \text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_i)]^{1/2}$. С помощью этого условия можно показать, что нуль знаменателя (99) действительно существует и достигается по крайней мере начиная с некоторого значения *исходной* расстройки D , определяющегося дисперсией поляритона $E = E_{\text{LP}}(\mathbf{k})$. Расчеты показывают, что для характерной дисперсии поляритона в GaAs резонаторе это происходит во всех случаях $D \gtrsim 2 \cdot |\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)|$.

знака функции $\delta X/\delta t$. Сделанный вывод является общим и не зависит от распределения $\bar{\phi}(\mathbf{k})$, что можно проверить путем аналогичных расчетов¹³. Заметим, в частности, что при $\bar{\phi}(\mathbf{k}, t) = -\pi/4$ для всех $\mathbf{k}$

$$\left(\frac{|\delta Z_1|}{|\delta Z_2|}\right)_{\bar{\phi}=\pi/4} \geq \frac{2-\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 2\sqrt{2}-1 = \min_{\{\bar{\phi}\}} \left(\frac{|\delta Z_1|}{|\delta Z_2|}\right)_{\bar{\phi}}$$

и

$$\frac{\delta X(t)}{\delta t} > 2 \left[\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} - 1 \right] \cdot |Z_2(t)| \cdot \tilde{V} \hbar^{-1} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 \Gamma(\mathbf{k}, t). \quad (106)$$

Выражение в правой части дает нижнюю оценку $\delta X/\delta t$ с учетом всех возможных распределений $\bar{\phi}(\mathbf{k})$ при заданных $\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k})$. Если бы, в противоположность полученному результату, мы обнаружили, что величина $\delta(\bar{\mathcal{P}}_0^2)/\delta t$ принимает отрицательные значения при некоторых $\{\bar{\phi}(\mathbf{k})\}$, нам следовало бы рассмотреть возможность образования стационарных распределений, в которых $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 = \text{const}$ и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 = \text{const}$ при $\mathcal{F}_0^2 = \text{const}$, и, шире, — возможность образования колебательных режимов, в которых суммарная интенсивность поля на квантовой яме $\sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 = \text{const}$ периодически перераспределяется между $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2$. Однако нами показано, что амплитуда возбуждаемой моды $|\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ [а вместе с ней $\Gamma(\mathbf{k})$] растет даже в условиях “оптимального” распада $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, и потому величина $\sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2$ также нарастает со временем. Подчеркнем, что этот вывод справедлив лишь для состояний *нижней* ветви S-контура эффективного отклика, а точнее — до тех пор, пока не будет достигнут нуль знаменателя (99).

Состояния системы, в которых функция

$$Y = \left[\left(Z_1 - \tilde{V} \bar{\mathcal{P}}_0^2 \right)^2 + Z_2^2 \right]^2 - 2\tilde{V} \tilde{\alpha}^2 \mathcal{F}_0^2 \left(Z_1 - \tilde{V} \bar{\mathcal{P}}_0^2 \right), \quad (107)$$

стоящая в знаменателе выражения (99), принимает отрицательные значения, неустойчивы относительно параметрического процесса $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p)$ — т. е. малые отклонения от $\bar{\mathcal{P}}_0$ нарастают сверхэкспоненциально даже при постоянном Z , когда $\delta Z_1 = \delta Z_2 = 0$ (см. рис. 11). Когда величина $Z_1 - \tilde{V} \bar{\mathcal{P}}_0^2$ уменьшается до

$$\frac{Z_1 + \sqrt{Z_1^2 - 3Z_2^2}}{3},$$

система достигает точки $Y = 0$ и происходит скачок суммарной интенсивности $\sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2$ поля на квантовой яме, т. е. осуществляется переход к новому состоя-

¹³В численном расчете, представленном на рис. 9 и 10, значение $\bar{\phi}$ для сигнальной моды составило около -0.4π по достижении порога ($t = 0$) и затем плавно уменьшалось в сторону $\bar{\phi} = -\pi/2$ в течение последующих 200 пс.

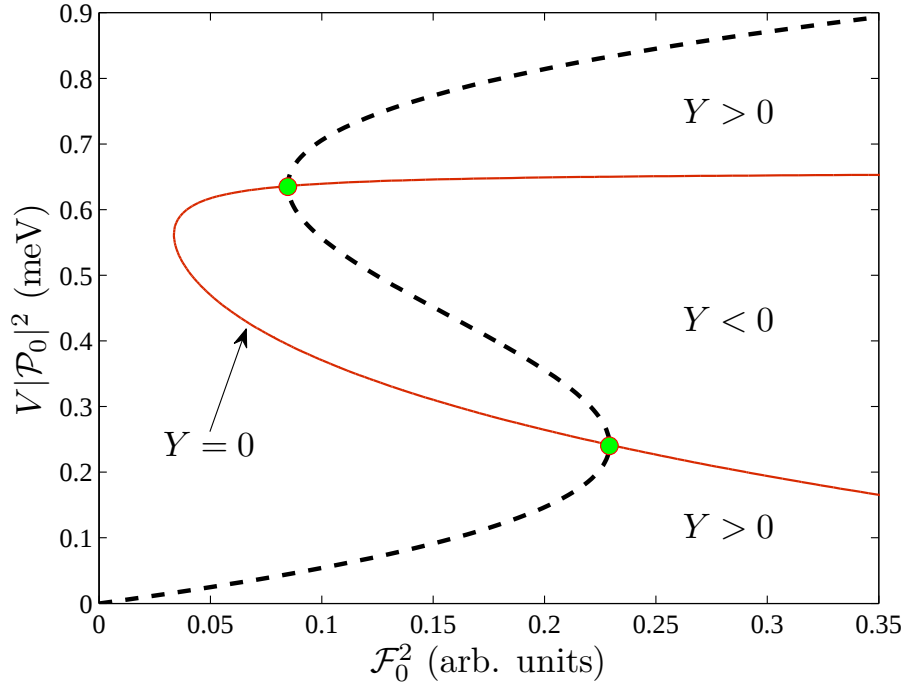


Рис. 11. Пунктирная кривая — функция квазистационарного отклика возбуждаемой моды, рассчитанная для некоторых заданных значений Z_1 и Z_2 [см. (96)]. Сплошная кривая — решение уравнения $Y(\mathcal{F}_0^2, \bar{\mathcal{P}}_0^2) = 0$ [см. (107)] с теми же $Z_{1,2}$. В точках бифуркации состояния возбуждаемой моды $[d(\mathcal{F}_0^2)/d(\bar{\mathcal{P}}_0^2) = 0]$ функция Y обращается в нуль вне зависимости от Z . В области $Y < 0$ устойчивых квазистационарных решений не существует.

нию $Y > 0$, в котором $Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \lesssim 0$.¹⁴

Соотношение $Z_1 - \tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \leq 0$ эквивалентно условию нулевой или отрицательной эффективной расстройки частоты возбуждения

$$D^{(\text{eff})}(\{\mathcal{P}\}) \equiv E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) - \tilde{V} |\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 - 2\tilde{V} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 - \tilde{V} \cdot \text{Re} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \leq 0 \quad (108)$$

[см. (73)]. В области $\tilde{V}\bar{\mathcal{P}}_0^2 \geq Z_1$ может быть достигнуто *равновесие с накачкой*, когда $|\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}_p, t)|^2 = \text{const}$ и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)|^2 = \text{const}$ [и, вообще говоря, $\text{Im } H = 0$, где функция H определена выражением (46)]. Более подробный анализ эволюции системы к равновесному состоянию составит содержание третьей главы этой работы.

Результаты численного анализа позволяют заключить, что сценарий жесткого возбуждения рассеяния является общим в области достаточно высоких значений расстройки $D = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) \gtrsim 2 \text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$. Жесткое (сверхэкспоненциальное) возбуждение рассеяния происходит вследствие возникновения сильной положительной обратной связи раскачиваемой моды и сигнала рассеяния по достижении порога неустойчивости системы. В некотором смысле расстройка частоты накачки является мерой отклонения от равновесия. По достижении порога — и, в ряде случаев, по истечении определенного времени медленного развития неустойчивости, осуществляющегося даже при постоянной накачке,¹⁵ — происходит взрывообразное усиление множества рассеянных мод, которое компенсирует расстройку накачки за счет синего сдвига резонансной энергии поля на квантовой яме.

2.5 Выводы и общие замечания о результатах второй главы

В разд. 2.1 представлена модель, описывающая динамику когерентных экситонных и фотонных состояний в активном слое планарного резонатора под действием когерентного фотовозбуждения с фиксированными частотой ω_p и квазиволновым вектором $\mathbf{k}_p$. Нами, таким образом, не рассматривается вопрос об исходном возникновении

¹⁴Как правило, такой переход уничтожает бистабильность отклика: в новом состоянии системы функция Y уже не имеет нулей. Но если теперь плавно уменьшить амплитуду накачки — и тем самым уменьшить $\sum_{\mathbf{k}} [\bar{\mathcal{P}}(\mathbf{k}, t)]^2$ — бистабильность снова появится, причем равновесие системы будет возможно только на *верхней* ветви $Y > 0$ (где $V\bar{\mathcal{P}}_0^2 \gtrsim Z_1$), ниже которой возникнет параметрически неустойчивая (“запрещенная”) область $Y < 0$. Это приводит к эффекту гистерезиса отклика, который обсуждается в разд. 3.4.

¹⁵Этот сценарий аналогичен т. н. *режиму с обострением*, характерному для многих нелинейных систем с положительной обратной связью. В качестве примера можно привести уравнение $dn/dt = n^a$, $n(0) > 0$, $a > 1$, решение которого имеет вид $n(t) = [(a-1)(t_0 - t)]^{-1/(a-1)}$; время $t_0 = [n(0)]^{1-a}/(a-1)$ называют “временем обострения” [80].

когерентности ([81]) в экситон-фотонной системе и не учитываются процессы типа спонтанного распада состояний. Данная глава посвящена анализу пороговых эффектов, связанных с потерей устойчивости возбуждаемой поляритонной моды; нелинейность системы, приводящая к возникновению параметрической неустойчивости, обусловлена экситон-экситонным взаимодействием

$$H_{X-X} = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{x}} |\mathcal{P}(\mathbf{x})|^4 = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_1) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_2) \mathcal{P}(\mathbf{k}_3) \mathcal{P}(\mathbf{k}_4).$$

В предположении, что система содержит единственную макрозаполненную моду $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$ (что справедливо для малых плотностей возбуждения), нами рассматриваются два типа неустойчивости. Первый соответствует случаю $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 = \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}_p$, т. е. речь идет о нелинейном самодействии возбуждаемой гармоники поля, приводящем к бистабильности отклика на накачку (разд. 2.2). В том случае, когда расстройка частоты накачки $E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)$ превосходит $\sqrt{3} \cdot |\text{Im } E_{LP}(\mathbf{k}_p)|$, зависимость *стационарного* значения интенсивности поля в активном слое $[|\mathcal{P}_0|^2 \text{ или } |\mathcal{E}_0|^2]$ от интенсивности внешнего поля $\mathcal{F}_0^2$ принимает вид S-образной кривой (рис. 6), причем решения в области отрицательной производной $d|\mathcal{P}_0|^2/d(\mathcal{F}_0^2) < 0$ параметрически неустойчивы; таким образом, существуют две отдельные ветви устойчивых состояний, являющихся аттракторами фазового пространства системы. Превышение критической интенсивности возбуждения, соответствующей граничной точке нижней устойчивой ветви S-контура, приводит к бифуркации системы и “прыжку” на верхнюю ветвь — т. е. к *резкому увеличению поля* на квантовой яме.

Отметим, что бистабильность отклика в случае накачки, действующей по нормали к плоскости активного слоя ($\mathbf{k}_p = 0$), была обнаружена экспериментально [82].

Второй тип неустойчивости одномодового решения — неустойчивость относительно рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, где $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$, возникающая пороговым образом по достижении критического значения интенсивности “внутреннего” поля $V|\mathcal{P}_0|^2 \sim |\text{Im } E_{LP}|$ (разд. 2.3). Этому явлению посвящено много работ ([7, 8], [68]–[77]), поэтому следует прояснить значение результатов, полученных нами, в контексте предыдущих исследований.

Первые исследования параметрического рассеяния в системе квазидвумерных поляритонов [7, 8, 68, 69] были основаны на предположении о плавном изменении $V|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)|^2$ по мере роста накачки. Это предположение справедливо при отрицательных (или очень малых положительных) расстройках $E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)$. В этом случае плавное превышение порога рассеяния приводит к плавному заполнению состояний в направлениях, образующих “восьмерку” в пространстве квазиволновых векторов.¹⁶

¹⁶Такое распределение было обнаружено экспериментально [83] в условиях *импульсного*,

Отсюда возникает “синий сдвиг” резонансной энергии, который приводит к увеличению эффективной расстройки и, следовательно, к уменьшению коэффициента поглощения волны накачки в активном слое; тем самым исходное превышение порога рассеяния компенсируется уменьшением $V|\mathcal{P}_0|^2$ по мере роста заполнения рассеянных поляритонных гармоник.¹⁷ В результате система переходит в новое стационарное состояние с $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|^2 = \text{const}$ и $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{P}(\mathbf{k})|^2 = \text{const}$ при $\mathcal{F}_0^2 = \text{const}$. Этот сценарий “мягкого” развития неустойчивости аналогичен *фазовому переходу второго рода*, происходящему в неравновесной системе под действием внешнего возбуждения, когда по достижении порога вся система согласованно и плавно переходит в ставшее более вероятным новое макроскопическое состояние. Развившиеся сигнальные моды играют роль *параметров порядка*, определяющих макроскопические свойства системы.

В разд. 2.4 рассмотрен качественно иной сценарий развития неустойчивости, осуществляющийся в области бистабильного отклика — *жесткое* возбуждение поляритон-поляритонного рассеяния, когда сколь угодно плавный рост плотности когерентной накачки приводит к скачку интенсивности возбуждаемой моды $V|\mathcal{P}_0|^2$ и *сильной неустойчивости* [$\hbar\Gamma^{-1} \sim \tau_{\text{LP}} = -\hbar/|E_{\text{LP}}|$] относительно рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, возникающей в конечной двумерной области k -состояний (рис. 7 и 8). Состояния, обнаруживающие максимальный инкремент нарастания, расположены в окрестностях $\mathbf{k}_s = 0$ и $\mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p$ (что, вообще говоря, справедливо для разных значений интенсивности и частоты накачки в широком диапазоне значений).

Модель, описывающая такой переход в случае, когда скачок $V|\mathcal{P}_0|^2$ предшествует параметрическому распаду (т. е. $V|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|^2 > V|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2$, см. рис. 7), была предложена Н. А. Гиппиусом и С. Г. Тиходеевым ([74]–[77]) и детально исследована в работе [A1] на примере двумерной системы. Настоящая работа содержит более общее рассмотрение, учитывающее обратное влияние неустойчивости сигнальных гармоник на состояние возбуждаемой моды. В частности, нами показано, что по достижении точки порога рассеяния, находящейся на нижней ветви устойчивости строго одномодовых решений ($V|\mathcal{P}_0^{(\text{thr})}|^2 < V|\mathcal{P}_0^{(\text{lower})}|^2$), возникает сильная положительная обратная связь сигнала и возбуждаемой моды, приводящая к скачку амплитуды поля на квантовой яме. Таким образом, установлено, что сценарий жесткого возбуждения параметрического рассеяния квазидвумерных поляритонов является общим в области достаточно больших расстроек накачки (см. примечание 11 на стр. 38). Сделанный вывод составляет основной результат данной главы.

Жесткое возбуждение поляритон-поляритонного рассеяния аналогично фазовому

с длительностью порядка нескольких пикосекунд, фотовозбуждения в окрестности точки перегиба нижней поляритонной ветви.

¹⁷Тем самым состояния системы, характеризующиеся сильной неустойчивостью $\hbar\Gamma^{-1} \sim \tau_{\text{LP}}$ в области $\mathbf{k} \sim 0$ (рис. 8*b,d*), являются недостижимыми.

переходу *первого* рода, поскольку в критической точке свойства системы меняются резко. Однако следует подчеркнуть, что состояние, в котором система оказывается после такой трансформации, является нестабильным; дальнейшая эволюция системы составляет предмет третьей главы.

3 Динамическая самоорганизация системы взаимодействующих поляритонов

В данной главе рассматривается динамика экситонных поляритонов в ситуации жесткого возбуждения параметрического рассеяния. В разд. 3.1 описан подход к анализу нерегулярной динамики средствами численного моделирования. Раздел 3.2 содержит исследование эволюции системы выше порога рассеяния; показано, что усиление множества рассеянных мод, происходящее в фазе острого развития неустойчивости, со временем приводит к выделению некоторой сигнальной гармоники (“конденсатной моды”) в области дна нижней поляритонной ветви. В разд. 3.3 показано, что такое состояние системы является существенно коллективным и что его устойчивость поддерживается за счет сильных корреляций в поведении взаимодействующих “надконденсатных” гармоник. В разд. 3.4 проанализированы результаты недавних экспериментов и, в частности, рассмотрен эффект гистерезиса сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой поляритонной моды.

3.1 Численный анализ эволюции системы поляритонов (общие замечания)

В разд. 2.3 представлен анализ устойчивости стационарного одномодового решения (48, 49) системы (41, 42) по отношению к *малым* флуктуациям; при этом амплитуда возбуждаемой моды $\mathcal{P}(\mathbf{k}_p) \equiv \mathcal{P}_0$ рассматривалась в качестве параметра линеаризованных уравнений (75–78). Это позволило сделать ряд предсказаний, касающихся развития неустойчивости системы (разд. 2.4 и 2.5). Однако очевидно, что коль скоро система достигает порога неустойчивости, такое приближение перестает работать: со временем интенсивность “сигнала” перестает быть “малой”, и рассеянные состояния оказывают обратное воздействие на возбуждаемую поляритонную моду. В разд. 2.4 было показано, что положительная обратная связь сигнала и возбуждаемой моды, возникающая в пороговой точке, приводит к жесткому возбуждению рассеяния. Чтобы проанализировать дальнейшую эволюцию системы, нужно решить исходные уравнения (41, 42) с помощью численных методов.

Специфика нашей задачи состоит в том, что по достижении порога система оказывается в области сильной неустойчивости, приводящей к быстрому росту сигнала. Более того: как будет показано далее, стационарное распределение амплитуд $|\mathcal{E}|$ и $|\mathcal{P}|$ (которое, по предположению, могло бы возникнуть со временем) оказывается недостижимым. *Квазистационарное* состояние системы, возникающее по завершении всех “быстрых” процессов развития неустойчивости, часто является *хаотическим*, т. е. характеризуется свойством экспоненциального разбегания траекторий, сколь угодно

близких в некоторый момент времени¹⁸ [80, 84]. Очевидно, что в этом случае уравнения не могут быть решены с произвольной точностью на достаточно большом отрезке времени. Выбранный нами способ решения аналогичен методу дискретных отображений, который часто используется для анализа хаотической динамики нелинейных систем [84]. Исходный отрезок времени $[0, T]$, на котором нужно решить уравнения, разбит на достаточно большое число равных отрезков $[t_n, t_{n+1}]$ ($n = 1, 2 \dots N-1$; $t_1 = 0$, $t_N = T$), в течение каждого из которых динамику системы можно считать регулярной и решать задачу стандартными методами (например, используя схему Рунге-Кутты); решив уравнения на n -м интервале, мы, тем самым, получаем начальные условия для $(n+1)$ -го¹⁹. Комплексная амплитуда ланжевеновской силы, фигурирующая в уравнении (42), случайным образом меняется в узлах разбиения: $\xi(\mathbf{k}; t_n \leq t < t_{n+1}) = \xi_n(\mathbf{k})$, при этом распределение $\xi_n(\mathbf{k})$ является равномерным ($\sqrt{\langle \xi_n^*(\mathbf{k}) \xi_n(\mathbf{k}) \rangle} \in [0, \xi_{\max}]$) во времени и k -пространстве. Таким образом, на каждом из $N-1$ интервалов мы можем обеспечить фиксированную точность решения, которую полагаем равной $10^{-1} \xi_{\max}$. Величина $\xi_{\max}$, заданная как расчетный параметр, составляет примерно 10^{-5} от характерного значения амплитуды $|\mathcal{E}|$ поля на квантовой яме (см. примечание 9 на стр. 26).

Система единиц для электрического поля и поля экситонной поляризации на квантовой фиксирована условием $A = V = 1$. Очевидно, что, вообще говоря, когерентная модель не позволяет вычислить точные характеристики рассеяния. Наша цель состоит в исследовании качественных сценариев эволюции системы, которые определяются, в конечном счете, параметрами дисперсии $E_C(\mathbf{k})$, E_X , $A\beta$, измеряемыми в единицах энергии (мэВ) и известными из эксперимента, — и не зависят от коэффициентов α , A/β и V , определяющих соотношения единиц измерения полей $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$. Критические значения интенсивности поля фигурируют в уравнениях в виде произведения $V \cdot |\mathcal{P}|^2$ (мэВ); таким образом, мы предполагаем, что значения $V|\mathcal{P}|^2$, достижимые в реальных системах, могут быть сравнимы с $|\text{Im } E_{\text{LP}}|$ [см. формулу (87)]. Опытные наблюдения пороговых эффектов параметрического рассеяния и бистабильности отклика убеждают в том, что такое предположение является совершенно оправданным.

¹⁸При этом область изменения амплитуд поля на квантовой яме остается ограниченной, поскольку излучение энергии за пределы резонатора в среднем компенсирует приток энергии от накачки.

¹⁹“Мера хаотичности” системы определяется некоторым обобщенным показателем Ляпунова Γ . Следовательно, значение $\delta t \equiv t_{n+1} - t_n$ должно быть много меньше $\hbar\Gamma^{-1}$. Характерное значение Γ , достижимое на верхней ветви S-контра (рис. 7 и 8d), составляет 0.1 мэВ; соответственно, $\hbar\Gamma^{-1} \approx 6.5$ пс. В расчетах, которые будут описаны ниже, заданы значения $T = 1400$ пс и $N = 2^{14} = 16384$, при этом $\delta t = T/(N-1) \approx 0.09$ пс.

3.2 Эволюция после прохождения порога неустойчивости: формирование сигнала рассеяния ($\mathbf{k}_s \approx 0$)

В данном разделе рассматривается решение системы (41, 42), параметры которой указаны на рис. 5. Параметры накачки:

$$|\mathbf{k}_p| = k_{px} = 1.8 \text{ мкм}^{-1}, \quad D = E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p) = 0.48 \text{ мэВ.}$$

Анализ устойчивости этой системы представлен рисунками 7 и 8. Уравнения (41, 42) решались на дискретной сетке квазиволновых чисел

$$-4.2 \text{ мкм}^{-1} \leq k_x \leq 7.8 \text{ мкм}^{-1}, \quad -3.0 \text{ мкм}^{-1} \leq k_y \leq 3.0 \text{ мкм}^{-1}$$

с шагом 0.1 мкм^{-1} в k_x - и k_y -направлениях.

Форма возбуждающего импульса $|\mathcal{F}_0(t)|^2$ (пунктирная линия на рис. 12a) была выбрана так, чтобы критическое значение интенсивности накачки достигалось плавно: рассчитанная зависимость $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ от $|\mathcal{F}_0(t)|^2$ практически не отклоняется от нижней ветви S-контура *стационарного* отклика одномодового решения по мере “включения” накачки. В области граничной точки нижней ветви ($\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0^{(\text{crit})}$) интенсивность накачки растет со скоростью

$$\frac{d}{dt} \left((\mathcal{F}_0(t))^2 / (\mathcal{F}_0^{(\text{crit})})^2 \right) \approx 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ пс}^{-1}.$$

Приближение к порогу (рис. 13a) сопровождается появлением слабого рассеяния в направлениях, образующих “восьмерку” — линию пересечения дисперсионных поверхностей “сигнала” и “холостого сигнала” (рис. 8a,c), в согласии с предсказанием линеаризованной модели (79, 80). Это рассеяние является настолько слабым, что практически не оказывает обратного влияния на динамику возбуждаемой моды.

Достижение критической интенсивности накачки приводит к бифуркации состояния и “прыжку” на верхнюю ветвь S-контура; время, в течение которого осуществляется трансформация *одномодового решения*, составляет около 30 пс, при этом интенсивность $I_p(t) = |\mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t)|^2$ раскачиваемой гармоники электрического поля на квантовой яме возрастает более чем в 3 раза (сплошная кривая на рис. 12a). В согласии с предположением, сделанным в разд. 2.4, начинается *взрывообразное усиление* множества мод, ставших неустойчивыми на верхней ветви S-контура (рис. 13b,c). Интегральная интенсивность $I_{\text{tot}}(t) = \sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)|^2$ электрического поля на квантовой яме, устанавливающаяся *после* такой трансформации, зависит от значения расстройки $D = E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)$, поскольку рост I_{tot} приводит к синему сдвигу резонансной энергии возбуждаемой моды поля и, в конечном счете, компенсирует исходную расстройку частоты возбуждения (см. разд. 2.4). Согласно данным численного анализа, система эволюционирует к состоянию *равновесия с накачкой*, в котором значение $I_{\text{tot}}(t)$,

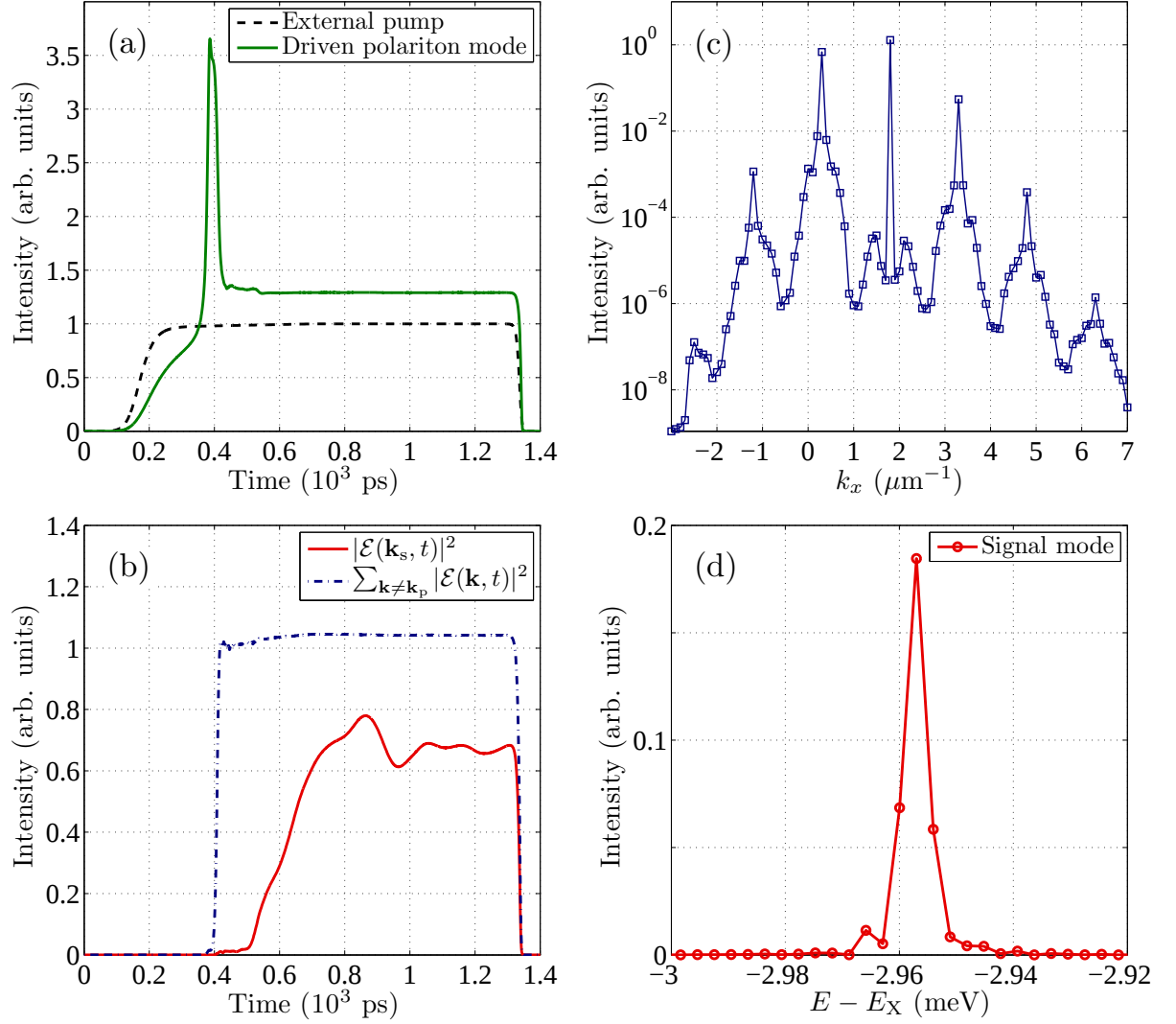


Рис. 12. **Панель a:** Пунктирная кривая — интенсивность *внешней* накачки в зависимости от времени. В области $[600 \text{ пс} \leq t \leq 1300 \text{ пс}]$ значение $|\mathcal{F}(t)|^2$ постоянно и составляет 0.292, в единицах, соответствующих оси абсцисс рис. 6. Сплошная кривая — зависимость от времени интенсивности возбуждаемой гармоники электрического поля на квантовой яме, $I_p(t) = |\mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t)|^2$. Скачок интенсивности, происходящий в области $[360 \text{ пс} \leq t \leq 390 \text{ пс}]$, переводит систему на верхнюю ветвь S-контура стационарного одномодового решения; последующее резкое уменьшение $I_p(t)$ связано с распадом одномодового решения вследствие взрывообразного заселения множества состояний $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$, ставших неустойчивыми на “верхней ветви” (см. рис. 13b,c). **Панель b:** сплошная кривая — функция $I_s(t) = |\mathcal{E}(\mathbf{k}_s, t)|^2$ для $\mathbf{k}_s = (0.3, 0) \text{ мкм}^{-1}$; пунктирная кривая — функция $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)|^2$. **Панель c:** Распределение $|\mathcal{E}(k_x)|^2$ для $k_y = 0$, усредненное по времени $[800 \text{ пс} \leq t \leq 1300 \text{ пс}]$ (см. рис. 13d). **Панель d:** Спектральное распределение интенсивности самой яркой сигнальной моды ($\mathbf{k}_s = (0.3, 0) \text{ мкм}^{-1}$), полученное интегрированием по всему времени расчета $[0 \leq t \leq 1400 \text{ пс}]$.

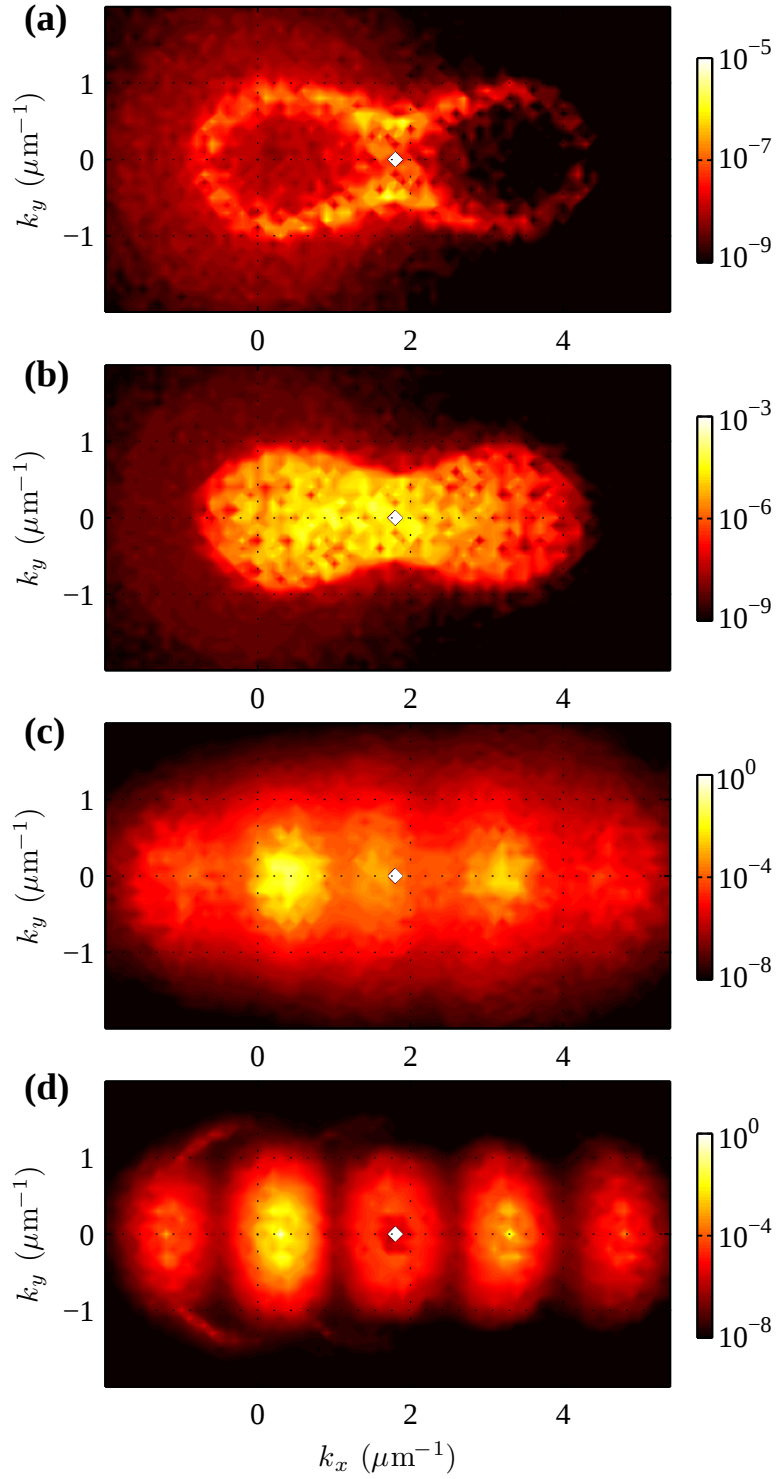


Рис. 13. Распределение интенсивности электрического поля $|\mathcal{E}(k_x, k_y)|^2$, усредненное по характерным временным отрезкам, соответствующим различным стадиям эволюции системы; шкала времени указана на рис. 12(a,b). **Панель a:** состояние системы до перехода на верхнюю ветвь S-контура $[320 \text{ пс} \leq t \leq 360 \text{ пс}]$. **Панель b:** среднее по времени перехода на верхнюю ветвь $[360 \text{ пс} \leq t \leq 390 \text{ пс}]$. **Панель c:** $[400 \text{ пс} \leq t \leq 500 \text{ пс}]$. **Панель d:** квазистационарное распределение, возникающее в результате самоорганизации рассеянных мод $[800 \text{ пс} \leq t \leq 1300 \text{ пс}]$.

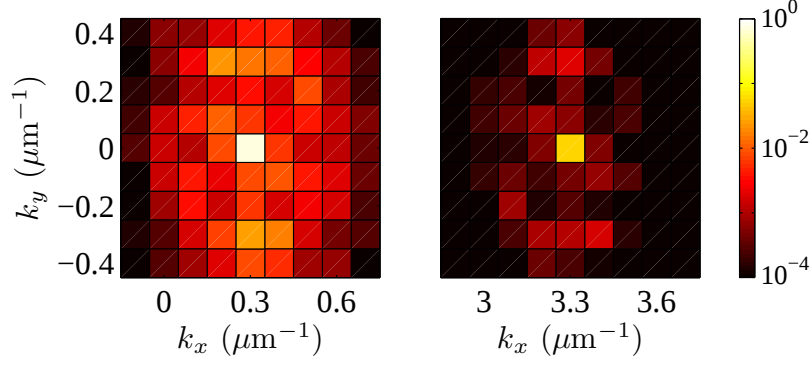


Рис. 14. Фрагменты квазистационарного распределения $|\mathcal{E}(k_x, k_y)|^2$, показанного на рис. 13d (вблизи “сигнала” и “холостого сигнала” рассеяния).

усредненное по нескольким τ_{LP} , на бóльших временах сохраняется постоянным, т. е. уменьшение энергии системы 2D состояний за счет излучения выравнивается с притоком энергии от накачки. Данный механизм ограничивает развитие неустойчивости и приводит к резкому уменьшению интенсивности возбуждаемой моды вследствие скачка суммарной интенсивности $\sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} |\mathcal{E}(\mathbf{k}, t)|^2$ рассеянных мод (пунктирная кривая на рис. 12b). “Выход” на почти постоянное значение I_{tot} осуществляется за время порядка нескольких десятков пикосекунд.

Установление *равновесия с накачкой* не означает установления *стационарного* состояния динамической системы. Последнее потребовало бы достижения *устойчивости относительно рассеяния* — ситуации, когда любое малое отклонение $|\delta \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)|$ от равновесного распределения $|\mathcal{E}(\mathbf{k})|$ экспоненциально затухает со временем. Однако, как показывают наши расчеты, в системе с достаточно высоким значением I_{tot} устойчивость относительно рассеяния не достигается²⁰. Это аналогично отсутствию устойчивых одномодовых состояний в широкой области значений $V|\mathcal{P}_0(\mathcal{F}_0)|^2$ (отметим, что равновесное значение I_{tot} сравнимо с величиной $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p)|^2$ на верхней ветви S-контура и, как и $\mathcal{E}_0(\mathcal{F}_0)$ на верхней ветви, достаточно слабо зависит от амплитуды накачки). Таким образом, получается, что условие равновесия с накачкой может быть несовместно с условием детального равновесия двумерной системы на малых временных масштабах. Это обстоятельство приводит к формированию нестационарных состояний системы, обнаруживающих сильно коррелированное поведение множества поляритонных гармоник (см. разд. 3.3); отсюда же, в частности, могут возникать достаточно большие характерные времена эволюции.

На рис. 13c показано распределение интенсивности рассеянного сигнала в k -

²⁰ Данное утверждение сделано на основе численного анализа системы (41, 42) в широком диапазоне расчетных параметров.

пространстве $I(\mathbf{k}) = |\mathcal{E}(\mathbf{k})|^2$, усредненное по 100 пс *после* распада одномодового решения $[400 \text{ пс} \leq t \leq 500 \text{ пс}]$. Распределение $I(\mathbf{k})$ содержит по крайней мере несколько ярких мод в области $\mathbf{k} \sim 0$, интенсивности которых сравнимы по величине; на этой стадии происходит своеобразная конкуренция мод, неустойчивых относительно рассеяния, но подчиненных “внешнему” условию $I_{\text{tot}} = \text{const}$. С течением времени этот процесс приводит к формированию состояния с *выделенной* сигнальной гармоникой $\mathbf{k}_s = (0.3, 0) \text{ мкм}^{-1}$. В области $500 \text{ пс} \leq t \leq 700 \text{ пс}$ происходит сравнительно плавное увеличение $I_s(t) = |\mathcal{E}(\mathbf{k}_s, t)|^2$ (сплошная кривая на рис. 12b), после чего система переходит в *квазистационарное* состояние, в котором распределение $I(\mathbf{k})$ не испытывает качественных трансформаций с течением времени. На рисунках 12c и 13d представлено распределение $I(\mathbf{k})$, усредненное в области $800 \text{ пс} \leq t \leq 1300 \text{ пс}$.

Квазистационарное распределение сигнала рассеяния, устанавливающееся по истечении времени порядка нескольких сотен пикосекунд, обнаруживает три резких максимума $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s = (0.3, 0) \text{ мкм}^{-1}$, $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$, $\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$. Энергетический спектр²¹ интенсивности сигнальной моды $\mathbf{k}_s$

$$I_s(E) = \left| \int \mathcal{E}(\mathbf{k}_s, t) e^{-iEt/\hbar} dt \right|^2, \quad (109)$$

представленный на рис. 12d, имеет ширину (FWHM) $\Delta E_s \sim 0.005 \text{ мэВ}$; соответствующее “время жизни” сигнального состояния, которое можно вычислить как $\tau_s = \hbar/(2\Delta E_s) \sim 10^2 \text{ пс}$, значительно превосходит времена жизни 2D фотона и экситона. С целью определить спектр, возникающий *после* перехода в квазистационарный режим (рис. 15), мы рассчитали интенсивность сигнала в смешанном частотно-временном представлении:

$$I(\mathbf{k}, E; \bar{t}) = \left| \int f(t, \bar{t}) \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{-iEt/\hbar} dt \right|^2, \quad (110)$$

где

$$f(t, \bar{t}) = \frac{1}{4} \left(1 + \text{th} \frac{t - (\bar{t} - \Delta t)}{\tau} \right) \left(1 - \text{th} \frac{t - (\bar{t} + \Delta t)}{\tau} \right)$$

²¹Чтобы упростить обозначения, частотно-временное преобразование записано в интегральной форме. В действительности рассчитывались отображения на дискретной сетке значений аргумента:

$$\begin{aligned} \mathbb{F} : \quad \mathcal{E}(t_n) &= \sum_{m=1}^N \tilde{\mathcal{E}} \left(E_{m + \frac{N}{2} \text{sgn}(\frac{N}{2} - m)} \right) \exp \left(\frac{2\pi i}{N} (m-1)(n-1) \right), \\ \mathbb{F}^{-1} : \quad \tilde{\mathcal{E}} \left(E_{n + \frac{N}{2} \text{sgn}(\frac{N}{2} - n)} \right) &= \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \mathcal{E}(t_m) \exp \left(-\frac{2\pi i}{N} (m-1)(n-1) \right), \end{aligned}$$

где

$$t_n = \frac{T \cdot n}{N}, \quad E_n = \frac{2\pi\hbar}{T} \left(n - \frac{N}{2} \right), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Как и преобразование Фурье, данное отображение обладает свойством $\mathbb{F} \circ \mathbb{F}^{-1} = \mathbb{F}^{-1} \circ \mathbb{F} = 1$.

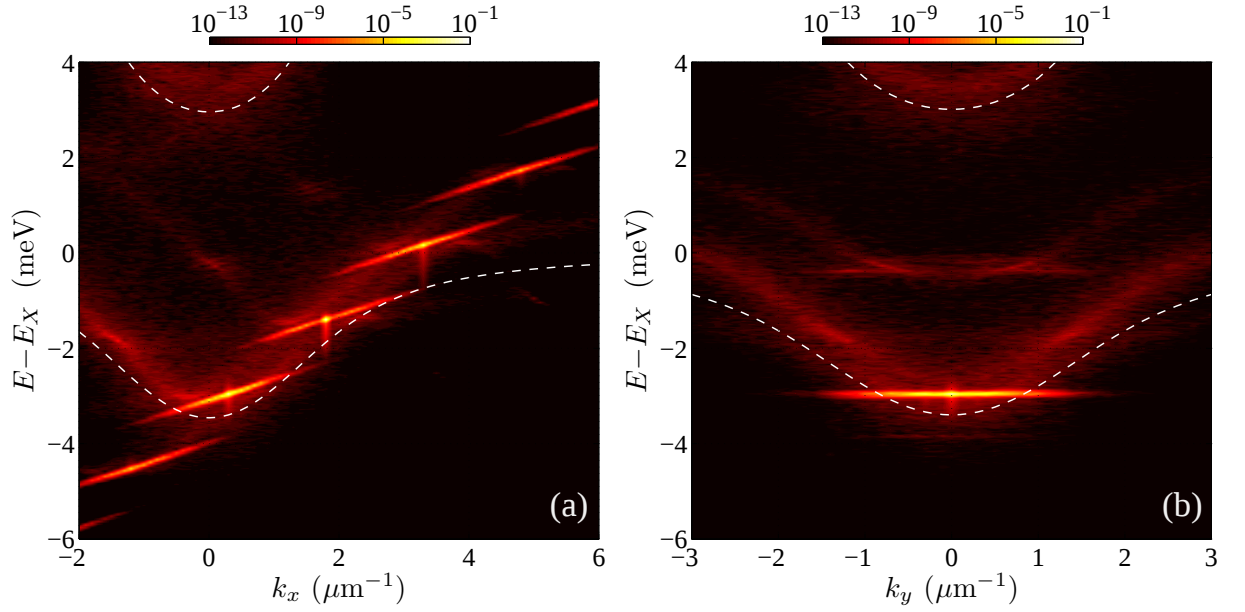


Рис. 15. Спектральное распределение интенсивности электрического поля $|\mathcal{E}(k_x, E)|^2$ на оси $k_y = 0$ (панель *a*) и $|\mathcal{E}(k_y, E)|^2$ на оси $k_x = 0.3 \text{ мкм}^{-1}$, содержащей самую яркую сигнальную моду (панель *b*). Спектры рассчитаны для стадии $[800 \text{ пс} < t < 1300 \text{ пс}]$, которой также соответствуют рисунки 12*c* и 13*d*. Пунктирные линии показывают дисперсию $\text{Re } E_{\text{LP, UP}}(\mathbf{k})$ невзаимодействующих поляритонов.

— гладкая “ступенька” единичной высоты в области $\bar{t} \pm \Delta t$; параметр $\tau \ll \Delta t$ определяет крутизну подъема и спуска. Для расчета спектров, представленных на рис. 15, были заданы значения $\bar{t} = 1050 \text{ пс}$, $\Delta t = 213 \text{ пс}$, $\tau = 34 \text{ пс}$; таким образом, рис. 15 соответствует рисункам 12*c* и 13*d* (изображая то же самое состояние системы).

В области накачки, а также вблизи максимального сигнала ($k_{sx} = 0.3 \text{ мкм}^{-1}$) и мод $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_p + n(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s)$ распределение $I(k_x, E)|_{k_y=0}$ обнаруживает линейные участки дисперсии $E_{\text{max}}(k_x)$. Появление такого участка вблизи $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s$ объясняется антиэрмитовым взаимодействием

$$H' = \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{q}} (\mathcal{P}^*(\mathbf{q}) \mathcal{P}^*(2\mathbf{k}_s - \mathbf{q}) \mathcal{P}(\mathbf{k}_s) \mathcal{P}(\mathbf{k}_s) + \text{с. с.}),$$

состояний $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}' = 2\mathbf{k}_s - \mathbf{q}$, которое приводит к характерному “склеиванию” дисперсионных поверхностей $E(\mathbf{q})$ и $E'(\mathbf{q}) = 2E_{\text{max}}(\mathbf{k}_s) - E(2\mathbf{k}_s - \mathbf{q})$ (см. сноску 10 на стр. 37). Действительно, в области $\mathbf{q} \approx \mathbf{q}' \approx \mathbf{k}_s$ поверхности $E(\mathbf{q})$ и $E'(\mathbf{q})$ имеют противоположные выпуклости $[d^2 E/d\mathbf{q}^2 \approx -d^2 E'/d\mathbf{q}^2]$, компенсирующие в результате взаимодействия $[d^2 E/d\mathbf{q}^2 \rightarrow 0]$. Таким же образом плоские участки дисперсии возникают и в других областях вблизи $\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_p + n(\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s)$, $n \in \mathbb{Z}$ (рис. 15). То, что все они оказались параллельными, свидетельствует о корреляции фаз рассеянных “надконденсатных” мод, расположенных в разных областях k -пространства. Отметим также,

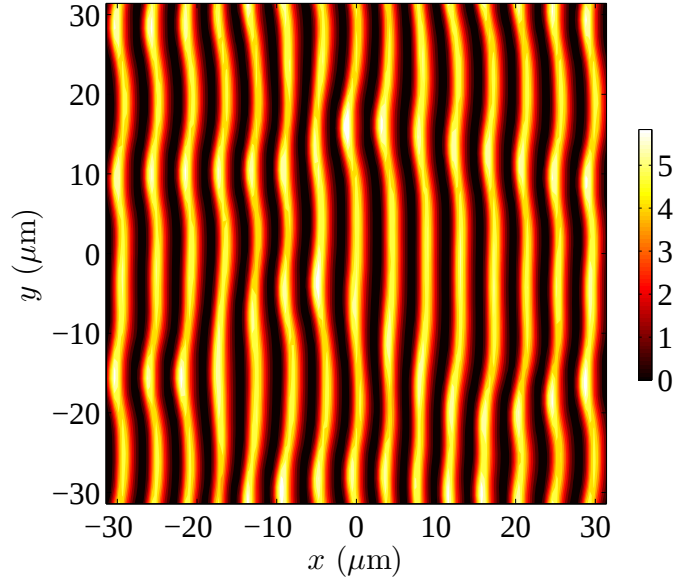


Рис. 16. Мгновенное распределение интенсивности электрического поля в координатном пространстве $|\mathcal{E}(x, y)|^2$ при $t = 1000$ пс.

что, как и ожидалось, частота сигнала $E_{\max}(\mathbf{k}_s)$ сдвинута в синюю область спектра на ~ 1 мэВ относительно частоты $E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_s)$ невозмущенного поляритонного состояния.

Корреляция фаз $[\phi(\mathbf{k}, t) \equiv \arg \mathcal{E}(\mathbf{k}, t)]$ сигнала и возбуждаемой моды приводит к интерференции амплитуд $\mathcal{E}(\mathbf{k}_s)$, $\mathcal{E}(\mathbf{k}_p)$, $\mathcal{E}(\mathbf{k}_i)$. По этой причине распределение интенсивности электрического поля в координатном пространстве

$$I(\mathbf{r}, t) = \left| \int_{\mathbf{k}} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k} \right|^2 \quad (111)$$

(рис. 16) образует бегущую волну с длиной $d = 2\pi/(k_p - k_s)$ и временным периодом $2\pi\hbar/(E_p - E_{\max}(\mathbf{k}_s))$, распространяющуюся в x -направлении.

3.3 Коллективные эффекты рассеяния

Квазистационарное распределение интенсивности сигнала (рис. 12с, 13d и 15), возникающее по завершении всех *быстрых* переходных процессов, обнаруживает три макрозаполненные моды $\{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ поля в активном слое. Суммарная интенсивность всех остальных мод $\sum_{\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}} |\mathcal{E}(\mathbf{k})|^2$ сравнима с $10^{-1} |\mathcal{E}(\mathbf{k}_s)|^2$, т. е. остается конечной, превосходя на несколько порядков заданную интенсивность ланжевеновского шума. Поэтому следует выяснить, каково влияние этих сравнительно слабых мод на состояние системы. *A priori* есть три качественно разные возможности, перечисленные ниже в порядке усиления возможной “роли” коллективных эффектов:

- 1) эволюция системы определяется процессами типа

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) &\rightleftharpoons (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), & (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) &\rightleftharpoons (2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \\ (\mathbf{k}_p, \mathbf{k}) &\rightleftharpoons (\mathbf{k}, \mathbf{k}_p), & (\mathbf{k}, \mathbf{k}) &\rightleftharpoons (\mathbf{k}, \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (112)$$

для всех $\mathbf{k}$; тем самым процессы взаимодействия разных сигнальных (рассеянных) мод *между собой* несущественны;

- 2) трехмодовое распределение интенсивности поля возникает в результате взаимодействия разных сигнальных мод, но коль скоро эти процессы привели к появлению выделенной пары $\{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\}$, слабые моды $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ уже не оказывают существенного влияния на состояние системы;
- 3) коррелированная система надконденсатных мод $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ поддерживает устойчивость выделенной пары $\{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\}$.

Первая из перечисленных здесь возможностей *предполагается* в большинстве работ, посвященных исследованию стимулированного рассеяния поляритонов (в частности, [7, 8, 68, 69, 70, 73]). Поэтому рассмотрим систему, в которой взаимодействие экситонных гармоник ограничено процессами типа (112).

Слагаемые экситон-фотонного гамильтониана (46), соответствующие процессам рассеяния (112), имеют вид

$$\begin{aligned} H_{X-X}^{(1)}(t) = & 2V \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) + \\ & + \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} (\mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) + \text{с. с.}) + \\ & + V \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) + \frac{V}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^4; \end{aligned} \quad (113)$$

отметим, что $\text{Im } H_{X-X}^{(1)}(t) \equiv 0$. Соответствующие слагаемые в уравнениях (42) для амплитуд экситонной поляризации представлены вариационными производными $\delta H_{X-X}^{(1)} / \delta \mathcal{P}^*(\mathbf{k}, t)$. Пренебрегая другими процессами рассеяния, имеем замкнутую

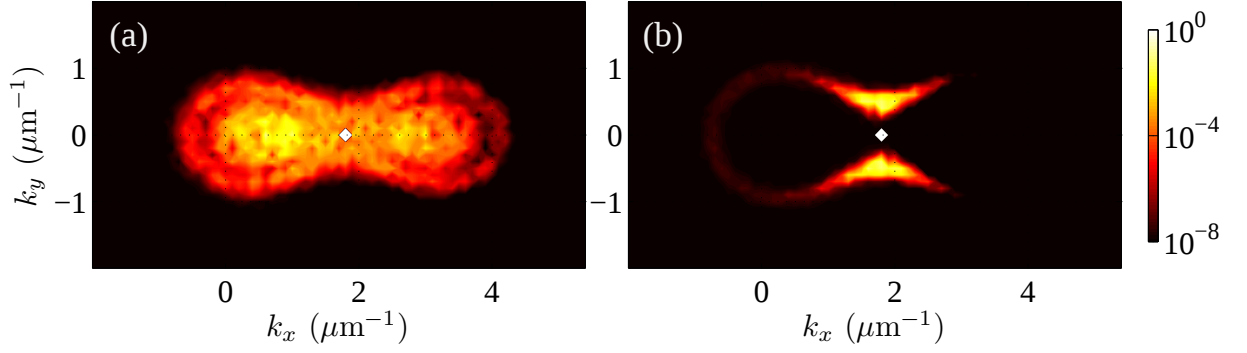


Рис. 17. Распределение интенсивности электрического поля в k -пространстве, рассчитанное путем решения уравнений (114–116) с теми же параметрами, что были использованы в разд. 3.2. Панели a и b — стадии эволюции системы, соответственные рис. 13с и 13d.

систему уравнений

$$\left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_C(\mathbf{k}) \right] \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \alpha \mathcal{F}_0 e^{-iE_p t/\hbar} + \beta(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t), \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_X \right] \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = & A \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + \\ & + V \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \cdot (|\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 + 2|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 + 2|\mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t)|^2) + \\ & + V \mathcal{P}^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \mathcal{P}^2(\mathbf{k}_p, t) + \xi(\mathbf{k}, t) \quad \text{для } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, \end{aligned} \quad (115)$$

$$\begin{aligned} \left[i\hbar \frac{d}{dt} - E_X \right] \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) = & A \mathcal{E}(\mathbf{k}_p, t) + V |\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) + \\ & + V \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p} (2|\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2 \mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t) + \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, t) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p, t)) + \xi(\mathbf{k}_p, t). \end{aligned} \quad (116)$$

В гл. 2, где представлен анализ устойчивости одномодового решения и сделаны предсказания о возможных сценариях эволюции, процессы, *не* относящиеся к группе (112), нами не учитывались. Таким образом, выводы, касающиеся жесткого возбуждения рассеяния в ситуации, представленной рисунками 7 и 8, относятся и к системе (114–116). Рассмотрим решение данных уравнений с теми же параметрами дисперсии и накачки [в том числе временным профилем $\mathcal{F}_0(t)$], какие были использованы в разд. 3.2 для решения системы (41, 42), учитывающей все типы парных взаимодействий. Сравнение этих решений позволит оценить характер влияния процессов, не учтенных функцией (113), — т.е. процессов взаимодействия разных сигнальных мод *между собой* — на эволюцию *исходной* системы, описанную в предыдущем разделе.

Результаты расчета показывают, что характер развития неустойчивости, приводящей к трансформации состояния возбуждаемой моды и быстрому нарастанию сигнала в широкой области k -пространства, совпадает в обоих примерах; распределения, соответственные рисункам 13a и 13b, являются качественно аналогичными и здесь не

приводятся. Отличия возникают лишь в переходной стадии (ср. рис. 13*c* и 17*a*, на которых представлено распределение интенсивности сигнала, усредненное по 100 пс *после* распада одномодового состояния) и затем усиливаются со временем. *Квазистационарное состояние* системы (114–116) оказывается качественно отличным от квазистационарного состояния системы (41, 42), учитывающей все парные взаимодействия экситонов (ср. рис. 13*d* и 17*b*), и обнаруживает сигнал, распределенный по неоднородной “восьмерке” и усиленный в областях $\mathbf{k} \sim (k_{px}, k_{py} \pm 0.5 \text{ мкм}^{-1})$.

Чтобы объяснить распределение, представленное на рис. 17*b*, заметим, что вследствие быстрого заселения множества неустойчивых мод, начавшегося в области верхней ветви S-контура, амплитуда раскачиваемой гармоник резко уменьшается (см. рис. 12*a*) вплоть до значений, сравнимых со стационарной амплитудой $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p)|$ на нижней ветви. Поэтому распределение *преимущественных направлений* рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$ возвращается к виду рис. 8*c*, т. е. вновь образует “восьмерку”, причем, как и следовало ожидать, неоднородность $\Gamma(\mathbf{k})$ заметно усилена в распределении $|\mathcal{E}(\mathbf{k})|^2$.

Таким образом, установлено, что эволюция к “трехмодовому” распределению (рис. 13*d*) невозможна в отсутствие взаимодействия разных сигнальных гармоник. С целью проверить первую из оставшихся альтернатив (п. 2 в списке на стр. 59) рассмотрим систему (41, 42), находящуюся в квазистационарном состоянии, представленном распределением рис. 13*d*. Можно предположить, что в том случае, если слабые (“надконденсатные”) моды $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ не оказывают существенного влияния на состояние системы *после установления равновесия*, “выключение” взаимодействия сигнала $\mathbf{k} = \mathbf{k}_s$ и мод $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ не приведет к качественному изменению состояния — т. е. распределение поля останется, как и раньше, “трехмодовым”. С несколько более общей точки зрения это означало бы, что трехмодовое распределение принадлежит классу устойчивых (стационарных) решений задачи (41, 42); в таком случае слабое — но, согласно данным численного эксперимента, не исчезающее со временем — заполнение надконденсатных гармоник $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$ приводит лишь к некоторому возмущению стационарных амплитуд $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_s)|$, $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_p)|$, $|\mathcal{E}(\mathbf{k}_i)|$ и, возможно, вызвано неточностью счета. Чтобы проанализировать эту возможность, следует рассмотреть задачу

$$H_{X-X}(t) = \begin{cases} (V/2) \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_1, t) \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_2, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_3, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3, t), & \text{если } t < t_0; \\ H_{X-X}^{(1)}(t), & \text{если } t \geq t_0, \end{cases} \quad (117)$$

где функция $H_{X-X}^{(1)}(t)$ определена выражением (113), а $t = t_0$ отвечает квазистационарному “трехмодовому” состоянию (для примера, описанного в разд. 3.2, $t_0 \sim 1100$ пс), — и решить соответствующие динамические уравнения. Результат расчета показывает, что “выключение” взаимодействия сигнала и надконденсатных мод приводит к рас-

паду трехмодового распределения поля, т. е. к переходу от распределения типа рис. 13d к распределению типа рис. 17b; такой переход осуществляется в течение времени порядка сотни пикосекунд. Это означает, что квазистационарное состояние, обнаруживающее “почти трехмодовое” распределение поля, в действительности оказывается существенно коллективным и образовано связанной системой множества поляритонных гармоник.

Оценим интенсивность взаимодействия сигнала ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_s$) и совокупности надконденсатных мод. Для этого заметим, что амплитуду *квазистационарного* сигнала можно записать в форме

$$\mathcal{P}_s(t) \equiv \mathcal{P}(\mathbf{k}_s, t) = \bar{\mathcal{P}}_s e^{\Gamma_s(t) \cdot t / \hbar} e^{-i\omega_s t + i\phi_s}, \quad (118)$$

где ω_s — частота сигнала, которую можно считать постоянной при $t \gtrsim 600$ пс. Из рис. 12b можно заключить, что в квазистационарной области $|\Gamma(t)|$ не превосходит 10^{-3} мЭВ, т. е. флуктуации амплитуды сигнала чрезвычайно медленны в сравнении с $\hbar / |\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_s)|$. Для дальнейших оценок положим

$$\Gamma_s \sim \text{Im} \left\{ i\hbar \frac{d \ln \mathcal{P}_s}{dt} \right\} \sim 0. \quad (119)$$

С другой стороны, согласно уравнению (42),

$$i\hbar \frac{d \ln \mathcal{P}_s}{dt} = \frac{i\hbar}{\mathcal{P}_s(t)} \cdot \frac{d\mathcal{P}_s}{dt} = \frac{1}{\mathcal{P}_s(t)} \cdot \left[E_X \mathcal{P}_s(t) + A\mathcal{E}_s(t) + V \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_1, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_2, t) \right]. \quad (120)$$

Сравнивая выражения (119) и (120), можем написать

$$\Gamma_s^{(0)}(t) + \Gamma_s^{(p)}(t) + \Gamma_s^{(\text{weak})}(t) \approx 0; \quad (121)$$

каждое из входящих сюда слагаемых имеет смысл относительного изменения амплитуды $|\mathcal{P}_s|$ “в единицу времени”, а именно:

- $\Gamma_s^{(0)}(t) = \text{Im}(E_X) + \text{Im} \left[\frac{A\mathcal{E}_s(t)}{\mathcal{P}_s(t)} \right] < 0 \quad (122)$

— уменьшение $|\mathcal{P}_s|$ за счет i) затухания экситонной моды и ii) возбуждения колебаний электрического поля на квантовой яме;

- $\Gamma_s^{(p)}(t) = V |\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|^2 \cdot |\mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s, t)| \cdot |\mathcal{P}_s(t)|^{-1} \times \\ \times \sin [2\phi(\mathbf{k}_p, t) - \phi(\mathbf{k}_s, t) - \phi(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s, t)] > 0 \quad (123)$

— нарастание $|\mathcal{P}_s|$ за счет взаимодействия пары $\{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\}$ с накачиваемой экситонной модой;

- $\Gamma_s^{(\text{weak})}(t) = V \cdot \text{Im} \left\{ \frac{1}{\mathcal{P}_s(t)} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} (1 - \delta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_p} \delta_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_p}) \times \right. \\ \left. \times \mathcal{P}^*(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_s, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_1, t) \mathcal{P}(\mathbf{k}_2, t) \right\} \quad (124)$

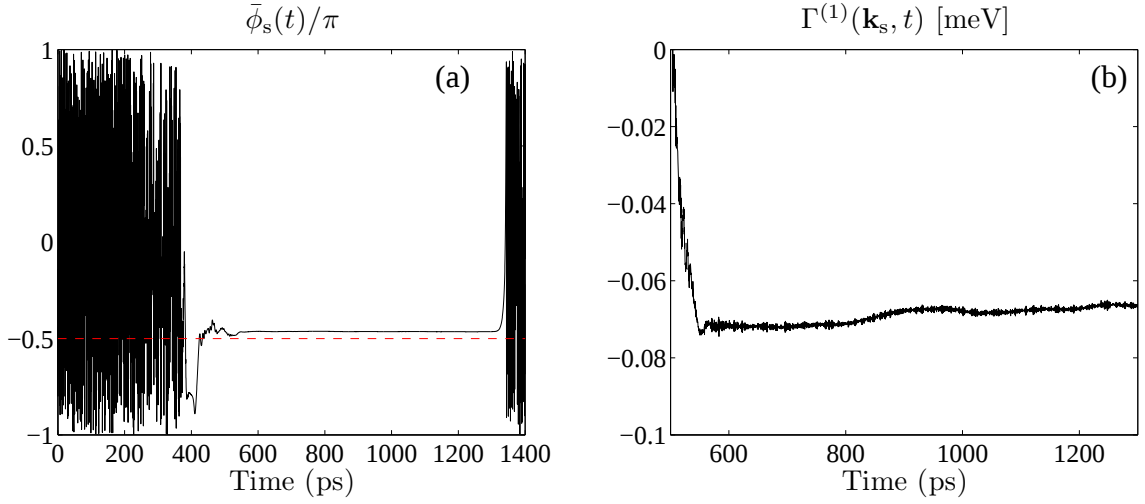


Рис. 18. *Панель a*: соотношение фаз сигнала, холостого сигнала и возбуждаемой моды $\bar{\phi}_s \equiv \phi(\mathbf{k}_s) + \phi(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s) - 2\phi(\mathbf{k}_p) \equiv \arg[\mathcal{P}(\mathbf{k}_s) \mathcal{P}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s) (\mathcal{P}^*(\mathbf{k}_p))^2]$, выраженное в единицах π , в зависимости от времени. Пунктирная прямая соответствует значению $-\pi/2$. *Панель b*: функция $\Gamma_s^{(1)}(t) = \Gamma_s^{(0)}(t) + \Gamma_s^{(p)}(t)$, показывающая ожидаемую скорость относительного изменения амплитуды сигнала $|\mathcal{P}_s|$ без учета вклада рассеяния на слабых модах $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$.

— изменение $|\mathcal{P}_s|$ за счет процессов рассеяния²² на слабых модах $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$.

Таким образом, (121) имеет смысл *уравнения баланса* энергии сигнальной моды, по предположению находящейся в равновесии с остальной частью двумерной системы и внешним полем. Величина

$$\Gamma_s^{(1)}(t) \equiv \Gamma_s^{(0)}(t) + \Gamma_s^{(p)}(t) \quad (125)$$

показывает скорость относительного изменения амплитуды сигнала $|\mathcal{P}_s|$ без учета рассеяния на слабых модах $\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, \mathbf{k}_i\}$. Слагаемое $\Gamma_s^{(0)}(t)$ определяется амплитудами электрического поля и поля экситонной поляризации сигнальной моды и меняется очень медленно. Второе слагаемое, $\Gamma_s^{(p)}(t)$, меняется так же медленно, поскольку амплитуда возбуждаемой моды $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p, t)|$, а также соотношение фаз сигнала, холостого сигнала и возбуждаемой моды практически постоянны при $t \gtrsim 600$ пс (рис. 18a). Тогда из (121) следует, что совокупное воздействие процессов рассеяния на слабых модах, выражаемое величиной

$$\Gamma_s^{(\text{weak})}(t) \approx -\Gamma_s^{(1)}(t), \quad (126)$$

дает настолько же медленно меняющийся вклад в значение Γ_s .

²²Отметим, что члены типа $\mathcal{P}(\mathbf{k}_s) \cdot |\mathcal{P}(\mathbf{k})|^2$, входящие в сумму по $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{k}_2$ — в частности, $\mathcal{P}(\mathbf{k}_s) \cdot (|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|^2 + |\mathcal{P}(\mathbf{k}_i)|^2)$ — не дают вклада в $\Gamma(\mathbf{k}_s)$.

Рис. 18b показывает, что в квазистационарном режиме величина $\Gamma_s^{(1)}$ принимает отрицательные значения порядка -0.07 мэВ (тогда как абсолютные значения левой части выражения (121) не превосходят 10^{-3} мэВ при $t > 700$ пс, в чем мы убедились путем прямого расчета). Следовательно, без взаимодействия с системой надконденсатных мод сигнальное состояние с данными амплитудой и фазой должно было бы распасться за время $\hbar/|\Gamma_s^{(1)}| \lesssim 10$ пс, которое лишь ненамного превосходит время жизни свободного поляритона (~ 3.5 пс). Отсюда мы заключаем, что совокупное воздействие системы надконденсатных мод на выделенную пару $\{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_i\}$ является весьма интенсивным и эквивалентно воздействию дополнительной *когерентной накачки* — несмотря на то, что динамика каждой из этих мод в отдельности является совершенно нерегулярной.

Если бы мы получили противоположный результат, т. е. $\Gamma_s^{(1)} \gtrsim 0$ и $\Gamma_s^{(\text{weak})} \lesssim 0$, это означало бы, что квазистационарное заполнение сигнальной моды поддерживается только за счет процесса $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_s, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s)$, при том что сигнальная мода неустойчива относительно дальнейшего распада в другие моды. Система надконденсатных мод оказалось бы в этом случае некогерентной и, вообще говоря, переключение типа (117) не привело бы к качественной трансформации распределения интенсивности поля.

3.4 Пороговая трансформация распределения сигнала рассеяния: результаты эксперимента. Гистерезис сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой поляритонной моды

Пороговое усиление моды $\mathbf{k}_s \approx 0$, расположенной в области дна нижней поляритонной ветви, есть ключевое свойство изучаемой нами системы. Работы, где сообщается об экспериментальном наблюдении данного эффекта, весьма многочисленны (см., в частности, [2]–[6] и [86]–[91]), однако вплоть до недавнего времени оставались неясными *переходные процессы*, определяющие эволюцию в близкой окрестности порога. Некоторые исследования, выполненные в последние годы, позволяют составить более четкое представление о процессах развития неустойчивости. Ниже мы рассмотрим результаты двух таких работ, описанные в статьях [A2] и [A3].

В первой работе ([A2]), как и большинстве предшествующих экспериментов, была использована *методика непрерывной накачки*. Структура системы аналогична той, что описана в разд. 1.1.3; расщепление Раби составляет 6 мэВ, диаметр пятна возбуждения — 30 мкм. Расстройка частоты накачки $D = E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$ составляет около 0.5 мэВ для $\mathbf{k}_p \approx 1.3$ мкм $^{-1}$. Измерялись угловое и частотное распределения интенсивности сигнала люминесценции, $I = I(\mathbf{k}, E)$. Серия экспериментов, проведен-

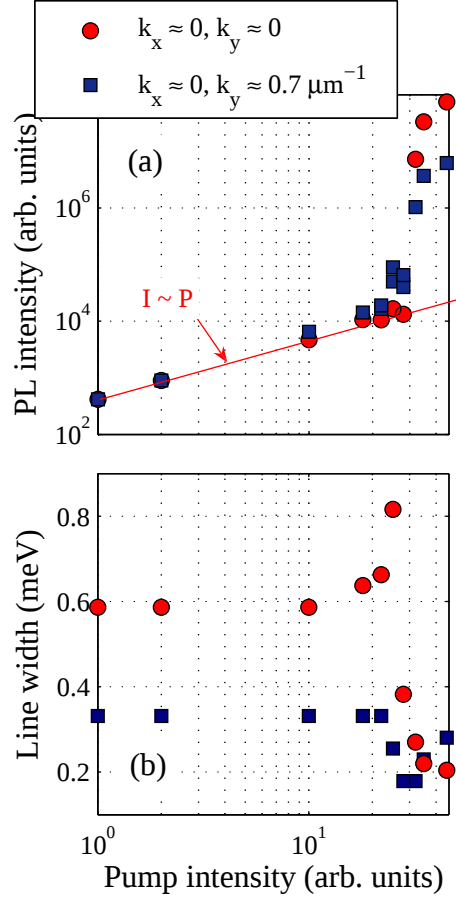


Рис. 19. Данные эксперимента, [A2]. Интенсивность (панель *a*) и спектральная ширина (FWHM, панель *b*) сигнала люминесценции резонатора в зависимости от интенсивности накачки. Квадратный и круглый маркеры соответствуют сигнальным модам $\mathbf{k} \approx (0, 0.7) \text{ мкм}^{-1}$ и $\mathbf{k} \approx (0, 0) \text{ мкм}^{-1}$.

ных с разными мощностями накачки P , позволяет проанализировать трансформацию квазистационарного распределения $I(\mathbf{k}, E)$ по мере приближения к порогу стимулированного рассеяния (рис. 19 и 20).

В области малых плотностей возбуждения зависимость $I(P)$ является линейной, а распределение $I(k_x, k_y)$ — достаточно однородным. Приближение к порогу приводит к сверхлинейному росту интенсивности состояний, расположенных на кольце $|\mathbf{k}| \approx 0.7 \text{ мкм}^{-1}$ (рис. 19). Распределения $I(k_x, k_y)$ и $I(k_y, E)|_{k_x=0}$, приведенные на рис. 20(*b, c*), показывают, что эти состояния принадлежат левой петле характерной “восьмерки” направлений, описанной в предыдущих разделах; в частности, на это указывает энергия максимумов $I(k_y, E)|_{k_x=0}$, расположенная *ниже* энергии возбуждения.

В области $P \approx 30 \text{ мВ}$ происходит резкая трансформация отклика: увеличение накачки на 10% сопровождается скачком на три порядка интенсивности сигнала вблизи $\mathbf{k} = 0$. Данный результат полностью соответствует выводам, сделанным в ходе

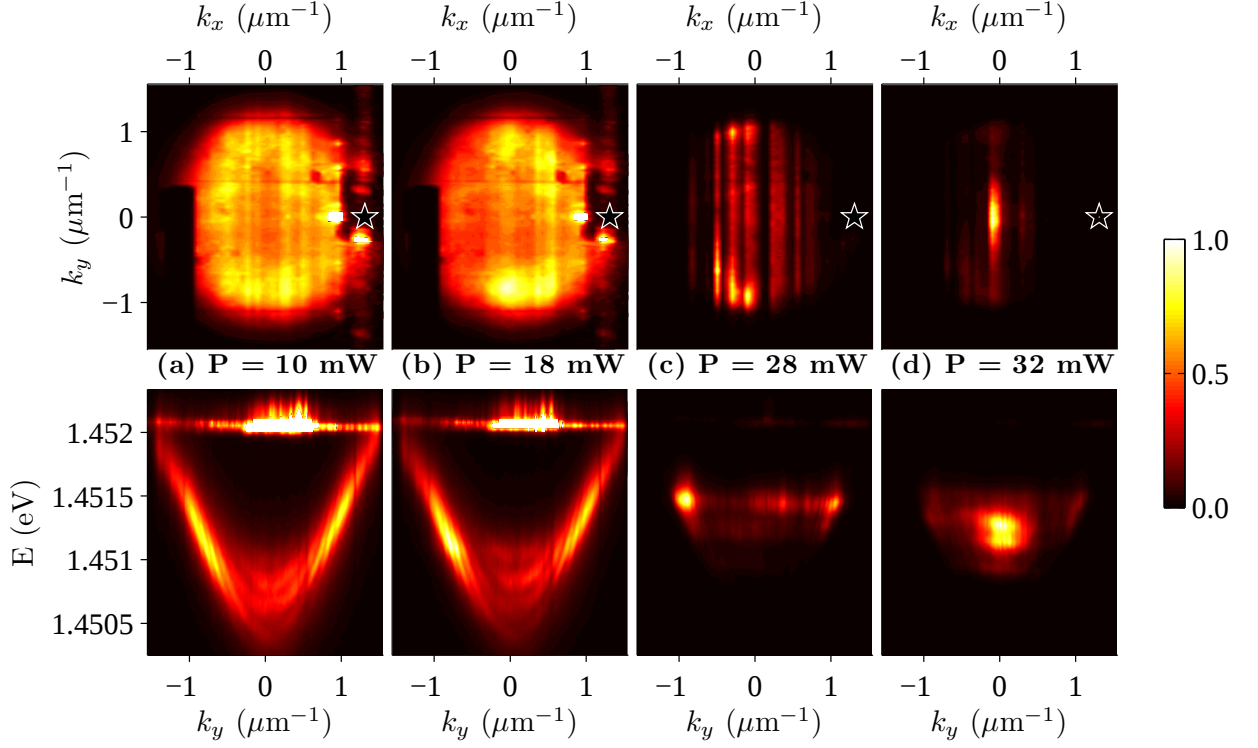


Рис. 20. Данные эксперимента, [A2]. **Сверху:** распределения интенсивности $I(k_x, k_y)$ сигнала фотолуминесценции резонатора в k -пространстве для разных плотностей возбуждения P (mW); маркер (звездочка) указывает положение накачки. **Снизу:** соответствующие спектральные распределения $I(k_y, E)|_{k_x=0}$. Значения I указаны в произвольных единицах, приведенных к отрезку $[0, 1]$ для всех P . Переход от $P = 28$ mW (c) к $P = 32$ mW (d) сопровождается увеличением сигнала в области $\mathbf{k} \sim 0$ на 3 порядка величины (см. рис. 19a). Более полная серия экспериментальных данных представлена в публикации [A2].

предшествующего теоретического анализа. В согласии с результатами гл. 2, пороговая трансформация направлений рассеяния говорит о резком увеличении энергии поляритонных мод (рис. 8), вызванном бистабильностью отклика в условиях положительной расстройки энергии возбуждения (разд. 2.5).

Отметим, что в данной работе ([A2]) впервые измерялось *двумерное* (а не одномерное, как раньше) распределение $I(k_x, k_y)$ при разных накачках. Это позволило сделать определенные выводы о характере появления неустойчивости вблизи порога; в частности, стало ясно, что в пороговой точке резко меняются направления параметрического рассеяния и потому представление о *плавном* развитии неустойчивости ([7, 8, 68, 69]), аналогичном фазовому переходу второго рода, неприменимо по крайней мере при положительной расстройке накачки. С другой стороны, важно, что и в предшествующих экспериментальных работах ([2]–[6] и [86]–[91]) т. н. “гигантский” сигнал люминесценции в направлении нормали к поверхности ($\mathbf{k}_s = 0$) наблюдался *только при положительной расстройке* $E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$. Согласно нашим расчетам, появление такого сигнала может быть вызвано жестким возбуждением рассеяния в системе квазидвумерных поляритонов (разд. 3.2).

Однако в режиме непрерывной накачки (*англ.* continuous wave excitation), тогда, когда для наблюдения доступны лишь квазистационарные распределения $I(k_x, k_y)$, невозможен прямой анализ переходных процессов, чувствительных к “сценарию” эволюции. В связи с этим приобретают чрезвычайную важность время-разрешенные измерения, в которых динамика системы могла бы наблюдаться непосредственно. В недавнее время такие эксперименты были выполнены в Лаборатории неравновесных электронных процессов ИФТТ РАН ([A3]).

В работе [A3] измерения проводились с одновременным разрешением по времени, энергии, и квазиволновым числам (углам детектирования сигнала) с точностью 80 пс, 0.2 мэВ и 0.06 мкм^{-1} вблизи $\mathbf{k} = 0$, соответственно. Характерная форма возбуждающего импульса показана на рис. 21a (пунктирная линия). Измерялся сигнал *пропускания* резонатора $I_{\text{tr}}(t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}_p; t)|^2$ в зависимости от времени, а также сигнал фотолюминесценции $I(\mathbf{k}, t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}; t)|^2$ в различных направлениях $\mathbf{k}$.

Прежде всего заметим, что, как и раньше, в данных экспериментах был обнаружен пороговый характер развития сигнала в направлении $\mathbf{k} = 0$. Серия измерений, представленная на рис. 21, показывает, что с увеличением пиковой (во времени) плотности накачки $P \propto \max_t |\mathcal{F}(t)|^2$ в полтора раза пиковая мощность сигнала $\max_t I(\mathbf{k}=0, t)$ возрастает на несколько порядков. Появление сигнала в $\mathbf{k} = 0$ оказывается здесь не столь резким, как в экспериментах работы [A2], из-за более низкой когерентности импульса возбуждения; это следует иметь в виду, сравнивая результаты эксперимента с расчетами в рамках нашей модели.

В области малых P (например, при $P = 11.5 \text{ кВт/см}^2$) временная зависимость пропускания $I_{\text{tr}}(t)$ повторяет профиль накачки $I_p(t) = |\mathcal{F}(t)|^2$, в соответствии с тем что

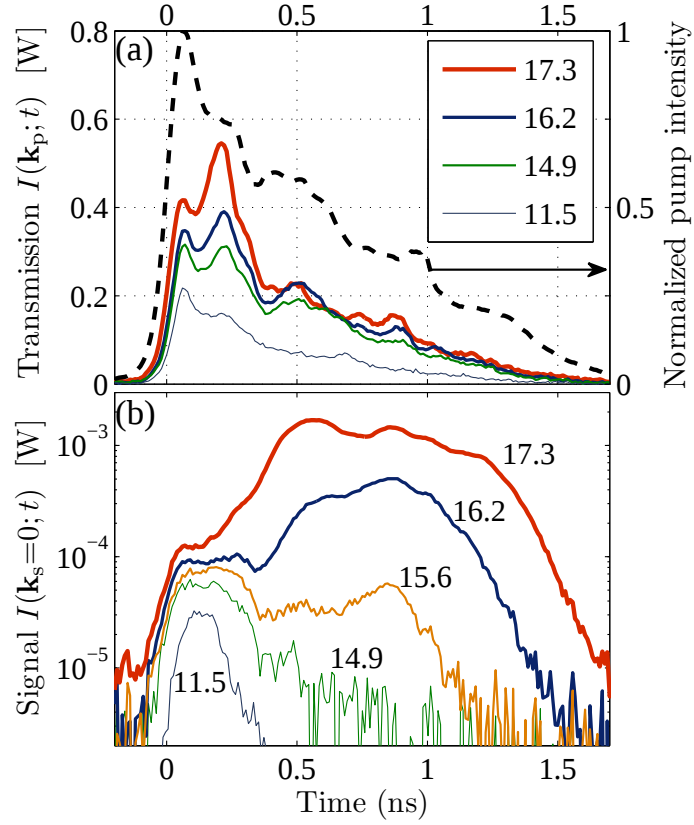


Рис. 21. Данные эксперимента, [A3]. Панель *a*: временные зависимости сигнала пропускания резонатора $I_{tr}(t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}_p; t)|^2$ (Вт), измеренного для разных значений пиковой плотности возбуждения $P \propto \max_t I_p(t) = \max_t |\mathcal{F}(t)|^2$ (подписи к линиям, кВт/см²). Пунктиром указана форма возбуждающего импульса $I_p(t)/\max_t I_p(t)$, одинаковая для всех P . Панель *b*: соответствующие временные зависимости сигнала люминесценции $I_s(t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}_s; t)|^2$, измеренного в направлении нормали к плоскости активного слоя ($\mathbf{k}_s \approx 0$).

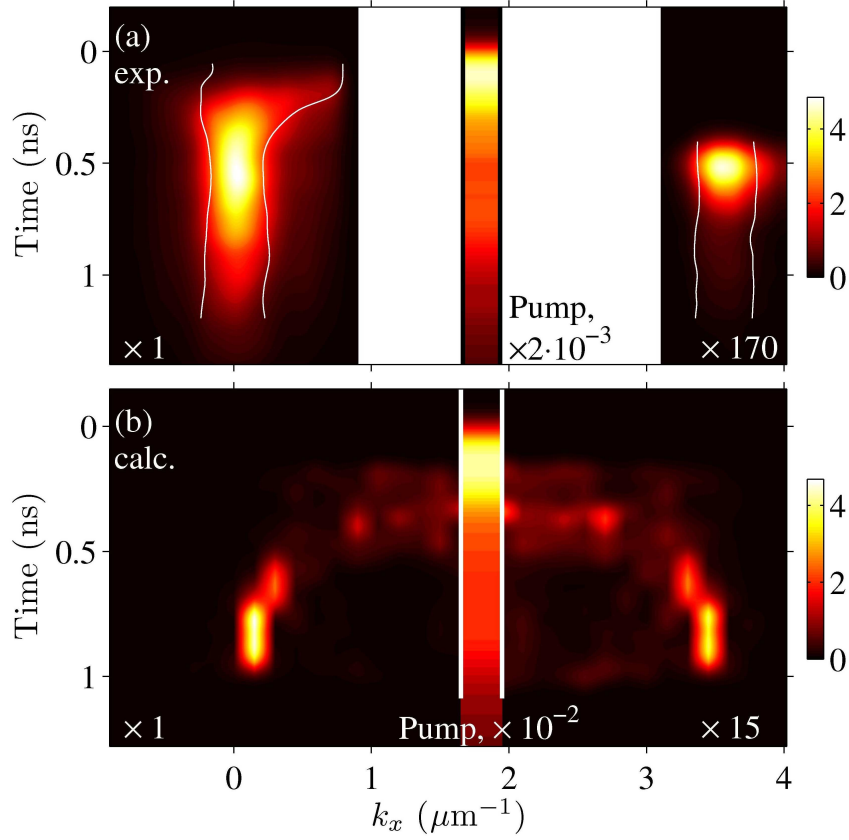


Рис. 22. Измеренные (панель *a*) и рассчитанные (панель *b*) зависимости сигнала $I(k_x, t)|_{k_y=0}$ от времени и k_x (считая что накачка действует вдоль оси $k_y = 0$, т.е. $|\mathbf{k}_p| = k_{px}$) в случае жесткого возбуждения рассеяния. Форма импульса накачки $I_p(t) = |\mathcal{F}(t)|^2$ показана на центральных вкладках вблизи $\mathbf{k}_p = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$; единицы измерения произвольны, но совпадают для I и I_p как в эксперименте, так и в расчете (в последнем случае мы вычисляли коэффициент пропускания резонатора с помощью метода матрицы переноса). Сплошные линии на верхнем рисунке указывают положения “полувысот” $\frac{1}{2} \max_{k_x} I(k_x, t)|_{k_y=0}$ вблизи “сигнала” и “холостого сигнала” рассеяния. Экспериментальное разрешение по k составляет 0.06 мкм^{-1} для $|k_x| < 1 \text{ мкм}^{-1}$ и 0.2 мкм^{-1} для $|k_x| > 3 \text{ мкм}^{-1}$. Уравнения (41, 42) решались на дискретной сетке квазиволновых чисел с одинаковым шагом 0.15 мкм^{-1} в k_x - и k_y -направлениях.

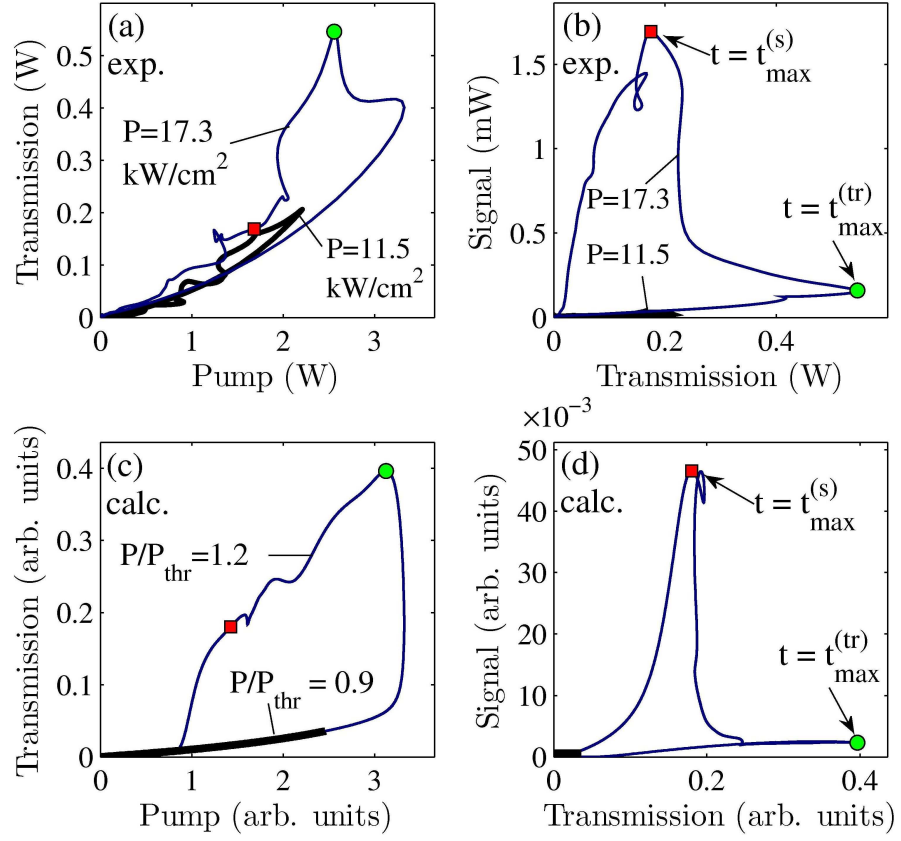


Рис. 23. Измеренные (a, b) и рассчитанные (c, d) зависимости $I_{\text{tr}}(t) \equiv I(\mathbf{k}_p; t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}_p; t)|^2$ от $I_p(t) = |\mathcal{F}(t)|^2$ (панели a, c) и $I_s(t) \equiv I(\mathbf{k}=0; t) \propto |\mathcal{E}(\mathbf{k}=0; t)|^2$ от $I_{\text{tr}}(t)$ (панели b, d). Жирные и тонкие линии отвечают возбуждению ниже и выше порога (P_{thr}), соответственно. Маркерами отмечены характерные точки, где достигаются максимумы сигналов пропускания ($t = t_{\max}^{(tr)}$, квадрат) и люминесценции в направлении $\mathbf{k} = 0$ ($t = t_{\max}^{(s)}$, кружок). Разность $t_{\max}^{(s)} - t_{\max}^{(tr)}$ составляет 370 пс в эксперименте и 670 пс в расчете.

функция отклика возбуждаемой моды поля в активном слое не слишком сильно отклоняется от линейной. Однако с увеличением P зависимость I_{tr} от I_p становится достаточно сложной. Видно, что, например, для $P = 17.3 \text{ кВт/см}^2$ величина I_{tr} нарастает и достигает максимума одновременно с I_p по мере включения накачки, после чего I_p и I_{tr} убывают вместе в течение какого-то времени. Но далее, несмотря на то что I_p продолжает убывать, I_{tr} начинает снова расти. В итоге временная зависимость пропускания $I_{tr}(t)$ обнаруживает второй (более высокий) максимум с задержкой порядка 200 пс относительно максимума накачки. Такая “аномальная” зависимость I_{tr} от I_p возникает в связи с пороговым ростом сигнала рассеяния и, следовательно, вызвана “когерентными” эффектами взаимодействия в системе двумерных поляритонов.

Данный эффект можно объяснить следующим образом. По мере включения накачки (в области нарастания $|\mathcal{F}|^2$) интенсивность поля в активном слое достигает порога рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$ и так же, как это было описано в разд. 2.4, возникает положительная обратная связь сигнала и возбуждаемой моды. Далее осуществляются конкурирующие процессы: рост сигнала (приводящий к росту $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|$ и дальнейшему росту инкремента рассеяния) и уменьшение $|\mathcal{F}|$ (заданное извне и приводящее, со своей стороны, к уменьшению $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|$, уменьшению инкремента и уменьшению сигнала). Ясно, что чем выше пиковая мощность накачки P , тем большую интенсивность рассеянных мод ($\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$) накопит система, и в какой-то момент (для какого-то $P = P_{thr}$) величина $\sum_{\mathbf{k}} |\mathcal{P}(\mathbf{k}, t)|^2$ будет достаточной для трансформации, связанной с переходом на “верхнюю” ветвь S-контура эффективного отклика (см. рис. 9 и 10). В таком случае $|\mathcal{P}(\mathbf{k}_p)|$ нарастает до величин, превышающих первый максимум (который по времени совпадает с максимумом накачки), и происходит дальнейшее усиление рассеянных (сигнальных) гармоник; с течением времени их самоорганизация может привести к появлению *выделенного* сигнала в направлении $\mathbf{k} = 0$. Отметим, что в соответствии с этим сценарием пороговое значение пиковой плотности накачки P_{thr} существенно зависит от формы импульса $I_p = I_p(t)$.

На рис. 22a показано измеренное распределение сигнала $I(k_x, t)|_{k_y=0}$ в зависимости от времени и квазиволнового числа на оси возбуждения ($k_y = 0$). Видно, что, как и ожидалось, пороговая трансформация приводит к усилению широкой области k -состояний, и лишь с течением времени выделенный сигнал в направлении нормали ($\mathbf{k} = 0$) достигает максимальной интенсивности. О самоорганизации, приводящей к росту $I_s \equiv I(\mathbf{k}=0)$, можно судить по появлению “холостого сигнала” в области $\mathbf{k} = 2\mathbf{k}_p$, в общем случае возникающего за счет когерентных эффектов рассеяния. Заметим, что такой сигнал возникает с задержкой порядка 500 пс относительно максимума накачки (что составляет более сотни характерных времен жизни “свободного” поляритона), причем тогда, когда интенсивность накачки уменьшается более чем в два раза относительно максимума. Численные расчеты, проведенные с аналогичным профилем импульса возбуждения $I_p(t)$, обнаруживают похожие результаты (рис. 22b).

На рис. 23 показаны измеренные и рассчитанные зависимости $I_{tr}(I_p)$ и $I_s(I_{tr})$ для двух P , ниже и выше характерной пороговой точки. В случае $P > P_{thr}$ зависимость $I_{tr}(I_p)$ обнаруживает гистерезис, связанный с перераспределением возбуждения в пространстве k -состояний. Именно, совокупность рассеянных мод $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ как бы поддерживает энергию возбуждаемой моды вблизи резонанса с накачкой в ходе уменьшения I_p , и потому интенсивность I_{tr} оказывается больше, чем для тех же I_p в области нарастания, когда распределение поля в активном слое было практически одномодовым. Вместе с этим, еще более выраженный гистерезис обнаруживается в зависимости $I_s(I_{tr})$ (как в эксперименте, так в расчетах), причем ясно, что такое поведение уже нельзя объяснить обсуждавшейся выше задержкой максимума I_{tr} относительно максимума накачки. Данный эффект [по крайней мере, в рамках когерентной модели (41, 42)] связан с достаточно большими характерными временами, в течение которых осуществляется самоорганизация системы, и сильно зависит от условий внешнего возбуждения.

3.5 Выводы и общие замечания о результатах третьей главы

Перечислим основные результаты, полученные в данной главе.

- Динамика системы, в которой происходит жесткое возбуждение стимулированного рассеяния поляритонов под действием когерентной накачки, была проанализирована численно. Развитие неустойчивости приводит к пороговому усилению большого числа рассеянных мод, однако в ходе дальнейшей эволюции возникает выделенный сигнал рассеяния в направлении нормали к поверхности ($\mathbf{k}_s \approx 0$). Квазистационарное распределение интенсивности поля обнаруживает резкие максимумы в направлениях $\{\mathbf{k}_s \approx 0, \mathbf{k}_p, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s \approx 2\mathbf{k}_p\}$. Переход к такому состоянию сопровождается значительным спектральным сужением сигнальной моды ($\mathbf{k}_s$) и появлением линейных участков дисперсии в областях $\mathbf{k}_s$, $\mathbf{k}_p$ и $2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s$.

Полученный результат согласуется с данными экспериментальных исследований ([2]–[6] и [86]–[91]), которые показывают, что сигнал параметрического рассеяния возникает пороговым образом в направлении нормали к поверхности ($\mathbf{k}_s = 0$) и смещен в синюю сторону относительно частоты невозмущенного поляритона $\text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_s)$. Отметим, что во всех экспериментах появление такого сигнала наблюдалось только при положительной расстройке $E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)$, причем положение $\mathbf{k}_s$ практически не зависит от квазиимпульса и частоты накачки в широком диапазоне значений. Отсюда мы заключаем, что теория, предсказывающая жесткое возбуждение и самоорганизацию

сигнала рассеяния, правильно описывает наблюдаемую пороговую трансформацию.²³ В данной работе мы не анализировали зависимость свойств сигнала от параметров возбуждения (расчеты такого типа представлены в работе [A4]), сосредоточившись, в первую очередь, на детальном исследовании критической трансформации и общих свойств решения, возникающего выше порога. Здесь мы лишь заметим, что, как и в эксперименте, появление “сигнала” в области $\mathbf{k} \gtrsim 0$ оказывается типичным свойством получающихся решений. Однако характерные времена, в течение которых “сигнал” возникает, меняются достаточно сильно даже при малом изменении накачки, что, по всей видимости, связано с дискретностью набора квазиволновых чисел, являющейся артефактом модели (41, 42). Такая зависимость от внешних параметров исчезает, если вместо строго одномодовой накачки $\mathcal{F}(\mathbf{k}, t) = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \mathcal{F}_0(t) \exp(-i\omega_p t)$ мы выбираем гауссов пучок с конечной шириной в k -пространстве и соответствующим диаметром пятна возбуждения в районе $10 \div 60$ мкм; при этом сохраняются все характерные свойства развития неустойчивости, однако возникает дополнительная неоднородность распределения сигнала в координатном пространстве (результаты таких расчетов соответствуют экспериментально измеренным распределениям [94]). Наконец, отметим, что высокая когерентность сигнала стимулированного рассеяния была установлена экспериментально [95].

- В случае жесткого возбуждения рассеяния под действием когерентной (строго одномодовой) накачки эволюция системы осуществляется как самоорганизация большого числа взаимодействующих мод, приводя к появлению многочастичного связанного состояния. Устойчивость такого состояния, обнаруживающего “почти трехмодовое” распределение поля, в действительности обусловлена взаимодействием “сигнала” и надконденсатных (намного более слабо заполненных) мод, поведение которых является сильно коррелированным.

²³С другой стороны, мы показали, что появление выделенного сигнала в $\mathbf{k} \gtrsim 0$ (в “правильном”, т.е. экспериментально наблюдаемом положении) может в принципе быть описано в рамках когерентной теории типа (41, 42); заметим, что модели, сформулированные в том же квазиклассическом приближении, но предполагающие *плавное* развитие пороговой неустойчивости ([7, 8, 68, 69]), в общем случае дают неверное предсказание направлений сигнала рассеяния, и потому требуют дополнительных предположений, например, о некогерентной энергетической релаксации в сторону дна НПВ. Заметим еще, что помимо работ [74]–[77] и [A1]–[A4], до настоящего времени не было опубликовано исследований, в которых бы рассматривались существенно многочастичные решения систем типа (41, 42) в случае положительных $D = E_p - \text{Re } E_{LP}(\mathbf{k}_p)$, несмотря на то что подход, основанный использовании таких уравнений, является в некотором смысле общепринятым. Насколько известно автору, похожая задача обсуждалась лишь в [92], где был выбран случай *отрицательной* расстройки D , и в работах [93, 94], где уравнения, аналогичные (41, 42), решались в координатном пространстве, а “конденсация” в область $\mathbf{k} \sim 0$ вообще не рассматривалась.

Отметим, что в ряде предшествующих работ [8, 70, 72, 73, 81] исследовались стационарные состояния трехмодовой системы, включающей раскачиваемую гармонику $\mathbf{k}_p$ и *фиксированные* моды “сигнала” [$\mathbf{k}_s = 0$] и “холостого сигнала” [$\mathbf{k}_i = 2\mathbf{k}_p$] параметрического рассеяния. По сути предполагалась, что такое трехмодовое распределение принадлежит классу устойчивых стационарных решений общей задачи типа (41, 42), и поэтому можно, например, исследовать свойства сигнала в зависимости от параметров непрерывной накачки ($\mathbf{k}_p$, E_p , $|\mathcal{F}|^2$), не интересуясь теми переходными процессами, в которых этот сигнал возникает динамически по мере ее “включения”. Такая посылка была обоснована только общими соображениями о применимости модели типа (41, 42) и тем, что “трехмодовое распределение” действительно наблюдается в экспериментах выше порога. Однако уже в работе [72] отмечалось, что трехмодовые стационарные состояния неустойчивы относительно малых флуктуаций. В нашей работе мы показали, что 1) выделенный сигнал рассеяния в направлении $\mathbf{k} \approx 0$ не возникает без взаимодействия между собой разных сигнальных гармоник и 2) сильно коррелированное поведение надконденсатных мод поддерживает устойчивость квазистационарного состояния с выделенным сигналом. Данный результат имеет важное методологическое значение: нами установлено, что теория, описывающая процесс порогового усиления сигнала в области $\mathbf{k} \approx 0$, а также свойства такого сигнала в квазистационарном режиме, принципиально несводима к моделям типа параметрического осциллятора, учитывающим только три состояния, связанные законами сохранения. Кроме того, мы обнаружили, что коллективные эффекты в системе взаимодействующих поляритонов приводят к достаточно большим характерным временам эволюции. Этот вопрос исследован еще далеко не в полной мере; по сути, мы продемонстрировали саму возможность таких коллективных эффектов и их значение, но пока не выяснили параметры порядка связанной многочастичной системы. Однако мы показали, что процессы перераспределения возбуждения приводят к выраженному гистерезису сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой моды, в хорошем соответствии с недавними экспериментальными результатами.

4 Стимулированное рассеяние в условиях взаимодействия оптических $(\sigma^\pm)$ компонент поля экситонной поляризации

В данной главе представлено обобщение модели (41, 42) на случай произвольно поляризованной накачки, когда падающая волна возбуждает экситоны с различными значениями проекции полного момента $J_z = -1, +1$ (разд. 4.1). Рассматривается задача о стационарном отклике возбуждаемой моды поля в активном слое планарного резонатора (разд. 4.2); обсуждается эффект мультистабильности отклика, а также возможность неравновесных переходов, в которых осуществляются резкие изменения как амплитуды, так и состояния поляризации поля в активном слое. В разд. 4.3 проанализирована пороговая трансформация распределения поля в случае линейно поляризованной накачки и обсуждается эффект инверсии линейной поляризации и процессе параметрического рассеяния.

4.1 Квазиклассическая модель экситон-фотонной системы в микрорезонаторе, учитывающая оптическую поляризацию

Выходя за рамки скалярного приближения, принятого в предшествующих главах, нам следует учесть векторную структуру полей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{P}$ в активном слое, а также внешней накачки $\mathcal{F}$, которые теперь будут рассматриваться как планарные векторы (например, $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \mathbf{e}_x + \mathcal{E}_y \mathbf{e}_y$), считая что можно полностью пренебречь значением поперечной компоненты ($\mathcal{E}_z$) в исследуемой области малых $|\mathbf{k}| \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$. Переход к спинору $\begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix}$ циркулярно поляризованных компонент электрического поля осуществляется по формуле

$$\mathcal{E} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_+ \\ \mathcal{E}_- \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_x \\ \mathcal{E}_y \end{pmatrix}, \quad (127)$$

то же относится к полям $\mathcal{P}$ и $\mathcal{F}$. Уравнения, аналогичные скалярным уравнениям (41) и (42), мы запишем в базисе состояний $\sigma^\pm$, с целью придать наиболее простую форму выражению вклада экситон-экситонного взаимодействия. Эти уравнения удобно записать в матричном виде

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) - \hat{E}_C(\mathbf{k}, t) \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) = \hat{\alpha}(\mathbf{k}) \mathcal{F}(\mathbf{k}, t) + \hat{\beta}(\mathbf{k}) \mathcal{P}(\mathbf{k}, t), \quad (128)$$

$$i \frac{d}{dt} \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) - \hat{E}_X \mathcal{P}(\mathbf{k}, t) = \hat{A} \mathcal{E}(\mathbf{k}, t) + \eta(\mathbf{k}, t) + \xi(\mathbf{k}, t), \quad (129)$$

где

$$\eta_\sigma(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{2} \sum_{\sigma'=-1,1} V_{\sigma\sigma'} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2} \mathcal{P}_{\sigma'}^*(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 - \mathbf{k}, t) \mathcal{P}_{\sigma'}(\mathbf{q}_1, t) \mathcal{P}_\sigma(\mathbf{q}_2, t) \quad (130)$$

и $\xi(\mathbf{k}, t)$ — двухкомпонентные столбцы, учитывающие экситон-экситонное взаимодействие и ланжевенский источник, соответственно, тогда как $\hat{E}_C, \hat{E}_X, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{A}$ являются матрицами размерности 2×2 , например,

$$\hat{E}_C = \begin{pmatrix} E_C^{++} & E_C^{+-} \\ E_C^{-+} & E_C^{--} \end{pmatrix}.$$

Значения $E_C(\mathbf{k})$, $\beta(\mathbf{k})$ и α были рассчитаны в базисе линейно поляризованных ТЕ- и ТМ-состояний, являющихся собственными модами электромагнитного поля в пустом резонаторе, так что

$$\hat{E}_C^{\text{TE, TM}}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} E_C^{\text{TE}}(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & E_C^{\text{TM}}(\mathbf{k}) \end{pmatrix},$$

после чего был осуществлен переход к базису состояний $\sigma^\pm$:

$$\begin{pmatrix} E_C^{++}(\mathbf{k}) & E_C^{+-}(\mathbf{k}) \\ E_C^{-+}(\mathbf{k}) & E_C^{--}(\mathbf{k}) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_C^{\text{TE}}(\mathbf{k}) + E_C^{\text{TM}}(\mathbf{k}) & [E_C^{\text{TE}}(\mathbf{k}) - E_C^{\text{TM}}(\mathbf{k})] e^{-2i\chi(\mathbf{k})} \\ [E_C^{\text{TE}}(\mathbf{k}) - E_C^{\text{TM}}(\mathbf{k})] e^{+2i\chi(\mathbf{k})} & E_C^{\text{TE}}(\mathbf{k}) + E_C^{\text{TM}}(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (131)$$

где

$$\chi(k_x, k_y) = \begin{cases} \arctg \frac{k_y}{k_x}, & \text{если } |\mathbf{k}| \neq 0; \\ 0, & \text{если } |\mathbf{k}| = 0. \end{cases}$$

Эффект ТЕ-ТМ расщепления учитывался, но в связи с тем, что он не оказывает существенного влияния на результаты, описанные ниже, детали расчета спектра резонатора здесь не приводятся. Собственная энергия экситона от поляризации не зависит (считаем, что состояния с $J_z = \pm 1$ вырождены), поэтому $\hat{E}_X = \begin{pmatrix} E_X & 0 \\ 0 & E_X \end{pmatrix}$. В согласии с недавней экспериментальной оценкой соотношения констант V_{++} и V_{+-} ([61]), мы полагаем

$$V_{+-} = V_{-+} = -0.1 \cdot V_{++}, \quad (132)$$

тогда как $V_{++} = V_{--} = 1$ по определению.

Рассмотрим задачу о стационарном отклике возбуждаемой моды ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$) поля в активном слое в предположении $\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}, t) \equiv 0 \ \forall \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$. Полагая в уравнениях (128, 129)

$$\mathcal{F}_\pm(\mathbf{k}_p, t) = \bar{\mathcal{F}}_\pm e^{-iE_p t/\hbar}, \quad \mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}_p, t) = \bar{\mathcal{P}}_\pm e^{-iE_p t/\hbar}, \quad \mathcal{E}_\pm(\mathbf{k}_p, t) = \bar{\mathcal{E}}_\pm e^{-iE_p t/\hbar}, \quad (133)$$

имеем систему алгебраических уравнений для стационарных амплитуд $\bar{\mathcal{E}}_\pm$ и $\bar{\mathcal{P}}_\pm$. Исключив $\bar{\mathcal{E}}_\pm$, получаем уравнения

$$\begin{aligned} & \left[\hat{E}_p - \hat{E}_X - \hat{A} \left(\hat{E}_p - \hat{E}_C \right)^{-1} \hat{\beta} \right] \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{P}}_+ \\ \bar{\mathcal{P}}_- \end{pmatrix} - \\ & - \begin{pmatrix} V_{++} \bar{\mathcal{P}}_+^* \bar{\mathcal{P}}_+ \bar{\mathcal{P}}_+ + V_{+-} \bar{\mathcal{P}}_-^* \bar{\mathcal{P}}_- \bar{\mathcal{P}}_+ \\ V_{-+} \bar{\mathcal{P}}_+^* \bar{\mathcal{P}}_+ \bar{\mathcal{P}}_- + V_{--} \bar{\mathcal{P}}_-^* \bar{\mathcal{P}}_- \bar{\mathcal{P}}_- \end{pmatrix} = \hat{A} \left(\hat{E}_p - \hat{E}_C \right)^{-1} \hat{\alpha} \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{F}}_+ \\ \bar{\mathcal{F}}_- \end{pmatrix}, \quad (134) \end{aligned}$$

позволяющие рассчитать $\mathcal{P}_\pm$ в зависимости от внешней накачки $\mathcal{F}_\pm$. Здесь использовано обозначение $\hat{E}_p = \begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & E_p \end{pmatrix}$; аргумент $\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$ опущен для всех переменных. Амплитуды $\bar{\mathcal{F}}_\pm$ и $\bar{\mathcal{P}}_\pm$ принимают комплексные значения и могут быть представлены в форме

$$\bar{\mathcal{F}}_\pm = \sqrt{\frac{I_{\text{ext}}}{2}} (1 \pm \rho_{\text{ext}}) \exp(i\phi_{\text{ext}}^\pm), \quad \bar{\mathcal{P}}_\pm = \sqrt{\frac{I_{\text{int}}}{2}} (1 \pm \rho_{\text{int}}) \exp(i\phi_{\text{int}}^\pm), \quad (135)$$

где I_{ext} и I_{int} — интенсивности, а ρ_{ext} и ρ_{int} — степени циркулярной поляризации накачки и поля $\mathcal{P}$, соответственно,²⁴ так что

$$I_{\text{ext}} = |\bar{\mathcal{F}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{F}}_-|^2, \quad \rho_{\text{ext}} = \frac{|\bar{\mathcal{F}}_+|^2 - |\bar{\mathcal{F}}_-|^2}{|\bar{\mathcal{F}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{F}}_-|^2},$$

$$I_{\text{int}} = |\bar{\mathcal{P}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{P}}_-|^2, \quad \rho_{\text{int}} = \frac{|\bar{\mathcal{P}}_+|^2 - |\bar{\mathcal{P}}_-|^2}{|\bar{\mathcal{P}}_+|^2 + |\bar{\mathcal{P}}_-|^2}. \quad (136)$$

Фазы $\{\phi_{\text{ext}}^+, \phi_{\text{ext}}^-\}$ σ -компонент падающей волны определены с точностью до аддитивной постоянной (физический смысл имеет лишь величина разности $\Delta\phi_{\text{ext}} \equiv \phi_{\text{ext}}^- - \phi_{\text{ext}}^+$). С другой стороны, система (134) линейна по фазовым множителям $\exp(i\phi_{\text{int}}^\pm)$ поля в активном слое в зависимости от $\exp(i\phi_{\text{ext}}^\pm)$; следовательно, сдвиг $\phi_{\text{int}}^\pm \rightarrow \phi_{\text{int}}^\pm + \text{const}$ (одинаковый для обеих фаз) не меняет значений $(I_{\text{int}}, \rho_{\text{int}})$, удовлетворяющих (134) при заданных $\bar{\mathcal{F}}_\pm$. Данные обстоятельства позволяют записать систему (134) в виде трех вещественных уравнений, определяющих отображение

$$\mathfrak{M}_3: (I_{\text{ext}}, \rho_{\text{ext}}, \Delta\phi_{\text{ext}}) \mapsto (I_{\text{int}}, \rho_{\text{int}}, \Delta\phi_{\text{int}}), \quad (137)$$

свойства которого нам и предстоит проанализировать.

Наконец, обратимся к задаче *анализа устойчивости* одномодового ($\mathbf{k} = \mathbf{k}_p$) стационарного состояния, определяемого решением уравнений (134). Следуя той же процедуре, что описана в разд. 2.3, нужно линеаризовать систему (128, 129) по малым возмущениям $\{\tilde{\mathcal{E}}_\pm, \tilde{\mathcal{P}}_\pm\}$ амплитуд “сигнала” $(\mathbf{k}, \omega)$ и “холостого сигнала” $(\mathbf{k}' = 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}, \omega' = 2\omega_p - \omega)$, удовлетворяющих правилам сохранения энергии и планарного квазиимпульса, в предположении, что для всех $\mathbf{k}$

$$\mathcal{E}_\pm(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{E}}_\pm(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{E}}_\pm e^{-i\omega_p t}, \quad (138)$$

$$\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathcal{P}}_\pm(\mathbf{k}) e^{-i\omega(\mathbf{k})t} + \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_p} \bar{\mathcal{P}}_\pm e^{-i\omega_p t}, \quad (139)$$

$$|\tilde{\mathcal{E}}_\pm(\mathbf{k})| \ll |\bar{\mathcal{E}}_\pm|, \quad (140)$$

$$|\tilde{\mathcal{P}}_\pm(\mathbf{k})| \ll |\bar{\mathcal{P}}_\pm|, \quad (141)$$

$$\omega(\mathbf{k}) + \omega(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) = 2\omega_p. \quad (142)$$

²⁴Индексы “ext” и “int” обозначают “внешние” (external) и “внутренние” (internal) компоненты, относящиеся, соответственно, к накачке и полю $\mathcal{P}$.

Рассматривая стационарные амплитуды $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$ возбуждаемой моды в качестве управляющих параметров, имеем замкнутую линейную систему

$$\hbar\omega X(\mathbf{k}) = \hat{L}(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) X(\mathbf{k}) \quad (143)$$

для

$$X(\mathbf{k}) = \left(\tilde{\mathcal{E}}_+(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{E}}_-(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}_+(\mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}_-(\mathbf{k}), \right. \\ \left. \tilde{\mathcal{E}}'_+(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \tilde{\mathcal{E}}'_-(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}'_+(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}), \tilde{\mathcal{P}}'_-(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \right)^T, \quad (144)$$

где

$$\left[\hat{L}(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) \right]_{ab} = \frac{\partial^2 H[(X(\mathbf{k}), X^*(\mathbf{k}); \bar{\mathcal{P}}_{\pm})]}{\partial (X_a)^* \partial X_b} \quad (145)$$

— матрица 8×8 , соответствующая билинейной форме

$$H[(X(\mathbf{k}), X^*(\mathbf{k}); \bar{\mathcal{P}}_{\pm})] = \\ = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \left\{ [\hat{E}_C(\mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + [\hat{E}_X]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \right. \\ + [\hat{\beta}(\mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \hat{A}_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) + \\ + [2\hat{E}_p - \hat{E}_C^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \\ + [2\hat{E}_p - \hat{E}_X^*]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) - \\ - [\hat{\beta}^*(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})]_{\sigma_1 \sigma_2} \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) - \hat{A}_{\sigma_1 \sigma_2}^* \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{E}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \\ + 2\hat{V}_{\sigma_1, \sigma_2} \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2} \cdot [\tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}^*(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}(\mathbf{k}) + \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_2}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})] + \\ \left. + \hat{V}_{\sigma_1, \sigma_2} [\tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_1}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}^* \tilde{\mathcal{P}}_{\sigma_2}(\mathbf{k}) \tilde{\mathcal{P}}'_{\sigma_1}(2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}) + \text{с.с.}] \right\}. \quad (146)$$

Собственные значения $\Omega(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm})$ линейной задачи (143–146) отвечают комплексным энергиям двухкомпонентных (с учетом поляризации) LP- и UP-состояний, при том что каждой из четырех компонент $\text{LP}_{1,2}$, $\text{UP}_{1,2}$ соответствуют моды “сигнала” и “холостого сигнала”. *Инкремент нарастания* (показатель Ляпунова) волновой моды $\mathbf{k}$ в зависимости от $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}$ определяется значением наибольшей мнимой части $\Omega(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm})$:

$$\Gamma(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) = \max \{ \text{Im } \Omega_l(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) \mid l = 1, 2, \dots, 8 \}. \quad (147)$$

Как обычно, вычисление Γ позволяет проанализировать устойчивость одномодового состояния с заданными значениями $\bar{\mathcal{P}}_{\pm}(\bar{\mathcal{F}}_{\pm})$. С увеличением $|\mathcal{F}|$ неустойчивость $[\Gamma(\mathbf{k}; \bar{\mathcal{P}}_{\pm}) > 0]$ может возникнуть как вследствие параметрического распада $[(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p]$, так и в самой возбуждаемой моде $[\mathbf{k} = \mathbf{k}' = \mathbf{k}_p, \text{ но } \omega \neq \omega']$ в условиях положительной расстройки частоты внешнего возбуждения с LP-резонансом.

В разд. 4.2 нами рассматривается вопрос об устойчивости строго одномодовых $[\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t) \equiv 0]$ стационарных состояний системы.

4.2 Мультистабильность отклика возбуждаемой моды поля в активном слое

В разд. 2.2 было показано, что в случае положительной расстройки частоты накачки $D \equiv E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p) > \sqrt{3} \cdot |\text{Im } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)|$ функция стационарного отклика возбуждаемой моды $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ принимает вид S-образной кривой, что приводит к бистабильности отклика и возможности резкой трансформации состояния по достижении критической интенсивности возбуждения

$$I^{(\text{crit})}: \lim_{I_{\text{ext}} \rightarrow I^{(\text{crit})} - 0} \frac{dI_{\text{int}}}{dI_{\text{ext}}} = \infty. \quad (148)$$

Фактически нами рассматривался случай циркулярной поляризации накачки $|\rho_{\text{ext}}| = 1$, когда, пренебрегая эффектом ТЕ-ТМ расщепления, мы полагали, что падающая волна возбуждает экситоны с одинаковыми значениями проекции полного момента J_z ; при этом отображение $I_{\text{ext}} \mapsto I_{\text{int}}$ является одномерным, а обратное отображение $I_{\text{int}} \mapsto I_{\text{ext}}$ является однозначным. Теперь мы рассмотрим случай произвольного ρ_{ext} в рамках одномодового (по $\mathbf{k}$) приближения.

На рис. 24 представлена серия графиков $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$, рассчитанных для разных значений степени циркулярной поляризации внешнего поля ρ_{ext} от 1 до 0. Ряд характерных свойств отображения $\mathfrak{M}_3$, приводящих к трансформации функции $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ с изменением ρ_{ext} , можно пояснить, не учитывая взаимодействие экситонов с разными J_z (т. е. полагая $V_{+-} = 0$). Другими словами, можно принять, что σ^+ - и σ^- -компоненты стационарного поля в активном слое не связаны между собой и потому характеризуются *одинаковыми* S-контурами отклика на соответственные $\sigma^\pm$ -компоненты накачки,²⁵ $|\mathcal{P}_+^2|(|\mathcal{F}_+^2|)$ и $|\mathcal{P}_-^2|(|\mathcal{F}_-^2|)$. В таком случае критические значения σ -компонент внешнего поля ($|\mathcal{F}_+^{(\text{crit})}|^2$ и $|\mathcal{F}_-^{(\text{crit})}|^2$) совпадают, но если $\rho_{\text{ext}} \neq 0$, то по мере “включения” накачки эти значения достигаются неодновременно. Иначе говоря, совпадающим $|\mathcal{F}_+^{(\text{crit})}|^2$ и $|\mathcal{F}_-^{(\text{crit})}|^2$ отвечают разные значения *полной* интенсивности возбуждения

$$I_{\pm}^{(\text{crit})} = \frac{2|\mathcal{F}^{(\text{crit})}|^2}{1 \pm \rho_{\text{ext}}} \quad (149)$$

[см. (136)]. Если $\rho_{\text{ext}} = 1$, существует лишь одна критическая точка $I_+^{(\text{crit})}$, отвечающая скачку σ^+ -компоненты поля в активном слое. Сколь угодно малое отклонение ρ_{ext} от 1 приводит к появлению второй критической точки $I_-^{(\text{crit})} > I_+^{(\text{crit})}$, отвечающей скачку σ^- -компоненты по мере дальнейшего увеличения I_{ext} , при этом второй скачок полной интенсивности I_{int} сопровождается уменьшением степени циркулярной поляризации ρ_{int} . Для $\rho_{\text{ext}} = 0$ значения $I_+^{(\text{crit})}$ и $I_-^{(\text{crit})}$ совпадают, если $V_{+-} = 0$, но в общем

²⁵Такое предположение делается лишь с целью упрощения анализа результатов; фактические расчеты, представленные на графиках 24 и 26–30, выполнены с учетом как $\sigma^\pm$ -взаимодействия, так и ТЕ-ТМ расщепления.

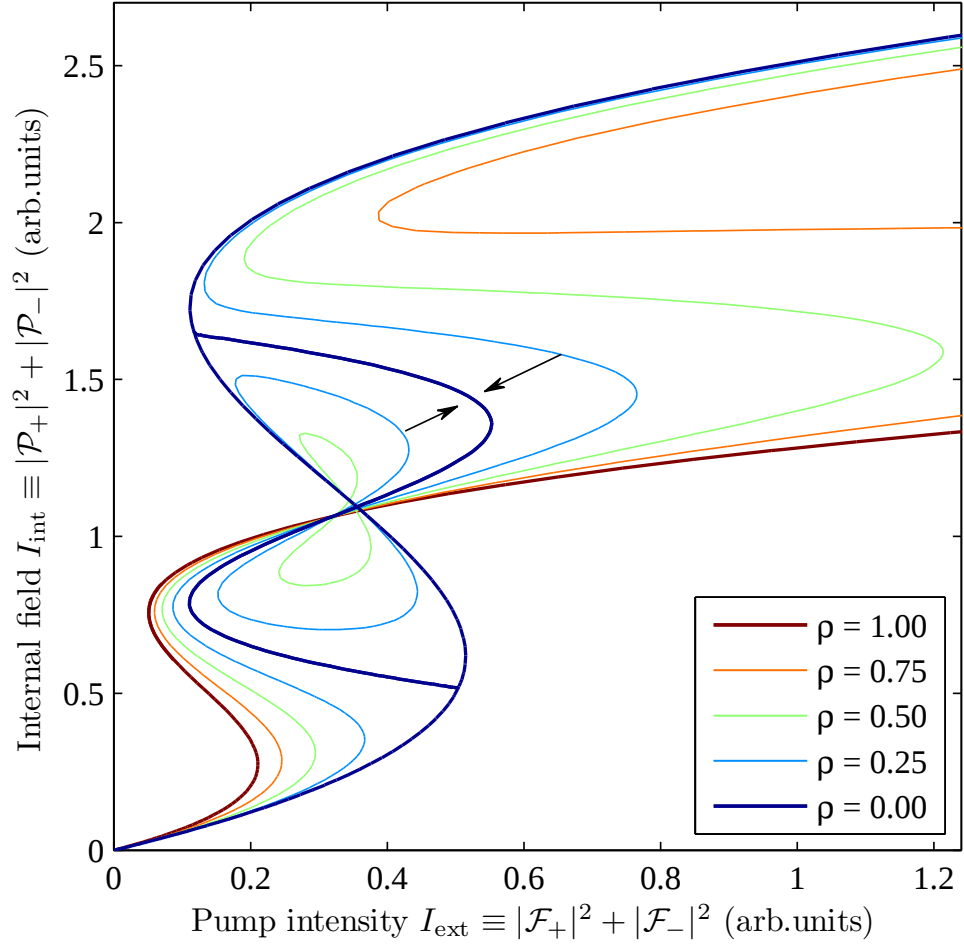


Рис. 24. Функции стационарного отклика возбуждаемой моды поля в активном слое: зависимости $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$, рассчитанные для разных значений $\rho_{\text{ext}} = (|\mathcal{F}_+|^2 - |\mathcal{F}_-|^2) / (|\mathcal{F}_+|^2 + |\mathcal{F}_-|^2)$ при фиксированном $\Delta\phi_{\text{ext}} \equiv \arg(\mathcal{F}_+^* \mathcal{F}_-) = 0$. Расстройка накачки $D \equiv E_p - \frac{1}{2} \text{Re} [E_{\text{LP}}^{\text{TE}}(\mathbf{k}_p) + E_{\text{LP}}^{\text{TM}}(\mathbf{k}_p)]$ составляет 0.5 мЭВ, значительно превосходя величину ТЕ-ТМ расщепления $\text{Re} [E_{\text{LP}}^{\text{TE}}(\mathbf{k}_p) - E_{\text{LP}}^{\text{TM}}(\mathbf{k}_p)] \approx -0.02$ мЭВ для $\mathbf{k}_p = 1.8 \text{ мкм}^{-1}$. Стрелками указан характер трансформации решения с уменьшением $|\rho_{\text{ext}}|$: от двух разных ветвей $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=0.25}$ к двукратно вырожденной ветви $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=0}$.

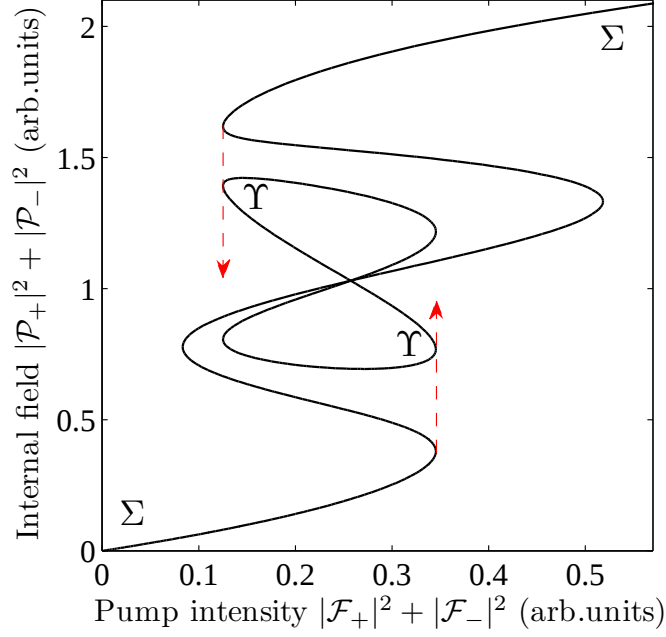


Рис. 25. Функция $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ для $\rho_{\text{ext}} = 0.2$ в приближении $V_{+-} = 0$ и $E_C^{\text{TM}} = E_C^{\text{TE}}$. Если $\sigma^\pm$ -компоненты поля не взаимодействуют, состояния ветви Υ недостижимы по мере плавного изменения I_{ext} от нуля до бесконечности и обратно при $\rho_{\text{ext}} = \text{const}$.

случае такого совпадения нет; характер влияния $\sigma^\pm$ -взаимодействия мы рассмотрим отдельно.

Рис. 24 позволяет проследить плавную трансформацию функции $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ в целом с уменьшением ρ_{ext} от 1 к 0. Отметим, что начиная с определенного *конечного* значения разности $1 - \rho_{\text{ext}}$ возникает дополнительная ветвь отображения $I_{\text{ext}} \mapsto I_{\text{int}}$, имеющая форму восьмерки и не связанная с “дважды S-образной” ветвью при $\rho_{\text{ext}} > 0$. Обозначим, для определенности, замкнутую ‘8’-образную ветвь буквой Υ , а S-образную ветвь — буквой Σ . С увеличением I_{ext} ветвь Υ возникает тогда, когда величина $|\mathcal{F}_-|^2 \equiv I_{\text{ext}}(1 - \rho_{\text{ext}})/2$ достигает области неоднозначного отклика $|\mathcal{F}_-|^2 \mapsto |\mathcal{P}_-|^2$, — и исчезает тогда, когда $|\mathcal{F}_+|^2 \equiv I_{\text{ext}}(1 + \rho_{\text{ext}})/2$ выходит из области неоднозначности²⁶ $|\mathcal{F}_+|^2 \mapsto |\mathcal{P}_+|^2$ по достижении $I_{\text{ext}} = I_+^{(\text{crit})}$. Отсюда следует, что в случае $V_{+-} = 0$ состояния ветви Υ недостижимы как по мере увеличения I_{ext} от нуля до бесконечности, так и в процессе обратного уменьшения I_{ext} при $\rho_{\text{ext}} = \text{const}$ (см. рис. 25). Наконец, отметим, что при $\rho_{\text{ext}} = 0$ ветвь Υ является подмногообразием Σ .

²⁶Таким образом, максимальное значение числа возможных I_{int} , соответствующих определенной накачке $(I_{\text{ext}}, \rho_{\text{ext}}, \Delta\phi_{\text{ext}})$, составляет $3 \times 3 = 9$, поскольку максимальное число состояний каждой из двух $\sigma^\pm$ -компонент поля в активном слое равно трем. При этом одно из трех состояний (как для $\mathcal{P}_+$, так и для $\mathcal{P}_-$) неустойчиво. Следовательно, в общем случае существует не более четырех устойчивых значений I_{int} для заданной накачки.

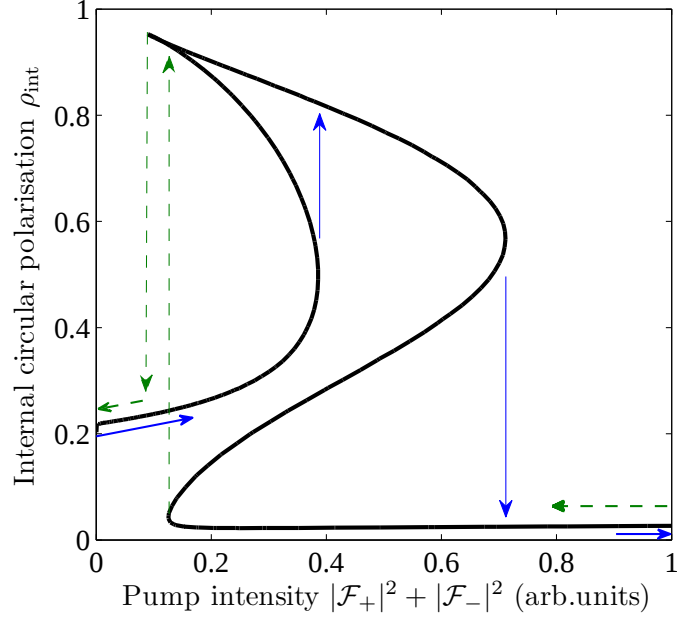


Рис. 26. Зависимость степени циркулярной поляризации ρ_{int} поля $\mathcal{P}$ от интенсивности $|\mathcal{F}|^2$ внешней накачки при $\rho_{\text{ext}} = 0.2$ в стационарном одномодовом приближении. Стрелками указаны скачки ρ_{int} , ожидаемые в предположении об устойчивости решения при плавном изменении $|\mathcal{F}|^2$ от нуля до бесконечности (сплошные стрелки) и от бесконечности до нуля (пунктирные стрелки).

Приведенные соображения позволяют проанализировать зависимость оптической поляризации стационарного поля в активном слое ρ_{int} от интенсивности и поляризации накачки (рисунки 26 и 27, соответственно).

Рассмотрим функцию $\rho_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=\text{const}}$ для $\rho_{\text{ext}} = 0.2$ (рис. 26). Очевидно, что в области малых I_{ext} должно быть $\rho_{\text{int}} \approx \rho_{\text{ext}}$, однако с ростом I_{ext} “преимущество” σ^+ -компоненты усиливается вследствие нелинейности отклика, и потому величина ρ_{int} нарастает. Достижение критической интенсивности $I_{\text{ext}} = I_+^{(\text{crit})}$ приводит к скачку $|\mathcal{P}_+|$ и, следовательно, скачку $\rho_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$, поскольку “отстающая” компонента $|\mathcal{P}_-|$ меняется относительно слабо. Наконец, последующее увеличение накачки до $I_{\text{ext}} = I_-^{(\text{crit})} > I_+^{(\text{crit})}$ приводит к скачку σ^- -компоненты, в результате чего поле в активном слое становится почти линейно поляризованным ($\rho_{\text{int}} \approx 0$) при больших I_{ext} . Обратное изменение $\mathcal{P}_{\pm}(I_{\text{ext}})$ в процессе уменьшения I_{ext} от бесконечности до нуля происходит вдоль верхних ветвей устойчивости $|\mathcal{P}_{\pm}^2|(|\mathcal{F}_{\pm}^2|)$, и потому поле в активном слое сравнительно долго остается поляризованным линейно (соответствующая траектория $\rho_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ указана пунктирными стрелками). Поскольку же $|\mathcal{P}_-(I_{\text{ext}})| < |\mathcal{P}_+(I_{\text{ext}})|$, компонента σ^- раньше, чем σ^+ , достигает точки обратного перехода, чем и вызван скачок ρ_{int} в области малых плотностей возбуждения.

Рассмотрим теперь зависимость ρ_{int} от ρ_{ext} при $I_{\text{ext}} = \text{const}$ (рис. 27). Если, как

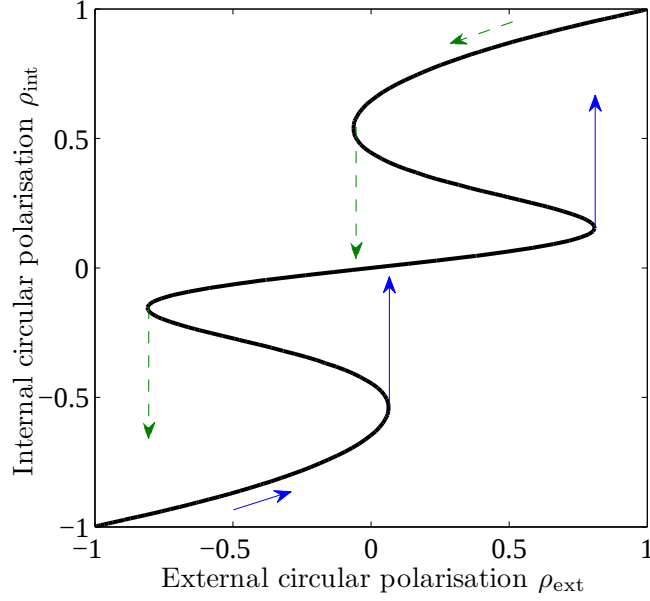


Рис. 27. Зависимость $\rho_{\text{int}}(\rho_{\text{ext}})$, рассчитанная при фиксированной интенсивности внешнего поля $I_{\text{ext}} \approx I_0$ в стационарном одномодовом приближении. Значение I_0 отмечено на рис. 28. Стрелками указаны скачки ρ_{int} , ожидаемые в предположении об устойчивости решения при плавном изменении ρ_{ext} от -1 до 1 (сплошные стрелки) и от 1 до -1 (пунктирные стрелки).

в данном примере, $I_{\text{ext}} > |\mathcal{F}^{(\text{crit})}|^2$, то в окрестности $\rho_{\text{ext}} = -1$ амплитуда $\mathcal{P}_-$ находится на верхней ветви устойчивости S-контура $|\mathcal{P}_-^2|(|\mathcal{F}_-^2|)$, тогда как $\mathcal{P}_+ \sim 0$ находится на нижней ветви $|\mathcal{P}_+^2|(|\mathcal{F}_+^2|)$. С увеличением ρ_{ext} значение $|\mathcal{P}_-^2|$ уменьшается, а $|\mathcal{P}_+^2|$ увеличивается, и в ходе изменения ρ_{ext} от -1 до 1 происходят два последовательных скачка: $|\mathcal{P}_+^2|$ — на верхнюю ветвь, а затем $|\mathcal{P}_-^2|$ — на нижнюю, причем ρ_{int} увеличивается в обоих случаях. В процессе обратного изменения ρ_{ext} от 1 к -1 скачки $\sigma^\pm$ -компонент происходят аналогично, что приводит к выраженному гистерезису зависимости $\rho_{\text{int}}(\rho_{\text{ext}})|_{I_{\text{ext}}=\text{const}}$.

Теперь мы обратимся к анализу некоторых специальных эффектов, отсутствующих в приближении $V_{+-} = 0$ и возникающих за счет взаимодействия σ^+ - и σ^- -компонент поля экситонной поляризации; вообще говоря, оказывается, что в определенном диапазоне параметров накачки слабое $\sigma^\pm$ -взаимодействие приводит к качественной трансформации свойств отклика системы по сравнению со случаем $V_{+-} = 0$.

Ранее отмечалось, что если $V_{+-} = 0$, то состояния Υ -ветви функции стационарного отклика $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=\text{const}}$ недостижимы по мере плавного изменения I_{ext} от нуля до бесконечности и обратно (рис. 25). Здесь мы, по сути, предполагали, что скачки σ^+ и σ^- -компонент поля в активном слое могут происходить независимо. Но коль скоро $V_{+-} \neq 0$, очевидно, что резкое изменение одной из компонент $\mathcal{P}_\pm$ приведет к измене-

нию второй компоненты, зависящему от полной интенсивности поля $\mathcal{P}$ в силу нелинейности отклика. Отсюда следует, что разность критических значений интенсивности внешнего поля $I_{\pm}^{(\text{crit})}$ остается конечной даже при $\rho_{\text{ext}} \rightarrow 0$, поскольку соответствующие значения $|\mathcal{P}(I_{\pm}^{(\text{crit})})|^2$ отличаются достаточно сильно и потому первый и следующий за ним переходы в этом смысле неравноценны. При этом, однако, получается, что

$$\lim_{\rho_{\text{ext}} \rightarrow +0} (I_{+}^{(\text{crit})} - I_{-}^{(\text{crit})}) = - \lim_{\rho_{\text{ext}} \rightarrow -0} (I_{+}^{(\text{crit})} - I_{-}^{(\text{crit})}) \neq 0. \quad (150)$$

Следовательно, в случае *строго линейной* поляризации внешнего поля может произойти спонтанное нарушение симметрии $\sigma^{\pm}$ -компонент поля в активном слое; в общем же случае появляются новые ветви устойчивости отклика $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$, достижимые в ходе плавного увеличения I_{ext} . Возможность таких переходов открывается начиная с некоторого определенного значения расстройки $D \equiv E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$, зависящего от величины V_{+-} (поскольку, вообще говоря, рост частотной расстройки накачки усиливает нелинейность отклика).

По сравнению с идеальным случаем $V_{+-} = 0$, слабое взаимодействие $\sigma^{\pm}$ -компонент поля $\mathcal{P}$ приводит и к существенной перемене свойств, определяющих *устойчивость* состояния возбуждаемой моды в фазовом пространстве $(\text{Re } \mathcal{P}_{+}, \text{Im } \mathcal{P}_{+}, \text{Re } \mathcal{P}_{-}, \text{Im } \mathcal{P}_{-})$.

В скалярном приближении, отвечающем условию $|\rho_{\text{ext}}| = 1$, мы установили, что устойчивость стационарного состояния возбуждаемой моды определяется наклоном касательной к ветви $|\mathcal{P}^2|(|\mathcal{F}^2|)$. Именно,

$$\text{sgn } \Gamma(\mathcal{P}) = - \text{sgn } \frac{d(\mathcal{F}^* \mathcal{F})}{d(\mathcal{P}^* \mathcal{P})}, \quad (151)$$

т. е. состояния, принадлежащие ветви с отрицательным наклоном $|\mathcal{P}^2|(|\mathcal{F}^2|)$, параметрически неустойчивы. Как хорошо известно, такое соотношение определяет поведение строго одномерного осциллятора с кубическим самодействием ([79]); таким образом, фаза возбуждаемой моды $[\arg(\mathcal{F}^* \mathcal{P})]$ никак не влияет на состояние устойчивости. Если $|\rho_{\text{ext}}| \neq 1$, но $V_{+-} = 0$, такие же соотношения выполняются для $\sigma^{\pm}$ -компонент по отдельности и вне зависимости от величин $\arg(\mathcal{F}_{\pm}^* \mathcal{P}_{\pm})$ и $\arg(\mathcal{P}_{+}^* \mathcal{P}_{-})$, в связи с тем что система (134) линейна по $\exp(i\phi_{\text{ext}}^{\pm})$ и $\exp(i\phi_{\text{int}}^{\pm})$. Состояния, в которых одна из компонент $\sigma^{\pm}$ устойчива, а другая нет, принадлежат ветви Υ и потому не достигаются в процессе плавного увеличения I_{ext} при $\rho_{\text{ext}} = \text{const}$. Следовательно, в случае $\rho_{\text{ext}} \neq 0$ и $V_{+-} = 0$ выполняется соотношение, аналогичное (151):

$$\text{sgn } \Gamma(I_{\text{ext}}, I_{\text{int}}) = - \text{sgn } \frac{dI_{\text{ext}}}{dI_{\text{int}}}, \quad \text{если } V_{+-} = 0 \text{ и } \{I_{\text{ext}}, I_{\text{int}}\} \in \Sigma \setminus \Upsilon. \quad (152)$$

Но если $V_{+-} \neq 0$, может оказаться, что Υ -состояние возникает на “нижней” ветви стационарных решений $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=0}$ с положительной производной $dI_{\text{ext}}/dI_{\text{int}}$, и с ростом I_{ext} возбуждаемая система теряет устойчивость вблизи нижней точки пересечения $\Upsilon \cap \Sigma$ (точка A на рис. 28).

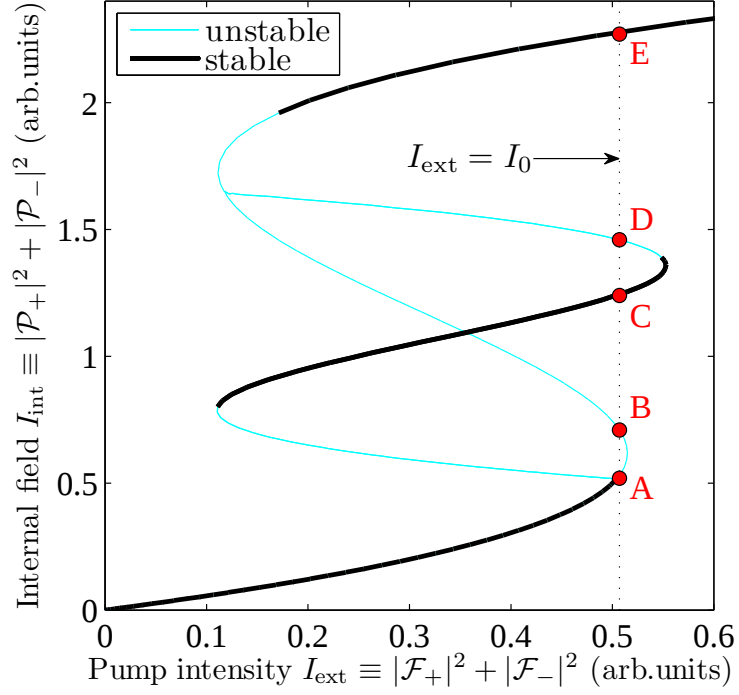


Рис. 28. Функция $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$ в случае строго линейной поляризации внешнего поля ($\rho_{\text{ext}} = 0$). Участки, являющиеся устойчивыми в одномодовом приближении, выделены жирной линией. Пунктирная прямая $I_{\text{ext}} = I_0$ соответствует точке A, в которой система теряет устойчивость по мере плавного “включения” накачки. Кружками и буквами A, B, ..., E отмечены все решения системы (134) для заданной накачки ($I_{\text{ext}} = I_0$, $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\Delta\phi_{\text{ext}} = 0$).

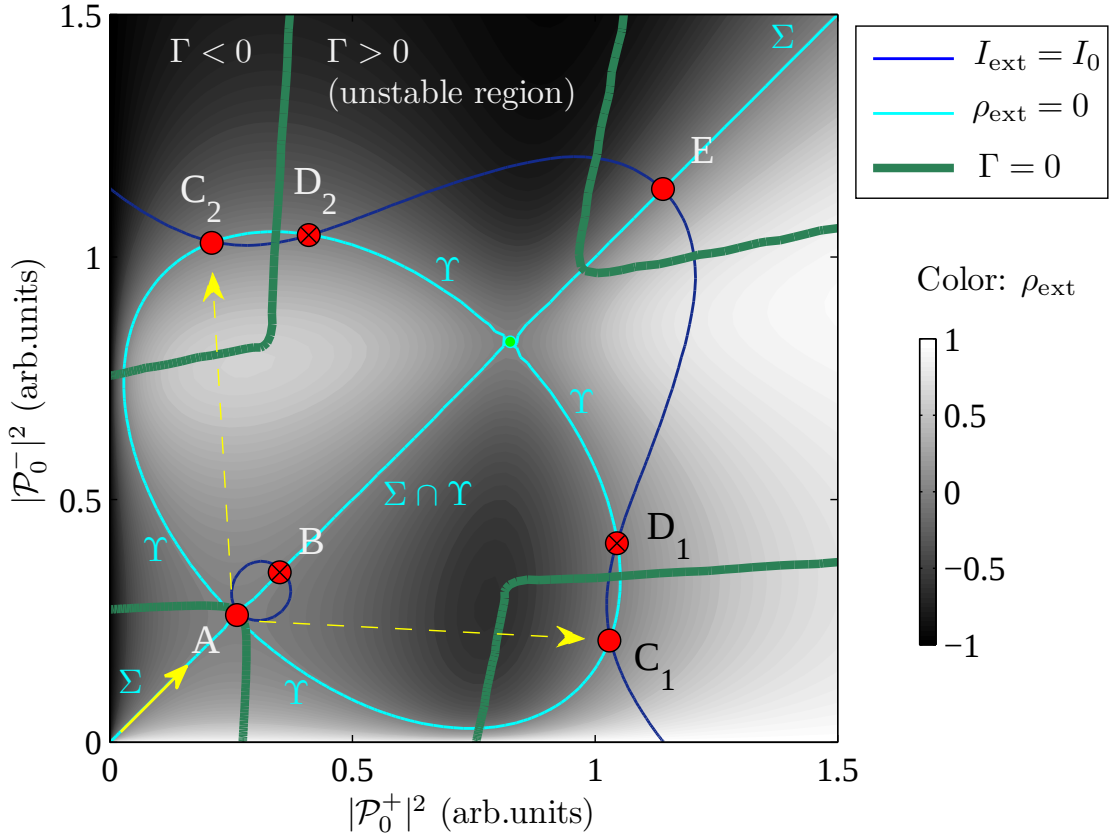


Рис. 29. Фазовая плоскость $(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$, на которой указаны положения решений $A, B, \dots, E$ (см. рис. 28), отвечающих заданной накачке ($I_{\text{ext}} = I_0$, $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\Delta\phi_{\text{ext}} = 0$). Значения функции $\rho_{\text{ext}}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$ представлены оттенками серого цвета. Тонкая темная линия показывает решение уравнения $I_{\text{ext}}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = I_0$, тонкая светлая линия — решение $\rho_{\text{ext}}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = 0$ (подписаны ветви Σ и Υ , а также пересечение $\Sigma \cap \Upsilon$). Жирные серые линии $\Gamma(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) = 0$ соответствуют границам областей устойчивости в одномодовом приближении; неустойчивые решения B, D_1, D_2 отмечены перечеркнутыми маркерами ($\otimes$). По мере плавного увеличения интенсивности накачки I_{ext} при $\rho_{\text{ext}} = 0$ (сплошная стрелка) система теряет устойчивость в точке A , после чего осуществляется быстрая трансформация состояния. Пунктирными стрелками указаны равновероятные переходы в состояния $C_{1,2}$. Стационарное состояние E устойчиво, но динамически недостижимо при $I_{\text{ext}} \rightarrow I_0$.

Общий (качественный) анализ устойчивости в случае $V_{+-} \neq 0$, включая критические явления в надпороговой области, составляет очень сложную задачу, которая здесь не рассматривается. Вместо того мы рассмотрим лишь достаточно характерную ситуацию, представленную на рис. 28, и, в частности, зададимся вопросом о том, *как* изменится состояние системы по достижении точки потери устойчивости [$\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t) \equiv 0$].

Возможные значения интенсивности $I_{\text{int}} \equiv |\mathcal{P}_+|^2 + |\mathcal{P}_-|^2$, определяемые решением системы (134) для $\rho_{\text{ext}} = 0$ и “пороговой” накачки $I_{\text{ext}} = I_0$, обозначены буквами $A, B, \dots, E$ на рис. 28. На следующем рис. 29 эти же решения указаны в координатах $(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2)$ как точки пересечения кривых

$$\begin{aligned} I_{\text{ext}}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) &= I_0, \\ \rho_{\text{ext}}(|\mathcal{P}_+|^2, |\mathcal{P}_-|^2) &= 0, \end{aligned}$$

рассчитанных с использованием дополнительного условия $\Delta\phi_{\text{ext}}(\mathcal{P}_{\pm}) = 0$. Ясно, что в условиях строго линейной накачки состояния C и D , в которых $\rho_{\text{int}} \neq 0$, двукратно вырождены по степени циркулярной поляризации. Состояния B и $D_{1,2}$, принадлежащие ветвям с отрицательным наклоном $dI_{\text{int}}/dI_{\text{ext}}$, параметрически неустойчивы. Таким образом, существует три абсолютно устойчивых [$\Gamma < 0$] состояния поля в активном слое (C_1, C_2, E), отвечающих заданной внешней накачке ($I_{\text{ext}} = I_0$, $\rho_{\text{ext}} = 0$, $\Delta\phi_{\text{ext}} = 0$). Переходы из точки A в состояния C_1 и C_2 равновероятны в силу строгой симметрии, откуда следует, что в том или ином случае динамика перехода определяется случайными флуктуациями, которые, будучи сколь угодно малыми в пороговой точке, усиливаются со временем.

Допустим, для определенности, что в точке A разность $|\mathcal{P}_+| - |\mathcal{P}_-|$ положительна. Поскольку $V_{++} > 0$, эффективная энергия σ^+ -компоненты (E_+) несколько сдвинута в синюю область относительно E_- , и потому характеризуется меньшей, чем E_- , расстройкой D с энергией внешнего поля; в результате $|\mathcal{P}_+|$ входит в режим положительной обратной связи с E_+ и продолжает увеличиваться. С другой стороны, в связи с тем что $V_{+-} < 0$, рост $|\mathcal{P}_+|$ приводит к *красному* сдвигу компоненты σ^- , которая, таким образом, отдаляется от резонанса с накачкой и становится уже нечувствительной к флуктуациям (возникает отрицательная обратная связь между $|\mathcal{P}_+|$ и $|\mathcal{P}_-|$). Отметим, что значение $|\mathcal{P}_-|^2$ в точке C_1 оказывается даже меньше, чем в точке A . Если же исходное (формально, сколь угодно малое) преимущество имеет компонента $\mathcal{P}_-$, ситуация оказывается ровно противоположной и в результате система переходит в состояние C_2 . При этом не ясно, может ли произойти переход в состояние E , которое, как и $C_{1,2}$, является абсолютно устойчивым.

Чтобы проверить существующие возможности, следует вернуться к исходной системе (128, 129) и рассмотреть динамику возбуждаемого состояния по достижении

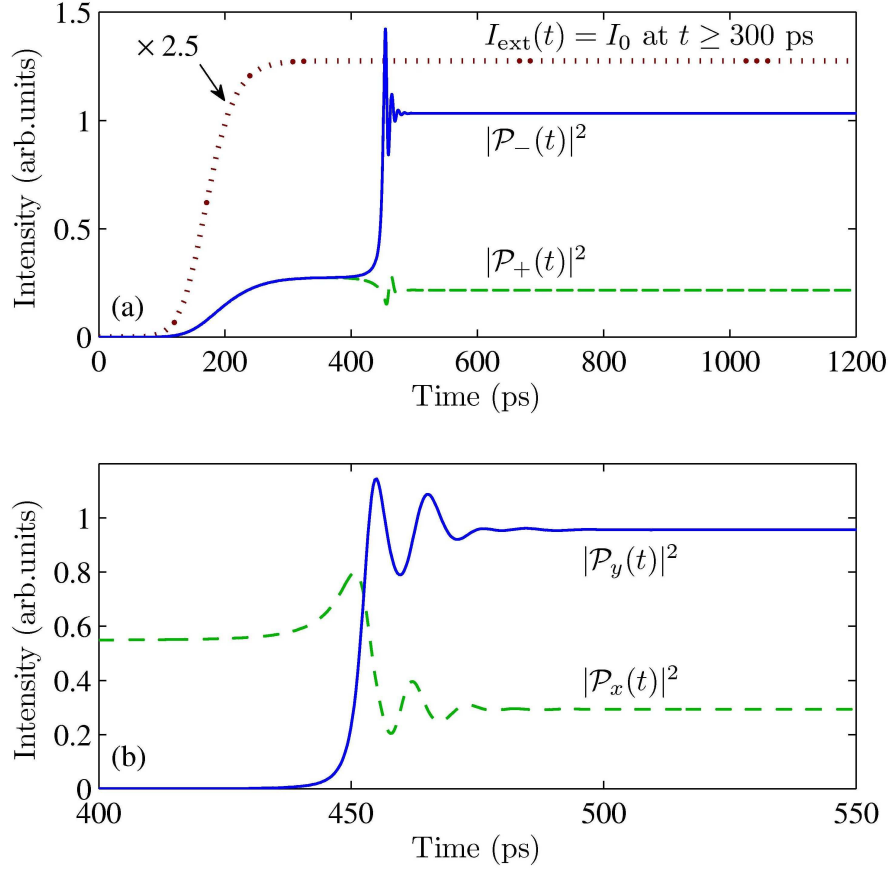


Рис. 30. Решение системы (128, 129) в предположении $\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p, t) \equiv 0$: временные зависимости величин $|\mathcal{P}_+(t)|^2$ и $|\mathcal{P}_-(t)|^2$ (панель *a*) и соответствующих линейных компонент $|\mathcal{P}_{x,y}(t)|^2$ вблизи точки перехода (панель *b*; x - и y -поляризациям отвечают состояния с фазовыми разностями $\Delta\phi_{\text{int}} = 0$ и $\Delta\phi_{\text{int}} = \pi/2$). Поляризация накачки фиксирована ($\rho_{\text{ext}} = 0$, $\Delta\phi_{\text{ext}} = 0$), а интенсивность $I_{\text{ext}}(t)$ плавно увеличивается от 0 до $1.005 \cdot I_0$ (см. рис. 28) за 300 пс, после чего остается постоянной. Стационарное состояние, устанавливающееся после критической трансформации решения, соответствует точке C_2 на рис. 29. Серия последовательных расчетов, проведенных с идентичными параметрами системы (128, 129), показывает, что переходы в состояния C_1 и C_2 являются равновероятными.

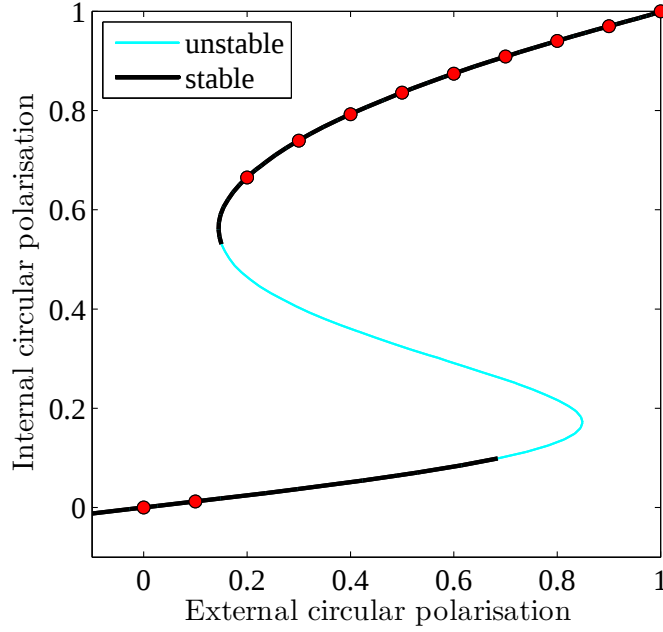


Рис. 31. Сплошная кривая: функция $\rho_{\text{int}}(\rho_{\text{ext}})|_{I_{\text{ext}}=\text{const}}$ для $I_{\text{ext}} = 1.3 \cdot I_0$. Участки, являющиеся устойчивыми в одномодовом приближении, выделены жирной линией. Круглые маркеры — стационарные состояния, рассчитанные путем решения исходной системы (128, 129) с зависящей от времени интенсивностью накачки I_{ext} , которая для каждой расчетной точки плавно “включалась” от 0 до $1.3 \cdot I_0$.

критической точки A ; результат расчета представлен на рис. 30. Форма возбуждающего импульса $I_{\text{ext}}(t)$ была выбрана так, чтобы по мере “включения” система не отклонялась от нижней ветви устойчивости $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$. За 300 пс I_{ext} увеличивается от 0 до $1.005 \cdot I_0$, после чего остается строго постоянным; слабое превышение порога (I_0) нужно затем, чтобы войти в область положительных Γ .

Интересующий нас переход осуществляется при $t \approx 450$ пс, спустя примерно 150 пс после “включения” внешнего поля: происходит резкое увеличение $|\mathcal{P}_-|$, тогда как величина $|\mathcal{P}_+|$ отклоняется в сторону меньших значений. Установление решения имеет вид затухающих колебаний $|\mathcal{P}_+(t)|^2$ и $|\mathcal{P}_-(t)|^2$ с характерным фазовым сдвигом около $\pi/4$. В результате система переходит в точку C_2 , в строгом соответствии с оценкой, сделанной в стационарном приближении.

Последовательные расчеты, выполненные с идентичными параметрами системы (128, 129), показывают, что переходы в состояния C_1 и C_2 , обусловленные спонтанным нарушением $\sigma^\pm$ -симметрии, являются равновероятными, тогда как строго симметричные переходы в состояние E динамически неосуществимы (для данных параметров возбуждения).

Таким образом, строго линейная накачка ($\rho_{\text{ext}} = 0$) вызывает отклик, характеризующийся значительной циркулярной поляризацией поля в активном слое ($|\rho_{\text{int}}| > 0$).

Как следует из рис. 28, данный эффект должен иметь место в некотором конечном отрезке $I_{\text{ext}} \in [I_0, I_1]$. Разность $I_1 - I_0$ определяется величиной частотной расстройки $E_p - \text{Re } E_{\text{LP}}(\mathbf{k}_p)$; с другой стороны, “критическая” расстройка, начиная с которой спонтанное нарушение $\sigma^\pm$ -симметрии при $\rho_{\text{ext}} = 0$ вообще возможно, определяется величиной V_{+-} .

Если I_{ext} превышает предельное значение I_1 (на рис. 28 $I_1 \approx 0.56$), поле $\mathcal{P}_\pm$ может быть лишь строго линейно поляризованным. Рассмотрим, для определенности, случай, когда $I_{\text{ext}} = 1.3 \cdot I_0 > I_1$, а поляризация ρ_{ext} может меняться. При $\rho_{\text{ext}} = 0$ есть лишь одно стационарное состояние поля в активном слое, и в нем $\rho_{\text{int}} = 0$. Если теперь увеличивать ρ_{ext} в сторону $+1$, то при некотором $\rho_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}}^{(\text{crit})}$ снова появится ветвь, отвечающая состояниям с большой циркулярной поляризацией. На рис. 31 представлена серия решений системы (128, 129) с разными ρ_{ext} ; для каждой из точек накачка плавно “включалась” от 0 до $1.3 \cdot I_0$. Видно, что несмотря на существование двух *абсолютно устойчивых* ветвей отображения $\mathfrak{M}_3$ при $\rho_{\text{ext}} > \rho_{\text{ext}}^{(\text{crit})}$, происходящие скачки приводят к состояниям с возможно бóльшей циркулярной поляризацией, и потому зависимость $\rho_{\text{int}}(\rho_{\text{ext}})$ имеет разрыв в точке $\rho_{\text{ext}}^{(\text{crit})}$. Эти расчеты отвечают серии экспериментов с непрерывной накачкой, в которых для каждого ρ_{ext} происходит независимое “включение” интенсивности. Полученный нами результат обнаруживает хорошее соответствие с данными работы [87], где сообщается о резком скачке поляризации сигнала люминесценции при $\rho_{\text{ext}} \approx 0.2$.

4.3 Стимулированное рассеяние в общем случае произвольно поляризованной накачки. Эффект инверсии линейной поляризации

В предыдущем разделе рассмотрены свойства отклика поля в активном слое резонатора с учетом произвольной оптической поляризации внешней накачки. Чтобы упростить анализ, мы использовали одномодовое приближение, полагая $\mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}, t) \equiv 0$ для всех $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$. Другими словами, мы не принимали во внимание возможную неустойчивость относительно распада $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, возникающую для $\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p$ пороговым образом при $\Gamma[\mathbf{k}; \mathcal{P}_\pm(\mathbf{k}_p)] > 0$.

Последовательный анализ возникающих здесь эффектов (в частности, анализ развития неустойчивости и обратного влияния рассеянного “сигнала” на состояние возбуждаемой моды, а также свойств “конденсата”, возникающего в результате самоорганизации вблизи $\mathbf{k} = 0$) остается за рамками нашей работы. Здесь мы лишь заметим, что бóльшая часть эффектов, описанных ранее в скалярном приближении (т. е. фактически для $|\rho_{\text{ext}}| = 1$), имеет место и в общем случае произвольного ρ_{ext} . В частности, положительная расстройка частоты накачки с LP-резонансом в области перегиба

дисперсии приводит к *жесткому* возбуждению рассеяния, т. е. быстрому усилению множества мод по достижении порога $I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$, который, однако, оказывается теперь зависящим от состояния поляризации внешнего поля, $I_{\text{ext}}^{(\text{thr})} = I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}(\rho_{\text{ext}})$. Такая зависимость в полной мере объясняется рассмотренным выше характером трансформации отклика $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})|_{\rho_{\text{ext}}=\text{const}}$ с изменением ρ_{ext} . Допустим опять, для простоты, что σ^+ - и σ^- -компоненты поля в активном слое не взаимодействуют, и потому описываются одинаковыми S-контурами $I_{\text{int}}(I_{\text{ext}})$. В таком случае пороговые значения компонент $|\mathcal{P}_{\pm}^{(\text{thr})}|$, определяемые по формуле (84), от ρ_{ext} не зависят (при этом $|\mathcal{P}_{+}^{(\text{thr})}| = |\mathcal{P}_{-}^{(\text{thr})}|$), а соответствующие значения *полной интенсивности* накачки могут быть вычислены как

$$I_{\pm}^{(\text{thr})}(\rho_{\text{ext}}) = \frac{2I_{\text{ext}}(\mathcal{P}^{(\text{thr})})}{1 \pm \rho_{\text{ext}}}. \quad (153)$$

Поэтому если $\rho_{\text{ext}} > 0$, то σ^+ -компонента раньше, чем σ^- , достигнет критического значения, что, в конечном итоге, приведет к появлению почти циркулярно (σ^+) поляризованного сигнала с $\mathbf{k}_s \approx 0$. Характерная зависимость степени циркулярной поляризации *сигнала* от ρ_{ext} качественно аналогична той, что указана маркерами на рис. 31, но нелинейность $\rho_{\text{int}}(\rho_{\text{ext}})$ при этом заметно усилена, так что даже для $\rho_{\text{ext}} \approx 0.2$ мы получаем сигнал с $\rho_{\text{int}}(\mathbf{k}_s) > 0.95$.

В заключение мы рассмотрим достаточно примечательный эффект, возникающий за счет ненулевого взаимодействия $V_{+-} < 0$ в условиях линейной накачки ($\rho_{\text{ext}} = 0$) и строго линейного отклика ($\rho_{\text{int}} = 0$) возбуждаемой моды поля в активном слое (как на рис. 31). А именно, в том случае если внешнее поле имеет определенную линейную поляризацию (например, в x -направлении при $\Delta\phi_{\text{ext}} = 0$), то “сигнал” параметрического рассеяния в области $\mathbf{k}_s \approx 0$ оказывается поляризованным по нормали к накачке (т. е. в y -направлении, при этом $\Delta\phi_{\text{int}}(\mathbf{k}_s) = \pi/2$). Данный эффект был обнаружен экспериментально ([97, 98]), и рассматривается как прямое свидетельство *притяжения* между экситонами с противоположными проекциями полного момента J_z , т. е. $V_{+-} < 0$ ([99]).

Теоретический анализ эффекта *инверсии линейной поляризации* в процессе рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k})$, представленный, главным образом, в работе [99], ограничен случаем малой интенсивности “сигнала” (фактически же рассматривался случай спонтанного распада возбуждаемой моды). Квазиклассическая модель (143), полученная в том же приближении из уравнений (128, 129), приводит к аналогичному результату: если $\rho_{\text{ext}} = 0$, то состояния $\{\mathbf{k}: \Gamma(\mathbf{k}; I^{(\text{thr})}) = 0\}$ поляризованы строго по нормали к внешнему полю. Теперь нам предстоит выяснить, будет ли такое поведение характерным в ситуации *жесткого* возбуждения рассеяния — тогда, когда “сигнал” $\mathbf{k}_s \approx 0$ возникает вследствие самоорганизации и оказывает сильное обратное воздействие на состояние возбуждаемой моды, а система *в целом* характеризуется значительной корреляцией множества поляритонных гармоник.

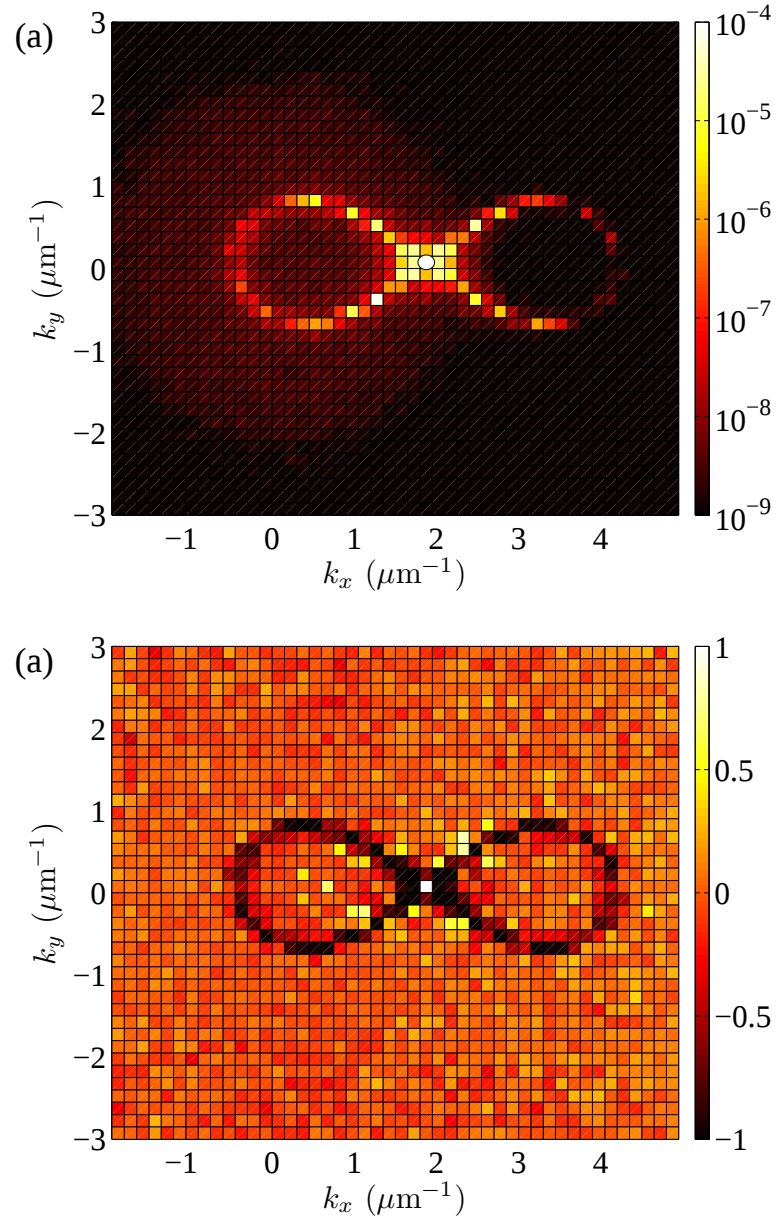


Рис. 32. Распределение интенсивности (панель a) и степени линейной поляризации (панель b) сигнала рассеяния в k -пространстве, возникающего в условиях строго линейной поляризации внешнего поля при $I_{\text{ext}} = 0.99 \cdot I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$. Накачка поляризована в x -направлении, соответствующая степень линейной поляризации равна $+1$.

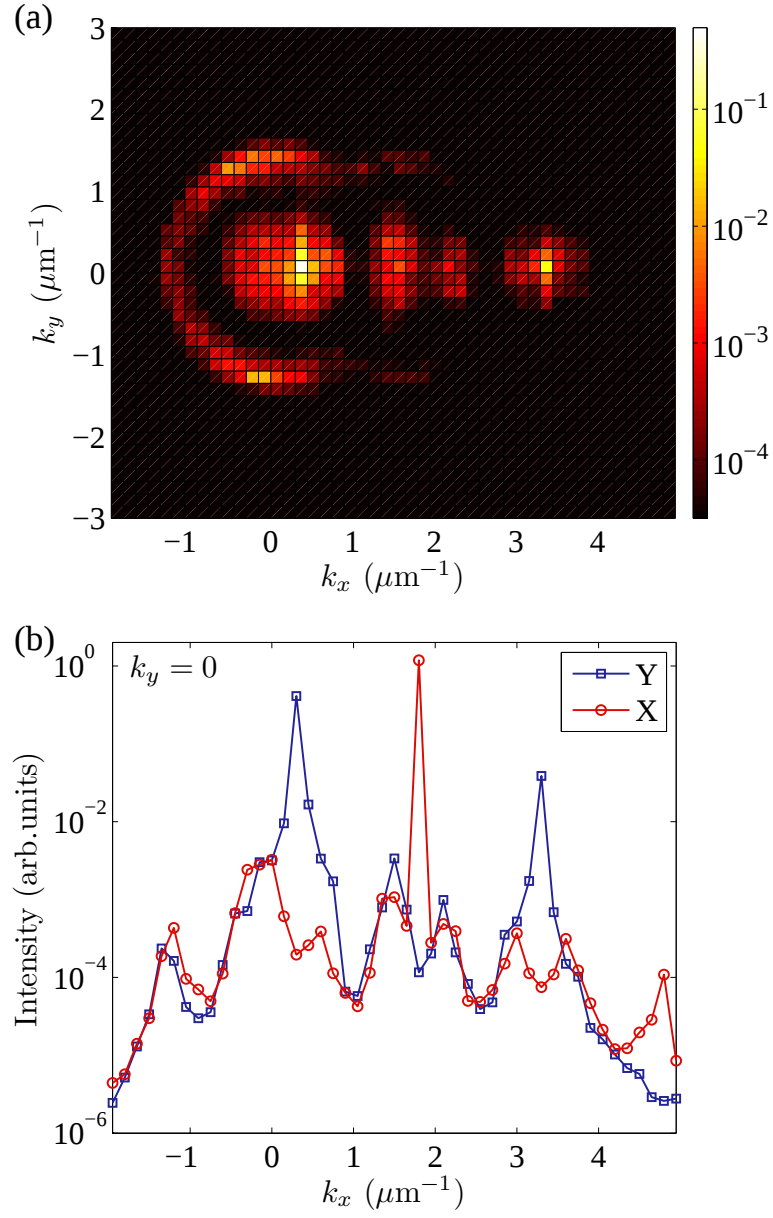


Рис. 33. Панель *a*: квазистационарное распределение интенсивности y -компоненты сигнала, возникающего при $I_{\text{ext}} = 1.05 \cdot I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$. Панель *b*: соответствующие распределения x - и y -компонент интенсивности на оси $k_y = 0$. Накачка поляризована в x -направлении.

Рассмотрим решение системы (128, 129) в двух случаях: несколько ниже и несколько выше порога рассеяния, соответственно для $I_{\text{ext}} = 0.99 \cdot I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$ (рис. 32) и $I_{\text{ext}} = 1.05 \cdot I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$ (рис. 33); накачка поляризована линейно и, для определенности, в x -направлении и потому характеризуется равной единице степенью линейной поляризации

$$\varkappa = \frac{|\mathcal{P}_x|^2 - |\mathcal{P}_y|^2}{|\mathcal{P}_x|^2 + |\mathcal{P}_y|^2}. \quad (154)$$

Параметры выбраны так, чтобы состояние возбуждаемой моды оставалось линейно поляризованным в процессе критической трансформации (соответствующие условия обсуждались в разд. 4.2).

Рис. 32 показывает, что приближение к порогу ($I_{\text{ext}}^{(\text{thr})}$) сопровождается появлением слабого рассеяния в направлениях, образующих “восьмерку” в пространстве квазиволновых векторов. В согласии с предсказаниями моделей, построенных в приближении $|\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k} \neq \mathbf{k}_p)| \ll |\mathcal{P}_{\pm}(\mathbf{k}_p)|$, рассеянные моды поляризованы перпендикулярно накачке $\vec{\mathcal{F}}$, т. е. $\varkappa_s \approx -1$.

Выше порога происходит резкое усиление множества k -состояний. Выделенное направление “сигнала” $\mathbf{k}_s = (0.3, 0) \text{ мкм}^{-1}$ возникает с течением времени, тем же путем, как это было описано в гл. 3. Результат расчета (рис. 33) показывает, что “конденсатная” мода $\mathbf{k}_s$ поляризована по нормали к $\vec{\mathcal{F}}$ (так же, как и слабый сигнал ниже порога), что хорошо согласуется с данными экспериментальных исследований. Однако заметим, что поляризация надконденсатных гармоник $\mathbf{k}_{\text{ac}} \notin \{\mathbf{k}_s, \mathbf{k}_p, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s\}$ этому правилу не подчиняется, оставаясь, в целом, достаточно произвольной. Это значит, что в общем случае та или иная мода $\mathbf{k}_{\text{ac}}$ взаимодействует не с одной, а с многими модами и, в частности, с модой $\mathbf{k}_p$ и выделенным сигналом рассеяния. В гл. 3 было найдено, что такое взаимодействие $\mathbf{k}_s$ и $\mathbf{k}_p$, осуществляющееся через посредство коррелированной системы $\mathbf{k}_{\text{ac}}$, играет исключительно важную роль в формировании квазистационарного (устойчивого) состояния с выделенным “сигналом” в области дна нижней поляритонной ветви.

4.4 Выводы и общие замечания о результатах четвертой главы

Суммируем основные результаты, полученные в данной главе.

- Поляритон-поляритонное взаимодействие приводит к неоднозначности отклика поля в активном слое резонатора; число различающихся решений, определяющих стационарное состояние возбуждаемой моды, зависит от поляризации накачки и в общем случае может достигать четырех. В критических точках, в которых меняется количество и/или устойчивость стационарных решений, сколь угодно плавное изменение параметров накачки может привести к скачку состояния возбуждаемой моды. Нами проанализированы критические переходы, осу-

ществляющиеся за счет изменения интенсивности и поляризации возбуждения. Показано, что даже малое отклонение поляризации накачки от строго линейной может привести к значительной циркулярной поляризации поля в активном слое.

В разд. 4.2, где эти результаты обоснованы, мы не принимали во внимание возможность параметрического распада состояния возбуждаемой моды ($\mathbf{k}_p$) в другие k -состояния. В соответствующих расчетах, связанных с анализом решений системы (134), положение $\mathbf{k}_p$ не имеет специального значения и, следовательно, может быть выбрано в близкой окрестности $\mathbf{k} = 0$, где такого распада не происходит (см. [A5]). Таким образом, мы ожидаем, что полученные результаты (в частности, характер зависимости поля в активном слое от интенсивности и поляризации накачки) могут быть проверены экспериментально; отметим, что простая бистабильность, типичная для $|\rho_{\text{ext}}| = 1$, действительно наблюдалась при возбуждении с $\mathbf{k}_p \approx 0$ [82]. С другой стороны, ясно, что в случае $\mathbf{k}_p \sim \mathbf{k}_{\text{inf}}$ характер трансформации возбуждаемой моды с ростом накачки имеет определяющее значение для перехода в режим стимулированного рассеяния — несмотря на то что, вообще говоря, такая трансформация уже не может рассматриваться как строго одномодовая. Возникающие здесь задачи анализа обратного влияния рассеянного сигнала на состояние возбуждаемой моды представляют широкое поле дальнейших исследований. Ожидается, например, что *коллективное состояние* системы взаимодействующих поляритонов (см. гл. 3) обнаружит примечательные нелинейные свойства, связанные с оптической поляризацией.

- *Взаимодействие экситонов с противоположными проекциями полного момента ($V_{+-} < 0$) приводит к возможности спонтанного нарушения симметрии $\sigma^\pm$ -компонент поля в активном слое в условиях строго линейной (симметричной) поляризации когерентной накачки. Диапазон значений интенсивности накачки, в котором наблюдается данный эффект, существенно зависит от частоты возбуждения.*

Возможность такого эффекта установлена путем исследования стационарных решений (134), а также анализа устойчивости в приближении (138–142). Вслед за этим мы рассмотрели *динамику* трансформации возбуждаемой моды вблизи критической точки, решив исходные уравнения (128, 129), и нашли, что спонтанное усиление σ^+ -или σ^- -компоненты поля в активном слое происходит с равной вероятностью. В дальнейших работах должен быть сделан более последовательный анализ структурной устойчивости ([96]), а также роли флуктуаций, “управляющих” переходом и, в частности, определяющих характерные времена трансформации как в классическом, так и в существенно квантовом описаниях (см., например, [100]).

- В том случае, когда в процессе критической трансформации состояние раскачиваемой моды ($\mathbf{k}_p$) остается линейно поляризованным (в условиях линейной поляризации внешнего поля $\vec{\mathcal{F}}$), жесткое возбуждение стимулированного рассеяния $(\mathbf{k}_p, \mathbf{k}_p) \rightarrow (\mathbf{k}_s, 2\mathbf{k}_p - \mathbf{k}_s)$ приводит к усилению “сигнала” ($\mathbf{k}_s \approx 0$), поляризованного по нормали к накачке: $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{k}_s) \perp \vec{\mathcal{F}}$.

Эффект инверсии линейной поляризации в процессе параметрического рассеяния был обнаружен экспериментально ([97, 98]) и описан в рамках предположения о малой интенсивности рассеянного сигнала ([99]). Мы нашли, что тот же эффект имеет место в ситуации *жесткого* возбуждения рассеяния — тогда, когда “сигнал” $\mathbf{k}_s \approx 0$ возникает вследствие самоорганизации и оказывает сильное обратное воздействие на состояние возбуждаемой моды, а система *в целом* характеризуется значительной корреляцией множества поляритонных гармоник.

Заключение

В настоящей работе исследован достаточно сложный механизм развития параметрической неустойчивости, характерный для неравновесной системы квазидвумерных экситонных поляритонов. Ключевая особенность этой системы — существование точки перегиба дисперсионной кривой $[\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\text{infl}}]$ в области световых квазиимпульсов. Мы показали, что бистабильность (характерная для нелинейного осциллятора) и неустойчивость относительно распада возбуждаемой моды $\mathbf{k}_p \sim \mathbf{k}_{\text{infl}}$ могут возникать совместно, приводя к возможности новых динамических режимов. По достижении критической плотности накачки происходит взрывообразное усиление большого числа мод в двумерной области k -пространства, после чего динамика системы становится сильно стохастической. Последующая эволюция (в условиях стационарной накачки) осуществляется как процесс самоорганизации, с течением времени приводящей к появлению корреляции множества волновых гармоник и, одновременно с этим, — к появлению *выделенного сигнала* (макрозаполненной моды) рассеяния в области дна нижней поляритонной ветви.

Таким образом, нами установлено, что *гигантский сигнал* стимулированного рассеяния возникает за счет образования коллективного состояния в системе взаимодействующих поляритонных мод. Коллективные эффекты приводят к макроскопической пространственной и временной когерентности, а также к выраженному гистерезису сигнала в зависимостях от внешней накачки и амплитуды возбуждаемой моды. Эти результаты находятся в хорошем качественном соответствии с результатами недавних экспериментов и открывают широкую перспективу для дальнейших исследований. В частности, необходимо установить характерные *параметры порядка* связанной многочастичной системы такого рода, исследовать роль флуктуаций и построить статистическую теорию осуществляющихся неравновесных переходов. В свою очередь, это позволит проанализировать другие возможности управления состоянием вблизи критических точек, например с помощью возбуждения акустических волн, приводящего к трансформации закона дисперсии поляритонов за счет экситон-фононного взаимодействия.

Кроме того, нами был исследован случай произвольной оптической поляризации возбуждения. Было найдено, что в общем случае экситонная нелинейность приводит к *мультистабильности* (в отличие от простой бистабильности) отклика возбуждаемой моды. Установлена возможность неравновесных переходов, в которых осуществляются резкие изменения как амплитуды, так и состояния поляризации поля в активном слое под действием сколь угодно плавно меняющейся накачки. Наиболее интересный эффект такого рода связан с возможностью спонтанного нарушения симметрии $\sigma^\pm$ -компонент экситонной плотности в условиях строго линейной (симметричной) оптической поляризации возбуждения. Данный эффект имеет место только тогда, когда

константа взаимодействия экситонов с противоположными проекциями полного момента ($J_z = \pm 1$) принимает отрицательные значения, и сильно зависит от интенсивности и частоты накачки. Ожидается, что изучаемые нами процессы эффективного “переключения” отклика низкоразмерной оптической системы найдут практическое приложение.

В заключение я хотел бы выразить искреннюю благодарность моим учителям и коллегам, без постоянного участия и поддержки которых эта работа никогда не была бы выполнена. Я глубоко признателен своему научному руководителю Владимиру Дмитриевичу Кулаковскому за постоянное внимание и всестороннюю поддержку на всех этапах работы. Хочу особенно поблагодарить Николая Алексеевича Гишпиуса и Сергея Григорьевича Тиходеева, моих старших коллег и наставников.

Список публикаций

- [A1] С. С. Гаврилов, Н. А. Гиппиус, В. Д. Кулаковский, С. Г. Тиходеев. *Жесткий режим стимулированного рассеяния квазидвумерных экситонных поляритонов*, Журнал экспериментальной и теоретической физики, т. 131, №5, стр. 819–828 (2007)
- [A2] D. N. Krizhanovskii, S. S. Gavrilov, A. P. D. Love, D. Sanvitto, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. M. Whittaker, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Self-organization of multiple polariton-polariton scattering in semiconductor microcavities*, Physical Review B, **77**, 115336 (2008)
- [A3] A. A. Demenev, A. A. Shchekin, A. V. Larionov, S. S. Gavrilov, V. D. Kulakovskii, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev. *Kinetics of stimulated polariton scattering in planar microcavities: Evidence for a dynamically self-organized optical parametric oscillator*, Physical Review Letters, **101**, 136401 (2008)
- [A4] M. N. Makhonin, A. A. Demenev, S. S. Gavrilov, V. D. Kulakovskii, N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev. *Stimulated parametric scattering of excitonic polaritons in planar GaAs microcavities: Distinctive feature of QW electric field*, Solid State Communications, **144** (9), p. 384–389 (2007)
- [A5] N. A. Gippius, I. A. Shelykh, D. D. Solnyshkov, S. S. Gavrilov, Yu. G. Rubo, A. V. Kavokin, S. G. Tikhodeev, G. Malpuech. *Polarization multistability of cavity polaritons*, Physical Review Letters, **98**, 236401 (2007)

Литература

- [1] C. Weisbuch, M. Nishioka, A. Ishikawa, Y. Arakawa. *Observation of coupled exciton-photon mode splitting in a semiconductor quantum microcavity*, Phys. Rev. Lett. **69**, 3314 (1992)
- [2] A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, V. D. Kulakovskii. *Polariton-polariton scattering in semiconductor microcavities: Distinctive features and similarities to the three-dimensional case*, Phys. Rev. B **62**, R13298 (2000)
- [3] R. M. Stevenson, V. N. Astartov, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, M. Emam-Ismael, A. I. Tartakovskii, P. G. Savvidis, J. J. Baumberg, J. S. Roberts. *Continuous wave observation of massive polariton redistribution by stimulated scattering in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. Lett. **85**, 3680 (2000)
- [4] V. D. Kulakovskii, A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, N. A. Gippius, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Nonlinear effects in a dense two-dimensional exciton-polariton system in semiconductor microcavities*, Nanotechnology **12**, 475 (2001)
- [5] R. Butté, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, D. Bajoni, J. S. Roberts. *Dependence of stimulated scattering in semiconductor microcavities on pump power, angle, and energy*, Phys. Rev. B **68**, 115325 (2003)
- [6] В. Д. Кулаковский, Д. Н. Крижановский, М. Н. Махонин, А. А. Деменев, Н. А. Гишпиус, С. Г. Тиходеев. *Стимулированное поляритон-поляритонное рассеяние в полупроводниковых микрорезонаторах*, УФН **175**, 334 (2005)
- [7] C. Ciuti, P. Schwendimann, B. Deveaud, A. Quattropani. *Theory of angle-resonant polariton amplifier*, Phys. Rev. B **62**, R4825 (2000)
- [8] D. M. Whittaker. *Classical treatment of parametric processes in a strong-coupling planar microcavity*, Phys. Rev. B **63**, 193305 (2001)
- [9] G. H. Wannier, Phys. Rev. **52**, 191 (1937)
- [10] R. S. Кнох. *Theory of Excitons* (New York, 1963) [Нокс Р. С. *Теория экситонов* (“Мир”, Москва, 1966)]
- [11] Н. Хакен. *Quantenfeldtheorie des festkörpers* (B. G. Teubner, Stuttgart, 1973) [Хакен Х. *Квантовополевая теория твердого тела* (“Наука”, Москва, 1980)]
- [12] Л. В. Келдыш, А. Н. Козлов. *Коллективные свойства экситонов в полупроводниках*, ЖЭТФ **54**, 978 (1968)

- [13] J. J. Hopfield. *Theory of the contribution of excitons to the complex dielectric constant of crystals*, Phys. Rev. **112**, 1955 (1958)
- [14] Y. Yamamoto, F. Tassone, H. Cao. *Semiconductor Cavity Quantum Electrodynamics* (Springer, Berlin, 2000)
- [15] E. Yablonovitch. *Inhibited Spontaneous Emission in Solid-State Physics and Electronics*, Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987)
- [16] E. L. Ivchenko, G. E. Pikus. *Superlattices and Other Heterostructures: Symmetry and Optical Properties* (Springer, Berlin, 1995)
- [17] R. P. Stanley, R. Houdre, U. Oesterle, M. Illegems, C. Weisbuch. *Impurity modes in one-dimensional periodic systems: The transition from photonic band gaps to microcavities*, Phys. Rev. A **48**, 2246 (1993)
- [18] R. C. Miller, D. A. Kleinman, W. T. Tsang, A. C. Gossard. *Observation of the excited level of excitons in GaAs quantum wells*, Phys. Rev. B **24**, 1134 (1981)
- [19] G. Bastard, E. E. Mendez, L. L. Chang, E. Esaki. *Exciton binding energy in quantum wells*, Phys. Rev. B **26**, 1974 (1982)
- [20] R. L. Greene, K. K. Bajaj, D. E. Phelps. *Energy levels of Wannier excitons in GaAs quantum-well structures*, Phys. Rev. B **29**, 1807 (1984)
- [21] L. C. Andreani and A. Pasquarello. *Accurate theory of excitons in GaAs quantum wells*, Phys. Rev. B **42**, 8928 (1990)
- [22] V. M. Agranovich, O. A. Dubovskii, JETP Lett. **3**, 233 (1966)
- [23] E. Hanamura. *Rapid radiative decay and enhanced optical nonlinearity of excitons in a quantum well*, Phys. Rev. B **38**, 1228 (1988)
- [24] L. C. Andreani, F. Tassone, F. Bassani. *Radiative lifetime of free excitons in quantum wells*, Solid State Commun. **77**, 641 (1991)
- [25] B. Deveaud, F. Clérot, N. Roy, K. Satzke, B. Sermage, D. S. Katzer. *Enhanced radiative recombination of free excitons in GaAs quantum wells*, Phys. Rev. Lett. **67**, 2355 (1991)
- [26] B. Sermage, B. Deveaud, K. Satzke, F. Clérot, D. Dumas, N. Roy, D. S. Katzer, F. Molloy, R. Planel, M. Berz, J. L. Oudar, Superl. Microst. **13**, 271 (1993)
- [27] D. S. Citrin. *Homogeneous-linewidth effects on radiative lifetimes of excitons in quantum wells*, Solid State Commun. **84**, 281 (1992)

- [28] D. S. Citrin. *Radiative lifetimes of excitons in quantum wells: Localization and phase-coherence effects*, Phys. Rev. B **47**, 3832 (1993)
- [29] N. Peyghambarian, H. M. Gibbs, J. L. Jewell, A. Antonetti, A. Migus, D. Hulin, A. Mysyrowicz. *Blue Shift of the Exciton Resonance due to Exciton-Exciton Interactions in a Multiple-Quantum-Well Structure*, Phys. Rev. Lett. **53**, 2433 (1984)
- [30] D. S. Citrin, Comments Condens. Matt. Phys., **16**, 263 (1993)
- [31] E. L. Ivchenko. *Excitonic polaritons in periodic quantum well structures*, Sov. Phys. Solid State **33**, 1344 (1991)
- [32] F. Tassone, F. Bassani, L. C. Andreani. *Quantum well reflectivity and exciton-polariton dispersion*, Phys. Rev. B **45**, 6023 (1992)
- [33] A. Kavokin, G. Malpuech. *Cavity Polaritons* (Elsevier, Amsterdam, 2003)
- [34] V. Savona, L. C. Andreani, P. Schwendimann, A. Quattropani. *Unified treatment of weak and strong coupling regimes*, Solid State Commun. **93**, 733 (1995)
- [35] R. Houdré, C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, P. Pellandini, M. Ilegems. *Measurement of cavity-polariton dispersion curve from angle-resolved photoluminescence experiments*, Phys. Rev. Lett. **73**, 2043 (1994)
- [36] R. J. Elliot, Phys. Rev. **96**, 266 (1954);
Y. Yafet. *Solid State Physics, Vol. 14* (Academic Press, New York, 1963)
- [37] Г. Е. Пикус, Г. Л. Бир, ЖЭТФ **60**, 195 (1971)
- [38] М. И. Дьяконов, В. И. Перель, Физика твердого тела **13**, 3851 (1971)
- [39] M. Z. Maialle, E. A. de Andrada e Silva, L. J. Sham. *Exciton spin dynamics in quantum wells*, Phys. Rev. B **47**, 15776 (1993)
- [40] S. Pau, G. Bjork, J. Jacobson, H. Cao, Y. Yamamoto. *Stimulated emission of a microcavity dressed exciton and suppression of phonon scattering*, Phys. Rev. B **51**, 7090 (1995)
- [41] B. Sermage, S. Long, I. Abram, J. Y. Marzin, J. Bloch, R. Planel, V. Thierry-Mieg. *Time-resolved spontaneous emission of excitons in a microcavity: Behavior of the individual exciton-photon mixed states*, Phys. Rev. B **53**, 16516 (1996)
- [42] R. P. Stanley, S. Pau, U. Oesterle, R. Houdre, M. Ilegems. *Resonant photoluminescence of semiconductor microcavities: The role of acoustic phonons in polariton relaxation*, Phys. Rev. B **55**, R4867 (1997)

- [43] F. Tassone, C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, P. Schwendimann. *Photoluminescence decay times in strong-coupling semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **53**, R7642 (1996)
- [44] J. Bloch, J. Y. Marzin. *Photoluminescence dynamics of cavity polaritons under resonant excitation in the picosecond range*, Phys. Rev. B **56**, 2103 (1997)
- [45] F. Tassone, C. Piermarocchi, V. Savona, A. Quattropani, P. Schwendimann. *Bottleneck effects in the relaxation and photoluminescence of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **56**, 7554 (1997)
- [46] A. I. Tartakovskii, M. Imam-Ismael, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, V. N. Astratov, D. M. Whittaker, J. J. Baumberg, J. S. Roberts. *Relaxation bottleneck and its suppression in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **62**, R2283 (2000)
- [47] E. Hanamura. *Theory of the high density exciton*, J. Phys. Soc. Jpn. **29**, 50 (1970);
E. Hanamura, J. Phys. Soc. Jpn. **37**, 1545 (1974);
E. Hanamura, J. Phys. Soc. Jpn. **37**, 1553 (1974);
- [48] A. I. Bobrysheva, M. F. Miglei, M. I. Shmiglyuk. *On the bi-exciton formation in crystals*, Phys. Stat. Sol. (b) **53**, 71 (1972)
- [49] E. Hanamura, H. Haug. *Condensation effects of excitons*, Phys. Rep. **33**, 209 (1977)
- [50] H. Stilz, R. Zimmermann, G. Röpke. *Correlated Hartree-Fock theory of the electron-hole plasma containing exciton bound states*, Phys. Stat. Sol. (b) **105**, 585 (1981)
- [51] A. L. Ivanov, H. Haug. *Self-consistent theory of the biexciton optical nonlinearity*, Phys. Rev. B **48**, 1490 (1993)
- [52] C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani. *Role of the exchange of carriers in elastic exciton-exciton scattering in quantum wells*, Phys. Rev. B **58**, 7926 (1998)
- [53] J. Inoue, T. Brandes, A. Shimizu. *Effective hamiltonian for excitons with spin degrees of freedom*, J. Phys. Soc. Jpn. **67**, 3384 (1998)
- [54] Yu. P. Svirko, M. Shirane, H. Suzuura, M. Kuwata-Gonokami. *Four-wave mixing theory at the excitonic resonance: Weakly interacting boson model*, J. Phys. Soc. Jpn., **68**, 674 (1999)
- [55] F. Tassone, Y. Yamamoto. *Exciton-exciton scattering dynamics in a semiconductor microcavity and stimulated scattering into polaritons*, Phys. Rev. B **59**, 10830 (1999)

- [56] G. Rochat, C. Ciuti, V. Savona, C. Piermarocchi, A. Quattropani, P. Schwendimann. *Excitonic Bloch equations for a two-dimensional system of interacting excitons*, Phys. Rev. B **61**, 13856 (2000)
- [57] J. Inoue, T. Brandes, A. Shimizu. *Renormalized bosonic interactions of excitons*, Phys. Rev. B **61**, 2863 (2000)
- [58] K. Bott, O. Heller, D. Bennhardt, S. T. Cundiff, P. Thomas, E. J. Mayer, G. O. Smith, R. Eccleston, J. Kuhl, K. Ploog. *Influence of exciton-exciton interactions on the coherent optical response in GaAs quantum wells*, Phys. Rev. B **48**, 17418 (1993)
- [59] J. Fernández-Rossier, C. Tejedor, L. Muñoz, L. Viña. *Polarized interacting exciton gas in quantum wells and bulk semiconductors*, Phys. Rev. B **54**, 11582 (1996)
- [60] M. Kuwata-Gonokami, S. Inouye, H. Suzuura, M. Shirane, R. Shimano, T. Someya, H. Sakaki. *Parametric Scattering of Cavity Polaritons*, Phys. Rev. Lett. **79**, 1341 (1997)
- [61] P. Renucci, T. Amand, X. Marie, P. Senellart, J. Bloch, B. Sermage, K. V. Kavokin. *Microcavity polariton spin quantum beats without a magnetic field: A manifestation of Coulomb exchange in dense and polarized polariton systems*, Phys. Rev. B **72**, 075317 (2005)
- [62] N. N. Bogoliubov, J. Phys. USSR **11**, 23 (1947);
Н. Н. Боголюбов, Н. Н. Боголюбов (мл.). *Введение в квантовую статистическую механику* (“Наука”, Москва, 1984);
V. A. Zagrebnov, J. B. Bru, *The Bogoliubov model of weakly imperfect Bose gas*, Phys. Rep. **350**, 291 (2001)
- [63] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике* (“Физматгиз”, Москва, 1962)
- [64] N. R. Werthamer, in *Superconductivity, Vol. 1*, ed. R. D. Parks (Marcel Dekker Inc., New York, 1969)
- [65] L. P. Pitaevskii, S. Stingari. *Bose-Einstein Condensation* (Clarendon Press, Oxford, 2003)
- [66] H. Haken, in *Encyclopedia of Physics, Vol. XXV/2c: Laser Theory* (Springer, Berlin, 1970)
- [67] H. Haken. *Synergetics, An Introduction: Nonequilibrium Phase Transitions and Self-Organization in Physics, Chemistry and Biology* (Springer, Berlin, 1978) [Г. Хакен, *Синергетика* (“Мир”, Москва, 1980)]

- [68] C. Ciuti, P. Schwendimann, A. Quattropani. *Parametric luminescence of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **63**, R41303 (2001)
- [69] C. Ciuti, P. Schwendimann, A. Quattropani. *Theory of polariton parametric interactions in semiconductor microcavities*, Semicond. Sci. Technol. **18**, S279 (2003)
- [70] A. Baas, J. P. Karr, M. Romanelli, A. Bramati, E. Giacobino. *Optical bistability in semiconductor microcavities in the nondegenerate parametric oscillation regime: Analogy with the optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **70**, 161307(R) (2004)
- [71] C. Ciuti, I. Carusotto. *Quantum fluid effects and parametric instabilities in microcavities*, Phys. Stat. Sol. (b) **242**, 2224 (2005)
- [72] D. M. Whittaker. *Effects of polariton-energy renormalization in the microcavity optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **71**, 115301 (2005)
- [73] M. Wouters, I. Carusotto. *Parametric oscillation threshold of semiconductor microcavities in the strong coupling regime*, Phys. Rev. B **75**, 75332 (2007)
- [74] N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii, D. N. Krizhanovskii, A. I. Tartakovskii. *Nonlinear dynamics of polariton scattering in semiconductor microcavity: Bistability vs. stimulated scattering*, Europhys. Lett. **67**, 997 (2004)
- [75] N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev. *Multiple-polariton scattering in a semiconductor microcavity*, J. Phys.: Condens. Matter **16**, S3653 (2004)
- [76] N. A. Gippius, S. G. Tikhodeev, V. D. Kulakovskii. *Bistability vs stimulated scattering in semiconductor microcavities*, Phys. Stat. Sol. (c) **2**, 744 (2005)
- [77] Н. А. Гиппиус, С. Г. Тиходеев, Л. В. Келдыш, В. Д. Кулаковский. *Жесткий режим возбуждения поляритон-поляритонного рассеяния в полупроводниковых микрорезонаторах*, УФН **175**, 334 (2005)
- [78] В. Ф. Елесин, Ю. В. Копаев. *Бозе-конденсация экситонов в сильном магнитном поле*, ЖЭТФ **63**, 1447 (1972)
- [79] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* (“Наука”, Москва, 1974)
- [80] Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. *Нестационарные структуры и диффузионный хаос* (“Наука”, Москва, 1992)
- [81] V. Savona, P. Schwendimann, A. Quattropani. *Onset of coherent photoluminescence in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. B **71** 125315 (2005)

- [82] A. Baas, J. P. Karr, H. Eleuch, E. Giacobino. *Optical bistability in semiconductor microcavities*, Phys. Rev. A **69**, 023809 (2004)
- [83] W. Langbein. *Spontaneous parametric scattering of microcavity polaritons in momentum space*, Phys. Rev. B **70**, 205301 (2004)
- [84] H. Haken. *Advanced Synergetics: Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices* (Springer, Berlin, 1983) [Г. Хакен. *Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах* (“Мир”, Москва, 1980)]
- [85] R. Houdré, C. Weisbuch, R. P. Stanley, U. Oesterle, M. Ilegems. *Nonlinear emission of semiconductor microcavities in the strong coupling regime*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2793 (2000)
- [86] В. Д. Кулаковский, А. И. Тартаковский, Д. Н. Крижановский, А. Армитаж, Дж. Робертс, М. С. Сколник. *Двумерные экситонные поляритоны и их взаимодействия*, УФН, **170**, 912 (2000)
- [87] A. I. Tartakovskii, D. N. Krizhanovskii, D. A. Kurysh, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Polariton parametric scattering processes in semiconductor microcavities observed in continuous wave experiments*, Phys. Rev. B **65**, 081308(R) (2002)
- [88] D. N. Krizhanovskii, A. I. Tartakovskii, V. D. Kulakovskii, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Threshold power and internal loss in the stimulated scattering of microcavity polaritons*, Phys. Rev. B **66**, 165329 (2002)
- [89] R. Butté, M. Emam-Ismaïl, A. Lemaître, R. M. Stevenson, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, A. I. Tartakovskii, J. J. Baumberg, P. G. Savvidis, J. S. Roberts. *Pump angle and laser energy dependence of stimulated scattering in microcavities*, Phys. Stat. Sol (a) **190**, 333 (2002)
- [90] В. Д. Кулаковский, Д. Н. Крижановский, А. И. Тартаковский, Н. А. Гиппиус, С. Г. Тиходеев. *Поляритон-поляритонное взаимодействие и неравновесная конденсация экситонных поляритонов в полупроводниковых микрорезонаторах*, УФН **173**, 995 (2003)
- [91] V. D. Kulakovskii, M. N. Makhonin, D. N. Krizhanovskii, A. I. Tartakovskii, N. A. Gippius. *Instability effects in cw FWM of cavity polaritons in planar microcavities*, Phys. Stat. Sol. (c) **2**, 751 (2005)
- [92] I. Carusotto, C. Ciuti. *Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold. Quantum Monte Carlo studies*, Phys. Rev. B **72**, 125335 (2005)

- [93] D. M. Whittaker. *Numerical modelling of the microcavity OPO*, Phys. Stat. Sol. (c) **2**, 733 (2005)
- [94] D. Sanvitto, D. N. Krizhanovskii, D. M. Whittaker, S. Ceccarelli, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Spatial structure and stability of the macroscopically occupied polariton state in the microcavity optical parametric oscillator*, Phys. Rev. B **73**, 241308(R) (2006)
- [95] D. N. Krizhanovskii, D. Sanvitto, A. P. D. Love, M. S. Skolnick, D. M. Whittaker, J. S. Roberts. *Dominant Effect of Polariton-Polariton Interactions on the Coherence of the Microcavity Optical Parametric Oscillator*, Phys. Rev. Lett. **97**, 097402 (2006)
- [96] R. Thom. *Stabilité Structurelle et Morphogénèse* (Benjamin, New York, 1972) [Р. Том. *Структурная устойчивость и морфогенез* (“Логос”, 2002)]
T. Poston, I. Stewart. *Catastrophe Theory and its Applications* (“Pitman”, London, 1978) [Т. Постон, И. Стюарт. *Теория катастроф и ее приложения* (“Мир”, Москва, 1980)]
- [97] K. V. Kavokin, P. Renucci, T. Amand, X. Marie, P. Senellart, J. Bloch, B. Sermage. *Linear polarisation inversion: A signature of Coulomb scattering of cavity polaritons with opposite spins*, Phys. Stat. Sol. (c) **2**, 763 (2005)
- [98] D. N. Krizhanovskii, D. Sanvitto, I. A. Shelykh, M. M. Glazov, G. Malpuech, D. D. Solnyshkov, A. Kavokin, S. Ceccarelli, M. S. Skolnick, J. S. Roberts. *Rotation of the plane of polarization of light in a semiconductor microcavity*, Phys. Rev. B **73**, 073303 (2006)
- [99] I. A. Shelykh, A. V. Kavokin, G. Malpuech. *Spin dynamics of exciton polaritons in microcavities*, Phys. Stat. Sol. (b) **242**, No.11, 2271 (2005)
- [100] N. S. Maslova, R. Johne, N. A. Gippius. *Role of fluctuations in nonlinear dynamics of driven polariton system in semiconductor microcavities*, Письма в ЖЭТФ, **86**, No.2, 135 (2007)