

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

На правах рукописи

КУЛАКОВСКИЙ Дмитрий Валерьевич

КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЭФФЕКТЫ В СИСТЕМАХ
ОДИНОЧНЫХ И ДВОЙНЫХ КВАНТОВЫХ ЯМ

01.04.07 — физика конденсированного состояния

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
заведующий лабораторией, профессор
Лозовик Юрий Ефремович

Черноголовка 2004

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	4
-----------------------	---

ГЛАВА I. Литературный обзор.

§1.1 Экситонные состояния в одиночных квантовых ямах	12
§1.2 Эффекты связанные с экситонами и экситонными комплексами в двухслойных системах	21
§1.3 Кристаллическая фаза в системах с пространственно разделенными электронами и дырками	26
§1.4 Выводы. Постановка задачи	30

ГЛАВА II. Свойства экситонных состояний в одиночных квантовых ямах GaAs/AlGaAs в присутствии квазидвумерного электронного газа.

§2.1 Постановка задачи	34
§2.2 Теория экранирования Линхарда	36
§2.3 Приближение локального поля	43
§2.4 Сжимаемость системы	46
§2.5 Экранирование возбужденных экситонных состояний	48
§2.6 Температурная зависимость пороговой концентрации 2ДЭГ	54

ГЛАВА III. Экранирование и перестройка связанных состояний в двухслойных системах. Эффекты увлечения.

§3.1 Перестройка прямого экситона в системе пространственно разделен-	
---	--

ных экситонов и электронов	61
§3.2 Эффекты экранирования межслоевых экситонов	66
§3.3 Заряженные многочастичные комплексы: свойства непрямого триона	69
§3.4 Увлечение экситонов электронами в двухслойной системе	78
§3.5 Экранирование эффекта увлечения	82

ГЛАВА IV. Решение задачи о спектре коллективных возбуждений в системах с кристаллической фазой.

§4.1 Разреженная система экситонов в двухслойной структуре	89
§4.2 Анализ дисперсионных зависимостей оптических и акустических мод в нулевом магнитном поле	94
§4.3 Расчет магнитопольевых зависимостей коллективных возбуждений экситонного кристалла	98
§4.4 Изменение спектра при квантовом переходе кристалл–жидкость в двухслойной экситонной системе	101
§4.5 Об особенностях коллективных возбуждений в реальных структурах	103

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приложение 1	112
--------------------	-----

Приложение 2	113
--------------------	-----

Список литературы	115
--------------------------------	------------

Введение.

Развитие технологий роста полупроводниковых квантовых наноструктур позволило создавать системы пониженной размерности высокого качества с заданными свойствами (гетеропереходы, квантовые ямы, квантовые точки и т.д.) и вызвало новую волну теоретических и экспериментальных исследований в данной области. Однако многие из существующих в настоящее время теоретических методов имеют достаточно серьезные ограничения. Так, для области малых концентраций носителей заряда в проводящих каналах таких систем, то есть для случая сильно коррелированного состояния, многие теоретические подходы вообще не применимы. Как правило, это связано с тем, что в большинстве методов вместо реального рассматривается потенциал взаимодействия, усредненный по пространству и задача сводится к “одночастичной” без учета корреляционных эффектов.

Дальнодействие кулоновского потенциала и наличие заряженных объектов в системе приводят к важному эффекту твердотельной физики — эффекту экранирования потенциала. С ростом концентрации носителей заряда в полупроводнике экранирование кулоновского взаимодействия усиливается, что приводит к перенормировке всего энергетического спектра коллективных возбуждений. В частности, уменьшается энергия связи основного состояния экситона, смещаясь в область непрерывного спектра. Эта задача может быть решена путем вычисления экранированного кулоновского потенциала квазидвумерным электронным с помощью линдхардовской восприимчивости, которое отвечает случаю линейного

отклика в рамках приближения хаотических фаз. Однако этот подход не может описать результаты последних экспериментальных работ, в которых были проведены исследования коллапса связанных экситонных состояний в квантовых ямах и гетеропереходах.

Кроме систем с пространственно прямым кулоновским взаимодействием в квантовых структурах появилась возможность получать пространственно разделенные подсистемы заряженных квазичастиц, когерентные свойства которых были предсказаны довольно давно. Одним из примеров таких структур являются двойные квантовые ямы, в которых возможно возникновение пространственно не прямых связанных состояний (непрямых экситонов). В системе взаимодействующих непрямых экситонов в некоторой области низких температур и концентраций возможен переход в жидкую фазу, а в области более низких концентраций электронов и дырок могла бы осуществляться экситонная кристаллизация. Наряду с электронной кристаллизацией – это одно из наиболее эффективных явлений в системе взаимодействующих квазичастиц. В связи с этим важным представляется до сих пор не исследованный вопрос о спектре коллективных возбуждений экситонного кристалла. Кроме того, спектр коллективных возбуждений жидкой фазы (электрон–дырочной или электрон–электронной плазмы) в двойных квантовых ямах модифицируется по сравнению со спектром коллективных возбуждений одиночной квантовой ямы, и его исследование также представляется серьезной и интересной задачей. При этом следует иметь в виду, что как и в пространственно прямых системах, в непрямых — важную роль играют эффекты экранирования кулоновского взаимодействия электронами

и (или) дырками, приводящие к уменьшению энергии связи связанных состояний и увеличению их радиуса, а также перенормировке всего спектра коллективных возбуждений. В свою очередь двойные квантовые ямы с туннельной связью представляют значительный интерес для технических приложений. В настоящее время именно двойные квантовые ямы с пространственно модулированной туннельной связью являются вероятным кандидатом для создания базовых элементов для квантовых вычислений (кубитов и квантовых логических затворов), интегрируемых в стандартные электронные цепи.

Заряженные квазичастицы в полупроводнике — электроны и дырки — могут образовывать, помимо нейтральных связанных комплексов, заряженные, которые также являются элементарными возбуждениями в полупроводниках. В последние годы ощущается заметный интерес к этим проблемам в контексте заряженных коллективных возбуждений в двумерном электронном газе. Например, в структурах двойных квантовых ям возник новый круг проблем, связанных со свойствами комплексов пространственно разделенных частиц — пространственно непрямого триона. Эта задача является трехчастичной, то есть более сложной, чем задача о двухчастичных нейтральных комплексах — экситонах. В связи с этим был развит формализм для решения трехчастичных проблем, который в некоторой степени позволил ответить на ряд вопросов о свойствах заряженных комплексов. Однако экранирование кулоновского взаимодействия влияет на стабильность триона, уменьшая его энергию связи и увеличивая радиус данного состояния. К сожалению, этот вопрос до сих пор остается не исследованным в полной мере.

С другой стороны, в системах квазидвумерных экситонов, сосуществующих с электронами в том же самом или пространственно отделенном слое, интересно исследовать так называемые эффекты увлечения. Эти эффекты можно было бы использовать, во-первых, для анализа экситонной системы, которая является электронейтральной, путем измерения транспортных свойств электронов, и, во-вторых, для управления экситонами с помощью транспорта электронов.

Кроме чисто академического интереса, стимулирующего исследования коллективных возбуждений в системах одиночных и двойных квантовых ям, важно отметить большую практическую значимость таких исследований для развития современной полупроводниковой наноструктурной технологии. Большое значение в связи с этим приобретают исследования данных систем при температурах, отличных от нуля.

Основной задачей диссертационной работы было исследование эффектов экранирования кулоновского взаимодействия квазидвумерным электронным и (или) дырочным газом в системе одиночных и двойных GaAs/AlGaAs квантовых ям и расчет спектра коллективных возбуждений с учетом данных эффектов.

Показано, что учет нелинейности отклика приводит к более сильному экранированию кулоновского взаимодействия по сравнению с линейным приближением и, как следствие, смещает пороговую концентрацию, при которой наступает перестройка экситонных состояний в область меньших плотностей квазидвумерного электронного газа и, соответственно, больших безразмерных параметров межчастиного расстояния r_s^c . Это значительно превышает критические значения для перехода Мотта и

в рамках линейного экранирования квазидвумерным электронным газом. При уменьшении ширины квантовой ямы пороговая концентрация электронов, при которой возникает переход, растет. Продемонстрирован коллапс возбужденных $2s$ и $2p$ состояний экситона.

Исследована температурная зависимость критического параметра r_s^c . При увеличении температуры системы эффективность экранировки снижается и критический параметр r_s^c уменьшается. Построена фазовая диаграмма экситонного состояния и указана область, в которой имеется возможность экспериментального наблюдения температурной зависимости коллапса экситона.

Изучены эффекты экранирования пространственно прямого и пространственно непрямого экситонов в двухслойных системах, получены зависимости критического параметра r_s^c от расстояния D между квантовыми ямами. Оказалось, что в такой системе решение может быть найдено в приближении линейного отклика. Показано, что учет толщины слоев приводит к “перенормировке” расстояния между пространственно разделенными электроном и дыркой.

Решена задача о связанном состоянии пространственно разделенных экситона и электрона, то есть триона X^- . Найдена энергия связи триона для различных межслоевых расстояний. Изучен вопрос об экранировании данного связанного состояния двумерным электронным газом. В результате, построена зависимость критического параметра r_s^c от D , когда связанное состояние пространственно разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений.

Исследован эффект увлечения в системе пространственно разделен-

ных экситонов и электронов. Показано, что за счет экранирования величина коэффициента их взаимной подвижности уменьшается экспоненциально при увеличении концентрации пространственно отделенных электронов. Кроме того установлено, что с ростом температуры системы эффективность экранирования уменьшается и наблюдается увеличение коэффициента взаимной подвижности.

Исследована новая экситонная фаза в двухслойной системе с низкой плотностью пространственно разделенных электронов и дырок — дипольный кристалл. Найден спектр коллективных возбуждений двумерной экситонной треугольной решетки в нулевом магнитном поле. В спектре присутствует четыре коллективных возбуждения: два оптических (продольное и поперечное) и два акустических (продольное и поперечное). Найден спектр синфазных и противофазных колебаний в перпендикулярном магнитном поле. При больших магнитных полях оптические моды выходят на электронную и дырочную циклотронные моды, а акустические — убывают с ростом поля.

Исследовано изменение спектра коллективных возбуждений дипольного кристалла при плавлении и переходе от кристаллической фазы к электрон–дырочной плазме. Рассмотрены плазменные и магнитоплазменные колебания электрон–дырочной жидкости в системе двух параллельных бесконечных плоскостей и в двухслойном диске с резким профилем потенциала на границе.

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения основных выводов, двух приложений и списка цитируемой литературы.

В первой главе представлен литературный обзор работ, касающихся вопросов экранирования кулоновского взаимодействия в трехмерных и двумерных системах, образования связанных нейтральных и заряженных комплексов в одиночных и двойных квантовых ямах, а также кристаллизации и плавления системы взаимодействующих непрямых экситонов. Указаны теоретические методы, с помощью которых решались задачи, представленные в диссертации, а также достоинства и недостатки этих подходов.

Во второй главе исследуются экситонные состояния в одиночной квантовой яме в присутствии квазидвумерного электронного газа. В приближениях хаотических фаз и локального поля анализируются энергия связи, радиус состояния и сила осциллятора экситонного перехода, в зависимости от концентрации электронов, ширины квантовой ямы и температуры системы.

В третьей главе рассматриваются системы двойных квантовых ям с пространственно разделенными электронами и дырками. Исследуются связанные пространственно прямые и непрямые экситонные и трионные состояния с учетом эффектов экранирования пространственно непрямого кулоновского взаимодействия. Рассчитываются энергии связи таких комплексов при различных концентрациях носителей заряда и для различных межслоевых расстояний. Рассматривается эффект увлечения в системе пространственно разделенных экситонов и электронов.

В четвертой главе исследуется новая экситонная фаза в двухслойной электрон-дырочной системе с низкой плотностью пространственно разделенных электронов и дырок – экситонный кристалл. Рассчитывается

спектр коллективных возбуждений данной кристаллической фазы. Проводится исследование поведения спектра коллективных возбуждений экситонного кристалла при переходе к фазе электрон-дырочной плазмы.

По материалам диссертации опубликовано 15 печатных работ в научных журналах и материалах конференций.

ГЛАВА I.

Литературный обзор.

§1.1 Экситонные состояния в одиночных квантовых ямах.

Хорошо известно, что в трехмерных полупроводниках и полупроводниковых системах пониженной размерности за счет кулоновского взаимодействия электронов и дырок при низких температурах и малых концентрациях образуются пары связанных квазичастиц — электрон проводимости и дырка — экситоны Ванье-Мотта (или экситоны большого радиуса)[1, 2]. Экситон в первом приближении можно рассматривать как систему, подобную атому водорода, но отличающуюся от него макроскопически большим эффективным боровским радиусом a_B^* и малой энергией связи Ry^* из-за большой статической диэлектрической проницаемости ϵ и малых эффективных масс электрона и дырки m_e, m_h . Для чисто двумерной системы энергия связи и боровский радиус определяются, соответственно, формулами

$$Ry^* = \frac{2e^4\mu}{\epsilon^2\hbar^2}, \quad a_B^* = \frac{\hbar^2\epsilon}{2\mu e^2}, \quad (1)$$

где $\mu = \frac{m_e m_h}{m_e + m_h}$. Именно по причине того, что $a_B \gg d$, где d — меж-атомное расстояние, можно ограничиться рассмотрением электронов и дырок в кристалле как системы частиц, связанных кулоновским взаимодействием, без учета влияния кристаллической решетки. Конкретная атомная структура вещества существенна лишь постольку, поскольку ею

определяются параметры ϵ , m_e и m_h .

Появившиеся несколько десятилетий назад и интенсивно развивающиеся в настоящее время технологические возможности создания полупроводниковых квантовых наноструктур позволяют выращивать структуры пониженной размерности с наперед заданными свойствами. Полупроводниковые гетероструктуры, выращенные по технологии молекулярно-пучковой эпитаксии, представляют собой очень удобный объект для исследования электронно-дырочных систем в условиях размерного квантования. Среди современных гетероструктур выделяются системы GaAs/AlGaAs, обладающие совершенством кристаллической структуры и чрезвычайно высокими подвижностями носителей заряда [3]. В них, благодаря разнице в ширине запрещенной зоны двух составляющих их полупроводниковых материалов GaAs и AlGaAs, возникает потенциальный барьер, ограничивающий движение носителей заряда в перпендикулярном к плоскости перехода направлении. В результате система становится квазидвумерной (2Д) с энергетическим спектром, состоящим из совокупности зон размерного квантования. Большим вниманием пользуются такие 2Д-объекты, также основанные на гетеропереходах, как квантовые ямы (КЯ) (см., например, [4–7] и цитируемая там литература), ввиду их технологической и методологической важности и уникальных физических свойств. Схематически зонная структура одиночной GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As квантовой ямы представлена на Рис.1. Большинство важных параметров квантовых ям в структурах GaAs/AlGaAs (эффективные массы электронов и дырок, их концентрации и т.д) наиболее точно были измерены в работах [6, 7], в которых использовался новый, перспективный метод

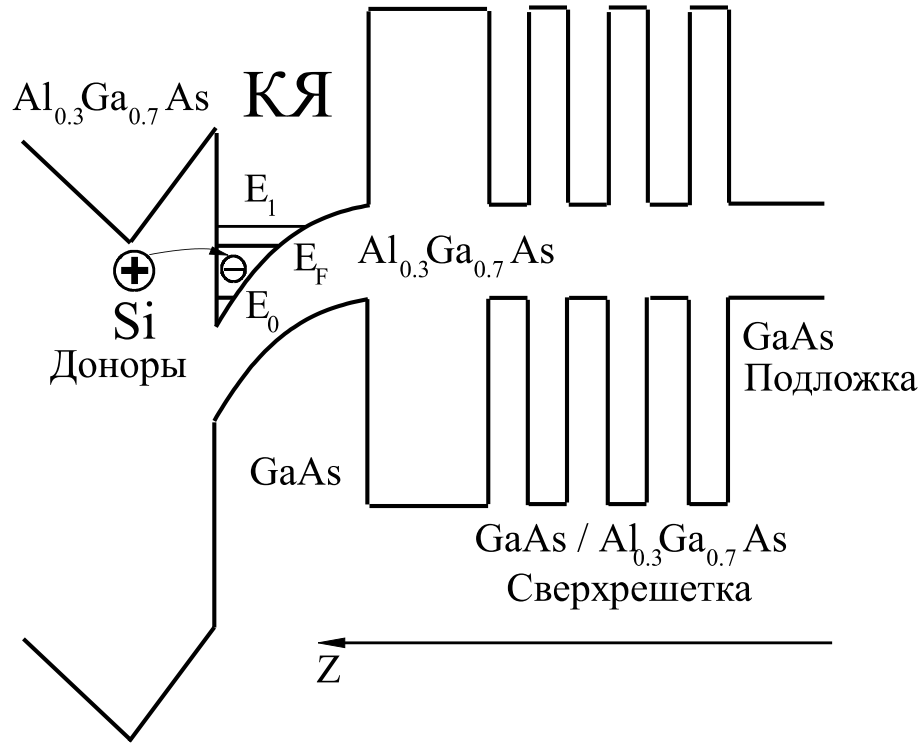


Рис. 1: Схема зонной структуры одиночной GaAs/Al_{0.3}Ga_{0.7}As квантовой ямы, δ -легированной кремнием (Si).

исследования коллективных магнитоплазменных возбуждений — метод размерного магнитоплазменного резонанса. Значения эффективных масс электрона и дырки в плоскости квантовой ямы оказались $m_e = 0.067m_0$ и $m_h = 0.26m_0$, соответственно (m_0 — масса свободного электрона), а статической диэлектрической проницаемости $\epsilon = 12.86$.

Переходя к обсуждению физических свойств систем пониженной размерности в указанных структурах, в первую очередь следует отметить, что подвижные электроны в системе легированных квантовых ям принимают непосредственное участие в экранировании кулоновского взаимодействия и существенным образом влияют как на стабильность кулоновских центров, так и на характер крупномасштабных флуктуаций потенциала в КЯ. Несмотря на то, что спектр электронов в КЯ, как

уже говорилось, размерно квантован и может рассматриваться как чисто двумерный, применительно к задаче об экранировании кулоновского взаимодействия, эти структуры являются квазидвумерными, так как ширина типичных КЯ ($200\text{\AA} - 300\text{\AA}$) лишь в несколько раз превышает экситонный боровский радиус¹. В связи с этим экранирование кулоновского взаимодействия в реальных КЯ носит смешанный характер, изменяясь от чисто двумерного на больших расстояниях (много больших, чем ширина КЯ), до практически трехмерного на малых расстояниях.

Хорошо известно, что с ростом концентрации носителей заряда экранирование кулоновского взаимодействия усиливается, что приводит к перенормировке всего энергетического спектра коллективных возбуждений. В частности, уменьшается энергия связи основного состояния экситона, которая смещается от своего неэкранированного значения в сторону континуума несвязанных состояний. В трехмерных системах по этой причине при достижении некоторой критической концентрации электронов и дырок диэлектрическое состояние (экситонный газ) становится энергетически невыгодным, и система электронов и дырок переходит в металлическую фазу — электрон-дырочную плазму. Аналогичный переход может происходить в системе атомов водорода или в системе примесей в легированных полупроводниках. Объяснение этого перехода было предложено Моттом в работе [8, 9], где он выдвинул следующее условие для экситонно-плазменного перехода — исчезновение в электрон-дырочной системе связанного состояния при увеличении экситонной плотности n . Из сравнения статического радиуса экранирова-

¹В КЯ GaAs/AlGaAs $a_B \simeq 100\text{\AA}$.

ния и боровского радиуса трехмерного экситона было получено значение критической концентрации, соответствующее $r_{s(3D)} = 2$, где $r_{s(3D)} = (4\pi n a_B^3 / 3)^{-1/3}$ [10, 11]. В квазидвумерных системах экситонные состояния могут сосуществовать с заряженной подсистемой электронов и дырок, поскольку связанное состояние в двумерном случае формально существует для сколь угодно мелких потенциалов. Поэтому в этом случае можно говорить не о фазовом переходе металл — диэлектрик, а о перестройке одиночного экситона. Так с ростом концентрации 2Д-электронов (дырок) происходит экранирование данного связанного состояния, увеличение его боровского радиуса и перестройка энергетического спектра. Эффекты экранировки в различных квантовых ямах наблюдались в спектрах люминесценции и отражения [7, 12, 13, 14]. В работах [7, 14] было экспериментально показано, что пороговая концентрация, при которой происходит перестройка экситонных состояний, сильно зависит от качества структуры и для наиболее совершенных структур GaAs/AlGaAs наблюдается при чрезвычайно низких концентрациях 2Д-электронов $N_s = 5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$. Для описания среднего расстояния между электронами в 2Д-газе в единицах боровского радиуса a_B принято использовать безразмерный параметр $r_s = 1 / (a_B \sqrt{2\pi N_s})$. Указанные выше значения концентрации соответствуют $r_s \approx 8$. Эта величина в несколько раз превышает значения, ранее наблюдавшиеся экспериментально на структурах худшего качества [13], где перестройка экситонных состояний происходила при значениях концентрации квазидвумерного электронного газа (2ДЭГ), на порядок больших. Впервые теоретическое исследование процессов экранирования кулоновского взаимодействия двумерным электронным газом

проводилось в работе Г. Бауэра [15] в рамках теории диэлектрического экранирования, а затем в работе Клейнмана [16] в приближении линейного диэлектрического отклика для чисто двумерного электронного газа. Однако оба эти подхода дают значительно большие значения пороговой концентрации, чем наблюдаемые экспериментально в совершенных структурах GaAs/AlGaAs [7, 14]. В работе Клейнмана, как и во многих последующих работах [17–25], вычисление экранированного кулоновского потенциала квазидвумерным электронным газом производилось в приближении линхардовской восприимчивости, которое отвечает случаю линейного отклика в рамках приближения хаотических фаз, таким образом в использованных приближениях не была учтена нелинейность отклика и не учтены корреляции на малых расстояниях. Приближение линейного отклика системы справедливо лишь в случае слабоменяющегося в пространстве потенциала, а потому оно является достаточно упрощенным. Модель Линхарда [26] использовалась для расчета диэлектрической функции трехмерного газа свободных электронов. Она не учитывает динамические корреляционные эффекты и приводит к соответствующим неточностям при вычислении, в частности, при расчете парной корреляционной функции (см., например [27]). Напомним, что парная корреляционная функция определяет вероятность относительно расположения комплекса из двух любых электронов в газе и является важной статистической характеристикой системы [28, 29]. Она позволяет получить, например, среднюю энергию системы взаимодействующих частиц, а также реакцию системы на внешнее возмущение. Несмотря на указанные проблемы, линхардовское приближение широко использует-

ся, так как дает простые нетривиальные результаты для линейного отклика системы на внешнее возмущение. Диэлектрическая функция для двумерного заряженного слоя, помещенного в однородную среду с диэлектрической проницаемостью ϵ , в приближении невзаимодействующих электронов впервые была получена Стерном в 1967 году [30]. Стоит отметить, что в этом приближении особенность в диэлектрической функции при $q = 2k_F$ (где k_F – фермиевский волновой вектор) приводит, как и в трехмерном случае, к фриделевским осцилляциям концентрации 2ДЭГ [31]. Однако в отличие от трехмерных систем, влияние этих осцилляций оказывается существенным, поскольку в двумерном случае асимптотика экранированного потенциала носит степенной характер и вклад от осцилляторного поведения локальной концентрации в окрестности кулоновского центра оказывается заметным, приводя к более эффективному экранированию потенциала.

До некоторой степени межэлектронное кулоновское взаимодействие на малых расстояниях может быть учтено в приближении локального поля [32, 33]. В этом случае, как было показано для чисто двумерного потенциала [32–36], можно учесть электрон-электронные и электрон-дырочные зарядовые и спиновые корреляции на малых расстояниях. Сложность этого подхода состоит в определении локального поля, которое определяет локальные корреляции, уточняющие индуцированный потенциал. Задача получается самосогласованной относительно диэлектрической функции, парной корреляционной функции и статического локального поля, одновременно. Численный самосогласованный расчет показывает преимущество данного приближения в сравнении с преды-

дущими подходами в пределе больших импульсов для парной корреляционной функции, а моделирование методом молекулярной динамики [37] показывает хорошее согласие с экспериментальными результатами в термодинамических свойствах системы. Важной характеристикой заряженной системы является сжимаемость K , которая связана с диэлектрической функцией $\epsilon(q, \omega)$ [34]. Сжимаемость электронной системы K , рассчитанная в приближении локального поля, оказывается меньше, чем сжимаемость системы в приближении хаотических фаз K_0 при одинаковых плотностях электронов в системах. Данный результат находится в хорошем согласии с результатами численного моделирования, а также с экспериментальными работами (см., например [38]). Это означает, что система становится более жесткой, то есть из-за взаимодействия на малых расстояниях увеличивается среднее межэлектронное расстояние. При этом изменение локальной концентрации оказывается меньше, чем в системе невзаимодействующих электронов. Это приводит к ухудшению экранирующих свойств 2ДЭГ. Следует однако оговориться, что для сильно коррелированных систем, близких к кристаллической фазе, приближение локального поля уже неприменимо и в этом случае диэлектрическая функция может быть получена с помощью вычисления линейного отклика кристалла. Однако для $r_s \leq 10$ приближение локального поля может быть использовано для описания исследуемых систем с хорошей точностью.

В экспериментах по исследованию экранирования экситонных состояний квазидвумерным электронным газом отсутствует информация об изменении зависимости энергии связи экситонных состояний от плотно-

сти 2ДЭГ. Получить искомую информацию можно было бы, зная значения энергии нескоррелированных электрона и дырки, однако они не имеют характерных особенностей в спектрах люминесценции и поглощения. В то же время в оптических экспериментах четко наблюдается пороговое изменение силы осциллятора экситонного перехода при достижении плотности 2ДЭГ некоторого порогового значения [7]. В структурах же хорошего качества возможно исследование относительного изменения энергии связи основного и возбужденных состояний экситона при увеличении концентрации 2ДЭГ [39]. Для решения такого рода задач, возникающих в большинстве экспериментальных работ, в частности в указанных выше [7, 39], требуется теоретический расчет полного энергетического спектра связанного состояния и силы осциллятора экситонных переходов в такой системе. К сожалению, ни одна из этих задач до сих пор не решена.

Задача об экранировании кулоновского взаимодействия в двумерной системе при температуре, отличной от нуля, была впервые решена в работе [40]. Для этого была найдена зависящая от температуры диэлектрическая функция в приближении хаотических фаз. В пределе высоких температур (порядка фермиевской энергии) она имеет аналитическое выражение. При низких температурах диэлектрическая функция $\epsilon(q, \omega)$ может быть получена численно. Используя данные результаты, можно получить сведения об экранирующих свойствах электронного 2Д-газа в КЯ при конечных температурах, а также построить фазовую диаграмму квазидвумерного экситонного состояния. Такое исследование особенно интересно в свете последних экспериментальных работ [39, 41], в ко-

торых изучался коллапс связанного состояния в КЯ GaAs/AlGaAs при различных температурах.

§1.2 Эффекты связанные с экситонами и экситонными комплексами в двухслойных системах.

Развитие технологии роста полупроводниковых гетероструктур позволило создавать образцы высокого качества с параллельными двумерными каналами электронов и(или) дырок, расположенными друг от друга на расстояниях от 10 до 500Å. Одним из примеров таких структур являются двойные квантовые ямы, в которых два взаимодействующих электрон-электронных или электрон-дырочных слоя разделены потенциальным барьером. Системы двойных КЯ привлекают в настоящее время большое внимание исследователей [41–52], в частности, в связи с предсказанной ранее сверхтекучестью в таких объектах [53], квазиджозефсоновскими эффектами [53, 54], необычными свойствами в сильных магнитных полях (см. [55] и цитируемую там литературу). Было также предсказано, что межслоевое электрон-электронное взаимодействие сильно влияет на энергетический спектр электронов в целочисленном и дробном квантовом эффекте Холла [56, 57] и приводит к появлению новых когерентных состояний, связанных со спариванием квазичастиц из отдельных слоев [58, 59], а также увеличивает стабильность состояния вигнеровского кристалла [60]. Помимо этого, двойные КЯ с туннельной связью, в принципе, можно использовать как возможные элементы для проведения квантовых вычислений [44, 61], что представляет значительный технический

интерес к такого рода системам в свете создания квантового компьютера. Более того, пространственно-разделенные электроны и дырки могут образовывать связанные состояния — непрямые экситоны [62–68]. Оказалось, что такая система имеет достаточно богатую фазовую диаграмму (см., например, [69]). В определенной области параметров возможен переход экситонов с пространственно-разделенными электронами и дырками в жидкую фазу, а в некоторой промежуточной области более низких концентраций электронов и дырок могла бы осуществляться кристаллизация непрямых экситонов [69–71]. Соответственно, и спектр коллективных возбуждений двойных квантовых ям модифицируется по сравнению со спектром коллективных возбуждений одиночной квантовой ямой.

Важной особенностью рассматриваемой “двухкомпонентной” (с пространственно разделенными каналами носителей заряда) системы являются эффекты экранирования экситонов электронами и (или) дырками, приводящие к уменьшению их энергии связи и увеличению радиуса. Как следует из экспериментальных данных и теоретических расчетов, линия экситонной люминесценции исчезает при некоторой критической концентрации электронного газа [7, 39]. Поскольку исчезновение экситонной линии наблюдалось и для весьма разреженной экситонной системы, то фактически задача сводится к изучению скачкообразного “исчезновения” изолированного экситонного состояния с ростом концентрации электронов (в отличие от перехода Мотта металл–диэлектрик в чисто экситонной системе при увеличении ее плотности).

В связи с многочисленными экспериментальными работами, выполненными на структурах с различными межслоевыми расстояниями [41,

42, 45, 49], представляет интерес исследование поведения связанного состояния в зависимости от расстояния между квантовыми ямами, а также влияния конечной толщины КЯ на энергетический спектр коллективных возбуждений. Однако на данный момент нет теоретических работ, в которых в полной мере были бы решены эти задачи.

Заряженные квазичастицы в полупроводнике – электроны и дырки – могут образовывать различные связанные комплексы, нейтральные или заряженные, которые также являются элементарными возбуждениями полупроводника [1, 72, 73, 74, 75]. Теоретический интерес к этой проблеме в последние годы усилился в связи с экспериментальной возможностью исследования заряженных коллективных возбуждений в двумерном электронном газе. Так например, отрицательно заряженный комплекс из трех квазичастиц – трион (X^-) в одиночной квантовой яме стал предметом исследования многочисленных теоретических и экспериментальных работ [75]-[82]. Данная задача является более сложной, чем задача о двухчастичных нейтральных комплексах – экситонах. Это связано в первую очередь с тем, что при разделении движения центра масс и относительного движения в уравнении Шредингера, возникающее уравнение для относительного движения все еще слишком сложно для аналитического решения. В связи с этим был развит формализм для решения трехчастичных проблем [75]-[80], который в некоторой степени позволил ответить на ряд вопросов о свойствах заряженных комплексов. Как уже говорилось выше, с появлением качественных структур двойных КЯ возник новый круг проблем, связанных со свойствами комплексов пространственно разделенных частиц — пространственно непрямого

экситона, триона и др. Теоретическое исследование не прямых трионов уже проводилось в работах [83, 84], где было показано, что при достаточно низких температурах и малых межслоевых расстояниях возможно образование связанного состояния экситона и электрона. Кроме этого, в работе [85] был рассмотрен X^+ трион в структуре из двух квантовых ям, который состоял из двух дырок в одной квантовой яме связанных посредством электрона из другой. Исследовалась зависимость энергии связи такого пространственно непрямого триона от эффективного расстояния между ямами и от отношения масс электрона и дырки. При расчете триона использовалось адиабатическое приближение, а квантовые ямы считались идеально двумерными. Энергия связи основного состояния электрона, локализованного в потенциале двух неподвижных дырок, вычислялась вариационным методом. Однако наличие в структурах электронного (или дырочного) каналов приводит к экранированию кулоновского взаимодействия. В связи с этим представляется целесообразным рассмотреть вопросы о зависимости энергии связи триона от различных параметров системы и поведении связанного трионного комплекса в присутствии двумерного электронного газа.

С другой стороны, системы квазидвумерных экситонов, сосуществующих с электронами в том же самом [7] или пространственно отделенном слое (см. [41, 45, 49] и цитируемую там литературу), интересны, в связи с возможным обнаружением эффектов увлечения. Теоретическое предсказание такого рода эффектов в двухслойной системе пространственно разделенных электронов и дырок и исследование влияния фазового перехода в сверхтекучую фазу было сделано в [53]. Позднее в [86] был

рассмотрен эффект увлечения электронов электронами в системе типа полупроводник–диэлектрик–полупроводник. Практический способ наблюдения эффекта увлечения в гетероструктурах был предложен в [87]. В дальнейшем эффект увлечения получил развитие в ряде теоретических и экспериментальных работ [88]-[94]. Были рассмотрены различные физические реализации данного эффекта в одномерных, двумерных и трехмерных системах. Увлечение в двухслойной системе пространственно разделенных электронов и экситонов было рассмотрено в теоретической работе [95], где исследовалось увлечение электронов экситонами, движущимися за счет градиента концентрации. В данном случае оно обусловлено взаимодействием экситона с поляризующим его электроном. Кроме того, рассматривалась и обратная задача, а именно, увлечение экситонов движущимися электронами. Как было показано в данной работе эти эффекты можно было бы использовать, во-первых, для анализа экситонной системы путем измерения транспортных свойств электронов, и, во-вторых, для управления экситонами с помощью транспорта электронов. В связи с этим возникает вопрос, чему равен коэффициент взаимной подвижности пространственно разделенных экситонов и электронов и как он зависит от параметров системы. Рассмотренные эффекты будут иметь место и для электронов и экситонов в одном слое. Полученные в работе [95] результаты качественно справедливы и для этого случая.

§1.3 Кристаллическая фаза в системах с пространственно разделенными электронами и дырками.

Одним из наиболее эффектных явлений системы взаимодействующих электронов (или дырок) представляется их возможная кристаллизация при низких температурах и плотностях, впервые указанная Вигнером [96] для трехмерного электронного газа. Для двух измерений при нулевой температуре аргументация в пользу существования вигнеровского кристалла может быть следующая. Локализуем каждый электрон в центре ячейки радиуса $N_s^{-1/2}$, тогда увеличение кинетической энергии в расчете на один электрон будет порядка $\frac{\hbar^2}{2m}N_s$ (в силу соотношения неопределенностей). Выигрыш в энергии корреляции при этом составит $e^2N_s^{1/2}$ и при $N_s < \left(\frac{e^2m}{\hbar^2}\right)^2$ системе будет выгодно перейти в кристаллическое состояние с локализованными электронами. Более того, в [97] впервые предсказано, что магнитное поле способствует кристаллизации электронного газа (см. также [98]). Экспериментальные работы для случая электронов над поверхностью гелия [99] и для полупроводниковых структур [100, 101] подтверждают существования кристалла в квазидвумерных системах.

Очевидно, что спектр коллективных возбуждений двумерной электронной решетки модифицируется по сравнению со спектром плазменных колебаний. Этот вопрос в настоящее время изучен достаточно хорошо как теоретически, так и экспериментально. Впервые выражения для дисперсий коллективных возбуждений в нулевом и ненулевых магнитных полях были получены из классических уравнений движения А.В.

Чапликом [102]:

$$\omega_{op} = \sqrt{\frac{4\pi N_s e^2 k}{m\epsilon}}, \quad \omega_{ac} = sk, \quad (2)$$

где s – скорость распространения акустических колебаний, такая что $s^2 \sim \frac{e^2 \sqrt{N_s}}{m\epsilon}$ и две частоты гибридных (магнитооптической и магнитоакустической) мод

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}(\omega_{op}^2 + \omega_{ac}^2 + \omega_c^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{op}^2 + \omega_{ac}^2 + \omega_c^2)^2 - 4\omega_{op}^2\omega_{ac}^2}, \quad (3)$$

где $\omega_c = eB/mc$ – электронная циклотронная частота. В области малых импульсов, таких что $k[N_s]^{-1/2} \ll 1$ из последней формулы для магнитооптических зависимостей получаются следующие выражения

$$\omega_1 \approx \omega_c + \frac{ak + s^2 k^2}{2\omega_c}, \quad (4)$$

$$\omega_2 \approx a^{1/2} s k^{3/2} / \omega_c. \quad (5)$$

Здесь $a \equiv \frac{2\pi e^2 N_s}{em}$. В квантовом приближении эта задача была решена Х.Фукуямой [103]. Мода с частотой $\omega_2 \sim k^{3/2}/V$ является характерной отличительной особенностью кристаллической фазы в 2ДЭГ.

В отличие от однослойных систем, в двуслойных нет такой четко выстроенной физической картины. Как указывалось в предыдущем параграфе, в системе пространственно разделенных электронов и дырок малой плотности, такой что расстояние между носителями заряда в слое много больше межслоевого расстояния, возможно образование непрямых экситонов (диполей). Энергетический спектр одиночного экситона в нулевом и ненулевом магнитных полях рассматривался во многих работах, в частности в [69] была исследована система с пространственно разделенными электронами и дырками. При увеличении концентрации носителей заряда одиночные диполи (пространственно не прямые экситоны)

трансформируются в систему взаимодействующих непрямых экситонов. В указанной работе было показано, что в отличие от обычных электрон-дырочных систем, в такой системе основной вклад в энергию дает прямое диполь-дипольное отталкивание, а ван-дер-ваальсово притяжение экситонов и обменное взаимодействие не существенны (менее 1% от вклада прямого диполь-дипольного взаимодействия). Малый вклад обменного взаимодействия в пространственно разделенной электрон-дырочной системе связан с малостью туннельной экспоненты, описывающей прохождение квазичастиц через барьер диполь-дипольного взаимодействия. Особенно интересно, что в некоторой области малых концентраций электрон – дырочных пар указанное диполь-дипольное отталкивание может приводить к образованию кристалла непрямых экситонов, аналогичного вигнеровскому в однослойных системах. Кроме того, в [70, 104] было показано, что дипольный (экситонный) кристалл, также как и вигнеровский, должен иметь треугольную кристаллическую решетку. Это связано с тем, что треугольная решетка, благодаря ее плотной упаковке, соответствует минимуму потенциальной энергии и спектр ее частот в двумерном случае стабилен, в отличие от других конфигураций. При этом различие между кулоновской и дипольной системами заключается в том, что в последней нет необходимости вводить компенсирующий фон. Ряды при вычислении потенциальной энергии взаимодействия сходятся. Но несмотря на достигнутые успехи в изучении кристаллической фазы в системе пространственно непрямых электрон-дырочных пар, на сегодняшний день задача о спектре коллективных возбуждений экситонного кристалла в нулевых и ненулевых магнитных полях не решена и требует

дополнительного теоретического исследования.

Фазовая диаграмма двухслойной системы пространственно разделенных электронов и дырок была получена в [69]. В этой работе было показано, что существует три фазовых состояния: фаза дипольного кристалла, промежуточная область несфазированных e - и h - кристаллов и фаза электрон-дырочной жидкости. Из данной работы следует, что экситонный кристалл может существовать при малых межслоевых расстояниях D и при $T < T_c$, где T_c – критическая температура плавления дипольного кристалла, зависящая от концентрации экситонов и D . Причем при $T < T_c$ кристалл плавится при двух значениях концентрации в точках фазовой диаграммы, которые удаляются друг от друга при уменьшении расстояния между слоями. Этим практически ограничивается область знаний об экситонном кристалле, в то время как другие фазовые состояния данной системы на сегодняшний день являются достаточно хорошо исследованными. Так несфазированные e - и h - кристаллы могут быть рассмотрены независимо друг от друга, как в случае вигнеровского кристалла. Электрон-дырочной фазе в последнее время также было посвящено большое число как теоретических, так и экспериментальных работ [41]–[52], [105]–[109]. В частности, известно, что системы электрон-дырочной плазмы в отсутствие туннелирования между слоями имеют две коллективные моды: оптическую с корневым законом дисперсии ($\omega_{op}^{pl} \sim \sqrt{k}$) и акустическую с линейным законом ($\omega_{ac}^{pl} \sim k$). В перпендикулярном магнитном поле гибридные магнитоплазменные возбуждения описываются следующим образом

$$\omega_{mp}^{op} = \sqrt{\omega_{op}^{pl2} + \omega_e^2}, \quad (6)$$

$$\omega_{\text{mp}}^{ac} = \sqrt{\omega_{ac}^{pl2} + \omega_h^2}, \quad (7)$$

где ω_e и ω_h – циклотронные электронная и дырочная частоты.

При больших магнитных полях, как было показано в работе [55], в которой рассматривалась система пространственно разделенных электронов и дырок в этом режиме, оптические и акустические коллективные возбуждения – суть электронный и дырочный циклотронные резонансы. Это связано с тем, что в данной области циклотронная энергия электрона (дырки) много больше энергии кулоновского взаимодействия, поэтому спектр системы определяется магнитным полем, а $e - h$ взаимодействие входит как малая поправка к основной энергии.

Таким образом, для ответа на вопрос о различных свойствах экситонного (дипольного) кристалла необходимы дополнительные теоретические исследования, включая расчет спектров коллективных возбуждений в нулевом и конечных магнитных полях, а также анализ изменения этих спектров при переходе к фазе электрон-дырочной плазмы.

§1.4 Выводы. Постановка задачи.

Подводя итоги можно сказать, что на сегодняшний день накоплен богатый теоретический материал по изучению систем прямых и пространственно разделенных электронов и дырок в гетеропереходах и квантовых ямах. Тем не менее существует целый ряд важных нерешенных задач, касающихся коллективных свойств таких систем в условиях малой плотности носителей заряда. В этом случае кулоновское взаимодействие в системе оказывается достаточно сильным и не может быть должным

образом учтено в рамках имеющихся приближений. С этим связаны проблемы при решении важнейшей задачи об исчезновении связанных пространственно прямого и непрямого состояний в системах одиночных и двойных квантовых ям при низких температурах, когда экранировка кулоновского взаимодействия носит фактически “металлический”, а не диэлектрический (или экситонный) характер. Кроме определения критической плотности носителей заряда, которая, собственно говоря, дает границу области существования экситонов, представляет несомненный интерес изучение характера фазового перехода металл-диэлектрик. Более того, кулоновское взаимодействие в системе пространственно разделенных электрон-дырочных каналов низкой плотности в области сверхнизких температур приводит к образованию новой экситонной фазы – дипольного кристалла. Многие свойства этой фазы до настоящего времени не выявлены и представляют большой исследовательский интерес. Также следует упомянуть о заряженных непрямым многочастичных комплексах, которые являются неотъемлемой частью рассматриваемых систем. При этом их оптические и транспортные свойства остаются малоизученными, ввиду отсутствия стандартных процедур расчета энергетических спектров и волновых функций для системы трех и более частиц. Кроме того, несмотря на большое количество работ по исследованию эффектов увлечения в двухслойной системе пространственно разделенных электронов и экситонов, до сих пор остаются нерешенные задачи, связанные с взаимной подвижностью.

Все это позволило бы, в конечном итоге, приблизиться к более полному пониманию физических свойств систем с прямыми и пространственно

разделенными носителями заряда.

Таким образом, в диссертационной работе были выделены следующие основные направления исследований:

- расчет изменений энергии связи и силы осциллятора основного и возбужденных состояний прямого экситона, возникающих в результате экранирования кулоновского взаимодействия квазидвумерным электронным газом в КЯ GaAs/AlGaAs различной ширины;

- исследование температурной зависимости эффектов экранирования связанного состояния и построение фазовой диаграммы экситонного состояния;

- изучение эффектов экранирования прямого и непрямого экситонных состояний в двухслойных системах пространственно отделенными носителями;

- исследование связанного состояния пространственно разделенных экситона и электрона (трионного комплекса X^-); оценка значений энергии связи триона для различных межслоевых расстояний и концентраций носителей заряда в ямах;

- рассмотрение эффекта увлечения в системе пространственно разделенных экситонов и электронов; исследование роли экранирования в увлечении в этой системе;

- исследования кристаллической фазы непрямых экситонов в связан-

ных квантовых ямах; анализ спектров коллективных возбуждений двумерной экситонной решетки в нулевом и конечных магнитных полях в двухслойной электрон–дырочной системе с низкой плотностью пространственно разделенных электронов и дырок; исследование изменения полученного спектра коллективных возбуждений кристалла непрямых экситонов при плавлении и переходе от кристаллической фазы к электрон–дырочной плазме.

ГЛАВА II.

Свойства экситонных состояний

в одиночных квантовых ямах GaAs/AlGaAs

в присутствии квазидвумерного электронного газа.

В этой главе нас будет интересовать энергия связи экситонного состояния в присутствии квазидвумерного электронного газа с концентрацией N_s . Как известно [2, 110], задача об определении энергии связи экситона большого радиуса сводится к задаче о кулоновском центре с массой частицы, равной приведенной массе экситона $\mu = (m_e m_h)/(m_e + m_h)$, где m_e и m_h эффективные массы электрона и дырки в плоскости квантовой яме, соответственно. Результаты этой главы опубликованы в [111]–[114].

§2.1 Постановка задачи.

Рассмотрим квантовую яму шириной l_0 с бесконечно высокими стенками такую, что волновая функция электронов в z -направлении строго ограничена размерами КЯ. В этой системе расщепление уровней энергии легкой и тяжелой дырок вблизи дна зоны достаточно большое, поэтому можем ограничиться рассмотрением связанного состояния только на тяжелой дырке; при этом дисперсия тяжелой дырки в интересующей нас области малых импульсов квадратична. Связанные состояния электрона на легких дырках лежат существенно выше по энергии, при этом их энергия связи существенно меньше. В качестве модели экситона, как утверждалось выше, можно рассмотреть положительно заряженный ку-

лоновский центр, расположенный посередине КЯ при $z = 0$, и связанный на нем электрон, с массой равной приведенной массе экситона μ . Гамильтониан такого центра в цилиндрической системе координат имеет следующий вид:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r, z_e, z_h), \quad (8)$$

где

$$U(r, z_e, z_h) = -\frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r^2 + (z_e - z_h)^2}} + u(z_e, z_h), \quad (9)$$

где $u(z_e, z_h) = u(z_e) + u(z_h)$, $u(z_i)$ – удерживающий потенциал в квантовой яме:

$$\begin{cases} u(z_i) = 0, & \text{if } z_i \leq |l_0/2|, \\ u(z_i) = \infty, & \text{if } z_i > |l_0/2|. \end{cases}$$

Энергию основного состояния будем искать вариационным методом Ритца с пробной волновой функцией связанного состояния в виде:

$$\Psi(r, z_e, z_h) = N \cos\left(\frac{\pi z_e}{l_0}\right) \cos\left(\frac{\pi z_h}{l_0}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + \gamma^2 \cdot (z_e - z_h)^2}}{r_0}\right). \quad (10)$$

В этой функции имеется два варьируемых параметра: r_0 – эффективный радиус кулоновского центра (экситона) в плоскости (x,y); и γ – параметр, учитывающий анизотропию, обусловленную ограниченностью движения в z -направлении. Такая волновая функция правильно описывает поведение системы как в узких квантовых ямах ($l_0 \ll r_0$; при этом $\gamma \rightarrow 0$ и функция совпадает с чисто двумерной), так и в широких квантовых ямах ($l_0 \geq r_0$). В последнем случае $\gamma \sim 1$ и функция является сферически-симметричной, как в трехмерных системах.

Для вариационных расчетов удобно ввести эффективный двумерный

потенциал $U_{\text{eff}}(r)$, который в адиабатическом приближении² можно записать в следующем виде:

$$U_{\text{eff}}(r) = \int |\Psi(r, z_e, z_h)|^2 U(r, z_e, z_h) dz_e dz_h. \quad (11)$$

Фурье-образ этого потенциала:

$$U_{\text{eff}}(q) = \int \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \cdot U_{\text{eff}}(r) d\mathbf{r} = 2\pi \int J_0(qr) \cdot U_{\text{eff}}(r) r dr, \quad (12)$$

где $J_0(x)$ - функции Бесселя первого рода.

Энергия основного состояния квазидвумерного экситона находится из минимума функционала F :

$$F = \langle \Psi(r, z) | -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta | \Psi(r, z) \rangle + \langle |U_{\text{eff}}(r)| \rangle \quad (13)$$

по параметрам r_0 и γ .

Влияние экранирования квазидвумерным электронным газом эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(r)$ будем учитывать через диэлектрическую функцию $\epsilon(q)$:

$$U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) = \int J_0(qr) \frac{U_{\text{eff}}(q)}{\epsilon(q)} q dq. \quad (14)$$

§2.2 Теория экранирования Линхарда.

Функция отклика, или восприимчивость системы $\chi(q, \omega)$, 2ДЭГ с потенциалом $U_{\text{eff}}(q)$ на внешнее возмущение $V^{\text{ext}}(q, \omega)$ по определению есть

$$\delta n(q, \omega) = \chi(q, \omega) V^{\text{ext}}(q, \omega), \quad (15)$$

²Условие, что расстояние между экситонными уровнями намного меньше характерной энергии $\sim \pi^2 \hbar^2 / 2m_{e(h)} l_0^2$ размерного квантования электрона(дырки) в квантовой яме является достаточным для применимости адиабатического приближения в данной задаче.

где $\delta n(q, \omega)$ - изменение плотности за счет взаимодействия с внешним возмущением.

Поляризационный оператор $\Pi(q, \omega)$ определяется как восприимчивость системы на уже наведенный (или индуцированный) потенциал, который есть сумма внешнего потенциала и потенциала эффективного взаимодействия $V^{ind}(q, \omega) = V^{ext}(q, \omega) + U_{\text{eff}}(q)\delta n(q, \omega)$:

$$\delta n(q, \omega) = \Pi(q, \omega)V^{ind}(q, \omega). \quad (16)$$

Из формул (15) и (16) получаем зависимость между восприимчивостью и поляризацией системы:

$$\chi(q, \omega) = \frac{\Pi(q, \omega)}{1 - U_{\text{eff}}(q)\Pi(q, \omega)}. \quad (17)$$

Диэлектрическая функция по определению есть отношение внешнего возмущения к наведенному потенциалу и поэтому может быть записана в виде:

$$\frac{1}{\epsilon(q, \omega)} = 1 + \frac{U_{\text{eff}}(q)\delta n(q, \omega)}{V^{ext}(q, \omega)} \equiv 1 + U_{\text{eff}}(q)\chi(q, \omega), \quad (18)$$

либо

$$\epsilon(q, \omega) = 1 - U_{\text{eff}}(q)\Pi(q, \omega). \quad (19)$$

В приближении Хартри-Фока [в англоязычной литературе Hartree-Fock Approximation (HFA)] электроны "откликаются" на внешнее поле как свободные частицы, поэтому $\chi(q, \omega)$ для однородной системы аппроксимируется поляризацией свободных электронов (линхардовское приближение невзаимодействующих электронов) $\Pi^0(q, \omega)$, то есть

$$\chi^{HFA}(q, \omega) = \Pi^0(q, \omega),$$

$$\frac{1}{\epsilon^{HFA}(q, \omega)} = 1 + U_{\text{eff}}(q)\Pi^0(q, \omega). \quad (20)$$

Выражение для $\Pi^0(q, \omega)$ было получено с помощью первого порядка теории возмущения по внешнему потенциалу [115]:

$$\Pi^0(q, \omega) = \frac{1}{L^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sum \frac{f_0(E_k) - f_0(E_{k+q})}{E_{k+q} - E_k - \hbar\omega - i\hbar\alpha}, \quad (21)$$

где f_0 - функция распределения Ферми-Дирака, L^2 - площадь системы.

В приближении хаотических фаз [в англоязычной литературе Random Phase Approximation (RPA)] электроны реагируют на индуцированное поле как свободные электроны, так что

$$\Pi^{RPA}(q, \omega) = \Pi^0(q, \omega),$$

$$\epsilon^{RPA}(q, \omega) = 1 - U_{\text{eff}}(q)\Pi^0(q, \omega). \quad (22)$$

При $T = 0$ и фермиевском волновом векторе $k_F = \sqrt{2\pi N_s}$ статическая диэлектрическая функция в приближении хаотических фаз может быть записана (см. например, [30]) как

$$\epsilon^{\text{RPA}}(q) = 1 + U_{\text{eff}}(q) \cdot \frac{m_e}{\pi\hbar^2} \left[1 - \Theta(q - 2k_F)\sqrt{1 - (2k_F/q)^2} \right], \quad (23)$$

где $U_{\text{eff}}(q)$ определяется формулой (12), $\Theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда.

Энергия основного состояния экситона в эффективном экранированном потенциале $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$, полученном численным решением интегрального уравнения (14), вычислялась путем варьирования функционала (13) по параметрам r_0 и γ . Поскольку $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$ сам зависит от этих параметров, то в результате последовательных итераций получались самосогласованные значения r_0 и γ . Надо отметить, что такая процедура самосогласованных

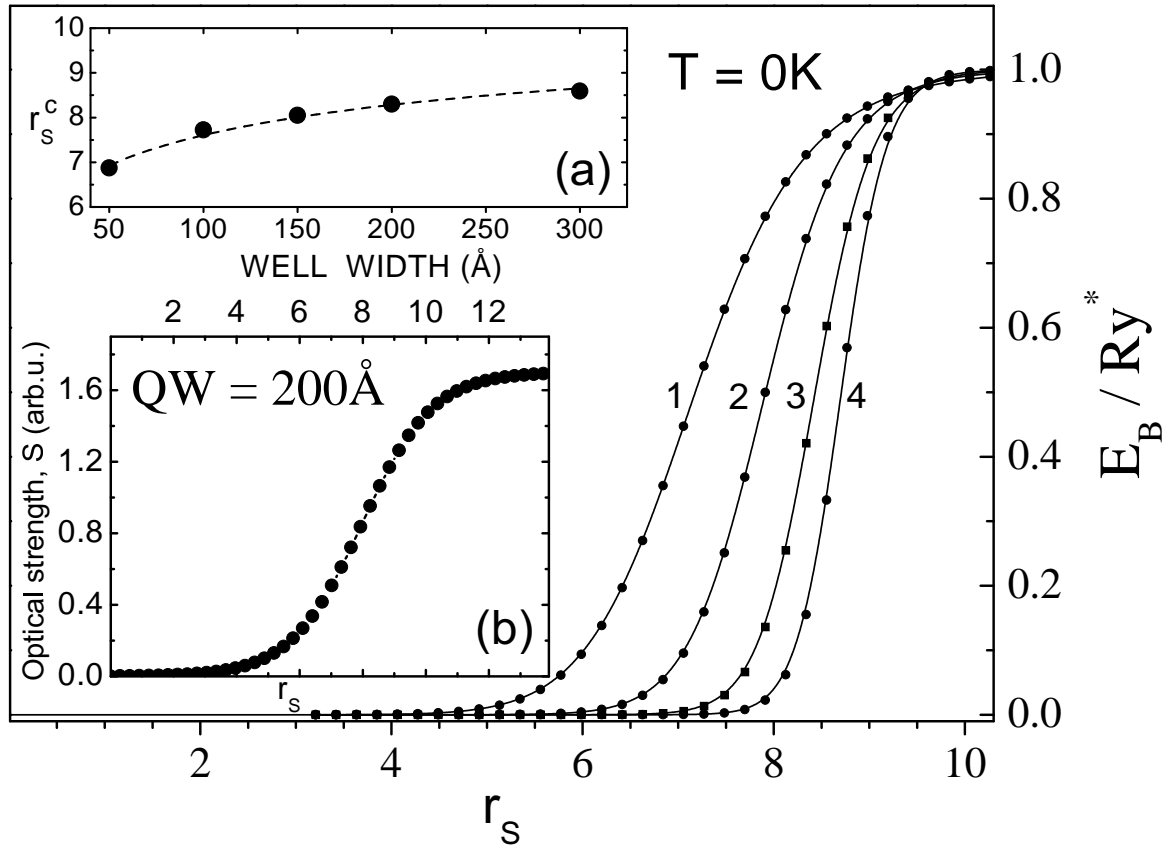


Рис. 2: Зависимость энергии связи экситона E_B в КЯ различной ширины: 50Å(1), 100Å(2), 200Å(3) и 300Å(4) от безразмерного параметра r_s . На вставке(а) приведена зависимость критического параметра r_s^c от ширины КЯ. На вставке(б) показано изменение силы осциллятора S экситонного перехода от безразмерного параметра r_s .

вычислений позволяет выйти за рамки линейного отклика электронной подсистемы и до некоторой степени учесть нелинейный характер экранирования трехмерного кулоновского потенциала двумерным газом.

Предложенный метод — суть самосогласованный метод Хартри. Линейный подход хорошо изучен для атомных систем. Практические возможности такого метода при описании многоэлектронных атомов связаны с наличием малого параметра, равного отношению энергии межэлектронного взаимодействия к энергии взаимодействия электрона с ядром.

Отсутствие такого малого параметра резко снижает эффективность метода и требует дополнительного построения различных коллективных моделей, таких как методы Хартри и Хартри–Фока. В работах [116, 117] было показано, что расширяя класс функций, на которых минимизируется функционал энергии в приближение Хартри–Фока, удается существенно улучшить согласие с результатами точных расчетов и качественно правильно описать межчастичные корреляции. Этим объясняется рассмотрение в §2.1 такого широкого класса зависимостей при выборе волновой функции и вычисление самосогласованного потенциала.

На Рис. 2 приведены результаты численного расчета зависимости энергии связи экситона от безразмерного параметра $r_s = 1/(a_B\sqrt{2\pi N_s})$, описывающего среднее расстояние между электронами в газе в единицах боровского радиуса a_B . Видно, что с ростом концентрации 2ДЭГ энергия связи экситона уменьшается пороговым образом. Для КЯ шириной $l_0 = 300\text{\AA}$ резкое уменьшение (перестройка) энергии связи происходит в области $r_s \approx 8$. С уменьшением ширины ямы значение пороговой концентрации, при которой резко увеличивается эффект экранирования экситонных состояний, смещается в область меньших r_s (больших концентраций) (кривые 1 – 4 на Рис.2). Полагая для определенности, что пороговая концентрация — это концентрация при которой энергия связи падает в e раз, можно построить зависимость критического параметра r_s^c от ширины квантовой ямы (вставка(а) на Рис.2).

Результаты проведенных расчетов показывают, что перестройка экситонных состояний возникает при значительно меньших концентрациях электронного газа $r_s \approx 8$, чем в предыдущих расчетах Г.Бауера [15]

($r_s = 1.8$), где рассматривалось диэлектрическое экранирование кулоновского взаимодействия, или в работе Клейнмана [16], ($r_s = 2.8$), в которой вычисления выполнялись для чисто двумерного случая в приближении линейного экранирования.

Следует обратить внимание на несколько моментов, оказавшихся очень важными в этой задаче. Во-первых, это — учет зависимости диэлектрической функции от параметров эффективного взаимодействия $U_{\text{eff}}(r)$, то есть нелинейное приближение для отклика системы. Если в использованной нами процедуре самосогласованного расчета ограничиться приближением линейного отклика, то значения пороговой концентрации, при которой наблюдается экранирование экситонных состояний, сдвигается в область более высоких концентраций, отвечающих параметру $r_s = 3.5$, что близко к результатам полученным в [16, 118]. Во-вторых, особенность в диэлектрической функции (23) при $q = 2k_F$ приводит, так же как и в трехмерном случае, к фриделевским осцилляциям концентрации 2ДЭГ. В отличие от трехмерных систем, влияние этих осцилляций оказывается существенным, поскольку в двумерном случае асимптотика экранированного потенциала носит степенной характер и вклад от осцилляторного поведения локальной концентрации в окрестности кулоновского центра оказывается заметным, приводя к более эффективному экранированию потенциала.

В экспериментах по исследованию экранирования экситонных состояний квазидвумерным электронным газом, как правило, отсутствует информация об изменении зависимости энергии связи экситонных состояний от плотности 2ДЭГ, поскольку для для этого необходимо знать

энергии нескоррелированных электрона и дырки, которые не имеют характерных особенностей в спектрах люминесценции и поглощения. В то же время в оптических экспериментах четко наблюдается пороговое изменение силы осциллятора экситонного перехода при достижении плотности 2ДЭГ некоторого порогового значения. Для удобства сравнения с экспериментом нами, помимо энергии связи, было также рассчитано поведение силы осциллятора $S \propto |p_{cv}|^2 a_B^{-2} |\Psi(r=0, z=0)|^2$ [16] экситонного перехода как функция концентрации электронного газа в КЯ (см. вставку(b) на Рис.2). Видно, что интенсивность экситонного перехода с ростом плотности 2ДЭГ спадает менее резко, чем энергия связи экситонного состояния. Это приводит к тому, что в оптических экспериментах линия экситонного поглощения может наблюдаться даже при относительно высоких концентрациях электронов, когда энергия связи экситонов уже существенно уменьшилась в результате экранирования квазидвумерным электронным газом.

Интересно также отметить, что перестройка экситонных состояний сопровождается многократным увеличением эффективного боровского радиуса экситонного состояния. При этом даже в широких КЯ с $l_0 = 300\text{\AA}$ при высоких плотностях электронного газа эффективный радиус экситона вдоль плоскости ямы многократно превышает ширину КЯ, так что экситон становится практически двумерным. В то же время при низких плотностях эффективный радиус экситона существенно меньше ширины ямы и волновая функция экситона в яме мало отличается от трехмерной. Таким образом, экранирование экситонного состояния в широких КЯ, помимо уменьшения энергии связи и силы осциллятора, сопрово-

ждается еще “**кроссовером**” экситона $3D \rightarrow 2D$, то есть переходом экситонного состояния из трехмерного в двумерный. Это может служить дополнительной причиной, объясняющей резкость наблюдаемого процесса перестройки экситонного состояния в широких КЯ.

Следует также заметить, что поскольку задача стала чисто двумерной после введения эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(r)$ (формула 11), то связанное состояние в этом случае существует всегда (см. например, [110]). Однако энергия связи данного состояния (см. Рис. 2) в случае большой концентрации (малых r_s) оказывается экспоненциально малой:

$$E_B \sim \frac{\hbar^2}{\mu r_0^2} \exp \left[-\frac{\hbar^2}{\mu P} \right],$$

где $P = \left| \int_0^\infty U_{\text{eff}}(r) r dr \right|$ - мощность потенциальной ямы.

§2.3 Приближение локального поля.

При расчете энергии связи экситонного состояния в предыдущем параграфе использовалось приближение линхардовской восприимчивости, отвечающей ситуации невзаимодействующих электронов в газе. До некоторой степени межэлектронное кулоновское взаимодействие на малых расстояниях может быть учтено в приближении локального поля³ [32] путем замены поляризационного оператора (16) более сложным оператором, наиболее адекватно учитывающего взаимодействие на малых расстояниях, выражение которого имеет следующий вид [34],[36]:

$$\Pi(q, \omega) = \frac{\Pi^0(q, \omega)}{1 - f_q(\omega)\Pi^0(q, \omega)}, \quad (24)$$

³В англоязычной литературе для этого приближения принято сокращение STLS.

где $\Pi^0(q, \omega)$ – поляризационный оператор в РРА, определяемый формулой (21), а $f_q(\omega)$ – фактор локального поля. Тогда из формул (17) и (24) получаем

$$\chi(q, \omega) = \frac{\Pi^0(q, \omega)}{1 - (U_{\text{eff}}(q) + f_q(\omega))\Pi^0(q, \omega)} = \frac{\Pi^0(q, \omega)}{1 - v_{\text{eff}}(q, \omega)\Pi^0(q, \omega)}, \quad (25)$$

$v_{\text{eff}}(q, \omega) = U_{\text{eff}}(q) + f_q(\omega)$ – эффективный потенциал взаимодействия в приближении локального поля. Соответствующая этому поляризационному оператору диэлектрическая функция будет иметь вид:

$$\epsilon^{\text{STLS}}(q, \omega) = 1 - \frac{U_{\text{eff}}(q)\Pi^0(q, \omega)}{1 - f_q(\omega)\Pi^0(q, \omega)}. \quad (26)$$

Формула для эффективного статического потенциала $v_{\text{eff}}(r)$ может быть представлена в виде (см. [119] и Приложение 1):

$$v_{\text{eff}}(r) = - \int_r^\infty \frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} g(r) dr, \quad (27)$$

где $g(r) = g_{\uparrow\uparrow}(r) + g_{\uparrow\downarrow}(r)$ – парная корреляционная функция. Очевидно что, если $g(r) = 1$ (это соответствует невзаимодействующим электронам), то $v_{\text{eff}}(r) \equiv U_{\text{eff}}(r)$. И мы снова возвращаемся к линхардовскому пределу. Далее, аналогично формуле (14), получим выражение для экранированного эффективного статического потенциала взаимодействия в рамках приближения локального поля:

$$v_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) = \int J_0(qr) \frac{v_{\text{eff}}(q)}{\epsilon^{\text{STLS}}(q)} r dr, \quad (28)$$

где $\epsilon^{\text{STLS}}(q)$ – статическая диэлектрическая функция, рассчитанная по формуле (26) при $\omega = 0$.

Итак, статический форм-фактор (формула П1.4), а следовательно, и парную корреляционную функцию (формула П1.2) мы рассчитаем в ну-

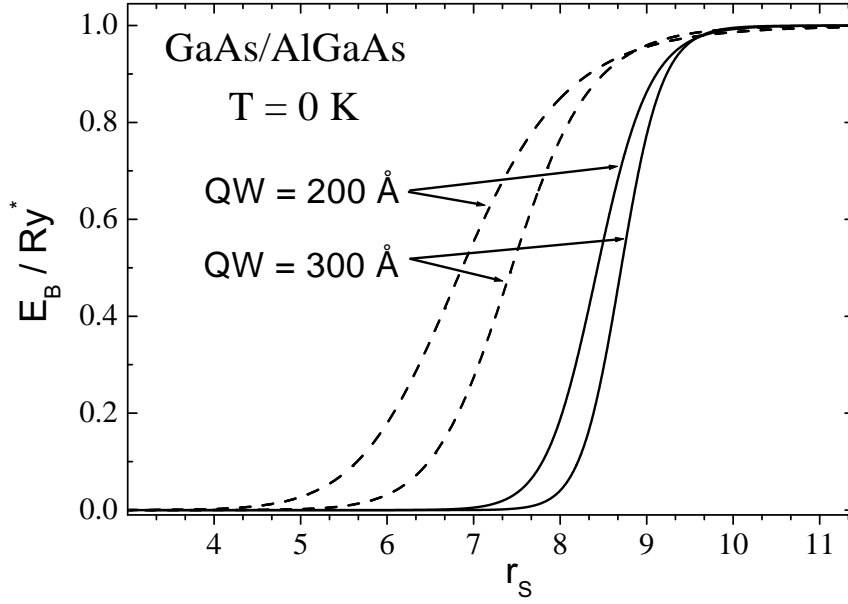


Рис. 3: Зависимость энергии связи экситонного состояния E_B в КЯ 200Å и 300Å от безразмерного параметра r_s в приближении локального поля (пунктирные линии) и в приближении хаотических фаз (сплошные линии).

левом приближении невзаимодействующих электронов. Далее предположим, что последующие изменения $U_{\text{eff}}(r)$ не приведут к существенным изменениям статического форм-фактора и парной корреляционной функции. В этом случае фактор локального поля может быть записан, как $f_q = G(q) \cdot U_{\text{eff}}(q)$, где $G(q) = 1 - g(0) + o(1/q^2)$ (см. [34]). Поэтому для определения эффективного статического потенциала $v_{\text{eff}}(r)$ необходимо вычислить интеграл (27). Далее эффективный экранированный потенциал взаимодействия положительно заряженного кулоновского центра и связанного на нем электрона $v_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$ будет получен численным решением интегрального уравнения (28), причем изменения диэлектрической функции $\epsilon^{\text{STLS}}(q)$ будут определяться только изменениями эффективного двумерного потенциала $U_{\text{eff}}(q)$.

Перейдем теперь непосредственно к нахождению энергии связи экситона в приближении локального поля. Используем, описанную в §2.2 процедуру вариационных самосогласованных вычислений, заменив в ней $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$ на $v_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$. Энергию основного состояния экситона будем вычислять путем варьирования по параметрам r_0 и γ функционала (13) с эффективным экранированным потенциалом $v_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$. Результаты такого численного расчета энергии связи экситона для КЯ с $l_0 = 200\text{\AA}$ и $l_0 = 300\text{\AA}$ как функции безразмерного параметра r_s представлены на Рис. 3 пунктиром. Видно, что при учете корреляционных поправок коллапс экситонного состояния происходит в области более низких r_s по сравнению с РРА, что соответствует увеличению пороговой концентрации 2ДЭГ и ослаблению экранировки. Для объяснения данного эффекта рассмотрим такую характеристику системы как сжимаемость.

§2.4 Сжимаемость системы.

Сжимаемость системы связана с функцией отклика [120]:

$$K = -\frac{1}{N_s^2} \lim_{q \rightarrow 0} \chi(q, 0). \quad (29)$$

Обозначим через K_0 сжимаемость системы свободных электронов. Тогда очевидно, что в линхардовском приближении

$$N_s^2 K_0 = -\lim_{q \rightarrow 0} \Pi^0(q, 0).$$

Используя правила сумм для частот [34, 120, 121], а также выражение (26) для диэлектрической функции, получим сжимаемость в приближе-

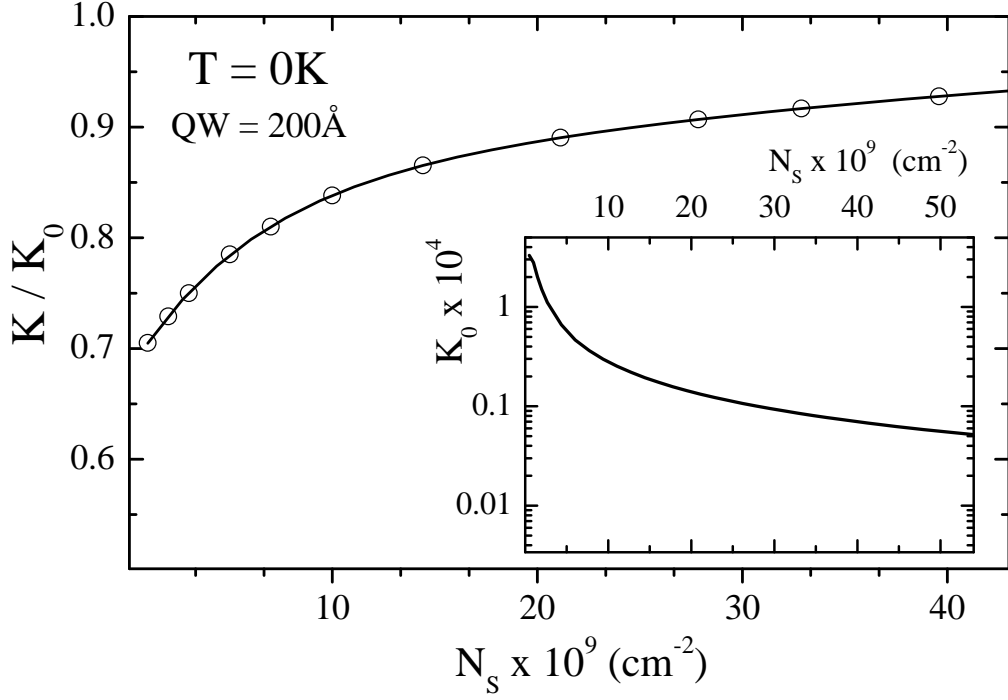


Рис. 4: Зависимость от концентрации 2ДЭГ (N_s) отношения сжимаемости (K) электронной системы в приближении локального поля к сжимаемости (K_0) системы невзаимодействующих электронов. На вставке показана зависимость K_0 от N_s .

нии локального поля:

$$\begin{aligned}
 -\lim_{q \rightarrow 0} \frac{2}{\pi U_{\text{eff}}(q)} \int_0^\infty \frac{d\omega'}{\omega'} \text{Im}[\epsilon^{\text{STLS}}(\omega')] &= \lim_{q \rightarrow 0} \text{Re} \left[\frac{\Pi^0(q, 0)}{1 - f_q(0)\Pi^0(q, 0)} \right] \\
 &= -\lim_{q \rightarrow 0} \frac{N_s^2 K_0}{1 + f_q(0)N_s^2 K_0} \equiv -N_s^2 K.
 \end{aligned} \tag{30}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{K_0}{K} = 1 + \lim_{q \rightarrow 0} f_q(0)N_s^2 K_0. \tag{31}$$

Используя вышеуказанные формулы, легко показать (см. Рис.4), что сжимаемость электронной системы, рассчитанная в приближении локального поля, оказывается меньше, чем сжимаемость системы в приближении хаотических фаз при одинаковых плотностях электронов в системах. Этот результат был получен экспериментально в работе [38]. Это

означает, что система становится более жесткой⁴, то есть из-за взаимодействия на малых расстояниях локальная плотность электронов вблизи дырки уменьшается. Это и приводит к ухудшению экранирования и, как следствие, к увеличению пороговой концентрации, при которой происходит перестройка экситонного состояния.

Конечно, не следует забывать, что в расчетах мы не учитывали сложную структуру валентной зоны, не учитывали проникновение волновой функции экситона под барьер, а также наличие случайного потенциала в структуре. Все это приведет к тому, что перестройка связанного состояния будет наблюдаться в области больших r_s . Однако даже при такой модельной постановке задачи, полученные результаты хорошо согласуются с последними экспериментальными исследованиями.

§2.5 Экранирование возбужденных экситонных состояний.

Как указывалось в Главе I, особый теоретический интерес вызывает задача о зависимости энергии связи возбужденных уровней экситона от концентрации 2ДЭГ. Поэтому следующим шагом в изучении спектра экситонов является расчет возбужденных состояний.

Диагонализацию гамильтониана (8) (см. §2.1) будем производить с помощью численных конечно-разностных схем⁵. Для этого запишем урав-

⁴Коэффициент сжимаемости равный нулю соответствует абсолютно несжимаемой жидкости.

⁵При расчете возбужденных энергетических уровней мы можем считать, что дырка неподвижно находится в центре квантовой ямы, так как кинетическая энергия электрона на этих уровнях много больше кинетической энергии дырки. Поэтому вместо $U(r, z_e, z_h)$ в гамильтониане (8) мы будем рассматривать потенциал $U(r, z)$, зависящий только от координат относительного движения r и z .

нение Шредингера $\widehat{H}\Psi(r, \phi, z) = E\Psi(r, \phi, z)$ в следующей форме:

$$\Psi_{\alpha+1,\beta} \left(1 + \frac{\Delta}{r_\alpha}\right) - \Psi_{\alpha,\beta} \left(4 + \frac{l^2}{r_\alpha^2} + \frac{\Delta}{r_\alpha} + \Delta^2 f_{\alpha,\beta}\right) + \Psi_{\alpha-1,\beta} + \Psi_{\alpha,\beta-1} + \Psi_{\alpha,\beta+1} = 0 \quad (32)$$

со следующими граничными условиями:

$$\Psi_{\alpha,0} = \Psi_{\alpha,N} = 0, \quad \Psi_{L,\beta} = 0. \quad (33)$$

Здесь Δ - шаг, $\alpha = 0 \dots L$ - сетка для r , $\beta = 0 \dots N$ - сетка для z , $f_{\alpha,\beta} = \frac{2\mu}{\hbar^2}(U(r_\alpha, z_\beta) - E)$.

Решение системы уравнений (32),(33) построим методом релаксаций [122]. В качестве нулевого решения выберем волновые функции двумерного экситона, промодулированные в z -направлении так, что $\Psi(r, z = \pm l_0/2) = 0$. Например, для двух первых возбужденных состояний с квантовыми числами $n = 2, m = 0$ и $n = 2, m = 1$ они имеют вид:

$$\begin{aligned} n = 2, \quad m = 0 : \quad {}^0\Psi(r, z) &= \frac{\sqrt{2}}{a_B \sqrt{\pi l_0}} \cos\left(\frac{3\pi z}{l_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_B}\right) \left(1 - \frac{r}{2a_B}\right), \\ n = 2, \quad m = 1 : \quad {}^0\Psi(r, z) &= \frac{\sqrt{2}}{a_B \sqrt{3\pi l_0}} \sin\left(\frac{2\pi z}{l_0}\right) \exp\left(-\frac{r}{2a_B}\right) \left(\frac{r}{2a_B}\right), \end{aligned} \quad (34)$$

где $a_B = \frac{\hbar^2 \epsilon}{2\mu e^2}$ - боровский радиус двумерного экситона. Эффективный двумерный потенциал найдем по аналогии с выражением (11), в адиабатическом приближении:

$$U_{\text{eff}}(r) = \int dz U(r, z) |\Psi(r, z)|^2, \quad (35)$$

тогда влияние экранирования квазидвумерным электронным газом учтем, решив интегральное уравнение относительно $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r)$ (аналогично (14))

$$U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) = \int J_0(qr) \frac{U_{\text{eff}}(q)}{\epsilon(q)} q dq, \quad (36)$$

где $\epsilon(q)$ - статическая диэлектрическая функция в приближении хаотических фаз (см. формулу (23)).

Выражение для экранированного эффективного потенциала взаимодействия между электронами и кулоновским центром можно представить аналогично (35):

$$U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) = \int dz U^{\text{scr}}(r, z) |\Psi(r, z)|^2, \quad (37)$$

что эквивалентно

$$U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) = \sum_{\beta} w(z_{\beta}) U^{\text{scr}}(r, z_{\beta}) |\Psi(r, z_{\beta})|^2. \quad (38)$$

Выделяя в (38) член для z_k из суммы и полагая, что оставшиеся слагаемые посчитаны на предыдущем шаге самосогласованного расчета экранированного потенциала взаимодействия, получаем численную схему для расчета трехмерного экранированного потенциала⁶:

$$U^{\text{scr},u}(r, z_k) = \left\{ U_{\text{eff}}^{\text{scr},u}(r) - \sum_{\beta \neq k} w(z_{\beta}) U^{\text{scr},u-1}(r, z_{\beta}) |^{u-1} \Psi(r, z_{\beta})|^2 \right\} \times \\ \times \left\{ w(z_k) |^{u-1} \Psi(r, z_k)|^2 \right\}^{-1}. \quad (39)$$

На основе уравнений (32)–(34) и (39) найдем энергию связи как функцию концентрации квазидвумерного электронного газа N_s для первых двух возбужденных состояний ($n = 2, m = 0$ и $n = 2, m = 1$). Полученные результаты представлены на Рис. 5. Также на этом рисунке представлены зависимости энергии связи основного состояния, полученные численной диагонализацией (кривая 1) и вариационным методом (кривая 4) (см. §2.2).

⁶Следует заметить, что $U^{\text{scr},0}(r, z_{\beta})$ – это неэкранированный потенциал $U(r, z_{\beta})$.

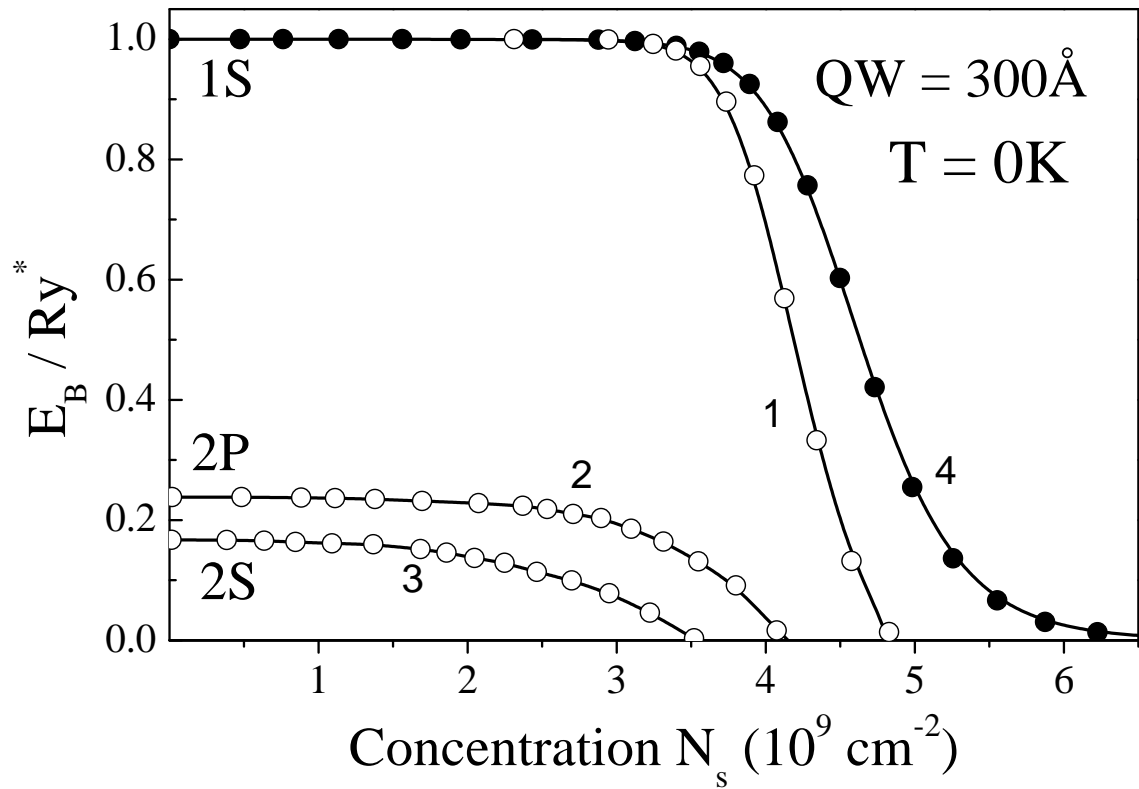


Рис. 5: Зависимость энергии основного 1S и возбужденных 2S и 2P состояний (кривые 1,2 и 3, соответственно) экситонов от концентрации электронов, рассчитанные методом релаксации. Кривая 4 отвечает расчету основного состояния экситона вариационным методом Ритца.

Сразу следует отметить то, что метод, использованный для расчета возбужденных состояний, позволяет находить более точный вид волновых функций. Именно с этим связано уменьшение критической концентрации до $r_s \approx 9$. Кроме того в данной численной схеме экранированный потенциал взаимодействия электрона и кулоновского центра $U^{\text{scr}}(r, z)$ является трехмерным, а не двумерным, как в вариационных расчетах, поэтому связанное состояние существует не всегда, и начиная с концентрации $N_s = 4.75 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$, энергия связи основного состояния становится отрицательной.

Основным результатом данных расчетов является демонстрация коллапса возбужденных состояний $2s$ и $2p$. Видно, что при соответствующих плотностях 2ДЭГ E_B^{2s} и E_B^{2p} уменьшаются пороговым образом. Однако эти изменения не такие резкие как для основного состояния. Это связано с тем, что чем больше квантовое число n , тем больше характерный размер состояния. Следовательно, возбужденные состояния более двумерны, а экранирование двумерного потенциала менее эффективно, чем трехмерного [31]. При дальнейшем увеличении N_s энергии связи становятся отрицательными, что означает уход связанных состояний в непрерывный спектр.

Оказалось, что в этой системе энергия связи $2s$ -состояние меньше, чем $2p$. Это можно объяснить, если вспомнить, что характерный размер трехмерного состояния с квантовыми числами $n = 2, m = 0$ больше, чем размер состояния $n = 2, m = 1$. Таким образом, в квантовой яме с $l_0 = 300 \text{ \AA}$ состояние $2s$ уже начинает чувствовать стенки и волновая функция в z -направлении "поджимается", увеличивается кинетическая

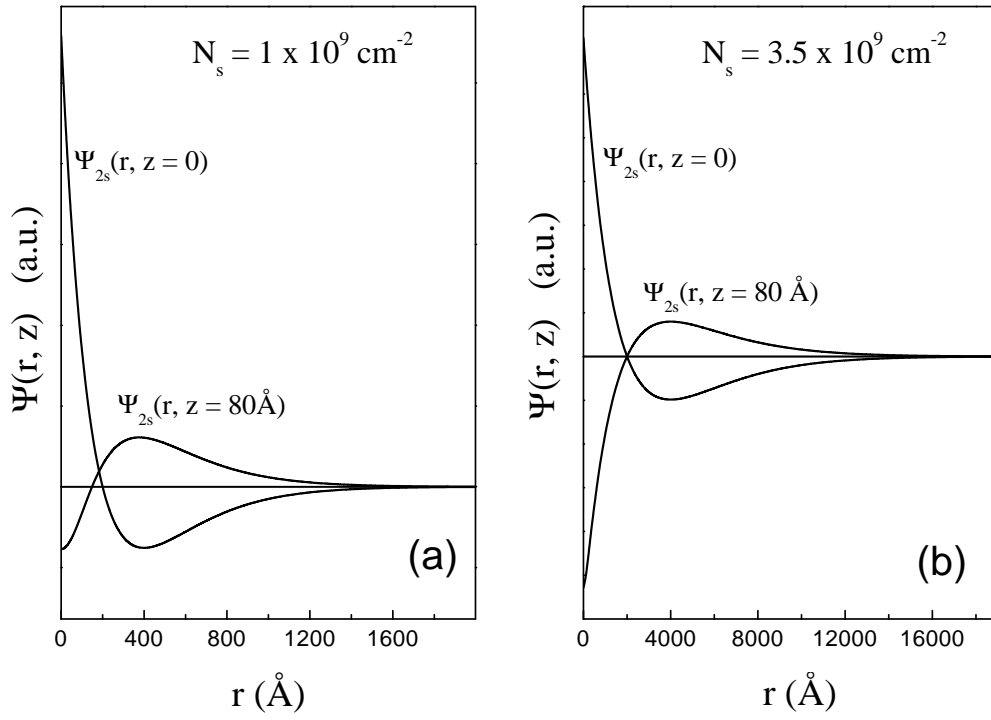


Рис. 6: Срезы волновых функций экситонного $2s$ -состояния для фиксированных $z = 0 \text{ Å}$ и $z = 80 \text{ Å}$ при различных значениях концентраций 2ДЭГ.

энергия и, как следствие, уменьшается энергия связи. В этих условиях $2p$ остается почти трехмерным.

Для исследования эффекта перестройки возбужденных состояний, который наблюдается в окрестности нулевых значений энергий связи, были построены срезы волновых функций $2s$ -состояния вдоль z -плоскости при различных значениях концентраций 2ДЭГ. Продемонстрировано, что при $N_s = 1 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ (Рис. 6а) характерный размер этого состояния $\xi \sim 200 \text{ Å}$, а при $N_s = 3.5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ (Рис. 6b) $\xi \sim 2000 \text{ Å}$. Таким образом, мы видим типичный "**кроссовер**" $3D \rightarrow 2D$, который и объясняет наблюдаемые изменения энергетического спектра экситона.

§2.6 Температурная зависимость пороговой концентрации 2ДЭГ.

В этом параграфе проведено теоретическое исследование температурной зависимости пороговой концентрации 2ДЭГ, при которой происходит перестройка экситона. Как в §2.1, §2.2 и §2.5 будем работать в приближении невзаимодействующих электронов. Для расчета эффекта экранирования при температуре, отличной от нуля, нами была использована зависящая от температуры диэлектрическая функция. В пределе высоких температур ($k_B T \sim E_{\text{Fermi}}$) она имеет аналитическое выражение [40]:

$$\epsilon^{\text{RPA}}(q) = 1 + U_{\text{eff}}(q)q_s(q), \quad (40)$$

$$q_s(q) = \frac{N_s}{k_B T} g_1(q\lambda). \quad (41)$$

Здесь

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{m_e k_B T}}, \quad g_1(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{x} \Phi\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\right), \quad \Phi(y) = \pi^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-z^2}}{y-z}.$$

При низких температурах диэлектрическая функция может быть получена численно.

Отметим, что для *классического газа* формула, описывающая величину изменения локальной концентрации электронов $\delta n(q)$ (см. формулу (15)) может быть записана в следующем виде (см. например, [123]):

$$\delta n(q) \approx N_s e^{(-U_{\text{eff}}(q)/k_B T)} - N_s \approx -\frac{N_s}{k_B T} U_{\text{eff}}(q). \quad (42)$$

Отсюда получается формула вида (40), но теперь

$$q_s^{\text{classic}}(q) = \frac{N_s}{k_B T}. \quad (43)$$

Таким образом, если электронная система имеет температуру порядка фермиевской, то квантовая формула (41) для параметра экранирования $q_s(q)$ переходит в классическую формулу Дебая-Хьюккеля (43).

Теперь, используя в самосогласованных вариационных расчетах зависящую от температуры диэлектрическую функцию (40), получим для квантовой ямы шириной $l_0 = 300\text{\AA}$ зависимость критической концентрации 2ДЭГ (N_s^c) как функции температуры. Данные зависимости представлены на Рис.7. При увеличении температуры происходит “размытие” фермиевской ступеньки и, как следствие, уменьшение концентрации электронов с малыми q . Это приводит к существенному уменьшению параметра экранирования $q_s(q)$ при значениях импульса $q \leq 2k_F$ (см. Рис. 8). Так как экранировка, в основном, осуществляется электронами с $q \leq 2k_F$, очевидно, что эффект экранирования 2ДЭГ ослабевает и значение пороговой концентрации возрастает, что и продемонстрировано на Рисунке 6. С другой стороны, при температурах выше 15K , когда 2ДЭГ можно считать классическим, мы получаем полное согласие между расчетами, основанными на квантовой линхардовской (сплошная линия на Рис.7) и классической дебай-хьюккелевской (пунктирная линия на Рис.7) диэлектрических функциях.

Другой важный вопрос, который возникает при температуре отличной от нуля, это расчет фазовой диаграммы диссоциации экситонного состояния. Энергия диссоциации по определению есть энергия связи экситона (см. [124]). Аналогично работе [125], получим условие фазового перехода

$$T = E_B(T, N_s) / \ln \left[\frac{m_e T}{\pi \hbar^2 N_s} \right], \quad (44)$$

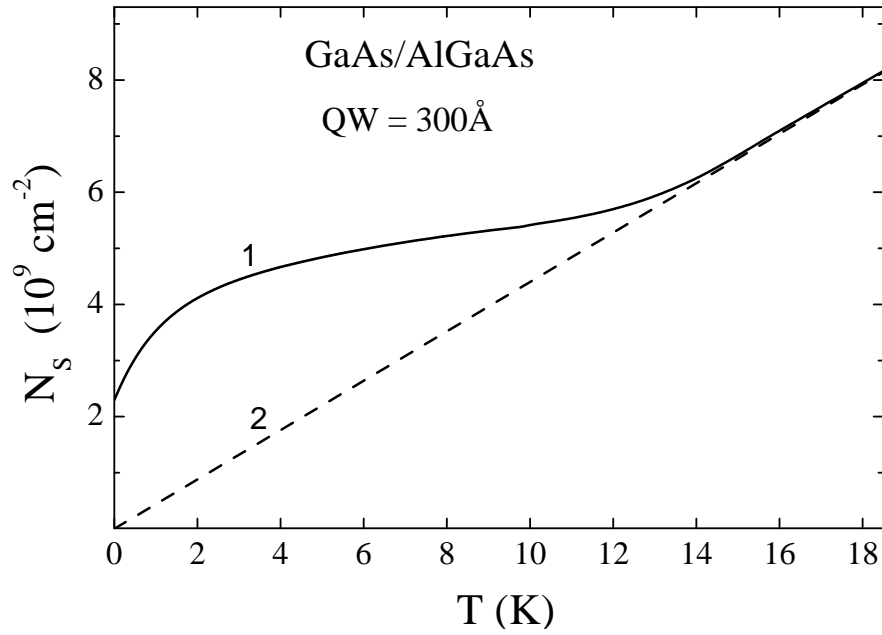


Рис. 7: Температурная зависимость пороговой концентрации 2ДЭГ (N_s) для КЯ GaAs/AlGaAs шириной 300Å: (1) - приближение хаотических фаз, (2) - приближение Дебая-Хьюккеля (классический предел).

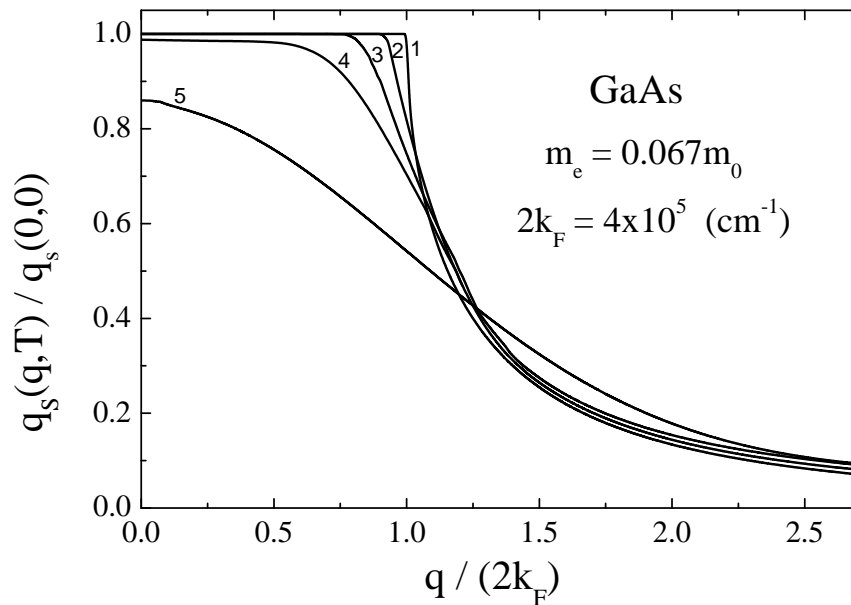


Рис. 8: Зависимость от волнового вектора q (в единицах $2k_F$) отношения эффективного параметра экранирования $q_s(q, T)$ к его величине $q_s(0, 0)$ при $T = 0K$ при различных температурах: (1) 0 K, (2) 0.1 K, (3) 0.5 K, (4) 1 K и (5) 2.5 K.

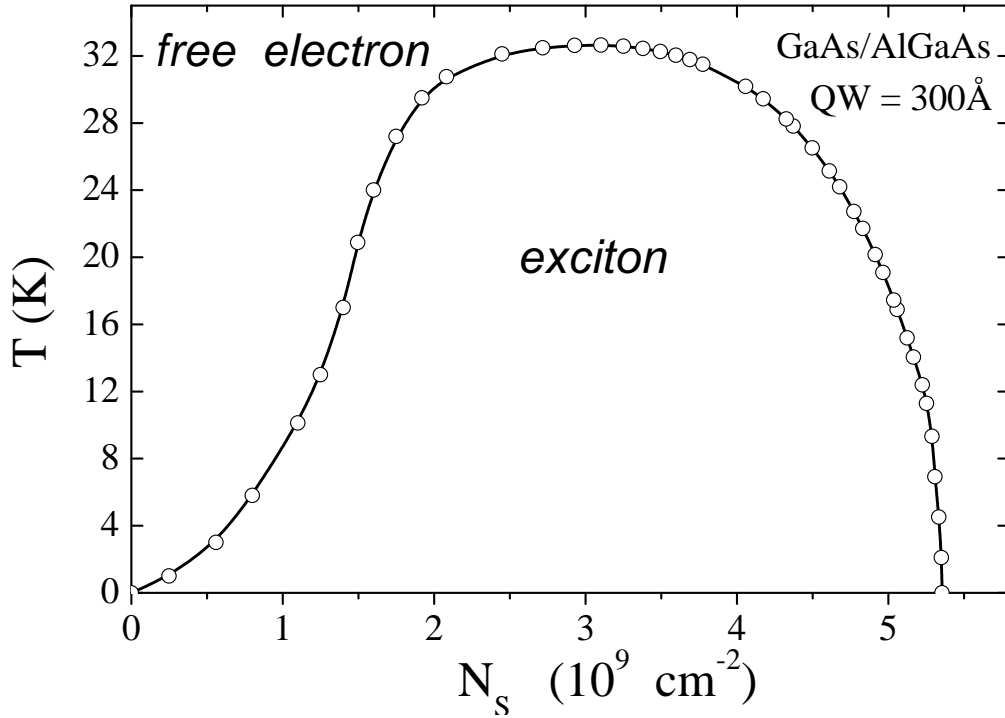


Рис. 9: Фазовая диаграмма экситонного состояния в КЯ GaAs/AlGaAs шириной 300Å.

где $\ln \left[\frac{m_e T}{\pi \hbar^2 N_s} \right]$ - фактор, описывающий эффект ионизации данного экситона⁷. Результат расчета фазовой диаграммы для КЯ шириной 300Å, представлен на Рис. 9. Видно, что эффект экранирования, приводящий к уменьшению энергии связи, а следовательно к диссоциации экситонного состояния, мы можем наблюдать при $N_s > 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-2}$. При меньших концентрациях доминирующим становится эффект ионизации.

Таким образом, найденная выше температурная зависимость коллапса экситона (Рис. 7) наблюдается в области параметров системы, при которых еще не происходит фазового перехода. В связи с этим она мо-

⁷При большой концентрации электронов эффектом ионизации можно пренебречь и, следовательно, $\ln \left[\frac{m_e T}{\pi \hbar^2 N_s} \right] \simeq 1$. Наоборот, при $N_s \rightarrow 0$ получаем, что $\ln \left[\frac{m_e T}{\pi \hbar^2 N_s} \right] \rightarrow \infty$ и эффект ионизации становится доминирующим в системе.

жет быть исследована экспериментально.

Подводя итоги, можно резюмировать, что в данной главе рассчитаны изменения энергии связи и силы осциллятора экситонного состояния, возникающие в результате экранирования квазидвумерным электронным газом в КЯ GaAs/ AlGaAs шириной $50\text{\AA} - 300\text{\AA}$. Показано, что учет нелинейного отклика приводит к более сильному экранированию кулоновского взаимодействия по сравнению с линейным приближением и, как следствие, смещает пороговую концентрацию, при которой наступает перестройка экситонных состояний в область меньших плотностей 2ДЭГ и, соответственно, больших r_s (для ямы шириной 300\AA $r_s = 8.3$). Это значительно превышает значения, рассчитанные в рамках диэлектрического экранирования (переход Мотта) или в рамках линейного экранирования квазидвумерным электронным газом. При уменьшении ширины КЯ пороговая концентрация электронов, при которой возникает переход, смещается в область более низких значений безразмерного параметра r_s .

Показано, что учет корреляционных эффектов в рамках приближения локального поля делает систему более жесткой и менее способной к экранированию внесенного заряда. Следствием этого является увеличение пороговой концентрации 2ДЭГ.

Предложена альтернативная процедура расчета энергии основного состояния, а также возбужденных уровней, что помогло более полно исследовать данную систему и продемонстрировать коллапс возбужденных состояний $2s$ и $2p$. В результате показано, что при соответствующих плотностях 2ДЭГ энергии связи этих состояний уменьшаются пороговым образом.

Также исследована температурная зависимость критического параметра r_s^c . При увеличении T эффективность экранировки снижается и критический параметр r_s^c уменьшается. Это является следствием уменьшения плотности электронов с малыми q , которые и вносят основной вклад в данный эффект. Также продемонстрирован переход системы от чисто квантовой к классической при увеличении температуры. Построена фазовая диаграмма экситонного состояния и показана область, в которой имеется возможность экспериментального наблюдения температурной зависимости коллапса экситона.

ГЛАВА III.

Экранирование и перестройка связанных состояний в двухслойных системах. Эффекты увлечения.

В этой главе рассматривается система двойных квантовых ям, в которых два взаимодействующих электрон-электронных или электрон-дырочных слоя разделены барьером шириной D . Как говорилось в Главе I, в такой системе возможно образование как нейтральных связанных состояний (прямых и непрямых экситонов), так и заряженных многочастичных комплексов (например, трионов). Важной особенностью рассматриваемой “двухкомпонентной” системы являются эффекты экранирования экситонов или заряженных многочастичных комплексов электронами и(или) дырками, приводящие к уменьшению их энергии связи и увеличению радиуса, а как следствие, коллапсу состояния. Для анализа такого рода эффектов в данной главе проводится теоретическое исследование поведения связанных состояний при возрастании плотности электронов. Помимо этого, в двухслойных системах возможны эффекты увлечения (см. Главу I). По этой причине в последних двух параграфах данной главы решается задача о коэффициенте взаимной подвижности пространственно разделенных экситонов и электронов. Результаты этой главы опубликованы в [126]–[129].

§3.1 Перестройка прямого экситона в системе пространственно разделенных экситонов и электронов.

Пусть имеются две КЯ одинаковой ширины l_0 с бесконечно высокими стенками, расположенные на расстоянии D друг от друга. В одной из них находятся экситоны с концентрацией N_{exc} , а в другой – электронный газ с концентрацией N_s . Туннелированием между КЯ пренебрегаем. Эффект экранирования электронным газом будем учитывать в приближении хаотических фаз (RPA). Рассмотрим случай, когда $N_{exc} \ll N_s$, тогда мы можем сформулировать задачу об экранировании одиночного экситона. Для исследования данного эффекта вычислим энергию связи экситона как функцию N_s при различных расстояниях между КЯ. Для этого применим вариационный метод самосогласованного расчета энергии основного состояния экситона в КЯ.

В КЯ на основе GaAs/AlGaAs в области малых импульсов (именно такие импульсы будут давать основной вклад в исследуемые эффекты) расщепление уровней энергии легкой и тяжелой дырок достаточно большое, поэтому можем ограничиться рассмотрением связанного состояния только на тяжелой дырке; при этом дисперсия тяжелой дырки в интересующей нас области малых импульсов квадратична. Связанные состояния электрона на легких дырках лежат существенно выше по энергии, при этом их энергия связи существенно меньше, поэтому в данной главе они нас интересовать не будут. Рассмотрим экситон, созданный в первой КЯ. После отделения координат центра тяжести, характеризующих движение вдоль плоскости квантовых ям, гамильтониан приобретает вид

(аналогично §2.1):

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + U(r, z_e, z_h), \quad (45)$$

где

$$U(r, z_e, z_h) = -\frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r^2 + (z_e - z_h)^2}} + u(z_e, z_h). \quad (46)$$

$\mu = \frac{m_e m_h}{(m_e + m_h)}$ – приведенная масса экситона, $u(z_e, z_h) = u(z_e) + u(z_h)$, $u(z_i)$

– удерживающий потенциал в квантовой яме:

$$\begin{cases} u(z_i) = 0, & \text{if } z_i \leq |l_0/2|, \\ u(z_i) = \infty, & \text{if } z_i > |l_0/2|. \end{cases}$$

Здесь r – координата относительного движения вдоль плоскости квантовых ям, $z_{e(h)}$ – координаты движения по направлению роста КЯ электрона и дырки, соответственно.

Энергию основного состояния, как и в одиночной квантовой яме, будем искать вариационным методом с пробной волновой функцией

$$\Psi(r, z_e, z_h) = N \cos\left(\frac{\pi z_e}{l_0}\right) \cos\left(\frac{\pi z_h}{l_0}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + \gamma^2 \cdot (z_e - z_h)^2}}{r_0}\right). \quad (47)$$

В данной задаче снова применимо адиабатическое приближение, поэтому, усредняя потенциал взаимодействия по направлению роста, получим эффективный потенциал:

$$U_{\text{eff}}(r) = \int |\Psi(r, z_e, z_h)|^2 U(r, z_e, z_h) dz_e dz_h. \quad (48)$$

Фурье-образ этого потенциала:

$$U_{\text{eff}}(q) = \int \int e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_{\text{eff}}(r) d\mathbf{r} = 2\pi \int J_0(qr) U_{\text{eff}}(r) r dr, \quad (49)$$

где $J_0(x)$ – функции Бесселя первого рода.

Выражение для экранированного пространственно отделенными 2Д-электронами эффективного потенциала взаимодействия между электроном и дыркой в одном и том же слое в импульсном представлении имеет вид:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(q) &= U_{\text{eff}}(q) + U_{12}(q) \left(\Pi + \Pi U_{22}(q) \Pi + \dots \right) U_{12}(q) = \\ &= U_{\text{eff}}(q) + \frac{U_{12}(q) \Pi U_{12}(q)}{[1 - U_{22}(q) \Pi]}, \end{aligned} \quad (50)$$

где $U_{22}(q)$ – фурье-образ⁸ от потенциала электрон-электронного взаимодействия во втором слое

$$U_{22}(r) = \langle \phi_e(z + D) | e^2 / \sqrt{r^2 + (z + D)^2} | \phi_e(z + D) \rangle,$$

$U_{12}(q)$ – фурье-образ от потенциала межслоевого электрон-дырочного взаимодействия

$$U_{12}(r) = \langle \phi_h(z) | -e^2 / \sqrt{r^2 + (z + D)^2} | \phi_e(z + D) \rangle,$$

а $\Pi = -\frac{m_e}{\pi \hbar^2} [1 - \Theta(q - 2k_F) \sqrt{1 - (2k_F)^2/q^2}]$ – поляризационный оператор в РРА при $T = 0$ [30, 130]. Причем $\phi_e(z) = \phi_h(z) = \sqrt{\frac{2}{l_0}} \cos(\frac{\pi z}{l_0})$ – волновые функции свободных электрона и дырки в z -направлении. Второй член в формуле (50) описывает изменение эффективного взаимодействия $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(q)$ за счет статического линхардовского экранирования электронным газом, находящимся во второй КЯ. Следует отметить, что при увеличении расстояния между КЯ потенциал $U_{12}(q)$ стремится к нулю и $U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(q) \rightarrow U_{\text{eff}}(q)$.

Энергия основного состояния квазидвумерного экситона есть минимум функционала:

$$F = \langle \Psi(r, z_e, z_h) | -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta | \Psi(r, z_e, z_h) \rangle + \langle U_{\text{eff}}^{\text{scr}}(r) \rangle \quad (51)$$

⁸ $f(q) = 2\pi \int J_0(qr) f(r) r dr$, аналогично выражению (49).

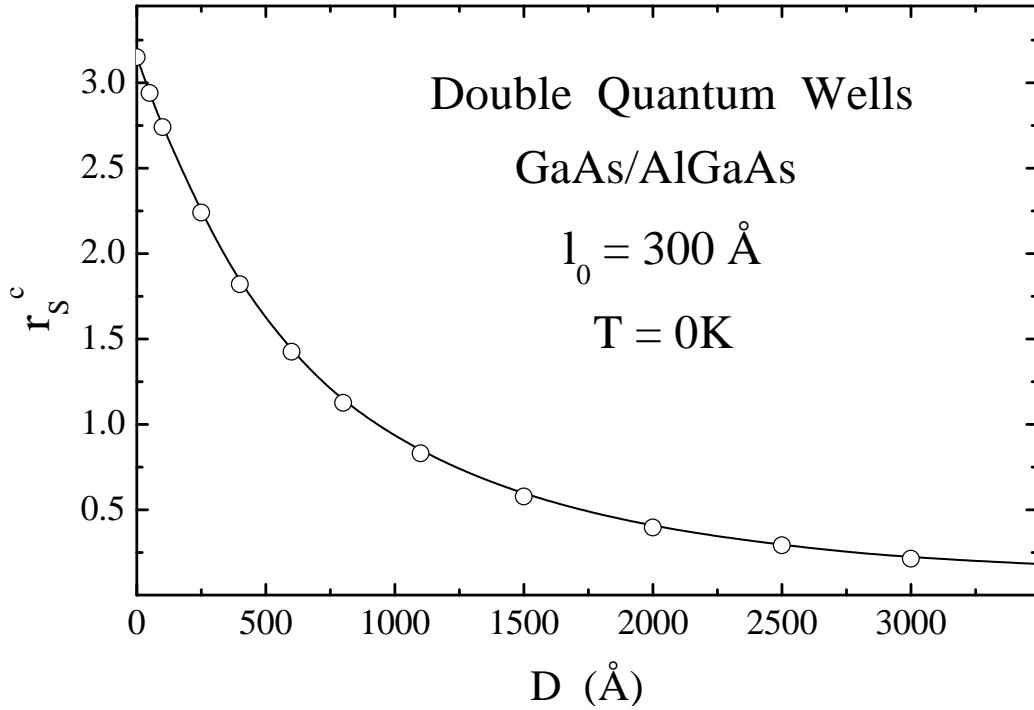


Рис. 10: Зависимость критического параметра r_s^c , при котором происходит “коллапс” экситонного состояния в КЯ, от расстояния D между квантовыми ямами.

по вариационным параметрам r_0 и γ .

Дальнейшие вычисления энергии основного состояния, а затем и энергии связи экситона проводились численно. В результате для $l_0 = 300\text{\AA}$ был найден критический параметр r_s^c (при котором энергия связи падает в e раз) для различных расстояний между КЯ. Данная зависимость представлена на Рис. 10. Видно, что при $D \rightarrow 0$, когда 2ДЭГ находится максимально близко к экситону, значение пороговой концентрации составляет около $2 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$, что значительно больше величины, полученной для одиночной КЯ (см. §2.2). Существенная разница в пороговых концентрациях связана с тем, что в случае одиночной КЯ задача должна решаться с учетом нелинейного отклика системы, а в случае двойной КЯ – линейного. Поясним это.

В случае одиночной КЯ взаимодействие между экранирующим 2ДЭГ и “дыркой”, и взаимодействие между электроном, который образует экситон, и “дыркой” – идентичны. В таких условиях необходимо решать интегральное уравнение относительно экранированного эффективного потенциала. В случае пространственно разделенных экситона и электронного газа изменение во взаимодействии между “дыркой” и электроном, связанным на ней, не приводит к изменению потенциала взаимодействия между экранирующим 2ДЭГ в одной КЯ и “дыркой” в другой⁹. Следовательно, в этом случае мы получаем линейную задачу, которая при $D \rightarrow 0$ аналогична рассмотренной в работе [16].

С ростом расстояния между КЯ, как мы уже указывали выше, эффект экранирования ослабевает и при $D \rightarrow \infty$, как и следовало ожидать, исчезает.

Отдельно следует рассмотреть вопрос, связанный с конечностью барьера КЯ. В реальных структурах GaAs/AlGaAs высота барьера составляет примерно 360 meV. Эта величина превышает энергию связи экситона на несколько порядков, поэтому этот эффект важен для очень узких квантовых ям, когда размер экситона¹⁰ много больше ширины КЯ. В этом случае экситон большую часть времени может находиться вне КЯ (см., например [131]). При этом эффекты экранирования и перестройка связанного состояния должны быть исследованы с учетом проникновения волновой функции под барьер. В случае $l_0 \geq 200\text{\AA}$ влияние барьера на волновую функцию экситона незначительно и учет конечной высоты

⁹Напомним, что мы не учитываем туннелирование в системе.

¹⁰Боровский радиус экситона имеет порядок 100Å

барьера приводит к поправкам в энергии менее, чем 5%. Это подтверждает, что рассмотренная нами модель является хорошим приближением для исследований такого рода.

§3.2 Эффекты экранирования межслоевых экситонов.

Теперь перейдем к решению задачи о пространственно непрямом экситоне. Пусть имеются два слоя¹¹, расположенные на расстоянии D друг от друга. В одном находится дырочный газ, а в другом – электронный. Туннелированием между слоями снова пренебрегаем и рассматриваем случай, когда $N_h \ll N_s$ и $N_h a_B^2 \ll 1$. Для таких условий может быть сформулирована задача об экранировании одиночного пространственно-непрямого экситона (ПНЭ). Эффект экранирования электронным газом будем учитывать, как и раньше, в РРА. Тогда экранированный потенциал взаимодействия в импульсном представлении может быть записан в следующем виде (см., например [130]):

$$U^{\text{scr}}(q) = \frac{U_{12}(q)}{1 - U_{22}(q) \Pi}, \quad (52)$$

где $U_{12}(q) = \frac{-2\pi e^2}{\epsilon q} e^{-qD}$, $U_{22}(q) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q}$. Гамильтониан ПНЭ имеет вид:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta + U^{\text{scr}}(r), \quad (53)$$

где $U^{\text{scr}}(r)$ – фурье-образ от $U^{\text{scr}}(q)$ (см. сноску 8 на стр. 45). Энергию основного состояния ПНЭ найдем минимизируя функционал энергии на

¹¹Для упрощения численного расчета мы будем в этом параграфе рассматривать чисто двумерный случай, поскольку для рассматриваемого эффекта наличие малой толщины слоя не принципиально.

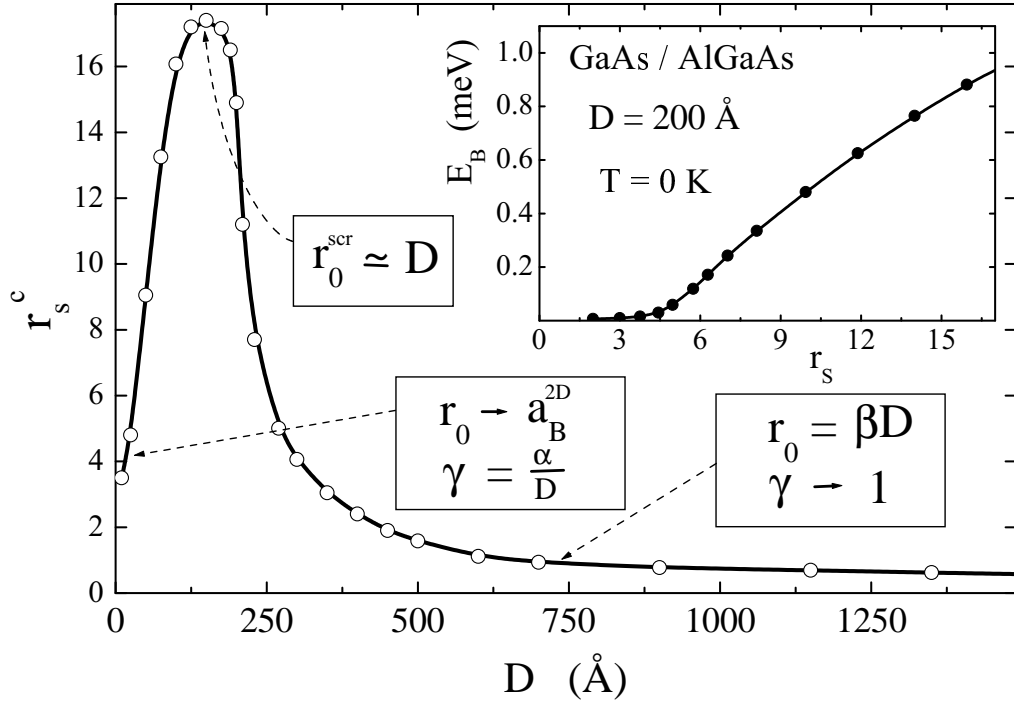


Рис. 11: Зависимость критического параметра r_s^c от расстояния D между слоями. На вставке показана энергии связи пространственно непрямого экситона E_B в двухслойной системе как функция r_s в приближении хаотических фаз.

волновой функции

$$\Psi_{\text{ind}}(r) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{r^2 + \gamma^2 D^2}}{r_0}\right) \quad (54)$$

по параметрам r_0 и γ .

На вставке к Рис.11 представлена энергии связи ПНЭ, рассчитанная для $D = 200\text{Å}$ как функция безразмерного параметра r_s . Из рисунка видно, что происходит перестройка связанного состояния, аналогичная той, которая имела место в одиночной КЯ. Однако стоит отметить, что в данном случае перестройка более плавная. Это связано с чисто двумерной природой потенциала взаимодействия, как и существование связанного состояния при любых концентрациях 2ДЭГ.

С другой стороны, как уже говорилось в Главе I, многочисленные экс-

периментальные работы выполнены на структурах с различными межслоевыми расстояниями. В связи с этим представляет интерес исследование поведения связанного состояния в зависимости от расстояния D . На Рис.11 представлена зависимость критического параметра r_s^c от расстояния между пространственно разделенными электронами и дырками. Наблюдается неожиданное и очень любопытное поведение кривой зависимости $r_s^c(D)$, которое связано с изменением волновой функции ПНЭ даже в неэкранированном случае. Так, например, выражения для вариационных параметров в области малых D ($D < r_0$) при $N_s \rightarrow 0$ имеют вид $r_0 \rightarrow a_B^{2D} = (\hbar^2 \epsilon) / (2\mu e^2)$, а $\gamma = \text{const}/D$ (см. Рис.11). В отсутствие экранирования величина энергии связи ПНЭ при $D \rightarrow 0$ стремится к значению энергии связи двумерного прямого экситона (ДПЭ). Тем не менее, наличие растущего параметра γ указывает на различие в поведении ПНЭ и ДПЭ, что и приводит к существенным различиям в эффективности экранирования данных связанных состояний. В области же больших D поведение вариационных параметров носит следующий характер: $r_0 = \text{const} \cdot D$, $\gamma \rightarrow 1$ (см. Рис.11), а максимум зависимости $r_s^c = r_s^c(D)$ приходится на случай $r_0^{\text{scr}} \simeq D$, где и происходит переход из одной области в другую¹².

Другой вопрос, который был подробно рассмотрен в рамках этой задачи, – это вопрос о влиянии конечной толщины слоев в z -направлении. Расчеты с использованием численного метода релаксаций (см., например, §2.5) показывают, что такое усложнение задачи приводит лишь к “пере-

¹²Здесь r_0^{scr} – радиус экранированного ПНЭ при концентрации 2ДЭГ, которая соответствует критическому параметру r_s^c при данном D .

нормировке” расстояния между пространственно разделенными электронами и дырками: $D_{\text{eff}} = D + \langle z_e \rangle / 2 + \langle z_h \rangle / 2$ и не дает никаких новых физических эффектов. Однако, этот результат важен с точки зрения сравнительной оценки экспериментальных данных относительно энергии связи ПНЭ, а также эффективности непрямого кулоновского взаимодействия.

§3.3 Заряженные многочастичные комплексы: свойства непрямого триона.

Используя формализм, примененный для описания пространственно прямого триона (см. Главу I), а также методы учета поляризационного электрон – экситонного взаимодействия на больших расстояниях, мы исследуем образование пространственно непрямого триона. Рассмотрим систему, состоящую из двух слоев, в z -направлении находящихся на расстоянии D друг от друга. В одном слое находится двумерный экситон с характерным размером $a_B = \epsilon \hbar^2 / 2\mu e^2$, а в другом электронный газ. Снова пренебрегая туннелированием, исследуем поведение данной системы пространственно-разделенных электрона и экситона как для случая малого межслойного расстояния ($D \ll a_B$), так и для большого D ($D \gg a_B$). Рассчитаем энергию связи триона как функцию D , а также рассмотрим исчезновение связанного состояния в результате экранирования двумерным электронным газом.

Вначале нас будет интересовать случай большого межслойного расстояния (верхняя вставка к Рис.12(а)), т.е. $D \gg a_B$. Гамильтониан такой системы в адиабатическом приближении, когда энергия связи прямого

экситона много больше энергии взаимодействия этого экситона и электрона из другого слоя, может быть записан в следующем виде:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m_e}\Delta - \frac{\hbar^2}{2M_{exc}}\Delta + U(r_1, r_2, D) + E(X), \quad (55)$$

где $E(X)$ – энергия относительного движения экситона,

$$U(r_1, r_2, D) = -\frac{\gamma}{((r_1 - r_2)^2 + D^2)^2} \quad (56)$$

– это поляризационное взаимодействие изолированного электрона и экситона, если радиус экситона много меньше расстояния D между слоями, $\gamma = \frac{\alpha e^2}{2\epsilon}$, α – поляризуемость двумерного экситона в основном состоянии, выражение для которой имеет вид $\alpha = 21a_B^3/16$ (см., например [95]). Следовательно, параметр γ , входящий в выражение для эффективной энергии взаимодействия в электрон-экситонной системе, равен

$$\gamma = \frac{21}{32} \frac{e^2 a_B^3}{\epsilon}. \quad (57)$$

Здесь ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, $M_{exc} = (m_e + m_h)$ – полная масса экситона.

Переходя к координатам относительного движения и центра масс триона, первоначальный гамильтониан запишем так:

$$\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2M_{tr}}\Delta - \frac{\hbar^2}{2\mu_{tr}}\Delta - \frac{\gamma}{(r^2 + D^2)^2} + E(X), \quad (58)$$

где $M_{tr} = M_{exc} + m_e$, $\mu_{tr} = (M_{exc}m_e)/(M_{exc} + m_e)$. Энергию связи триона (X^-) найдем из уравнения Шредингера:

$$\widehat{H}_{rel}\Psi(r, D) = E_B(X^-)\Psi(r, D), \quad (59)$$

где $\widehat{H}_{rel} = -\frac{\hbar^2}{2\mu_{tr}}\Delta - \frac{\gamma}{(r^2+D^2)^2}$ – гамильтониан относительного движения триона.

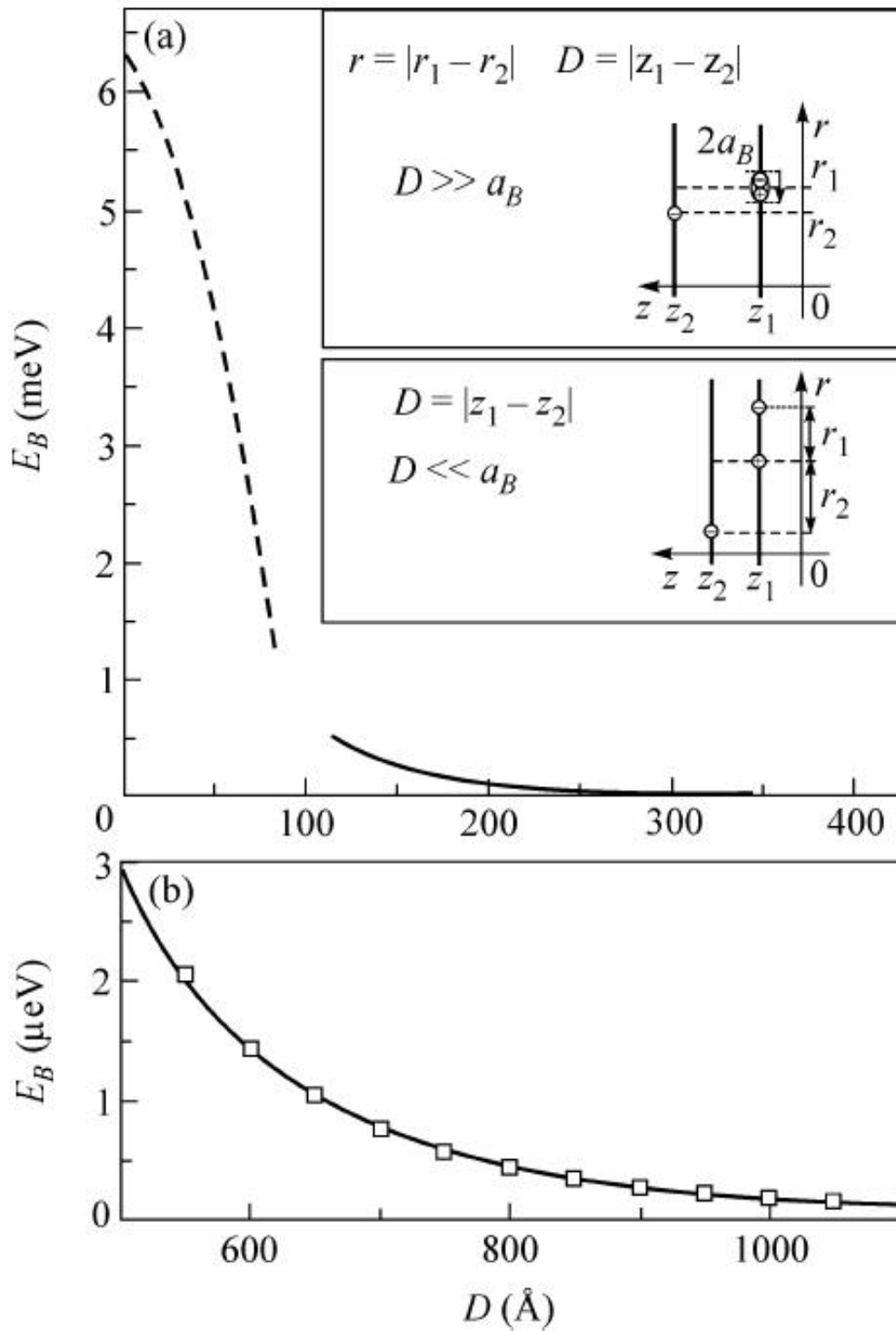


Рис. 12: (а) Зависимость энергии связи непрямого триона E_B от расстояния между слоями. Сплошная кривая получена в приближении $D \gg a_B$, пунктирная – в приближении $D \ll a_B$. На верхней и нижней вставках схематически показана система для $D \gg a_B$ и $D \ll a_B$, соответственно. (б) Зависимость энергии связи триона для случая больших D [$E_B \propto \gamma/D^4$], найденная численным способом (сплошная линия) и аналитически по формуле (61) (светлые квадраты).

Сначала исследуем асимптотическое поведение решения при больших D ($D \rightarrow \infty$). Для этого экситон-электронное взаимодействие разложим следующим образом:

$$U(r, D) = -\frac{\gamma}{[r^2 + D^2]^2} \cong -\frac{\gamma}{D^4} + \frac{2\gamma r^2}{D^6}. \quad (60)$$

После этого, как легко видеть, задача сводится к осцилляторному решению. Откуда сразу следует

$$E_n = -\frac{\gamma}{D^4} + \hbar\omega(n + 1), \quad (61)$$

где $\omega = \frac{2}{D^2} \sqrt{\frac{\gamma}{\mu D^2}}$. Для полного решения задачи (59) требуется численный расчет, поэтому запишем конечно-разностную схему для этого дифференциального уравнения:

$$\Psi_{i+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta r}{r_i}} \left\{ \Psi_i \left(2 + \frac{\Delta r}{r_i} - (\Delta r)^2 f_i \right) - \Psi_{i-1} \right\}, \quad (62)$$

$$f_i = \frac{2\mu_{tr}\gamma}{\hbar^2 a_B^2 (r_i^2 + d^2)^2} + \frac{2\mu_{tr}a_B^2}{\hbar^2} E_B(X^-), \quad r_i = r_i/a_B, \quad d = D/a_B$$

с начальными и граничными условиями¹³

$$\Psi_0 = 1, \quad \Psi_1 = 1, \quad \Psi_N = 0. \quad (63)$$

Результат численного расчета энергии связи триона как функции межслойного расстояния и асимптотическое поведение энергии связи, полученное по формуле (61) изображены на Рис.12(a,b), соответственно. Видно, что последний результат хорошо согласуется с полученным на основании численного решения уравнения (62) (сплошная линия на Рис.12b) и дает основание говорить об асимптотическом поведении данной зависимости как о $1/D^4$ при $D \rightarrow \infty$. Используя известное соотношение $\langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial \lambda} \rangle =$

¹³Так как $\frac{\partial \Psi}{\partial r} |_{r=0} \cong \frac{\Psi_1 - \Psi_0}{\Delta r} = 0$, то $\Psi_1 = \Psi_0 = 1$.

$\frac{\partial E}{\partial \lambda}$, где λ – параметр, мы можем найти, что $\frac{\partial E_B(X^-)}{\partial D} < 0$, $\frac{\partial^2 E_B(X^-)}{\partial D^2} > 0$ при $D \gg a_B$. Это означает, что энергия связи триона является убывающей вогнутой функцией по D , что и продемонстрировано на Рис.12(a,b).

В многочастичной системе экситонов и электронов голое взаимодействие $U(r, D)$ следует заменить на эффективное $U_{\text{eff}}(r, D)$ (экранированное взаимодействие). Для двухкомпонентной системы взаимодействующих частиц эффективное взаимодействие в импульсном представлении имеет вид:

$$U_{\text{eff}}(q, D) = \frac{U(q, D)}{1 + \Pi_1 V_1 + \Pi_2 V_2 + \Pi_1 \Pi_2 (V_1 V_2 - U(q, D)^2)}. \quad (64)$$

Здесь V_i – энергия взаимодействия между частицами i -сорта, $U(q, D) = -\gamma(\pi q/D)K_1(qD)$ – фурье-образ¹⁴ взаимодействия между электроном и экситоном, Π_i – поляризационный оператор для частиц i -сорта ($i = 1, 2$). В нашем случае $i = 1$ соответствует экситонам, $i = 2$ – электронам. При выполнении условия низкой плотности экситонов, т.е. $N_1 a_B^2 \ll 1$, вклад электронов в эффективное взаимодействие будет преобладающим, что дает основание учесть в (64) только этот вклад:

$$U_{\text{eff}}(q, D) = \frac{U(q, D)}{1 + \Pi_2 V_2}, \quad (65)$$

где Π_2 – поляризационный оператор в RPA (см. §2.2), а $V_2 = \frac{2\pi e^2}{\epsilon q}$. После того как мы нашли выражение для экранированного потенциала, вернемся к уравнению (62). Его решением для экранированного электрон – экситонного взаимодействия (65) является зависимость энергии связи триона от концентрации 2ДЭГ для межслойного расстояния $D = 200 \text{ \AA}$ (Рис.13 (а)). Хорошо видно, как пороговым образом изменяется $E_B(X^-)$,

¹⁴ $K_1(z)$ – функция Макдональда первого рода.

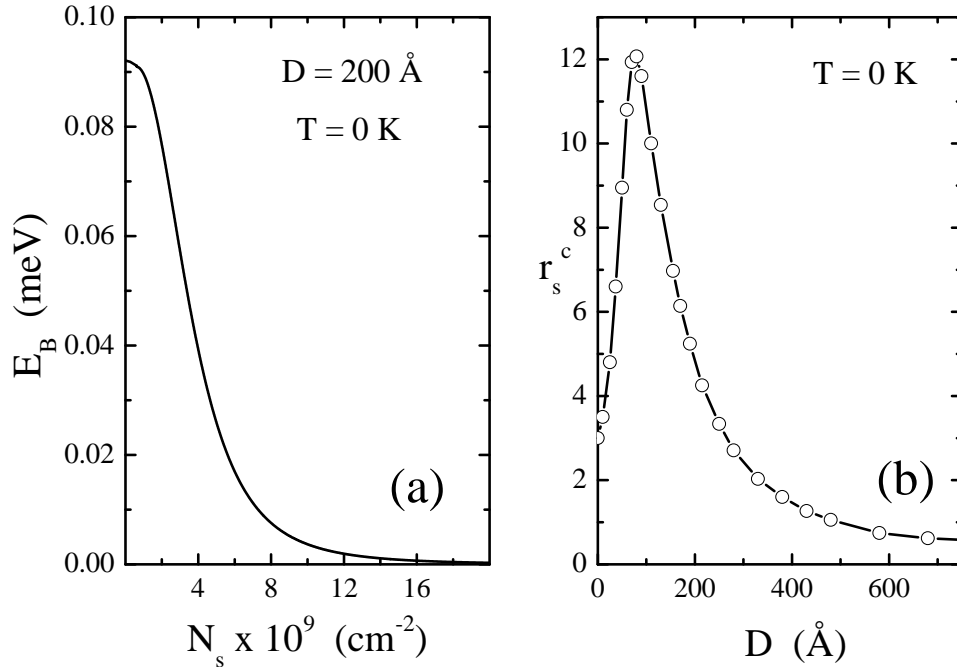


Рис. 13: (а) Энергия связи триона $E_B(X^-)$ как функция концентрации 2ДЭГ для межслоевого расстояния $D = 200\text{Å}$. (б) Зависимость критического параметра r_s^c , при котором связанное состояние пространственно разделенных экситона и электрона (трион X^-) исчезает из спектра, от расстояния D между слоями.

а при значениях концентрации 2ДЭГ $N_s \sim 10^{10}(\text{cm}^{-2})$ связанное состояние пространственно разделенного электрона и экситона отсутствует в спектре¹⁵.

Теперь перейдем к случаю $D \ll a_B$ (см. нижнюю вставку к Рис.12(b)), взаимодействие в системе имеет вид:

$$U(r_1, r_2, \varphi, D) = -\frac{e^2}{\epsilon r_1} - \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_2^2 + D^2}} + \frac{e^2}{\epsilon \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + D^2 - 2r_1 \sqrt{r_2^2 + D^2} \cos(\varphi)}}, \quad (66)$$

¹⁵Заметим, что расчет, произведенный для конкретного D , не ограничивает общности полученного ответа. Так для любого D , удовлетворяющего условию $D \gg a_B$, ответы будут аналогичны представленным, с той лишь разницей, что при увеличении межслойного расстояния увеличивается концентрация 2ДЭГ, при которой происходит разрушение триона, так как уменьшается эффективность экранирования электронным газом данного связанного состояния (см., например [113]).

где первые два члена определяют взаимодействие электронов с дыркой, а последний – электронов между собой. Рассмотрение этой системы произведем, аналогично атому H^- , в приближении Борна-Опенгеймера. Для этого в качестве нулевого приближения выберем гамильтониан двух невзаимодействующих экситонов:

$$\widehat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{r_1} - \frac{e^2}{\epsilon r_1} - \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta_{r_2} - \frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r_2^2 + D^2}}. \quad (67)$$

Решение для прямого экситона – это водородоподобные спектр и волновые функции, поэтому для основного (1S) состояния имеем:

$$\psi_{1S}(r_1) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}a_B}e^{(-r_1/a_B)}, \quad E_{1S} = -\frac{2\mu e^4}{\hbar^2\epsilon^2}. \quad (68)$$

Взаимодействие в непрямом экситоне преобразуем следующим образом, воспользовавшись малым параметром D/a_B :

$$-\frac{e^2}{\epsilon\sqrt{r_2^2 + D^2}} = -\frac{e^2}{\epsilon r_2\sqrt{1 + \left(\frac{D}{r_2}\right)^2}} \cong -\frac{e^2}{\epsilon r_2} \left[1 - \frac{D^2}{2r_2^2}\right] = -\frac{e^2}{\epsilon r_2} + \frac{e^2 D^2}{2\epsilon r_2^3}. \quad (69)$$

Таким образом, мы можем применить теорию возмущения. В нулевом приближении имеем водородоподобный спектр, аналогично (68). Далее для вычисления поправок к 1S-состоянию мы должны выполнить процедуру записи правильных функций нулевого приближения, так как все состояния начиная с $n = 2$ вырождены по полному орбитальному моменту [110]. Правильные функции нулевого приближения ψ_a и ψ_b для возбужденных состояний 2S и 2P, а также соответствующие им энергии E_a и E_b , приведены в Приложении 2. Ограничиваясь поправками только от этих ближайших двух уровней, что в данных условиях является хорошим приближением¹⁶, получим для волновой функции и энергии

¹⁶Такое рассмотрение возможно в связи с тем, что вышележащие состояния входят с весовыми

основного состояния непрямого экситона следующий результат:

$$\tilde{\psi} = \psi_{1S} + \frac{W_{1S,a}}{\Delta E_{1S,a}} \psi_a + \frac{W_{1S,b}}{\Delta E_{1S,b}} \psi_b, \quad (70)$$

$$\tilde{E} = E_{1S} + W_{1S,1S}. \quad (71)$$

Здесь $W_{1S,1S}$ и $W_{1S,a(b)}$ – матричные элементы на волновых функциях основного и первых двух возбужденных состояний (см. Приложение 2), $\Delta E_{1S,a(b)} = E_{a(b)} - E_{1S}$ (см. формулу (68) и Приложение 2).

В результате функция пространственно непрямого триона нулевого приближения, соответствующая энергии $E_{1S} + \tilde{E}$, будет иметь вид:

$$\psi_{tr}^{(0)}(r_1, r_2) = \psi_{1S}(r_1) \tilde{\psi}(r_2). \quad (72)$$

Уровень энергии возмущенной системы определяется в первом порядке теории возмущения, как обычно, по формуле:

$$E(X^-) = E_{1S} + \tilde{E} + \langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle, \quad (73)$$

где

$$\langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle = \frac{2\pi e^2}{\epsilon} \int \frac{|\psi_{1S}(r_1)|^2 |\tilde{\psi}(r_2)|^2 r_1 r_2 dr_1 dr_2 d\varphi}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + D^2 - 2r_1 \sqrt{r_2^2 + D^2} \cos(\varphi)}}.$$

Для энергии связи триона при $D \ll a_B$ получаем следующую формулу:

$$E_B(X^-) = \frac{2\mu e^4}{\hbar^2 \epsilon^2} - W_{1S,1S} - \langle \psi_{tr}^{(0)} | U_{e-e} | \psi_{tr}^{(0)} \rangle,$$

которая дает зависимость, представленную на Рис.12(а) (пунктирная линия). При $D \rightarrow 0$ значение $E_B(X^-)$ стремится к энергии связи двумерного триона [132, 133], а в области $60\text{\AA} \geq D \geq 120\text{\AA}$ для сшивания с коэффициентами, такими что $\frac{W_{1S,a}}{\Delta E_{1S,a}} \gg \frac{W_{1S,n}}{\Delta E_{1S,n}}$ для $n \geq 3$ и поэтому являются поправками более высокого порядка малости.

решением, полученным в приближении $D \gg a_B$, задача требует численного моделирования с исходным потенциалом (66). Этот расчет является достаточно громоздким и не представляет большого интереса в рамках данной работы.

И наконец, рассмотрим экранирование электрон-дырочного и электрон-электронного взаимодействия в многочастичной системе электронов для малых значений межслойного расстояния. Так как в этой области мы рассматривали систему как два слабовзаимодействующих экситона, то перенормировка потенциалов в первую очередь относится к экситонообразующим взаимодействиям. Таким образом, нас интересует экранирование прямого экситона двумерным электронным газом, находящимся в другом слое, а также пространственно непрямого экситона. Обе эти задачи были рассмотрены в предыдущих параграфах (§3.1 и §3.2), где были найдены зависимости критических безразмерных параметров r_s^c в зависимости от межслойного расстояния. В результате, объединяя результаты для различных D , мы можем построить единую картину (Рис.13(b)) для критического параметра r_s^c , при котором связанное состояние пространственно разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений. На этом рисунке мы видим эффект уменьшения, а затем увеличения пороговой концентрации 2ДЭГ. Это связано (как и в §3.2) с конкуренцией двух механизмов. А именно, с ростом межслоевого расстояния происходит уменьшение затравочного взаимодействия электрона и дырки, а также уменьшение эффективности экранирования дырки, пространственно отделенными электронами.

§3.4 Увлечение экситонов электронами в двухслойной системе.

В последующих двух параграфах обсуждаются эффекты увлечения. Для этого рассмотрим двухслойную структуру, в которой в одном из слоев, обозначим его индексом 1, лазером созданы экситоны с неоднородностью плотности (например, за счет применения непроницаемой для лазерного излучения маски, фокусирования и т. п.). В другом, обозначим его индексом 2, имеется газ электронов с плотностью n_2 . В рассматриваемой задаче туннелирование учитывать не будем. Наша цель – вычислить отклик системы экситонов на внешнее электрическое поле, приложенное к системе электронов.

В двухслойной системе электронов и экситонов поток массы экситонов $\mathbf{i} = m_1 n_1 \mathbf{v}_1$ и поток заряда электронов $\mathbf{j} = -en_2 \mathbf{v}_2$ могут быть выражены через градиент концентрации экситонов ∇n_1 и внешнее электрическое поле, приложенное к электронной подсистеме \mathbf{E}_2 , следующим образом

$$\mathbf{J} = \hat{K} \mathbf{S}, \quad (74)$$

где

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{j}_2 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} -m_1 D_{11} & -n_1 m_1 \mu_{12} \\ em_1 D_{21}/m_2 & en_2 \mu_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \nabla n_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь D_{11} – коэффициент диффузии экситонов;

D_{21} – коэффициент взаимной диффузии экситонов и электронов;

μ_{12} – коэффициент взаимной подвижности экситонов и электронов;

μ_{22} – коэффициент подвижности электронов.

Отметим, что в рассматриваемой двухслойной системе коэффициенты D_{11} и μ_{22} (так же, как D_{21} и μ_{12}) учитывают взаимодействие между электронами и экситонами.

Если $\nabla n_1 = 0$, то для потока экситонов имеем

$$\mathbf{i}_1 = -n_1 m_1 \mu_{12} \mathbf{E}_2. \quad (75)$$

В этом случае скорость экситонов, как следует из (75), есть

$$\mathbf{v}_1 = -\mu_{12} \mathbf{E}_2. \quad (76)$$

Рассчитаем скорость, приобретаемую экситонами при взаимодействии с электронами. Кинетические уравнения в этом случае имеют вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 = I_1 + I_{12}, \quad (77)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} \dot{\mathbf{p}}_2 = I_2 + I_{21}, \quad (78)$$

где I_1 – интеграл столкновений, учитывающий все процессы рассеяния экситонов, исключая рассеяние экситонов на электронах, а I_{12} – интеграл столкновений, учитывающий рассеяние экситонов на электронах. Так как на экситоны не действуют силы макроскопического характера, то в уравнении (77) член $\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}_1} \dot{\mathbf{p}}_1$ равен нулю.

Для упрощения уравнений (77) и (78) будем считать, что ток электронов является однородным, а также что интеграл столкновений I_{21} является малой добавкой к I_2 , тогда в уравнении (78) им можно пренебречь. Кроме того, будем интересоваться только скоростью увлечения v_{drag} , считая ее преобладающей над скоростью диффузии v_{diff} , тогда в

уравнении (77) можно опустить член с производной f_1 по координате. С учетом этого, получим

$$I_1 + I_{12} = 0, \quad (79)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{p}_2} \dot{\mathbf{p}}_2 = I_2. \quad (80)$$

Как обычно, для линеаризации уравнения (80) подставим f_2 в виде

$$f_2 = f_2^0 + f_2^0(1 - f_2^0)\psi_2, \quad (81)$$

где f_2^0 – функция Ферми, удовлетворяющая условию нормировки

$$n_2 = 2 \int f_2^0 \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (82)$$

Используя для I_2 τ -приближение, находим

$$\psi_2 = -\frac{\tau_2}{m_2 k_B T} e^{\mathbf{E}_2 \mathbf{p}_2}. \quad (83)$$

Здесь $\mathbf{E}_2 = \{E_2, 0\}$ – напряженность внешнего электрического поля.

Уравнение (79) напишем более подробно

$$I_1 = - \sum_{\sigma_2, \sigma_2'} \int w \{ f_{1'} f_{2'} (1 + f_1) (1 - f_2) - f_1 f_2 (1 + f_{1'}) (1 - f_{2'}) \} \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \frac{d\mathbf{p}_{1'}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^2}, \quad (84)$$

где $w(\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2; \mathbf{p}_{1'} \mathbf{p}_{2'}) = \frac{2\pi}{\hbar} |W(q)|^2$ – вероятность рассеяния экситона на электроне в борновском приближении, причем $\mathbf{q} = \mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_2$, $W(q)$ – фурье-образ эффективной энергии взаимодействия экситона и электрона (см. §3.5). Подставив в (84) f_1 в виде

$$f_1 = f_1^0 + f_1^0(1 + f_1^0)\psi_1, \quad (85)$$

где f_1^0 – функция Бозе с $\mu = \mu(n_{10}) = \mu_0$, нормированная следующим образом

$$n_{10} = \int f_1^0 \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^2} \quad (86)$$

и f_2 в виде (81), а также $I_1 = -(f_1 - f_1^0)/\tau_1$, получим линеаризованное уравнение

$$f_1^0(1 + f_1^0)\psi_1 = 2\tau_1 \int w \{f_1^0 f_2^0(1 + f_1^0)(1 - f_2^0)\}(\psi_{1'} + \psi_{2'} - \psi_1 - \psi_2) \times \\ \times \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \frac{d\mathbf{p}_{1'}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (87)$$

Используя условие $v_{diff} \ll v_{drag}$ можно пренебречь членами ψ_1 и $\psi_{1'}$ в подинтегральном выражении в (87).

Выражение для скорости увлечения имеет вид

$$v_{drag} = \frac{1}{m_1 n_{10}} \int p_{1x} f_1^0(1 + f_1^0)\psi_1 \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (88)$$

Запишем уравнение для v_{drag} (см. формулу (76)) в виде

$$v_{drag} = -\mu_{12} E_2. \quad (89)$$

С учетом равенств (87) и (88) для μ_{12} имеем

$$\mu_{12} = \frac{2e\tau_1\tau_2}{m_1 m_2 n_{10} k_B T} \int w f_1^0 f_2^0(1 + f_1^0)(1 - f_2^0) \times \\ \times p_{1x}(p_{2'x} - p_{2x}) \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_{1'} - \varepsilon_{2'}) \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{d\mathbf{p}_{1'}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (90)$$

После некоторых преобразований (90), получим выражение для коэффициента взаимной подвижности μ_{12}

$$\mu_{12} = \frac{1}{8\pi^2} \frac{\tau_1\tau_2}{m_1 m_2 n_{10} \hbar^2} \frac{e}{k_B T} \int_0^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega W^2(q) q^3 \frac{Im\chi^B(q, \omega) Im\chi^F(q, \omega)}{sh^2(\frac{\hbar\omega}{2k_B T})} \quad (91)$$

где

$$\chi^B(q, \omega) = - \int \frac{f^0(\varepsilon_1) - f^0(\varepsilon_{1'})}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{1'} + \hbar\omega + i\delta)} \frac{d\mathbf{p}_1}{(2\pi\hbar)^2}, \quad (92)$$

$$\chi^F(q, \omega) = - \int \frac{f^0(\varepsilon_2) - f^0(\varepsilon_{2'})}{(\varepsilon_2 - \varepsilon_{2'} + \hbar\omega + i\delta)} \frac{d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (93)$$

Если параметры системы таковы, что распределение экситонов и электронов является бoльцмановским (классический случай), то из (91) вытекает более простое выражение для μ_{12} :

$$\mu_{12} = \frac{\tau_1\tau_2}{4\sqrt{2\pi}} \frac{en_2}{m_1m_2} \sqrt{\mu} (k_B T)^{-3/2} \int_0^\infty W^2(q) q^2 \exp\left(-\frac{q^2\hbar^2}{8\mu k_B T}\right) dq. \quad (94)$$

§3.5 Экранирование эффекта увлечения.

Наконец, перейдем к вопросу расчета и экранирования двумерного поляризационного (электрон-дипольного) взаимодействия, за счет которого и происходит увлечение двумерных экситонов пространственно отделенным электронным газом. Для вычисления эффективной энергии взаимодействия в двухслойной системе будем использовать самосогласованное приближение. Если радиус экситона много меньше расстояния между электроном и экситоном, то энергия взаимодействия изолированных электрона и экситона имеет вид (см. [95])

$$V_{e\text{-ex}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, D) = - \frac{\gamma}{((\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 + D^2)^2},$$

где $\gamma = \alpha e^2/2\epsilon$, α – поляризуемость двумерного экситона в основном состоянии, D – расстояние между слоями, $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ – расстояние между экситоном и электроном *вдоль* слоев, ϵ – диэлектрическая проницаемость

среды. При выводе выражения для эффективной энергии взаимодействия в многочастичной электрон-экситонной системе будем считать, что экситон-экситонное взаимодействие пренебрежимо мало по сравнению с электрон-экситонным и учитывать его не будем. Поместим пробный заряд $-e$ в электронную подсистему в начало координат. Линеаризованные кинетические уравнения для функций распределения экситонов и электронов имеют вид

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\partial f_1^0}{\partial \mathbf{p}_1} \dot{\mathbf{p}}_1 = 0, \quad (95)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 + \frac{\partial f_2^0}{\partial \mathbf{p}_2} \dot{\mathbf{p}}_2 = 0, \quad (96)$$

где

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} W(\mathbf{r}_1, D), \quad \dot{\mathbf{p}}_2 = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} W(\mathbf{r}_2, 0).$$

Энергии взаимодействия $W(\mathbf{r}, 0)$ и $W(\mathbf{r}, D)$ подчиняются следующим уравнениям:

$$W(\mathbf{r}, 0) = \int \rho_2(\mathbf{r}') \frac{e^2}{\epsilon |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' - \int \rho_1(\mathbf{r}') \frac{\gamma}{((\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + D^2)^2} d\mathbf{r}' + \frac{e^2}{\epsilon r}, \quad (97)$$

$$W(\mathbf{r}, D) = - \int \rho_2(\mathbf{r}') \frac{\gamma}{((\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 + D^2)^2} d\mathbf{r}' - \frac{\gamma}{(r^2 + D^2)^2}, \quad (98)$$

где

$$\rho_1(\mathbf{r}) = \int f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}, \quad \rho_2(\mathbf{r}) = 2 \int f_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}.$$

Переходя в уравнениях (95)-(98) к фурье-компонентам, получим (считаем, что $\mathbf{k}=\{\mathbf{k}, 0\}$)

$$f_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{v_{1x}} \frac{\partial f_1^0}{\partial p_{1x}} W(\mathbf{k}, D), \quad (99)$$

$$f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) = \frac{1}{v_{2x}} \frac{\partial f_2^0}{\partial p_{2x}} W(\mathbf{k}, 0), \quad (100)$$

где f_1^0 - функция Бозе, а f_2^0 - функция Ферми;

$$W(\mathbf{k}, 0) = \frac{4\pi e^2}{\epsilon k} \int f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} - \gamma F(\mathbf{k}, D) \int f_1(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} + \frac{2\pi e^2}{\epsilon k} \quad (101)$$

$$W(\mathbf{k}, D) = -2\gamma F(\mathbf{k}, D) \int f_2(\mathbf{k}, \mathbf{p}) \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} - \gamma F(\mathbf{k}, D), \quad (102)$$

функция $F(\mathbf{k}, D) = \frac{\pi k}{D} K_1(kD)$, а $K_1(z)$ - функция Макдональда.

Из уравнений (99)-(102) получаем систему двух алгебраических уравнений для определения $W(k, 0)$ и $W(k, D)$:

$$W(k, 0) = \frac{2\pi e^2}{\epsilon k} \beta_2 W(k, 0) - \gamma \beta_1 F(k, D) W(k, D) + \frac{2\pi e^2}{\epsilon k} \quad (103)$$

и

$$W(k, D) = -\gamma \beta_2 F(k, D) W(k, 0) - \gamma F(k, D), \quad (104)$$

где

$$\beta_1 = \int \frac{\partial f_1^0}{\partial p_x} \frac{1}{v_x} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}, \quad \beta_2 = 2 \int \frac{\partial f_2^0}{\partial p_x} \frac{1}{v_x} \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2}. \quad (105)$$

Если f_1^0 и f_2^0 - распределения Больцмана, то

$$\beta_1 = -\frac{n_{10}}{k_B T} \quad \beta_2 = -\frac{n_2}{k_B T}; \quad (106)$$

если f_2^0 - фермиевская ступенька, то

$$\beta_2 = -\frac{m_2}{\pi\hbar^2}. \quad (107)$$

В результате выражение для эффективной энергии взаимодействия в многочастичной электрон-экситонной системе приобретает вид

$$W(k, D) = \frac{-\gamma F(k, D)}{1 - 2\pi e^2 \beta_2 / \epsilon k - \gamma^2 \beta_1 \beta_2 F^2}. \quad (108)$$

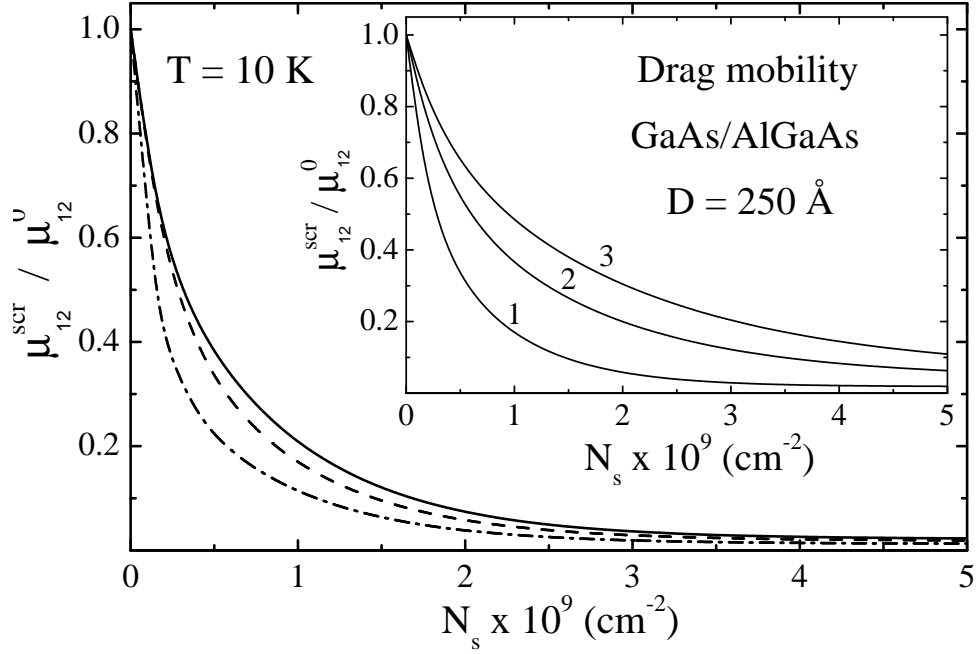


Рис. 14: Величина $\mu_{12}^{\text{scr}}/\mu_{12}^0$ как функция концентрации N_s при $T = 10\text{K}$ для различных межслоевых расстояний: $D = 150\text{\AA}$ (сплошная линия), $D = 250\text{\AA}$ (пунктирная линия), $D = 500\text{\AA}$ (штрих пунктирная линия). На вставке показана величина $\mu_{12}^{\text{scr}}/\mu_{12}^0$ в зависимости от N_s для $D = 250\text{\AA}$: (1) $T = 10\text{K}$, (2) $T = 20\text{K}$, (3) $T = 30\text{K}$.

Для двухкомпонентной системы взаимодействующих электронов и экситонов при условии низкой плотности последних ($N_{\text{exc}}(a_B^{2D})^2 \ll 1$) эффективное взаимодействие имеет вид:

$$W(k, D) = \frac{-\gamma F(k, D)}{1 - 2\pi e^2 \Pi_{\text{DH}}/\epsilon k}, \quad (109)$$

где $\Pi_{\text{DH}} = \beta_2$ – поляризационный оператор в классическом приближении Дебая-Хьюккеля при $k_B T \sim E_F$ [40, 123]. Выражение для параметра γ приведено в §3.3 (формула 57).

Теперь перейдем к исследованию влияния эффекта экранирования на коэффициент увлечения μ_{12} . Для этого сначала зафиксируем температуру системы ($T = 10\text{K}$) и построим зависимость величины $\mu_{12}^{\text{scr}}/\mu_{12}^0$ от

концентрации двумерного электронного газа (Рис.14), где μ_{12}^{scf} – экранированный коэффициент увлечения, рассчитанный по формуле (94) с потенциалом (109), а μ_{12}^0 – коэффициент увлечения для системы невзаимодействующих электронов и экситонов. Видно, что величина коэффициента взаимной подвижности экситонов и электронов уменьшается экспоненциально при увеличении n_2 . Следовательно, в системе с высокой плотностью электронов и экситонов эффект увлечения будет менее ярко выражен. Это обстоятельство приводит к сложности экспериментального обнаружения этого эффекта в системе пространственно разделенных электронов и экситонов. С другой стороны при увеличении температуры эффективность экранирования двумерным электронным газом уменьшается и наблюдается увеличение коэффициента взаимной подвижности экситонов и электронов для одного и того же межслоевого расстояния (см. вставку к Рис.14). Поэтому можно надеяться, что данный эффект будет обнаружен в структурах высокого качества при низких концентрациях электронного газа.

Подводя итоги этой главы, можно сказать, что в ней решены задачи с двухслойными системами. Изучены эффекты пространственно непрямого экранирования, получена зависимость критического параметра r_s^c от расстояния D между КЯ. Оказалось, что в такой системе решение находится в приближении линейного отклика. В пределе $D \rightarrow 0$ полученные результаты находятся в согласии с результатами Клейнмана [16], который рассматривал одиночную КЯ в таком приближении.

Получена зависимость энергии связи ПНЭ от концентрации 2ДЭГ, демонстрирующая перестройку связанного состояния, а также построена

зависимость критического параметра r_s^c от расстояния D между слоями. С помощью этой зависимости продемонстрировано, как данное связанное состояние модифицируется при изменении D и как это изменение влияет на эффективность экранирующих свойств 2ДЭГ. Показано, что учет толщины слоев приводит к “перенормировке” расстояния между пространственно разделенными электроном и дыркой.

Параллельно решена задача о связанном состоянии пространственно разделенных экситона и электрона, то есть триона X^- . Исследовано поведение данной системы в двух предельных случаях $D \ll a_B$ и $D \gg a_B$. В первом случае задача решалась аналогично задаче о связанном состоянии H^- , в приближении Борна–Опенгеймера. Во втором – мы рассматривали экситон–электронное взаимодействие, как взаимодействие электрона с диполем, что является хорошим приближением, когда размеры экситона много меньше расстояния между экситоном и электроном. Найдена энергия связи триона для различных межслоевых расстояний. Изучен также вопрос об экранировании данного связанного состояния двумерным электронным газом. В результате построена зависимость от D критического параметра r_s^c , при котором связанное состояние пространственно разделенных экситона и электрона исчезает из спектра коллективных возбуждений.

Помимо эффекта перестройки экситонного состояния и свойств пространственно непрямого триона в данной главе исследован эффект увлечения в системе пространственно разделенных экситонов и электронов. Показано, что величина коэффициента взаимной подвижности за счет экранирования пространственно отделенными электронами уменьшается

экспоненциально при увеличении их концентрации. Кроме того установлено, что с ростом температуры системы эффективность экранирования уменьшается и наблюдается увеличение μ_{12} .

ГЛАВА IV.

Решение задачи о спектре коллективных возбуждений в системах с кристаллической фазой.

В системе пространственно разделенных электронов и дырок низкой плотности, такой что расстояние между носителями заряда в слое много больше межслоевого расстояния, возможны образование непрямых экситонов (диполей) (см. Главу II) и кристаллизация их при низкой температуре (см. Главу I). Этим обусловлен большой интерес к теоретическому исследованию спектра коллективных возбуждений дипольного кристалла в нулевом и перпендикулярном магнитном поле, а также к построению фазовой диаграммы этого состояния. Все эти проблемы обсуждаются в настоящей главе. Результаты этой главы опубликованы в [134, 135].

§4.1 Разреженная система экситонов в двухслойной структуре.

Рассмотрим двухслойную структуру. В первом слое имеется электронный канал с плотностью носителей N_e , во втором – дырочный с плотностью N_h . Причем нас, в основном, будет интересовать случай, когда $N_e = N_h$. При низких температурах и концентрациях пространственно разделенных электронов и дырок ($N_{e(h)} a_B^2 \ll 1$) система представляет собой слабонеидеальный газ экситонов ($N_{\text{exc}} = N_e = N_h$) с перпендикулярными слоям дипольными моментами в основном состоянии $d = eD$, растущим с увеличением расстояния между слоями. Как было указано в Главе I,

в такой пространственно разделенной электрон-дырочной системе в отличие от обычных электрон-дырочных систем основной вклад в энергию дает прямое диполь-дипольное отталкивание. Ван-дер-ваальсовым притяжением экситонов и обменным взаимодействием можно пренебречь. В некоторой же области малых концентраций N_{exc} и низких температур диполь-дипольное отталкивание приводит к образованию кристалла не прямых экситонов.

Для рассмотрения кристаллической фазы запишем кинетическую и потенциальную энергию системы, переходя при этом к координатам центра масс $\vec{R}_{nm} = (m_e \vec{r}_{enm} + m_h \vec{r}_{hnm}) M^{-1}$ и относительного движения $\vec{\rho}_{nm} = \vec{r}_{enm} - \vec{r}_{hnm}$. Тогда кинетическая энергия будет иметь вид:

$$T_{\text{kin}} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{m_e \vec{r}_{enm}^2}{2} + \frac{m_h \vec{r}_{hnm}^2}{2} \right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{M \dot{\vec{R}}_{nm}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{\rho}}_{nm}^2}{2} \right), \quad (110)$$

где $M = m_e + m_h$ – полная масса диполя (непрямого экситона), а $\mu = (m_e m_h)/(m_e + m_h)$ – приведенная масса.

Потенциальная энергия состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое – это потенциал кулоновского взаимодействия пространственно разделенных электрона и дырки, который в случае $\rho \ll D$ может быть преобразован следующим образом:

$$U_{\text{exc}} = -\frac{e^2}{\epsilon \sqrt{\rho^2 + D^2}} \simeq -\frac{e^2}{\epsilon D} + \frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon D^3} \rho^2. \quad (111)$$

Следовательно, при малых колебаниях электрона относительно дырки этот член может быть аппроксимирован параболическим потенциалом:

$$U_1 = \sum_{nm} \frac{\mu \omega_0^2 \vec{\rho}_{nm}^2}{2}, \quad (112)$$

где для чисто двумерного случая $\omega_0^2 = \frac{e^2}{\epsilon \mu D^3}$. Для реальных систем с конечной толщиной слоев эта величина определяется с учетом волновых

функций в z -направлении. Эта процедура будет проделана в §4.5 для оценки энергий и сравнения с экспериментальными результатами.

Вторая часть потенциальной энергии – это межэкситонное взаимодействие вдоль слоев. Как уже указывалось в начале этого параграфа, в рассматриваемой системе непрямые экситоны будут взаимодействовать друг с другом по закону диполь-дипольного отталкивания:

$$U_2 = \sum_{nn'mm'} \frac{e^2 \vec{\rho}_{nm} \vec{\rho}_{n'm'} \vec{R}^2 - 3e^2 (\vec{\rho}_{nm} \vec{R})(\vec{\rho}_{n'm'} \vec{R})}{\epsilon \vec{R}^5}. \quad (113)$$

Здесь \vec{R} – вектор между центрами диполей в различных ячейках кристаллической решетки (a – период решетки)

$$\begin{aligned} \vec{R}^2 = & [a(n - n') + (x_n - x_{n'})]^2 + [a(m - m') + (y_m - y_{m'})]^2 + \\ & + 2[a(n - n') + (x_n - x_{n'})][a(m - m') + (y_m - y_{m'})] \cos \alpha, \end{aligned} \quad (114)$$

а $x_n(y_m)$ – смещение $n(m)$ -го диполя из положения равновесия, α – это угол между базисными векторами произвольной решетки. В дальнейшем рассматривается дипольный (экситонный) кристалл с треугольной решеткой. Как уже упоминалось в Главе I, треугольная решетка, благодаря ее плотной упаковке, соответствует минимуму потенциальной энергии и спектр ее частот в двумерном случае стабилен, в отличие от других конфигураций. Поэтому в формуле (114) $\alpha = \pi/3$.

В квадратичном приближении разлагаем потенциальную энергию U_2 по смещениям $(x_n - x_{n'})$ и $(y_n - y_{n'})$ всюду до билинейных членов:

$$U_2 \simeq \frac{1}{2} \frac{e^2}{\epsilon a^3} \sum_{nn'mm'} \left\{ \frac{[(n - n')^2 - 2(m - m')^2] u_n u_{n'} + [(m - m')^2 - 2(n - n')^2] v_m v_{m'}}{[(n - n')^2 + (m - m')^2 + (n - n')(m - m')]^{(5/2)}} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{3[(n-n')(m-m')](u_n v_{m'} + u_{n'} v_m)}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(5/2)}} \\
& + \frac{\left[-3(n-n')^2 + 15[(m-m')\sin(\pi/3)]^2\right](x_n - x_{n'})^2}{a^2 \left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(7/2)}} \\
& + \frac{\left[-3(m-m')^2 + 15[(n-n') + (m-m')\cos(\pi/3)]^2\right](y_m - y_{m'})^2}{a^2 \left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(7/2)}} \\
& + \frac{\left[15(m-m')\sin(\pi/3)[(n-n') + (m-m')\cos(\pi/3)]\right](x_n - x_{n'})(y_m - y_{m'})}{a^2 \left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(7/2)}}.
\end{aligned} \tag{115}$$

Таким образом, лагранжиан для нашей модели имеет вид:

$$L = T_{\text{kin}} - (U_1 + U_2). \tag{116}$$

Используя уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0, \tag{117}$$

легко получить уравнения движения для координат центра масс x_n и y_m , а также для координат относительного движения u_n , v_m :

$$\begin{aligned}
& \ddot{u}_n = -\omega_0^2 u_n + \Omega^2 \times \\
& \times \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[(n-n')^2 - 2(m-m')^2\right] u_{n'} - 3[(n-n')(m-m')] v_{m'}}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(5/2)}}, \tag{118}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{v}_m = -\omega_0^2 v_m + \Omega^2 \times \\
& \times \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[(m-m')^2 - 2(n-n')^2\right] v_{m'} - 3[(n-n')(m-m')] u_{n'}}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m')\right]^{(5/2)}}, \tag{119}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{x}_n = -\Omega_1^2 \times \\
& \times \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[-3(n-n')^2 + 15[(m-m')\sin(\pi/3)]^2 \right] (x_n - x_{n'})}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m') \right]^{(7/2)}} - \\
& -\Omega_1^2 \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[15(m-m')\sin(\pi/3) [(n-n') + (m-m')\cos(\pi/3)] \right] (y_m - y_{m'})}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m') \right]^{(7/2)}}, \tag{120}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{y}_m = -\Omega_1^2 \times \\
& \times \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[-3(m-m')^2 + 15[(n-n') + (m-m')\cos(\pi/3)]^2 \right] (y_m - y_{m'})}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m') \right]^{(7/2)}} - \\
& -\Omega_1^2 \sum_{n'm'=-\infty}^{\infty} \frac{\left[15(m-m')\sin(\pi/3) [(n-n') + (m-m')\cos(\pi/3)] \right] (x_n - x_{n'})}{\left[(n-n')^2 + (m-m')^2 + (n-n')(m-m') \right]^{(7/2)}}. \tag{121}
\end{aligned}$$

Из системы уравнений (118)–(121) видно, что в нулевом магнитном поле переменные u_n, v_m , описывающие оптические (противофазные), и x_n, y_m , описывающие акустические (синфазные) колебания, разделяются. Таким образом, получается два независимых детерминанта второго ранга для расчета коллективных возбуждений двумерного дипольного кристалла.

§4.2 Анализ дисперсионных зависимостей оптических и акустических мод в нулевом магнитном поле.

Решение для нормальных колебаний, как обычно, будем искать в виде $u_n = u \exp[-i\omega t + ikan]$, $v_m = v \exp[-i\omega t + iqam]$. Тогда для оптических колебаний из (118),(119) получим:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2 f_{11}(k, q) & -3\Omega^2 f_{12}(k, q) \\ -3\Omega^2 f_{21}(k, q) & \omega^2 - \omega_0^2 + \Omega^2 f_{22}(k, q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad (122)$$

где $\Omega^2 = \frac{2e^2}{\mu\epsilon a^3}$, (k, q) – это (x,y)-компоненты волнового вектора \vec{k} ,

$$f_{11}(k, q) = \sum_{N,J=1}^{\infty} \frac{N^2 - 2J^2}{(N^2 + J^2 + NJ)^{5/2}} \cos(kaN) \cos(qaJ),$$

$$f_{22}(k, q) = \sum_{N,J=1}^{\infty} \frac{J^2 - 2N^2}{(N^2 + J^2 + NJ)^{5/2}} \cos(kaN) \cos(qaJ),$$

$$f_{12}(k, q) = f_{21}(k, q) = \sum_{N,J=1}^{\infty} \frac{NJ}{(N^2 + J^2 + NJ)^{5/2}} \sin(kaN) \sin(qaJ),$$

где $N = (n - n')$, $J = (m - m')$.

Аналогичным образом, из (120),(121) получается система двух уравнений для синфазных колебаний:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \Omega_1^2 \tilde{f}_{11}(k, q) & \Omega_1^2 \tilde{f}_{12}(k, q) \\ \Omega_1^2 \tilde{f}_{21}(k, q) & \omega^2 - \Omega_1^2 \tilde{f}_{22}(k, q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0, \quad (123)$$

где $\Omega_1^2 = \frac{8e^2 D^2}{M\epsilon a^5}$,

$$\tilde{f}_{11}(k, q) = \sum_{N,J=1}^{\infty} \frac{-3N^2 + 15\frac{3}{4}J^2}{(N^2 + J^2 + NJ)^{7/2}} \left[1 - \cos(kaN) \cos(qaJ) \right],$$

$$\tilde{f}_{22}(k, q) = \sum_{N,J=1}^{\infty} \frac{-3J^2 + 15(N + \frac{1}{2}J)^2}{(N^2 + J^2 + NJ)^{7/2}} \left[1 - \cos(kaN) \cos(qaJ) \right],$$

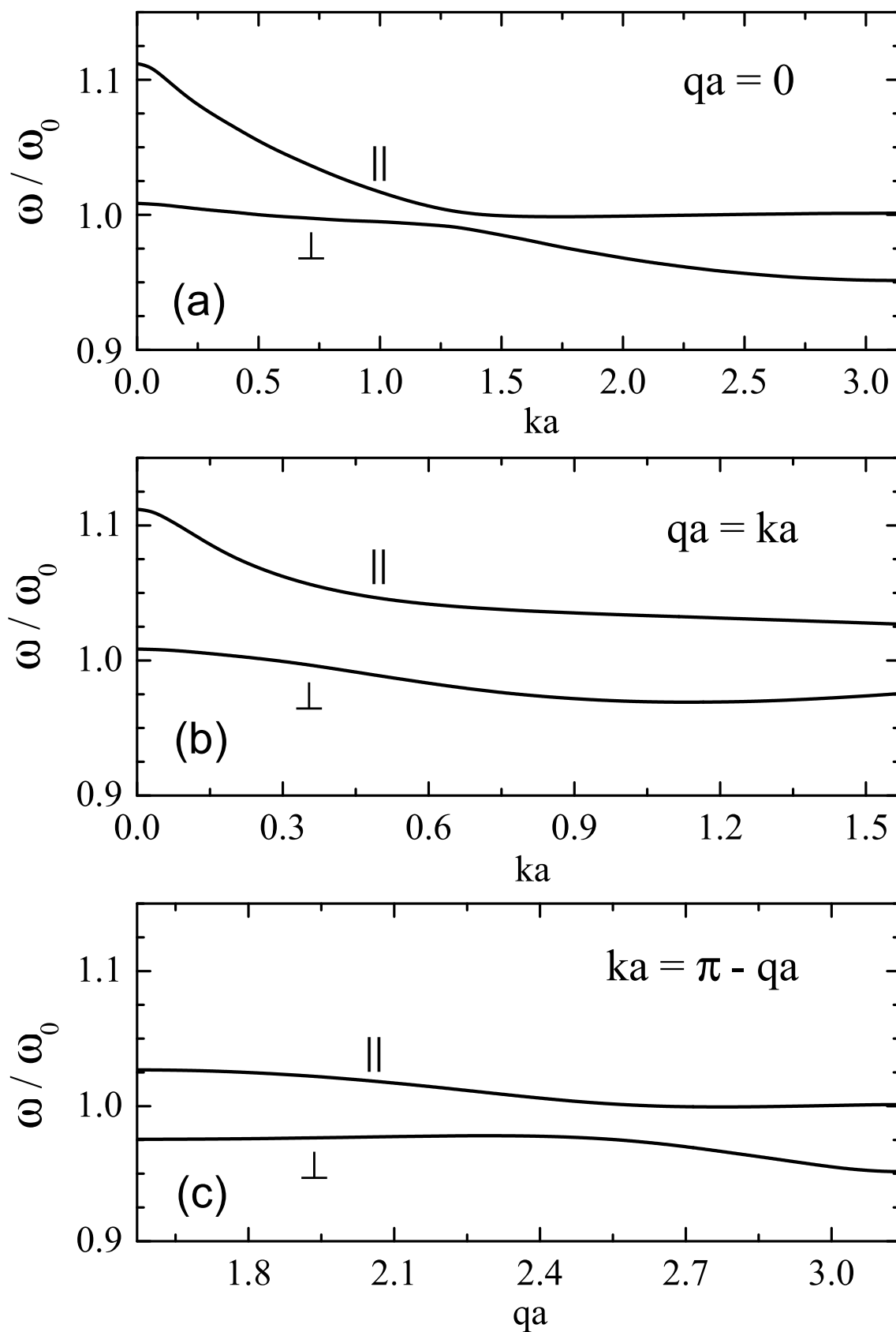


Рис. 15: Дисперсионные зависимости продольных и поперечных оптических колебаний дипольного кристалла для направлений: $\Gamma - L$ (a), $\Gamma - X$ (b) и $L - X$ (c) первой зоны Бриллюэна.

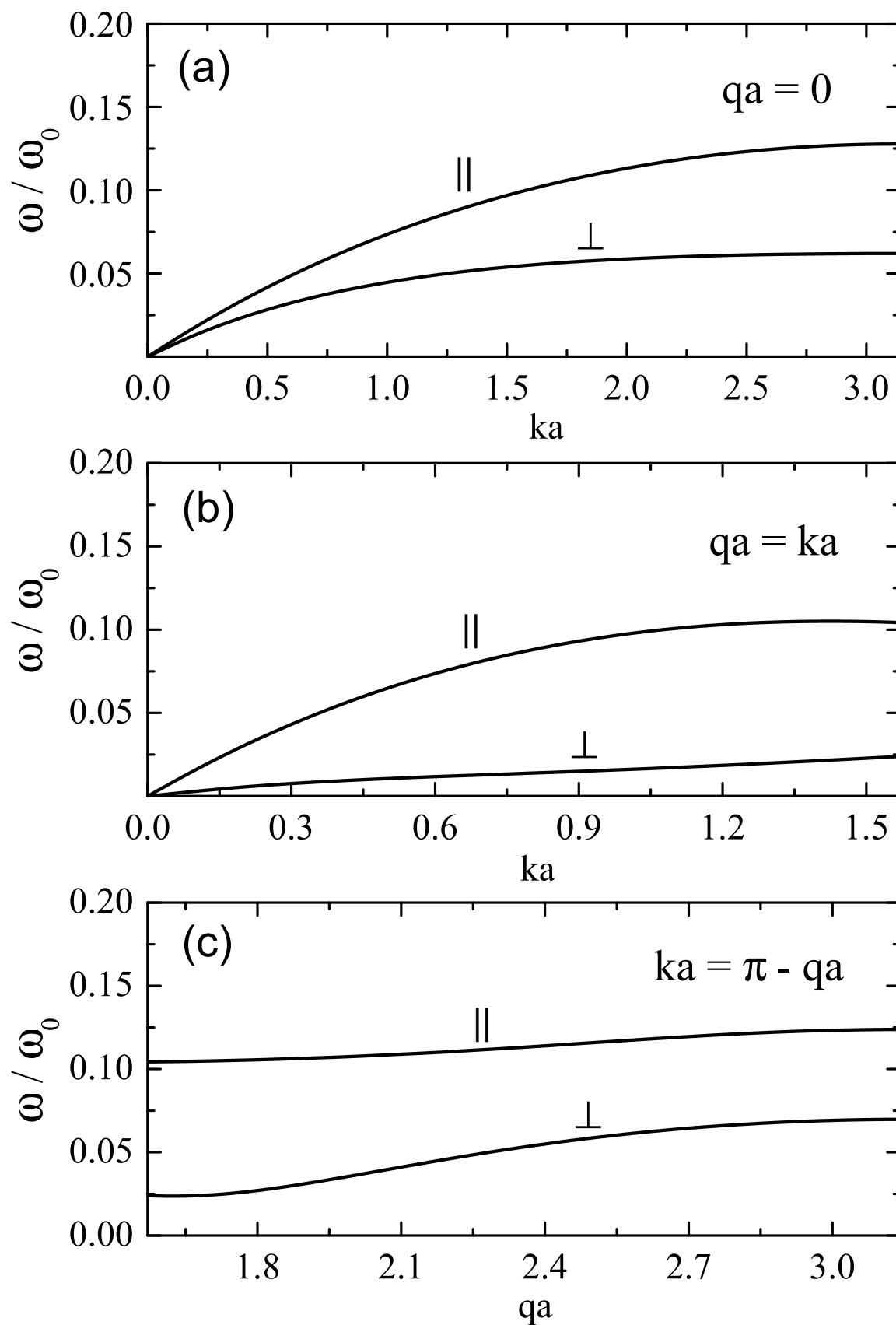


Рис. 16: Дисперсионные зависимости продольных и поперечных акустических колебаний дипольного кристалла для направлений: $\Gamma - L$ (a), $\Gamma - X$ (b) и $L - X$ (c).

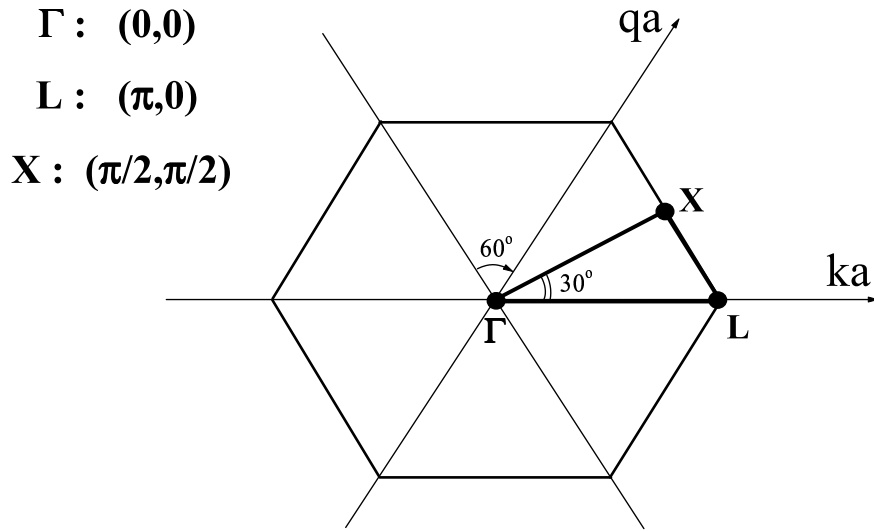


Рис. 17: Обратная гексогональная решетка. Жирными линиями показаны симметричные направления: Γ - L , Γ - X и L - X . Представленные координаты симметричных точек соответствуют коэффициентам при базисных векторах косоугольной системы координат.

$$\tilde{f}_{12}(k, q) = \tilde{f}_{21}(k, q) = \sum_{N, J=1}^{\infty} \frac{-15\frac{\sqrt{3}}{2}J(N + \frac{1}{2}J)}{(N^2 + J^2 + NJ)^{7/2}} \sin(kaN) \sin(qaJ).$$

Дисперсионные зависимости¹⁷ оптических и акустических мод для следующих направлений: (а) Γ - L , (б) Γ - X и (с) L - X , представлены на Рис. 15 и Рис. 16, соответственно. Γ , L , X — это точки симметрии первой зоны Бриллюэна обратной гексогональной решетки продемонстрированной на Рис.17. Данная обратная решетка соответствует рассматриваемой треугольной решетке в координатном пространстве. Видно, что в каждом из представленных спектров, присутствуют две моды. Одна из них соответствует продольным (синфазным, либо противофазным) колебаниям, а другая — поперечным. Последние при плавлении кристалла претерпевают сильные изменения, которые обсуждаются в §4.4.

¹⁷В расчетах используем безразмерные единицы энергии коллективных возбуждений $\omega = \frac{\omega}{\omega_0}$, энергий $\Omega = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0.2$, $\Omega_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_0} = 0.01$ и импульсов $k = ka$, $q = qa$.

В области малых импульсов ($k, q \ll q_0$, где q_0 — вектор Бриллюэна) применима макроскопическая теория упругости. В этом приближении стандартным образом для электронного и экситонного кристаллов находятся модули упругости и сдвига, а затем — дисперсии акустических мод. Ответ для дисперсий экситонного кристалла следующий (см. [134] и цитируемую там литературу):

$$\omega_{\parallel} = \sqrt{\frac{33 (eD)^2 N_{\text{exc}}^{3/2}}{16 \epsilon M}} 8.7795 k, \quad (124)$$

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{3 (eD)^2 N_{\text{exc}}^{3/2}}{16 \epsilon M}} 8.7795 k, \quad (125)$$

где ω_{\parallel} и ω_{\perp} — энергии продольных и поперечных акустических колебаний, соответственно. Результаты, представленные на Рис.15 и 16, в указанной области импульсов находятся в хорошем согласии с выражениями (124),(125).

§4.3 Расчет магнитополевых зависимостей коллективных возбуждений экситонного кристалла.

В перпендикулярном магнитном поле колебательную задачу будем решать с помощью уравнений движения (118)–(121) (см. §4.1), добавив компоненты лоренцевого ускорения для электрона и дырки. Тогда в ре-

зультате получим систему четырех уравнений:

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_{11}^2 & \omega_{12}^2 + i\omega(\omega_e - \omega_h) & 0 & i\omega(\omega_e + \omega_h) \\ \omega_{12}^2 - i\omega(\omega_e - \omega_h) & \omega^2 - \omega_{22}^2 & -i\omega(\omega_e + \omega_h) & 0 \\ 0 & -i\frac{\omega}{\gamma}(\omega_e - \omega_h) & \omega^2 - \omega_{33}^2 & \omega_{34}^2 \\ i\frac{\omega}{\gamma}(\omega_e - \omega_h) & 0 & \omega_{34}^2 & \omega^2 - \omega_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ x \\ y \end{bmatrix} = 0, \quad (126)$$

где $\gamma = \frac{m_h^2 - m_e^2}{m_e m_h}$, и ω_e, ω_h — циклотронные энергии электрона и дырки, соответственно. Также в детерминанте (126) введены следующие обозначения для частот

$$\begin{aligned} \omega_{11}^2(k, q) &= \omega_0^2 - \Omega^2 f_{11}(k, q), \\ \omega_{12}^2(k, q) &= 3\Omega^2 f_{12}(k, q), \\ \omega_{22}^2(k, q) &= \omega_0^2 - \Omega^2 f_{22}(k, q), \\ \omega_{33}^2(k, q) &= \Omega_1^2 \tilde{f}_{11}(k, q), \\ \omega_{34}^2(k, q) &= -\Omega_1^2 \tilde{f}_{12}(k, q), \\ \omega_{44}^2(k, q) &= \Omega_1^2 \tilde{f}_{22}(k, q). \end{aligned} \quad (127)$$

Выражения для функций, входящих в (127), можно найти в §4.2.

Магнитополевые зависимости для фиксированных импульсов k и q , найденные из системы уравнений (126), представлены на Рис.18. Данная диаграмма построена для безразмерных величин ω/ω_0 и ω_c/ω_0 , где ω_c — циклотронная частота электрона.

При больших магнитных полях оптические моды выходят на электронную и дырочную циклотронные энергии, что совпадает с результатами работы [55], в которой рассматривалась система пространственно

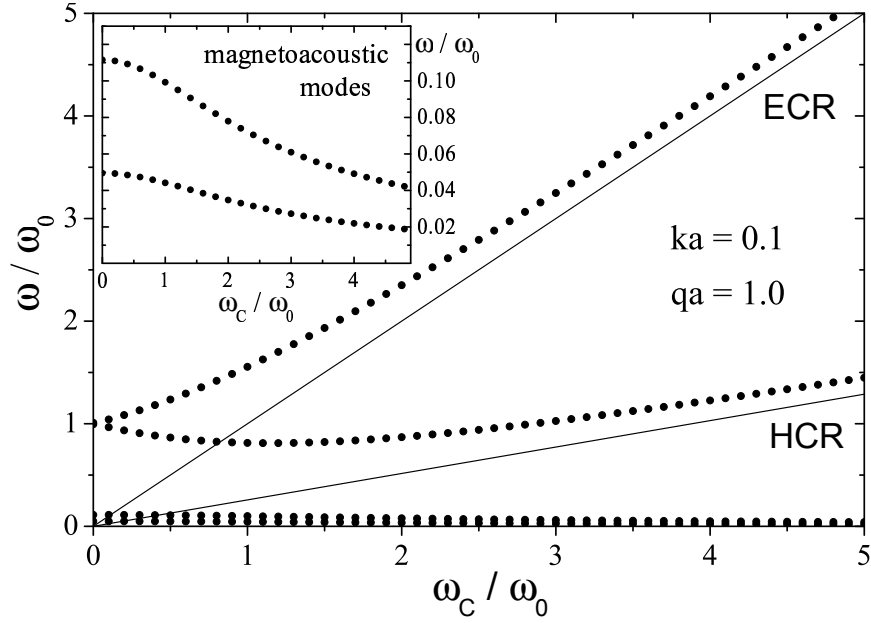


Рис. 18: Магнитополевые зависимости коллективных колебаний дипольного кристалла. ECR и HCR — это энергии циклотронных резонансов электронов и дырок в GaAs/AlGaAs. Вставка демонстрирует магнетоакустические моды в увеличенном масштабе.

разделенных электронов и дырок в сильных магнитных полях. Это связано с тем, что в этой области циклотронная энергия электрона (дырки) много больше кулоновского взаимодействия, поэтому спектр нашей системы определяется в основном магнитным полем, а $e-h$ взаимодействие входит как малая поправка к основной энергии. При этом частота акустических колебаний уменьшается из-за магнитной локализации электронов и дырок в слоях. Данное поведение похоже на поведение акустической моды вигнеровского кристалла (см., например [102, 103]), дисперсия которой в области сильных магнитных полей есть

$$\omega_- \approx \frac{\alpha^{1/2} s k^{3/2}}{\omega_e}, \quad (128)$$

где $\alpha \equiv \frac{2\pi N_e e^2}{\epsilon m_e}$, а $s^2 = \frac{4e^2}{m_e \epsilon a}$.

§4.4 Изменение спектра при квантовом переходе кристалл–жидкость в двухслойной экситонной системе.

Выяснив вид колебательного спектра системы пространственно разделенных электронов и дырок с кристаллической фазой, обсудим подробнее вопрос об устойчивости данного кристаллического состояния. Фазовая диаграмма двухслойной системы пространственно разделенных электронов и дырок была получена в работе [69]. Было показано, что кроме областей электрон-дырочной жидкости и дипольного кристалла, существует промежуточная область несфазированных e - и h -кристаллов. Также из данной работы следует, что при $D \rightarrow \infty$, либо при $T > T_c$ экситонный кристалл не может существовать¹⁸. При $T < T_c$ кристалл плавится при двух значениях концентрации в точках фазовой диаграммы, которые удаляются друг от друга при уменьшении D . Нас будет интересовать изменение свойств коллективных возбуждений при фазовом переходе кристалл–жидкость, при котором исчезает дальний порядок в электрон-дырочной системе. При этом акустическая поперечная мода на малых импульсах исчезает скачком и появляется затухающая поперечная мода на векторах $k \sim 1/L$, где L — радиус области квазидальнего кристаллического порядка (см., например, [136]). В этой же области оптическая поперечная становится почти бездисперсионной и равной ω_0 . Две другие моды (продольные оптическая и акустическая) в приближении сплошной среды (то есть в длинноволновом пределе $k[N_{\text{exc}}]^{-1/2} \ll 1$ и для малых межслоевых расстояний $D \ll [N_{\text{exc}}]^{-1/2}$) имеют следующие

¹⁸Здесь $T_c \approx R_y \cdot 10^{-3} / (N_{\text{exc}}^{-1/2} D)$ — критическая температура плавления дипольного кристалла.

дисперсионные зависимости в нулевом магнитном поле:

$$\omega_{op}^2 = \omega_0^2 + \frac{2\pi e^2 N_{exc}}{\epsilon\mu} k, \quad (129)$$

$$\omega_{ac}^2 = \frac{4\pi e^2 N_{exc}^{3/2}}{\epsilon M} (kD)^2. \quad (130)$$

Такой же результат получается, если в выражениях (122) и (123) произвести разложение по малому параметру k ($ka \ll 1$) и убрать суммирование по сдвиговым координатам, что формально означает отсутствие поперечной жесткости. Как видно из формул (129), (130) и (112), две оптические моды растут при уменьшении межслоевого расстояния, а акустическая мода при этом убывает.

При дальнейшем увеличении концентрации пространственно разделенных электронов и дырок, как было показано в Главе III, происходит переход от жидкости непрямых экситонов к электрон-дырочной плазме¹⁹. При этом изменения в спектрах коллективных возбуждений уже носят принципиальный характер. Как говорилось в литературном обзоре (см. Главу I), системы электрон-дырочной плазмы имеют две коллективные моды (туннелированием между слоями мы пренебрегаем): оптическую с корневым законом дисперсии ($\omega_{op}^{pl} \sim \sqrt{k}$) и акустическую с линейным законом дисперсии ($\omega_{ac}^{pl} \sim k$). Это означает, что частота противофазных колебаний при $k = 0$ равна нулю, в отличие от экситонной фазы данной системы, где противофазные моды стартовали от энергии дипольного перехода ω_0 . В перпендикулярном магнитном поле гибрид-

¹⁹Характерные значения концентрации, при которой происходит такой фазовый переход, имеют порядок величины 10^9 см⁻² при температурах системы $T \simeq 1.5K$.

ные магнитоплазменные возбуждения описываются следующим образом

$$\omega_{\text{mp}}^{\text{op}} = \sqrt{\omega_{\text{op}}^{\text{pl}2} + \omega_e^2}, \quad (131)$$

$$\omega_{\text{mp}}^{\text{ac}} = \sqrt{\omega_{\text{ac}}^{\text{pl}2} + \omega_h^2}. \quad (132)$$

Легко видеть, что данная магнито­зависимость принципиально отличается от той, что была получена для дипольного кристалла в §4.3 и представлена на Рис.18.

§4.5 Об особенностях коллективных возбуждений в реальных структурах.

До сих пор в расчетах мы имели дело с двумерными бесконечными параллельными плоскостями. Однако, реальные системы представляют собой двойные квантовые ямы конечной толщины с границами в плоскости (x,y) (более подробно см., например, [4–7] и цитируемую там литературу). В таких условиях в решение задачи о коллективных возбуждениях должны быть внесены следующие изменения. А именно:

1. Энергию дипольного перехода ω_0 пересчитаем для системы двойных квантовых ям с конечной толщиной. Это может быть сделано с помощью самосогласованного решения уравнения Шредингера и уравнения Пуассона в z-направлении.

2. Для учета границ в плоскости (x,y) рассмотрим плазменные колебания $e-h$ – системы в форме диска с резким профилем потенциала на краю. Для кристаллической фазы, при условии что размер системы много больше периода решетки, найденный вид колебательного спектра останется неизменным (см. Рис. 15–17).

Для решения первой задачи запишем систему уравнений Шредингера и Пуассона в z -направлении для системы двойных квантовых ям с ширинами L_1 и L_2 . Для электронной подсистемы получим:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_e^\perp} \frac{d^2}{dz^2} + V_{QWe}(z) + V_H(z) \right] \Psi_e(z) = E\Psi_e(z), \quad (133)$$

$$\begin{cases} V_{QWe}(z) = V_e - \frac{4\pi N_e e}{\epsilon} z, & \text{if } z < 0, \quad L_1 < z < (L_1 + D), \\ V_{QWe}(z) = -\frac{4\pi N_e e}{\epsilon} z, & \text{if } 0 < z < L_1, \end{cases}$$

для дырочной подсистемы

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_h^\perp} \frac{d^2}{dz^2} + V_{QWh}(z) + V_H(z) \right] \Psi_h(z) = E\Psi_h(z), \quad (134)$$

$$\begin{cases} V_{QWh}(z) = V_h - \frac{4\pi N_h e}{\epsilon} z, & \text{if } L_1 < z < (L_1 + D), \quad (L_1 + L_2 + D) < z, \\ V_{QWh}(z) = -\frac{4\pi N_h e}{\epsilon} z, & \text{if } (L_1 + D) < z < (L_1 + L_2 + D), \end{cases}$$

где $N_e = N_h$, $m_e^\perp = 0.067m_0$ и $m_h^\perp = 0.6m_0$ – эффективные массы электрона и дырки в z -направлении, соответственно, в КЯ GaAs/AlGaAs, $V_e = 360$ meV – высота электронного барьера, $V_h = 120$ meV – высота дырочного барьера, а хартриевский член $V_H(z)$ удовлетворяет следующему уравнению Пуассона:

$$\frac{d^2 V_H(z)}{dz^2} = -\frac{4\pi N_e e^2}{\epsilon} \left[|\Psi_e(z)|^2 - |\Psi_h(z)|^2 \right]. \quad (135)$$

Решив эту систему и найдя волновые функции $\Psi_e(z)$ и $\Psi_h(z)$, вычислим эффективное кулоновское взаимодействие между пространственно разделенными электроном и дыркой:

$$U_{\text{exc}}^{\text{eff}}(\rho) = -\frac{e^2}{\epsilon} \int dz_e dz_h \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (z_e - z_h)^2}} |\Psi_e(z_e)|^2 |\Psi_h(z_h)|^2, \quad (136)$$

которое заменит точечное взаимодействие U_{exc} (см. формулу (111) в §4.1). В эффективном потенциале (136) численно находим три нижайших уров-

ня энергии с квантовыми числами²⁰ $n = 0, m = 0$; $n = 0, m = 1$ и $n = 1, m = 0$. В результате получаем частоту разрешенного дипольного перехода, то есть перехода с $\Delta m = 1$ (см. Таблицу 1). Она и должна заменить ω_0 в модели диполей с точечными зарядами.

Таблица 1.

структура (Å)	концентрация (cm^{-2})	$\hbar\omega_0$ (meV)
220/200/180	$5 \cdot 10^9$	0.079
220/200/180	$2 \cdot 10^9$	0.083
220/130/180	$5 \cdot 10^9$	0.118
220/130/180	$2 \cdot 10^9$	0.125
220/70/180	$5 \cdot 10^9$	0.211
220/70/180	$2 \cdot 10^9$	0.221

Отдельно стоит обсудить вопрос экранирования непрямого электрон-дырочного взаимодействия. В этой главе мы имели дело в основном с системой электронов и дырок одноконечной плотности. При этом экранирование носит диэлектрический (или экситонный) характер. Изменения кулоновского взаимодействия за счет диэлектрического экранирования не существенны, так энергия связи, а следовательно энергия дипольного перехода непрямого экситона уменьшается не более чем в 2 раза в зависимости от концентрации экситонов. В случае же не равных концентраций проявляется “металлическая” экранировка. В Главе III уже обсуждалась подобная ситуация и как было показано, при соответству-

²⁰Здесь n – радиальное квантовое число, m – азимутальное квантовое число.

ющих концентрациях носителей одного типа заряда, происходит коллапс связанного состояния (энергия связи уменьшается в 10 раз и более). Поэтому в нескомпенсированных системах образование непрямого экситона сильно затруднено. С этим связано и невозможность наблюдения экситонных фаз в системе пространственно разделенных электронов и дырок различной концентрации, таких как экситонная жидкость и дипольный кристалл.

Теперь перейдем ко второй проблеме, указанной в начале этого параграфа. А именно, обсудим спектр магнитоплазменных колебаний пространственно разделенной электрон-дырочной системы с конечным размером в плоскости (x, y) .

Электростатический потенциал $\varphi(\mathbf{r}, z)$ во всем пространстве удовлетворяет в квазистатическом приближении уравнению Пуассона:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}, z) = -4\pi\{\rho_1(\mathbf{r})\delta(z - z_1) + \rho_2(\mathbf{r})\delta(z - z_2)\}/\epsilon. \quad (137)$$

Переходя к фурье-компонентам и используя уравнение непрерывности и закон Ома, получим систему уравнений относительно полных электрических полей для σ^+ и σ^- поляризаций, аналогично работам [137]–[141], с дополнительным условием для радиальной компоненты тока на краю диска: $j_r(r = R) = 0$.

Таким образом, решая уравнения для компонент полного электрического поля $E_{\pm}^{tot}(r, \phi, z_1)$ и $E_{\pm}^{tot}(r, \phi, z_2)$, для определения спектра коллективных возбуждений получим следующее уравнение:

$$\zeta_{1,1}^{\pm}(\omega)\zeta_{2,2}^{\pm}(\omega) - \zeta_{1,2}^{\pm}(\omega)\zeta_{2,1}^{\pm}(\omega) = 0. \quad (138)$$

В друдевском приближении выражение для ζ -функций имеет вид:

$$\zeta_{k,l}^{\pm}(\omega) = \delta_{k,l} - \frac{\Omega_{k,l}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{c,l} + i\gamma_l)}, \quad (139)$$

где e_l , m_l^* и γ_l – заряд, эффективная масса и диссипативное затухание носителей заряда в слое l , соответственно, $\omega_{c,l} = -e_l B / m_l^* c$ – циклотронная частота и

$$\Omega_{k,l}^2 = \frac{\alpha\pi \langle N_{k,l} \rangle e_l^2}{m_l^* \epsilon R}, \text{ если } k = l \text{ и } \Omega_{k,l}^2 = \frac{\alpha\pi \langle N_{k,l} \rangle e_l^2}{m_l^* \epsilon R} e^{-D/R}, \text{ если } k \neq l.$$

Значение коэффициента α ($\simeq 1.2$) для однослойных GaAs/AlGaAs структур было получено в работе [142], $\langle N_{k,l} \rangle$ – средняя концентрация в слоях. Далее будем рассматривать бездиссипативный случай ($\gamma_l = 0$). Тогда для $D/R \ll 1$ и равных концентраций $\langle N_{k,l} \rangle = N_0$ в нулевом магнитном поле присутствуют две коллективные моды: оптическая и акустическая с соответствующими частотами

$$\omega_{op} = \sqrt{\frac{2\alpha\pi N_0 e^2}{\mu \epsilon R}} \quad \text{и} \quad \omega_{ac} = \sqrt{\frac{4\alpha^2 \pi N_0 e^2 D}{(m_e + m_h) \epsilon R^2}}. \quad (140)$$

В перпендикулярном магнитном поле зависимости коллективных мод представлены на Рис. 19. Кружки соответствуют случаю равных концентраций, а треугольники – случаю, когда концентрация электронов в два раза больше, чем дырок. К сожалению, поведение исследуемых мод дипольного кристалла (см. Рис. 18) практически не отличается от зависимости, представленной на Рис. 19. Это затрудняет экспериментальное наблюдение фазового перехода экситонный кристалл – электрон-дырочная жидкость. Однако в виду того, что природа этих двух фазовых состояний различна, энергии коллективных возбуждений в них определяются разными параметрами. Так например, энергия дипольного перехода ω_0

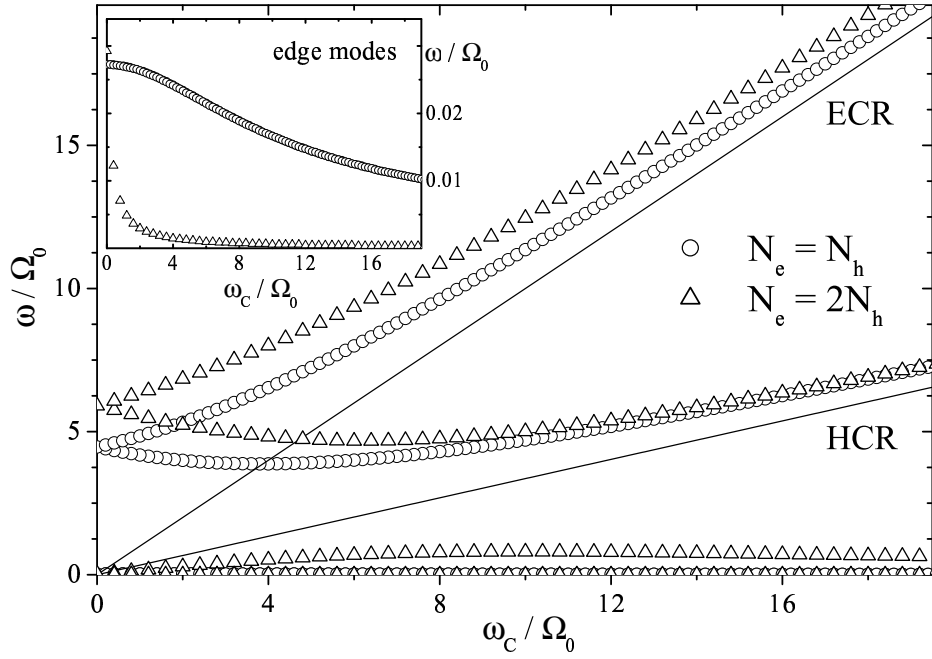


Рис. 19: Полевые зависимости магнитоплазменных резонансов в системе конечного радиуса с пространственно-разделенными электронами и дырками одинаковой (\circ) и разной (\triangle) концентрации. $\Omega_0^2 = 2\alpha\pi N_0 e^2 / m_0 \epsilon R$, $D/R = 10^{-4}$.

пропорциональна $1/D$, а энергия оптических плазменных колебаний зависит от отношения N_0/R . В случае же больших концентраций и большого радиуса системы, таких что $A = \Omega_0 \sqrt{\epsilon R} / c \geq 1$ зависимости плазменных частот от магнитного поля сильно видоизменяются [142, 143], что позволяет достаточно хорошо различить коллективные возбуждения дипольного кристалла и электрон-дырочной плазмы. В указанном случае последние носят название плазмон-поляритонных мод.

Таким образом, в этой главе исследованы свойства новой экситонной фазы в двухслойной системе с низкой плотностью пространственно разделенных электронов и дырок — дипольного кристалла. Найден спектр коллективных возбуждений двумерной экситонной треугольной решетки в нулевом магнитном поле. В спектре присутствует четыре коллек-

тивных возбуждения: два оптических (продольное и поперечное) и два акустических (продольное и поперечное). Частоты оптических мод при нулевых импульсах не равны нулевым значениям (в отличие от вигнеровского кристалла), а имеют энергию дипольного перехода, которая для чисто двумерного случая $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2}{\epsilon\mu D^3}}$. Эта энергия также рассчитана и для систем двойных квантовых ям с конечной толщиной. Это сделано с помощью самосогласованного решения уравнения Шредингера и уравнения Пуассона в z-направлении. Кроме этого показано, что учет диэлектрического экранирования непрямого кулоновского взаимодействия приводит к перенормировке частоты ω_0 . В тоже время более сильное металлическое экранирование вызывает коллапс непрямого экситона и фазовый переход в состояние несфазированных электронного и дырочного кристаллов, либо при бóльших температурах и концентрациях в электрон-дырочную плазму.

Был найден спектр синфазных и противофазных колебаний в перпендикулярном магнитном поле. При больших магнитных полях оптические моды выходят на электронную и дырочную циклотронные моды, а акустические — с ростом поля убывают.

Проведено исследование поведения спектра коллективных возбуждений экситонного кристалла при переходе к фазе электрон-дырочной плазмы. Рассмотрены плазменные и магнитопламенные колебания электрон-дырочной жидкости в системе двух параллельных бесконечных плоскостей и в двухслойном диске с резким профилем потенциала на границе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

Таким образом, при изучении энергетических спектров коллективных возбуждений в системах одиночных и двойных квантовых ям с малой плотностью носителей заряда были получены следующие результаты:

1. Рассчитаны изменения энергии связи и силы осциллятора экситонного состояния, возникающие в результате экранирования кулоновского взаимодействия квазидвумерным электронным газом в квантовых ямах GaAs/AlGaAs шириной $50\text{\AA} - 300\text{\AA}$. Показано, что учет нелинейного отклика приводит к более сильному экранированию по сравнению с линейным приближением (для ямы шириной 300\AA $r_s^c = 8.3$). Исследовано исчезновение возбужденных $2s$ и $2p$ состояний.

2. Показано, что учет корреляционных эффектов в рамках приближения локального поля приводит к увеличению жесткости системы, ослаблению экранирования внесенного заряда и, как следствие, к увеличению пороговой концентрации квазидвумерного электронного газа, при которой происходит резкое уменьшение энергии связи экситона.

3. Исследована температурная зависимость критического параметра r_s^c , при котором разрушается экситонное состояние. При увеличении T эффективность экранировки снижается и критический параметр r_s^c уменьшается. Построена фазовая диаграмма экситонного состояния.

4. Изучены эффекты экранирования прямого экситона и пространственно непрямого экситона в двухслойных системах. Получены зависимости критического параметра r_s^c от расстояния D между КЯ.

5. Решена задача о связанном состоянии пространственно разделенных экситона и электрона, то есть непрямого триона X^- , в двух предельных случаях $D \ll a_B$ и $D \gg a_B$. Найдена энергия связи триона для различных межслоевых расстояний. Изучен вопрос об экранировании данного связанного состояния двумерным электронным газом. Исследован эффект увлечения в системе пространственно разделенных экситонов и электронов.

6. В двухслойной электрон–дырочной системе в области низких плотностей пространственно разделенных электронов и дырок исследована новая экситонная фаза – дипольный кристалл. Найден спектр коллективных возбуждений двумерной экситонной треугольной решетки в нулевом и конечных магнитных полях. Исследовано изменение спектра коллективных возбуждений дипольного кристалла при плавлении и переходе от кристаллической фазы к электрон–дырочной плазме.

В заключении автор хотел бы поблагодарить своего научного руководителя профессора Лозовика Юрия Ефремовича за предложенную тему исследований и постоянное внимание в процессе подготовки диссертации, а также всех своих соавторов и сотрудников лаборатории неравновесных электронных процессов и теоретического отдела Института физики твердого тела РАН за помощь в работе и полезные рекомендации. Особую благодарность автор выражает член-корреспонденту Российской Академии Наук Кукушкину Игорю Владимировичу.

Приложение 1.

В приближении локального поля $v_{\text{eff}}(r)$ может быть записана в терминах парной корреляционной функции ([119] и [29]):

$$v_{\text{eff}}(r) = - \int_r^\infty \frac{dU_{\text{eff}}(r)}{dr} g(r) dr. \quad (\text{П1.1})$$

Выражение для парной корреляционной функции $g(r) = g_{\uparrow\uparrow}(r) + g_{\uparrow\downarrow}(r)$ имеет вид:

$$g(r) - 1 = \frac{1}{k_F^2} \int_0^\infty J_0(qr) [S(q) - 1] q dq, \quad (\text{П1.2})$$

где $S(q)$ – статический форм-фактор, который выражается, используя флуктуационно-диссипационную теорему [121], следующей формулой:

$$S(q) = -\frac{2}{k_F^2} \int_0^\infty \text{Im}[\chi(q, \omega)] d\omega. \quad (\text{П1.3})$$

В нулевом приближении рассчитать статический форм-фактор можно, исходя из линхардовской восприимчивости, которая определяется в §2.2 (см. формулы (17) и (21)). В результате вычисления интегралов, получим:

$$S(q) = \begin{cases} 1 - \frac{\arccos(q/2k_F)}{\pi} + \frac{q\sqrt{1-(q/2k_F)^2}}{2\pi k_F}, & \text{если } q \leq 2k_F, \\ 1 & \text{если } q > 2k_F. \end{cases} \quad (\text{П1.4})$$

Приложение 2.

Для состояний 2S и 2P правильные функции нулевого приближения записываются следующим образом (см., например [110]):

$$\psi_a = c_1^+ \psi_{2S} + c_2^+ \psi_{2P}, \quad (\text{П2.1})$$

$$\psi_b = c_1^- \psi_{2S} + c_2^- \psi_{2P}, \quad (\text{П2.2})$$

с собственными значениями энергии

$$E_{a(b)} = E_2 + \frac{1}{2} [W_{2S,2S} + W_{2P,2P} \pm \Delta W], \quad (\text{П2.3})$$

где ψ_{2S} и ψ_{2P} – волновые функция невозмущенных 2S и 2P состояний, а $E_2 = -\frac{\mu e^4}{2\hbar^2 \epsilon^2}$ – энергия состояния с квантовым числом $n = 2$,

$$c_1 = \left\{ \frac{W_{2S,2P}}{2|W_{2S,2P}|} \left[1 \pm \frac{W_{2S,2S} - W_{2P,2P}}{\Delta W} \right] \right\}^{1/2}, \quad (\text{П2.7})$$

$$c_2 = \pm \left\{ \frac{W_{2P,2S}}{2|W_{2S,2P}|} \left[1 \mp \frac{W_{2S,2S} - W_{2P,2P}}{\Delta W} \right] \right\}^{1/2}, \quad (\text{П2.5})$$

$$\Delta W = \sqrt{(W_{2S,2S} - W_{2P,2P})^2 + 4|W_{2S,2P}|^2}, \quad (\text{П2.6})$$

$$W_{ij} = \frac{e^2 D^2}{2\epsilon} \int \psi_i \frac{1}{r^3} \psi_j r dr d\varphi, \quad (\text{П2.7})$$

в частности

$$W_{2P,2P} = \frac{e^2 D^2 e^{(-a/a_B)}}{12\epsilon a_B^3}, \quad (\text{П2.8})$$

$$W_{1S,2S} = \frac{\sqrt{2} e^2 D^2 a_B e^{-3a/2a_B} - 2a \text{Ei}(1, 3a/2a_B)}{\epsilon a a_B^3}, \quad (\text{П2.13})$$

$$W_{1S,1S} = \frac{2e^2 D^2 [a_B - 2a \text{Ei}(1, 2a/a_B) e^{(2a/a_B)}] e^{(-2a/a_B)}}{\epsilon a a_B^3}, \quad (\text{П2.10})$$

$$W_{2S,2S} = \frac{e^2 D^2 [a_B - 2a \text{Ei}(1, a/a_B) e^{(a/a_B)} + a/4] e^{(-a/a_B)}}{\epsilon a a_B^3} . \quad (\text{П2.11})$$

Здесь $\text{Ei}(m, x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^m} dt$ – это экспоненциальный интеграл [144], $a \simeq 1.37D$ – это радиус за пределами которого работает приближение, основанное на разложениях и предположениях в области $D \ll a_B$ (см. §3.3). Значение для a получено из сравнения возмущения $e^2 D^2 / 2\epsilon r^3$ с исходным потенциалом $|-e^2 / \epsilon \sqrt{r^2 + D^2}|$.

Используя вышеуказанные формулы, легко получить выражения для матричных элементов $W_{1S,a}$ и $W_{1S,b}$:

$$W_{1S,a} = c_1^+ W_{1S,2S} + c_2^+ W_{1S,2P}, \quad (\text{П2.12})$$

$$W_{1S,b} = c_1^- W_{1S,2S} + c_2^- W_{1S,2P}. \quad (\text{П2.13})$$

Список литературы

- [1] R. S. Knox, *Theory of Excitons*, Solid State Physics, Supplement 5 Academic Press, New York, (1963).
- [2] R.J. Elliott, *Polarons and Excitons*, Edinburgh - London (1963); "Symmetry of Excitons in Cu_2O ", Phys. Rev. **124**, 340–345 (1961).
- [3] I.V. Kukushkin and V.B. Timofeev, "Magneto-optics of strongly correlated two-dimensional electrons in single heterojunctions", Adv. in Phys. **45**(3), 147–242 (1996).
- [4] I.V. Kukushkin, J.H. Smet, K.von Klitzing, et al., "Cyclotron resonance of composite fermions", Nature **415**(6870), 409–412 (2002)
- [5] G. Bastard, *Wave Mechanics Applied to Semiconductor Heterostructures*, Les Ulis: Les Editions de Physique, p.357 (1988).
- [6] М.Ю. Акимов, И.В. Кукушкин, С.И. Губарев и др., "Размерный Магнетоплазменный Резонанс 2Д-дырок в (001) GaAs/AlGaAs Квантовых Ямах", Письма ЖЭТФ **72**(9), 662–667 (2000)[JETP Lett. **72**, 460–463 (2000)].
- [7] С.И. Губарев, И.В. Кукушкин, С.В. Товстоног и др., "Экранирование Экситонных Состояний 2Д-носителями Заряда Низкой Плотности в GaAs/AlGaAs Квантовых Ямах", Письма ЖЭТФ **72**, 469–474 (2000).
- [8] N.F. Mott, "The basis of the electron theory of metals, with special reference to the transition metals", Pros. Phys. Soc. Lond. **62**, 416–422 (1949).

- [9] N.F. Mott, "The transition to the metallic state", *Philos. Mag.* **6**, 287–309 (1961).
- [10] F.I. Rogers, H.C. Graboske, and D.J. Harwood, "Bound Eigenstates of the Static Screened Coulomb Potential", *Phys. Rev. A* **1**, 1577–1586 (1970).
- [11] F. Martino, G. Lindell, K.F. Berggren, "Metal-to-Nonmetal Transition in n-Type Many-Valley Semiconductors", *Phys. Rev. B* **8**, 6030–6032 (1973).
- [12] R.C. Miller, D.A. Kleinman, W.T. Tsang, and A.C. Gossard, "Observation of the excited level of excitons in GaAs quantum wells", *Phys. Rev. B* **24**, 1134–1136 (1981).
- [13] G. Finkelstein, H. Strikman, and I. Bar-Josef, "Optical Spectroscopy of a Two-Dimensional Electron Gas near the Metal-Insulator Transition", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 976–979 (1995).
- [14] V. Huard, R. T. Cox, K. Saminadayar, A. Arnoult and S. Tatarenko, "Bound States in Optical Absorption of Semiconductor Quantum Wells Containing a Two-Dimensional Electron Gas", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 187–190 (2000).
- [15] Gerrit E.W. Bauer, "Excitons in the quasi-two-dimensional electron gas", *Phys. Rev. B* **45**, 9153–9162 (1992).
- [16] D.A. Kleinman, "Theory of excitons in semiconductor quantum wells containing degenerate electrons or holes", *Phys. Rev. B* **32**, 3766–3771 (1985).

- [17] A. Dubus, J. Devooght, and J. C. Dehaes, "Improved age-diffusion model for low-energy electron transport in solids. II. Application to secondary emission from aluminum", *Phys. Rev. B* **36**, 5110–5119 (1987).
- [18] Ben Yu-Kuang Hu, S.K. Sarker, J.W. Wilkins, "Quantum kinetic-equation approach to semiconductor hot-carrier screening", *Phys. Rev. B* **39**, 8468–8475 (1989).
- [19] G. Y. Hu and R. F. O'Connell, "Generalization of the Lindhard dielectric function to include fluctuation effects", *Phys. Rev. B* **40**, 3600–3604 (1989).
- [20] E. Engel and S. H. Vosko, "Wave-vector dependence of the exchange contribution to the electron-gas response functions: An analytic derivation", *Phys. Rev. B* **42**, 4940–4953 (1990).
- [21] R. Daling, W. van Haeringen, B. Farid, "Plasmon dispersion in silicon obtained by analytic continuation of the random-phase-approximation dielectric matrix", *Phys. Rev. B* **44**, 2952–2960 (1991).
- [22] Qian Dingrong, L. Liu, W. Szuszkiewicz, W. Bardyszewski, "Influence of doping on the dielectric function in narrow-gap semiconductors", *Phys. Rev. B* **44**, 5540–5549 (1991).
- [23] Nguyen Van Trong and Günter Mahler, "Field-dependent screening and dephasing in semiconductor Bloch equations", *Phys. Rev. B* **54**, 1766–1774 (1996).
- [24] Martin Mosko and Pavel Vagner, "Born approximation versus the exact approach to carrier-impurity collisions in a one-dimensional semiconductor: Impact on the mobility", *Phys. Rev. B* **59**, R10445–R10448 (1999).

- [25] F.E. Leys, N.H. March, G.G. N. Angilella, and D. Lamoen, "Self-consistent nonlocal linear-response theory of a relativistic electron gas", Phys. Rev. B **67**, 113105 (3 pages) (2003).
- [26] J. Lindhard, "On the properties of a gas of charge particles", K. Dan. Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **28**(8), 1–57 (1954).
- [27] M. Jonson, "Electron correlations in inversion layers", J. Phys. C **9**, 3055–3071 (1976).
- [28] Дж. Займан, *Современная квантовая теория*, Москва: Мир (1971).
- [29] K.S. Singwi and M.P. Tosi, in *Solid State Physics*, edited by H. Ehrenreich, F. Seitz, and D. Turnbull, Vol.36, Academic, New York (1981).
- [30] F. Stern, "Polarizability of a two-dimensional electron gas", Phys. Rev. Lett. **18**, 546–548 (1967).
- [31] T. Ando, A.B. Fauler, F. Stern, "Electronic properties of two-dimensional systems", Rev. Mod. Phys. **54**(2), 437–672 (1982).
- [32] K.S. Singwi, M.P. Tosi, R.H. Land and A. Sjölander, "Electron correlations at metallic densities", Phys. Rev. **176**, 589–599 (1968).
- [33] L.V. Keldysh, D.A. Kirzhnits, and A.A. Maradudin, *The dielectric function of condensed systems*, North-Holland, Amsterdam (1989).
- [34] Klaus Morawetz, "Dynamical local field, compressibility and frequency sum rules for quasiparticles", cond-mat/0104229, 1–17 (2002).
- [35] N. Iwamoto and David Pines, "Theory of electron liquids. I. Electron-hole pseudopotentials." Phys. Rev. B **29**, 3924–3935 (1984).

- [36] N. Iwamoto, E. Kroatscheck and David Pines, "Theory of electron liquids. II. Static and dynamic form factors, correlation energy, and plasmon dispersion." *Phys. Rev. B* **29**, 3936–3951 (1984).
- [37] R.W. Shaw, "Exchange and correlation in the theory of simple metals", *J. Phys. C: Solid State Phys.* **3**(5), 1140–1158 (1970).
- [38] J.P. Eisenstein, L.N. Pfeiffer and K.W. West, "Negative compressibility of interacting two-dimensional electron and quasiparticle gases", *Phys. Rev. Lett.* **68**, 674–677 (1992).
- [39] С.И. Губарев, О.В. Волков, В.А. Ковальский, Д.В. Кулаковский, И.В. Кукушкин, "Влияние экранирования двумерными носителями заряда на энергию связи экситонных состояний в GaAs/AlGaAs квантовых ямах", *Письма ЖЭТФ* **76**(9), 673–677 (2002).
- [40] A.L. Fetter, "Electrodynamics and thermodynamics of a classical electron surface layer", *Phys. Rev. B* **10**, 3739–3745 (1974).
- [41] А.В. Ларионов, В.Б. Тимофеев, И. Хвам, К. Соеренсен, "Коллективное состояние межямных экситонов в GaAs/AlGaAs двойных квантовых ямах при импульсном резонансном возбуждении", *Письма ЖЭТФ* **75**, 233–238 (2002).
- [42] С.В. Товстоног, И.В. Кукушкин, Л.В. Кулик и В.Е. Кирпичев, "Акустические магнетоплазменные возбуждения в двойных электронных слоях", *Письма ЖЭТФ* **76**, 592–597 (2002).

- [43] S. V. Tovstonog, L. V. Kulik, I. V. Kukushkin, A. V. Chaplik, et al., "Acoustical and optical magnetoplasma excitations in a bilayer electron system", *Phys. Rev. B* **66**, 241308 (4 pages) (2002).
- [44] M.T. Bootsmann, C.M. Hu, Ch. Heyn, et al., "Acoustic plasmons and indirect intersubband excitations in tunneling-coupled GaAs-AlGaAs double quantum wells" *Phys. Rev. B* **67**, 121309(R) (4 pages) (2003).
- [45] J.P. Cheng, J. Kono and B.D. McCombe et al., "Evidence for a Stable Excitonic Ground State in a Spatially Separated Electron-Hole System", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 450–453 (1995).
- [46] G.R. Aizin, B. Laikhtman and Godfrey Gumbs, "Plasmons in coupled electron-hole double quantum wells", *Phys.Rev.B*, **64**, 125317–125325 (2001).
- [47] J. Kolorenc, L. Smrcka, and P. Streda, "Interlayer Hall effect in double quantum wells subject to in-plane magnetic fields", *Phys.Rev.B*, **66**, 085301–085308 (2002).
- [48] Yu. E. Lozovik, O.L.Berman, M.Willander, "Superfluidity of indirect excitons and biexcitons in coupled quantum wells and superlattices", *J. Phys. C*, **14**(47), 12457–12475 (2002).
- [49] Y.B. Vasilyev, V.A. Solov'ev, B.Y. Mel'tser, et al., "Control by an electric field of electron-hole separation in type-II heterostructures", *Solid State Commun.*, **124**(9), 323–326 (2002).
- [50] D.W. Snoke, "When should we say we have observed Bose condensation of excitons?", *Phys. Stat. Sol. (b)* **238**, 389–396 (2003).

- [51] D.W. Snoke, S. Denev, Y. Liu et al., "Long-range transport in excitonic dark states in coupled quantum wells", *Nature* **418**, 754–757 (2002).
- [52] V. V. Krivolapchuk, E. S. Moskalenko, A. L. Zhmodikov, "Specific features of the indirect exciton luminescence line in GaAs/AlGaAs double quantum wells", *Phys. Rev. B* **64**, 045313 (2001).
- [53] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, "О возможности сверхтекучести разделенных в пространстве электронов и дырок при их спаривании; новый механизм сверхпроводимости", *Письма ЖЭТФ* **22**(11), 556–559 (1975); "Новый механизм сверхпроводимости: спаривание между пространственно разделенными электронами и дырками", *ЖЭТФ* **71**, 738–753 (1976), см. также когерентные свойства электрон-дырочных систем в работах Л. В. Келдыш, Ю. В. Копаев, *ФТТ*, **6**, 2791 (1964) и Л. В. Келдыш, А.Н. Козлов, *ЖЭТФ*, **54**, 978 (1968).
- [54] А.В. Ключник, Ю.Е. Лозовик, "Влияние межзонных переходов на токовые состояния в системах со спариванием электронов и дырок", *ЖЭТФ* **76**, 670–686 (1979); Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, "Межзонные переходы и возможность токовых состояний в системах с электрон-дырочным спариванием", *Письма ЖЭТФ* **25**, 18–21 (1977); Yu.E.Loikov, M.Willander, "Excitons and magnetoexcitons in coupled quantum nanostructures: the role of a dirty environment", *Appl.Phys. A* **71**, 379–390 (2000).
- [55] Ю.Е. Лозовик, А.М. Рувинский, "Магнитоэкситонное поглощение в связанных квантовых ямах", *ЖЭТФ* **112**, 1791–1808 (1997).

- [56] K. von Klitzing, G. Dorda, and M. Pepper, "New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance", *Phys.Rev.Lett.* **45**, 494–497 (1980).
- [57] D.C. Tsui, H.L. Stormer, and A.C. Gossard, "Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit", *Phys.Rev.Lett.* **48**, 1559–1562 (1982).
- [58] Ю.Е. Лозовик, И. В. Овчинников, "Нестабильность БКШ двухслойной системы композитных фермионов", *Письма ЖЭТФ*, **79**(2), 86–91 (2004).
- [59] Takao Morinari, "Tunneling effect on the composite fermion pairing state in bilayer quantum Hall systems", *Phys. Rev. B* **65**, 115319 [5 pages] (2002).
- [60] H.C.A. Oji, A.H. MacDonald, and S.M. Girvin, "Superlattice magnetoroton bands", *Phys.Rev.Lett.* **58**, 824–827 (1987).
- [61] A. Bertoni, P. Bordone, R. Brunetti, C. Jacoboni, and S. Reggiani, "Quantum Logic Gates based on Coherent Electron Transport in Quantum Wires", *Phys.Rev.Lett.* **84**, 5912–5915 (2000).
- [62] S. Charbonneau, M. L. W. Thewalt, Emil S. Koteles and B. Elman, "Transformation of spatially direct to spatially indirect excitons in coupled double quantum wells", *Phys. Rev. B* **38**, 6287–6290 (1988).
- [63] J. E. Golub, P. F. Liao, D. J. Eilenberger, J. P. Harbison and L. T. Florez, "Measurements of the electron-hole binding-energy in coupled

- GaAs/AlGaAs quantum wells", *Solid State Commun.* **72**(8), 735–738 (1989).
- [64] J. E. Golub, K. Kash, J. P. Harbison, and L. T. Florez, "Long-lived spatially indirect excitons in coupled GaAs/AlGaAs quantum wells", *Phys. Rev. B* **41**, 8564–8567 (1990).
- [65] R. P. Leavitt and J. W. Little, "Excitonic effects in the optical spectra of superlattices in an electric field", *Phys. Rev. B* **42**, 11784–11790 (1990).
- [66] M. M. Dignam and J. E. Sipe, "Exciton states in coupled double quantum wells in a static electric field", *Phys. Rev. B* **43**, 4084–4096 (1991).
- [67] F. M. Peeters and J. E. Golub, "Binding energy of the barbell exciton", *Phys. Rev. B* **43**, 5159–5162 (1991).
- [68] Garnett W. Bryant, "Indirect-to-direct crossover of laterally confined excitons in coupled quantum wells", *Phys. Rev. B* **46**, 1893–1896 (1992).
- [69] Ю.Е. Лозовик, О.Л. Берман, "Фазовые переходы в системе пространственно-разделенных электронов и дырок", *ЖЭТФ* **111**, 1879–1895 (1997); "Квантовая кристаллизация двумерных дипольных систем", *ФТТ*, **40**(7), 1350–1355 (1998).
- [70] Yu.E. Lozovik, E.A. Rakoch, "Structure and melting of dipole clusters", *Phys. Lett. A* **235**(1), 55–64 (1997)

- [71] Z. Donkó, G.J. Kalman, et al., "Dynamical structure functions, collective modes, and energy gap in charged-particle bilayers", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 226804 (2003).
- [72] R.J. Elliott, R. Loudon, "Theory of fine structure on the absorption edge in semiconductors", *J. Phys. Chem. Sol.* **8**, 382–388 (1959).
- [73] Л.П. Горьков и И.Е. Дзялошинский, "К теории экситона Мотта в сильном магнитном поле", *ЖЭТФ* **53**, 717–722 (1967).
- [74] M.A. Lampert, "Mobile and Immobile Effective-Mass-Particle Complexes in Nonmetallic Solids", *Phys. Rev. Lett.* **1**, 450–453 (1958).
- [75] J. J. Palacios, D. Yoshioka, and A. H. MacDonald, "Long-lived charged multiple-exciton complexes in strong magnetic fields", *Phys. Rev. B* **54**, R2296–R2299 (1996).
- [76] A. B. Dzyubenko and A.Yu. Sivachenko, "Charged magnetoexcitons in two-dimensions: Magnetic translations and families of dark states", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4429–4432 (2000).
- [77] A. B. Dzyubenko, "Charged hydrogenic problem in a magnetic field: Noncommutative translations, unitary transformations, and coherent states", *Phys. Rev. B* **65**, 035318 (2002).
- [78] O. Homburg, K. Sebal et al., "Negatively charged trion in ZnSe single quantum wells with very low electron densities", *Phys. Rev. B* **62**, 7413–7419 (2000).

- [79] C. Riva, F.M. Peeters and K. Varga, "Excitons and charged excitons in semiconductor quantum wells", *Phys. Rev. B* **61**, 13873–13881 (2000).
- [80] A. Esser, E. Runge, R. Zimmermann and W. Langbein, "Electron and hole trions in wide GaAs quantum wells", *Phys. Stat. Sol. (b)* **221**, 281–286 (2000).
- [81] B. Stébé, G. Munsch et al., "Excitonic trion X^- in semiconductor quantum wells" *Phys. Rev. B* **56**, 12454–12461 (1997).
- [82] V.P. Kochereshko, G.V. Astakhov et al., "Excitons and trions in II-VI quantum wells with modulation doping", *Phys. Stat. Sol. (b)* **221**, 345–348 (2000).
- [83] V. S. Babichenko and M. N. Kiselev, *J. of the Phys. Soc.* **2**, 311 (1992).
- [84] В. С. Бабиченко, М. Н. Киселев, "Экситонный переход индуцированный легированием", *Письма в ЖЭТФ* **57**, 174–178 (1993).
- [85] Р.А. Сергеев, Р.А. Сурис, " X^+ трион в системе с пространственным разделением носителей", Тезисы докладов VI Российской конференции по физике полупроводников, Спб.: Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, с. 75 (2003).
- [86] М.Б. Погребинский, "Взаимное увлечение носителей тока в системе полупроводник – диэлектрик – полупроводник", *ФТП* **11**, 637–644 (1977).
- [87] P.J. Price, "Hot-electron effects in heterolayers", *Physica B & C* **117**, 750–752 (1983).

- [88] T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West , "Mutual friction between parallel two-dimensional electron systems", Phys. Rev. Lett. **66**, 1216–1219 (1991).
- [89] U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman , "Coupled electron-hole transport", Phys. Rev. Lett. **68**, 1196–1199 (1992).
- [90] T. J. Gramila, J.P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer and K. W. West, "Evidence for virtual-phonon exchange in semiconductor heterostructures", Phys. Rev. B **47**, 12957–12960 (1993).
- [91] Yu. M. Sirenko, P. Vasilopoulos, "Influence of dimensionality and statistics on the Coulomb coupling between electron gases or electron-and-hole gases", Phys. Rev. B **46**, 1611–1619 (1992).
- [92] H. C. Tso, P. Vasilopoulos, F. M. Peeters , "Direct Coulomb and phonon-mediated coupling between spatially separated electron gases", Phys. Rev. Lett. **68**, 2516–2519 (1992).
- [93] Karsten Flensberg and Ben Yu-Kuang Hu , "Coulomb Drag as a Probe of Coupled Plasmon Modes in Parallel Quantum Wells", Phys. Rev. Lett. **73**, 3572–3575 (1994).
- [94] Giovanni Vignale, A. H. MacDonald, "Drag in Paired Electron-Hole Layers", Phys. Rev. Lett. **76**, 2786–2789 (1996).
- [95] Ю.Е. Лозовик, М.В. Никитков, "Кинетические свойства системы пространственно разделенных экситонов и электронов при наличие Бозе-конденсата экситонов", ЖЭТФ **116**, No.4(10), 1440–1449 (1999);

- "Эффекты увлечения в двухслойной системе пространственно разделенных электронов и экситонов", *ЖЭТФ* **111**(3), 1107–1119 (1997).
- [96] E. Wigner, "On the Interaction of Electrons in Metals", *Phys. Rev.* **46**, 1002–1011 (1934).
- [97] Ю.Е. Лозовик, В.И. Юдсон, "Кристаллизация двумерного электронного газа в магнитном поле", *Письма ЖЭТФ* **22**(1), 26–28 (1975).
- [98] Ю.Е. Лозовик, Д.Р. Мусин, В.И. Юдсон, "Область существования двумерного электронного кристалла в сильном магнитном поле", *ФТТ* **21**(7), 1974–1977 (1979); Yu.E. Lozovik, S.M. Apenko and A.V. Klyuchnik, "Two-dimensional electron crystal in magnetic field. Topological phase transitions and stability region", *Solid State Commun.*, **36**, 458–492 (1980); Yu. E. Lozovik and D.R. Musin, "Stability region of the two-dimensional electron crystal in strong magnetic fields", *Phys. Stat. Sol.(b)*, **104**, 711–717 (1981).
- [99] C. C. Grimes and G. Adams , "Evidence for a Liquid-to-Crystal Phase Transition in a Classical, Two-Dimensional Sheet of Electrons ", *Phys. Rev. Lett.* **42**, 795–798 (1979).
- [100] R. L. Willett, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West, and K. W. Baldwin , "Termination of the series of fractional quantum hall states at small filling factors", *Phys. Rev. B* **38**, 7881–7884 (1988).
- [101] H. Buhmann, W. Joss, K. von Klitzing, I. V. Kukushkin, G. Martinez, A. S. Plaut, K. Ploog, and V. B. Timofeev, "Magneto-optical evidence for

- fractional quantum Hall states down to filling factor $1/9$ ", Phys. Rev. Lett. **65**, 1056–1059 (1990).
- [102] А.В. Чаплик, "Возможная кристаллизация носителей заряда в инверсионных слоях низкой плотности", ЖЭТФ **62**, 746–753 (1972) [Sov. Phys. JETP **35**, 395 (1972)].
- [103] H. Fukuyama, "Two-dimensional wigner crystal under magnetic field", Solid State Commun. **17**, 1323–1326 (1975).
- [104] Vladimir I. Falko, "Optical branch of magnetophonons in a double-layer Wigner crystal", Phys. Rev. B **49**, 7774–7777 (1994).
- [105] R.Z. Vitlina and A.V. Chaplik, "Plasma oscillations of multicomponent two dimensional systems", Sov. Phys. JETP **54**(3), 536–541 (1981).
- [106] S. Das Sarma and A. Madhukar, "Collective modes of spatially separated, two-component, two-dimensional plasma in solids", Phys. Rev. B **23**, 805–815 (1981).
- [107] S. Das Sarma, "Dispersion of magnetoplasmons in layered systems", Phys. Rev. B **28**, 2240–2243 (1983).
- [108] D.S. Kainth, D. Richards, H.P. Hughes, M.Y. Simmons, and D.A. Rutchie, "Temperature-dependent Landau damping of the acoustic plasmon in a bilayer system", Phys. Rev. B **57**, R2065–R2068 (1998); "Electron correlations in an electron bilayer at finite temperature: Landau damping of the acoustic plasmon", J. Phys.: Condens. Matter **12**, 439–466 (2000).

- [109] Xin-Hai Liu, Xue-Hua Wang, Ben-Yuan Gu, "Effects of interwell coupling on plasmon modes in symmetric double square quantum well structures", *Phys. Rev. B* **64**, 195322 (9 pages) (2001).
- [110] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, "*Квантовая механика*", М.: Наука, (1989).
- [111] Д.В. Кулаковский, С.И. Губарев, Ю.Е. Лозовик, "Экранирование экситонных состояний квазидвумерным электронным газом в квантовых ямах", *Письма ЖЭТФ* **74**, 123–126 (2001).
- [112] D.V.Kulakovskii, S.I.Gubarev, Yu.E.Loikov, "Screening of the Excitonic States by Quasi-Two-Dimensional Electron Gas in Quantum Wells", Program of 3rd International Conference "Physics of Low-Dimensional Structures", p.101 (2001).
- [113] Д.В. Кулаковский, С.И. Губарев, Ю.Е. Лозовик, "Свойства экситонных состояний в квантовых ямах GaAs/AlGaAs в присутствии двумерного электронного газа", *ЖЭТФ* **121**(4), 1–10 (2002).
- [114] О.В. Волков, И.В. Кукушкин, Д.В. Кулаковский и др., "Бистабильные зарядовые состояния в фотовозбужденной квазидвумерной электрон-дырочной системе", *Письма ЖЭТФ* **71**(8), 465–471 (2000).
- [115] Н. Ehrenreich, М.Н. Cohen, "Self-Consistent Field Approach to the Many-Electron Problem", *Phys. Rev.* **115**, 786–790 (1959).
- [116] D.V. Kulakovskii, А.М. Попов, "A Two-Particle Quantum System in an Electromagnetic Field: Approximation of a Self-Consistent Field and Interparticle Correlations", *Laser Physics*, **10**(4), 967–973 (2000).

- [117] D.V. Kulakovskii, A.M. Popov, "The Possibility of Describing a Two-Particle Quantum System and Interparticle Correlations in the Self-Consistent Field Approximation", *Optics and Spectroscopy*, **92**(5), 670–675 (2002).
- [118] Е.А. Андриюшин, А.Л. Силин, "Фазовая диаграмма двумерной электронно–дырочной системы", *ФТТ* **21**(1), 219–222 (1979).
- [119] H.V.da Silvera, M.H. Degani, K.S. Singwi, "Model of a two-dimensional Fermi liquid", *Phys. Rev. B* **46**, 2995–3001 (1992).
- [120] D. Pines and P. Nozières, *The Theory of Quantum Liquids*, Vol.1, Addison-Wesley, New York (1968).
- [121] R. Puff, "Application of Sum Rules to the Low-Temperature Interacting Boson System", *Phys. Rev.* **137**, A406–A416 (1965).
- [122] W.H. Press, S.A. Tenkolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, p.994 (1992).
- [123] Дж. Займан, *Принципы Теории Твердого Тела*, Мир, Москва (1974).
- [124] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Статистическая Физика*, Часть 1, Наука, Москва (1995).
- [125] Л.В. Кулик, А.И. Тартаковский, А.В. Ларионов и др., "Влияние межчастичных взаимодействий на излучательное время жизни фотозвозбужденной электрон–дырочной системы в квантовой яме GaAs", *ЖЭТФ* **112**, 353–361 (1997).

- [126] Д.В. Кулаковский, Ю.Е. Лозовик, "Заряженные многочастичные комплексы: свойства непрямого триона", Письма в ЖЭТФ, **76**(8), 598–603 (2002).
- [127] L.V. Kulik, I.V. Kukushkin, V.E. Kirpichev, D.V. Kulakovskii et al., "Pseudomomentum of a dipole in a two-dimensional system", Phys. Rev. B, **66**, 073306 (4 pages) (2002).
- [128] Д.В. Кулаковский, Ю.Е. Лозовик, "Экранирование и перестройка экситонных состояний в двухслойной системе", ЖЭТФ, **124**(5) (2004).
- [129] D.V. Kulakovskii, Yu.E. Lozovik, "Collective Effects in Low Density Two-Layer Systems", Proceedings of V International Conference "Optics, Optoelectronics and Technology", Ulyanovsk, Russia, p.114 (2003).
- [130] Lian Zheng and A.H. MacDonald, "Correlation in double-layer two-dimensional electron-gas systems: Singwi-Tosi-Land-Sjolander theory at $B=0$ ", Phys. Rev. B **49**, 5522–5530 (1994).
- [131] A.V. Filinov, M. Bonitz, Yu.E. Lozovik, Phys. Stat. Sol. (b) to be published.
- [132] A.I. Bobrysheva, M.V. Grodetskii, and V.T. Zyukov, "Binding-energy for the surface biexcitonic positive-ion", J. Phys. C **16**(29), 5723–5728 (1983).
- [133] A. Thilagam, "Two-dimensional charged-exciton complexes", Phys. Rev. B **55**, 7804–7808 (1997).

- [134] Д.В. Кулаковский, Ю.Е. Лозовик, "Спектр коллективных возбуждений дипольного кристалла", Тезисы докладов VI Российской конференции по физике полупроводников, Спб.: Физико-технический институт им. А.Ф.Иоффе, с. 58 (2003).
- [135] D.V. Kulakovskii, Yu.E. Lozovik, A.V. Chaplik, "Collective Excitations in Exciton Crystal", Phys. Lett. (to be published).
- [136] D. R. Nelson and J. M. Kosterlitz, "Universal Jump in the Superfluid Density of Two-Dimensional Superfluids", Phys. Rev. Lett. **39**, 1201–1205 (1977).
- [137] A. L. Fetter, "Magnetoplasmons in a two-dimensional electron fluid: Disk geometry", Phys. Rev. B **33**, 5221–5227 (1986).
- [138] В.А. Волков, С.А. Михайлов, "Краевые магнетоплазмоны – Низкочастотные слабозатухающие возбуждения в неоднородных двумерных электронных системах", ЖЭТФ **94**(8), 217–241 (1988).
- [139] D. C. Glattli, E. Y. Andrei, G. Deville, J. Poitrenaud, and F. I. B. Williams, "Dynamical Hall Effect in a Two-Dimensional Classical Plasma", Phys. Rev. Lett. **54**, 1710–1713 (1985).
- [140] Z. L. Ye and E. Zaremba, "Magnetoplasma excitations in anharmonic electron dots", Phys. Rev. B **50**, 17217–17229 (1994).
- [141] O. Mayrock, S. A. Mikhailov, T. Darnhofer, and U. Rössler, "Double-layered quantum dots in a magnetic field: The ground state and the far-infrared response", Phys. Rev. B **56**, 15760–15769 (1997).

- [142] I.V. Kukushkin, J.H. Smet, S.A. Mikhailov, D.V. Kulakovskii et al., "Observation of Retardation Effects in the Spectrum of Two-Dimensional Plasmons", Phys. Rev. Lett, **90**, 15680, (2003).
- [143] И.В. Кукушкин, Д.В. Кулаковский, С.А. Михайлов и др., "Наблюдение плазмон-поляритонных мод в двумерных электронных системах", Письма в ЖЭТФ, **77**(9), 594–597 (2003).
- [144] И.С. Гранштейн, И.М. Рыжик, *"Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений"*, М.: Наука, (1971).