

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Российской академии наук

УДК 538.9

На правах рукописи

МУРАДОВ МАГАМЕД ИДРИСОВИЧ

Нестационарные и нелинейные кинетические явления
в баллистических квазиодномерных наноструктурах

01.04.10 – физика полупроводников

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Санкт-Петербург
2012

Оглавление

| | |
|--|-----------|
| Краткая характеристика работы | 5 |
| Актуальность проблемы | 5 |
| Основная цель работы | 8 |
| Научная новизна | 8 |
| Практическая значимость работы | 9 |
| Апробация работы | 10 |
| Общее введение | 12 |
| 1 Теория флуктуаций в неравновесном состоянии | 29 |
| 1.1 Введение. | 29 |
| 1.2 Матрица корреляционных функций | 31 |
| 1.2.1 Взаимодействие с фотонами. Генерация и рекомбинация. | 40 |
| 1.2.2 Взаимодействие с фононами. | 43 |
| 1.2.3 Столкновения электронов с примесями. | 45 |
| 1.2.4 Электрон-электронные столкновения. | 45 |
| 1.3 Одновременная корреляционная функция. | 49 |
| 1.4 Источник корреляции. | 50 |
| 1.5 Матрица случайных сил. | 54 |
| 1.6 Однозонный случай. | 59 |
| 1.6.1 Примесное рассеяние. | 59 |
| 1.6.2 Электрон-электронные столкновения. | 61 |
| 1.7 Заключение. | 64 |
| 2 Дробовой шум токов, ограниченных пространственным зарядом | 66 |
| 2.1 Введение | 66 |
| 2.2 Кинетическое уравнение | 68 |
| 2.3 Функция распределения | 71 |
| 2.4 Распределение поля | 73 |
| 2.5 Флуктуации тока и поля | 75 |
| 2.5.1 Время релаксации не зависит от энергии | 76 |
| 2.5.2 Флуктуации поля | 78 |
| 2.5.3 Время релаксации зависит от энергии | 82 |
| 2.6 Заключение | 84 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 3 | Дробовой шум при кулоновском увлечении | 87 |
| 3.1 | Введение | 87 |
| 3.2 | Корреляторы случайных сил | 88 |
| 3.3 | Мощность шума увлечения | 92 |
| 3.4 | Заключение | 97 |
| 4 | Кулоновское увлечение в квантовых проволоках | 99 |
| 4.1 | Введение | 99 |
| 4.2 | Законы сохранения | 100 |
| 4.3 | Линейный отклик | 104 |
| 4.4 | Нелинейный случай | 107 |
| | 4.4.1 Идентичные проводники. | 109 |
| | 4.4.2 Общий случай | 110 |
| 4.5 | Оценки | 111 |
| 4.6 | Сравнение с экспериментом | 113 |
| 4.7 | Заключение | 117 |
| 5 | Фононное увлечение в квантовых проволоках | 119 |
| 5.1 | Введение | 119 |
| 5.2 | Распределение фононов | 121 |
| 5.3 | Ток при фононном увлечении | 124 |
| 5.4 | Диаграммный вывод | 129 |
| 5.5 | Заключение | 135 |
| 6 | Кулоновское увлечение в квантовых ямах в магнитном поле | 138 |
| 6.1 | Введение | 138 |
| 6.2 | Кинетическое уравнение | 140 |
| 6.3 | Линейный отклик | 144 |
| 6.4 | Нелинейный (неомический) случай | 149 |
| 6.5 | Спиновый эффект | 149 |
| 6.6 | Заключение | 150 |
| 7 | Нелокальный динамический отклик баллистического наномостика | 152 |
| 7.1 | Введение | 152 |
| 7.2 | Одноканальный кондактанс. Случай сильного экранирования | 156 |
| 7.3 | Кондактанс при слабом экранировании | 159 |
| 7.4 | Количественный анализ нелокального отклика. | 160 |
| 7.5 | Многоканальный случай. Сильное экранирование. | 166 |
| 7.6 | Заключение | 169 |
| 8 | Выделение джоулева тепла при прохождении тока в наноструктурах | 171 |
| 8.1 | Введение | 171 |
| 8.2 | Кинетическое уравнение. Трехмерный случай | 174 |
| 8.3 | Сохранение энергии | 174 |
| 8.4 | Производство энтропии | 176 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 8.5 | Диссипация механической энергии | 177 |
| 8.6 | Производство энтропии в объеме | 178 |
| 8.6.1 | Столкновения электронов с примесями | 178 |
| 8.6.2 | Электрон-электронные столкновения | 179 |
| 8.6.3 | Электрон-фононные столкновения | 180 |
| 8.6.4 | Фонон-фононные столкновения | 180 |
| 8.6.5 | Столкновения фононов с дефектами решетки | 181 |
| 8.7 | Закон Ома | 181 |
| 8.8 | Примеры | 184 |
| 8.8.1 | Остаточное сопротивление | 184 |
| 8.8.2 | Электрон-фононное рассеяние | 185 |
| 8.8.3 | Взаимное электрон-фононное увлечение | 186 |
| 8.9 | Перенос в квантовой наноструктуре | 186 |
| 8.10 | Производство энтропии в наноструктуре | 188 |
| 8.11 | Генерация джоулева тепла током в наноструктуре | 190 |
| 8.11.1 | Бесстолкновительный случай | 190 |
| 8.11.2 | Учет столкновений с фононами в наноструктуре | 193 |
| 8.11.3 | Электрон-дырочная симметрия для вырожденных проводников | 201 |
| 8.11.4 | Нестационарный случай | 202 |
| 8.11.5 | Качественное обсуждение случая резкого контакта | 206 |
| 8.12 | Заключение | 212 |
| 9 | Спин-магнетофононное расщепление уровней в полумагнитных квантовых ямах | 214 |
| 9.1 | Введение | 214 |
| 9.2 | Расщепление уровня | 217 |
| 9.3 | Глубокая квантовая яма в поперечном магнитном поле | 221 |
| 9.4 | Валентная зона | 226 |
| 9.5 | Резонансное отражение и прохождение света | 231 |
| 9.6 | Обоснование учета простейшей диаграммы | 237 |
| 9.7 | Заключение | 242 |
| | Приложения | 250 |
| A | Релаксационные операторы | 250 |
| B | Дополнительные члены в источнике | 252 |
| C | Ток увлечения | 255 |
| D | Экранирование в одномерных наноструктурах | 259 |
| E | Функция распределения в берегах | 262 |
| F | Поляризационные операторы | 268 |

Краткая характеристика работы

Актуальность проблемы

Постоянный прогресс в изготовлении и литографии полупроводниковых структур достиг такого совершенства, что мезоскопическая физика, появившаяся как раздел физики конденсированного состояния, обогатила физику целым рядом новых физических явлений (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). Она имеет дело со структурами, которые по размерам уже являются пограничными между единичными структурными элементами решетки и макроскопическими объектами. Классический подход к описанию явлений на таких масштабах не всегда адекватен, с другой стороны, полное квантово-механическое описание, основанное на микроскопическом уровне, часто оказывается не столь успешным, главным образом из-за того, что в рассматриваемые явления оказываются вовлеченными слишком много степеней свободы. Иногда оказывается возможным квантово-механически учесть только ограниченное количество степеней свободы, рассматривая остальные обычными классическими методами.

Одним из таких важных явлений является квантование кондактанса в квантовых проволоках в баллистическом (бесстолкновительном) режиме и в точечных контактах [8, 9]. Этот эффект является квантово-механическим аналогом явлений в классических точечных контактах, таких как проводимость Шарвина [10]. В неупорядоченных проволоках такой кондактанс проявляет флуктуации от образца к образцу универсальной величины $e^2/2\pi\hbar$ [11, 12], равной половине кванта кондактанса.

Не менее интересен динамический отклик на осциллирующее внешнее поле квантового мостика, соединяющего два классических резервуара, т.е. изучение временной дисперсии кондактанса. Возникает вопрос не только о том, как себя ведет диссипативная часть кондактанса, но и каков характер (индуктивный или емкостной) его реактивной части при

разных частотах внешнего поля.

Возникает также следующий вопрос. С одной стороны, при бесстолкновительном переносе контактанс наноструктуры не зависит от скорости релаксационных процессов. Причем эта независимость имеет место как в статическом, так и в динамическом случае. Иными словами, это означает, что сопротивление (диссипативная часть), а значит, и полное генерируемое тепло, не зависят от скорости релаксации. С другой стороны, скорость генерации джоулева тепла определяется скоростью релаксации рассматриваемой системы.

Кроме изучения линейного отклика и соответствующих кинетических коэффициентов, большой интерес вызывает также исследование флуктуаций в структурах с размерами порядка нанометров около неравновесного стационарного состояния. Этот интерес опять же возобновился с появлением новых низкоразмерных объектов для исследования (см., например, [13]). Оказалось, что благодаря принципу Паули в вырожденных по Ферми системах в диффузионном режиме упругих столкновений имеет место подавление мощности дробового шума в три раза по сравнению с его классическим Пуассоновским значением $P_{\text{Poisson}} = 2eJ$ [14, 15]. Возникает естественный вопрос, может ли похожее подавление мощности шумов иметь место в системах, описываемых статистикой Больцмана. Мы покажем, что даже при невырожденной статистике учет самосогласованного поля ведет к подавлению мощности дробового шума до значений меньших, чем Пуассоновский предел. Наиболее ярко это подавление шума проявляется в режиме токов, ограниченных пространственным зарядом. При этом оказывается, что в трехмерных образцах (в случае, когда время релаксации носителей не зависит от энергии) это подавление может быть близким к тому подавлению, которое получается с учетом принципа Паули в вырожденных системах.

Многие явления в твердых телах можно объяснить, оставаясь в рамках невзаимодействующего электронного газа (см., например, [16, 17]). Система взаимодействующих фермионов хорошо описывается теорией Ферми жидкости Ландау (см. [18]), которая утверждает, что фермионные элементарные возбуждения являются одночастичными с очень большим временем жизни вблизи уровня Ферми и имеют спектр, похожий на спектр частиц в невзаимодействующем электронном газе, за исключением перенормировок (например, масса электрона заменяется на эффективную массу).

Большая часть явлений переноса в наноструктурах успешно объясняется в духе подхо-

да Ландауэра–Буттикера–Имри [19, 6, 2, 3, 4]. Этот формализм сводит задачу вычисления кинетических коэффициентов к вычислению коэффициентов прохождения (отражения) электронных волн через наноструктуру. По существу, этот подход основан на теории Ферми жидкости.

В строго одномерном случае электронный газ описывается в терминах теории жидкости Томонага–Латтинжера (Латтинжеровской жидкости) [20, 21, 22, 23, 24]. Элементарные возбуждения здесь оказываются коллективными модами бозонного типа. Теория Латтинжеровской жидкости стала привлекательна как за счет того, что на основе этой теории можно продвинуться далеко вперед в аналитических вычислениях, так и за счет того, что существует убеждение, что многие структуры (например, углеродные (одностенные) нанотрубки (см. [25, 26])) можно рассматривать как одномерные проводники. Экспериментальная ситуация оказывается, однако, не столь однозначной и в многих случаях дискуссионна. Во всяком случае, существует убеждение, что для не слишком длинных структур и при относительно высоких температурах Ферми жидкостное поведение должно восстанавливаться благодаря близости резервуаров (описываемых всегда в терминах Ферми жидкости), хотя ситуация опять же в литературе дискутируется [27, 28, 29]. В связи с этим, появилась надежда наблюдения свойств жидкости Томонага–Латтинжера в более сложных структурах, одним из таких структур может служить структура с двумя проволоками.

Эффект кулоновского увлечения в двух близлежащих проволоках позволяет совместно исследовать и влияние малых размеров структуры, и кулоновского взаимодействия. Убывание тока кулоновского увлечения с температурой, обнаруженное на эксперименте, указывает, казалось бы, на проявление электронной системой квантовых проволок свойств жидкости Томонага–Латтинжера. В связи с этим возникает проблема: может ли ток увлечения оказаться убывающей функцией температуры и в рамках теории Ферми жидкости.

Надо отметить, что на практике мы почти всегда имеем дело с комбинированным взаимодействием (электрон–электронным кулоновским и электрон–электронным взаимодействием через фононы). Поэтому важен учет и фононного вклада в ток увлечения. Не менее информативным может оказаться и изучение дробового шума тока увлечения.

В структурах малых размеров области набора энергии частицами в поле и области дис-

сипации этой механической энергии пространственно разделены. В связи с этим возникает вопрос о пространственном распределении необратимого джоулева тепла в наноструктурах как в стационарном, так и в нестационарном случаях.

Из перечисленного выше следует, что тема диссертационной работы, несомненно, актуальна.

Основная цель работы

Работы, по которым написана данная диссертация, направлены на развитие методов описания перечисленных проблем и имеют своей целью разработку нового направления—кинетики баллистических квазиодномерных наноструктур конечной длины с учетом межчастичного взаимодействия. Для достижения этой цели было проведено теоретическое исследование флуктуационных, нелинейных, нестационарных и тепловых явлений в различных баллистических одномерных структурах. При этом использовались и существующие, и развитые и обобщенные нами новые методы физики конденсированного состояния. Основное внимание уделялось квазиодномерным наноструктурам и рассмотрению явлений как переноса заряда в стационарном и нестационарном режиме, так и различным видам увлечения одних носителей другими в нелинейном режиме.

Научная новизна

Все основные теоретические результаты получены впервые. Здесь мы упомянем только несколько результатов.

В общей теории флуктуаций нами открыт новый квантовый механизм межчастичной корреляции, до сих пор остававшийся незамеченным. Выяснен физический смысл и происхождение квантовых добавок к источнику корреляции. Смысл этих дополнительных членов оставался до сих пор непонятным, также как и их странный вид, казавшийся противоречащим основным физическим принципам - причинности, принципу Паули, закону сохранения числа частиц. Даже в отсутствие межчастичного взаимодействия механизм квантовой корреляции остается работающим, и в неравновесных условиях дает вклад во флуктуации. Указана также важность дополнительных членов в источнике корреляций в

вырожденном случае для соблюдения свойств корреляционных функций случайных сил, накладываемых требованием сохранения числа частиц.

Мы предсказали пороги для возникновения тока кулоновского увлечения и фононного вклада в ток увлечения в нелинейном режиме. Мы выяснили, что убывание тока кулоновского увлечения с температурой можно объяснить, оставаясь в рамках теории Ферми жидкости. Впервые предсказан также ступенчатый характер фононного вклада в ток увлечения в зависимости от приложенного напряжения.

При изучении динамического отклика квантового наномостика мы впервые продемонстрировали, что появление временной дисперсии в контактансе всецело объясняется классическим описанием продольного движения носителей в наномостике. Мы воспользовались при этом понятием кинетической индуктивности наноструктур.

Новым является и четкое разделение областей в резервуарах, соединенных проволокой, основанное на физических явлениях в этих областях. Мы показали, что учет столкновений с фононами в самой наноструктуре не нарушает симметрии тепловыделения в резервуарах. Мы выяснили также вопрос о том, почему диссипативная часть контактанса наноструктур (или полное генерируемое тепло) не зависит от релаксационных свойств системы.

Практическая значимость работы

Научная и практическая ценность работы заключается, в основном, в формировании направления—кинетики баллистических квазиодномерных наноструктур. Выяснены многие физические свойства таких наноструктур на конкретных примерах и предложены методы адекватного описания кинетических явлений в таких структурах на основе методов физики твердого тела.

Кроме этого, данная работа может представлять несомненный интерес и в целях понимания свойств наноприборов. Как конкретные примеры мы укажем только некоторые выводы. Так, например, при рассмотрении кулоновского и фононного увлечения мы пришли к выводу, что для уменьшения взаимного влияния нанопроволок нужно избегать выстраивания начал отсчета энергий подзон в этих проволоках (что можно достигнуть,

изменяя параметры этих проволок). Кроме того, изучая динамический отклик квантового наномостика, мы использовали концепцию кинетической индуктивности. Для создания аналоговых наноэлементов принципиально важно иметь возможность управления фазой сигнала. Как известно, создание как емкостных, так и индуктивных наноэлементов встречает заметные трудности. Предлагаемая нами модель кинетической индуктивности, развитая для реальных устройств (наномостиков) позволяет решать указанные задачи, так как обеспечивает возможность создания фазовращателя. Мы указали также, что величиной этой индуктивности можно манипулировать, создавая нужные фазовые соотношения между током и напряжением.

Важным практическим следствием нашей работы является также и то, что, например, эффект кулоновского увлечения можно использовать как один из методов самой физики конденсированного состояния при изучении как структуры подзон (спектра) в системах малых размеров (так как эффект весьма чувствителен к выстраиванию подзон в двух структурах, вовлеченных в увлечение), так и кулоновского взаимодействия в наноструктурах.

Не менее важное практическое применение может иметь рассмотренное нами подробно выделение джоулева тепла при протекании тока в наноструктурах. Как известно, именно выделение тепла иногда может ограничивать плотность наноприборов на одной подложке. Особенно важным при этом может оказаться пространственное распределение выделяемого тепла в наноструктурах, что важно для организации эффективного отвода тепла от соответствующих областей.

Апробация работы

Результаты исследований опубликованы в 17 работах в реферируемых отечественных (4 статьи и один обзор) и международных (12 статей) журналах, и, кроме того, в 3 работах в сборниках трудов конференций и тематических сборниках. Результаты также были представлены в качестве докладов на международных и отечественных конференциях и симпозиумах, в частности, за последние четыре года на Fundamentals of electronic nanosystems, СПб; на Noise and Fluctuations 20th International Conference, Пиза, Италия; на между-

народном симпозиуме "Оптические явления в магнитных наноструктурах" памяти Б.П. Захарчени.

По материалам работ проведены семинары в ФТИ им. А. Ф. Иоффе РАН, ПИЯФ им. Б. П. Константинова.

Общее введение

Здесь мы дадим анализ современного состояния исследований в каждой из рассматриваемых нами областей и приведем обзор основных полученных нами результатов.

Интерес к исследованию флуктуаций около неравновесного стационарного или медленно меняющегося состояния возобновился с появлением новых объектов для исследования, а именно мезоскопических структур и структур с размерами порядка нанометров (см., например, [13]). Исследование флуктуационных явлений имеет давнюю историю. Уравнения как для разновременных, так и одновременных корреляционных функций флуктуирующих физических величин были получены Лэксом в работах [30, 31, 32]. В этих работах предполагалось, что основным стохастическим процессом является случайность одночастичных переходов и, соответственно, были получены результаты для случая одночастичных столкновений.

Флуктуации микроскопической функции распределения рассматривались в работе [33], где впервые флуктуации были добавлены в кинетическое уравнение. При дальнейшем развитии кинетического подхода к описанию флуктуаций в неравновесном состоянии было замечено, что ни соотношение Найквиста, ни соотношение Эйнштейна между подвижностью и коэффициентом диффузии не сохраняются, хотя существует простое соотношение между коэффициентом диффузии и спектральной плотностью флуктуаций тока [34, 35].

Учет двухчастичных столкновений при флуктуациях в неравновесном стационарном состоянии был проведен Ганцевичем, Гуревичем и Катилусом [36, 37, 38] и Коганом и Шульманом [39] для невырожденного электронного газа. Результаты были обобщены на случай вырожденной статистики в [40]. Влияние многочастичного динамического экранирования на процесс столкновений между заряженными частицами было включено в теорию флуктуаций в [41] и [40]. Теория флуктуаций с учетом эффектов генерации и ре-

комбинации между одной зоной и центрами захвата в полупроводниках была построена в [42] для случая Больцмановской статистики.

Метод Лэкса исторически предшествует методу Ганцевича и др. (последний известен еще как метод моментов) и применялся многими авторами в исследованиях шума [43, 44]. Мы, однако, все же будем следовать методу моментов при построении нашей теории флуктуаций с учетом межзонных переходов, так как основные уравнения этого подхода очень легко получить в диаграммном формализме Келдыша [45, 46].

Результаты в формулировке Лэкса далеко непросто использовать для приложений, например, для исследования шумов в полупроводниковых усилителях и лазерах. Некоторые авторы поэтому предпочитают "обобщать" теорию флуктуаций около равновесного состояния на неравновесный случай, используя флуктуационно-диссипационную теорему или соотношения Каллена-Вельтона [47] при изучении шума интенсивности и фазы в полупроводниковых оптических активных элементах (см., например, [43, 44, 48]). С другой стороны, Ганцевич и др. интересовались обычно только токовыми шумами, когда можно ограничиться рассмотрением только одной зоны.

Мы пришли к интересному выводу, что взаимодействия, не приводящие к межзонным переходам, дают вклад в источник случайных сил и коррелятор случайных Ланжевеновских сил для недиагональной компоненты матрицы плотности (поляризации). В однозонной модели для вырожденного случая мы получили, что только учет дополнительного (не имеющего аналога в невырожденном случае) члена в источнике приводит к правильным корреляторам Ланжевеновских сил. Последнее обстоятельство не было замечено в работах [36, 40], так как для невырожденного случая этот дополнительный член учитывать не нужно (так как он второго порядка по функциям распределения). Для наиболее простого случая примесного рассеяния этот квантовый механизм межчастичной корреляции приводит к такому дополнительному члену в источнике флуктуаций

$$L_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}'})^2, \quad (1)$$

где $P_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ вероятность рассеяния электрона, $n_{\mathbf{k}}$ функция распределения. Этот член включает в себя в том числе произведение функций распределения с одинаковыми квазиимпульсами. При этом возникает естественный вопрос о нарушении принципа Паули такими

членами. Казалось бы, в соответствии с этим принципом, два фермиона с одними и теми же квантовыми числами не должны давать вклад в источник корреляции. Дело в том, что при определении флуктуаций из начальной двухчастичной функции распределения $\langle n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} \rangle$ выделяется произведение некоррелированных (или лучше сказать, усредненных независимо) функций распределения $n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'}$. Но в $\langle n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} \rangle$ некоторые члены, необходимые для возникновения полностью независимых $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle$ и $\langle n_{\mathbf{p}'} \rangle$, отсутствуют из-за принципа Паули. Отсутствие таких членов и проявляется в возникновении дополнительных членов в источнике корреляций. Выяснение физического смысла и происхождения квантовой корреляции позволило нам указать простой алгоритм получения дополнительных членов в источнике, исходя только из вида интеграла столкновений.

Возросший интерес к изучению шумов обусловлен новыми эффектами в системах малых размеров. Было обнаружено, что в вырожденных системах в диффузионном режиме упругих столкновений имеет место подавление мощности дробового шума в три раза по сравнению с его классическим Пуассоновским значением $P_{\text{Poisson}} = 2eJ$ [14, 15]. При учете электрон-электронных столкновений и электронного разогрева дробовой шум оказывается равным $(\sqrt{3}/4)P_{\text{Poisson}}$ [49], что и в этом случае меньше Пуассоновского предела. Эти результаты нашли подтверждение в экспериментах с металлическими или полупроводниковыми проволоками с длинами порядка микрометра [50, 51, 52] (см. также обзор [13]). Это подавление дробового шума связывалось с принципом Паули. При уменьшении концентрации носителей принцип Паули можно не принимать во внимание (невырожденный случай) и, казалось бы, такое подавление шума не имеет места. Однако при рассмотрении невырожденного случая методом Монте-Карло симуляции авторы работы [53] обнаружили, что в трехмерном образце, когда время релаксации носителей не зависит от энергии в режиме упругих столкновений, имеет место такое же соотношение $P/P_{\text{Poisson}} = 1/3$.

Используя теорию флуктуаций, построенную нами в первой главе, мы рассмотрим теорию неравновесного дробового шума в невырожденном диффузионном проводнике в режиме токов, ограниченных пространственным зарядом. Токовые шумы именно в таком режиме и были изучены в численном эксперименте в работе [53] методом компьютерной симуляции. Аналитически шумы при тех же условиях изучались в [54]. В теории флуктуаций стационарное неравновесное состояние само описывается кинетическим уравнением, в

упомянутом режиме это уравнение оказывается нелинейным. Иногда метод линеаризации такого уравнения может казаться неоднозначным. Мы покажем, что на самом деле существует однозначный путь получения линейного уравнения для флуктуаций. Наш подход мы сравним с подходом [54]. Мы обсудим возможную причину различия результатов. Мы считаем это различие важным, так как оно касается основ теории флуктуаций в неравновесном состоянии.

Общий результат [53, 54] состоял в том, что дробовой шум оказывался меньше классического Пуассоновского значения и фактор, указывающий на это уменьшение, близок к $1/3$.

Мы подтвердим результаты [53, 54], что подавление шума в невырожденных диффузионных проводниках может быть близким $1/3$ для трехмерного случая. Однако мы обнаружили различие в подходе, использованном в [54], и нашим подходом. Так как это различие оказывается очень тонким, потребовался детальный анализ, который мы и провели.

Кроме того, что уравнения кинетики флуктуаций при нашем подходе оказываются математически более простыми, выяснится, что численный фактор, указывающий на уменьшение мощности шума, следующий из нашей теории, ближе к величине, полученной в численном эксперименте [53]. Так, например, для различных размерностей образца d мы получим в случае не зависящего от энергии времени релаксации

$$P/P_{\text{Poisson}} = \begin{cases} 0.3188 & \text{для } d = 3, \\ 0.4512 & \text{для } d = 2, \\ 0.682 & \text{для } d = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Существенная часть диссертации посвящена исследованию кулоновского и фононного увлечения в квантовых проволоках. Увлечение как физическое явление в твердых телах можно описать следующим образом: пусть у нас есть твердое тело с двумя различными типами квазичастиц (эти типы квазичастиц могут быть даже одинаковыми, но выделены каким-то свойством, например, электроны со спином вниз и вверх). Эти квазичастицы могут различаться качественно или быть однотипными, но разделенными пространственно. Можно создать поток квазичастиц одного типа и выяснить, каким образом этот поток увлекает другие квазичастицы (т.е. порождает поток других квазичастиц).

Видимо, первой работой, в которой рассматривалось явление такого сорта, явилась работа Л. Э. Гуревича по увлечению электронов фононами [55, 46]. Понятно, что увлекать-

ся электроны могут и бегущими электромагнитными волнами (фотонами) [56] (см. также [57, 58]), что с принципиальной точки зрения мало отличается от увлечения фононами. Можно вообразить и другие случаи, как, например, увлечение посредством взаимодействия Ван дер Ваальса [59], или усиленное плазмонами увлечение [60, 61].

Кулоновское увлечение было изучено впервые Погребинским в работе [62] и, видимо, независимо Прайсом в работе [63]. Была рассмотрена ситуация, когда две полупроводниковые пленки разделены пленкой изолятора, и исследовалось увлечение носителей (возникновение тока или разности потенциалов вдоль одной из них) в первой пленке за счет прямого кулоновского взаимодействия при пропускании тока по второй. В связи с появлением новых возможностей техники литографии полупроводников интерес к изучению кулоновского увлечения возродился (см. обзор [64]).

Если две квантовые проволоки (т. е. проводники, у которых поперечные размеры порядка длины волны де Бройля электронов проводимости) с длинами, меньшими длины свободного пробега электрона (обычно это несколько $\mu\text{м}$), расположены параллельно и в одной из этих проволок течет ток, то благодаря кулоновскому взаимодействию носителей в этих проволоках в смежной проволоке (изначально бестоковой) возникнет ток кулоновского увлечения. Такие системы нано масштабов характеризуются малыми плотностями электронов, причем плотность электронов можно изменять напряжением на затворе. В рассматриваемом нами баллистическом (бесстолкновительном) случае число электронов и в токопроводящей проволоке, и в проволоке, где индуцируется ток увлечения, обычно мало. Это означает, что можно ожидать относительно большие флуктуации тока увлечения, как, например, дробовой шум. Изучение такого шума тоже может дать полезную информацию о поведении электронов в квантовой проволоке. Мы покажем, что мощность этих шумов достигает максимума каждый раз, когда уровни поперечного квантования в двух проволоках совпадают. Такое совпадение может быть обеспечено, например, изменением напряжения на затворе или химического потенциала электронов. Исследование зависимости от напряжения V , приложенного к активной проволоке, приводит к выводу, что для относительно больших величин V спектральная плотность низкочастотного шума (мощность шума) оказывается пропорциональной V^2 , в то время как при малых величинах V она не зависит от V . В последнем случае, как мы покажем, в мощности шумов в

пассивной проволоке кроме Найквистовского вклада $P_N = 4GT$ (где G кондуктанс проволоки, T температура) возникает еще вклад шумов увлечения. В линейном режиме по приложенному к активной проволоке напряжению возникает вклад

$$P = eJ_0 \left[\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right]^2 \cdot \left[\text{sh} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right) \right]^{-2}, \quad (3)$$

обязанный своим появлением присутствию близлежащей активной проволоки и существенно зависящий от энергетического сдвига ε_{nl} уровней поперечного квантования в двух проволоках. Здесь

$$J_0 = -\frac{8e^5 m^3 L T^2}{\varepsilon^2 \pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3}, \quad (4)$$

где ε диэлектрическая проницаемость, L длина проволоки,

$$\varepsilon_{nl} = \varepsilon_n^{(1)}(0) - \varepsilon_l^{(2)}(0), \quad p_n = \sqrt{2m[\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0)]}, \quad (5)$$

квадрат матричного элемента

$$g_{nn'}(q) = \left(\int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp |\phi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2 K_0(|q|\hbar^{-1}|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|) |\phi_{n'}(\mathbf{r}'_\perp)|^2 \right)^2 \quad (6)$$

описывает модифицированное кулоновское взаимодействие между распределениями зарядов в поперечном направлении $|\phi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2$ и $|\phi_{n'}(\mathbf{r}'_\perp)|^2$ в двух проволоках, а $K_0(x)$ функция Бесселя мнимого аргумента.

Перенос электронов в системах наномасштабов оказывается баллистическим (бесстолкновительным) и является квантово-механическим аналогом явлений в классических точечных контактах, таких как проводимость Шарвина [10]. Мы сосредоточимся на изучении кулоновского увлечения именно в этом баллистическом режиме в нанопроволоках. Мы имеем при этом в виду ситуацию, схематически показанную на Рис. 1. Двумерный газ обычно получается на гетероструктуре, т.е. на контакте полупроводников с различной шириной запрещенной зоны (см., например, [65]). На Рис. 2 изображена типичная зонная диаграмма идеально резкого гетероперехода. Широкозонный полупроводник (обычно это AlGaAs) n -типа (допированный Si) отделен от узкозонного полупроводника слоем полупроводника без легирования (спейсер), что позволяет добиться высоких подвижностей носителей в двумерном газе, так как рассеивающие центры оказываются удалены от двумерного газа, образующегося на границе в узкозонном полупроводнике (обычно AlAs).

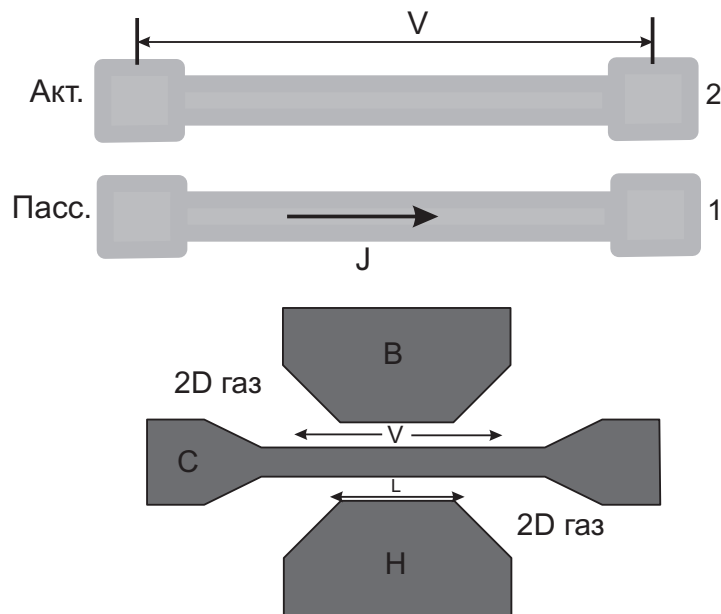


Рис. 1: К верхней активной (2) проволоке приложено напряжение. Вычисляется ток увлечения в нижней (1) пассивной. Внизу приведено расположение затворов B, H, C (вид сверху), формирующих две нанопроволоки из двумерного (2D) газа.

Создается примерно треугольная потенциальная яма для электронов. Границей ямы служит с одной стороны разрыв зон, а с другой электростатический потенциал. Такая яма квантует движение электронов, на рисунке показаны несколько таких уровней размерного квантования. Нанесение затвора с узкой щелью на широкозонный полупроводник с подачей на него отрицательного потенциала позволяет выдавить электроны из-под затворов, и под щелью мы получим тогда квазиодномерную проволоку или нить (см. Рис. 3). Для изготовления двух параллельных квантовых проволок достаточно нанести затвор с двумя щелями. Описанное нами формирование нанопроволок с использованием расщепленного затвора можно назвать планарной геометрией. Существуют и другие способы изготовления квантовых проволок, можно, например, сформировать две нити из двух близких гетеропереходов, такой метод расположения проволок называется вертикальной геометрией.

Возможность эффекта кулоновского увлечения в баллистическом режиме в квазиод-

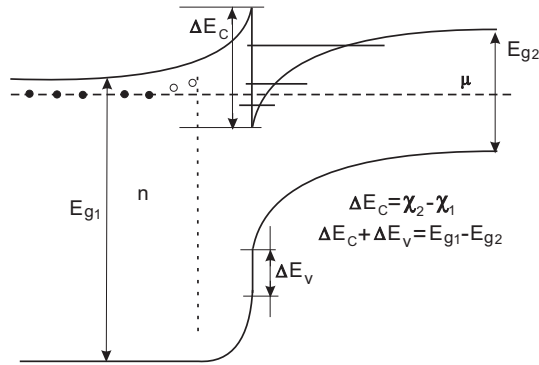


Рис. 2: Типичная зонная диаграмма резкого гетероперехода. Здесь χ_2 (χ_1) означает электронное средство для узкозонного (широкозонного) полупроводника.

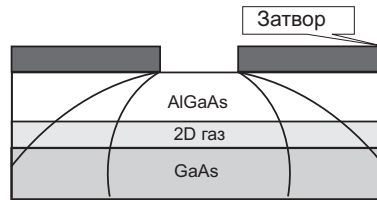


Рис. 3: Возможная физическая реализация квантовой проволоки. Кривые схематично изображают эквипотенциальные поверхности.

номерном случае была продемонстрирована Гуревичем и др. [66] для омического случая и Гуревичем и автором [67] для неомического случая.

Исследование увлечения важно в следующем отношении. Дело в том, что обычно в одиночном проводнике электрон-электронное взаимодействие мало влияет на полный ток, т.к. последний пропорционален полному квазиимпульсу электронов, полный квазиимпульс же сохраняется при межэлектронном кулоновском взаимодействии, если не учитывать процессы переброса.

Одномерные структуры представляют особый интерес и в другом отношении. Понимание квантовых свойств таких структур далеко от совершенства. Электроны, движущиеся в таких структурах, испытывают сильные межчастичные взаимодействия, по крайней мере при низких температурах. Основное состояние такой системы перестраивается и элементарные возбуждения не описывается больше в терминах Ферми жидкости. Такое состояние называется жидкостью Томонага-Латтинжера [20, 21] (см. также обзор [23]). Тем не менее, проявление свойств жидкости Томонага-Латтинжера в одномерной квантовой про-

волоке до сих пор надежно не установлено. В большинстве экспериментов на одиночных одномерных структурах сильное взаимодействие не проявляется. Для надежного наблюдения свойств жидкости Томонага-Латтинжера необходимо использовать более сложные структуры, одной из таких структур может служить структура с двумя проволоками (ожидается, что эти свойства проявят себя в эффекте кулоновского увлечения в такой структуре).

Важно также то, что кроме улучшения нашего понимания свойств таких низкоразмерных структур, результаты могут иметь и чисто прикладной характер, так как эти свойства могут оказаться важными для работы низкоразмерных приборов.

В предположении, что для наивысшей заполненной подзоны n энергия Ферми $p_n^2/2m$ много больше, чем $T \sim \varepsilon_{nl}$, ток увлечения в омическом случае равен

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 m^3 L T^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \frac{eV}{T} \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T}\right)^2 \left[\text{sh}\left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T}\right)\right]^{-2}, \quad (7)$$

где L длина проводника, $g_{nl}(2p_n)$ квадрат матричного элемента кулоновского взаимодействия (эта функция экспоненциально убывает с увеличением переданного при столкновениях импульса $2p_n$ и с увеличением расстояния между проволоками). Ток увлечения зависит от температуры линейно при выстроенных уровнях поперечного квантования $\varepsilon_{nl} = 0$. Такая температурная зависимость привела авторов экспериментальных работ [68, 69] к выводу, что обнаруженное ими убывание тока увлечения с температурой указывает на проявление свойств жидкости Томонага-Латтинжера квантовыми проволоками.

При тех же условиях, но в неомическом случае, ток увлечения, как мы показали, существует лишь при $eV/2 > |\varepsilon_{nl}|$ и определяется выражением

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 m^3 L}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \left[\left(\frac{eV}{2}\right)^2 - \varepsilon_{nl}^2 \right]. \quad (8)$$

Кроме рассмотренного случая $p_n^2/2m \sim \hbar^2/2md^2 \gg T$, может осуществиться и другой случай, когда $\hbar^2/2md^2 \ll p_n^2/2m \sim T$. Мы указали, что тогда ток увлечения описывается формулой

$$J_{\text{drag}} \sim \frac{\text{sh}[eV/2T]}{\text{ch}^2[p_n^2/4mT] \text{ch}[(p_n^2 - meV)/4mT] \text{ch}[(p_n^2 + meV)/4mT]}. \quad (9)$$

Зависимость от температуры тока увлечения при этом весьма похожа на обнаруженную

экспериментально $T^{-0.77}$ [68, 69], т.е. мы нашли, что ток увлечения может оказаться убывающей функцией температуры и в рамках теории Ферми жидкости.

Кроме кулоновского вклада возможен и фононный вклад в ток увлечения в режиме баллистического переноса в двух параллельно расположенных квантовых нанопроволоках. Эффект фононного увлечения состоит в следующем: электроны, вступающие в активную проволоку из двух резервуаров (двух берегов), характеризуются различными химическими потенциалами. Ситуация в проволоке сильно неравновесна, и электроны в активной проволоке испускают фононы. Эти фононы, в свою очередь, могут поглотиться электронами в пассивной проволоке, вызывая соответствующий фононный вклад в ток увлечения.

Фононное увлечение между двумя пространственно разделенными слоями двумерных электронных газов изучалось как экспериментально (см., например, [70]), так и теоретически (см. [71, 72]). В баллистических квантовых проволоках эффект изучался в [73] только в линейном режиме $eV \ll T$, где V это приложенное вдоль активной проволоки напряжение. Мы же сосредоточимся на нелинейном случае $eV \gg T$ и проведем рассмотрение сначала в рамках кинетической теории. Затем мы применим и квантовомеханический подход, основанный на диаграммном методе, который приводит, как мы покажем, к идентичным результатам.

В нелинейном режиме, когда приложенное вдоль активной проволоки напряжение eV гораздо больше температуры T , нами предсказан порог для возникновения фононного вклада в ток увлечения как функции напряжения eV или напряжения на затворе. Фононный вклад в ток увлечения возникает, когда $eV/2$ больше и sp_n (здесь s скорость звука), и $|\varepsilon_{nl}|$. Фононный вклад от любых двух выстроившихся по энергии поперечных подзон в активной и пассивной проволоках насыщается при больших приложенных к активной проволоке напряжениях. Отметим здесь также слабую зависимость $\sim 1/D$ фононного вклада в ток увлечения от расстояния D между проволоками. Фононный вклад оказывается очень мал по величине по сравнению с кулоновским вкладом из-за слабости электрон-фононного взаимодействия. Отметим однако, что этот вклад может сравниться с кулоновским при больших расстояниях между проволоками благодаря различному закону спада в зависимости от этого расстояния.

Мы установили, что для $1/2 < \alpha < 1$ ($\alpha = eV/4sp_n$) фононный вклад в ток увлечения определяется формулой

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 8\pi D_d \int_1^{2\alpha} d\omega (2\alpha - \omega) |D^R(\omega)|^2, \quad (10)$$

где

$$J_0 = -e \frac{2Lm^5 \Lambda^4}{\pi^3 D \rho^2 \hbar^7}. \quad (11)$$

Здесь Λ константа деформационного потенциала, ρ плотность, $D_d = 2p_n D/\hbar$. При $\omega < 1$ $D^R(\omega)$ имеет вид

$$D^R(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} K_0(D_d \sqrt{1 - \omega^2}), \quad (12)$$

где $K_0(x)$ функция Бесселя мнимого аргумента. Для $\omega > 1$ $D^R(\omega)$ сводится к

$$D^R(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} e^{-(R_d)^2(\omega^2 - 1)} \frac{\pi}{2} \left\{ iJ_0(D_d \sqrt{\omega^2 - 1}) + N_0(D_d \sqrt{\omega^2 - 1}) \right\}, \quad (13)$$

где $J_0(x)$ функция Бесселя и $N_0(x)$ функция Неймана. Мы ввели безразмерный параметр $R_d = 2p_n a/\hbar$, где a толщина проволоки. Для $eV/4sp_n > 1$ мы получим

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 8\pi D_d \left\{ \int_1^\alpha d\omega \omega + \int_\alpha^{2\alpha} d\omega (2\alpha - \omega) \right\} |D^R(\omega)|^2. \quad (14)$$

Таким образом, ток является линейной функцией от напряжения в промежутке $2sp_n < eV < 4sp_n$ и насыщается на уровне

$$J \sim J_0 \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 \frac{1}{R_d}. \quad (15)$$

Зависимость тока фононного увлечения может оказаться ступенчатой функцией приложенного к активной проволоке напряжения при определенном соотношении между двумя близкими значениями импульсов Ферми.

Интересно проследить каким образом уменьшается ток при условии $eV \ll sp_n$ (мы рассматриваем $eV \gg T$). При этом оказывается, что вклад в ток от члена, включающего функцию Бесселя мнимого аргумента оказывается пропорционален $(T/sp_n)^5 e^{-2D_d}$, в то время как оставшийся вклад (он возникает от суммы квадратов функций Бесселя) пропорционален $e^{-2sp_n/T}$. При увеличении eV второй член быстро возрастает и дает основной вклад в ток фононного увлечения.

До сих пор мы считали, что реализуется сильно вырожденный случай $p_n^2/2m \gg eV \gg T$. При кулоновском увлечении мы обсуждали и случай малых импульсов Ферми p_n , при этом мы показали, что ток кулоновского увлечения есть убывающая функция температуры. Для фононного вклада такая ситуация не реализуется, так как передаваемые импульсы в этом случае ограничены снизу импульсом $2ms$.

Влияние магнитного поля на кулоновское увлечение между двумя квантовыми ямами в сильном магнитном поле, перпендикулярном плоскости ям и в присутствии беспорядка исследовалось в [74, 75]. При этом может появиться и напряжение Холла, индуцируемое в пассивной (изначально бестоковой) яме в направлении, перпендикулярном как магнитному полю, так и току в активной (токопроводящей) яме [76], [77]. Эти две геометрии можно назвать поперечными.

Если приложить сильное магнитное поле параллельно двум ямам, то такое поле, квантуя движение в поперечном направлении, сведет задачу о кулоновском увлечении в двух ямах к рассмотренному нами [67] случаю кулоновского увлечения в одномерных параллельных проволоках. Мы рассмотрим случай таких больших магнитных полей, что магнитная длина a_B меньше ширины квантовой ямы. Более того, мы рассмотрим предельный квантовый случай, когда только основной уровень осцилляторных состояний (состояний Ландау) заполнен электронами в двух ямах, так что

$$\hbar\omega_B > \mu. \quad (16)$$

Здесь ω_B циклотронная частота, μ химпотенциал. И в омическом, и в неомическом случае мы предсказываем резкие осцилляции тока увлечения как функции напряжения на затворе (или химического потенциала). Квантуя поперечное движение электронов в ямах, сильное магнитное поле приводит к тому, что электронные состояния можно рассматривать как "трубки" или "провода". Кулоновское увлечение в этой ситуации по существу сводится к кулоновскому увлечению между двумя параллельными нанопроволоками.

Учет спина при кулоновском увлечении в магнитном поле между двумя квантовыми ямами приводит к тому, что Зеемановское расщепление $\hbar\omega_B\Delta$ ($\Delta = gm/2m_0$ включает отношение эффективной электронной массы m к массе свободного электрона m_0) входит наряду со сдвигом двух подзон ε_{12} в окончательный результат для тока увлечения. Ток

увлечения, таким образом, оказывается чувствительным также и к спиновому расщеплению (и, соответственно, к величине эффективного g -фактора в плоскости ям).

Достижения в изготовлении гетероструктур ферромагнетик-полупроводник и инжекции спина в полупроводники [78] привели к интересу к явлениям переноса в спин поляризованных системах. Электрон-электронные взаимодействия для таких систем очень важны, так как они приводят к установлению равновесия по импульсу двух спин поляризованных подсистем. При этом спиновый ток в системе будет уменьшаться, так как произойдет передача импульса между носителями со спином вверх и вниз. Именно такой эффект понимается под спиновым увлечением [79], в этом эффекте электроны со спином вверх и вниз в одной и той же структуре играют роль электронов в двух слоях или проволоках, разделенных пространственно. Эффект получил экспериментальное подтверждение в [80]. Отличие от обычной ситуации кулоновского увлечения заключается в том, что спиновое увлечение имеет место в одиночной структуре, носители с различными спинами играют роль увлекающих (активных) и увлекаемых (пассивных) носителей.

Как известно, кондактанс классического точечного контакта, для которого $\lambda \ll d \ll \ell$, где λ длина волны электрона, d поперечный размер контакта, ℓ длина пробега, определяется формулой Шарвина, получаемой при замене длины проводника L в формуле $G = \sigma S/L$ на длину пробега ℓ , так что

$$G \sim \frac{ne^2 S}{p_F} \sim \frac{e^2 S S_F}{(2\pi\hbar)^3},$$

где p_F импульс Ферми, S площадь сечения проводника, S_F площадь Ферми сферы. Кондактанс G баллистического квантового канала, для которого $d \sim \lambda$, определяется из

$$J \sim ev_F(eV) \frac{1}{v_F \pi \hbar} = \frac{e^2}{\pi \hbar} V = G_0 V,$$

где v_F скорость Ферми, eV полоса энергий электронов, участвующих в переносе заряда, $1/v_F \pi \hbar$ плотность состояний. В общем случае, когда в переносе участвуют несколько подзон поперечного квантования, $G = N G_0$, где N число активных каналов (заполненных подзон), а квант сопротивления $1/G_0 = \pi \hbar / e^2 \simeq 13$ кОм. Такое квантование кондактанса было обнаружено в экспериментах [9, 8] и обычно объясняется в духе работ [81, 82], где вычисление кондактанса сводится к вычислению коэффициента прохождения электронной

волны через рассматриваемую структуру. Из соображений, похожих на использованные при вычислении кондактанса, следует, что имеет место не только квантование кондактанса, но и других кинетических коэффициентов, например, теплопроводности [83, 84].

В случае классического баллистического точечного контакта между двумя металлическим берегами динамический отклик был впервые рассмотрен Куликом и др. [85]. Было показано, что кроме активной части импеданса существует и реактивная добавка индуктивного характера, названная кинетической индуктивностью. Мы исследуем такую индуктивность в одномерной баллистической структуре, где важную роль играет поперечное квантование, а именно, в баллистическом мостике, т.е. мы вычислим нелокальный динамический отклик баллистического квантового наномостика на приложенный потенциал, осциллирующий с частотой ω . Кроме активной части кондактанса при этом в отклике на такой потенциал возникает также и реактивная часть. Эта реактивная часть оказывается индуктивной при относительно малых частотах ω . Для больших частот токовый отклик может быть и индуктивного, и емкостного характера, в зависимости от отношения $\omega L/v_F$, где L длина мостика, v_F скорость Ферми. Таким образом, манипулирование параметрами наномостика позволяет изменять фазу отклика. Мы рассмотрим как одноканальный (в переносе заряда участвуют электроны, принадлежащие только одной зоне поперечного квантования в наномостике), так и многоканальный случаи. Для наиболее простого случая, когда в перенос заряда вовлечен только один канал, в случае электронейтральности канала мы получаем

$$G(\omega) = \frac{G_0}{1 - i\omega L/2v_F}, \quad (17)$$

где L длина мостика, $G_0 = e^2/\pi\hbar$ квант кондактанса, v_F скорость Ферми. Соответственно, для $\omega L \gg v_F$ мы имеем чисто индуктивный отклик.

Для многоканального случая в условиях электронейтральности (сильное экранирование) мы получим

$$\frac{G(\omega)}{G_0} = \sum_{n=1}^{n=\mathcal{N}} \frac{1}{1 - ik_n L/2}. \quad (18)$$

Соответственно, для $kL \gg 1$ мы имеем чисто индуктивный отклик, полная индуктивность есть при этом сумма индуктивностей каналов.

В обратном предельном случае слабого экранирования в полном токе доминирует ток

смещения, который связан с скачками поля на контактах. Для полного тока мы получим

$$J = -i \frac{G_0 V}{kL/2} \left((ak)^2 - 1 + \exp(ikL/2) \frac{\sin kL/2}{kL/2} \right). \quad (19)$$

Импеданс при этом оказывается емкостного характера. Первые два члена в последнем уравнении больше, чем третий. Тем не менее, этот третий член может быть выделен, так как он осциллирует как функция внешних параметров. Более того, именно осциллирующий член описывает диссипацию (приводит к вещественной части отклика тока). При этом

$$\text{Re}G = G_0 \left(\frac{\sin kL/2}{kL/2} \right)^2, \quad (20)$$

т.е. при условии $kL = 2\pi n$, где n целое число, или, когда время пролета L/v_F равно целому числу периодов поля $2\pi/\omega$, джоулевых потерь не наблюдается, вполне понятный с классической точки зрения результат.

В течение последних десятилетий исследовались теоретически и экспериментально различные явления в квантовых проволоках: ступенчатое изменение кондактанса, дробовой шум, термоэлектрические свойства, кулоновское увлечение и целый ряд других кинетических явлений. Полное тепло, выделяемое при прохождении тока через квантовую проволоку, определяется из простых энергетических соображений, коль скоро известен кондактанс G проводника. Такие соображения, однако, ничего не говорят о пространственном распределении джоулева тепла. Между тем, знать соответствующие закономерности необходимо при конструировании устройств, использующих наноструктуры, чтобы уменьшить их перегрев. Обычно именно большое тепловыделение затрудняют работу подобных устройств.

Мы обсудим генерацию джоулева тепла при бесстолкновительном прохождении постоянного (случай статической проводимости) и переменного тока (случай высокочастотной проводимости) в полупроводниковых квантовых проволоках, соединяющих два классических резервуара. Оказывается, что тепло генерируется не в квантовой проволоке, а в резервуарах. Таким образом области, где частицы набирают энергию (область поля), и области, где происходит диссипация этой энергии, пространственно разделены. В прилегающих к проволоке резервуарах мы разделим пространство на следующие области: область, простирающаяся на длины порядка длины свободного пробега, где происходит диссипация

механической энергии; область, находящаяся на расстояниях, больших, чем длина свободного пробега, но меньших, чем длина пробега по отношению к электрон-электронным столкновениям; на расстояниях, больших, чем последняя длина, можно говорить об электронной температуре, и только на расстояниях еще больших можно использовать понятие температуры в общепринятом смысле.

Что касается полного количества тепла, то в каждом из двух резервуаров тепловыделение оказывается одинаковым. Учет столкновений электронов с фононами в самой проволоке, приводящий к вкладу ΔG в кондактанс, не изменяет этой симметрии тепловыделения.

Отметим, что при нашем энтропийном подходе достаточно решать кинетическое уравнение с точностью до первого порядка по полю для вычисления тепловыделения. Отметим также, что расчет джоулевых потерь может служить альтернативным методом определения диссипативной (реальной) части кондактанса наноструктур.

Мы сумеем разрешить следующий парадокс. С одной стороны, скорость генерации джоулева тепла определяется скоростью релаксации рассматриваемой системы. С другой стороны, при бесстолкновительном переносе кондактанс G наноструктуры не зависит от скорости релаксационных процессов. Иными словами, это означает, что сопротивление, а значит, и полное генерируемое тепло, не зависит от скорости релаксации. Мы покажем, как можно примирить эти два обстоятельства.

Возможность переходов электронов, взаимодействующих с оптическими фононами, между уровнями Ландау с противоположной ориентацией спинов можно назвать спинмагнетофонным резонансом (СМФР). Такому явлению уделялось внимание во многих работах (см. [86, 87, 88, 89]). Мы обсудим особенности СМФР в полумагнитных полупроводниках, где из-за большого эффективного g -фактора условия для СМФР легко достижимы. Условие спинового резонанса имеет следующий вид

$$g\mu_B B = \hbar\omega_{LO}. \quad (21)$$

Здесь μ_B — магнетон Бора, g — эффективный g -фактор носителей, а B — внешнее магнитное поле. Этот резонанс приводит к расщеплению уровней, которое зависит от величины и электрон-фононного взаимодействия, и спин-орбитального взаимодействия в данной

структуре. Считая, что квантовая яма не обладает симметрией инверсии, мы примем модель Рашбы для описания спин-орбитального взаимодействия, оператор соответствующего взаимодействия

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}] \mathbf{n},$$

где \mathbf{n} единичный вектор, перпендикулярный плоскости квантовой ямы, σ_i матрицы Паули, \mathbf{p} оператор импульса, α_R константа. Это взаимодействие связано с инверсионной асимметрией структуры. Для расщепления уровней энергии электрона получается оценка $\Delta \sim \alpha_R \sqrt{\alpha} / l_c$, где α константа электрон-фононной связи, ответственная за поляронный сдвиг массы электрона, $l_c = \sqrt{\hbar c / eB}$ магнитная длина.

Для наблюдения такого расщепления неопределенность уровня должна быть меньше самого расщепления уровня $\Delta \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ эВ. Для этого требуются времена релаксации большие, чем 10^{-12} с. С другой стороны, минимальное значение τ , позволяющее нам оставаться в рамках теории возмущений при $\hbar\omega_{LO} = 0.02$ эВ, $B = 3$ Т, $m_c = 0.1m_0$, $\alpha_R = 10^{-9}$ эВ·см, $\alpha = 0.39$ оказывается короче чем $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ с. Таким образом, мы убеждаемся, что существует область времен релаксаций $\sim 10^{-11}$ с., где теория возмущений применима и расщепление все еще наблюдаемо.

Упомянутое расщепление уровней может быть зарегистрировано, например, в оптических экспериментах на резонансное прохождение света через такую квантовую яму (или отражение от такой ямы). Мы рассчитали соответствующие коэффициенты для такого оптического эксперимента и указали, что изменением магнитного поля можно добиться условий магнетофононного резонанса, при этих условиях одиночная линия отражения должна расщепиться на две.

Глава 1

Теория флуктуаций в неравновесном состоянии

1.1 Введение.

В этой главе мы приведем теорию флуктуаций около медленно меняющегося в пространстве и времени неравновесного состояния в полупроводниках. Такое неравновесное состояние может создаваться как за счет приложенного поля, вызывающего ток проводимости, так и за счет оптического поля, вызывающего межзонные переходы в полупроводниках. Используя диаграммную технику Келдыша [45] (см. также [46, 90]), мы дадим вывод кинетических уравнений для флуктуаций. Считается, что носители могут взаимодействовать с фононами, друг с другом через кулоновский потенциал и с тепловыми фотонами, приводящими к процессам межзонной генерации и рекомбинации. Использование метода Келдыша естественным образом приводит к явным выражениям для случайных Ланжевеновских сил. Показано, что в неравновесном состоянии существует добавочный корреляционный вклад в источник флуктуаций не только при межчастичном взаимодействии, но и при взаимодействии частиц с примесями, фононами и фотонами.

Существует достаточно много работ, посвященных выводу так называемых квантовых кинетических уравнений, описывающих неравновесные оптические свойства полупроводников. Упомянем из них здесь только несколько работ [91, 92, 93, 94], где такие уравнения были выведены различными методами в форме Блоховских уравнений для матрицы плотности для случая двухзонного полупроводника (см. также книгу [95]). Таким образом, кинетическую теорию, описывающую такое неравновесное состояние, можно считать

разработанной, в то время как теория флуктуаций около такого неравновесного состояния, насколько мы знаем, до сих пор не рассматривалась. В этой главе мы собираемся заполнить этот пробел, тем более что в квантовой электронике наибольшего внимания заслуживает обычно исследование шумов в различных полупроводниковых оптических усилителях и генераторах. Например, для вычисления шумовой мощности за счет спонтанной эмиссии в оптических усилителях необходимо знание корреляционной функции случайных Ланжевеновских сил, которые входят в правую часть квантовых кинетических уравнений для недиагональной по зонному индексу компоненты матрицы плотности (эта компонента тесно связана с межзонной поляризацией) [43, 44, 48]. Та же корреляционная функция определяет спектральную ширину линий для полупроводниковых инжекционных лазеров [44, 96].

Мы приведем вывод наших уравнений из первых принципов. Существенное различие между нашим подходом и подходом работ [43, 44] состоит главным образом в следующем: во-первых, наш подход естественным образом приводит к добавочным членам в корреляционных функциях. Эти добавочные члены не являются δ -коррелированными в \mathbf{k} пространстве благодаря одновременному появлению двух электронных состояний \mathbf{k} и \mathbf{k}' (и исчезновению двух других) как результат не только межчастичных взаимодействий, в то время как в [43, 44] такие члены не учитываются. Второе отличие заключается в том, что новая динамическая переменная—недиагональная по зонным индексам компонента матрицы плотности—вовлечена при нашем подходе и в процессы рассеяния, в отличие от работ [43, 44], где уравнение для такой недиагональной части было введено чисто феноменологически.

И, наконец, последнее отличие заключается в том, что наш подход, будучи более общим, единым образом включает как теорию флуктуаций для случая однозонной модели (что позволяет исследовать флуктуации токов проводимости), так и теорию флуктуаций, связанных с оптическими межзональными переходами.

В разделе 1.2 мы введем матрицу корреляционных функций и получим уравнение движения для нее. Мы рассмотрим квазиклассические флуктуации и обсудим пределы применимости соответствующих приближений. Три подраздела будут посвящены соответственно рекомбинационным и генерационным процессам, электрон-фононному, электрон-

примесному и электрон-электронному рассеянию. Для всех взаимодействий будут получены явные выражения для операторов релаксации, эти операторы будут включать как привычное межчастичное рассеяние, так и рассеяние на индуцированной внешним возмущением межзонной поляризации. В разделе 1.3 мы дадим вывод дифференциального уравнения, определяющего начальное условие (одновременную матрицу корреляционных функций) к уравнениям движения для разновременных корреляционных функций, выведенных в разделе 1.2. В первом подразделе раздела 1.3 приведены выражения для источников флуктуаций, которые входят в правую часть уравнения для одновременных корреляционных функций. Здесь мы применим Ланжевеновскую концепцию фиктивных случайных сил и последний подраздел мы посвятим выводу корреляционных функций для этих сил.

1.2 Матрица корреляционных функций

Флуктуации описываются смещенной по времени двухчастичной корреляционной функцией в смешанном или Вигнеровском представлении

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau, \mathbf{k}\mathbf{r}; t, \mathbf{k}\mathbf{r}') = \sum_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{q}'\mathbf{r}'} g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau, \mathbf{k}_-; t\mathbf{k}_-t'; t\mathbf{k}_+t'; t + \tau, \mathbf{k}_+), \quad (1.1)$$

где $\alpha\beta\gamma\delta$ зонные индексы (c для зоны проводимости и v для валентной зоны), а $iklm$ индексы в пространстве Келдыша (в наших обозначениях $i, k, l, m = 1, 2$). Здесь мы применяем обозначение \mathbf{k}_\pm для

$$\mathbf{k}_+ = \mathbf{k} + \frac{\mathbf{q}}{2}; \quad \mathbf{k}_- = \mathbf{k} - \frac{\mathbf{q}}{2}.$$

Мы будем следовать [40] и определим $g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}$ как

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_1; t + \delta, \mathbf{k}_2; t, \mathbf{k}_3; t + \tau, \mathbf{k}_4) = \langle T a_{\alpha\mathbf{k}_1}(t + \tau + \delta t)_i a_{\beta\mathbf{k}_2}(t + \delta)_k a_{\gamma\mathbf{k}_3}^+(t)_l a_{\delta\mathbf{k}_4}^+(t + \tau)_m \rangle, \quad \delta, \delta t \rightarrow 0, \quad (1.2)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает статистическое усреднение, T указывает упорядочение по контуру Келдыша, $a_{\alpha\mathbf{k}}$ и $a_{\alpha\mathbf{k}}^+$ - Гайзенберговские операторы уничтожения и рождения для электрона в зоне α с квазиимпульсом \mathbf{k} .

Мы выведем уравнение для корреляционной функции $g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, рассматривая ее как функцию двух независимых времен t и τ . При фиксированных индексах Келдыша kl для любых im компонент выполняется тождество

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau, t)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{kl}(t + \tau, t)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad \tau > 0. \quad (1.3)$$

Эта корреляционная функция удовлетворяет интегральному уравнению лестничного типа, аналогичного уравнению для парной функции Грина [97]. Это уравнение представлено диаграммно на Рис. 1.1, т.е. оно представляется через Келдышевские функции Грина G^{ij}

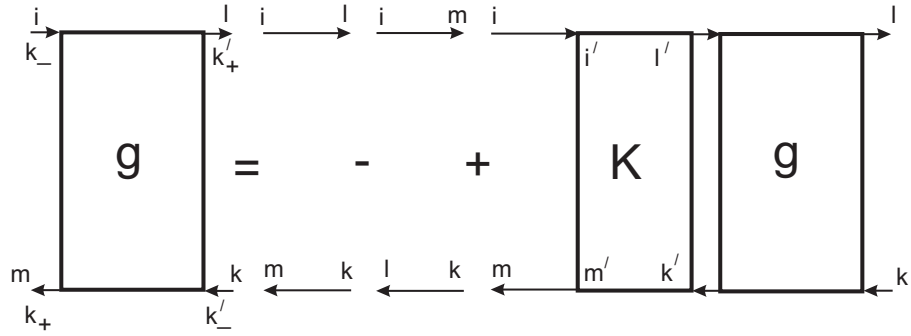


Рис. 1.1: Интегральное уравнение в графическом виде

и ядро K . Как видно из диаграммного представления, мы можем написать уравнение для $g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}$ как в правостороннем виде, так и в левостороннем. Аналитически это уравнение в правостороннем виде выглядит так

$$\begin{aligned} & g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t + \delta, \mathbf{k}_- t; t\mathbf{k}_+ t'; t + \tau, \mathbf{k}_+) = \\ & = G_{\alpha\gamma}^{il}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t\mathbf{k}_+ t') G_{\beta\delta}^{km}(t + \delta, \mathbf{k}_- t'; t + \tau, \mathbf{k}_+) - \\ & - G_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t + \tau, \mathbf{k}_+) G_{\beta\gamma}^{kl}(t + \delta, \mathbf{k}_- t'; t\mathbf{k}_+ t') + \\ & + \sum_{\mathbf{k}_1 \mathbf{k}_2 \mathbf{k}_3 \mathbf{k}_4} \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 G_{\alpha\alpha'}^{i i'}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t_1 \mathbf{k}_1) G_{\delta\delta'}^{m' m}(t_4 \mathbf{k}_4; t + \tau, \mathbf{k}_+) \times \\ & \times K_{\alpha' \beta' \gamma' \delta'}^{i' k' l' m'}(t_1 \mathbf{k}_1, t_2 \mathbf{k}_2, t_3 \mathbf{k}_3, t_4 \mathbf{k}_4) g_{\gamma' \beta' \beta' \delta'}^{l' k' l' k'}(t_3 \mathbf{k}_3; t + \delta, \mathbf{k}_- t'; t\mathbf{k}_+ t'; t_2 \mathbf{k}_2). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь и в дальнейшем по дважды повторяющимся (немым) индексам подразумевается суммирование.

Прежде всего, как и для любой двухчастичной функции Грина, мы можем идентифицировать группу диаграмм, составляющих произведения двух несвязанных Гриновских

функций с учетом поправок всех порядков к этим функциям Грина. Так как эта группа диаграмм не имеет отношения к корреляции, мы исключим эту группу, переопределив корреляционную функцию, т.е. мы будем рассматривать уравнения для

$$g_{\alpha\delta}^{iklm}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \equiv g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + G_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{im}(t + \tau, \mathbf{r})G_{\beta\gamma\mathbf{k}'}^{kl}(t, \mathbf{r}'), \quad (1.5)$$

что можно переписать в виде

$$g_{\alpha\delta}^{iklm}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \langle [\hat{n}_{\alpha\delta\mathbf{k}}(t + \tau, \mathbf{r}) - n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(t + \tau, \mathbf{r})][\hat{n}_{\beta\gamma\mathbf{k}'}(t, \mathbf{r}') - n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}(t, \mathbf{r}')] \rangle. \quad (1.6)$$

В дальнейшем мы будем опускать излишние индексы Келдыша kl и зонные $\beta\gamma$ индексы, восстанавливая их только в местах, где это может вызвать недоразумение.

Превратим наши интегральные уравнения в дифференциальные по отношению к разностному времени τ (это наиболее удобно при рассмотрении нестационарных процессов). Беря производную по времени от (1.4), и используя уравнения Дайсона для функций Грина

$$iG_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{k}t, \mathbf{k}t') = \langle Ta_{\alpha\mathbf{k}}(t)_i a_{\beta\mathbf{k}'}^+(t')_j \rangle$$

в правостороннем и левостороннем вариантах в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} i\partial_t G_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}, t'\mathbf{p}') &= \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}(-1)^{i+1}\delta(t-t')\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} + \varepsilon_{\alpha\alpha'}^{ii'}(\mathbf{p})G_{\alpha'\beta}^{ij}(t\mathbf{p}, t'\mathbf{p}') + \\ &+ (-1)^{i+1}\sum_{\mathbf{k}}\int dt_1 \Sigma_{\alpha\alpha'}^{ii'}(t\mathbf{p}, \mathbf{k}t_1)G_{\alpha'\beta}^{ij}(t_1\mathbf{k}, t'\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (1.7)$$

и аналогичное уравнение для $\partial_{t'} G_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}, t'\mathbf{p}')$, где мы ввели матрицу энергий

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}\varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}); \quad \alpha = \{c, v\}, \quad (1.8)$$

мы получим

$$\begin{aligned} \partial_{\tau} g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t + \delta, \mathbf{k}_-; t\mathbf{k}_+; t + \tau, \mathbf{k}_+) &= \\ i[\varepsilon_{\delta}(\mathbf{k}_+) - \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}_-)] g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t + \delta, \mathbf{k}_-; t\mathbf{k}_+; t + \tau, \mathbf{k}_+) &+ \\ +i \sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3} \int dt_1 dt_2 dt_3 [(-1)^i G_{\delta\delta}^{m'm}(t_3\mathbf{k}_3; t + \tau, \mathbf{k}_+) \times \\ \times K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm'}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-, t_1\mathbf{k}_1, t_2\mathbf{k}_2, t_3\mathbf{k}_3) g_{\gamma\delta}^{lk'}(t_2\mathbf{k}_2; t + \delta, \mathbf{k}_-; t, \mathbf{k}_+; t_1\mathbf{k}_1) \\ - (-1)^m G_{\alpha\alpha'}^{ii'}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t_1\mathbf{k}_1) K_{\alpha'\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}_1, t_2\mathbf{k}_2, t_3\mathbf{k}_3, t + \tau\mathbf{k}_+) \times \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
& \times g_{\gamma\beta\prime}^{lk\prime}(t_3\mathbf{k}_3; t + \delta, \mathbf{k}_-\prime; t, \mathbf{k}_+\prime; t_2\mathbf{k}_2)] \\
& + \sum_{\mathbf{p}} \int dt [i(-1)^i \Sigma_{\alpha\mu}^{ir}(t + \tau + \delta\prime, \mathbf{k}_-; t/\mathbf{p}) g_{\mu\delta}^{rm}(t/\mathbf{p}; t + \delta, \mathbf{k}_-\prime; t\mathbf{k}_+\prime; t + \tau, \mathbf{k}_+) - \\
& - i(-1)^m g_{\alpha\mu}^{ir}(t + \tau + \delta\prime, \mathbf{k}_-; t + \delta, \mathbf{k}_-\prime; t\mathbf{k}_+\prime; t/\mathbf{p}) \Sigma_{\mu\delta}^{rm}(t/\mathbf{p}; t + \tau, \mathbf{k}_+)].
\end{aligned}$$

Отметим, что мы включили внешний скалярный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в определение собственно энергетической части $-i\Sigma_{\alpha\beta}^{ij}$, также как и внешнее классическое оптическое поле, вызывающее межзонные переходы.

Уравнение (1.9) точное, как и (1.4). Причина, по которой мы записали это уравнение в такой форме, заключается в том, что мы хотим воспользоваться правилами Фейнмана в Келдышевском пространстве для написания выражений для собственно-энергетической части Σ и ядра K . Однако, так как физические величины выражаются через одновременную одночастичную матрицу плотности, уравнение (1.9) практически бесполезно, пока оно не замкнуто.

Отметим, что в подынтегральных выражениях мы встречаемся с корреляционными функциями с более сложной зависимостью от временных переменных, чем $g_{\alpha\delta}^{im}(t+\tau, \mathbf{r}; t, \mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$; они включают в себя операторы уничтожения и рождения в различные моменты времени. Последние, однако, мы выразим через первые, приняв, что они отличаются только фазой, описывающей свободное движение

$$g_{\alpha\delta}^{im}(t_1\mathbf{p}, t + \delta\mathbf{k}, t\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}) = g_{\alpha\delta}^{im}(t_2, t)_{\mathbf{p}\mathbf{k}} e^{-i\varepsilon_{\alpha\mathbf{p}}(t_1-t_2)}, \quad \delta \rightarrow 0, \quad (1.10)$$

$$g_{\alpha\delta}^{im}(t_1\mathbf{p}, t + \delta\mathbf{k}, t\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}) = g_{\alpha\delta}^{im}(t_1, t)_{\mathbf{p}\mathbf{k}} e^{i\varepsilon_{\delta\mathbf{p}}(t_2-t_1)}, \quad \delta \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

В дальнейшем нам будут нужны формулы, связывающие функцию Грина и матрицу плотности. Мы снова примем предположение, аналогичное только что примененному. Так как одновременные Гриновские функции

$$G_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{12}(\mathbf{r}t, t) = in_{\alpha\beta\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}); \quad G_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{21}(\mathbf{r}t, t) = G_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{12}(\mathbf{r}t, t) - i\delta_{\alpha\beta}, \quad (1.12)$$

где мы использовали соотношение между G^{12} и G^{21} при совпадающих временах и ввели матрицу плотности в смешанном представлении посредством

$$\begin{aligned}
n_{\alpha\beta\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) &= \int d\mathbf{x} e^{-i\mathbf{p}\mathbf{x}} \langle \psi_{\beta}^{+}(t, \mathbf{r} - \frac{\mathbf{x}}{2}) \psi_{\alpha}(t, \mathbf{r} + \frac{\mathbf{x}}{2}) \rangle; \quad n_{c\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \equiv n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}), \\
n_{cv\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) &\equiv p_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}), \quad n_{v\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \equiv p_{\mathbf{p}}^{*}(t, \mathbf{r}), \quad n_{vv\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}) \equiv n_{\mathbf{p}}(t, \mathbf{r}),
\end{aligned} \quad (1.13)$$

мы имеем

$$G_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{12}(\mathbf{r}t, t') = in_{\alpha\beta\mathbf{p}}(t, \mathbf{r})e^{i\varepsilon_{\beta\mathbf{k}}(t'-t)}, \quad (1.14)$$

$$G_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{12}(\mathbf{r}t, t') = in_{\alpha\beta\mathbf{p}}(t', \mathbf{r})e^{i\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}(t'-t)}. \quad (1.15)$$

Обозначения, только что введенные нами, общеприняты: $n_{\alpha\mathbf{p}}$ функция распределения для $\alpha = c, v$ зон, в то время как $p_{\mathbf{k}}$ описывает смешанное электрон-дырочное состояние и тесно связано с макроскопической межзонной поляризацией.

Мы рассмотрим квазиклассические флуктуации, т.е. мы преобразуем (1.9) к Вигнеровскому представлению и воспользуемся разложением по малым градиентам. Пространственные $1/q$ и временные $1/\omega$ масштабы квазиклассических флуктуаций должны быть велики по сравнению с длиной волны де Бройля и временем становления квантового состояния $1/\varepsilon_{\mathbf{p}}$, имеющего импульс \mathbf{p} и кинетическую энергию $\varepsilon_{\mathbf{p}}$

$$\frac{q}{p} \ll 1, \quad \frac{\omega}{\varepsilon_{\mathbf{p}}} \ll 1. \quad (1.16)$$

Естественно, одновременно с этим при выводе кинетических уравнений, определяющих матрицу плотности, нужно ограничиться приближениями, похожими на (1.16) (см., например, [40]).

Проведя разложение по Тейлору по градиентам, можно заметить, что свертка в смешанном представлении

$$\sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{p}} \Sigma(\mathbf{k}_-, \mathbf{k} + \mathbf{p})g(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k}_+) \quad (1.17)$$

сводится к

$$\sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{p}} \Sigma(\mathbf{k}_-, \mathbf{k} + \mathbf{p})g(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k}_+) = \exp\left[-\frac{i}{2}(\partial_{\mathbf{k}}^{\Sigma}\partial_{\mathbf{r}}^g - \partial_{\mathbf{k}}^g\partial_{\mathbf{r}}^{\Sigma})\right]\Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{r})g(\mathbf{k}, \mathbf{r}). \quad (1.18)$$

Разложив экспоненту в (1.18) и сохраняя первые два члена, можно убедиться, что второй член представляет собой скобку Пуассона, так что окончательно

$$\sum_{\mathbf{q}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \sum_{\mathbf{p}} \Sigma(\mathbf{k}_-, \mathbf{k} + \mathbf{p})g(\mathbf{k} + \mathbf{p}, \mathbf{k}_+) = \Sigma(\mathbf{k}, \mathbf{r})g(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \frac{i}{2}[\Sigma, g]_P, \quad (1.19)$$

где мы ввели обозначение для скобки Пуассона

$$[\Sigma, g]_P = (\partial_{\mathbf{r}}\Sigma\partial_{\mathbf{k}}g - \partial_{\mathbf{k}}\Sigma\partial_{\mathbf{r}}g).$$

Используя (1.19) мы проведем Фурье преобразование (1.9) и получим

$$\begin{aligned}
& \partial_\tau g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = i [\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}] g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + \varepsilon_{\delta\mathbf{k}})}{\partial\mathbf{k}} \frac{\partial g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{\partial\mathbf{r}} - e \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} \frac{\partial g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}{\partial\mathbf{k}} - \\
& - \frac{e}{m\omega_0} (\mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0(t+\tau)} - c.c.) \left(\mathbf{p}_{\alpha\bar{\alpha}}(\mathbf{k}) g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \mathbf{p}_{\delta\bar{\delta}}(\mathbf{k}) g_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \right) + \\
& + \frac{1}{2} \int dt' [-(-1)^i [\Sigma_{\alpha\mu\mathbf{k}}^{ir}(t + \tau + \delta t, t'), g_{\mu\delta}^{rm}(t\mathbf{r}'; t + \delta, \mathbf{r}'; t, \mathbf{r}'; t + \tau, \mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}]_P + \\
& + (-1)^m [g_{\alpha\mu}^{ir}(t + \tau + \delta t, \mathbf{r}; t + \delta, \mathbf{r}'; t\mathbf{r}'; t', \mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \Sigma_{\mu\delta\mathbf{k}}^{rm}(t', t + \tau)]_P] + \\
& + \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}\mathbf{s}} e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} U_{\mathbf{p}} [G_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_-; t + \tau, \mathbf{k}_+ - \mathbf{p}) g_{\mu\mu}^{mm}(t + \tau + \delta t, \mathbf{s} - \mathbf{p}; t + \tau + \delta t, \mathbf{s}) - \\
& - G_{\alpha\delta}^{im}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}_- + \mathbf{p}; t + \tau, \mathbf{k}_+) g_{\mu\mu}^{ii}(t + \tau + \delta t, \mathbf{s} + \frac{\mathbf{p}}{2}; t + \tau + \delta t, \mathbf{s} - \frac{\mathbf{p}}{2})] + \\
& + i \int dt' [(-1)^i \Sigma_{\alpha\mu\mathbf{k}}^{ir}(t + \tau + \delta t, t') g_{\mu\delta}^{rm}(t\mathbf{r}'; t + \delta, \mathbf{r}'; t, \mathbf{r}'; t + \tau, \mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \\
& - (-1)^m g_{\alpha\mu}^{ir}(t + \tau + \delta t, \mathbf{r}; t + \delta, \mathbf{r}'; t\mathbf{r}'; t', \mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \Sigma_{\mu\delta\mathbf{k}}^{rm}(t', t + \tau)] + \\
& + i \sum_{\mathbf{p}} \int dt_1 dt_2 dt_3 [(-1)^i G_{\delta\delta\mathbf{k}}^{m/m}(t_1; t + \tau) K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ikl'm'}(t + \tau + \delta t, \mathbf{k}; t_2\mathbf{p}, t_3\mathbf{p}, t_1\mathbf{k}) - \\
& - (-1)^m G_{\alpha\alpha\mathbf{k}}^{i/i}(t + \tau + \delta t; t_1) K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ikl'm}(t_1\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}, t_3\mathbf{p}, t + \tau\mathbf{k})] \times \\
& \times g_{\gamma\beta\delta}^{lk'}(t_3\mathbf{p}; t + \delta, \mathbf{k}'; t, \mathbf{k}'; t_2\mathbf{p}). \quad (1.20)
\end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что выражения для собственно-энергетической части благодаря (мгновенным) потенциалу φ и оптическому полю с межзонной частотой ω_0

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})} + c.c. \quad (1.21)$$

выглядят так

$$-i \Sigma_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}; t'\mathbf{p}') = i (-1)^i \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta(t - t') (-e\varphi_{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}), \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}
-i \Sigma_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}; t'\mathbf{p}') &= -i (-1)^{i+1} \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') \frac{e}{m\omega_0} [-i \langle \alpha\mathbf{p} | e^{i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} | \beta\mathbf{p}' \rangle \mathbf{E}_0 e^{-i\omega_0 t} + \\
&+ i \langle \alpha\mathbf{p} | e^{-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} | \beta\mathbf{p}' \rangle \mathbf{E}_0^* e^{i\omega_0 t}], \quad (1.23)
\end{aligned}$$

где матричный элемент импульса можно выразить через дипольный момент $\mathbf{d}_{\alpha\beta\mathbf{p}}$

$$-\frac{e}{m} \langle \alpha\mathbf{p} | e^{\pm i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}} \hat{\mathbf{p}} | \beta\mathbf{p}' \rangle = i\omega_{\alpha\beta\mathbf{p}} \mathbf{d}_{\alpha\beta\mathbf{p}} \delta_{\mathbf{p}\pm\mathbf{k}_0;\mathbf{p}'}; \quad \omega_{\alpha\beta\mathbf{p}} = \varepsilon_{\alpha\mathbf{p}} - \varepsilon_{\beta\mathbf{p}} \quad (1.24)$$

и амплитуду поля можно переписать в терминах пространственной плотности фотонов \mathcal{N}_{ω_0} с частотой ω_0 , $|\mathbf{E}_0| \propto (\hbar\omega_0 \mathcal{N}_{\omega_0})^{1/2}$. Здесь и в дальнейшем черта над зонным индексом означает что $\bar{c} = v$ и $\bar{v} = c$.

Первый член в правой стороне (1.20) описывает свободные осцилляции межзонной поляризации при условии, что $\alpha \neq \delta$, второй член учитывает внутризонное движение, третий и четвертый члены описывают действие внешних полей. Члены, составляющие скобки Пуассона, описывают самосогласованное поле, вызванное неоднородностью электронного состояния и перенормировку скорости внутризонного движения благодаря взаимодействию, что просто отражает тот факт, что электроны между столкновениями не ведут себя как невзаимодействующие частицы (перенормировкой скорости мы будем пренебрегать). Следующий член - это самосогласованное поле флуктуаций, где $U_{\mathbf{q}}$ Фурье компонента кулоновского взаимодействия

$$U(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}; \quad U_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi e^2}{\varepsilon q^2}, \quad (1.25)$$

а ε диэлектрическая постоянная. Соответствующее выражение для ядра K (см. Рис. 1.2) есть

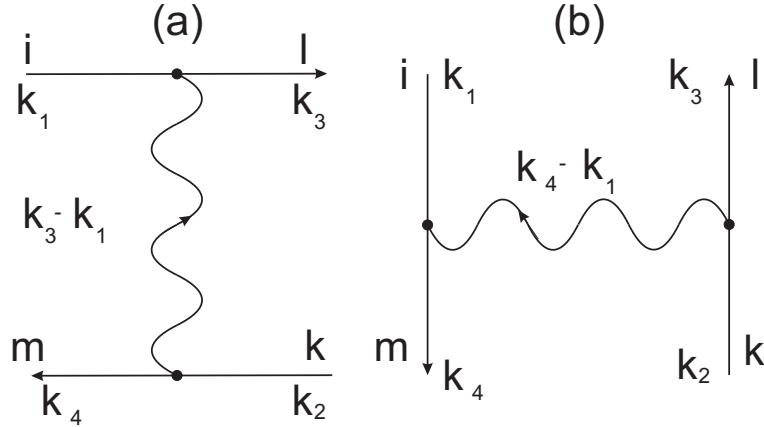


Рис. 1.2: Кулоновское ядро K в графическом виде

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}_1, t_2\mathbf{k}_2, t_3\mathbf{k}_3, t_4\mathbf{k}_4) = -i(-1)^i \delta_{\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3+\mathbf{k}_4} \delta_{ik} \delta_{im} \delta_{il} \delta(t_1 - t_2) \times \quad (1.26)$$

$$\times [\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \delta(t_1 - t_3) \delta(t_2 - t_4) U_{\mathbf{k}_3-\mathbf{k}_1} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma} \delta(t_1 - t_4) \delta(t_2 - t_3) U_{\mathbf{k}_4-\mathbf{k}_1}],$$

где первый член в скобках (диаграмма (a) на Рис. 1.2) учитывает вклад обменного взаимодействия, второй член (диаграмма (b) на том же рисунке) описывает прямое кулоновское взаимодействие.

Рассмотрим сначала прямое взаимодействие. Член с кулоновским потенциалом первого порядка, входящий в ядро K , дается выражением (мы положили $i = 1$ и $m = 2$)

$$-\hat{B}\hat{g}_{scf} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} n_{\alpha\delta\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{r}_1 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{\mathbf{p}} g_{\mu\mu}(t + \tau + \delta t, \mathbf{r}_1; t\mathbf{r}')_{\mathbf{p}\mathbf{k}'} \quad (1.27)$$

Это выражение ясно показывает влияние самосогласованного поля флуктуаций. Мы приняли обозначение $n_{\alpha\delta\mathbf{k}}$ для $n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(t + \tau, \mathbf{r})$, это не вызовет недоразумений, так как компонента матрицы плотности с волновым вектором $\mathbf{k}(\mathbf{k}')$ будет всегда сопровождаться временной и пространственной переменной $t + \tau, \mathbf{r} (t, \mathbf{r}')$.

Перейдем теперь к обменному вкладу. Первый член в (1.26) после подстановки в (1.20) приводит к следующему выражению

$$-\hat{B}\hat{g}_{ex} = i \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} \{g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} n_{\mu\delta\mathbf{k}} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}} g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}'}\} \quad (1.28)$$

Заметим, что в случае одной зоны этого вклада нет, вкладом же члена следующего порядка по градиенту, возникающего от обменного взаимодействия, можно пренебречь.

Вклад от самосогласованного поля, возникающий за счет обмена фононом (этот вклад описывается диаграммой, аналогичной диаграмме (а) на Рис. 1.2, в последней волнистая линия, соответствующая кулоновскому взаимодействию, заменяется на фононную функцию Грина) можно отбросить, так как мы уже учли больший вклад, возникающий за счет кулоновского взаимодействия. Мы также пренебрегаем фононным вкладом в самосогласованное электронное поле (этот вклад описывается диаграммой, похожей на диаграмму (а) на Рис. 1.3), так как мы снова учитываем более сильное взаимодействие за счет кулоновского взаимодействия. Используя аналитическое выражение для собственно-энергетической части (диаграмма (а) на Рис. 1.3)

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}_-, t\mathbf{p}_+) = i(-1)^i \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(t - t') U_{\mathbf{q}} \sum_{\mu\mathbf{k}} [-iG_{\mu\mu}^{ii}(t + 0(-1)^i, \mathbf{k}_-, t\mathbf{k}_+)] \quad (1.29)$$

при вычислении скобок Пуассона в (1.20), мы получим для самосогласованного электронного поля

$$-\hat{B}\hat{g}_{sce} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} g_{\alpha\delta}(t + \tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int d\mathbf{r}_1 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{\mu\mathbf{p}} n_{\mu\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1). \quad (1.30)$$

Для учета заряда ионов решетки надо было бы вычесть из $\sum_{\mu\mathbf{p}} n_{\mu\mathbf{p}}$ полное число носителей. Самосогласованное электронное поле обращается в нуль в случае пространственно однородного распределения носителей.

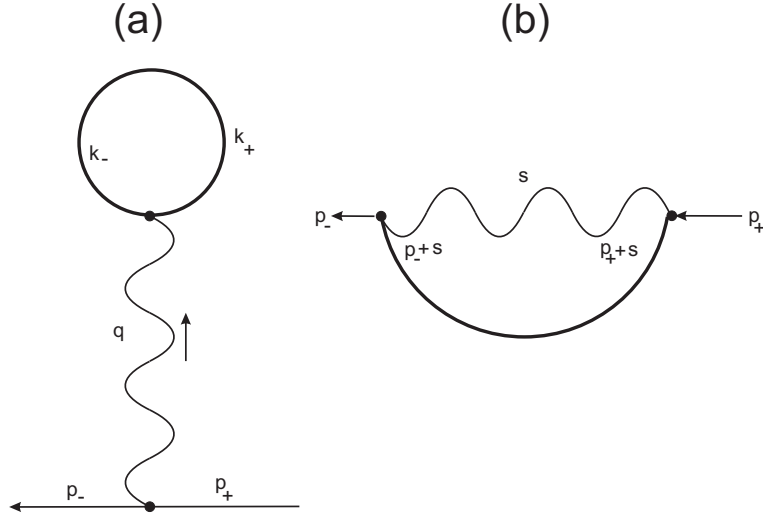


Рис. 1.3: Графический вид самосогласованного электронного поля и обменного вклада в энергию

Самосогласованное электронное поле можно включить в эффективный потенциал, если мы напишем вместо внешнего потенциала φ в (1.20) эффективный потенциал φ^{eff} в соответствии с

$$\varphi^{eff} = \varphi - \frac{1}{e} \int d\mathbf{r}_1 U(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \sum_{\mu\mathbf{p}} n_{\mu\mathbf{p}}(\mathbf{r}_1). \quad (1.31)$$

Последние два члена в (1.20) учитывают процессы рассеяния, это так называемые уходные и приходные члены соответственно.

Прежде чем закончить этот раздел, выпишем выражение для члена, дающего обменный вклад в энергию (диаграммно представленного на Рис. 1.3 (b))

$$-i\Sigma_{\alpha\beta}^{ij}(t\mathbf{p}_-, t\mathbf{p}_+) = (-1)^i \delta_{ij} \delta(t - t') \sum_{\mathbf{s}} iU_{\mathbf{s}} iG_{\alpha\beta}^{ii}(t\mathbf{p}_- + \mathbf{s}; t\mathbf{p}_+ + \mathbf{s}) \quad (1.32)$$

или в смешанном представлении

$$-i\Sigma_{\alpha\beta\mathbf{p}}^{ij}(\mathbf{tr}, t\mathbf{r}) = (-1)^i \delta_{ij} \delta(t - t') \sum_{\mathbf{s}} iU_{\mathbf{s}} iG_{\alpha\beta\mathbf{p}+\mathbf{s}}^{ii}(\mathbf{tr}; t\mathbf{r}). \quad (1.33)$$

Подставляя это выражение в седьмой член в уравнении (1.20), получим в правой стороне (1.20)

$$i \sum_{\mathbf{s}} U_{\mathbf{s}} [(-i)G_{\alpha\mu\mathbf{k}+\mathbf{s}}^{ii}(t + \tau + 0)g_{\mu\delta}^{im}(t, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - g_{\alpha\mu}^{im}(t, \tau, \mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-i)G_{\mu\delta\mathbf{k}+\mathbf{s}}^{mm}(t + \tau - 0)]. \quad (1.34)$$

Используя (1.12) и (для определенности) приняв Келдышевские индексы равными $i = 1$ и $m = 2$, последнее выражение можно привести к виду

$$-\hat{B}\hat{g}_{enr} = i \sum_{\mathbf{s}} U_{\mathbf{s}} [n_{\alpha\mu\mathbf{k}+\mathbf{s}} g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mu\delta\mathbf{k}+\mathbf{s}}]. \quad (1.35)$$

Это выражение можно включить в матрицу эффективной энергии

$$\varepsilon_{\alpha\beta\mathbf{k}}^{eff} = \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} \delta_{\alpha\beta} - \sum_{\mathbf{s}} U_{\mathbf{s}} n_{\alpha\beta\mathbf{k}-\mathbf{q}} \quad (1.36)$$

и первый член в (1.20) можно представить тогда в форме

$$i[g_{\alpha\mu\mathbf{k}\mathbf{k}'} \varepsilon_{\mu\delta\mathbf{k}}^{eff} - \varepsilon_{\alpha\mu\mathbf{k}}^{eff} g_{\mu\delta\mathbf{k}\mathbf{k}'}]. \quad (1.37)$$

Заметим, что сумма обменных операторов в (1.28) и (1.35) имеет следующее свойство

$$\sum_{\mathbf{k}} [(B_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{ex} + (B_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{enr}] = 0. \quad (1.38)$$

1.2.1 Взаимодействие с фотонами. Генерация и рекомбинация.

Вернемся к уравнению (1.20) и рассмотрим взаимодействие с фотонами, вызывающее межзонные переходы (процессы межзонной генерации и рекомбинации). Гамильтониан электрон-фотонного взаимодействия имеет вид

$$H_{el-phot} = \sum_{\alpha\mathbf{k}; \mathbf{q} \neq 0} (C_{\alpha\mathbf{q}}^* b_{\alpha\mathbf{q}}^+ a_{v\mathbf{k}}^+ a_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + C_{\alpha\mathbf{q}} b_{\alpha\mathbf{q}} a_{c\mathbf{k}}^+ a_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}}). \quad (1.39)$$

Фотонная одновременная функция Грина \hat{D} связана с числом фотонов $\mathcal{N}_{\alpha\mathbf{q}}$ соотношением

$$\begin{aligned} i\hat{D}_{\alpha\mathbf{q}}^{12}(t) &= \mathcal{N}_{\alpha\mathbf{q}}(t); \\ i\hat{D}_{\alpha\mathbf{q}}^{21}(t) &= 1 + i\hat{D}_{\alpha\mathbf{q}}^{12}(t). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Число фотонов, в свою очередь, можно связать с двухвременной функцией соотношением

$$i\hat{D}_{\alpha\mathbf{q}}^{12}(t, t') = \mathcal{N}_{\alpha\mathbf{q}}(t) e^{-i\omega_{\alpha\mathbf{q}}(t-t)}. \quad (1.41)$$

Электрон-фотонное взаимодействие можно включить в нашу схему, заметив, что для электрон-фотонной вершины возникает матрица по зонным индексам $\delta_{\alpha\bar{\beta}}$ и что благодаря (1.39) для фотонной линии

$$D_{\alpha\mathbf{q}}^{ij}(t, t') = \hat{D}_{\alpha\mathbf{q}}^{ij}(t, t') + \hat{D}_{\alpha, -\mathbf{q}}^{ji}(t', t). \quad (1.42)$$

Для члена, описывающего наинизший по константе связи генерационный процесс (он связан с ядром K и выражение для него дается графически диаграммой (а) на Рис. 1.2 с заменой волнистой линии линией фотона), мы имеем

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}_1, t_2\mathbf{k}_2, t_3\mathbf{k}_2, t_4\mathbf{k}_1) = \quad (1.43)$$

$$= \sum_{\nu} i(-1)^{i+k} \delta_{il} \delta_{mk} \delta_{\alpha\bar{\beta}} \delta_{\gamma\bar{\alpha}} \delta_{\delta\bar{\beta}} \delta(t_1 - t_3) \delta(t_2 - t_4) D_{\nu\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}^{ik}(t_1, t_2).$$

Выражение для собственно-энергетической части (графический вид которой такой же, как на диаграмме (b) на Рис. 1.3 с заменой кулоновской волнистой линии на фотонную), описывающей рекомбинационный член в наинизшем порядке

$$-i\Sigma_{\alpha\beta\mathbf{k}}^{ij}(t, t') = -(-1)^{i+j} \sum_{\nu\mathbf{q}} iG_{\alpha\bar{\beta}\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{ij}(t, t') iD_{\nu\mathbf{q}}^{ij}(t, t'). \quad (1.44)$$

Начнем с генерационного члена. Подставляя (1.43) в последний член в (1.20) и проведя интегрирование по t_2 и t_3 , получим

$$\sum_{\nu\mathbf{p}} \int dt' [(-1)^{i'} G_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{i'i'}(t + \tau + \delta t', t') D_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}^{i'm}(t', t + \tau) g_{\delta\bar{\delta}}^{im}(t', t + \delta, t, t + \tau)_{\mathbf{p}\mathbf{k}'} -$$

$$-(-1)^{m'} G_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{m'm}(t', t + \tau) D_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}^{i'm'}(t + \tau + \delta t', t') g_{\alpha\bar{\alpha}}^{im'}(t + \tau + \delta t', t + \delta, t, t')_{\mathbf{p}\mathbf{k}}]. \quad (1.45)$$

В соответствии с принципом причинности, здесь мы можем заменить верхний предел интегрирования моментом $t + \tau$, хотя интегрирование по t' формально распространяется на промежуток от $-\infty$ до $+\infty$. Можно проверить, что вклад больших времен обращается в нуль благодаря свойствам Гриновской функции, собственно-энергетической части и ядра.

Теперь мы можем, используя (1.10) и (1.14) в первом члене в скобках, привести двух-временную корреляционную функцию и функцию Грина к одновременным функциям (и используя уравнения (1.11) совместно с (1.15) во втором члене), чтобы получить

$$\pi \sum_{\nu\mathbf{p}} \left[(-1)^{i'} G_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{i'i'}(t + \tau + 0) g_{\delta\bar{\delta}}^{i'm}(t, \tau)_{\mathbf{p}\mathbf{k}'} \{ \hat{D}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}^{i'm}(t + \tau - 0) \delta_-(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{p}} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}) + \right.$$

$$\left. + \hat{D}_{\nu\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{i'm}(t + \tau - 0) \delta_-(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{p}} + \omega_{\nu\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \} -$$

$$-(-1)^{m'} G_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{m'm}(t + \tau - 0) g_{\alpha\bar{\alpha}}^{i'm'}(t, \tau)_{\mathbf{p}\mathbf{k}} \{ \hat{D}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}^{i'm'}(t + \tau + 0) \delta_+(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{p}} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{p}}) + \right.$$

$$\left. + \hat{D}_{\nu\mathbf{p}-\mathbf{k}}^{i'm'}(t + \tau + 0) \delta_+(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{p}} + \omega_{\nu\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \} \right]. \quad (1.46)$$

Мы ввели здесь $\delta_-(x)$ и $\delta_+(x)$ тождествами

$$\int_{-\infty}^0 dt e^{itx} = \frac{-i}{x - i0} = \pi\delta(x) - \mathcal{P}\frac{i}{x} = \pi\delta_-(x); \quad \delta_+(x) = \delta_-(-x), \quad (1.47)$$

где \mathcal{P} означает главное значение по Коши. Теперь, используя (1.12),(1.40), которые позволяют выразить электронные и фононные функции Грина в терминах $n_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$, мы получим

$$\begin{aligned}
-\hat{B}\hat{g}_{gen} &= \pi \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \left\{ [n_{\alpha\delta\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\alpha\delta}] [g_{\bar{\delta}\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_-(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \right. \\
&+ g_{\bar{\alpha}\alpha}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_+(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\nu\mathbf{q}})] + \\
&+ [\delta_{\alpha\delta} - n_{\alpha\delta\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\alpha\delta}] [g_{\bar{\delta}\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_-(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\
&+ g_{\bar{\alpha}\alpha}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_+(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}})] \left. \right\}. \tag{1.48}
\end{aligned}$$

Суммирование по зонным индексам и сохранение только резонансных членов приводит к следующим ненулевым операторам

$$-B^{cc}g_{gen} = 2\pi \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) [n_{c\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}] g_{vv}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}, \tag{1.49}$$

$$\begin{aligned}
-B^{cv}g_{gen} &= -\pi p_{\mathbf{k}} \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \left\{ g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_-(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) - \right. \\
&- g_{vv}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_+(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) \left. \right\}. \tag{1.50}
\end{aligned}$$

Здесь мы впервые сталкиваемся с не сохраняющими энергию процессами, на что явно указывают δ_- и δ_+ , которые имеют как мнимые, так и вещественные части. Это не должно нас удивлять, так как квантовые кинетические уравнения для $p_{\mathbf{k}}$ также содержат члены, которые не имеют структуру простой δ -функции и описывают как перенормировку межзонной энергии (мнимые части δ_- и δ_+), так и релаксацию (вещественные части). Для операторов B^{vc} и B^{vv} мы получим

$$\begin{aligned}
-B^{vc}g_{gen} &= -\pi p_{\mathbf{k}}^* \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \left\{ g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) - \right. \\
&- g_{vv}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_-(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) \left. \right\}, \tag{1.51}
\end{aligned}$$

$$-B^{vv}g_{gen} = 2\pi \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) [1 - n_{v\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}] g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'}. \tag{1.52}$$

Надо здесь заметить, что $B_{\mathbf{k}}^{\alpha\beta}$ все еще являются операторами, так как в генерационном (или приходном) члене они включают суммирование по \mathbf{q} выражений типа $(\dots)g_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}$, описывающих, как флуктуации с $\mathbf{k} - \mathbf{q}$ исчезают и флуктуации с квазиимпульсом \mathbf{k} появляются.

Что касается уходящего (или релаксационного) члена, подставляя выражение для собственно-энергетической части (1.44) в предпоследний член в (1.20) и проведя аналогичные вычисления, мы получим

$$\begin{aligned}
-\hat{B}\hat{g}_{rec} &= -\pi \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \{g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}([\delta_{\bar{\alpha}\bar{\mu}} - n_{\bar{\alpha}\bar{\mu}\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\mu}}]\delta_-(\varepsilon_{\bar{\mu}\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{\bar{\alpha}\bar{\mu}\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\bar{\alpha}\bar{\mu}}]\delta_-(\varepsilon_{\bar{\mu}\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}})) + \\
&+ g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}([\delta_{\bar{\mu}\bar{\delta}} - n_{\bar{\mu}\bar{\delta}\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\bar{\mu}\bar{\delta}}]\delta_+(\varepsilon_{\bar{\mu}\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{\bar{\mu}\bar{\delta}\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}\delta_{\bar{\mu}\bar{\delta}}]\delta_+(\varepsilon_{\bar{\mu}\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}))\}, \tag{1.53}
\end{aligned}$$

или после суммирования по зонным индексам

$$-B_{\alpha\beta}^{cc}g_{\alpha\beta}^{rec} = -2\pi g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 [1 - n_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) \tag{1.54}$$

$$\begin{aligned}
-B^{cv}g^{rec} &= -\pi g_{cv}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \{[1 - n_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta_-(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta_+(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}})\} \tag{1.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-B^{vc}g^{rec} &= -\pi g_{vc}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \{[1 - n_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta_-(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}})\} \tag{1.56}
\end{aligned}$$

$$-B^{vv}g^{rec} = -2\pi g_{vv}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 [n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}]\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) \tag{1.57}$$

1.2.2 Взаимодействие с фононами.

В этом разделе мы вычислим последние два члена в (1.20) для случая, когда носители рассеиваются на коллективных возбуждениях решетки. Напишем Гамильтониан для электрон-фононного взаимодействия

$$H_{el-phon} = \sum_{\alpha\mathbf{k}, \mathbf{q} \neq 0} (c_{\mathbf{q}}b_{\mathbf{q}}a_{\alpha\mathbf{k}}^+a_{\alpha\mathbf{k}-\mathbf{q}} + c_{\mathbf{q}}^*b_{\mathbf{q}}^+a_{\alpha\mathbf{k}}^+a_{\alpha\mathbf{k}+\mathbf{q}}), \tag{1.58}$$

где $b_{\mathbf{q}}^+$ и $b_{\mathbf{q}}$ являются операторами рождения и уничтожения фононов с законом дисперсии $\omega_{\mathbf{q}}$. Очевидно, что этот гамильтониан аналогичен электрон-фотонному гамильтониану (1.39) за исключением того, что теперь вершина, описывающая взаимодействие, не содержит множителя $\sigma_{\alpha\beta}^x$, так как взаимодействие (1.58) не вызывает межзонных переходов.

Пользуясь этой аналогией, мы можем просто использовать уже полученные выше выражения (1.48), (1.53) и упростить их для описания электрон-фононного взаимодействия. Для приходного члена мы имеем

$$\begin{aligned}
-\hat{B}\hat{g}_{in} &= \pi \sum_{\mu\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 (\{[n_{\alpha\mu\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\alpha\mu}]g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{\mu\delta\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\mu\delta}]g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_{+}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}})\} + \\
&+ \{[\delta_{\alpha\mu} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\alpha\mu}]g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}}) + \\
&+ [\delta_{\mu\delta} - n_{\mu\delta\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\mu\delta}]g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}'}\delta_{+}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})\}.
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Суммируя по зонным индексам, мы имеем для приходного члена, например для $B^{cc}g^{in}$

$$\begin{aligned}
-B^{cc}g^{in} &= 2\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'} \{[n_{c\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}]\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}) + \\
&+ [1 - n_{c\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}]\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})\} + \\
&+ \pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 \{p_{\mathbf{k}}g_{vc}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}[\delta_{-}(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \delta_{-}(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})] + \\
&+ p_{\mathbf{k}}^*g_{cv}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}'}[\delta_{+}(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \delta_{+}(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}})]\}.
\end{aligned} \tag{1.60}$$

Остальные операторы $B^{\alpha\delta}$ можно выписать точно таким же образом и могут быть просто получены из (1.59).

Уходные члены можно обработать аналогичным образом, собственно-энергетическая часть дается выражением, похожим на выражение для фотонов. Нетрудно убедиться, что результат для фононов получается простым опусканием черты сверху над зонными индексами в (1.53)

$$\begin{aligned}
-\hat{B}\hat{g}_{out} &= -\pi \sum_{\mu\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 (g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}([\delta_{\alpha\mu} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\alpha\mu}]\delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{\alpha\mu\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\alpha\mu}]\delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})) + \\
&+ g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}([\delta_{\mu\delta} - n_{\mu\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\mu\delta}]\delta_{+}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}}) + \\
&+ [n_{\mu\delta\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}\delta_{\mu\delta}]\delta_{+}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}})).
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Снова суммируя по зонным немим индексам, можно легко получить операторы $B^{\alpha\delta}$, для примера выпишем выражение для B^{cc}

$$-B^{cc}g^{out} = -2\pi g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 \{[1 - n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}]\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}}) +$$

$$\begin{aligned}
& + [n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\mathbf{q}}] \delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) \} - \\
& - \pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 [g_{vc}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} (\delta_-(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \delta_-(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}})) + \\
& + g_{cv}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* (\delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}}) - \delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{q}}))].
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Можно проверить, что операторы имеют свойство сохранения числа электронов. В самом деле, суммируя (1.59) и (1.61) по \mathbf{k} и заменив переменную интегрирования $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ в (1.59) и добавив (1.59) и (1.61), мы имеем

$$\sum_{\mathbf{k}} [(B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{in} + (B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{out}] = 0. \tag{1.63}$$

1.2.3 Столкновения электронов с примесями.

Результаты для этого случая можно получить из результатов для электрон-фононного рассеяния. Например, в (1.59) сохраним сначала первые два члена, затем только члены, пропорциональные числу фононов (опустив еще частоты фононов в дельта функциях)

$$\begin{aligned}
-\hat{B}\hat{g}_{in} & = \pi \sum_{\mu\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}} \{ \delta_{\alpha\mu} g_{\mu\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \delta_-(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \\
& + \delta_{\mu\delta} g_{\alpha\mu}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \delta_+(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \}.
\end{aligned}$$

Считая теперь $|c_{\mathbf{q}}|^2 \mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ квадратом матричного элемента электрон-примесного рассеяния (мы сохраним для последнего, пропорционального концентрации примесей, то же обозначение $|c_{\mathbf{q}}|^2$) и суммируя по μ , получим

$$-\hat{B}\hat{g}_{in} = \pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 g_{\alpha\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \{ \delta_-(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}-\mathbf{q}}) + \delta_+(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \}. \tag{1.64}$$

Такие же преобразования для уходящего члена (1.61) приводят к

$$-\hat{B}\hat{g}_{out} = -\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 g_{\alpha\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \{ \delta_-(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}) + \delta_+(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\delta\mathbf{k}}) \}. \tag{1.65}$$

1.2.4 Электрон-электронные столкновения.

Хотя в методе Келдыша учет экранирования не представляет (во всяком случае в приближении хаотических фаз (RPA)) особых затруднений (см., например [40, 93]), для краткости в этом разделе мы ограничимся неэкранированным кулоновским взаимодействием.

Мы примем экранирование во внимание только в одной из полученных нами корреляционных функций для Ланжевенских случайных сил (см. раздел 1.5).

Квадратичные члены для собственно-энергетической части описывают столкновения между частицами (диаграмма (а) Рис. 1.4) и обменный вклад (диаграмма (b) на Рис. 1.4) в процессы рассеяния. Последний вклад мал по сравнению с вкладом прямого кулоновского взаимодействия, так как основную роль в кинетических процессах играют столкновения с большими прицельными расстояниями. Обменные члены давали бы вклад, сравнимый с основным, если бы частицы сближались на расстояния порядка длины волны де-Бройля, так что из-за неопределенности координат частиц за каждой из них нельзя было бы проследить. Мы рассмотрим здесь только прямое рассеяние и соответствующее выражение

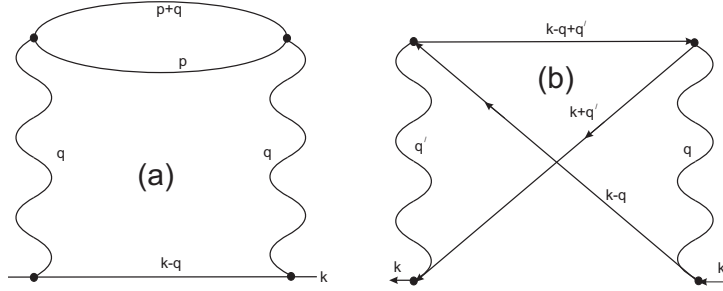


Рис. 1.4: Вклады прямого и обменного кулоновского взаимодействия в столкновения

для собственно-энергетической части, описываемое диаграммой (а) на Рис. 1.4, имеет вид

$$-i\Sigma_{\alpha\beta\mathbf{k}}^{ij}(t, t') = -i(-1)^{i+j} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 G_{\alpha\beta\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{ij}(t, t') G_{\mu\nu\mathbf{p}+\mathbf{q}}^{ij}(t, t') G_{\nu\mu\mathbf{p}}^{ji}(t, t'). \quad (1.66)$$

Подставляя его в (1.20) и используя (1.10), (1.11), (1.14), (1.15), (1.12), мы получим для уходящего члена в правой стороне уравнения (1.20)

$$\begin{aligned} -\hat{B}\hat{g}_{a,el} = & -\pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \{g_{\lambda\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_-(\Delta\varepsilon_{\lambda\mu}) \times \\ & \times [(n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\alpha\lambda})(n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\mu})n_{\mu\nu\mathbf{p}} - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}}n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{\mu\nu\mathbf{p}} - \delta_{\mu\nu})] + \\ & + g_{\alpha\lambda}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_+(\Delta\varepsilon_{\lambda\nu}) \times \\ & \times [(n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\lambda\delta})(n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\mu})n_{\mu\nu\mathbf{p}} - n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{\mu\nu\mathbf{p}} - \delta_{\mu\nu})]\}. \end{aligned} \quad (1.67)$$

Мы ввели укороченное обозначение для разности энергий

$$\Delta\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \varepsilon_{\beta\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\beta\mathbf{p}} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}.$$

$$\begin{aligned}
-B^{cc}g_{a,el} = & \tag{1.68} \\
& -2\pi g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \{ \delta(\Delta\varepsilon_{cc}) ((n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} - 1)(n_{c\mathbf{p}+\mathbf{q}} - 1)n_{c\mathbf{p}} - n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}}n_{c\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{c\mathbf{p}} - 1)) + \\
& + \delta(\Delta\varepsilon_{cv}) ((n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} - 1)(n_{v\mathbf{p}+\mathbf{q}} - 1)n_{v\mathbf{p}} - n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}}n_{v\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{v\mathbf{p}} - 1)) \} + \\
& + \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 g_{cc}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \{ p_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} p_{\mathbf{p}}^* [\delta_-(\Delta\varepsilon_{cv}) + \delta_+(\Delta\varepsilon_{cc})] + c.c. \} - \\
& - \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 g_{cv}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^* (\delta_+(\Delta\varepsilon_{vc})[n_{c\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{c\mathbf{p}}] + \delta_+(\Delta\varepsilon_{vv})[n_{v\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{v\mathbf{p}}]) - \\
& - \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 g_{vc}(t, \tau)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} p_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} (\delta_-(\Delta\varepsilon_{vc})[n_{c\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{c\mathbf{p}}] + \delta_-(\Delta\varepsilon_{vv})[n_{v\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{v\mathbf{p}}]).
\end{aligned}$$

Здесь первый член обычен с единственным отличием, что он описывает также рассеяние носителей из разных зон. Оставшиеся члены включают рассеяние на поляризации и содержат недиагональные по зонным индексам элементы матрицы плотности $p_{\mathbf{k}}$ и $p_{\mathbf{k}}^*$. Надо заметить, что такие члены могут быть важны в некоторых случаях, скажем, когда числа заполнения в зонах $n_{\alpha\mathbf{k}}$ и поляризация $p_{\mathbf{k}}$ созданы одним и тем же внешним возбуждением, при этом $|p_{\mathbf{k}}|^2$ и $n_{c\mathbf{k}}$ (или $[1 - n_{v\mathbf{k}}]$) окажутся одного (второго) порядка по внешнему возмущению.

Теперь рассмотрим член в (1.20), возникающий за счет ядра. Для ядра у нас существуют три члена (они обозначены (b),(c),(d) и представлены на Рис. 1.5), приводящих соответственно к операторам $B^{\alpha\beta}g_{b,el}$, $B^{\alpha\beta}g_{c,el}$ и $B^{\alpha\beta}g_{d,el}$. Явные выражения для них приведены в приложении А.

Сумма операторов, описывающих электрон-электронное рассеяние, имеют свойство сохранения числа частиц, в чем можно убедиться после простых преобразований суммы по \mathbf{k} суммы соответствующих операторов (a, b, c, d). Например, замена $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}$ в сумме (А.4) (c) по \mathbf{k} указывает, что эта сумма совпадает с суммой (А.2) (b) по \mathbf{k} с точностью до знака. Таким образом, мы имеем

$$\sum_{\mathbf{k}} \left[(B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{a,el} + (B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{b,el} + (B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{c,el} + (B_{\mathbf{k}}^{\alpha\delta} g_{\mathbf{k}\mathbf{k}'})_{d,el} \right] = 0. \tag{1.69}$$

Собирая все релаксационные операторы \hat{B}_j и обозначая их сумму как B и включив первые четыре члена в правой стороне (1.20) в определение оператора B (теперь ставшего оператором эволюции), получим

$$\left(\delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\delta\delta'} \partial_{\tau} + B_{\alpha\delta}^{\alpha\delta}(t + \tau, \mathbf{r}) \right) g_{\alpha\beta\gamma\delta'}(t + \tau\mathbf{r}, t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 0, \quad \tau > 0. \tag{1.70}$$

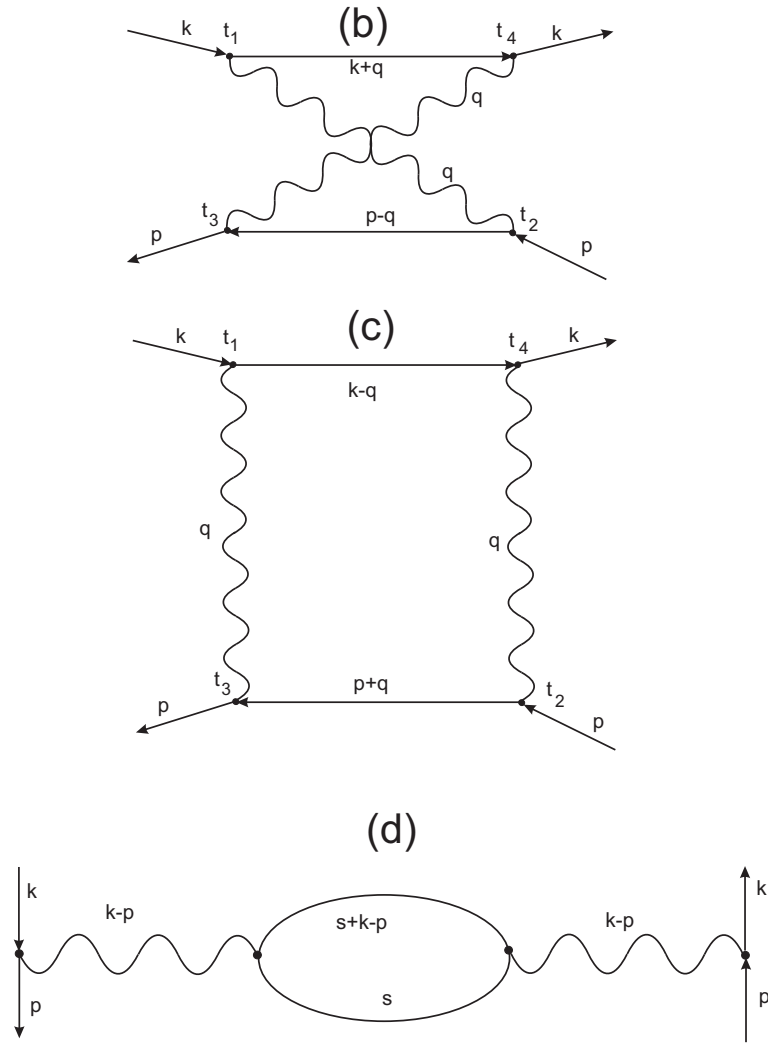


Рис. 1.5: Электрон-электронный вклад в ядро.

Это уравнение теперь легко интерпретировать. Оператор B описывает релаксацию малых отклонений от стационарного состояния. Эта формула демонстрирует, что малые флуктуационные отклонения эволюционируют точно также, как и малые отклонения, вызванные каким либо внешним возмущением. Как это было отмечено в обзоре Ганцевича и др. [36], уравнение (1.70) есть не что иное, как приложение знаменитой гипотезы Онзагера к неравновесным флуктуациям.

После того как формула (1.70) установлена, задача сводится к нахождению одновременной двухчастичной корреляционной функции $g_{\alpha\beta\gamma\delta}(tr, tr')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, которая и будет являться начальным условием к дифференциальному уравнению для разновременной корреляци-

онной функции $g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t + \tau\mathbf{r}, t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$.

Для начала мы обнаруживаем, что (1.4) при $\tau = 0$ включает в себя два члена: первый член соответствует несвязанным диаграммам (сравни с [40])

$$G_{\alpha\gamma}^{11}(t + \delta t, \mathbf{k}_-; t\mathbf{k}_+) G_{\beta\delta}^{12}(t + \delta, \mathbf{k}_-; t, \mathbf{k}_+)$$

и их Фурье образ сводится к

$$\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\beta\delta\mathbf{k}}(t\mathbf{r}) (\delta_{\alpha\gamma} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}}(t\mathbf{r})), \quad (1.71)$$

третий (второй уже учтен нашим определением корреляционной функции) соответствует группе связанных диаграмм. Для последней при $\tau = 0$ мы примем обозначение $G_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r}, t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\beta\delta\mathbf{k}}(t\mathbf{r}) (\delta_{\alpha\gamma} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}}(t\mathbf{r})) + G_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.72)$$

Что касается функции G , она должна определяться из своего уравнения движения. Следующий раздел посвящен получению такого уравнения.

1.3 Одновременная корреляционная функция.

Уравнение для функции $G_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ устанавливается так же, как мы установили аналогичное уравнение выше для разновременного коррелятора. Так как мы уже вывели уравнение по отношению к τ (или по отношению к первой переменной $t + \tau$), мы замечаем, что нам нужна производная по отношению ко второй временной переменной t . Для этого удобно использовать интегральное уравнение (1.4), переписанное в левостороннем виде. Можно убедиться, что такая процедура приведет к такому же оператору B , однако теперь действующему на переменные, соответствующие второму временному аргументу: на зонные индексы $\beta\gamma$ и электронный квазиимпульс \mathbf{k}' и координату \mathbf{r}' . Таким образом, для одновременной корреляционной функции получается уравнение

$$\begin{aligned} \partial_t G_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} - \\ &- \left[\delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} B_{\alpha\delta\mathbf{k}}^{\alpha\delta}(t\mathbf{r}) + \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\delta\delta'} B_{\beta\gamma\mathbf{k}'}^{\beta\gamma}(t\mathbf{r}') \right] G_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \end{aligned} \quad (1.73)$$

Здесь обозначение $L_{\alpha\beta\gamma\delta}$ введено для источника флуктуаций, описывающего возникновение корреляций. Таким образом, влияние столкновений и самосогласованного поля на

кинетику двойко: с одной стороны столкновения приводят к релаксации в системе через оператор B ; с другой стороны, существование источника $L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, создающего корреляции, всецело обязано тем же столкновениям [37].

Источник при диаграммном подходе появляется таким образом: среди диаграмм, представляющих корреляционную функцию, мы видим группу с четырьмя функциями Грина, связанными ядром K . Лестничное повторение этой группы и приводит к одновременной корреляционной функции. Источник возникает из выражения

$$l_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3\mathbf{k}_4} \int dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 G_{\alpha\alpha'}^{iii'}(t + \delta t, \mathbf{k}_-; t_1\mathbf{k}_1) G_{\delta\delta'}^{mmm'}(t_4\mathbf{k}_4; t, \mathbf{k}_+) \times \\ \times K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{ijklm'n'}(t_1\mathbf{k}_1, t_2\mathbf{k}_2, t_3\mathbf{k}_3, t_4\mathbf{k}_4) G_{\gamma\gamma'}^{ll'}(t_3\mathbf{k}_3; t\mathbf{k}_+) G_{\beta\beta'}^{kk'}(t + \delta\mathbf{k}_- t; t_2\mathbf{k}_2) \quad (1.74)$$

после дифференцирования по отношению к времени t , что приводит к замене одной из Гриновских функций на соответствующую δ -функцию в соответствии с уравнением (1.7). Все необходимые выражения для ядра K нами уже были выписаны. В следующем разделе мы обработаем каждое такое выражение отдельно и получим явные выражения для всех до сих пор рассмотренных нами взаимодействий, включенных в (1.70) и (1.73).

1.4 Источник корреляции.

Начнем с кулоновского взаимодействия, учтем сначала прямое кулоновское взаимодействие и заменим K в (1.74) в соответствии с (1.26). Простые вычисления приводят к такому выражению для источника

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{\partial U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial n_{\alpha\delta\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} (n_{\beta\gamma\mathbf{k}'} - n_{\beta\mu\mathbf{k}'} n_{\mu\gamma\mathbf{k}'}) + \\ + \frac{\partial U(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}}{\partial \mathbf{k}'} (n_{\alpha\delta\mathbf{k}} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}} n_{\mu\delta\mathbf{k}}). \quad (1.75)$$

В случае одной зоны эти члены, описывающие вклад самосогласованного поля в источник, совпадают с результатами работы [40].

Для оставшихся членов, составляющих источник, мы имеем

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t; \mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (1.76)$$

где множитель $\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}$ указывает, что столкновения частиц происходят в одной пространственной точке.

Для обменного кулоновского взаимодействия мы получим следующий вклад в источник

$$L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -iU_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} \{n_{\alpha\gamma\mathbf{k}'}[n_{\beta\mu\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\mu}]n_{\mu\delta\mathbf{k}} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}}n_{\beta\mu\mathbf{k}'}[n_{\mu\delta\mathbf{k}} - \delta_{\mu\delta}] + n_{\alpha\mu\mathbf{k}}n_{\mu\gamma\mathbf{k}'}[n_{\beta\delta\mathbf{k}} - n_{\beta\delta\mathbf{k}'}]\}. \quad (1.77)$$

Это выражение не имеет аналога в однозонной модели. Выпишем для него явное выражение (графически представленного на Рис. 1.6)

$$L_{cvcv}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -iU_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} \{[n_{c\mathbf{k}}(n_{v\mathbf{k}} - 1)(n_{c\mathbf{k}'} - n_{v\mathbf{k}'}) - (\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}')] + p_{\mathbf{k}}p_{\mathbf{k}'}^*[n_{c\mathbf{k}'} - n_{v\mathbf{k}'} - (\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}')] \}. \quad (1.78)$$

Из графического представления становится понятным физический смысл этого межзон-

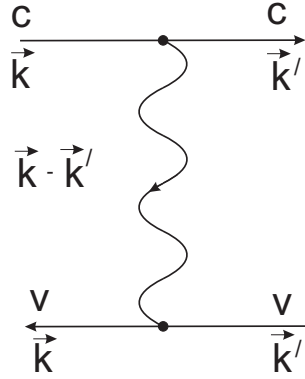


Рис. 1.6: Обменный межзонный вклад в источник

ного источника флуктуаций: этот источник представляет собой проявление кулоновского межзонного взаимодействия в флуктуационной теории, при таком взаимодействии поляризации $p_{\mathbf{k}}$ и $p_{\mathbf{k}'}^*$ оказываются коррелированными.

Отметим здесь, что именно учет обменного кулоновского взаимодействия во всех порядках в динамике приводит к уравнению для экситонной функции (см. подробно в [94], диаграммная техника, примененная в этой работе и особенно удобная в кинетике, описана в [98]).

Здесь мы выпишем только некоторые из дополнительных членов в источник, описывающих генерационно-рекомбинационные процессы (явные выражения для этих дополнительных членов даны в приложении В). Положим сначала $\alpha = \delta = c$ и $\beta = \gamma = v$ в (B.2)

(что соответствует дополнительному члену в правой стороне уравнения для одновременной корреляционной функции $\langle \delta \hat{n}_{\mathbf{c}\mathbf{k}} \delta \hat{n}_{v\mathbf{k}'} \rangle$) и получим

$$L_{cvvc}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 2\pi(n_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - n_{v\mathbf{k}'}) \sum_{\nu} |C_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) \times \\ \times [(\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1)n_{\mathbf{c}\mathbf{k}}(n_{v\mathbf{k}'} - 1) - \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(n_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - 1)n_{v\mathbf{k}'}]. \quad (1.79)$$

Этот дополнительный член описывает, как два электронных состояния \mathbf{k} и \mathbf{k}' в различных зонах заполняются (а два других становятся пустыми) одновременно как результат испускания и поглощения фотонов с межзонной частотой $\omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$. Это выражение демонстрирует важное свойство дополнительного члена в источнике, а именно, этот источник исчезает в тепловом равновесии. В самом деле, в случае теплового равновесия выражение в квадратных скобках в (1.79) обращается в нуль при условии, что фотоны описываются функцией Планка $\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}$ с $\omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} = \varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'}$. Физически это означает, что средний поток в этом случае в состояния \mathbf{k} и \mathbf{k}' в различных зонах равен среднему потоку из этих состояний.

Получим теперь дополнительный член для $\langle \delta \hat{p}_{\mathbf{k}} \delta \hat{p}_{\mathbf{k}'}^{\dagger} \rangle$, для этого положим $\alpha = \gamma = c$ и $\beta = \delta = v$ в (B.2)

$$L_{cvcv}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \pi \sum_{\nu} |C_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 p_{\mathbf{k}'}^* p_{\mathbf{k}} \times (1.80) \\ \times \{ \delta_+(\varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [1 - n_{v\mathbf{k}'} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] + \delta_-(\varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [n_{\mathbf{c}\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] + \\ + \delta_+(\varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}'} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{k}'-\mathbf{k}}) [n_{\mathbf{c}\mathbf{k}'} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'-\mathbf{k}}] + \delta_-(\varepsilon_{\mathbf{c}\mathbf{k}'} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{k}'-\mathbf{k}}) [1 - n_{v\mathbf{k}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'-\mathbf{k}}] \}.$$

Вычисления дополнительных членов в источнике для электрон-фононного и электрон-электронного взаимодействий даны в приложении В. Так как эти члены тесно связаны с ядром (см. (1.74)) мы снова рассмотрим члены с электрон-электронным рассеянием отдельно, как мы делали до этого (см. приложение А).

Выпишем те же дополнительные члены, которые мы выписывали до сих пор, только для электрон-электронного взаимодействия. Для краткости, однако, здесь мы ограничимся случаем, когда можно пренебречь поляризационным членом $p_{\mathbf{k}} \rightarrow 0$ и отбросим все члены, включающие $p_{\mathbf{k}}$. Это приближение соответствует квазиравновесной теории, когда можно рассматривать $p_{\mathbf{k}}$ как линейный отклик на слабое возмущение $\mathbf{d}_{c\mathbf{k}} E_0$ и пренебречь всеми членами второго порядка и выше в $p_{\mathbf{k}}$. Более того, носители внутри зон описываются неравновесными распределениями Ферми $n_{\alpha\mathbf{k}}^F$ с химическими потенциалами μ_{α} ,

связанными самосогласованным образом с условиями нормировки $N_\alpha = \sum_{\mathbf{k}} n_{\alpha\mathbf{k}}^F$. Числа носителей в α зоне N_α получаются суммированием по \mathbf{k} уравнения для компоненты $n_{\alpha\mathbf{k}}$ матрицы плотности. В этом приближении мы получим вклад, возникающий из первого члена (см. (В.5) в приложении В)

$$L_{cvvc}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 2\pi(n_{c\mathbf{k}} + n_{v\mathbf{k}'} - 1) \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \varepsilon_{c\mathbf{k}}) \quad (1.81)$$

$$\times [n_{c\mathbf{k}}(n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - 1)(n_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - 1)n_{v\mathbf{k}'} - (n_{c\mathbf{k}} - 1)n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}}n_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}}(n_{v\mathbf{k}'} - 1)]$$

для L_{cvvc} и

$$L_{cvcv}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 0. \quad (1.82)$$

Суммируя по зонным индексам в (В.6) и пренебрегая выражениями, включающими в себя $p_{\mathbf{k}}$, мы получим следующий вклад от второго члена

$$L_{cvvc}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = 2\pi(n_{c\mathbf{k}} - n_{v\mathbf{k}'}) \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta(\varepsilon_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}} + \varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \quad (1.83)$$

$$\times [n_{v\mathbf{k}'}(1 - n_{c\mathbf{k}})n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}}(1 - n_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - n_{c\mathbf{k}}(1 - n_{v\mathbf{k}'})(1 - n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}})n_{v\mathbf{k}'-\mathbf{q}}],$$

а для L_{cvcv} мы снова получим нуль. Последний член (см. уравнение (В.7) в приложении В) не дает вклада в принятом приближении в источник L_{cvvc} , в то время как достаточно громоздкое явное выражение для L_{cvcv} можно просто получить из (В.7) в приложении В.

Дополнительная корреляция, возникающая при столкновениях, была названа в [36] кинетической корреляцией, т.к. одним из важных свойств источника этой корреляции L являлось то, что источник обращается в нуль при тепловом равновесии. Это свойство остается справедливым и для источника, описывающего флуктуации чисел заполнения в разных зонах. Важно отметить, что это свойство не сохраняется для флуктуаций недиагональной по зонным индексам компоненты матрицы плотности, как это видно из (В.7), это не должно нас удивлять, т.к. недиагональная компонента описывает смешанное электрон-дырочное состояние.

Таким образом, мы установили кинетические уравнения для флуктуаций в многозонной модели. Разновременные корреляционные функции удовлетворяют уравнению (1.70), начальное условие к этому уравнению дается (1.73). Что касается компонент матрицы плотности, входящих в наши уравнения, они, в свою очередь, должны быть определены из соответствующих кинетических уравнений. Естественно, эти последние должны

включать в себя все те взаимодействия, которые мы учитывали при выводе кинетических уравнений для флуктуаций. Заметим, что кинетические уравнения для матрицы плотности можно восстановить из наших уравнений (и наоборот) для флуктуаций (1.70), так как наши уравнения есть не что иное, как линеаризованная версия первых.

Сама структура уравнения (1.70) подсказывает, что оно может быть интерпретировано в терминах фиктивных Ланжевеновских сил. В самом деле, мы можем написать обобщенные уравнения Ланжевена для флуктуаций матрицы плотности, добавляя в правую сторону уравнения случайные Ланжевеновские силы

$$\left(\delta_{\alpha\alpha'}\delta_{\delta\delta'}\partial_t + B_{\alpha'\delta t\mathbf{k}}^{\alpha\delta}(t\mathbf{r})\right)\delta n_{\alpha t\delta\mathbf{k}}(t\mathbf{r}) = F_{\alpha\delta\mathbf{k}}(t\mathbf{r}). \quad (1.84)$$

Назовем эти уравнения уравнениями Блоха-Ланжевена. Популярность Ланжевеновского подхода основана на том, что можно пользоваться этими прозрачными с физической точки зрения формулами вместо громоздкого метода моментов. Однако, для Ланжевеновского подхода необходимо знание корреляторов этих случайных сил.

В следующем разделе мы дадим явные выражения для этих корреляционных функций случайных сил в стационарном неравновесном состоянии.

1.5 Матрица случайных сил.

Для флуктуаций около стационарного состояния наша корреляционная функция $g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t+\tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ зависит только от разности временных аргументов τ . Мы определим Фурье образ

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \int d\tau e^{i\omega\tau} g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t+\tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.85)$$

Удобно выразить это выражение через полуобразы Фурье g_{ω}^{+}

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{+}(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{+}(-\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (1.86)$$

где мы ввели такие полуобразы посредством

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}^{+}(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t+\tau, \mathbf{r}; t\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad (1.87)$$

и

$$g_{\alpha\beta\gamma\delta}^+(-\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \int_0^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t, \mathbf{r}; t + \tau, \mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.88)$$

Полуобраз Фурье $g^+(\omega)$ можно получить из уравнения (1.70) а $g^+(-\omega)$ из уравнения

$$\left(\delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} \partial_\tau + B_{\beta\gamma\mathbf{k}'}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}') \right) g_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r}, t + \tau\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \delta(\tau) g_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.89)$$

Мы получим

$$\left(-i\omega \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\delta\delta'} + B_{\alpha'\delta\mathbf{k}}^{\alpha\delta}(\mathbf{r}) \right) g_{\alpha'\beta\gamma\delta'}^+(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = g_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}; \quad (1.90)$$

$$\left(i\omega \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} + B_{\beta'\gamma\mathbf{k}'}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}') \right) g_{\alpha\beta'\gamma'\delta}^+(-\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = g_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (1.91)$$

С другой стороны, используя уравнение (1.84) и аналогичное уравнение для $\delta n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}$, перемножая их и беря среднее, имеем

$$\left(-i\omega \delta_{\alpha\alpha'} \delta_{\delta\delta'} + B_{\alpha'\delta\mathbf{k}}^{\alpha\delta}(\mathbf{r}) \right) \left(i\omega \delta_{\beta\beta'} \delta_{\gamma\gamma'} + B_{\beta'\gamma\mathbf{k}'}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}') \right) g_{\alpha\beta'\gamma'\delta}(\omega)_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \langle F_{\alpha\delta\mathbf{k}}(\mathbf{r}) F_{\beta\gamma\mathbf{k}'}(\mathbf{r}') \rangle_\omega. \quad (1.92)$$

Умножая уравнение (1.90) на оператор, входящий в (1.91) и наоборот, и добавляя их, получим спектральную плотность (белый шум) случайных сил (мы читаем при этом уравнение (1.92) справа налево)

$$\begin{aligned} \langle F_{\alpha\delta\mathbf{k}}(\mathbf{r}) F_{\beta\gamma\mathbf{k}'}(\mathbf{r}') \rangle_\omega &= B_{\alpha'\delta\mathbf{k}}^{\alpha\delta}(\mathbf{r}) \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\beta\delta\mathbf{k}} (\delta_{\alpha\gamma} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}}) + \\ &+ B_{\beta'\gamma\mathbf{k}'}^{\beta\gamma}(\mathbf{r}') \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\beta\delta\mathbf{k}} (\delta_{\alpha\gamma'} - n_{\alpha\gamma'\mathbf{k}}) + L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{r}\mathbf{r}')_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \end{aligned} \quad (1.93)$$

где мы использовали (1.72), (1.73). Прежде всего, используя явные выражения для операторов B и источника L , мы замечаем, что вклад самосогласованных флуктуаций в эту корреляционную функцию обращается в нуль, как и обменный вклад из оператора B_{ex} в (1.28) и источника L в (1.77).

Используя формулы, выведенные нами, легко показать, что возникают также ненулевые перекрестные корреляционные функции случайных Ланжевеновских сил, относящихся к разным зонам $\langle F_{c\mathbf{k}} F_{v\mathbf{k}'} \rangle$. Хотя из сказанного это и очевидно, мы хотим здесь подчеркнуть, что если, например, межзонаная релаксация в кинетическом уравнении для чисел заполнения (или в кинетическом уравнении для концентраций носителей) как-то учитывается, то указанные перекрестные корреляторы обязательно должны быть учтены

для самосогласованности задачи. Более того, существование такой корреляционной функции тесно связано с требованием электронейтральности. Например, для пространственно однородных флуктуаций должно быть выполнено следующее равенство

$$\sum_{\mathbf{k}'} \langle F_{c\mathbf{c}\mathbf{k}} F_{v\mathbf{v}\mathbf{k}'} \rangle_{\omega} = - \sum_{\mathbf{k}'} \langle F_{c\mathbf{c}\mathbf{k}} F_{c\mathbf{c}\mathbf{k}'} \rangle_{\omega}. \quad (1.94)$$

Мы воспользовались здесь тем, что в таком случае число электронов равно числу дырок в каждой точке пространства и поэтому

$$\sum_{\mathbf{k}} (F_{c\mathbf{c}\mathbf{k}} + F_{v\mathbf{v}\mathbf{k}}) = 0.$$

Проведем суммирование по \mathbf{k} левой стороны уравнения (1.94) в квазиравновесном приближении: предположим снова $|p_{\mathbf{k}}|^2$ малым по сравнению с $n_{i\mathbf{k}}(1 - n_{i\mathbf{k}})$. Используя (1.93) и учитывая свойства релаксационных операторов и явную форму операторов в (1.49), (1.52), (1.54), (1.57), (1.79), мы получим после простых вычислений

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \langle F_{c\mathbf{c}\mathbf{k}} F_{v\mathbf{v}\mathbf{k}'} \rangle_{\omega} = & -\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} 2\pi \sum_{\mathbf{k}\mathbf{q}\nu} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) \times \\ & \times \{ (1 + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}}) n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} (1 - n_{v\mathbf{k}}) + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}} (1 - n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}}) n_{v\mathbf{k}} \}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Таким образом, сумма выражена через операторы межзонной релаксации и генерации, которые входят в левую часть уравнения для макроскопической переменной, в данном случае для концентрации носителей. Мы получили именно сумму этих операторов, тогда как их разность входит в уравнение для концентрации носителей. Это в действительности общее правило, гласящее, что в корреляционные функции входят суммы приходного и уходного членов в кинетическом уравнении. Отметим важность дополнительного члена (1.79), этот член обеспечивает электронейтральность (1.94).

Выпишем теперь явные выражения в том же приближении для суммы корреляционных функций

$$\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega) = \langle F_{v\mathbf{c}\mathbf{k}'} F_{c\mathbf{v}\mathbf{k}} + F_{c\mathbf{v}\mathbf{k}} F_{v\mathbf{c}\mathbf{k}'} \rangle_{\omega},$$

именно эта сумма обычно важна в исследованиях шумов (сравни [44, 48]). Пользуясь (1.93) и беря явные выражения для операторов B , мы получим вклады всех соответствующих взаимодействий в сумму корреляционных функций.

Для примесного рассеяния мы получим

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)^{imp} = \pi\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}W_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} |C_{\mathbf{q}}|^2 [\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}}) + \delta(\varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}})] - \quad (1.96)$$

$$-\pi|C_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2(W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} + W_{\mathbf{k}'\mathbf{k}})[\delta_-(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{c\mathbf{k}'} + \delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}'}))], \quad (1.97)$$

где

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = n_{c\mathbf{k}}(1 - n_{v\mathbf{k}'}) + n_{v\mathbf{k}'}(1 - n_{c\mathbf{k}}), \quad \text{и} \quad W_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}}.$$

Электрон-фононное взаимодействие мы опустим. Выпишем сначала межзонный генерационно-рекомбинационный вклад

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)^{g-r} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}W_{\mathbf{k}}2\pi \sum_{\nu\mathbf{q}} |C_{\nu\mathbf{q}}|^2 \{ (n_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}})\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{q}}) + \\ + (1 - n_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \mathcal{N}_{\nu\mathbf{q}})\delta(\varepsilon_{c\mathbf{k}} - \varepsilon_{v\mathbf{k}-\mathbf{q}} + \omega_{\nu\mathbf{q}}) \}. \quad (1.98)$$

Этот вклад совпадает с результатом, полученным в [44], если мы заменим феноменологический коэффициент затухания для недиагональной компоненты матрицы плотности $\gamma_{\mathbf{k}}$, введенный в [44], на наше микроскопическое выражение.

Внешнее оптическое поле приводит к следующему нетривиальному вкладу

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)^f = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}2(n_{c\mathbf{k}} - n_{v\mathbf{k}}) \{ i (\mathbf{E}_0 \mathbf{d}_{cv\mathbf{k}})^* p_{\mathbf{k}\omega_0} + c.c. \}. \quad (1.99)$$

Электрон-электронный вклад состоит из трех частей, первые два из них—приходный и уходный члены, третий же представляет собой дополнительный член. Для первого члена имеем

$$S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)_{ee}^{out} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \quad i \quad W_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{q}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - n_{c\mathbf{k}-\mathbf{q}} \right) [U^R(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}}) - U^A(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}})] - \frac{1}{2}U^K(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \right\} + \\ + (c \leftrightarrow v), \quad (1.100)$$

где $\Delta\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}'}$, и запаздывающий U^R , опережающий U^A и Келдышевский U^K кулоновские потенциалы в приближении случайных фаз определяются выражениями

$$U^R(\omega) = \frac{U_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}(\omega)}, \quad U^A(\omega) = \frac{U_{\mathbf{q}}}{\varepsilon_{\mathbf{q}}(\omega)^*}, \quad U^K(\omega) = \frac{U_{\mathbf{q}}^2}{|\varepsilon_{\mathbf{q}}(\omega)|^2} \Pi_{\mathbf{q}}^K(\omega), \\ \varepsilon_{\mathbf{q}}(\omega) = 1 - U_{\mathbf{q}} \Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega), \quad \Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = \sum_{\alpha\mathbf{p}} \frac{n_{\alpha\mathbf{k}-\mathbf{q}} - n_{\alpha\mathbf{k}}}{\omega - \Delta\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i0}.$$

Здесь отметим интересное обстоятельство: запаздывающий поляризационный оператор $\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega)$ выражается только через диагональные члены матрицы плотности, в отличие от, например, поляризационного оператора Келдыша $\Pi_{\mathbf{q}}^K(\omega)$

$$\Pi_{\mathbf{q}}^K(\omega) = -2i\pi \sum_{\alpha\beta\mathbf{p}} \delta(\omega - \Delta\varepsilon_{\beta\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}}) [n_{\alpha\beta\mathbf{p}}(n_{\beta\alpha\mathbf{p}-\mathbf{q}} - \delta_{\alpha\beta}) + (n_{\alpha\beta\mathbf{p}} - \delta_{\alpha\beta})n_{\beta\alpha\mathbf{p}-\mathbf{q}}].$$

При пренебрежении вкладом поляризаций типа $p_{\mathbf{p}}p_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}^*$ этот оператор сведется к сумме

$$\Pi_{\mathbf{q}}^K(\omega) = -2i\pi \sum_{\alpha\mathbf{p}} \delta(\omega - \Delta\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}\mathbf{k}-\mathbf{q}}) [n_{\alpha\mathbf{p}}(n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{q}} - 1) + (n_{\alpha\mathbf{p}} - 1)n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{q}}].$$

Второй член можно записать в форме

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)_{ee}^{in} = & - iW_{\mathbf{k}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - n_{c\mathbf{k}'} \right) [U^R(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}'}) - U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] - \left(\frac{1}{2} - n_{v\mathbf{k}'} \right) [U^R(-\Delta\varepsilon_{v\mathbf{k}\mathbf{k}'}) - U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] \right\} + \\ & + iW_{\mathbf{k}'} \left\{ \left(\frac{1}{2} - n_{c\mathbf{k}} \right) [U^R(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}'}) - U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] - \left(\frac{1}{2} - n_{v\mathbf{k}} \right) [U^R(-\Delta\varepsilon_{v\mathbf{k}\mathbf{k}'}) - U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}] \right\} + \\ & + \frac{1}{2} [W_{\mathbf{k}} + W_{\mathbf{k}'}] \int \frac{d\xi}{2\pi} U^K(\xi) \left[\frac{1}{\xi - \Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}'} - i0} + \frac{1}{\xi + \Delta\varepsilon_{v\mathbf{k}\mathbf{k}'} - i0} \right] \end{aligned} \quad (1.101)$$

Отметим здесь еще раз, что первый и второй члены получены без учета вклада поляризаций в экранирование в операторах B^{cv} и B^{vc} . При учете такого вклада линейаризация интеграла столкновений в уравнении для $p_{\mathbf{k}}$ произошла бы и от поляризаций, входящих в экранированный потенциал, и мы получили бы еще более громоздкие формулы.

Последний член можно получить из формулы (B.7), и он равен

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)_{ee}^{ex} = & 2\pi U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2 (n_{v\mathbf{k}'} - n_{v\mathbf{k}}) \sum_{\alpha\mathbf{p}} \delta_-(\varepsilon_{c\mathbf{k}'} - \varepsilon_{c\mathbf{k}} + \varepsilon_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \times \\ & \times [n_{c\mathbf{k}}(n_{c\mathbf{k}'} - 1)n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}}(n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - 1) - n_{c\mathbf{k}'}(n_{c\mathbf{k}} - 1)n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'}(n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}} - 1)] + \\ & + 2\pi U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2 (n_{c\mathbf{k}'} - n_{c\mathbf{k}}) \sum_{\alpha\mathbf{p}} \delta_+(\varepsilon_{v\mathbf{k}'} - \varepsilon_{v\mathbf{k}} + \varepsilon_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \times \\ & \times [n_{v\mathbf{k}}(n_{v\mathbf{k}'} - 1)n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}}(n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - 1) - n_{v\mathbf{k}'}(n_{v\mathbf{k}} - 1)n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}'}(n_{\alpha\mathbf{p}-\mathbf{k}} - 1)] \end{aligned} \quad (1.102)$$

или при учете экранирования

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)_{ee}^{ex} = & 2 i(n_{v\mathbf{k}'} - n_{v\mathbf{k}}) \left[n_{c\mathbf{k}}(1 - n_{c\mathbf{k}'})U_A^{21}(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}'}) - n_{c\mathbf{k}'}(1 - n_{c\mathbf{k}})U_A^{12}(\Delta\varepsilon_{c\mathbf{k}\mathbf{k}'}) \right] + \\ & + (c \leftrightarrow v, \mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}'). \end{aligned} \quad (1.103)$$

Здесь U_R^{ij} и U_A^{ij} (где i и j индексы Келдыша) для экранированного потенциала определены как

$$U_R^{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^t dt' U^{ij}(t, t') e^{i(t-t')\omega} = \int_0^{\infty} dt U^{ij}(t) e^{it\omega} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} U^{ij}(\omega') \int_0^{\infty} dt e^{i(\omega-\omega')t} = -i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{U^{ij}(\omega')}{\omega' - \omega - i0}$$

$$U_A^{ij}(\omega) = \int_{-\infty}^t dt' U^{ij}(t', t) e^{i(t'-t)\omega} = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{U^{ij}(\omega')}{\omega' - \omega + i0}$$

Это выражение для $S_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(\omega)_{ee}^{ex}$ учитывает все порядки по кулоновскому полю в экранировании (все петли), кроме первого порядка (первый порядок по полю учтен формулой (1.78)), не содержащего петлю. Подчеркнем, что этот член описывает дополнительную корреляцию, созданную кулоновским взаимодействием в недиагональной (межзонной) корреляционной функции Ланжевеновских сил F_{cv} и F_{vc} , хотя кулоновское взаимодействие не вызывает межзонных переходов. Вещественная часть этого дополнительного члена обращается в нуль при тепловом внутризонном равновесии.

Следует заметить, что флуктуационно-диссипационная теорема исчерпывает всю теорию флуктуаций только в состоянии теплового равновесия. Найденные нами корреляционные механизмы действуют всегда, но при тепловом равновесии с нулевым результатом и поэтому остаются незамеченными. Таким образом, конечно же, наша теория не противоречит знаменитой флуктуационно-диссипационной теореме.

1.6 Однозонный случай.

1.6.1 Примесное рассеяние.

В этом разделе мы проследим, каким образом наши результаты соотносятся с Ланжевеновским подходом авторов работы [39]. Мы ограничимся подробным рассмотрением только случая столкновений с примесями, для других случаев мы выпишем только результаты.

Для примесного рассеяния имеем дополнительный член в источнике (все зонные индексы в (B.4) одинаковы)

$$L_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = -2\pi |c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 (n_{\mathbf{k}} - n_{\mathbf{k}'})^2 \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{k}}). \quad (1.104)$$

Уравнение (1.64) переходит в

$$-\hat{B}\hat{g}_{in} = \pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 g(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \quad (1.105)$$

а уравнение (1.65) в

$$-\hat{B}\hat{g}_{out} = -\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 g(t, \tau)_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}). \quad (1.106)$$

В уравнении (1.93) операторы $B_{\mathbf{k}}$ и $B_{\mathbf{k}'}$ действуют на $\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}})$, при этом учтем, что выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} + \mathbf{v}_{\mathbf{k}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} + e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}'} \right) \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}}) = \\ & = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \left(\mathbf{v}_{\mathbf{k}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \right) n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}}) = \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(1 - 2n_{\mathbf{k}})I^{imp} \{n_{\mathbf{k}}\}, \end{aligned} \quad (1.107)$$

где мы воспользовались кинетическим уравнением и где $I^{imp} \{n_{\mathbf{k}}\}$ интеграл столкновений с примесями

$$I^{imp} \{n_{\mathbf{k}}\} = 2\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 (n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - n_{\mathbf{k}}) \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}). \quad (1.108)$$

Сумма уходящих операторов $B_{\mathbf{k}} + B_{\mathbf{k}'}$, действующих на $\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}})$, и (1.107) дадут

$$\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}2\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 [n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(1 - n_{\mathbf{k}}) + n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) \quad (1.109)$$

а сумма приходных операторов, примененных к $\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}})$, вместе с дополнительным членом (1.104)

$$-\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}2\pi |c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 [n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'}) + n_{\mathbf{k}'}(1 - n_{\mathbf{k}})] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}), \quad (1.110)$$

так что коррелятор случайных сил выразится только через вероятности столкновений и функции распределения

$$\begin{aligned} \langle F_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}'} \rangle_{\omega} = & \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}2\pi \sum_{\mathbf{q}} |c_{\mathbf{q}}|^2 [n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}(1 - n_{\mathbf{k}}) + n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}) - \\ & - \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}2\pi |c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 [n_{\mathbf{k}}(1 - n_{\mathbf{k}'}) + n_{\mathbf{k}'}(1 - n_{\mathbf{k}})] \delta(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k}'}). \end{aligned} \quad (1.111)$$

Это рассмотрение мы привели здесь только для того, чтобы показать как "работает" наш подход, результат же, конечно, совпадает с результатом [39]. Единственное, что мы хотели бы подчеркнуть, что без дополнительного члена (1.104), впервые выписанного нами, коррелятор случайных сил не обладал бы необходимым свойством $\sum_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')} \langle F_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}'} \rangle = 0$, следующим из закона сохранения числа частиц. Дополнительный источник (1.104) обращается в нуль в невырожденном случае. Такое же положение имеет место для случая электрон-электронного рассеяния.

1.6.2 Электрон-электронные столкновения.

Оператор электрон-электронных столкновений имеет вид

$$I_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}'} I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \sum_{\mathbf{p}'} (-I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} - {}^+ I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}) = {}^- I_{\mathbf{p}} - {}^+ I_{\mathbf{p}}, \quad (1.112)$$

$${}^\pm I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} {}^\pm I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (-I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} - {}^+ I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'}) = \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (1.113)$$

где мы ввели обозначения для уходных и приходных членов

$${}^- I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} (1 - n_{\mathbf{k}}) (1 - n_{\mathbf{k}'}), \quad {}^+ I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}'} (1 - n_{\mathbf{p}}) (1 - n_{\mathbf{p}'}). \quad (1.114)$$

Вероятность перехода электронов $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ из состояний $\mathbf{p}\mathbf{p}'$ в $\mathbf{k}\mathbf{k}'$ включает в себя законы сохранения. В этих кратких обозначениях дополнительный член (В.5) для однозонного случая выглядит так

$$L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(1)} = (n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}'} - 1) I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = (n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}'} - 1) \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (1.115)$$

Так же кратко запишем выражения для дополнительных членов (В.6) и (В.7)

$$L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(2)} = (n_{\mathbf{p}'} - n_{\mathbf{p}}) \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} I_{\mathbf{p}'\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}, \quad (1.116)$$

$$L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(3)} = (n_{\mathbf{p}'} - n_{\mathbf{p}}) \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} I_{\mathbf{p}'\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}. \quad (1.117)$$

Получим коррелятор случайных сил для электрон-электронного взаимодействия. Действие уходных операторов $B_{\mathbf{p}} + B_{\mathbf{p}'}$ на $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}})$ дает

$$2\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} [(1 - n_{\mathbf{p}})^- I_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}}^+ I_{\mathbf{p}}]. \quad (1.118)$$

Это выражение совместно с $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} (2n_{\mathbf{p}} - 1) I_{\mathbf{p}}$, полученным как в (1.107), приведет к

$$\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} [{}^- I_{\mathbf{p}} + {}^+ I_{\mathbf{p}}]. \quad (1.119)$$

Сумма приходных операторов $B_{b\mathbf{p}} + B_{b\mathbf{p}'}$, действующих на $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}} (1 - n_{\mathbf{p}})$, приведет к

$$(2 - n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{p}'})^- I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} + (n_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}'})^+ I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}, \quad (1.120)$$

что совместно с $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(1)}$ приводит к

$${}^- I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} + {}^+ I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}. \quad (1.121)$$

Точно также приходные операторы $B_{d\mathbf{p}} + B_{d\mathbf{p}'}$ совместно с $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(3)}$ приводят к

$$-\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} + I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}) \quad (1.122)$$

а операторы $B_{c\mathbf{p}} + B_{c\mathbf{p}'}$ совместно с $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(2)}$ к

$$-\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}). \quad (1.123)$$

Собирая выражения (1.119), (1.121), (1.122), (1.123), имеем для коррелятора случайных сил

$$\begin{aligned} \langle F_{\mathbf{p}}F_{\mathbf{p}'} \rangle_{\omega} = & \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[-I_{\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}}] + I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} - I_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} - \\ & - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} + I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}\mathbf{p}}) - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{k}\mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (1.124)$$

Таким образом, коррелятор случайных сил выражен через вероятности переходов и функции распределения. Отметим снова, что без учета дополнительного члена $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(3)}$, содержащего передачу импульса $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, нарушилось бы свойство коррелятора случайных сил $\sum_{\mathbf{k}(\mathbf{k}')} \langle F_{\mathbf{k}}F_{\mathbf{k}'} \rangle = 0$.

Теперь обсудим [99, 100, 101] причину появления дополнительных членов, содержащих функцию распределения с одним и тем же импульсом \mathbf{p} (или \mathbf{p}') дважды и их связь с принципом Паули. Казалось бы, в соответствии с этим принципом, два фермиона с одними и теми же квантовыми числами не должны давать вклад в источник корреляции.

Чтобы понять ситуацию, рассмотрим случай рассеяния на примесях и перерисуем диаграмму на Рис. 1.6. Мы воспользуемся при этом диаграммной техникой, использованной в [98, 94], введя для функции распределения специальный символ на диаграммах. Источник флуктуаций изображен на диаграмме (b) Рис. 1.7 (эта диаграмма, по существу, не отличается от диаграммы на Рис. 1.6, в последней мы заменили линию взаимодействия на пунктирную и выделили функции распределения). Диаграмма изображает процесс, при котором две частицы меняют свои волновые функции через взаимодействие с рассеивателем. Видно, что после взаимодействия из двух чистых состояний \mathbf{k} и \mathbf{k}' получились два смешанных состояния. Но эту пару смешанных состояний можно снова превратить в пару чистых просто переставив линии. Так при взаимодействии двух частиц с одним и тем же рассеивателем с последующим обменом возникает корреляция между их числами

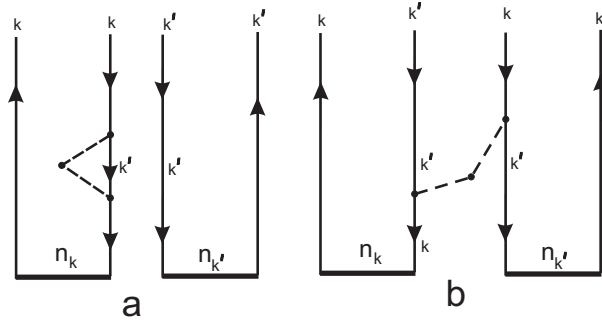


Рис. 1.7: Диаграмма (b) соответствует источнику дополнительной корреляции. Диаграмма (a) приведена для сравнения.

заполнения. Сравнивая диаграмму (a) (это одна из диаграмм, описывающих столкновение выделенной частицы с импульсом \mathbf{k} с рассеивателями в присутствии другой выделенной частицы с импульсом \mathbf{k}') с диаграммой (b) на этом рисунке можно усмотреть правило, по которому можно сразу найти источник корреляции, исходя из известного выражения для оператора столкновений (1.108). Последний мы напомним так

$$I^{imp} \{n_{\mathbf{k}}\} = \sum_{\mathbf{q}} (P_{\mathbf{kq}} n_{\mathbf{q}} - P_{\mathbf{qk}} n_{\mathbf{k}}). \quad (1.125)$$

Чтобы получить источник, нужно умножить это выражение на $n_{\mathbf{k}'}$, положить в каждом члене суммы $\mathbf{q} = \mathbf{k}'$ и снять суммирование. Аналогично нужно поступить с произведением $n_{\mathbf{k}} I^{imp} \{n_{\mathbf{k}'}\}$ и сложить полученные результаты. Учтывая, что при перестановке линий на диаграмме (b) изменится знак, мы и приходим к члену в источнике (1.104). Найденный алгоритм для получения источника дополнительной квантовой корреляции действует и для других взаимодействий и делает понятным ее происхождение. Напомним, что мы при определении флуктуаций выделяли произведение некоррелированных (или лучше сказать, усредненных независимо) функций распределения $n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'}$ из начальной двухчастичной функции распределения таким образом $\langle n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} \rangle = \langle n_{\mathbf{p}} \rangle \langle n_{\mathbf{p}'} \rangle$. Но в $\langle n_{\mathbf{p}} n_{\mathbf{p}'} \rangle$ некоторые члены, необходимые для возникновения полностью независимых $\langle n_{\mathbf{p}} \rangle$ и $\langle n_{\mathbf{p}'} \rangle$, отсутствуют из-за принципа Паули. Это отсутствие и проявляется в возникновении дополнительных членов в источнике корреляций.

1.7 Заключение.

Мы вывели кинетические уравнения для флуктуаций в двухзонном случае методом моментов. Используя эти уравнения мы дали явные выражения для Ланжевеновских случайных сил.

В двухзонном случае мы продемонстрировали, что (кроме вклада межзонных генерационных и рекомбинационных процессов) в неравновесном случае существует вклад электрон-примесного, электрон-фононного и кулоновского взаимодействий в корреляционные функции Ланжевеновских сил, входящих в уравнения для флуктуаций межзонной поляризации, хотя эти взаимодействия и не вызывают межзонных переходов. Так как эти корреляционные функции определяют фазовые шумы и шумы интенсивности в полупроводниковых лазерах, мы тем самым показали, что примесное, фононное и кулоновское рассеяния могут давать неравновесный вклад в ширину линии и интенсивность излучения лазера.

Мы получили новые результаты также для однозонного случая. Открыт новый квантовый механизм межчастичной корреляции, до сих пор остававшийся незамеченным. Мы выяснили, что в вырожденном случае учет установленных нами дополнительных членов в источнике необходим для соблюдения требования сохранения числа частиц. Мы также указали простой алгоритм написания этих членов (без обращения к диаграммной технике), пользуясь только видом интеграла столкновений.

Во избежание недоразумений здесь мы должны сделать следующее замечание. Поле $\partial\varphi/\partial\mathbf{r}$ и межзонное оптическое поле вошли явно в наши выражения для корреляционных функций Ланжевеновских случайных сил (через операторы B). С другой стороны, очевидно, что источник флуктуаций, само существование которого обусловлено случайным характером столкновений, не должен содержать внешние детерминированные поля. Этому требованию легко удовлетворить, используя кинетические уравнения для матрицы плотности и исключая эти поля (как мы делали в однозонном случае), так что в выражениях для источников останутся только компоненты матрицы плотности и вероятности переходов.

Общие результаты, касающиеся свойств релаксационных операторов и корреляцион-

ных функций Ланжевеновских сил, могут быть полезны как дополнительная проверка при вычислении шумовых характеристик феноменологически.

Наши результаты могут быть полезны в квантовой электронике при оценке источников шума в различных активных полупроводниковых приборах. В таких исследованиях обычно достаточны корреляционные функции Ланжевеновских сил $\langle F_{cvk} F_{vck'} \rangle$ и $\langle F_{ck} F_{ck'} \rangle$, они содержатся в корреляционных функциях Ланжевеновских сил, входящих в правую часть уравнения для оптического поля и уравнения для концентрации носителей.

Глава 2

Дробовой шум токов, ограниченных пространственным зарядом, в диффузионном режиме

2.1 Введение

Как мы уже выяснили в общей теории флуктуаций, стационарное неравновесное состояние само описывается кинетическим уравнением. В этой главе мы рассмотрим случай, когда это уравнение оказывается нелинейным. Как такой пример мы рассмотрим теорию дробового шума в диффузионном проводнике при токах, ограниченных пространственным зарядом.

Спектральную мощность шумов на нулевой частоте мы определяем как

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \delta I(t + \tau)\delta I(t) + \delta I(t)\delta I(t + \tau) \rangle .$$

Как мы уже упоминали в введении, в вырожденных системах в диффузионном режиме упругих столкновений имеет место подавление мощности дробового шума в три раза по сравнению с его классическим Пуассоновским значением $P_{\text{Poisson}} = 2eJ$ [14, 15]. Подавление дробового шума при Ферми статистике связывалось с принципом Паули. При уменьшении концентрации носителей принцип Паули можно не принимать во внимание (невыврожденный случай) и, казалось бы, такое подавление шума не имеет места. Невыврожденный случай был рассмотрен в работе [53] методом Монте-Карло симуляции и авторы обнаружили, что в случае, когда время релаксации носителей не зависит от энергии в трехмерном образце в режиме упругих столкновений имеет место такое же соотношение

$P/P_{\text{Poisson}} = 1/3$. Результаты работы [53] представлены на Рис. 2.1. Темные символы на

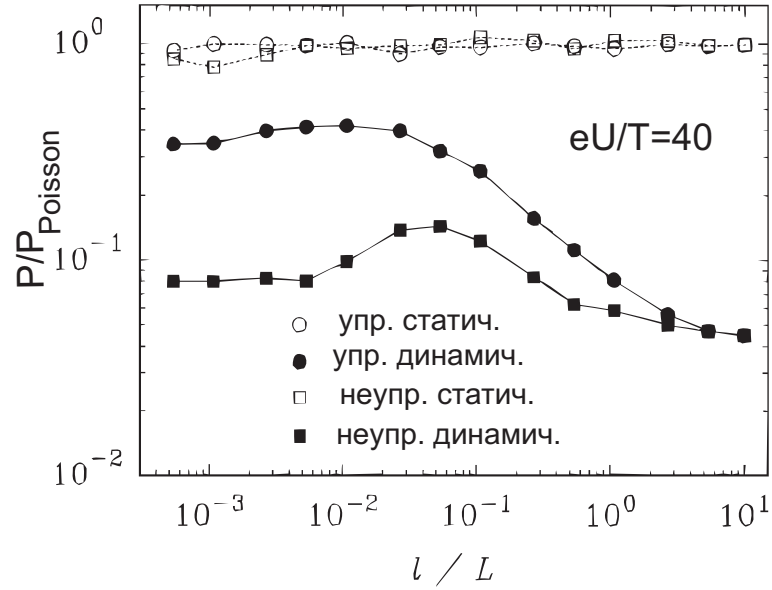


Рис. 2.1: Фактор подавления шума от параметра баллистичности l/L , т.е. от отношения длины свободного пробега к длине проводника.

Рис. 2.1 соответствуют случаю, когда самосогласованный потенциал пересчитывается на каждом шаге симуляции, решая соответствующее уравнение Пуассона при условии постоянства приложенного межконтактного потенциала. Светлые незаполненные символы и штриховая кривая соответствуют случаю, когда частицы движутся в статическом (замороженном) профиле поля (поле не флуктуирует). И в первом, и во втором случае средний ток и пространственное распределение среднего потенциала считались одинаковыми.

Мы построим теорию неравновесного дробового шума в невырожденном диффузионном проводнике в режиме токов, ограниченных пространственным зарядом. Этот режим широко обсужден в литературе (см., например, [102, 103, 104, 105]). Токвые шумы именно в таком режиме были изучены в численном эксперименте в работе [53] методом компьютерной симуляции. Аналитически шумы при тех же условиях изучались в [54]. Их общий результат состоял в том, что благодаря кулоновскому взаимодействию носителей дробовой шум оказывался меньше классического Пуассоновского значения. Авторы как работы [53], так и [54] пришли к заключению, что фактор, указывающий на это уменьшение, при некоторых условиях в невырожденном трехмерном случае может оказаться близким к $1/3$.

Позднее Нагаев в [106] показал на специальном примере, что в отличие от уменьшения шума на $1/3$ в вырожденных системах, такое подавление шума кулоновским взаимодействием не универсально в невырожденных системах и может зависеть от деталей электронного рассеяния.

Мы подтвердим результаты [53, 54], что подавление шума в невырожденных диффузионных проводниках может быть близким $1/3$ для трехмерного случая. Однако мы обнаружили различие в подходе, использованном в [54] и нашим подходом. Так как это различие оказывается очень тонким, потребовался детальный анализ, который мы и проведем, частично следуя работе [54].

2.2 Кинетическое уравнение

Флуктуации около стационарного неравновесного состояния описываются линеаризованным неоднородным уравнением Больцмана-Ланжевена (см., например, [46, 107, 108, 37, 39, 38, 36]).

Мы рассмотрим самую простую модель переноса, контролируемого диффузией и пространственным зарядом. Запишем кинетическое уравнение в присутствии электрического поля в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{J}_{\mathbf{p}} \right) f_{\mathbf{p}} = 0, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{J}_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} \equiv \left(\mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} + I_{\mathbf{p}} \right) f_{\mathbf{p}}, \quad (2.2)$$

введя интеграл столкновений $I_{\mathbf{p}}$, описывающий электронное рассеяние

$$I_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}} = \sum_{\mathbf{p}'} (W_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}'} - W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}}). \quad (2.3)$$

(мы имеем дело с невырожденной статистикой, поэтому $f_{\mathbf{p}} \ll 1$).

Разделяя функцию распределения на четную $f_{\mathbf{p}}^+$ и нечетную $f_{\mathbf{p}}^-$ части по отношению к импульсу \mathbf{p} , получим

$$f_{\mathbf{p}}^{\pm} = \frac{1}{2} (f_{\mathbf{p}} \pm f_{-\mathbf{p}}).$$

Мы предполагаем, что интеграл столкновений сохраняет четность функции распределения. Это может выполняться или за счет того, что рассеиватели и кристалл обладают

центром симметрии, или при возможности использования Борновского приближения при вычислении вероятности рассеяния. Уравнение для нечетной части стационарной функции распределения выглядит так

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^+}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^+}{\partial \mathbf{p}} = -I_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}^-, \quad (2.4)$$

что позволяет выразить $f_{\mathbf{p}}^-$ как

$$f_{\mathbf{p}}^- = -I_{\mathbf{p}}^{-1} \left(\mathbf{v} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^+}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \mathbf{v} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^+}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} \right). \quad (2.5)$$

Подставляя это выражение в уравнение для четной части $f_{\mathbf{p}}^+ \simeq f(\varepsilon, \mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{v} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^-}{\partial \mathbf{r}} + e \mathbf{E} \frac{\partial f_{\mathbf{p}}^-}{\partial \mathbf{p}} = -I_{\mathbf{p}} f_{\mathbf{p}}^+ \quad (2.6)$$

и усредняя по поверхности равной энергии в пространстве квазиимпульсов, мы получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + e E_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \nu(\varepsilon) D_{\alpha\beta}(\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} + e E_{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) I_{\mathbf{p}}^{(\text{inel})} f, \quad (2.7)$$

где член в правой части описывает неупругие столкновения, а плотность состояний $\nu(\varepsilon)$ и тензор диффузии $D_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ определены как

$$\nu(\varepsilon) D_{\alpha\beta}(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) v_{\alpha} I_{\mathbf{p}}^{-1} v_{\beta}, \quad \nu(\varepsilon) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}). \quad (2.8)$$

Рассмотрим случай $D\tau_{\varepsilon} \gg L^2$, где L это длина образца, τ_{ε} время релаксации по энергии (порядка $[I_{\mathbf{p}}^{(\text{inel})}]^{-1}$). Это позволяет опустить член в правой части уравнения (2.7), описывающий энергетическую релаксацию. С учетом этого перепишем уравнение еще раз

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} + e E_{\alpha} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \nu(\varepsilon) D_{\alpha\beta}(\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta}} + e E_{\beta} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f = 0. \quad (2.9)$$

Электрическое поле, в свою очередь, удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\varkappa \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi e [n(\mathbf{r}, t) - n^{eq}], \quad n(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, \mathbf{r}, t), \quad (2.10)$$

где \varkappa диэлектрическая проницаемость, n^{eq} это равновесная концентрация носителей (равная, например, концентрации доноров). Считая уровень инжекции носителей током высоким, в дальнейшем мы пренебрежем n^{eq} по сравнению с неравновесной концентрацией n . Так как мы полностью пренебрегаем n^{eq} , то наши дальнейшие рассуждения, строго

говоря, применимы к диэлектрикам, где равновесная концентрация мала. В противном случае, так как n уменьшается с координатой, мы можем достичь этих концентраций. Можно, тем не менее, считать, что наша теория годится и для полупроводников, если толщина полупроводникового слоя между металлическими контактами мала.

Часть функции распределения, приводящая к току, состоит из двух членов, пропорциональных пространственным и энергетическим градиентам функции $f(\varepsilon, \mathbf{r}, t)$

$$j_\alpha(\varepsilon) = e \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v} f_{\mathbf{p}}^- = -e\nu(\varepsilon) D_{\alpha\beta}(\varepsilon) \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + eE_\beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) f. \quad (2.11)$$

Так как нас будут интересовать относительно малые $\omega \ll 1/\tau_{\mathbf{p}}$ (где $\tau_{\mathbf{p}}$ это характерная величина $I_{\mathbf{p}}^{-1}$) частоты флуктуаций, мы можем пренебречь временной производной, и кинетическое уравнение для флуктуаций функции распределения после умножения на $e\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}})$ и суммирования по \mathbf{p} примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + eE_\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right) \delta j_\omega^\alpha + e\delta E_\omega^\alpha \frac{\partial}{\partial \varepsilon} j_\alpha = 0, \quad (2.12)$$

где

$$\delta j_\omega^\alpha = e \sum_{\mathbf{p}} v_\alpha \delta f_{\mathbf{p}}^- = g_\omega^\alpha - e\nu(\varepsilon) D_{\alpha\beta}(\varepsilon) \left(\left[\frac{\partial}{\partial x_\beta} + eE_\beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \right] \delta f_\omega + e\delta E_\omega^\beta \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f \right) \quad (2.13)$$

и где источник флуктуаций тока g_ω^α связан с Ланжевеновскими силами $y_{\mathbf{p}}^\omega$ (мы в отличие от Гл. 1 будем часто обозначать случайные силы именно так, в Гл.1 они обозначались $F_{\mathbf{p}}^\omega$) посредством

$$g_\omega^\alpha = e \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) v_\alpha I_{\mathbf{p}}^{-1} y_{\mathbf{p}}^\omega. \quad (2.14)$$

При выводе (2.12) мы учли, что

$$y_\omega(\varepsilon, x) = \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) y_{\mathbf{p}}^\omega = 0. \quad (2.15)$$

Последнее равенство является следствием упругости столкновений, такие столкновения не изменяют число носителей в пределах поверхности постоянной энергии. Последнее равенство можно проверить, умножив, например, формулу (1.111) в разделе 1.6 Гл.1 на $\delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{k}})$ и просуммировав по \mathbf{k} .

Корреляционная функция Ланжевеновских сил определяется выражением (см. уравнение (1.93) в разделе 1.5 Гл.1)

$$\langle y_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})y_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}') \rangle_{\omega} = (\mathcal{J}_{\mathbf{p}} + \mathcal{J}_{\mathbf{p}'})\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}f_{\mathbf{p}}, \quad (2.16)$$

где релаксационные операторы, обозначавшиеся в Гл.1 B теперь переобозначены \mathcal{J} . Заметим, что дополнительный член в источнике в невырожденном случае учитывать не надо, так как он второго порядка по функциям распределения. Интегрируя (2.12) по ε , мы получим уравнение непрерывности

$$A\frac{d}{dx}\int_0^{\infty}d\varepsilon\delta j_{\omega}(\varepsilon, x) = \frac{d}{dx}\delta J_{\omega}(x) = 0, \quad (2.17)$$

что подразумевает, что низкочастотные токовые флуктуации пространственно однородны.

2.3 Функция распределения

Рассмотрим полупроводник с сечением A , соединяющий два идентичных металлических электрода. Длина образца считается много большей, чем длина свободного пробега для упругих столкновений, и много меньшей, чем длина пробега для неупругих столкновений. Рассматривая эволюцию функции распределения вдоль направления тока, будем писать одномерное кинетическое уравнение.

Чтобы получить стационарное решение уравнения (2.9), перепишем его в форме

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + eE\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\right)j(\varepsilon, x) = \delta(x)j(\varepsilon). \quad (2.18)$$

Мы предполагаем, что плотность тока при $x = 0$, $j(\varepsilon)$, существует только при $\varepsilon > 0$. В отсутствие процессов туннелирования функция $j(\varepsilon)$ при контакте $x = 0$ должна иметь свойство

$$j(\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{для} \quad T \rightarrow 0, \quad (2.19)$$

где T это температура. Это условие должно иметь место независимо от того, является ли контакт барьером Шоттки или омическим контактом. Полный ток J , даваемый уравнением (2.20) ниже, должен иметь такое же свойство.

Решение уравнения (2.18) является функцией полной энергии \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \varepsilon + U(x),$$

где $U(x) = e\varphi(x) - e\varphi(0)$ (потенциал при нуле $\varphi(0)$ можно положить равным нулю). Это решение можно найти, например, используя обратный дифференциальный оператор, определенный так

$$\frac{1}{\partial_x} \Phi(x) = \int_0^x d\xi \Phi(\xi).$$

Имеем

$$j(\varepsilon, x) = \frac{1}{\partial_x + eE(x)\partial_\varepsilon} \delta(x) j(\varepsilon) = \exp[e\varphi(x)\partial_\varepsilon] \frac{1}{\partial_x} \exp[-e\varphi(x)\partial_\varepsilon] \delta(x) j(\varepsilon) = j(\mathcal{E})$$

и $j(\varepsilon, x)$ имеет при заданном x ненулевые значения только для $\varepsilon > -U(x)$ так как $\mathcal{E} \geq 0$. Это можно понять так: так как полная энергия сохраняется

$$\frac{p^2}{2m} + e\varphi(x) = \frac{p_0^2}{2m} + e\varphi(0),$$

то

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} - (e\varphi(x) - e\varphi(0)) = \frac{p_0^2}{2m} - U(x).$$

Другими словами, к начальной кинетической энергии добавляется энергия, приобретенная в поле.

Полный ток через образец

$$J = A \int_0^\infty d\varepsilon j(\varepsilon, x) = A \int_{-U(x)}^\infty d\varepsilon j[\varepsilon + U(x)] = A \int_0^\infty d\mathcal{E} j(\mathcal{E}). \quad (2.20)$$

Из уравнения (2.11) мы получим

$$f(\varepsilon, x) = -\frac{1}{\partial_x + eE(x)\partial_\varepsilon} \frac{j(\varepsilon, x)}{e\lambda(\varepsilon)} + f[\varepsilon + U(x)] \quad (2.21)$$

или

$$f(\varepsilon, x) = -j[\mathcal{E}] \int_0^x d\xi \frac{1}{e\lambda[\mathcal{E} - U(\xi)]} + f[\mathcal{E}], \quad (2.22)$$

где $\lambda(\varepsilon) \equiv \nu(\varepsilon)D(\varepsilon)$. Здесь мы учли граничное условие при источнике. Уравнение (2.22) можно переписать как

$$f[\mathcal{E} - U(x), x] = \frac{f[\mathcal{E} - U(L)] \int_0^x d\xi/\lambda[\mathcal{E} - U(\xi)] + f(\mathcal{E}) \int_x^L d\xi/\lambda[\mathcal{E} - U(\xi)]}{\int_0^L d\xi/\lambda[\mathcal{E} - U(\xi)]}, \quad (2.23)$$

где $j(\varepsilon)$ выражается как разность функций распределения при $x = 0$ и $x = L$

$$j(\mathcal{E}) \int_0^L \frac{dx}{e\lambda[\mathcal{E} - U(x)]} = f(\mathcal{E}) - f[\mathcal{E} - U(L)]. \quad (2.24)$$

Преимуществом формы, выбранной нами для уравнения (2.23), является ее физическая прозрачность. Первый член в правой стороне этого уравнения дает вклад правой границы, второй член—вклад от левой. Это решение демонстрирует, что термически возбужденные носители, инжектированные из контакта $x = L$, вносят пренебрежимый вклад в функцию распределения $f[\mathcal{E} - U(x), x]$ так как $f(\mathcal{E}) \gg f[\mathcal{E} - U(L)]$ ($\mathcal{E} \geq 0$), параметр $|U(L)|/k_B T$ считается большим. Пренебрегая этим членом в решении уравнения (2.23), мы приходим к решению, совпадающему с результатом работы [54], где предполагалось, что соответствующая граница (сток) является поглощающей (т.е. там пространственная плотность зарядов обращается в нуль).

2.4 Распределение поля

Для определения самосогласованного поля необходимо привлечь уравнение Пуассона, подставив в последнее полученное нами распределение носителей. Рассмотрим такие большие координаты x , что $x > x_{\bar{\varepsilon}}$, где $x_{\bar{\varepsilon}}$ определяется из

$$-U(x_{\bar{\varepsilon}}) \gg \bar{\mathcal{E}} \sim k_B T.$$

Тогда уравнение Пуассона можно упростить следующим образом

$$\begin{aligned} -\frac{\varkappa}{4\pi e^2} \frac{d^2 U}{dx^2} &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \nu[\mathcal{E} - U(x)] f[\mathcal{E} - U(x), x] = \\ &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \nu[\mathcal{E} - U(x)] j(\mathcal{E}) \int_x^L \frac{d\xi}{e\lambda[\mathcal{E} - U(\xi)]} \simeq \\ &\simeq \nu[-U(x)] \frac{J}{eA} \int_x^L \frac{d\xi}{\lambda[-U(\xi)]}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Окончательно мы получим такое замкнутое уравнение для поля

$$-\frac{\varkappa}{4\pi e^2} \frac{1}{\nu[-U(x)]} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{J}{eA} \int_x^L \frac{d\xi}{\lambda[-U(\xi)]}. \quad (2.26)$$

Проверим, что для больших x это уравнение самосогласовано с требованием однородности полного тока. Предположив $\nu(\varepsilon) = \nu_0 \varepsilon^{d/2-1}$ (d размерность пространства) и

$D(\varepsilon) = D_0\varepsilon^{s+1}$, проинтегрируем (2.11) по поперечным координатам и энергии

$$\frac{J}{A} = -e \frac{d}{dx} \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) + \frac{e D_0 \varkappa (d + 2s)}{16\pi} [-U(x)]^s \frac{d}{dx} E^2(x). \quad (2.27)$$

Мы проинтегрировали по частям второй член и учли, что при $x > x_{\bar{e}}$ мы можем пренебречь \mathcal{E} по сравнению с $|U(x)|$ и использовали уравнение Пуассона (2.10). Первый член в (2.27) можно упростить таким же образом [заметим, что благодаря (2.22) функция распределения $f(\varepsilon, x)$ не обращается в нуль только при $\varepsilon > -U(x)$]

$$\begin{aligned} \int_{-U(x)}^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) &= \int_0^\infty d\mathcal{E} \nu[\mathcal{E} - U(x)] D[\mathcal{E} - U(x)] f(\mathcal{E} - U(x), x) \\ &= D[-U(x)] \int_0^\infty d\mathcal{E} \nu[\mathcal{E} - U(x)] f(\mathcal{E} - U(x), x) = D[-U(x)] \frac{\varkappa}{4\pi e} \frac{d}{dx} E. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь при втором равенстве мы опять учли неравенство $\mathcal{E} \ll |U(x)|$. Подставляя (2.28) в (2.27) получим упрощенное уравнение

$$\frac{4\pi|J|}{D_0\varkappa A} = \frac{d}{dx} \left([-U]^{s+1} \frac{dE}{dx} \right) + |e| \frac{2s + d}{4} [-U]^s \frac{dE^2}{dx}. \quad (2.29)$$

Тут мы хотели бы отметить, что на самом деле коэффициент диффузии D зависит и от размерности пространства $D = v^2\tau/d$, мы выделили только зависимость от энергии, так как D_0 (куда спрятана эта зависимость) в наши окончательные формулы не войдет, в формулу для мощности шумов войдет лишь полный ток.

При решении уравнения нам нужны будут граничные условия. При рассмотрении токов, ограниченных пространственным зарядом, поток частиц на каждой границе определяется как разность термоэлектрического потока Ричардсона из металла в полупроводник $(4\pi m T^2/h^3) \exp(-\varphi_i/T)$ и потока из полупроводника в металл $n_i \sqrt{T/2\pi m}$, где φ_i расстояние от дна зоны проводимости диэлектрика до химпотенциала металла для i -го контакта, а n_i концентрация электронов на контакте (см., например, [109, 110]). При нулевом токе эти потоки равны и $n_i^{eq} = N_c \exp(-\varphi_i/T)$, где $N_c = 2(2\pi m T/h^2)^{3/2}$ концентрация электронов на дне зоны проводимости полупроводника. В неравновесном случае для решения (2.29) нужно задать концентрации (или, другими словами, производные поля по координате) на обоих контактах. Однако мы выберем более простые граничные условия, считая что само поле обращается в нуль на левой границе и что в нуль на правой границе обращается производная поля. Обращение поля при истоке в нуль означает, что объемный

заряд в полупроводнике компенсируется поверхностным зарядом при стоке (объемная же плотность, как мы уже отмечали, считается при стоке нулевой).

Уравнение (2.29) уже можно использовать для проверки самосогласованности нашего подхода. В самом деле, умножая (2.26) на $U^{s+d/2}$ и беря производную, мы приходим к уравнению (2.29), которое было получено из уравнения для тока.

Запишем уравнение (2.29) в безразмерном виде

$$\chi^s \left(\frac{d-2}{2} \chi' \chi'' - \chi \chi''' \right) = 1, \quad (2.30)$$

где безразмерный потенциал χ связан с φ таким образом

$$\varphi = \left(\frac{4\pi |J| L^3}{D_0 \epsilon A |e|^{s+1}} \right)^{1/(s+2)} \chi(x/L). \quad (2.31)$$

Чтобы понять смысл этих уравнений, рассмотрим здесь простейший случай $s = 0$. Тогда уравнение (2.30) можно переписать так

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{4} (\chi')^2 - \chi \chi'' \right) = 1, \quad (2.32)$$

проинтегрировав которое с учетом граничных условий $\chi \chi'' = \chi' = 0$ при $x = 0$, получим

$$\frac{d}{4} (\chi')^2 - \chi \chi'' = x. \quad (2.33)$$

Это уравнение имеет решение $\chi = (4/\sqrt{3(3d-4)})x^{3/2}$, при этом решении производная поля $\chi'' \sim 1/\sqrt{x}$ обращается в бесконечность при $x = 0$. Это означает, что плотность инжектированных носителей при $x = 0$ в этом приближении считается очень большой. Ток связан с падением напряжения на образце $\varphi(L) = V$ как $J \sim V^2$. Последнее рассмотрение было проведено только для иллюстративных целей, на самом деле в дальнейшем мы будем накладывать на χ условие, что поле выходит на насыщение на правой границе, т.е. $\chi''(1) = 0$ (сравни с (2.26)). При этом, конечно, решение не будет столь простым и придется прибегнуть к численному интегрированию дифференциального уравнения (представляя решение в виде степенных рядов (см., например, [111])).

2.5 Флуктуации тока и поля

Мы рассмотрим следующие случаи: $s = 0$, $D(\epsilon) = D_0 \epsilon$; $s = -1/2$, $D(\epsilon) = D_0 \epsilon^{1/2}$; и $s = 1/2$, $D(\epsilon) = D_0 \epsilon^{3/2}$. Начнем со случая, когда время релаксации не зависит от энергии

$s = 0$. Этот случай связан с рассеянием электронов на нейтральных примесях водородоподобного типа, например на неглубоких донорных состояниях. Рассеяние при этом аналогично рассеянию на атоме водорода [112] (см. также [113]) (с эффективным Боровским радиусом a_B). Сечение рассеяния оказывается при этом примерно в $2\pi\hbar/(pa_B)$ раз больше геометрического сечения πa_B^2 (это и приводит к независимости от энергии времени пробега).

В случае дефектов с глубокими уровнями энергии мы встречаемся со случаем близкого действующего потенциала рассеяния с длиной рассеяния порядка атомной. Сечение рассеяния не зависит от энергии и, как результат, скорость релаксации пропорциональна плотности состояний $\varepsilon^{1/2}$ и коэффициент диффузии $v^2\tau$ пропорционален $\varepsilon^{1/2}$, т.е. это случай $s = -1/2$. (Это один из основных механизмов рассеяния в металлах, так как длина рассеяния определяется радиусом экранирования, который в металлах порядка межатомных расстояний.) Случай $s = -1/2$ (он, в частности, описывает (квази)упругие столкновения с фононами) и $s = 1/2$ мы обсудим в конце этого раздела.

2.5.1 Время релаксации не зависит от энергии

Интегрируя уравнение (2.13) по ε , с учетом $s = 0$, получим

$$\frac{1}{A}(\delta J_\omega - G_\omega) = -e \frac{d}{dx} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) \delta f_\omega(\varepsilon, x) + \frac{eD_0 d\xi}{8\pi} \frac{d}{dx} E(x) \delta E_\omega(x). \quad (2.34)$$

Заметим, что Фурье образ токовых флуктуаций δJ_ω благодаря (2.12) пространственно однороден. Здесь G_ω источник токовых флуктуаций, проинтегрированный по поперечным координатам и энергии

$$G_\omega(x) = \int_0^\infty d\varepsilon d\mathbf{r}_\perp g_\omega(\varepsilon, \mathbf{r}). \quad (2.35)$$

Соответствующий коррелятор равен

$$\langle G(x)G(x') \rangle_\omega = e^2 \int_0^\infty d\varepsilon d\varepsilon' \sum_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) \delta(\varepsilon' - \varepsilon_{\mathbf{p}'}) v_x v_{x'} \frac{1}{I_{\mathbf{p}}} \frac{1}{I_{\mathbf{p}'}} \int d\mathbf{r}_\perp d\mathbf{r}'_\perp \langle y_{\mathbf{p}} y_{\mathbf{p}'} \rangle_\omega.$$

Нечетная (по отношению к $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$) часть функции распределения обращается в нуль после подстановки его в корреляционную функцию (2.16) Ланжевеновских сил и последующего интегрирования по \mathbf{p} и \mathbf{p}' . В результате остается только интеграл от четной

функции

$$\langle G(x)G(x') \rangle_\omega = \delta_{xx'} \langle G^2(x) \rangle_\omega, \quad (2.36)$$

$$\langle G^2(x) \rangle_\omega = 2e^2 A \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon, x) \sum_{\mathbf{p}} \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\mathbf{p}}) v_x \frac{1}{I_{\mathbf{p}}} v_x = 2e^2 A \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x). \quad (2.37)$$

Первый член в правой стороне уравнения (2.34) можно упростить также, как в уравнении (2.28)

$$\int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) \delta f_\omega(\varepsilon, x) = D(-U(x)) \frac{\varkappa}{4\pi e} \frac{d}{dx} \delta E_\omega \quad (2.38)$$

и окончательно мы получаем уравнение для δE_ω

$$\frac{d}{dx} \left(U(x) \frac{d}{dx} \delta E_\omega(x) \right) + \frac{de}{2} \frac{d}{dx} E(x) \delta E_\omega(x) = \frac{4\pi}{AD_0 \varkappa} (\delta J_\omega - G_\omega). \quad (2.39)$$

Для оправдания упрощения, проведенного в (2.38), покажем, что $\delta f_\omega(\varepsilon, x)$ также является функцией, принимающей ненулевые значения только для аргументов $\varepsilon > -U(x)$. В самом деле, из (2.12) и (2.13) можно получить следующие решения

$$\delta j_\omega[\varepsilon - U(x), x] = \delta U_\omega(x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} j(\varepsilon) + \Delta j(\varepsilon)_\omega, \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} \delta f_\omega[\varepsilon - U(x), x] &= \int_x^L d\xi e \delta E_\omega(\xi) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[\varepsilon - U(\xi), \xi] - \\ &- \int_x^L d\xi \frac{g_\omega[\varepsilon - U(\xi), \xi] - \delta j_\omega[\varepsilon - U(\xi), \xi]}{e\lambda[\varepsilon - U(\xi)]}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

что убеждает нас в упомянутом свойстве δf . Здесь $\Delta j(\varepsilon)$ флуктуации тока при левой границе $x = 0$. Флуктуации функции распределения $\Delta f(\varepsilon)$ при правой границе предположены равными нулю. Если мы предположим, что $\lambda(\varepsilon)$ константа (не зависящая от энергии), учтя (2.40) и (2.41) и уравнение $\delta f_\omega(\varepsilon, 0) = 0$, мы придем к результату, полученному Нагаевым [106]

$$\Delta J = \frac{1}{L} \int_0^L dx \int d\varepsilon d\mathbf{r}_\perp g[\varepsilon - U(x), x]. \quad (2.42)$$

В самом деле, мы получим

$$\begin{aligned} &e\lambda \int_0^L dx e \delta E_\omega(x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[\varepsilon - U(x), x] = \\ &= \int_0^L dx \left(g_\omega[\varepsilon - U(\xi), \xi] - \delta U_\omega(x) \frac{\partial}{\partial \varepsilon} j(\varepsilon) - \Delta j(\varepsilon)_\omega \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

При независимости от энергии λ имеем из (2.22)

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f[\varepsilon - U(x), x] = -\frac{x}{e\lambda} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} j(\varepsilon). \quad (2.44)$$

Подстановка этого выражения в (2.43) и последующее интегрирование по частям показывает, что члены с потенциалом сократятся.

Формула (2.42) приводит в диффузионном режиме в металлах [при учете вырождения, что сведется к замене $f(\varepsilon, x)$ на $f(\varepsilon, x)(1 - f(\varepsilon, x))$ в (2.37)] к

$$P = 2(\Delta J)^2 = \frac{4}{R} \frac{1}{L} \int_0^L dx \int_0^\infty d\varepsilon f(\varepsilon, x)(1 - f(\varepsilon, x)), \quad (2.45)$$

где сопротивление R определено по $1/R = A/\sigma L = Ae^2\nu(\varepsilon_F)D(\varepsilon_F)/L$. Учтем, что в диффузионном режиме функция распределения $f = f_L(1 - x/L) + f_R x/L$, где f_L функция распределения в левом, а f_R в правом резервуарах со смещенными на eV химическими потенциалами. Интегрирование по x дает

$$P = \frac{2}{3R} \int_0^\infty d\varepsilon \{f_R(1 - f_L) + f_L(1 - f_R) + 2[f_L(1 - f_L) + f_R(1 - f_R)]\}, \quad (2.46)$$

и окончательно [15]

$$P = \frac{2}{3R} \left(eV \operatorname{cth} \frac{eV}{2T} + 4T \right), \quad (2.47)$$

что при $T = 0$ дает $P = P_{\text{Poisson}}/3$.

2.5.2 Флуктуации поля

Наше уравнение (2.39) (для удобства мы приведем его здесь еще раз)

$$\frac{d}{dx} \left(U(x) \frac{d}{dx} \delta E_\omega(x) \right) + \frac{de}{2} \frac{d}{dx} E(x) \delta E_\omega(x) = \frac{4\pi}{AD_0 \alpha \varepsilon} (\delta J_\omega - G_\omega). \quad (2.48)$$

не совпадает с уравнением для флуктуаций поля, полученным в [54] прямой линеаризацией уравнения (2.29) для случая $s = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\delta U_\omega(x) \frac{d}{dx} E(x) \right] + \frac{d}{dx} \left[U(x) \frac{d}{dx} \delta E_\omega(x) \right] + \\ + e \frac{d}{2} \frac{d}{dx} E(x) \delta E_\omega(x) = \frac{4\pi}{AD_0 \alpha \varepsilon} (\delta J_\omega - G_\omega), \end{aligned} \quad (2.49)$$

т.е. в этом уравнении возникает лишний (первый) член. Чтобы понять, откуда возникает это довольно тонкое различие, примем временно схему работы [54] и еще раз рассмотрим уравнение (2.27) для тока

$$\begin{aligned} \frac{J}{A} = & -e \frac{d}{dx} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 E(x) \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Для полного тока (ток плюс флуктуации) уравнение выглядит так

$$\begin{aligned} \frac{J + \delta J - G}{A} = & -e \frac{d}{dx} \int_{-U(x) - \delta U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)] + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 [E(x) + \delta E(x)] \int_{-U(x) - \delta U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Учитывая (2.50), мы получим линейризованное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\delta J - G}{A} = & -e \frac{d}{dx} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x) + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 E(x) \left\{ \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x) + \delta U \frac{\delta}{\delta U(x)} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x) \right\} + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 \delta E(x) \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x) - e \frac{d}{dx} \delta U \frac{\delta}{\delta U(x)} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Член в фигурных скобках в (2.52) совпадает с линейризованным в духе работы [54] членом $(\varkappa/4\pi e)(d\delta E/dx)$, так что

$$\frac{\varkappa}{4\pi e} \frac{d\delta E}{dx} = \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x) + \delta U \frac{\delta}{\delta U(x)} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x). \quad (2.53)$$

Упрощая первый, третий и четвертый члены в правой стороне (2.52) с помощью (2.38) и подставив вместо члена в фигурных скобках выражение $(\varkappa/4\pi e)(d\delta E/dx)$, мы придем к

$$\frac{\delta J - G}{A} = e \frac{d}{dx} \left(D_0 U(x) \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{d\delta E}{dx} \right) + \frac{3}{2} D_0 e \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{d}{dx} E \delta E + e D_0 \frac{\varkappa}{4\pi} \frac{d}{dx} \delta U \frac{\delta}{\delta U} \left[U \frac{dE}{dx} \right]. \quad (2.54)$$

Видно, что последний член в правой стороне этого уравнения совпадает с первым в левой стороне уравнения (2.49). Во избежание недоразумений отметим, что, по нашему мнению, уравнение (2.53) также неверно. Мы выписали его здесь только для детального сравнения с подходом [54]. Правильное уравнение Пуассона для флуктуационного поля выглядит так

$$\frac{\varkappa}{4\pi e} \frac{d\delta E}{dx} = \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x). \quad (2.55)$$

Теперь мы добавим в уравнение (2.27) для постоянного тока члены, которые в действительности обращаются в нуль, так как они пропорциональны интегралам от функции распределения по ε с верхним пределом $-U(x)$, в то время как функция распределения обращается в нуль $f(\varepsilon, x) = 0$ для $\varepsilon < -U(x)$. Дело заключается в том, что при вычислении флуктуаций при замене $U(x) \rightarrow U(x) + \delta U(x)$ они дадут *неисчезающий результат*. Мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{J}{A} = & -e \frac{d}{dx} \int_0^{-U(x)} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) - e \frac{d}{dx} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 E(x) \int_0^{-U(x)} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x) + \frac{3}{2} D_0 e^2 E(x) \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Переписывая это уравнение для полного тока, получим

$$\begin{aligned} \frac{J + \delta J - G}{A} = & -e \frac{d}{dx} \int_0^{-U(x) - \delta U} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)] - \\ & - e \frac{d}{dx} \int_{-U(x) - \delta U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)] + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 [E(x) + \delta E(x)] \int_0^{-U(x) - \delta U(x)} d\varepsilon \nu(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)] + \\ & + \frac{3}{2} D_0 e^2 [E(x) + \delta E(x)] \int_{-U(x) - \delta U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) [f(\varepsilon, x) + \delta f(\varepsilon, x)]. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Линеаризуя это уравнение и используя соотношения типа

$$\delta U(x) \frac{\delta}{\delta U(x)} \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) = - \int_{-U(x)}^{-U(x) - \delta U(x)} d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x), \quad (2.58)$$

мы приходим к уже выведенному нами уравнению (2.34). Таким образом, мы приходим к выводу, что линейные по δU члены в (2.57) сокращаются в уравнении для среднего тока, но должны быть учтены при изучении флуктуаций. Вот почему линеаризация (2.29) приводит к неправильному уравнению (2.49), которым не учитываются все источники флуктуаций, или, другими словами, все члены в (2.56), содержащие $U(x)$.

Вернемся теперь к уравнению (2.48). Его решение с граничными условиями

$$E(x) \delta E_{\omega}(x) |_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad U(x) \frac{d}{dx} \delta E_{\omega}(x) \Big|_{x \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (2.59)$$

дается

$$-\frac{AD_0 \varkappa}{4\pi} \delta E_{\omega}(x) = U^{d/2}(x) \left[C + \int_0^x \frac{d\xi}{U^{d/2+1}(\xi)} \int_0^{\xi} d\eta (\delta J_{\omega} - G(\eta)_{\omega}) \right], \quad (2.60)$$

где C постоянная интегрирования. Накладывая условие, что приложенный потенциал не флуктуирует

$$\int_0^L dx \delta E_\omega = 0,$$

мы получим из (2.60), что эта константа определяется выражением

$$C = \int_0^L dx \left(\frac{\psi(x)}{\psi(L)} - 1 \right) \frac{1}{U^{d/2+1}(x)} \int_0^x d\xi (\delta J_\omega - G_\omega(\xi)), \quad (2.61)$$

где

$$\psi(x) = \int_0^x d\xi U^{d/2}(\xi). \quad (2.62)$$

Для получения этого решения удобно проинтегрировать уравнение (2.39) с учетом граничных условий и свести его к простому линейному уравнению

$$U(x) \frac{d}{dx} \delta E_\omega(x) + \frac{d}{2} E(x) \delta E_\omega(x) = \frac{4\pi}{AD_0 e \varkappa} \int_0^x dx (\delta J_\omega - G_\omega). \quad (2.63)$$

На правой границе мы наложим условие, что как поле, так и флуктуации поля выходят на насыщение. Поэтому на правой границе

$$\left. \frac{d}{dx} \delta E_\omega(x) \right|_{x=L} = 0 \quad (2.64)$$

и тогда, продифференцировав (2.60) и положив $x = L$ (δJ_ω не зависит от координат), получим

$$\delta J_\omega = \frac{1}{Z} \int_0^L dx \Pi(x) G_\omega(x), \quad (2.65)$$

где

$$Z = L + \frac{dU'(L)U^{d/2}(L)}{2\psi(L)} \int_0^L dx \frac{x\psi(x)}{U^{d/2+1}(x)}, \quad (2.66)$$

$$\Pi(x) = 1 + \frac{dU'(L)U^{d/2}(L)}{2\psi(L)} \int_x^L d\xi \frac{\psi(\xi)}{U^{d/2+1}(\xi)}. \quad (2.67)$$

Тогда мощность P шумов определяется выражением

$$P = \frac{2}{Z^2} \int_0^L dx \Pi^2(x) \langle G^2(x) \rangle_\omega. \quad (2.68)$$

Так как в соответствии с (2.37)

$$\langle G^2(x) \rangle_\omega = 2e^2 A \int_0^\infty d\varepsilon \nu(\varepsilon) D(\varepsilon) f(\varepsilon, x) = 2e^2 AD_0 U(x) \frac{\varkappa}{4\pi e} \frac{d^2 U}{dx^2} \quad (2.69)$$

то окончательно

$$P = \frac{4AD_0\alpha}{4\pi Z^2} \int_0^L dx \Pi^2(x) U(x) \frac{d^2 U}{dx^2}. \quad (2.70)$$

Распределение потенциала и поля (см. Рис. 2.2) мы найдем в виде степенных рядов, решая

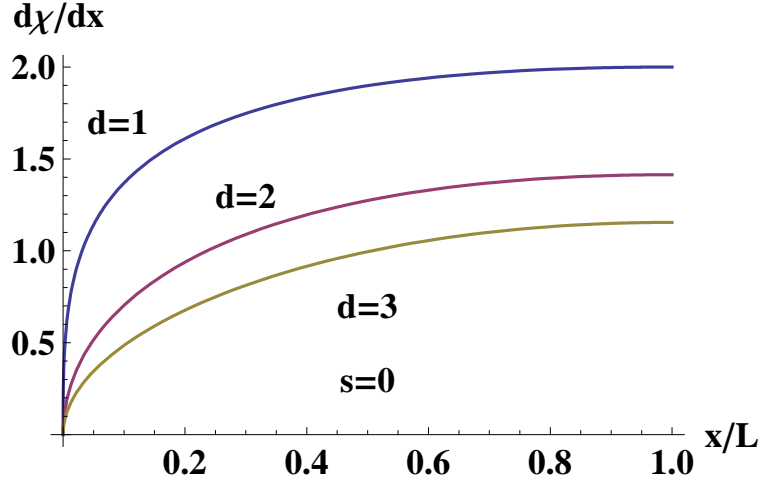


Рис. 2.2: Распределение поля для разных размерностей пространства

(2.29) с граничными условиями (2.26) при $x = L$. Используя уравнения (2.62), (2.66), (2.67) и (2.70), мы вычислим множитель P/P_{Poisson} (где $P_{\text{Poisson}} = 2|e||J|$), указывающий на подавление шума. Для различных размерностей пространства d мы получим

$$P/P_{\text{Poisson}} = \begin{cases} 0.3188 & \text{для } d = 3, \\ 0.4512 & \text{для } d = 2, \\ 0.682 & \text{для } d = 1. \end{cases} \quad (2.71)$$

Таким образом, в этом частном случае наши результаты отличаются от результатов [54] как аналитически (что, по нашему мнению, принципиально), так и численно (хотя для данного частного случая отличия небольшие). Более того, наши результаты очень близки к результатам, полученным в численном эксперименте [53].

2.5.3 Время релаксации зависит от энергии

Приведем вычисления мощности шумов для $s = \pm 1/2$ и $d = 3$. Уравнение для флуктуаций принимает вид

$$-\frac{4\pi}{\alpha D_0 A} (\delta J_\omega - G_\omega) = \frac{d}{dx} \left[(-U)^{s+1} \frac{d\delta E_\omega}{dx} \right] - e^{\frac{2s+d}{2}} (-U)^s \frac{d}{dx} (E\delta E_\omega). \quad (2.72)$$

Введя безразмерный потенциал χ по (2.31) и безразмерную флуктуацию поля ΔE

$$\delta E(x) = \frac{1}{L} \left(\frac{4\pi|J|L^3}{\varkappa D_0 A |e|^{s+1}} \right)^{1/(s+2)} \Delta E \left(\frac{x}{L} \right), \quad (2.73)$$

можно переписать уравнение (2.72) как

$$\Delta E'' + \left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{\chi'}{\chi} \Delta E' - \left(s + \frac{d}{2}\right) \frac{\chi''}{\chi} \Delta E = \frac{1}{\chi^{s+1}} \frac{(G - \delta J)}{|J|}. \quad (2.74)$$

Положим $s = -1/2$, $d = 3$ и получим

$$\Delta E'' - \frac{1}{2} \frac{\chi'}{\chi} \Delta E' - \frac{\chi''}{\chi} \Delta E = \chi^{-1/2} \frac{(G - \delta J)}{|J|}. \quad (2.75)$$

Это уравнение снова отличается от уравнения, полученного в [54]. Выпишем уравнение для χ

$$\frac{1}{2\chi^{1/2}} \chi' \chi'' - \chi^{1/2} \chi''' = 1. \quad (2.76)$$

Для вычисления функции Грина уравнения (2.75) нам понадобится функция $\psi_1(x)$, удовлетворяющая однородному уравнению

$$\psi_1'' - \frac{1}{2} \frac{\chi'}{\chi} \psi_1' - \frac{\chi''}{\chi} \psi_1 = 0 \quad (2.77)$$

и подчиняющаяся граничному условию $\psi_1'|_{x=0} = 0$. Вторую функцию ψ_2 , удовлетворяющую граничному условию $\psi_2'|_{x=L} = 0$, можно выразить через χ и ψ_1

$$\psi_2(x) = -\psi_1 \left[\frac{\chi^{1/2}(1)}{\psi_1(1)\psi_1'(1)} + \int_x^L d\xi \frac{\chi^{1/2}(\xi)}{\psi_1^2(\xi)} \right]. \quad (2.78)$$

Решение (2.75) теперь легко написать, используя функцию Грина

$$G(x, x') = \frac{1}{\chi^{1/2}(x')} [\theta(x - x') \psi_1(x') \psi_2(x) + \theta(x' - x) \psi_1(x) \psi_2(x')] \quad (2.79)$$

как

$$\Delta E = \int_0^1 dx' G(x, x') \frac{G(x') - \delta J}{\chi^{1/2}(x')|J|}. \quad (2.80)$$

Требование постоянства приложенного потенциала приводит к

$$\delta J = \frac{1}{Z} \int_0^1 dx \frac{G(x)}{\chi(x)} \Pi(x), \quad (2.81)$$

где

$$\Pi(x) = \psi_1(x) \int_x^1 d\xi \psi_2(\xi) + \psi_2(x) \int_0^x d\xi \psi_1(\xi), \quad (2.82)$$

$$Z = \int_0^1 dx \frac{\Pi(x)}{\chi(x)}. \quad (2.83)$$

Выражая корреляционную функцию $\langle G^2(x) \rangle$ через χ , мы получим для множителя, описывающего подавление шума

$$\frac{P}{P_{\text{Poisson}}} = \frac{2}{Z^2} \int_0^1 dx \frac{\chi''(x)}{\chi^{3/2}(x)} \Pi^2(x). \quad (2.84)$$

Определим потенциал χ снова в виде степенного ряда численно и найдем ψ_1 из (2.77). Теперь функции ψ_2 , Π и константу Z можно найти из уравнений (2.78), (2.82) и (2.83). Множитель подавления оказывается равным

$$P/P_{\text{Poisson}} = 0.4257, \quad (2.85)$$

что на 10% больше результата, полученного для этого случая в [54]. Авторы работы [114] приводят для $s = -1/2$ как результат численного эксперимента значение

$$P/P_{\text{Poisson}} = 0.42 - 0.44. \quad (2.86)$$

Видно, что этот интервал заметно ближе к величине, даваемой (2.85), чем результат $P/P_{\text{Poisson}} = 0.38$ работы [54].

Для случая $s = 1/2$ можно получить

$$P/P_{\text{Poisson}} = 0.1974, \quad (2.87)$$

что чуть меньше результата, приведенного в [54].

2.6 Заключение

Вычисленная нами мощность неравновесного дробового шума оказалась для рассмотренных механизмов рассеяния очень близкой к мощности, полученной в численном эксперименте [53]. В случае зависящего от энергии времени релаксации численное различие наших результатов от результатов работы [54] оказалось существенным в отличие от случая, когда время релаксации не зависит от энергии.

Здесь мы еще раз хотели бы прояснить ситуацию, почему наши аналитические результаты отличаются от результатов работы [54]. Как пример рассмотрим уравнение Пуассона.

В соответствии с [54] можно написать

$$n = \int_{-U(x)}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) f(\varepsilon, x), \quad (2.88)$$

где n, U точные *полные* концентрация и потенциальная энергия, f *точная* функция распределения (среднее значение *плюс* флуктуирующая часть). Линеаризация этого уравнения приводит к уравнениям в [54]. Авторы [54] могли бы сказать, что так как напряжения в резервуарах не флуктуируют и U положено равным нулю при левом контакте и так как полная энергия, равная $\mathcal{E} = \varepsilon + U$, остается положительной, то полная (точная) функция распределения обращается в нуль для $\varepsilon < -U$.

Первое возражение состоит в том, что невозможно оправдать уравнение (2.88) для полных величин этих переменных, включающих стационарную и флуктуирующие части. Это становится очевидным хотя бы из того факта, что флуктуирующая часть сама неявным образом зависит от средней величины функции распределения через корреляционные функции. Необходимо помнить, что уравнение, включающее среднюю и флуктуирующую части величин, нужно понимать символически. В действительности такое уравнение фактически эквивалентно двум уравнениям: одно описывает средние значения, а другое – отклонения от этого среднего. Буквальное понимание такого уравнения может привести к недоразумениям. Например, анализируя уравнение

$$\bar{n} + \delta n = \int_{-\bar{U}-\delta U}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) (\bar{f} + \delta f),$$

можно прийти к неправильному заключению, что среднее значение \bar{n} зависит от средних типа $\overline{\delta U \delta f}$.

Мы можем это показать и по другому. Мы могли бы начать с того, что для флуктуаций концентрации написать

$$\delta n = \int_0^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x).$$

Исходя из микроскопических уравнений кинетики флуктуаций мы убедились, что $\delta f(\varepsilon, x)$, также как и $f(\varepsilon, x)$, обращается в нуль при $\varepsilon < |U|$, так что мы приходим к

$$\delta n = \int_{|U|}^{\infty} d\varepsilon \nu(\varepsilon) \delta f(\varepsilon, x),$$

т.е. член, который получается от линеаризации по нижнему пределу уравнения (2.88) (как это делали авторы [54]), не возникает.

Несколько слов надо сказать и о граничных условиях для потенциала. Используемые граничные условия не годятся на расстояниях порядка $R_V = \sqrt{\hbar v / 4\pi e n(0)}$ вблизи электродов. Но так как мощность шумов – это объемное свойство (заметим интегрирование по длине образца в (2.84)), это приближение можно оправдать, так как мы считаем, что длина образца L много больше длины R_V .

Интересуясь простейшим случаем флуктуационных явлений в режиме токов, ограниченных пространственным зарядом, мы не учитывали электрон-электронные столкновения. Как известно, такие столкновения приводят к дополнительной электрон-электронной корреляции [36], влияние которой надо было бы выяснить в общем случае.

Глава 3

Дробовой шум при кулоновском увлечении

3.1 Введение

В этой главе мы исследуем шумы токов, вызванных кулоновским увлечением при баллистическом (бесстолкновительном) переносе электронов в квантовой проволоке благодаря току в параллельной смежной проволоке. Возможность эффекта кулоновского увлечения в баллистическом режиме была продемонстрирована Гуревичем и др. [66] для омического случая. Если две проволоки, скажем, 1 и 2, близки и параллельны, сила увлечения благодаря баллистическому току в проволоке 2 действует как некое постоянное ускорение на электроны проволоки 1 за счет кулоновского взаимодействия между электронами этих двух проволок. Как результат, возникает ток и в первой проволоке, этот ток тоже зависит от напряжения V , приложенного ко второй проволоке. Этот индуцированный второй проволокой ток (особенности самого тока кулоновского увлечения мы рассмотрим в следующей главе) флуктуирует и также зависит от напряжения V . Такую зависимость можно рассматривать как новый тип дробового шума. Теорию именно такого шума мы и собираемся развить в этой главе.

Мы предсказываем острые осцилляции мощности шумов как функции напряжения на затворе или химического потенциала электронов. Исследование зависимости от напряжения V , приложенного к активной проволоке, приводит к выводу, что для относительно больших величин V спектральная плотность низкочастотного шума (мощность шума) оказывается пропорциональной V^2 , в то время как при малых величинах V она не зависит

от V .

3.2 Корреляторы случайных сил

Пусть две проволоки с длинами меньшими длины свободного пробега электрона (обычно это несколько $\mu\text{м}$) расположены параллельно. Такие системы нано масштабов характеризуются малыми плотностями электронов, причем плотность электронов можно изменять напряжением на затворе. Как и в [66], мы предположим, что проволоки имеют разные толщины и одинаковые длины L . Мы рассмотрим, следуя [66, 67], случай, когда за счет кулоновского взаимодействия электроны в нанопроволоках 1 и 2 после рассеяния остаются в прежних подзонах, характеризующихся законами дисперсии

$$\varepsilon_{np}^{(1)} = \varepsilon_n^{(1)}(0) + p^2/2m, \quad \varepsilon_{n'p}^{(2)} = \varepsilon_{n'}^{(2)}(0) + p^2/2m, \quad (3.1)$$

n и n' номера поперечных зон.

Кинетическое уравнение для флуктуаций функции распределения $\delta F^{(1)}$ электронов в проволоке 1 имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x} \right) \delta F_{np}^{(1)} = -J_p \delta F_{np}^{(1)} + y_{np}^{(1)}, \quad (3.2)$$

где $y_{np}^{(1)}$ случайная Ланжевеновская сила, связанная с межпроволочным электрон-электронным рассеянием. Только эти столкновения мы и примем во внимание, без этих столкновений система считается полностью баллистической.

Будем решать (3.2) итерациями. Линеаризованный оператор столкновений J_p определен как

$$\begin{aligned} J_p \Psi_{np} &= \\ &= \Psi_{np} \sum_{n'p'q} W_{1pn,2p'n'}^{1p+qn,2p'-qn'} \left[F_{n'p'}^{(2)} \left(1 - F_{np+q}^{(1)} \right) \left(1 - F_{n'p'-q}^{(2)} \right) + \left(1 - F_{n'p'}^{(2)} \right) F_{np+q}^{(1)} F_{n'p'-q}^{(2)} \right] - \\ &- \sum_{n'p'q} \Psi_{np+q} W_{1pn,2p'n'}^{1p+qn,2p'-qn'} \left[F_{n'p'-q}^{(2)} \left(1 - F_{np}^{(1)} \right) \left(1 - F_{n'p'}^{(2)} \right) + \left(1 - F_{n'p'-q}^{(2)} \right) F_{np}^{(1)} F_{n'p'}^{(2)} \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь и в дальнейшем при суммировании по p или p' подразумевается также и суммирование по спину.

Применяя метод итераций, мы подставим в правую часть уравнения (3.2) $\delta F_{np}^{(1)}$ в нулевом приближении, даваемое вторым и третьим членом в правой стороне (3.14) — (см.

ниже). Мы не принимаем в расчет $\delta F_{np}^{(2)}$, так как в этом приближении функции, связанные с разными резервуарами, некоррелированы.

Корреляционные функции Ланжевеновских сил можно получить, используя процедуру, описанную в разделе 1.6 Гл.1 (см. также [37, 38, 39, 115]).

Мы не учитываем столкновения электронов внутри проволок. Поэтому линеаризованные операторы столкновений (операторы релаксации) B_b и B_c (и, соответственно, тесно связанные с этими операторами дополнительные источники $L^{(1)}$ и $L^{(2)}$) не дадут вклада в коррелятор случайных сил. Отличный от нуля вклад от этих операторов существует, только если сталкивающиеся частицы принадлежат одной и той же проволоке, однако такие столкновения мы не учитываем.

Действие уходящих операторов $B_{\mathbf{p}} + B_{\mathbf{p}'}$ на $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}})$ дадут

$$2\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[(1 - n_{\mathbf{p}})^- I_{\mathbf{p}} + n_{\mathbf{p}}^+ I_{\mathbf{p}}]. \quad (3.4)$$

Это выражение совместно с $\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}(2n_{\mathbf{p}} - 1)I_{\mathbf{p}}$, полученным действием оператора $\mathbf{v}\partial/\partial\mathbf{r} + \mathbf{v}'\partial/\partial\mathbf{r}'$ на $\delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}n_{\mathbf{p}}(1 - n_{\mathbf{p}})$ и использованием кинетического уравнения, приведет к

$$\delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[-I_{\mathbf{p}} +^+ I_{\mathbf{p}}]. \quad (3.5)$$

Приходные операторы $B_{d\mathbf{p}} + B_{d\mathbf{p}'}$ совместно с $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(3)}$ приводят к

$$-\sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} +^+ I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}), \quad (3.6)$$

где

$$-I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} n_{\mathbf{p}}^{(1)} n_{\mathbf{p}'}^{(2)} (1 - n_{\mathbf{k}}^{(1)}) (1 - n_{\mathbf{k}'}^{(2)}), \quad +I_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{p}'} = W_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{\mathbf{k}\mathbf{k}'} n_{\mathbf{k}}^{(1)} n_{\mathbf{k}'}^{(2)} (1 - n_{\mathbf{p}}^{(1)}) (1 - n_{\mathbf{p}'}^{(2)}). \quad (3.7)$$

Собирая выражения (3.5), (3.6), имеем для корреляторов случайных сил

$$\langle F_{\mathbf{p}}^{(1)} F_{\mathbf{p}'}^{(1)} \rangle_{\omega} = \delta_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}[-I_{\mathbf{p}} +^+ I_{\mathbf{p}}] - \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}(-I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}} +^+ I_{\mathbf{p}/\mathbf{k}'}^{\mathbf{p}\mathbf{k}}). \quad (3.8)$$

Легко проверить, что коррелятор не утратил свойство, связанное с законом сохранения числа частиц при столкновениях, $\sum_{\mathbf{p}(\mathbf{p}')} \langle F_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}'} \rangle = 0$. Отметим снова, что без учета дополнительного члена $L_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}^{(3)}$, содержащего передачу импульса $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$, это свойство коррелятора случайных сил нарушилось бы.

Перепишем коррелятор случайных сил (для последних мы примем новое обозначение y вместо F , как и для функций распределения $F^{(i)}$ вместо $n^{(i)}$), используя явное выражение для вероятности столкновения

$$\begin{aligned} \langle y_{np}^{(1)}(\mathbf{r}) y_{np'}^{(1)}(\mathbf{r}') \rangle_\omega &= \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} \sum_{n'p_1q} (\delta_{pp'} - \delta_{q,p'-p}) W_{1pn,2p_1n'}^{1p+qn,2p_1-qn'} \times \\ &\times \left[F_{np}^{(1)} F_{n'p_1}^{(2)} \left(1 - F_{np+q}^{(1)}\right) \left(1 - F_{n'p_1-q}^{(2)}\right) + F_{np+q}^{(1)} F_{n'p_1-q}^{(2)} \left(1 - F_{np}^{(1)}\right) \left(1 - F_{n'p_1}^{(2)}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь первый член справа, включающий $\delta_{pp'}$, это сумма приходного и уходного члена в кинетическом уравнении для состояния np , в то время как оставшийся член - это сумма вероятностей столкновения, когда одним из начальных состояний является np и одним из конечных np' , и наоборот. Корреляционная функция, также как и интеграл столкновений, удовлетворяет следующим соотношениям, выражающим сохранение числа частиц

$$\sum_{np} \langle y_{np}^{(1)}(\mathbf{r}) y_{np'}^{(1)}(\mathbf{r}') \rangle_\omega = \sum_{np'} \langle y_{np}^{(1)}(\mathbf{r}) y_{np'}^{(1)}(\mathbf{r}') \rangle_\omega = 0, \quad (3.10)$$

$$\sum_p J_p \Psi_{np} = 0. \quad (3.11)$$

Решение (3.2) можно написать, используя функцию Грина, последняя подчинена уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_p \frac{\partial}{\partial x} \right) G(xt|x't') = \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (3.12)$$

Мы имеем

$$G(xt|x't') = \frac{1}{|v_p|} \delta \left(t - t' - \frac{x - x'}{v_p} \right) \theta \left(\frac{x - x'}{v_p} \right), \quad (3.13)$$

так что

$$\begin{aligned} \delta F_{np}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' dx' G(xt|x't') \{ -J_p \delta F_{np} + y_{np}(x', t') \} + \\ &+ |v_p| \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(xt| -L/2, t') \delta F_{np}(-L/2, t') + \\ &+ |v_p| \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(xt|L/2, t') \delta F_{np}(L/2, t'). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Эту запись надо понимать на самом деле так: в нулевом порядке по столкновениям мы имеем свободное движение флуктуаций функций распределения электронов, вступающих в проволоку из левого и правого резервуаров, они и описываются двумя последними членами в уравнении. Так как мы учитываем столкновения итерациями, то именно на эти

флуктуации функций распределения в нулевом приближении по столкновениям и действует оператор релаксации J в первом члене в правой стороне этого уравнения. Для флуктуаций тока мы получим

$$\delta I(x, t) = \frac{e}{L} \sum_{np} v \delta F_{np}(x, t), \quad (3.15)$$

где $v = p/m$ скорость электрона, p это x компонента квазиимпульса электрона, x ось параллельна проволокам. Интеграл столкновений учитывает только столкновения электронов, принадлежащих разным проволокам. Свойство сохранения числа частиц Ланжевеновскими силами (3.10) и оператором столкновений (3.11), записанное в виде

$$\sum_{p<0} A_p = - \sum_{p>0} A_p,$$

позволяет нам записать возникающую разность интегралов

$$\sum_{p>0} \int_{-L/2}^x dx' \{-J_p \delta F_p + y_p\}(x', t - (x - x')/v) - \sum_{p<0} \int_x^{L/2} dx' \{-J_p \delta F_p + y_p\}(x', t - (x - x')/v)$$

как один интеграл

$$\sum_{p>0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \{-J_p \delta F_p + y_p\}(x', t - (x - x')/v).$$

Мы получим

$$\begin{aligned} \delta I(x, t) &= \frac{e}{L} \sum_{np>0} \int_{-L/2}^{L/2} dx' \left\{ -J_p \delta F_{np} \left(x', t - \frac{x - x'}{v} \right) + y_{np} \left(x', t - \frac{x - x'}{v} \right) \right\} + \\ &+ \frac{e}{L} \sum_{np>0} v \delta F_{np} \left(-\frac{L}{2}, t - \frac{x + L/2}{v} \right) + \\ &+ \frac{e}{L} \sum_{np<0} v \delta F_{np} \left(\frac{L}{2}, t - \frac{x - L/2}{v} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь первый член в правой стороне описывает шум, индуцированный столкновениями электронов проволоки 1 с электронами в активной проволоке 2, в то время как оставшиеся два члена описывают вклады флуктуаций потоков, вступающих в проволоку 1 слева и справа из резервуаров. Соответственно, мощность шумов будет содержать как неравновесный вклад благодаря столкновениям электронов с неравновесными электронами в активной проволоке, так и Найквистовский (равновесный) шум.

Мы определим мощность шумов как спектральную плотность на нулевой частоте

$$P_{tot} = 2 \int_0^\infty dt \langle \delta I(0) \delta I(t) + \delta I(t) \delta I(0) \rangle.$$

Уравнение для разновременной корреляционной функции выглядит в нашем случае так

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + J_{\mathbf{p}} \right) \langle \delta F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t + \tau) \delta F_{\mathbf{p}'}(\mathbf{r}', t) \rangle = 0.$$

Так как столкновения у нас учитываются итерациями, нам понадобится разновременной коррелятор, учитывающий только свободное движение, т.е. решение этого уравнения без оператора релаксации. Это решение легко написать

$$\langle \delta F_{np}(x, t) \delta F_{np'}(x', t') \rangle = L \delta_{pp'} F_{np} (1 - F_{np}) \delta [x - x' - v_p(t - t')]. \quad (3.17)$$

Мощность низкочастотных шумов для неравновесного тока определяется в результате как

$$P_{tot} = P_N + P, \quad (3.18)$$

где мощность равновесного Найквистовского шума [116] равна

$$\begin{aligned} P_N &= 2 \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_n \int_0^\infty dp v_n f_L(\varepsilon_{np} - \mu) [1 - f_L(\varepsilon_{np} - \mu)] + \\ &+ 2 \frac{e^2}{\pi \hbar} \sum_n \int_0^\infty dp v_n f_R(\varepsilon_{np} - \mu) [1 - f_R(\varepsilon_{np} - \mu)], \end{aligned} \quad (3.19)$$

или

$$P_N = 4GT, \quad G = \frac{e^2}{\pi \hbar} N. \quad (3.20)$$

Здесь N это число открытых токопроводящих каналов в пассивной проволоке. Мы везде пишем T вместо $k_B T$, где T температура.

3.3 Мощность шума увлечения

Мощность шумов, связанных с увлечением, дается формулой

$$P = P_S + P_L + P_R, \quad (3.21)$$

где

$$P_S = 2e^2 \sum_{n,p>0,p'>0} \langle y_{np} y_{np'} \rangle_\omega \quad (3.22)$$

описывает флуктуации, индуцированные источниками в проволоке,

$$P_L = -4e^2 \sum_{n,p' > 0} \sum_{p > 0} F_{np}^{(1)} (1 - F_{np}^{(1)}) J_{p'} \delta_{pp'} \quad (3.23)$$

описывает рассеяние флуктуаций, вступающих в проволоку из левого резервуара, и

$$P_R = 4e^2 \sum_{n,p' > 0} \sum_{p < 0} F_{np}^{(1)} (1 - F_{np}^{(1)}) J_{p'} \delta_{pp'} \quad (3.24)$$

описывает рассеяние флуктуаций, вступающих в проволоку из правого резервуара.

Вероятность рассеяния дается формулой

$$W_{1p+qn, 2p'-qn'}^{1p+qn, 2p'-qn'} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| V_{1pn, 2p'n'}^{1p+qn, 2p'-qn'} \right|^2 \delta(\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{n'p'}^{(2)} - \varepsilon_{np+q}^{(1)} - \varepsilon_{n'p'-q}^{(2)}). \quad (3.25)$$

Ее можно преобразовать, пользуясь соотношением

$$\delta(\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{n'p'}^{(2)} - \varepsilon_{np+q}^{(1)} - \varepsilon_{n'p'-q}^{(2)}) = \frac{m}{|p-p'|} \delta(q+p-p') \quad (3.26)$$

и

$$|\langle np-q, n'p | V | np, n'p-q \rangle|^2 = \left(\frac{2e^2}{\varepsilon L} \right)^2 g_{nn'}(q), \quad (3.27)$$

где

$$g_{nn'}(q) = \left(\int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp |\phi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2 K_0(|q|\hbar^{-1}|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|) |\phi_{n'}(\mathbf{r}'_\perp)|^2 \right)^2. \quad (3.28)$$

Здесь функция Бесселя мнимого аргумента $K_0(|q|\hbar^{-1}|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|)$ описывает модифицированное кулоновское взаимодействие между распределениями зарядов в поперечном направлении $|\phi_n(\mathbf{r}_\perp)|^2$ и $|\phi_{n'}(\mathbf{r}'_\perp)|^2$ в двух проволоках.

Мы предположим в духе подхода Ландауэра-Бюттикера-Имри [117, 118], что активная проволока связана с левым (l) и правым (r) резервуарами, каждый из которых находится в независимом друг от друга равновесии с смещенными химическими потенциалами $\mu^{(l)} = \mu - \Delta\mu/2$ и $\mu^{(r)} = \mu + \Delta\mu/2$. Здесь μ это средний химический потенциал, в то время как $\Delta\mu/e = V$ это приложенный к проволоке 2 потенциал (мы полагаем $eV > 0$) и $e < 0$ заряд электрона. Таким образом, электроны, вступающие в проволоку слева (справа) и имеющие квазиимпульсы $p' > 0$ [$p' < 0$], описываются $F_{n'p'}^{(2)} = f(\varepsilon_{n'p'}^{(2)} - \mu^{(l)})$ [$F_{n'p'}^{(2)} = f(\varepsilon_{n'p'}^{(2)} - \mu^{(r)})$] соответственно. Для мощности индуцированных в проволоке шумов P_S мы получим

$$P_S = 2e^2 m \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \left(\frac{2e^2}{\varepsilon L} \right)^2 \left(\frac{2L}{2\pi\hbar} \right)^2 \sum_{nn'} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{g_{nn'}(p+p')}{p+p'} \mathcal{S}, \quad (3.29)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= f(\varepsilon_{np'} - \mu) \left[1 - f\left(\varepsilon_{n'p'} - \mu - \frac{eV}{2}\right) \right] \times \\ &\times f\left(\varepsilon_{n'p} - \mu + \frac{eV}{2}\right) [1 - f(\varepsilon_{np} - \mu)] \left(1 + \exp \frac{eV}{T} \right). \end{aligned} \quad (3.30)$$

В случае $p_n^2/2m \gg T$ (где $p_n = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_n(0))}$) можно вынести за интеграл все медленно изменяющиеся функции, кроме произведения функций распределения. Применяя соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\exp(x+2a)}{[1 + \exp(x+2a)][1 + \exp(x+2b)]} = (a-b) \frac{\exp(a-b)}{\text{sh}(a-b)}, \quad (3.31)$$

можно получить

$$P_S = -2eJ \text{cth} \left(\frac{eV}{2T} \right). \quad (3.32)$$

Ток увлечения J в этой формуле в соответствии с [67] (см. также следующую главу)

$$J = J_0 \frac{1}{2} \text{sh} \left(\frac{eV}{2T} \right) \frac{\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}}{\text{sh} \left(\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T} \right)} \frac{\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}}{\text{sh} \left(\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T} \right)}. \quad (3.33)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$J_0 = -\frac{8e^5 m^3 L T^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{g_{nn'}(2p_n)}{p_n^3} \quad (3.34)$$

(где \varkappa диэлектрическая проницаемость) и

$$\varepsilon_{nn'} = \varepsilon_n^{(1)}(0) - \varepsilon_{n'}^{(2)}(0), \quad mv_n = p_n = \sqrt{2m[\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0)]}. \quad (3.35)$$

Используя явное выражение для оператора столкновений (3.3), можно показать, что мощность шумов P_R можно выразить через P_L простой заменой $eV \rightarrow -eV$. Действительно, используя, что суммирование в (3.23) идет по положительным квазиимпульсам $p > 0$ и свойство вероятности рассеяния (3.25), (3.26), мы получим

$$\sum_{p' > 0} J_{p'} \delta_{pp'} = \left(\frac{2e^2}{\varkappa L} \right)^2 m \frac{L}{2\pi \hbar} \sum_{n', p' < 0} \frac{g_{nn'}(p' - p)}{|p - p'|} \mathcal{F}, \quad (3.36)$$

$$\mathcal{F} = [F_{n'p'}^{(2)} (1 - F_{np'}^{(1)}) (1 - F_{n'p}^{(2)}) + (1 - F_{n'p'}^{(2)}) F_{np'}^{(1)} F_{n'p}^{(2)}] \quad (3.37)$$

в выражении для P_L , в то время как в выражении для P_R (учитывая, что в выражении для P_R суммирование идет по отрицательным p) мы имеем

$$\sum_{p' > 0} J_{p'} \delta_{pp'} = - \left(\frac{2e^2}{\hbar L} \right)^2 m \frac{L}{2\pi\hbar} \sum_{n', p' > 0} \frac{g_{nn'}(p' - p)}{|p - p'|} \mathcal{F}. \quad (3.38)$$

Теперь, заменяя $F_{\alpha k}^{(2)}$ на $f(\varepsilon_{\alpha k} - \mu + eV/2)$ и $f(\varepsilon_{\alpha k} - \mu - eV/2)$ для $p > 0$ и $p < 0$ соответственно, для P_L имеем

$$P_L = -4e^2 m \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{L}{2\pi\hbar} \right) \left(\frac{2e^2}{\hbar L} \right)^2 \left(\frac{2L}{2\pi\hbar} \right)^2 \sum_{nn'} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{g_{nn'}(p + p')}{p + p'} \mathcal{L}, \quad (3.39)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & f(\varepsilon_{np} - \mu) [1 - f(\varepsilon_{np} - \mu)] \times \\ & \times \left\{ f\left(\varepsilon_{n'p} - \mu + \frac{eV}{2}\right) f(\varepsilon_{n'p'} - \mu) \left[1 - f\left(\varepsilon_{n'p'} - \mu - \frac{eV}{2}\right)\right] + \right. \\ & \left. + f\left(\varepsilon_{n'p'} - \mu - \frac{eV}{2}\right) [1 - f(\varepsilon_{n'p'} - \mu)] \left[1 - f\left(\varepsilon_{n'p} - \mu + \frac{eV}{2}\right)\right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Окончательно получаем

$$P_L = 2eJ \left\{ \frac{2}{\frac{eV}{2T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{T}} - \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right)} \frac{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)} \right\}. \quad (3.41)$$

Сумма P_L и P_R есть

$$\begin{aligned} P_L + P_R = -2e J \left\{ \frac{1}{\text{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right)} \left[\frac{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)} + \frac{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)}{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)} \right] \right. \\ \left. - \frac{4\frac{eV}{2T}}{\left(\frac{eV}{2T}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_{nn'}}{T}\right)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

где J дается формулой (3.33). Для $eV \ll T$ для изменения полной мощности шумов в проволоке 1 благодаря присутствию проволоки 2 (без Найквистовского шума)

$$P = P_S + P_L + P_R = eJ_0 \left[\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T} \right]^2 \cdot \left[\text{sh}\left(\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right) \right]^{-2}. \quad (3.43)$$

При этом мощность шумов $P_L + P_R$ отрицательна и равна

$$P_L + P_R = 2eJ_0 \left[\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T} \right]^2 \cdot \left[\text{sh}\left(\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right) \right]^{-2}, \quad (3.44)$$

в то время как P_S положительна и в два раза меньше по величине. Можно проверить, что этот результат согласуется с флуктуационно-диссипационной теоремой. Представим себе, что к пассивной проволоке приложен потенциал $V^{(1)}$. Тогда линейный отклик можно записать как

$$J = (G - G_{tr}) V^{(1)}, \quad (3.45)$$

где, в соответствии с (3.33), мы ввели межпроволочный кондактанс (транскондактанс) G_{tr}

$$G_{tr} = -\frac{e}{4T} J_0 \frac{\left[\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right]^2}{\left[\text{sh}\left(\frac{\varepsilon_{nn'}}{2T}\right)\right]^2}. \quad (3.46)$$

Флуктуационно-диссипационная теорема утверждает, что равновесный вклад в шум благодаря активной проволоке (сравни с (3.20))

$$P = -4G_{tr}T, \quad (3.47)$$

что совпадает с нашим результатом (3.43).

Рассмотрим детально противоположный случай больших напряжений $eV \gg T$. В этом случае неисчезающий результат для (3.33) получится только при $|\varepsilon_{nn'}| < eV/2$ и можно получить Пуассоновский предел для мощности шумов

$$P = -2eJ, \quad (3.48)$$

где ток увлечения дается формулой

$$J = \mathcal{B} \left[\left(\frac{eV}{2}\right)^2 - (\varepsilon_{nn'})^2 \right], \quad \mathcal{B} = -\frac{2e^5 m^3 L}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{g_{nn'}(2p_n)}{p_n^3}. \quad (3.49)$$

Ситуацию мы проиллюстрируем на Рис. 3.1, где мы нарисовали зависимость мощности шумов от приложенного напряжения при различных величинах расстройек уровней поперечного движения в двух проволоках $\varepsilon_{nn'}$. Для малых величин eV/T мы имеем дополнительный вклад в тепловой (равновесный) шум из-за присутствия активной проволоки, описываемый (3.43), в то время как при больших величинах eV/T вклад в (теперь неравновесный) шум в пассивной проволоке описывается квадратичной зависимостью (3.49).

Для дальнейшего прояснения ситуации приведем зависимость мощности шумов от разницы (расстройки) энергий поперечного квантования в двух проводниках $\varepsilon_{nn'}$ на Рис. 3.2. Мощность шумов достигает максимума каждый раз, когда пара этих уровней совпадает по энергии.

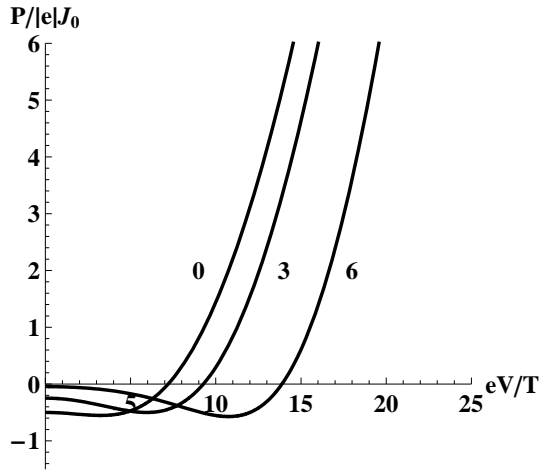


Рис. 3.1: Мощность шумов от приложенного напряжения при различных величинах расстройек уровней поперечного движения $\varepsilon_{nn'}/T = 0, 3, 6$.

3.4 Заключение

Таким образом, мы показали, что мощность шумов P как функция напряжения на затворе (изменяющем положение уровней энергии) составляет систему пиков, каждый из которых определяется совпадением уровней поперечного квантования $\varepsilon_n^{(1)}(0)$ и $\varepsilon_{n'}^{(2)}(0)$ в обеих проволоках. Этот эффект может играть важную роль как в исследовании межпроволочного кулоновского взаимодействия, так и для выяснения однозонной структуры поперечного квантования в проволоках. Мы нашли, что равновесный шум оказывается при этом меньше из-за кулоновского взаимодействия носителей в данной проволоке с носителями близлежащей проволоки. Это уменьшение определяется межпроволочным кондактансом.

Мы показали, что при больших приложенных напряжениях мощность шумов выходит на Пуассоновский предел, при этом сам ток увлечения оказывается пропорциональным квадрату напряжения, приложенного к активной квантовой проволоке.

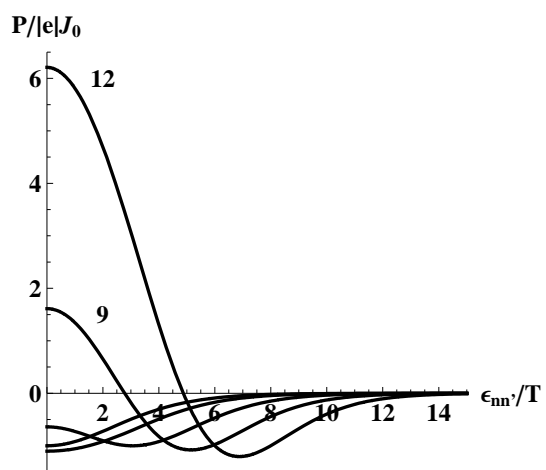


Рис. 3.2: Мощность шумов как функция $\epsilon_{nn'}/T$ при разных $eV/T = 0, 3, 6, 9, 12$.

Глава 4

Кулоновское увлечение в квантовых проволоках

4.1 Введение

Кулоновское увлечение было предсказано Погребинским в работе [62] (см. также [63]). Новые возможности техники литографии полупроводников сделали возможным изучение двумерных систем из двух электронных слоев, разделенных сотнями и десятками ангстрем. В этих условиях интерес к изучению кулоновского увлечения возродился (см. обзор [64], где обсуждаются, главным образом, работы, посвященные кулоновскому увлечению в двух двумерных слоях).

Мы упомянем только вскользь работы, посвященные увлечению между различными системами: между нормальным металлом и сверхпроводником [76], между электрон-дырочными системами [119, 120], между металлом и Вигнеровским кристаллом [121]. Можно указать и другие возможные интересные случаи: увлечение между двумя квантовыми точками или увлечение между (концентрическими) углеродными нанотрубками.

Мы изучим кулоновское увлечение в баллистическом режиме в нанопроволоках. Эффект кулоновского увлечения в баллистическом режиме был изучен Гуревичем и др. [66] для омического случая и Гуревичем и автором [67] для неомического случая.

Как мы уже упоминали во Введении, возможен также эффект спинового кулоновского увлечения [79], в этом эффекте электроны со спином вверх и вниз в одной и той же структуре играют роль электронов в двух слоях или проволоках, разделенных пространственно. Хоть эффект и назван спиновым увлечением, по существу здесь также эффект

основан на передаче импульса между электронами со спином вниз и вверх за счет кулоновского взаимодействия, последнее ослабляет относительное движение двух компонент спина. Экспериментально эффект был подтвержден в работе [80]. Подчеркнем здесь еще раз, что в отличие от обычной ситуации кулоновского увлечения носителей, разделенных пространственно, когда говорят о спиновом увлечении спина, имеют в виду одиночную структуру, где носители с различными спинами играют роль увлекающих (активных) и увлекаемых (пассивных) носителей.

4.2 Законы сохранения

Рассмотрим законы сохранения при столкновении электронов, принадлежащих двум различным параллельным квантовым нанопроволокам. Эти проволоки схематически изображены на Рис. 1. Мы можем написать

$$\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{lp'}^{(2)} = \varepsilon_{n'p+q}^{(1)} + \varepsilon_{l'p'-q}^{(2)}, \quad (4.1)$$

где $\varepsilon_{np}^{(1,2)} = \varepsilon_n^{(1,2)}(0) + p^2/2m$, m эффективная масса электрона, n индекс поперечного квантования.

Решение уравнения (4.1) дается

$$q_{\pm} = \frac{p' - p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p' - p}{2}\right)^2 + m\delta\varepsilon}, \quad (4.2)$$

где мы ввели

$$\delta\varepsilon = \varepsilon_n^{(1)}(0) + \varepsilon_l^{(2)}(0) - \varepsilon_{n'}^{(1)}(0) - \varepsilon_{l'}^{(2)}(0). \quad (4.3)$$

Рассмотрим сначала случай $\delta\varepsilon = 0$, что накладывает в общем случае различных проволок следующие ограничения: $n' = n$ и $l' = l$, т.е. электроны остаются в пределах начальных подзон n и l . Если же две проволоки идентичны, то возможен еще случай с обменом чисел поперечного квантования $l' = n$ и $n' = l$.

Предположим, что проволоки различны. Тогда δ - функцию, описывающую сохранение энергии, можно переписать в виде

$$\delta(\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{lp'}^{(2)} - \varepsilon_{n'p+q}^{(1)} - \varepsilon_{l'p'-q}^{(2)}) = \frac{m}{|q|} \delta[q - (p' - p)]. \quad (4.4)$$

Таким образом, начальные квазиимпульсы p и p' после столкновения переходят в $p+q = p'$ и $p' - q = p$, т.е. в результате столкновения электроны обмениваются импульсами.

Мы вычислим ток увлечения в проволоке 1, предполагая возникающий ток кулоновского увлечения в этой проволоке гораздо меньшим, чем вызывающий его ток в параллельной проволоке 2. Напишем кинетическое уравнение для проволоки 1

$$v_{np} \frac{\partial \Delta F_{np}^{(1)}}{\partial z} = -I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\}, \quad (4.5)$$

где $F^{(1,2)}$ функции распределения электронов в проволоке 1 и 2 соответственно, интеграл столкновений учитывает только межпроволочные электрон-электронные столкновения

$$I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\} = \sum_{lp'q} W_{1pn,2p'l}^{1p+qn,2p'-ql} \mathcal{S}, \quad (4.6)$$

$$\mathcal{S} = F_{np}^{(1)} F_{lp'}^{(2)} \left(1 - F_{np+q}^{(1)}\right) \left(1 - F_{lp'-q}^{(2)}\right) - F_{np+q}^{(1)} F_{lp'-q}^{(2)} \left(1 - F_{np}^{(1)}\right) \left(1 - F_{lp'}^{(2)}\right), \quad (4.7)$$

$$F_{np}^{(1)} = \theta[v_{np}] f(\varepsilon_{np} - \mu^{1L}) + \theta[-v_{np}] f(\varepsilon_{np} - \mu^{1R}) + \Delta F_{np}^{(1)}. \quad (4.8)$$

Мы предположили, что электроны движутся баллистически внутри проволоки и вступают в проволоку с соответствующими химическими потенциалами $\mu^{1L} = \mu - eV_d/2$ and $\mu^{1R} = \mu + eV_d/2$ (электроны движущиеся из левого и правого резервуара соответственно). Здесь мы ввели индуцированное второй проволокой в первой падение напряжения V_d , т.е. мы предполагаем цепь первой проволоки незамкнутой.

Решение уравнения (4.5) (мы опустили равновесную часть) дается выражением

$$\Delta F_{np}^{(1)} = - \left(z \pm \frac{L}{2}\right) \frac{1}{v_{np}} I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\} \quad (4.9)$$

для $p > 0$ ($p < 0$). Используя свойство сохранения числа частиц оператором столкновений

$$\sum_{np} I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\} = 0, \quad (4.10)$$

мы получим для полного тока в пассивной 1 проволоке

$$J = -e \sum_{n,p>0} I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\} + e \frac{1}{L} \sum_{np>0} v_{np} [f(\varepsilon_{np} - \mu^{1L}) - f(\varepsilon_{np} - \mu^{1R})]. \quad (4.11)$$

Для второго члена в этой формуле имеем

$$\begin{aligned} j_{\text{Ohm}} &= \frac{e}{\pi \hbar} \sum_n \int_0^\infty dp v_{np} [f(\varepsilon_{np} - \mu + eV_d/2) - f(\varepsilon_{np} - \mu - eV_d/2)] = \\ &= T \frac{e}{\pi \hbar} \sum_n \ln \frac{1 + e^{(\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0) - eV_d/2)/T}}{1 + e^{(\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0) + eV_d/2)/T}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Если предположить, что для наивысшей заполненной зоны n выполняется $p_n^2/2m = \mu - \varepsilon_n^{(1)}(0) \gg T \sim eV_d$, мы сможем упростить это выражение и получить

$$j_{Ohm} = -V_d \frac{e^2}{\pi \hbar} N. \quad (4.13)$$

Здесь N число заполненных подзон в проволоке. Этот результат был получен экспериментально в [9, 8] и объяснен с использованием подхода работ [81, 82], где задача о контактансе решалась как квантовомеханическая задача рассеяния электронных волн и сводилась к вычислению коэффициента прохождения электронной волны через рассматриваемую структуру. (Надо отметить, что ступенчатая структура величины тока как функции напряжения на затворе обеспечивается сильным неравенством $\varepsilon_{n+1}^{(1)}(0) - \varepsilon_n^{(1)}(0) \gg T$, всегда имеющем место на эксперименте, так как энергии поперечного квантования составляют обычно десятки и сотни мэВ, температуры же обычно меньше или порядка градуса Кельвина).

Вероятность рассеяния $W_{1pn, 2p'l}^{1p+qn, 2p'-ql}$ в (4.6) определяется выражением

$$W_{1pn, 2p'l}^{1p+qn, 2p'-ql} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{1pn, 2p'l}^{1p+qn, 2p'-ql}|^2 \delta(\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{lp'}^{(2)} - \varepsilon_{np+q}^{(1)} - \varepsilon_{lp'-q}^{(2)}). \quad (4.14)$$

Для вычисления тока увлечения мы итерируем кинетическое уравнение по отношению к межпроволочному столкновительному члену. Поэтому мы можем считать функции распределения в интеграле столкновений равновесными $F_{np}^{(1)} = f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu)$ для первой проволоки.

Что касается второй проволоки, мы предположим, следуя подходу работ [81, 117, 118], что эта проволока соединена с резервуарами, которые мы назовем левым l и правым r , причем каждый резервуар находится в независимом тепловом равновесии с одной и той же температурой, но с разными химическими потенциалами $\mu^l = \mu - eV/2$ и $\mu^r = \mu + eV/2$, где μ равновесный химический потенциал. Таким образом, электроны, вступающие в проволоку слева (справа) и имеющие квазиимпульсы $p' > 0$ ($p' < 0$), описываются $F_{lp'}^{(2)} = f(\varepsilon_{lp'}^{(2)} - \mu^l)$ ($F_{lp'}^{(2)} = f(\varepsilon_{lp'}^{(2)} - \mu^r)$), и мы можем убедиться, что интеграл столкновений (4.6) тождественно обращается в нуль, если начальные p' и конечные $p' - q$ квазиимпульсы в активной проволоке 2 имеют одинаковые знаки. Это значит, что только процессы рассеяния назад дают вклад в эффект увлечения.

Благодаря уравнению (4.4) у нас остаются лишь $p' < 0$ (т.к. мы ограничены в соответствии с (4.11) $p' - q = p > 0$), и мы получим следующее произведение функций распределения в столкновительном члене

$$\mathcal{P} = F_{np}^{(1)} F_{lp'}^{(2)r} (1 - F_{np'}^{(1)}) (1 - F_{lp}^{(2)l}) - F_{np'}^{(1)} F_{lp}^{(2)l} (1 - F_{np}^{(1)}) (1 - F_{lp'}^{(2)r}) \quad (4.15)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{lp'}^{(2)} - \mu^r) [1 - f(\varepsilon_{np'}^{(1)} - \mu)] [1 - f(\varepsilon_{lp}^{(2)} - \mu^l)] - \\ & - f(\varepsilon_{np'}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{lp}^{(2)} - \mu^l) [1 - f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu)] [1 - f(\varepsilon_{lp'}^{(2)} - \mu^r)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & 2 \operatorname{sh}(eV/2T) \exp\{(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu)/T\} \exp\{(\varepsilon_{np'}^{(2)} - \mu)/T\} \times \\ & \times f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{np'}^{(2)} - \mu - eV/2) f(\varepsilon_{np'}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{np}^{(2)} - \mu + eV/2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

и для тока увлечения мы имеем

$$J_{\text{drag}} = -2e \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \frac{2\pi}{\hbar} \frac{mL}{2\pi\hbar} \left(\frac{2L}{2\pi\hbar}\right)^2 \left(\frac{2e^2}{\varkappa L}\right)^2 \sum_{nn'} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{g_{nn'}(p+p')}{p+p'} \mathcal{Q}, \quad (4.18)$$

где

$$\mathcal{Q} = \exp\frac{\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu}{T} \exp\frac{\varepsilon_{np'}^{(2)} - \mu}{T} f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{np'}^{(2)} - \mu - \frac{eV}{2}) f(\varepsilon_{np'}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{np}^{(2)} - \mu + \frac{eV}{2}) \quad (4.19)$$

и \varkappa диэлектрическая проницаемость образца.

Квадрат матричного элемента кулоновского взаимодействия записан как

$$g_{nl}(p+p') = \left[\int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp \phi_{np'}^*(\mathbf{r}_\perp) \phi_{lp}^*(\mathbf{r}'_\perp) K_0\left(\frac{|p+p'|}{\hbar} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|\right) \phi_{np}(\mathbf{r}_\perp) \phi_{lp'}(\mathbf{r}'_\perp) \right]^2, \quad (4.20)$$

где волновые функции $\phi_{np}(\mathbf{r}_\perp)$ описывают поперечное квантование. Здесь использовано, что для кулоновского потенциала

$$\int dx \int dx' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \exp[iq(x-x')/\hbar] = 2e^2 L K_0(|q| |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|/\hbar), \quad (4.21)$$

где L длина проволоки и $K_0(x)$ модифицированная функция Бесселя, определенная в [122],

$$K_0(x) = \begin{cases} -\ln(x/2), & x \ll 1, \\ \sqrt{\pi/2x} e^{-x}, & x \gg 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Это означает, что электрон-электронное взаимодействие спадает экспоненциально при условии $|q||\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|/\hbar \gg 1$.

Это взаимодействие проявляется, таким образом, особенно сильно, когда относительные скорости частиц (относительная скорость определяет величину q) из двух проволок малы. (Они все же должны быть предположены настолько большими, чтобы можно было применять теорию возмущений к электрон-электронным взаимодействиям).

4.3 Линейный отклик

В случае $eV/T \ll 1$ для тока увлечения мы получим

$$J_{\text{drag}} = -e \frac{2\pi}{\hbar} m \frac{L}{2\pi\hbar} \left(\frac{2L}{2\pi\hbar} \right)^2 \left(\frac{2e^2}{\varkappa L} \right)^2 \frac{eV}{T} \sum_{nl} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{g_{nl}(p+p')}{p+p'} \mathcal{Q}. \quad (4.23)$$

Вынося в (4.23) за интеграл все медленно меняющиеся функции, мы получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{g_{nl}(p+p')}{p+p'} f(\varepsilon_{np}^{(1)} - \mu) f(\varepsilon_{lp'}^{(2)} - \mu) [1 - f(\varepsilon_{np'}^{(1)} - \mu)] [1 - f(\varepsilon_{lp}^{(2)} - \mu)] = \\ = \frac{g_{nl}(2p_n)}{2p_n} \left(\frac{T}{v_n} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right) \right]^{-2}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Здесь мы использовали обозначения $\varepsilon_{nl} = \varepsilon_n^{(1)}(0) - \varepsilon_l^{(2)}(0)$ и $mv_n = p_n = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0))}$. Мы предположили, что для наивысшей заполненной подзоны n энергия Ферми $p_n^2/2m$ много больше чем ε_{nl}

$$p_n^2/2m \gg T \sim \varepsilon_{nl}.$$

Ток увлечения тогда равен

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 m^3 L T^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \frac{eV}{T} \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right) \right]^{-2}. \quad (4.25)$$

В этом случае малого приложенного напряжения (режим линейного отклика) можно ввести понятие сопротивления увлечения. То есть, мы сможем ввести коэффициент, зависящий только от параметров структуры и связывающий ток J_{drive} в активной проволоке 2 с индуцированным этим током падением напряжения в пассивной 1 проволоке $J_{\text{drive}} R_D = -V_d$. Ток в активной проволоке определен как $J_{\text{drive}} = -Ve^2 N_D / \pi \hbar$ а V_d определяется из условия отсутствия тока $J = 0$ в пассивной проволоке (см. уравнение (4.11)).

$$R_D = \frac{2e^2 m^3 L T}{\varkappa^2 \hbar^2 N N_D} \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{\varepsilon_{nl}}{2T} \right) \right]^{-2}, \quad (4.26)$$

где N_D число занятых подзон в активной проволоке.

До сих пор мы изучали простейшую ситуацию, когда уровень Ферми был расположен сильно выше, чем уровни в проволоках 1 и 2. Более сложная ситуация возникнет, когда разность химпотенциала и начала отсчета подзон n и l порядка температуры. Выделим зависимость тока увлечения от энергии Ферми $\mu - \varepsilon_n(0)$. Мы предположим, что выстраивание зон имеет место $\varepsilon_n^{(1)}(0) = \varepsilon_l^{(2)}(0)$ и получим для (4.18) в линейном режиме

$$J_{\text{drag}} = -\frac{e^5 mL}{2\pi^2 \varkappa^2 \hbar^4} \frac{eV \hbar}{2T d} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{K_0^2(p+p')}{p+p'} Q, \quad (4.27)$$

где теперь интегрирование идет по безразмерным p и p' и

$$Q = 1 / \left(\text{ch}^2 \frac{\hbar^2 p^2 / d^2 - p_n^2}{4mT} \text{ch}^2 \frac{\hbar^2 (p')^2 / d^2 - p_n^2}{4mT} \right) \quad (4.28)$$

Величина Q как функция p и p' меняется около $p = p_n d / \hbar \equiv k_F d$ на масштабе $\sqrt{2T / (\hbar^2 / 2md^2)}$, если этот масштаб мал, мы можем вынести меняющиеся слабо функции за интеграл и вернемся к уже рассмотренному случаю. Обратим только внимание, что малости температуры по сравнению с $p_n^2 / 2m$ для этого недостаточно. Как видно на Рис. 4.1, линейная

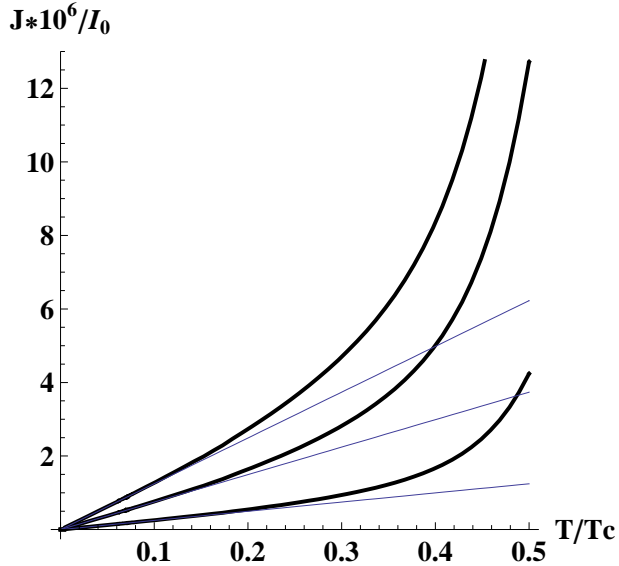


Рис. 4.1: Зависимость от температуры тока увлечения при малых температурах. Здесь мы приняли $p_n d / \hbar = 2$. $I_0 = -e^5 mL / (8\pi^2 \varkappa^2 \hbar^3 d)$

зависимость от температуры реализуется при достаточно малых T/T_c , где $T_c = \hbar^2 / (2md^2)$.

Мы привели на рисунке также зависимость

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 L}{\pi^2 \varkappa^2 \hbar^4 v_F^3} eVT K_0^2(2k_F d) \quad (4.29)$$

для сравнения. Зависимости соответствуют приложенным напряжениям $eV/T_c = 0.04, 0.12, 0.2$.

Рассмотрим теперь случай относительно высоких температур, так что масштаб $\sqrt{2T/T_c}$ больше единицы. Так как функция K_0 при отходе от нуля быстро спадает с масштабом ~ 1 , то в этом случае мы можем вынести за интеграл Q , положив там $p, p' = 0$. Учтя также, что

$$\int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' \frac{K_0^2(p+p')}{p+p'} = \frac{\pi^2}{4},$$

мы получим

$$J_{\text{drag}} = -\frac{e^5 m L}{16 \varkappa^2 \hbar^3 d T} \frac{eV}{\text{ch}^4(p_n^2/4mT)}. \quad (4.30)$$

На Рис. 4.2 мы приводим кривые при тех же приложенных напряжениях, что и выше,

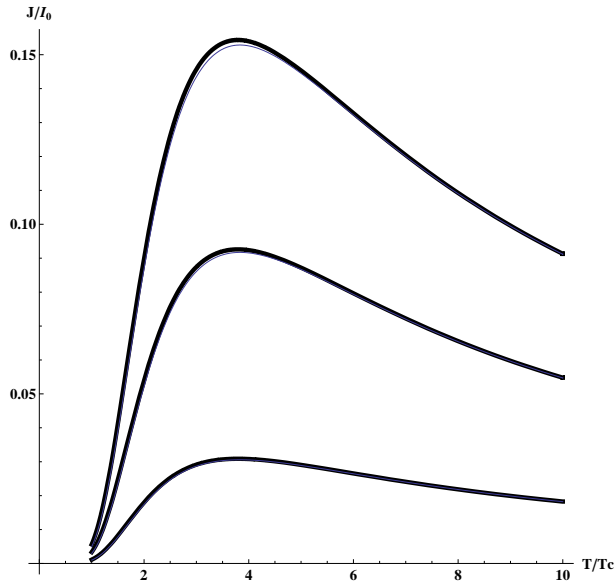


Рис. 4.2: Зависимость от температуры тока увлечения при высоких температурах. Здесь $p_n d/\hbar = 2$. $I_0 = -e^5 m L / (8\pi^2 \varkappa^2 \hbar^3 d)$

полученные интегрированием точного выражения, и вычисленные по формуле (4.30) (тонкие кривые, на рисунке они почти слились с жирными линиями). Все кривые вычислены для $T/T_c > 1$.

Обычно температурная зависимость тока увлечения рассматривается как проявление эффектов жидкости Томонага-Латтинжера. При этом предполагается, что зависимость такого типа не может появиться в рамках Ферми жидкостного подхода. Мы полагаем, что все же это не является решающим аргументом в пользу эффектов жидкости Томонага-Латтинжера, так как и в теории, основанной на Ферми жидкостном подходе, в некоторых случаях может проявиться необычная температурная зависимость типа рассмотренного нами. Мы еще вернемся к обсуждению этого вопроса при рассмотрении экспериментальных данных.

4.4 Нелинейный случай

Теперь рассмотрим низкие температуры $T \ll eV$. Из (4.16) мы получим, что это выражение обращается в нуль, пока не выполняется $|\varepsilon_{nl}| < eV/2$. Кроме того, следующие ограничения накладываются на p и p'

$$p_l^- < p < p_n, \quad p_n < p' < p_l^+, \quad (4.31)$$

где

$$p_l^\pm = \sqrt{2m(\mu \pm eV/2 - \varepsilon_l^{(2)}(0))}. \quad (4.32)$$

Например, в случае $eV > 0$ у нас останется только "уходный" член (первый член в (4.16)), в то время как "приходные" переходы отсутствуют.

Таким образом, для тока увлечения мы получим

$$J_{\text{drag}} = -e \frac{2\pi}{\hbar} m \frac{L}{2\pi\hbar} \left(\frac{2L}{2\pi\hbar} \right)^2 \left(\frac{2e^2}{\varkappa L} \right)^2 \sum_{nl} \int_{p_l^-}^{p_n} dp \int_{p_n}^{p_l^+} dp' \frac{g_{nl}(p+p')}{p+p'}. \quad (4.33)$$

Предполагая $eV/2 + \varepsilon_{nl} \ll p_n^2/2m$, мы получаем

$$\int_{p_l^-}^{p_n} dp \int_{p_n}^{p_l^+} dp' \frac{g_{nl}(p+p')}{p+p'} = \frac{g_{nl}(2p_n)}{2p_n} \frac{1}{v_n^2} \left[\left(\frac{eV}{2} \right)^2 - \varepsilon_{nl}^2 \right] \quad (4.34)$$

и окончательно

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 m^3 L}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \left[\left(\frac{eV}{2} \right)^2 - \varepsilon_{nl}^2 \right], \quad (4.35)$$

т.е. при больших приложенных напряжениях (мы считаем, что $eV > 0$, при $eV < 0$ надо изменить знак тока) ток увлечения растет как квадратичная функция.

Мы можем привести также и промежуточную формулу

$$J_{\text{drag}} = -\frac{4e^5 m^3 L T^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \text{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \sum_{nl} \frac{g_{nl}(2p_n)}{p_n^3} \frac{\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nl}}{2T}}{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{\varepsilon_{nl}}{2T}\right)} \cdot \frac{\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nl}}{2T}}{\text{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{\varepsilon_{nl}}{2T}\right)}, \quad (4.36)$$

которая справедлива при условии $p_n^2/2m \gg T \sim eV, \varepsilon_{nl}$. Эта зависимость приведена на Рис. 4.3.

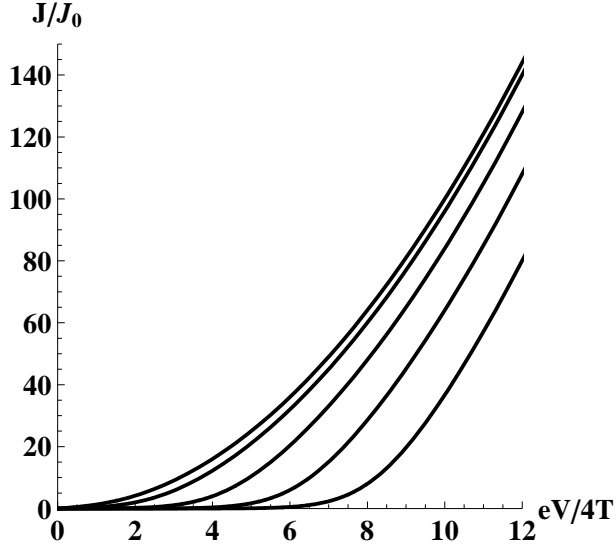


Рис. 4.3: Зависимость тока увлечения от $eV/4T$ для разных случаев выстраивания зон $\varepsilon_{nl}/2T = 0, 2, 4, 6, 8$. Здесь $J_0 = -8e^5 m^3 L T^2 g_{nl}(2p_n)/(\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4 p_n^3)$

Теперь исследуем снова зависимость тока увлечения при малых температурах, когда один из уровней энергии $\varepsilon_l^{(2)}$ достигает уровня химпотенциала. Введем новые переменные интегрирования

$$P = \frac{p + p'}{2}, \quad k = p' - p \quad (4.37)$$

Тогда, если $p_n > (p_l^+ + p_l^-)/2$, мы получим следующее выражение для интеграла в (4.33)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \int_{(p_n + p_l^-)/2}^{(p_l^+ + p_l^-)/2} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2p_n - 2P}^{2P - 2p_l^-} dp_1 + \int_{(p_l^+ + p_l^-)/2}^{p_n} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2p_n - 2P}^{2p_l^+ - 2P} dp_1 + \\ & + \int_{p_n}^{(p_n + p_l^+)/2} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2P - 2p_n}^{2p_l^+ - 2P} dp_1 \end{aligned} \quad (4.38)$$

и

$$\mathcal{B} = \int_{(p_n + p_l^-)/2}^{p_n} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2p_n - 2P}^{2P - 2p_l^-} dp_1 + \int_{p_n}^{(p_l^+ + p_l^-)/2} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2P - 2p_n}^{2P - 2p_l^-} dp_1 +$$

$$+ \int_{(p_l^- + p_l^+)/2}^{(p_n + p_l^+)/2} \frac{g_{nl}(2P)}{2P} dP \int_{2P-2p_n}^{2p_l^+ - 2P} dp_1 \quad (4.39)$$

если $p_n < (p_l^+ + p_l^-)/2$. Упрощение приведет к

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \int_0^{p_l^+ - p_n} \xi \frac{g_{nl}(\xi + p_n + p_l^-)}{\xi + p_n + p_l^-} d\xi + \int_0^{p_l^+ - p_n} \xi \frac{g_{nl}(-\xi + p_n + p_l^+)}{-\xi + p_n + p_l^+} d\xi + \\ & + (p_l^+ - p_n) \int_0^{2p_n - p_l^- - p_l^+} \frac{g_{nl}(\xi + p_l^+ + p_l^-)}{\xi + p_l^+ + p_l^-} d\xi, \end{aligned} \quad (4.40)$$

если $p_n > (p_l^+ + p_l^-)/2$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \int_0^{p_n - p_l^-} \xi \frac{g_{nl}(\xi + p_n + p_l^-)}{\xi + p_n + p_l^-} d\xi + \int_0^{p_n - p_l^-} \xi \frac{g_{nl}(-\xi + p_n + p_l^+)}{-\xi + p_n + p_l^+} d\xi + \\ & + (p_l^- - p_n) \int_0^{2p_n - p_l^- - p_l^+} \frac{g_{nl}(\xi + p_l^+ + p_l^-)}{\xi + p_l^+ + p_l^-} d\xi, \end{aligned} \quad (4.41)$$

если $p_n < (p_l^+ + p_l^-)/2$.

Посмотрим предельный случай $p_l^- = 0$, т.е. $\mu = \varepsilon_l^{(2)} + eV/2$. Тогда для $eV/4 > \varepsilon_{nl}$ мы получим

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = & \int_0^{p_V - p_n} \xi \frac{g_{nl}(\xi + p_n)}{\xi + p_n} d\xi + \int_0^{p_V - p_n} \xi \frac{g_{nl}(-\xi + p_n + p_V)}{-\xi + p_n + p_V} d\xi + \\ & + (p_V - p_n) \int_0^{2p_n - p_V} \frac{g_{nl}(\xi + p_V)}{\xi + p_V} d\xi, \end{aligned} \quad (4.42)$$

в то время как для $eV/4 < \varepsilon_{nl}$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{B} = & \int_0^{p_n} \xi \frac{g_{nl}(\xi + p_n)}{\xi + p_n} d\xi + \int_0^{p_n} \xi \frac{g_{nl}(-\xi + p_n + p_V)}{-\xi + p_n + p_V} d\xi - \\ & - p_n \int_0^{2p_n - p_V} \frac{g_{nl}(\xi + p_V)}{\xi + p_V} d\xi, \end{aligned} \quad (4.43)$$

где $p_V = \sqrt{2meV}$ и $p_n = \sqrt{p_V^2/2 - 2m\varepsilon_{nl}}$. Таким образом, когда дно $\varepsilon_{lp}^{(2)}$ подзоны касается химпотенциала $\mu - eV/2$, ток увлечения $\propto p_V \ln^2(p_V d/\hbar)$ при малых $p_V d/\hbar$ и $\propto \exp[-2p_n d/\hbar]/(p_V d)^2$ ($p_n = \sqrt{p_V^2/2 - 2m\varepsilon_{nl}}$) при больших $p_V d/\hbar$, т.е. спадает с увеличением приложенного напряжения из-за увеличения передаваемых импульсов и экспоненциального уменьшения эффективного взаимодействия $g(p_V)$.

4.4.1 Идентичные проводники.

В этом случае возможны также дополнительные соотношения $l' = n$ и $n' = l$, в соответствии с ними законы сохранения выглядят так (мы все еще предполагаем $\delta\varepsilon = 0$)

$$\varepsilon_{np}^{(1)} + \varepsilon_{lp'}^{(2)} = \varepsilon_{lp+q}^{(1)} + \varepsilon_{np'-q}^{(2)}, \quad (4.44)$$

т.е. частицы обмениваются не только квазиимпульсами, так как $q = p' - p$, но и числами квантования. Таким образом возникает дополнительный вклад в ток увлечения. Предполагая снова, что энергия Ферми $p_n^2/2m$ много больше, чем T, eV , мы получим для этого вклада

$$J_{\text{drag}} = -\frac{8e^5 m^3 L T^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \left(\frac{eV}{4T}\right)^2 \text{cth}\left(\frac{eV}{4T}\right) \sum_{nl, n \neq l} \frac{K_{nl}(p_n, -p_n, 2p_n)}{p_n^3}, \quad (4.45)$$

где

$$K_{nl}(p, p', q) = \left[\int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp \phi_{lp'}^*(\mathbf{r}_\perp) \phi_{np}^*(\mathbf{r}'_\perp) K_0\left(\frac{|q|}{\hbar} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|\right) \phi_{np}(\mathbf{r}_\perp) \phi_{lp'}(\mathbf{r}'_\perp) \right]^2. \quad (4.46)$$

Отметим, что во избежание двойного учета случая, когда все числа поперечного квантования одинаковы в формуле (4.45), мы исключили из суммы члены с $n = l$ (они уже учтены в формуле (4.36)).

4.4.2 Общий случай

Теперь исследуем общий случай, когда $\delta\varepsilon \neq 0$. Приведем результат для случая $p_n^2/2m \gg T, eV, \delta\varepsilon$

$$J_{\text{drag}} = -4 \frac{e^5 m^3 T^2 L}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \text{sh} \frac{eV}{2T} \sum_{nn'l'l'} \frac{G_{nn'l'l'}(p_n, -p_n, 2p_n)}{p_n^3} \times \\ \times \frac{eV - \varepsilon_{l'n} - \varepsilon_{ln'}}{4T} \cdot \frac{eV + \varepsilon_{l'n} + \varepsilon_{ln'}}{4T} \cdot \frac{4T}{\text{sh}\left(\frac{eV - \varepsilon_{l'n} - \varepsilon_{ln'}}{4T}\right)} \cdot \frac{4T}{\text{sh}\left(\frac{eV + \varepsilon_{l'n} + \varepsilon_{ln'}}{4T}\right)}, \quad (4.47)$$

где

$$G_{nn'l'l'}(p, p', q) = \left[\int d\mathbf{r}_\perp \int d\mathbf{r}'_\perp \phi_{n'p+q}^{(1)*}(\mathbf{r}_\perp) \phi_{l'p'-q}^{(2)*}(\mathbf{r}'_\perp) K_0\left(\frac{|q|}{\hbar} |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|\right) \phi_{np}^{(1)}(\mathbf{r}_\perp) \phi_{l'p'}^{(2)}(\mathbf{r}'_\perp) \right]^2. \quad (4.48)$$

Здесь мы ввели обозначение $\varepsilon_{ln} = \varepsilon_l^{(2)}(0) - \varepsilon_n^{(1)}(0)$.

Интересно еще одно представление тока кулоновского увлечения, а именно, можно представить ток увлечения как сумму (интеграл) по переданным импульсам q при электрон-электронных столкновениях. Если предположить, что $G_{nn'l'l'}(p, p', q)$ зависит только от переданного импульса q , мы получим прозрачный с физической точки зрения результат

$$J_{\text{drag}} = -\frac{e}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \text{sh} \frac{eV}{2T} \sum_{nn'l'l', q > 0} G_{nn'l'l'}(q) \int d\omega \frac{C(n, n', l, l', \omega, q, V)}{\text{sh} \omega / 2T \text{sh} (\omega - eV) / 2T} + \\ + \frac{e}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \text{sh} \frac{eV}{2T} \sum_{nn'l'l', q < 0} (\text{то же с заменой } V \rightarrow -V), \quad (4.49)$$

где $C(n, n', l, l', \omega, q, V)$ есть произведение мнимых частей восприимчивостей для первой и второй проволоки

$$C(n, n', l, l', \omega, q, V) = \chi_1(\varepsilon_n(0), \varepsilon_{n'}(0), \omega, q) \chi_2(\varepsilon_{l'}(0) + eV/2, \varepsilon_l(0) - eV/2, \omega - eV, q).$$

В последней формуле

$$\chi_i(\varepsilon_\alpha(0), \varepsilon_\beta(0), \omega, q) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{p>0} \frac{f(\varepsilon_{\alpha p}^{(i)}) - f(\varepsilon_{\beta p+q}^{(i)})}{\omega + \varepsilon_{\alpha p}^{(i)} - \varepsilon_{\beta p+q}^{(i)} - i0} \quad (4.50)$$

мнимая часть восприимчивости Линдхарда для i -й проволоки (обратим только внимание, что суммирование идет по положительным значениям импульсов). Это представление указывает, что кулоновский ток увлечения есть свертка спонтанных поляризаций в каждой проволоке.

4.5 Оценки

Вернемся к формуле (4.36). Члены в сумме (4.36), содержащие разности $|\varepsilon^{(1)}(0) - \varepsilon^{(2)}(0)|$ много большие, чем и $k_B T$, и eV , дают пренебрежимый вклад в ток J . Поэтому мы сохраним в сумме только члены, в которых $|\varepsilon^{(1)}(0) - \varepsilon^{(2)}(0)|$ меньше или порядка $k_B T$ или eV . Для простоты мы предположим, что есть только один член в сумме с такой разностью (если это не так, мы бы имели сумму нескольких членов, имеющих одинаковую структуру).

$$J = J_0 \cdot \frac{1}{2} \text{sh} \left(\frac{eV}{2k_B T} \right) \frac{\frac{eV}{4k_B T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2k_B T}}{\text{sh} \left(\frac{eV}{4k_B T} - \frac{\varepsilon_{nn'}}{2k_B T} \right)} \cdot \frac{\frac{eV}{4k_B T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2k_B T}}{\text{sh} \left(\frac{eV}{4k_B T} + \frac{\varepsilon_{nn'}}{2k_B T} \right)}, \quad (4.51)$$

где

$$J_0 = -\frac{8e^5 m^3 L (k_B T)^2}{\varkappa^2 \pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{g_{nn'}(2p_n)}{p_n^3}. \quad (4.52)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\varepsilon_{nn'} = \varepsilon_n^{(1)}(0) - \varepsilon_{n'}^{(2)}(0), \quad mv_n = p_n = \sqrt{2m[\mu - \varepsilon_n^{(1)}(0)]}.$$

Дадим оценку по порядку величины для тока увлечения J для реалистичных случаев. Положим $T = 1$ К, $\mu - \varepsilon_n(0) = 5$ К, толщины проволок 25 нм, расстояние между центрами

провода 50 нм, $\alpha=13$, $m = 6.7 \cdot 10^{-29}$ г, при этом $p_n d / \hbar = 1.5$. Тогда

$$J_0 \approx 10^{-10} \text{ А.} \quad (4.53)$$

Рассмотрим случай $eV \gg k_B T$. В этом случае ненулевой для (4.51) результат получится только при неравенстве $|\varepsilon_{nn'}| < eV/2$. Для тока увлечения имеем

$$J = \mathcal{B} \left[\left(\frac{eV}{2} \right)^2 - (\varepsilon_{nn'})^2 \right], \quad \mathcal{B} = - \frac{2e^5 m^3 L}{\alpha^2 \pi^2 \hbar^4} \cdot \frac{g_{nn'}(2p_n)}{p_n^3}. \quad (4.54)$$

Ситуация проиллюстрирована на Рис. 4.4. Прямые линии показывают положения химиче-

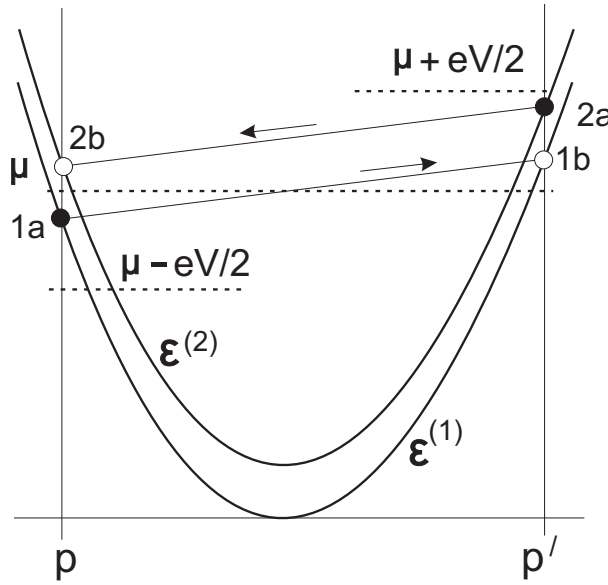


Рис. 4.4: Одновременные переходы за счет межэлектронного взаимодействия в двух проволочках для случая $eV \gg k_B T$. Кружки \circ и \bullet означают изначально незаполненные и заполненные состояния соответственно.

ских потенциалов $\mu^{(r)}$ и $\mu^{(l)}$, штриховая линия соответствует средней величине μ . Законы дисперсии электронов в проволочках 1 и 2 представлены параболой (1) и (2) соответственно. Заполненные кружки указывают начальные состояния сталкивающихся электронов.

До столкновения состояния 1a и 2a заполнены. Кружок, соответствующий 1a, находится ниже уровня Ферми μ . Кружок, соответствующий состоянию 2a, представляет собой состояние с $p > 0$ и также заполнен, так как расположен ниже соответствующего химического потенциала $\mu^{(r)}$.

После столкновения состояние 1b заполнено. Оно представлено кружком выше штриховой линии, что говорит о том, что оно было свободно до столкновения. В проволочке 2

состояние $2b$ с $p < 0$ также занято. Оно находится выше $\mu^{(l)}$, т.е. оно было свободно до перехода.

Ширина полоски между двумя прямыми линиями равна eV . Ток увлечения должен быть пропорционален числу начальных заполненных состояний и числу конечных свободных. Как результат, мы и имеем для случая $eV \gg |\varepsilon_{nn'}|$, $J \propto V^2$ — см. Рис. 4.3.

Ток увлечения J как функция напряжения на затворе состоит из резких пиков. Положение этих пиков определяется совпадением пары уровней поперечного квантования $\varepsilon_n(0)$ и $\varepsilon_{n'}(0)$ в двух проволоках. Для $eV \gg k_B T$, J оказывается параболической функцией тянущего напряжения вдоль активной проволоки. Этот эффект может играть важную роль как при исследовании кулоновского межпроволочного взаимодействия, так и при исследовании зонной структуры проволок.

4.6 Сравнение с экспериментом

Первые экспериментальные работы по увлечению были посвящены увлечению между двумя тонкими пленками кремния [123] и увлечению между двумерной и трехмерной электронной системами [124]. Экспериментальное изучение увлечения между двумя двумерными электронными слоями было проведено в [125] и между двумерными слоями электронов и дырок в [126].

Что касается увлечения в одномерных структурах, то таких работ мало [127, 68, 69]. Так как результаты этих работ мало отличаются, мы будем пользоваться при обсуждении эксперимента данными работ [68] и [69] (см. также обзор [128]). Образцы были изготовлены на гетероструктуре на основе AlGaAs/GaAs, двумерный газ на границе имел высокую подвижность $10^6 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$. Использовалась планарная геометрия, квантовые проволоки выделялись истощением двумерного газа тремя поверхностными затворами Шоттки. На схематическом рисунке 1 они обозначены U, M, L . Расстояние между проволоками можно было менять приложением соответствующего потенциала к среднему M затвору Шоттки. Литографическая длина проволоки при этом была $L = 2 \mu\text{м}$, ширина среднего затвора 50 нм . Измерялось напряжение увлечения V_D как функция ширины токопроводящей квантовой проволоки, изменяя ее ширину подачей напряжения V_U . Ширина пассивной про-

локи регулировалась таким образом, чтобы уровень Ферми в проволоке лежал чуть выше наинизшей подзоны. Отрицательным смещением среднего затвора добивались отсутствия туннелирования между проволоками. На Рис. 4.5 показана зависимость напряжения увлечения от ширины активной проволоки. Напряжение увлечения имеет пики в местах роста

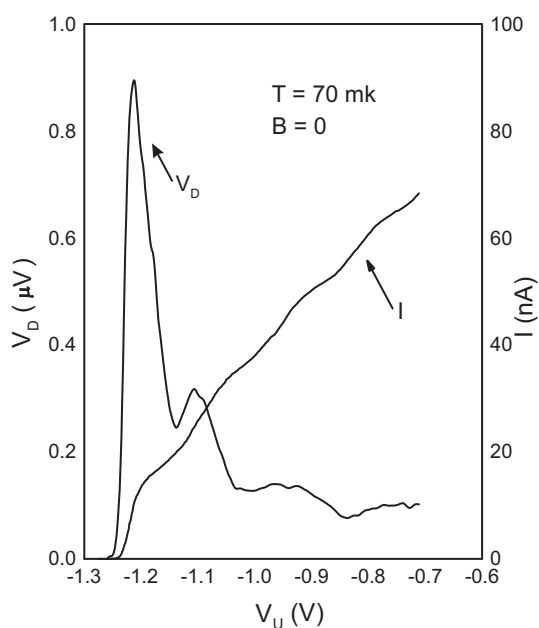


Рис. 4.5: Зависимость напряжения увлечения от ширины активной проволоки. Для сравнения приведена также зависимость тока активной проволоки.

между плато кондуктанса активной проволоки. Это подтверждает выводы теории, что максимум получается тогда, когда уровни в двух проволоках выстроены и мал импульс Ферми. Хорошо выражены первые два пика, первый из них соответствует совпадению наинизших подзон в двух проволоках, второй соответствует случаю, когда совпадает наинизшая в пассивной и первая в активной проволоке. Напряжение, приложенное к активной проволоке, было равно $V_{DS} = 300 \mu\text{В}$. В эксперименте менялось V_M , определялось максимальное значение напряжения увлечения, затем вычислялось сопротивление увлечения R_D . На Рис. 4.6 приведена зависимость сопротивления увлечения от температуры, температура менялась от 60 мК до 1 К. Зависимость укладывается на $R_D \sim T^{-0.77}$. Экспериментально установленный импульс Ферми оказывается порядка $k_F \sim 10^5 \text{ см}^{-1}$. Интересно, что при этом на квантовую проволоку приходятся порядка десятка электронов с рассто-

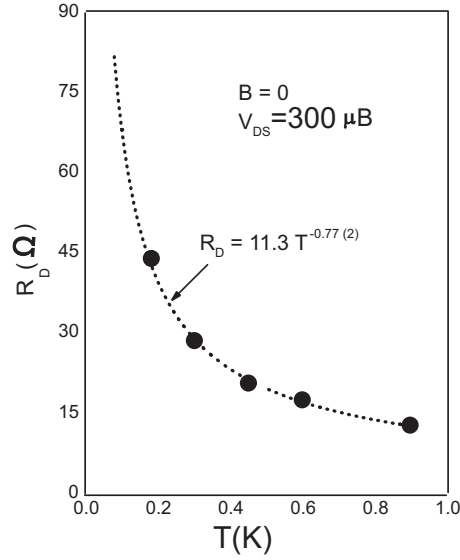


Рис. 4.6: Зависимость сопротивления увлечения от температуры.

нием между ними около 200 нм. Расстояние между проволоками оказывается порядка $0.2 \mu\text{м}$, т.е. произведение $k_F d \sim 2$. Авторы этих работ придают весьма большое значение зависимости сопротивления увлечения от температуры, утверждая, что такая зависимость получается только тогда, когда ситуация описывается теорией Латтинжеровской жидкости. Такое же мнение высказывается и в работе [129], где утверждается, что для связанных Ферми жидкостей сопротивление увлечения всегда увеличивается с увеличением температуры. Однако мы сейчас покажем, что ситуация не столь однозначна, как хотелось бы авторам [69, 68]. Оставаясь в рамках Ферми жидкостного подхода, нарисуем зависимость тока увлечения от температуры. Эта зависимость показана на Рис. 4.7, где $T_c = \hbar^2 / (2md^2)$. Для сравнения там же тонкими линиями приведена зависимость $\sim T^{-0.77(2)}$. Видно, что наши кривые также соответствуют этой зависимости, которую авторы считают проявлением структурой свойств Латтинжеровской жидкости. Аргументация авторов [69, 68], что величина (напряжения) тока в Ферми жидкостном подходе меньше на порядок, чем в эксперименте, также не годится, так как, как видно из этого же рисунка, имеет место как

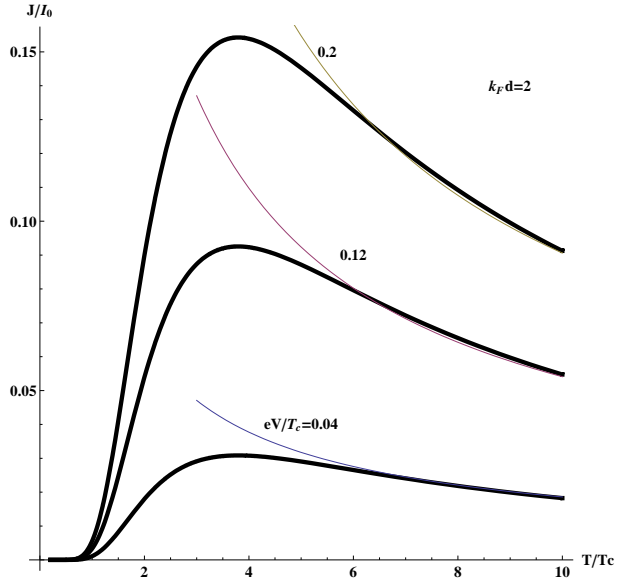


Рис. 4.7: Зависимость тока увлечения от температуры в линейном режиме. Тонким линиям соответствует закон $T^{-0.77}$.

раз обратный случай, при $I_0 = -e^5 m L / (8\pi^2 \varkappa^2 \hbar^3 d)$ получающаяся оценка для сопротивления слишком велика. Экспериментальные величины сопротивлений увлечения оказались порядка или меньше сотен Ом. Такие величины сопротивлений мы можем объяснить слабостью межпроводочного электрон-электронного взаимодействия (экранированием кулоновского взаимодействия затворами, не учтенного нами). Учет такого экранирования (см. конец Приложения С) приводит к следующему выражению для тока увлечения вместо (4.18)

$$J_{\text{drag}} = -\frac{2e^5 m L}{\pi^2 \hbar^4 \varkappa^2} \left(\frac{z_0}{d}\right)^4 \left(\frac{d}{\hbar}\right)^2 \text{sh} \frac{eV}{2T} \sum_{nl} \int_0^\infty dp \int_0^\infty dp' (p+p') K_1^2(d(p+p')/\hbar) \mathcal{Q}, \quad (4.55)$$

где теперь

$$\frac{1}{\mathcal{Q}} = \text{ch} \frac{p^2 - p_n^2}{4mT} \text{ch} \frac{p'^2 - p_n^2}{4mT} \times \\ \times \text{ch} \frac{p^2 - p_n^2 + meV - 2m\varepsilon_{nl}}{4mT} \text{ch} \frac{p'^2 - p_n^2 - meV - 2m\varepsilon_{nl}}{4mT}.$$

Считая, что наши проволоки удалены от затворов на расстояние z_0 много меньшее, чем расстояние d между ними, мы воспользовались тем, что

$$K_0\left(d\frac{p+p'}{\hbar}\right) - K_0\left(\sqrt{1+(2z_0/d)^2}d\frac{p+p'}{\hbar}\right) \simeq 2\left(\frac{z_0}{d}\right)^2 d\frac{p+p'}{\hbar} K_1\left(d\frac{p+p'}{\hbar}\right). \quad (4.56)$$

Масштабом изменения функции Q по p и p' является тепловой импульс $\sqrt{4mT}$, функция же $(p + p')K_1^2(d(p + p')/\hbar)$ резко падает на масштабе \hbar/d как функция импульсов. В случае $\hbar/d \ll \sqrt{4mT}$ мы можем вынести все медленно изменяющиеся функции за интеграл, удерживая под интегралом только $(p + p')K_1^2(d(p + p')/\hbar)$. Тогда мы получим (считая $p_n \geq \hbar/d$) в случае точного выстраивания подзон в двух проволоках $\varepsilon_{nl} = \varepsilon_n - \varepsilon_l = 0$ (мы сохранили в сумме вклад только этих подзон)

$$J_{\text{drag}} = -\frac{3e^5 mL}{16\hbar^3 d \alpha^2} \left(\frac{z_0}{d}\right)^4 \frac{\text{sh}[eV/2T]}{\text{ch}^2[p_n^2/4mT] \text{ch}[(p_n^2 - meV)/4mT] \text{ch}[(p_n^2 + meV)/4mT]}. \quad (4.57)$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy (x + y) K_1^2(x + y) = \frac{3\pi^2}{32}. \quad (4.58)$$

В рассматриваемой области температур как зависимость от температуры, так и зависимость от приложенного напряжения определяется формулой (4.57). Температурная зависимость очень похожа на зависимость $T^{-0.77}$, что касается зависимости от напряжения, то при малых напряжениях зависимость линейна, а при больших напряжениях она насыщается на уровне

$$J_{\text{drag}} = -\frac{3e^5 mL}{8\hbar^3 d \alpha^2} \left(\frac{z_0}{d}\right)^4 \frac{1}{\text{ch}^2[p_n^2/4mT]}. \quad (4.59)$$

4.7 Заключение

Таким образом, наблюдаемая на эксперименте температурная зависимость довольно просто объясняется и в рамках теории Ферми газа. Отметим, что такая же температурная зависимость получится и без учета экранирования. Малый множитель $(z_0/d)^4$, возникший в результате экранирования, объясняет и величину эффекта (заметим, что без учета экранирования наша теория давала бы для тока увлечения слишком большую величину). Для тока увлечения мы получаем оценку

$$-\frac{3e^5 mL}{16\hbar^3 d \alpha^2} \left(\frac{z_0}{d}\right)^4 \sim 2.2 \cdot 10^{-5} \left(\frac{z_0}{d}\right)^4 \text{ A},$$

т.е. ток порядка 10^{-9} А, если считать, что $z_0/d = 0.1$. Такие токи увлечения соответствуют сопротивлению увлечения порядка сотен Ом. Температурная зависимость тока увлечения (в режиме линейного слева и при относительно больших приложенных напряжениях

справа) показана на Рис. 4.8, где $T_n = p_n^2/2m$. Для сравнения там же тонкими линиями приведена зависимость $\sim T^{-0.77(2)}$. Видно, что наши кривые также соответствуют этой за-

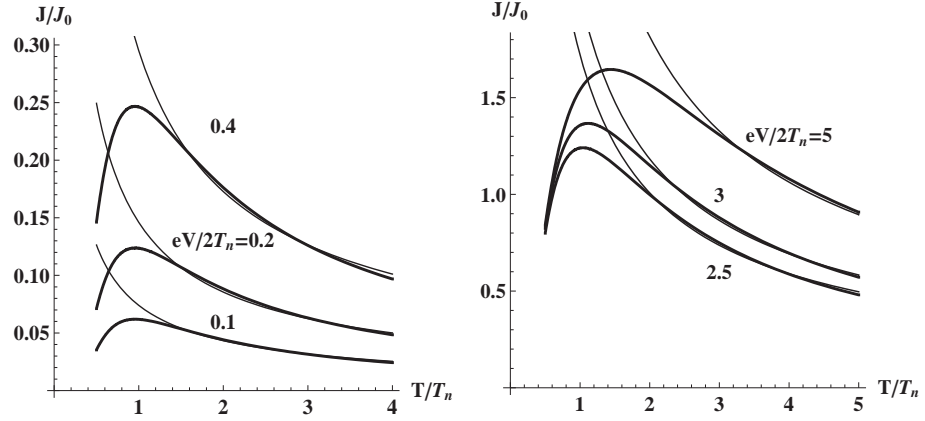


Рис. 4.8: Зависимость тока увлечения от температуры. Тонким линиям соответствует закон $T^{-0.77}$. На этом графике $J_0 = -3e^5 m L z_0^4 / 16 \hbar^3 d \alpha^2 d^4$.

висимости, которую авторы считают проявлением структурой свойств Латтинжеровской жидкости.

Очень важным, по нашему мнению, является изучение физических обстоятельств (включая учет резервуаров), которые приводили бы к переходу от Ферми жидкости к жидкости Томонага-Латтинжера. Эта задача очень сложна, так как, например, должна исследовать влияние числа подзон в квантовой яме, близости резервуаров, электрон-фононного взаимодействия, и, конечно, роль температуры.

Мы укажем следующие следствия из нашей теории. Во-первых, влияние одной проволоки на другую важно для понимания свойств приборов малых масштабов. В соответствии с нашей теорией для минимизации такого влияния надо избегать выстраивания двух уровней (подзон) в двух проволоках. Во-вторых, можно исследовать зонную структуру, используя чрезвычайную чувствительность к такому выстраиванию зон. И последнее, эффект может играть важную роль в прямом исследовании кулоновского рассеяния.

Глава 5

Фононное увлечение в баллистических нанопроволоках

5.1 Введение

В этой главе мы вычислим фононный вклад в ток увлечения в режиме баллистического переноса в двух параллельно расположенных квантовых нанопроволоках. В нелинейном режиме, когда приложенное вдоль активной проволоки напряжение V гораздо больше температуры T , предсказан порог для возникновения фононного вклада в ток увлечения как функции напряжения V или напряжения на затворе. Показано, что фононный вклад от любых двух выстроившихся по энергии поперечных подзон в активной и пассивной проволоках насыщается при больших приложенных к активной проволоке напряжениях.

Эффект фононного увлечения легко описать при рассматриваемой ситуации следующим образом: электроны, вступающие в активную проволоку из двух резервуаров (резервуары считаются находящимися в независимом равновесии), характеризуются различными химическими потенциалами, ситуация в проволоке сильно неравновесна и фононы генерируются (испускаются электронами) в активной проволоке. Эти фононы в свою очередь поглощаются электронами в пассивной проволоке, вызывая соответствующий вклад (кроме кулоновского) в ток увлечения. Очевидно, что для этого необходимо, чтобы излучаемые фононы характеризовались выделенным направлением.

Существующие работы по экспериментальному (см., например, [70]) и теоретическому (см. [71, 72]) изучению фононного вклада в ток увлечения были посвящены случаю увлечения между двумя пространственно разделенными слоями двумерных электронных

газов. Что касается фононного увлечения в баллистических квантовых проволоках, эффект был изучен теоретически [73] только в линейном режиме $eV \ll T$, где V это приложенное вдоль активной проволоки напряжение. В отличие от этой работы, мы исследуем нелинейный случай $eV \gg T$. Основные наши вычисления мы проведем в рамках физически прозрачной кинетической теории. Полное квантовомеханическое рассмотрение, основанное на диаграммном методе Келдыша [45, 90], приводит к идентичным результатам, такое рассмотрение (включающее и режим линейного отклика) будет дано нами в конце этой главы.

Электроны в близлежащей пассивной проволоке, изначально находившиеся в равновесии, поглощают фононы, испускаемые электронами в активной проволоке. Также, как и в случае кулоновского увлечения, здесь мы встречаемся с ситуацией, когда при рассеянии назад электронов в l -й подзоне активной проволоки фононы с квазиимпульсом $\hbar q_z/2$, равным импульсу Ферми $p_n = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_l^{(2)})}$ ($\varepsilon_l^{(2,1)}$ дно l -й поперечной зоны в активной проволоке (2) и пассивной (1) проволоки) зоны, генерируются и в свою очередь поглощаются пассивной проволокой. В дальнейшем мы опустим излишние индексы (1, 2). Вклад в ток от двух зон, имеющих законы дисперсии $\varepsilon_{lp} = \varepsilon_l + p^2/2m$ в активной проволоке и $\varepsilon_{np} = \varepsilon_n + p^2/2m$ в пассивной, обращается в нуль, если не выполняется условие

$$eV/2 > |\varepsilon_l - \varepsilon_n|$$

снова в аналогии со случаем кулоновского увлечения [67]. Но в случае фононного увлечения мы встречаем еще и такое условие

$$eV/2 > sp_n,$$

где s скорость звука. В самом деле, закон сохранения энергии-импульса приводит к

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \varepsilon_{p+\hbar q_z} - \varepsilon_p,$$

что, используя $q \cos \theta_q = q_z$ можно переписать как

$$|\cos \theta_q| = \frac{2ms}{|p + \hbar q_z| - p} < 1.$$

Учитывая, что как $|p + \hbar q_z|$, так и p должны находиться в окрестности импульса Ферми $p_n \pm eV/2v_n$ ($mv_n = p_n$) мы получим пороговое условие, что $eV/2$ должно быть больше и

параметра Блоха-Грюнайзена sp_n и сдвига (расстройки) уровней поперечного квантования $|\varepsilon_n - \varepsilon_l|$.

В разделе 5.2 мы вычислим пространственное распределение фононов, генерируемых длинной однородной активной проволокой. Ток, индуцируемый этими фононами в пассивной проволоке, будет рассмотрен в разделе 5.3. В конце главы мы дадим краткий обзор, как наши результаты, полученные с использованием кинетического уравнения, могут быть оправданы более сложным диаграммным методом.

5.2 Распределение фононов

Предположим, что продольные размеры проволоки L много больше поперечных размеров. Пространственное распределение $N_{\mathbf{q}}(\mathbf{r})$ испущенных активной баллистической проволокой неравновесных фононов с волновым вектором \mathbf{q} даются стационарным кинетическим уравнением

$$\mathbf{s} \cdot \nabla N_{\mathbf{q}} = \mathcal{R}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{s} = \partial\omega_{\mathbf{q}}/\partial\mathbf{q}$ групповая скорость фононов, $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ энергия фононов, \mathcal{R} оператор столкновений фононов с электронами. Последний можно записать так

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{l'l'} \int \frac{2Ldk}{2\pi\hbar} W_{\mathbf{q}} |C_{ll'}(\mathbf{q}_{\perp})|^2 \delta(\varepsilon_{l,k+\hbar q_z} - \varepsilon_{l',k} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \times \\ & \times [f_{l,k+\hbar q_z}(1 - f_{l',k})(N_{\mathbf{q}} + 1) - f_{l',k}(1 - f_{l,k+\hbar q_z})N_{\mathbf{q}}], \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $C_{ll'}(\mathbf{q}) = \langle l | e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} | l' \rangle$ матричный элемент переходов, индуцированных фононами, \mathcal{V} объем квантовой проволоки, $W_{\mathbf{q}}$ константа электрон-фононной связи, которая для случая взаимодействия, описываемого деформационным потенциалом, равна $W_{\mathbf{q}} = \pi\Lambda^2 q^2 / \rho\omega_{\mathbf{q}}$, где Λ константа деформационного потенциала, ρ плотность массы. Перепишем кинетическое уравнение в виде

$$(\mathbf{s} \cdot \nabla + \Pi_{\mathbf{q}}) N_{\mathbf{q}} = \mathcal{R}_s, \quad (5.3)$$

где

$$\Pi_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{l'l'} \int \frac{2Ldk}{2\pi\hbar} W_{\mathbf{q}} |C_{ll'}(\mathbf{q}_{\perp})|^2 [f_{l,k+\hbar q_z} - f_{l',k}] \delta(\varepsilon_{l,k+\hbar q_z} - \varepsilon_{l',k} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}) \quad (5.4)$$

поляризационный оператор, описывающий перенормировку (экранирование) электрон-фононного взаимодействия (подробно см. конец этой главы), \mathcal{R}_s источник фононов

$$\mathcal{R}_s = \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{l'l} \int \frac{2Ldk}{2\pi\hbar} W_{\mathbf{q}} |C_{l'l}(\mathbf{q}_{\perp})|^2 f_{l,k+\hbar q_z} (1 - f_{l',k}) \delta(\varepsilon_{l,k+\hbar q_z} - \varepsilon_{l',k} - \hbar\omega_{\mathbf{q}}). \quad (5.5)$$

Здесь мы ограничимся случаем низких температур $T \ll sp_l \sim eV$. Поэтому при нахождении решения (5.3) в форме $N_{\mathbf{q}} = N_{\mathbf{q}}^{eq} + \Delta N_{\mathbf{q}}$ ($N_{\mathbf{q}}^{eq}$ равновесное распределение Планка) мы опустим член $\Pi_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}}^{eq}$. Для неравновесной части $\Delta N_{\mathbf{q}}$ мы не будем учитывать перенормировку за счет электрон-фононного взаимодействия и поэтому опустим в уравнении (5.3) поляризационный оператор. Кинетическое уравнение тогда принимает простой вид

$$(\partial_x + \alpha \partial_y) \Delta N_{\mathbf{q}}(x, y) = \frac{\mathcal{R}_s}{s_x}, \quad \alpha \equiv \frac{s_y}{s_x} = \text{tg } \varphi_q. \quad (5.6)$$

Мы предположим также, что распределение испущенных фононов по продольной координате однородно, т.е. что пространственное их распределение зависит только от поперечных координат x, y .

В соответствии с [81, 117, 118] мы выразим функции распределения электронов, входящие в (5.5) как Ферми функции $f^F(\varepsilon_{lp} - \mu^{(R,L)})$ с смещенными химическими потенциалами $\mu^{(R,L)} = \mu \pm eV/2$, где μ это уровень Ферми, а V приложенный тянущий потенциал.

Что касается оператора столкновений (источника) \mathcal{R}_s , мы предположим, что он отличен от нуля только внутри квантовой проволоки. Эта величина детально исследована в [130], здесь мы для краткости обсудим только приближения, принятые при рассмотрении излучения фононов. Мы рассмотрим только внутризонные переходы электронов. Рассмотрим электрон, имеющий начальный отрицательный импульс $k + \hbar q_z$ и распространяющийся влево. Этот электрон описывается $f^F(\varepsilon_{lk+\hbar q_z} - \mu - eV/2)$. После излучения фонона конечное состояние распространяется вправо ($k > 0$) и описывается $f^F(\varepsilon_{lk} - \mu + eV/2)$. Так как начальное состояние должно быть занято, а конечное свободно, мы получим следующее произведение функций распределения в (5.5)

$$f^F(\varepsilon_{lk+\hbar q_z} - \mu - eV/2) [1 - f^F(\varepsilon_{lk} - \mu + eV/2)].$$

Так как при низких температурах функции распределения - это ступеньки единичной высоты, произведение обращается в единицу до тех пор, пока

$$\varepsilon_{lk+\hbar q_z} < \mu + eV/2, \quad \varepsilon_{lk} > \mu - eV/2.$$

Эти неравенства и закон сохранения энергии приводят к тому, что процессы генерации фононов имеют место в промежутке фоновых частот [130]

$$2ms^2 + 2sp_l^- < \hbar\omega_{\mathbf{q}} < eV.$$

Здесь p_l^- это смещенный на $eV/2$ импульс Ферми

$$p_l^- = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_l - eV/2)}.$$

При нашем подходе мы считаем, что процессы генерации фононов происходят однородно во всем объеме канала (провода). Фононы, испускаемые на концах канала (в областях сочленения провода и резервуаров) могут быть испущены только при определенных координатах, где выполняются локальные законы сохранения импульса и энергии (закон дисперсии, вообще говоря, зависит от продольной координаты как от параметра в случае адиабатического плавного канала). Можно ввести соответствующую эффективную длину \mathcal{L} для таких процессов [130]. Мы для простоты предполагаем, что относительная интенсивность этих процессов по сравнению с однородной генерацией, даваемой минимумом $[\mathcal{L}/L, 1]$, мала.

Предположим, что каналы имеют одинаковые сечения, начало координат расположим в центре сечения токопроводящей активной проволоки. Пусть пассивная проволока смещена в пространстве на D в x направлении. Таким образом, нам нужно решение (5.6) только для положительных $s_x > 0$.

Решение (5.6) зависит от геометрии сечения, мы предположим, что сечение представляет из себя круг (результат, конечно, от этого предположения существенно не зависит) радиуса R . Вне проволоки мы получим

$$N_{\mathbf{q}} = N_{\mathbf{q}}^{eq} + \frac{2\mathcal{R}_s}{s_x(1 + \alpha^2)} \sqrt{R^2(1 + \alpha^2) - (y - \alpha x)^2} \Theta[R^2(1 + \alpha^2) - (y - \alpha x)^2]. \quad (5.7)$$

Геометрическая интерпретация этого решения такова (см. Рис. 5.1). Нарисуем прямую под углом φ_s ($\text{tg } \varphi_s = \alpha$) к оси x через центр проволоки. Рассмотрим секущую, параллельную данной. Расстояние $|AC|$ от точки x, y вне проволоки и лежащей на секущей до первой линии есть $|y - \alpha x| \cos \varphi_s = |y - \alpha x|/\sqrt{1 + \alpha^2}$. Функция Θ в (5.7) показывает, что если это расстояние меньше радиуса R (т.е. вторая нарисованная линия действительно

секущая), результат пропорционален длине хорды секущей в сечении, иначе же результат обращается в нуль. Такая же интерпретация должна была бы возникнуть при наших

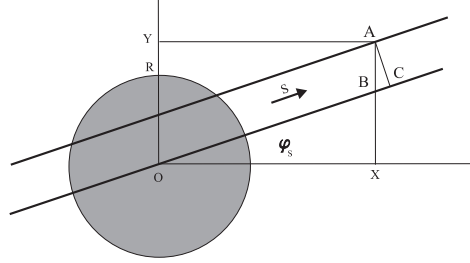


Рис. 5.1: Геометрическая интерпретация решения.

предположениях при других формах сечения проволок.

5.3 Ток при фононном увлечении

Теперь в пассивной проволоке благодаря электрон-фононному взаимодействию мы имеем $f_n = f_n^F + \Delta f_n$ с Δf_n , удовлетворяющим уравнению [66]

$$v \frac{\partial \Delta f_n}{\partial z} = I[f_n], \quad (5.8)$$

где $v = \partial \varepsilon_n / \partial p$ скорость электрона, $I[f]$ электрон-фононный интеграл столкновений. Для $p > 0$ ($p < 0$) соответственно решение уравнения есть

$$\Delta f_n(z) = (z \pm L/2) \frac{1}{v} I[f_n]. \quad (5.9)$$

Граничные условия требуют $\Delta f[p > 0$ ($p < 0$)] = 0 при $z = \mp L/2$. Ток дается тогда выражением

$$J = e \frac{1}{\mathcal{V}} \sum_{n,p} \int d\mathcal{A} v \Delta f_n = e \sum_n \int \frac{dx dy}{\mathcal{A}} \int_0^\infty \frac{2L dp}{2\pi \hbar} I[f_n]. \quad (5.10)$$

Здесь интегрирование идет по сечению \mathcal{A} пассивной проволоки. Электрон-фононный интеграл столкновений

$$\begin{aligned} I[f_n] = & \sum_{n'} \int \frac{dp'}{2\pi \hbar} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} W_{\mathbf{q}} |C_{nn'}(\mathbf{q}_\perp)|^2 \times \\ & \times \{ [f_{n'p'}(1 - f_{np})(N_{p'-p} + 1) - f_{np}(1 - f_{n'p'})N_{p'-p}] \delta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{n'p'} + \hbar\omega_{p'-p}) + \\ & + [f_{n'p'}(1 - f_{np})N_{p-p'} - f_{np}(1 - f_{n'p'})(N_{p-p'} + 1)] \delta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{n'p'} - \hbar\omega_{p-p'}) \}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

В $N_{\mathbf{q}}$ и $\omega_{\mathbf{q}}$ мы явно указываем только продольную компоненту квазимпульса фононов. Первый и второй член в (5.11) описывает рождение фонона $N_{p'-p}$ при переходе электрона $\varepsilon_{n'p'} \rightarrow \varepsilon_{np}$ и поглощение фонона $N_{p'-p}$ при электронном переходе $\varepsilon_{np} \rightarrow \varepsilon_{n'p'}$. Третий и четвертый члены описывают поглощение фонона $N_{p-p'}$ ($\varepsilon_{n'p'} \rightarrow \varepsilon_{np}$) и генерацию при ($\varepsilon_{np} \rightarrow \varepsilon_{n'p'}$) фонона $N_{p-p'}$. Далее под $N_{\mathbf{q}}$ будет подразумеваться только неравновесная часть фононного распределения в (5.7), так как равновесная часть даст только нулевой вклад. Для тока, индуцированного в пассивной проволоке фононами, мы получаем (оператор столкновений (5.11) линеаризован по фононным функциям распределения)

$$J = e \sum_{n,n'} \int \frac{dx dy}{\mathcal{A}} \int_0^\infty \frac{2L dp}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^\infty \frac{dp'}{2\pi\hbar} \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} W_{\mathbf{q}} |C_{nn'}(\mathbf{q}_\perp)|^2 [f_{n'p'} - f_{np}] \times \\ \times \{N_{p'-p} \delta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{n'p'} + \hbar\omega_{p'-p}) + N_{p-p'} \delta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{n'p'} - \hbar\omega_{p-p'})\}. \quad (5.12)$$

Здесь функции распределения $f_{(n,n')}$ равновесные функции Ферми $f^F(\varepsilon_{np} - \mu)$. Предполагая, что угловая зависимость входит только через распределение фононов, мы можем усреднить по сечению пассивной проволоки и проинтегрировать по углам φ_q

$$\int \frac{dx dy}{\pi R^2} \int \frac{q_\perp dq_\perp}{(2\pi)^2} d\varphi_q N_{\mathbf{q}} = \quad (5.13) \\ = \frac{2R}{(2\pi)^2 s \pi} \int q_\perp dq_\perp \mathcal{R}_s \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi_q \sqrt{1 - \left(\rho \sin \varphi - \frac{D}{R} \sin \varphi_q\right)^2}.$$

Так как расстояние между центрами проволок считается много большим их радиусов $\frac{R}{D} \ll 1$, мы видим, что только малые углы вносят вклад в интеграл

$$\frac{R}{D}(\rho \sin \varphi - 1) < \sin \varphi_q \simeq \varphi_q < \frac{R}{D}(\rho \sin \varphi + 1).$$

Таким образом, результат

$$\int_{-\frac{R}{D}(1-\rho \sin \varphi)}^{\frac{R}{D}(\rho \sin \varphi + 1)} d\varphi_q \sqrt{1 - \left(\rho \sin \varphi - \frac{D}{R} \varphi_q\right)^2} = \frac{\pi}{2} \frac{R}{D}$$

пропорционален углу (телесному) R/D сечения пассивной проволоки относительно центра активной. Этот множитель отражает простой факт, что испущенные фононы должны попасть в пассивную проволоку.

$$\int \frac{dx dy}{\pi R^2} \int \frac{q_\perp dq_\perp}{(2\pi)^2} d\varphi_q N_{\mathbf{q}} = \frac{1}{4\pi} \frac{R}{s} \frac{R}{D} \int q_\perp dq_\perp \mathcal{R}_s. \quad (5.14)$$

Мы дальше будем (как уже говорилось) учитывать только внутризонные переходы электронов при процессах генерации и поглощения фононов, т.е. мы положим $n = n'$ и $l = l'$. Подставляя полученное выражение в (5.12) и учитывая законы сохранения энергии

$$\begin{aligned} & \delta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{np'} + \hbar\omega_{p'-p})\delta(\varepsilon_{lk+p'-p} - \varepsilon_{lk} - \hbar\omega_{p'-p}) = \\ & = \frac{m}{\hbar s|p-p'|} \delta(k-p) \delta\left(q - \frac{\varepsilon_{np'} - \varepsilon_{np}}{\hbar s}\right), \end{aligned} \quad (5.15)$$

что позволяет проинтегрировать по k (и q), мы получим

$$\begin{aligned} J = e \frac{Lm\Lambda^4}{8D\rho^2\pi^3(s\hbar)^7} \sum_{nl} \int_0^\infty dp \int_{-\infty}^\infty dp' [f_{np'} - f_{np}] \frac{P_{nl}(p, p')}{|p-p'|} \times \\ \times \{f_{lp'}(1-f_{lp})\Theta(\varepsilon_{np'} - \varepsilon_{np} - s|p-p'|) + f_{lp}(1-f_{lp'})\Theta(\varepsilon_{np} - \varepsilon_{np'} - s|p-p'|)\}, \end{aligned} \quad (5.16)$$

Здесь мы ввели обозначения

$$P_{nl}(p, p') = \frac{(\varepsilon_{np'} - \varepsilon_{np})^4}{\phi_n(p, p')} \left| C_n \left(\frac{1}{\hbar s} \phi_n(p, p') \right) \right|^2 \left| C_l \left(\frac{1}{\hbar s} \phi_n(p, p') \right) \right|^2, \quad (5.17)$$

$$\phi_n(p, p') = \sqrt{(\varepsilon_{np'} - \varepsilon_{np})^2 - s^2(p-p')^2}. \quad (5.18)$$

Принимая во внимание, что фононы излучаются электронами, имеющими отрицательные начальные импульсы [неравновесные функции $f_{l,p}$ Ферми функции с смещенными на $eV/2 > 0$ химическими потенциалами, т.е. $f_{lp} = f_{lp}^L$ для $p > 0$ и $f_{lp} = f_{lp}^R$ для $p < 0$ ($f^L = f^F(\varepsilon - [\mu - eV/2])$, $f^R = f^F(\varepsilon - [\mu + eV/2])$), и что интегралы обращаются в нуль, если функции Ферми f и $1-f$ под интегралом не перекрываются, можно прийти к выводу, что вклад в ток вносят p' , удовлетворяющие $-\infty < p' < -p - 2p_s$, $p_s = ms$. Чтобы избежать недоразумения о направлении тока увлечения, заметим, что мы рассматриваем $eV > 0$ и, таким образом, только первый член в правой стороне уравнения (5.16) дает ненулевой вклад, в обратном случае $eV < 0$ вклад бы давался только вторым членом и благодаря $f_{np'} - f_{np}$ ток изменил бы знак.

Мы рассматриваем случай $T \ll \hbar\omega_q < eV$, при этом электронные функции распределения можно заменить ступеньками, и мы имеем

$$\begin{aligned} J = e \frac{Lm\Lambda^4}{8D\rho^2\pi^3(s\hbar)^7} \sum_{nl} \int_0^\infty dp \int_{p+2p_s}^\infty dp' [\Theta(p_n - p') - \Theta(p_n - p)] \times \\ \times \frac{P_{nl}(p, -p')}{p+p'} \Theta(p - p_l^-) \Theta(p_l^+ - p'), \end{aligned} \quad (5.19)$$

где

$$p_n = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_n)}, \quad p_n^\pm = \sqrt{2m(\mu - \varepsilon_n \pm eV/2)}.$$

Мы получим ненулевой результат для тока в (5.19) только при выполнении следующих неравенств

$$p_l^+ - p_l^- > 2p_s, \quad p_l^- < p_n < p_l^+. \quad (5.20)$$

Последнее неравенство эквивалентно

$$eV/2 > |\varepsilon_n - \varepsilon_l| = |\varepsilon_{nl}|.$$

Предполагая $eV/2 \ll p_n^2/2m$, $|\varepsilon_{nl}| \ll p_n^2/2m$, первое неравенство в (5.20) можно также упростить, суммируя все сказанное, мы приходим к выводу, что ток увлечения возникает при условии, что приложенный потенциал выше порога

$$eV/2 > \max\{sp_n, |\varepsilon_{nl}|\}.$$

Предположим, что мы выстроили зоны в двух проволоках, так что $\varepsilon_{nl} = 0$. Тогда результат все еще зависит от параметра

$$\alpha = eV/4sp_n$$

и мы различаем две области α , определяемых $\alpha < 1$ и $\alpha > 1$. В первой области $1/2 < \alpha < 1$ мы получим

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 \int_1^{2\alpha} dt (2\alpha - t) T(t), \quad (5.21)$$

где мы ввели

$$J_0 = -e \frac{2Lm^5 \Lambda^4}{\pi^3 D \rho^2 \hbar^7}, \quad (5.22)$$

$$T(t) = \frac{t^4}{\sqrt{t^2 - 1}} \left| C_n \left(\frac{2p_n}{\hbar} \sqrt{t^2 - 1} \right) \right|^2 \left| C_l \left(\frac{2p_n}{\hbar} \sqrt{t^2 - 1} \right) \right|^2. \quad (5.23)$$

Во второй области $\alpha > 1$ ($eV/2 > 2sp_n$) мы получим

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 \left\{ \int_1^\alpha dt t + \int_\alpha^{2\alpha} dt (2\alpha - t) \right\} T(t). \quad (5.24)$$

Для вычислений нам нужны будут матричные элементы электрон-фононного взаимодействия. Мы предположим, что наши проволоки получены из двумерного электронного

газа на границе гетероперехода электростатически при помощи затворов. Волновую функцию электрона в направлении, перпендикулярном гетеропереходу, обычно моделируют функцией типа $ze^{-z/2b}$ (см. например, обзор [131]). Длина $b \sim (N/a_B)^{-1/3}$, где $a_B = \epsilon\hbar^2/me^2$ боровский радиус, а N двумерная плотность электронов. При $N \sim 10^{11}$ см $^{-2}$ для структур на основе GaAs b порядка нескольких нм. Волновую функцию (формируемую электростатическим потенциалом) можно задать в виде Гауссовой функции, centered в соответствующей проволоке с характерным размером спада a . Этот размер $\sim \hbar/p_F$, если считать, что заполнена одна подзона. Типичные величины a порядка десятков нм (соответствующая энергия несколько мЭв). Поэтому всегда $a \gg b$. Энергия квантования поперек слоев обычно порядка сотен мЭв. Тем не менее, мы все же зададим удобную для нас модельную зависимость, причем не будем учитывать различие этих длин, считая $a = b = R$.

Предположив для C_n модельную зависимость

$$|C_n(q)|^2 = \frac{1}{[1 + q^2R^2]^2}, \quad (5.25)$$

можно представить результат на рисунке (см. Рис. 5.2) как зависимость тока увлечения от приложенного к активной проволоке напряжения для различных импульсов p_n $p_1R/\hbar = 3.33$ и $p_2R/\hbar = 5$. Около порога $\alpha - 1/2 \ll 1$ мы получим, предполагая $2\alpha - 1 \ll (\hbar/2p_nR)^2$

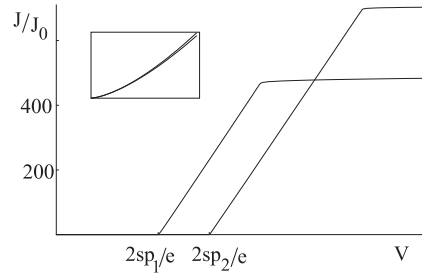


Рис. 5.2: Порог возникновения фоновый вклад в ток увлечения.

(так что аргумент функции C_n мал и $C_n \sim 1$)

$$J = -e \frac{4\sqrt{2}Lm^5\Lambda^4}{3D\rho^2\pi^3\hbar^7} \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 \left(\frac{eV}{2sp_n} - 1\right)^{3/2}, \quad 1 < \frac{eV}{2sp_n} (< 2) \quad (5.26)$$

т.е. при пороге ток растет нелинейно как функция приложенного напряжения. Эта зависимость показана малой вставкой на Рис. 5.2, так как эту зависимость можно заметить только в ближайшей окрестности порога.

Тем не менее, вторая производная тока увлечения от приложенного к активной проволоке напряжения, расходится на пороге корневым образом

$$\frac{d^2 J}{dV^2} \sim \frac{1}{\sqrt{eV/2sp_n - 1}}$$

для каждой новой зоны n , этот факт может оказаться важным при экспериментальном исследовании эффекта.

При больших напряжениях $\alpha \gg 1$ (учитывая $2p_n R/\hbar > 1$) мы получим из (5.24), что ток насыщается при величине

$$J = J_0 \left(\frac{v_n}{s} \right)^2 \frac{5\pi}{32} \frac{\hbar}{2p_n R}. \quad (5.27)$$

Таким образом, ток фононного увлечения оказывается ступенчатой функцией приложенного к активной проволоке напряжения. При увеличении этого напряжения новые зоны начинают давать вклад в ток увлечения.

При следующих параметрах $eV/4sp_n \geq 1$, (для $s \simeq 3 \cdot 10^5$ см/с, $\hbar/p_n \simeq 0.5 \cdot 10^{-6}$ см это означает напряжения $V \sim$ мВ), $p_n R/\hbar \simeq 1$, $L \simeq 2$ μ м, $D \sim 0.1 \cdot \mu$ м, $\Lambda \sim 8$ эВ, $m = 0.07m_0$ мы получим следующую оценку для вклада одной зоны в ток фононного увлечения

$$J \sim 10^{-12} \text{ А.}$$

5.4 Диаграммный вывод

Можно выразить ток фононного увлечения как интеграл по переданным фононным импульсам q_z при электрон-электронном взаимодействии посредством фононов. В приближении Хартри-Фока (экранированного) для фононной собственно-энергетической части мы получим для тока в пассивной проволоке (см. Приложение С)

$$J = -\frac{e}{2} \sum_{nl} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{Ldq_z}{2\pi} \Pi_{0\omega, q_z}^K \frac{|D_{0\omega, q_z}^R|^2}{|\epsilon(\omega, q_z)|^2} \times \left\{ \Pi_{\omega, q_z}^K \operatorname{th} \frac{\omega}{2T} - [\Pi_{\omega, q_z}^R - \Pi_{\omega, q_z}^A] \right\}, \quad (5.28)$$

где в соответствии с обычными обозначениями $\Pi^K, \Pi^R, \Pi^A(\Pi_0^K, \Pi_0^R)$ Келдышевская, запаздывающая и опережающая компоненты поляризационного оператора для неравновесной активной (равновесной пассивной) проволоки, $D_{0\omega, q_z}^R$ просуммированная по \mathbf{q}_\perp запаздывающая компонента (свободной) фононной функции Грина, ϵ диэлектрическая функция, описывающая экранирование кулоновского и фононного взаимодействий. Эта формула демонстрирует другой взгляд на ток увлечения: ток определяется сверткой спонтанных поляризаций в каждой проволоке. Мы включили в нашей записи константу электрон-фононной связи в D^R . Поляризационные операторы

$$\Pi_{\omega, q}^K = -2i\pi \sum_p \delta(\omega + \varepsilon_{lp-q} - \varepsilon_{lp}) [f_{lp}(1 - f_{lp-q}) + f_{lp-q}(1 - f_{lp})], \quad (5.29)$$

$$\Pi_{\omega, q}^R = \sum_p \frac{f_{lp-q} - f_{lp}}{\omega + \varepsilon_{lp-q} - \varepsilon_{lp} + i0}, \quad (5.30)$$

$$\Pi_{\omega, q}^A = (\Pi_{\omega, q}^R)^* \quad (5.31)$$

включают в себя неравновесные функции распределения электронов. Здесь спиновое суммирование подразумевается. Π_0^K затрагивает только равновесные функции и включает суммирование только по $p > 0$ (сравни с (5.10)). В уравнения (5.29, 5.30) мы подставляем смещенные Ферми распределения $f^{L,R}$. Так как в равновесии существует тождество

$$\Pi_{\omega, q}^K = (\Pi_{\omega, q}^R - \Pi_{\omega, q}^A) \operatorname{cth} \frac{\omega}{2T},$$

мы можем переписать (5.28) как

$$J = -\frac{e}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{Ldq_z}{2\pi} |D_{0\omega, q_z}^R|^2 \left(\operatorname{th} \frac{\omega}{2T} - \operatorname{th} \frac{\omega - eV}{2T} \right) \times [\Pi_{0, \omega, q_z}^K \Pi_{2, \omega, q_z}^K - \Pi_{0, -\omega, q_z}^K \Pi_{1, -\omega, q_z}^K], \quad (5.32)$$

где мы пренебрегли экранированием взаимодействия и положили $\epsilon = 1$. В конце этого приложения мы вернемся к этому вопросу и обсудим когда можно пренебречь экранированием.

В (5.32) мы ввели оператор

$$\Pi_{1, \omega, q}^K = -2i\pi \sum_{0 < p < q} \delta(\omega + \varepsilon_{lp-q} - \varepsilon_{lp}) [f_{lp}^L(1 - f_{lp-q}^R) + f_{lp-q}^R(1 - f_{lp}^L)], \quad (5.33)$$

где суммирование ограничено областью $0 < p < q$. В $\Pi_{2,\omega,q}^K$ суммирование ограничено условием $q < p < 0$ и сделана замена $R \rightarrow L$, $L \rightarrow R$.

В линейном случае $eV \ll T$ уравнение (5.32) можно переписать в виде, формально совпадающем с формулой, полученной в работе [71] для фононного увлечения в случае двух параллельных слоев двумерных газов (интересно, что очень похожий формализм используется при микроскопическом исследовании механического трения, см., например, [132, 133])

$$J = -\frac{e^2 V}{T} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{L dq_z}{2\pi} \frac{\text{Im}\Pi_{0,\omega,q_z}^R \text{Im}\Pi_{1,\omega,q_z}^R}{\text{sh}^2 \omega/2T} |D_{0,\omega,q_z}^R|^2. \quad (5.34)$$

Здесь в Π_1^R суммирование проводится по области $0 < p < q$. Этот линейный случай был рассмотрен по-другому в работе [73], и соответствующие результаты могут быть переполучены и из нашей формулы, сложная температурная зависимость (в отличие от случая кулоновского увлечения) в этой формуле, которую мы обсудим в заключении к этой главе, обусловлена зависимостью фононной функции Грина от частоты. Заметим, что только в этом линейном случае можно ввести понятие межпроволочного кондактанса (транскондактанса) как коэффициента, связывающего индуцированный ток увлечения с напряжением, приложенным вдоль токопроводящей (активной) проволоки.

Рассмотрим подробно нелинейный случай $eV \gg T$, т.е. случай низких температур. Во-первых, мы замечаем, что разность $\text{th} \omega/2T$ и $\text{th}(\omega - eV)/2T$ в (5.32) накладывает ограничение

$$0 < \omega < eV.$$

При этом условии член $\Pi_2^K \Pi_0^K$ не дает вклада, поляризационный оператор $\Pi_{0,-\omega}^K$ равен

$$\Pi_{0,-\omega,q_z}^K = -2i \frac{mL}{q_z} \Theta(\omega - v_n |2p_n - q_z|) \quad (5.35)$$

при условии $\omega \ll p_n^2/2m$ и произведение $\Pi_1^K \Pi_0^K$ в случае выстроенных зон в двух проволоках $p_n = p_l$ сводится к

$$\begin{aligned} \Pi_{1,-\omega}^K \Pi_{0,-\omega}^K = & -\frac{4m^2 L^2}{q_z^2} \Theta(eV/2 - \omega) \Theta(\omega - v_n |2p_n - q_z|) + \\ & + [\omega \rightarrow eV - \omega]. \end{aligned} \quad (5.36)$$

После подстановки произведения в (5.32) мы получим

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s}\right)^2 8\pi(2p_n D/\hbar) \left\{ \int_0^\alpha d\omega \omega + \int_\alpha^{2\alpha} d\omega (2\alpha - \omega) \right\} |D^R(\omega)|^2. \quad (5.37)$$

Здесь $\alpha = eV/(4sp_n)$ и $D^R(\omega)$ безразмерная фононная функция Грина

$$D^R(\omega) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} \frac{1 + q_\perp^2}{(\omega + i0)^2 - 1 - q_\perp^2} C^{(1)}(2p_n\mathbf{q}_\perp) C^{(2)}(-2p_n\mathbf{q}_\perp), \quad (5.38)$$

где $C^{(1,2)}$ матричный элемент фонон-индуцированных переходов в активной и пассивной проволоках. Дальнейшие упрощения возможны, если задать зависимость матричных элементов от формы каналов. Волновые функции поперечного движения в проволоках будем считать имеющими форму $e^{-x^2/4a^2}/(2\pi a^2)^{1/4} \cdot e^{-y/2by}/\sqrt{2b^{3/2}}$ в области положительных $y > 0$, при $y < 0$ функции обращаются в нуль. Тогда

$$C^{(1)}(2p_n\mathbf{q}_\perp) C^{(2)}(-2p_n\mathbf{q}_\perp) = e^{-(2p_na)^2 q_x^2} \frac{e^{iq_x 2p_n D}}{(1 + (2p_nb)^2 q_y^2)^3}. \quad (5.39)$$

При $\omega < 1$ $D^R(\omega)$ имеет вид

$$D^R(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} K_0(D_d \sqrt{1 - \omega^2}), \quad (5.40)$$

где $K_0(x)$ функция Макдональда. Для $\omega > 1$ $D^R(\omega)$ можно привести к виду [73]

$$D^R(\omega) = -\frac{\omega^2}{2\pi} e^{-(R_d)^2(\omega^2-1)} \frac{\pi}{2} \left\{ iJ_0(D_d \sqrt{\omega^2 - 1}) + N_0(D_d \sqrt{\omega^2 - 1}) \right\}, \quad (5.41)$$

где $J_0(x)$ функция Бесселя и $N_0(x)$ функция Неймана [122]. Мы ввели параметры $R_d = 2p_na/\hbar$ и $D_d = 2p_n D/\hbar$. Таким образом, для $1/2 < \alpha < 1$ ток дается

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s} \right)^2 8\pi D_d \int_1^{2\alpha} d\omega (2\alpha - \omega) |D^R(\omega)|^2 \quad (5.42)$$

с $D^R(\omega)$, даваемой (5.41) (сравни с (5.21)). Для $\alpha > 1$ мы получим

$$J = J_0 \sum_n \left(\frac{v_n}{s} \right)^2 8\pi D_d \left\{ \int_1^\alpha d\omega \omega + \int_\alpha^{2\alpha} d\omega (2\alpha - \omega) \right\} |D^R(\omega)|^2 \quad (5.43)$$

снова с $D^R(\omega)$ из (5.41) (сравни с (5.24)). Зависимость тока увлечения, вычисленная по формуле (5.28) представлена на Рис. 5.3. Наши приближенные уравнения для тока (5.42) и (5.43) дают возрастающие части и горизонтальные части этих кривых соответственно. Таким образом, ток является линейной функцией от напряжения в промежутке $2sp_n < eV < 4sp_n$. Зависимость тока фононного увлечения может оказаться ступенчатой функцией приложенного к активной проволоке напряжения как показано на Рис. 5.4, если

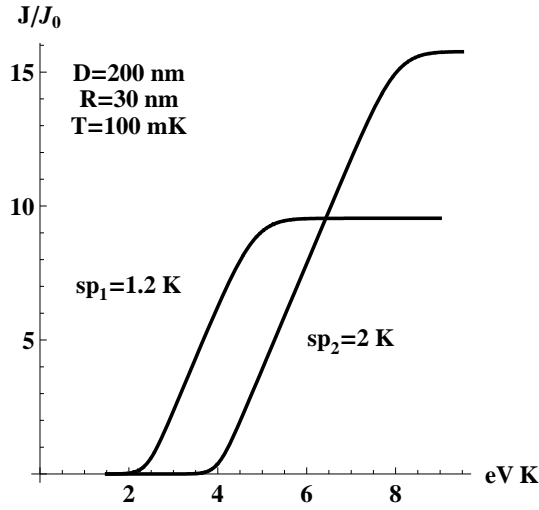


Рис. 5.3: Фононный вклад в ток увлечения.

$p_2 > 2p_1$ (импульс p_1 соответствует подзоне с началом в ε_1 , расположенной выше по энергии; если считать, что дно второй подзоны находится при $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, то условие выполняется при $\mu - \varepsilon_1 < (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/3$).

Интересно проследить каким образом уменьшается ток при условии $eV \ll sp_n$ (мы рассматриваем $eV \gg T$). При этом оказывается, что вклад в ток от члена, включающего функцию Макдональда оказывается пропорционален $(T/sp_n)^5 e^{-2Da}$, в то время как оставшийся вклад (он возникает от суммы квадратов функций Бесселя) пропорционален $e^{-2sp_n/T}$. При увеличении eV второй член быстро возрастает и дает основной вклад в ток фононного увлечения.

До сих пор мы считали, что реализуется сильно вырожденный случай $p_n^2/2m \gg eV \gg T$. При кулоновском увлечении мы обсуждали и случай малых импульсов p_n , при этом мы показали, что ток кулоновского увлечения есть убывающая функция температуры. Для фононного вклада это не имеет места, как показано на Рис. 5.5, так как передаваемые импульсы в этом случае ограничены снизу импульсом $2ms$.

Обсудим теперь, когда можно пренебречь экранированием. Вообще говоря, ток увлечения при учете и кулоновского взаимодействия, и электрон-фононного, не есть просто сумма отдельных токов увлечения от этих двух взаимодействий (полный эффект должен определяться комбинированным взаимодействием). Тем не менее, если считать расстояния

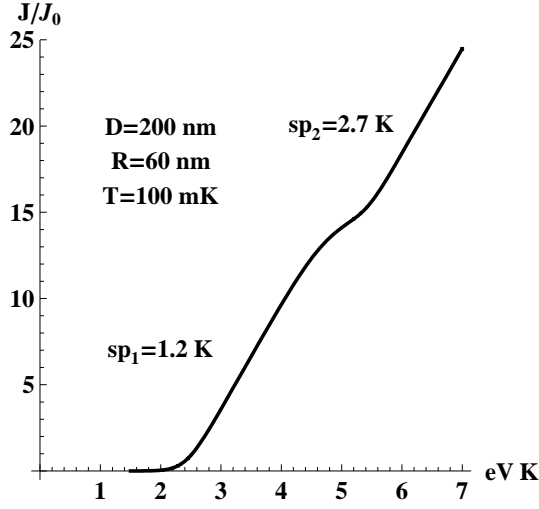


Рис. 5.4: Фононное увлечение при учете двух подзон.

между проволоками большими, т.е. $2p_n D/\hbar \gg 1$, мы можем ограничиться рассмотрением только фононного вклада (так как кулоновский вклад спадает экспоненциально с увеличением этого параметра $2p_n D/\hbar$). Даже в этом случае внутрипроволочное кулоновское взаимодействие может влиять через экранирование [описываемое диэлектрической функцией] на ток увлечения посредством фононов. В двухзонном приближении (т.е. при учете только двух зон, одной в пассивной, а другой в активной) диэлектрическая функция выглядит так

$$\epsilon(\omega, q_z) = [1 - (D_f^R + U_f(q_z))\Pi_f^R][1 - (D_s^R + U_s(q_z))\Pi_s^R] - (D^R + U(q_z))^2 \Pi_f^R \Pi_s^R.$$

Здесь первый член в правой стороне включает внутрипроволочное взаимодействие D_{fs}^R и $U(q_z)$ (для первой (f) и второй проволоки (s)), в то время как D^R и $U(q_z)$ в последнем члене описывают межпроволочные (фононное и кулоновское) взаимодействия. Заметим, что в окончательные выражения входит диэлектрическая функция с $q_z = 2p_n$, и предположим, что внутри проволоки можно оставить только кулоновское взаимодействие. Тогда (опуская также малые межпроволочные члены) имеем

$$\epsilon(\omega, 2p_n) = [1 - U(2p_n)\Pi^R]^2. \quad (5.44)$$

Внутрипроволочное кулоновское взаимодействие можно оценить как

$$U(2p_n) \simeq \frac{e^2}{LR_d^2}, \quad (5.45)$$

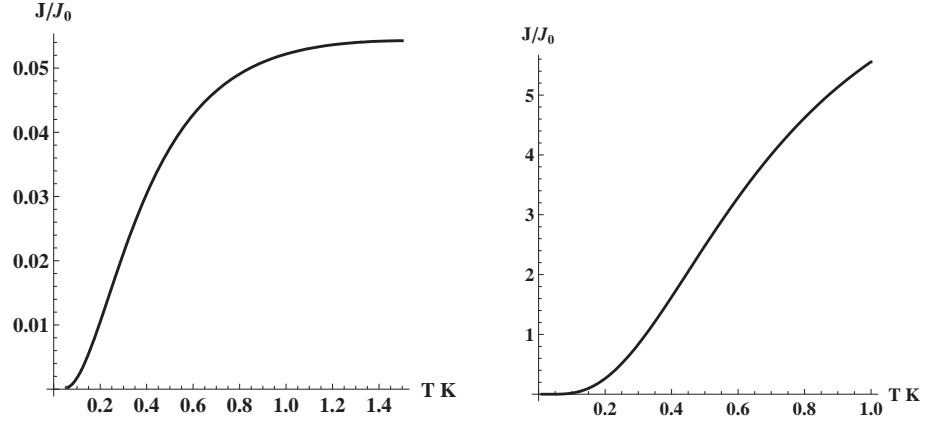


Рис. 5.5: Фононный вклад в ток увлечения при $p_n = 0$ в линейном $eV \ll T$ (левый график) и нелинейном случаях. Энергия $ms^2 = 0.127$ К, $msD/\hbar = 0.7$, $R/D = 0.15$ ($s = 5 \cdot 10^5$ см, $D = 200$ нм.) В линейном случае $eV = 1.45$ μ В (20 мК), в нелинейном $eV = 3$ К.

где мы предположили $R_d \gg 1$. Поляризационный оператор при $\omega \sim eV$ оценивается как

$$\Pi^R \simeq -\frac{mL}{2p_n\hbar\pi} \left[i\pi + 2 \ln \left\{ \frac{8p_n^2}{2meV} \right\} \right]. \quad (5.46)$$

Таким образом, приходим к следующему ограничению для пренебрежения экранированием

$$\frac{e^2 m}{p_n \hbar} \frac{1}{R_d^2} \ln \left\{ \frac{p_n^2}{2meV} \right\} \ll 1 \quad (5.47)$$

Если это неравенство не выполняется, ток увлечения будет меньше в $|\epsilon(eV, 2p_n)|^2$ раз.

5.5 Заключение

Как следует из полученных нами выражений можно указать, по крайней мере, три существенных отличия между фононным и кулоновским увлечениями в нелинейном режиме $eV \gg T$. Во-первых, это само существование порога $eV/2 > \max\{sp_n, |\epsilon_{nl}|\}$ (чего можно достигнуть, меняя или напряжение на затворе, или тянущее напряжение вдоль активной проволоки).

Во-вторых, слабая зависимость $J \sim 1/D$ от расстояния D между центрами двух проволок по сравнению с экспоненциальным спадом эффекта кулоновского увлечения с расстоянием между проволоками. С другой стороны, отметим более сильную зависимость от

этого расстояния фононного увлечения в нашем случае по сравнению со случаем фононного же увлечения между двумя слоями двумерных газов [70].

В-третьих, в отличие от кулоновского увлечения, фононный вклад насыщается при больших $eV \gg sp_n$. Из проделанного нами анализа следует, что фононный вклад в ток увлечения оказывается ступенчатой функцией от приложенного тянущего напряжения, так как увеличение этого напряжения включает новые зоны в увлечение. Ширину этих ступенек можно оценить как $\Delta V \sim sp_n/e$, а высоту как $J_0(v_n/s)^2(\hbar/(p_nR))$.

Обсудим теперь возможную роль пьезоэлектрического взаимодействия. Константу пьезоэлектрического взаимодействия для GaAs, имеющего кубическую \mathbf{T}_d симметрию, можно записать так

$$W_{\mathbf{q}} = \frac{\pi}{\rho\omega_{\mathbf{q}}} \left[\frac{4\pi e\beta}{\epsilon} \right]^2 (F(\theta_{\mathbf{q}}, \varphi_{\mathbf{q}}))^2,$$

где β это пьезо-электрическая постоянная, ϵ диэлектрическая проницаемость, F функция углов. Оценки для GaAs ($\beta = 10^5$ СГС единиц, $\epsilon = 12$, $\Lambda = 8$ эВ, $\rho = 5$ г/см³, $s = 3 \times 10^5$ см/с) показывают, что пьезо-электрическое взаимодействие является доминирующим при относительно малых частотах $\omega_{\mathbf{q}} \leq 10^{11}$ с⁻¹.

Частоты переданных фононов при увлечении порядка $\omega_{\mathbf{q}} > 2s/(\hbar/p_n)$, т.е. больше 10^{12} с⁻¹. Таким образом, вклад пьезоэлектрического взаимодействия оказывается малым по сравнению с рассмотренным нами вкладом деформационного взаимодействия.

Обсудим кратко температурную зависимость фононного увлечения. При рассмотренном нами нелинейном режиме $T \ll eV \sim sp_n$ фононный вклад в ток увлечения не зависит от температуры. Температурная зависимость в режиме линейного отклика $eV \ll T$ была изучена в [73]. При условии $2p_nD/\hbar \gg 1$ было найдено, что вклад фононов в увлечение с увеличением температуры от $T \ll s\hbar/D$ переходит от степенного (определяемого при $T \ll s\hbar/D$ вкладом малых частот в (5.34), так что увлечение связано здесь только с виртуальными фононами) закона $\sim T^5 \exp(-4p_nD/\hbar)$ к экспоненциальному $\sim \exp(-2sp_n/T)/D\sqrt{T}$ (этот вклад определяется большими частотами в (5.34) и функцией $\text{sh}(\omega/T)$), а затем, в области относительно высоких температур $T \gg sp_n$, не зависит от температуры (если $2p_nR/\hbar \sim 1$). (Зависимость от температуры похожа на левый график на Рис. 5.5.)

Здесь хотелось бы добавить следующее. Известно, что в строго одномерной электрон-

ной системе картина Ферми жидкости, на которой основаны наши заключения, перестает быть справедливой. Длинная одномерная проволока при этом описывается теорией Латтинжеровской жидкости [20, 21]. Считается, что из-за сильного электрон-электронного взаимодействия в проволоке происходит полная перестройка электронного спектра. Однако вопрос о том, например, при каких поперечных размерах и при каких длинах проволоки экспериментальная ситуация описывается Латтинжеровской жидкостью и когда происходит переход от одного описания к другому, нельзя считать решенным. При этом понятно, что при больших толщинах проволоки ситуацию точно можно описать, оставаясь в рамках теории Ферми жидкости.

И наконец, обсудим влияние мезоскопических флуктуаций на наш эффект. Мезоскопические флуктуации при кулоновском увлечении были рассмотрены в работе [134, 135] (см. также [136]), где авторы утверждают, что такие флуктуации могут быть сравнимы с средней величиной тока кулоновского увлечения даже в случае, когда длина проволоки L много меньше, чем средняя длина пробега l электронов, т.е. в квазибаллистическом случае $L/l \ll 1$. Мы полагаем, что эта работа имеет существенный недостаток: если мы примем во внимание фононный вклад в ток увлечения (кроме чисто кулоновского), мезоскопические флуктуации останутся малыми (по крайней мере при некоторых температурах, когда фононный вклад зависит от межпроволочного расстояния D как $1/D$). Поэтому мы считаем, что их теория нуждается в переработке в указанном выше направлении.

Глава 6

Кулоновское увлечение в квантовых ямах в продольном магнитном поле

6.1 Введение

В этой главе мы изучим влияние продольного магнитного поля на кулоновское увлечение тока. Кулоновский ток увлечения возникает в одной из параллельных ям при пропускании тока по другой в баллистическом режиме. Мы рассмотрим предельный случай таких больших магнитных полей, что магнитная длина a_B меньше ширины квантовой ямы. И в омическом, и в неомическом случае предсказаны резкие осцилляции тока увлечения как функции напряжения на затворе (или химического потенциала).

Влияние магнитного поля на кулоновское увлечение исследовалось в различных геометриях. Кулоновское увлечение между двумя двумерными квантовыми ямами в сильном магнитном поле, перпендикулярном плоскости ям, и в присутствии беспорядка исследовалось в [74, 75]. В магнитном поле, перпендикулярном плоскости ям, в пассивной (изначально бестоковой) яме может быть индуцировано напряжение Холла в направлении, перпендикулярном как магнитному полю, так и току в активной (токопроводящей) яме [76, 77]. Эти две геометрии можно назвать поперечными.

Цель настоящего раздела исследовать влияние магнитного поля в плоскости ям \mathbf{B} на ток кулоновского увлечения при баллистическом (бесстолкновительном) электронном переносе благодаря баллистическому же току в параллельной активной яме. Другими словами, мы рассматриваем случай, когда магнитное поле параллельно приложенному электрическому \mathbf{E} и, соответственно, плоскости ям.

Мы ограничим себя случаем сильного магнитного поля, так что это поле делает движение носителей вдоль поля по существу одномерным и изменяет плотность электронных состояний. Более того, мы рассмотрим предельный квантовый случай, когда только основной уровень осцилляторных состояний (состояний Ландау) заполнен электронами в двух ямах, так что

$$\hbar\omega_B > \mu. \quad (6.1)$$

Здесь ω_B циклотронная частота, μ химпотенциал. Теория электронного переноса через трехмерные баллистические микропровода в продольном поле при низких температурах разрабатывалась в [137]. Наша геометрия похожа на геометрию этой работы, однако мы для простоты рассмотрим случай сильных в соответствии с (6.1) магнитных полей.

Магнитное поле, квантуя движение в поперечном направлении, отображает нашу задачу на задачу кулоновского увлечения в одномерных параллельных проволоках, рассмотренному нами в предыдущей главе (см. также [67]) в рамках подхода Ферми жидкости. Поэтому наши конечные формулы для тока кулоновского увлечения окажутся весьма похожими на полученные в [67].

Магнитное поле может изменить время релаксации по импульсу. Рассеяние электронов на (ионизованных) примесях может даже оказаться в существенно сильных магнитных полях даже слабее, чем при $B = 0$ [138]. Что касается релаксации благодаря фононному рассеянию, сильное магнитное поле, меняя плотность электронных состояний, может привести к увеличению скорости рассеяния по сравнению с случаем $B = 0$. Мы, однако, предположим, что температура настолько низка, что перенос остается баллистическим даже в присутствии магнитного поля. Мы рассмотрим случай, когда магнитная длина

$$a_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|B}} \quad (6.2)$$

много меньше, чем расстояние W между ямами ширины $L_x \sim W$ каждая

$$W/a_B \gg 1. \quad (6.3)$$

Это неравенство устанавливает нижний предел для величин магнитных полей для заданного расстояния между ямами. Например, для $W \sim 80$ нм это неравенство требует магнитные поля порядка $B \sim 1$ Т, или больше.

Удобно разбить наши вычисления на несколько частей. Сначала мы дадим основные уравнения нашей теории, основанные на кинетическом уравнении. Мы рассмотрим линейный отклик в разделе 6.3. Нелинейный режим будет рассмотрен в разделе 6.4. Сравнение наших результатов со случаем кулоновского увлечения в одномерных проволоках и двумерным кулоновским увлечением без магнитного поля будет дано в конце этой главы.

6.2 Кинетическое уравнение

Мы рассмотрим две параллельные ямы, перпендикулярные x оси. Собственные функции и собственные значения для одноэлектронной задачи в магнитном поле вдоль z оси в i й квантовой яме даются [мы используем калибровку $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$]

$$\psi_{0p_y p_z} = \frac{1}{\sqrt{L_y L_z}} \varphi_0 \left(\frac{x - x_{p_y}}{a_B} \right) \exp(ip_y y / \hbar + ip_z z / \hbar), \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_{0p_z} = U_i + \frac{\hbar \omega_B}{2} + \frac{p_z^2}{2m}. \quad (6.5)$$

Здесь m эффективная масса электрона, $\varphi_0 \left[(x - x_{p_y}) / a_B \right]$ волновая функция гармонического осциллятора в основном состоянии, центрированная около точки $x_{p_y} = -a_B^2 p_y / \hbar = -p_y / m \omega_B$. Волновая функция $\psi_{0p_y p_z}$ описывает состояние, в котором распределение вероятности большое только в области ширины $\approx a_B$ симметрично около плоскости $x = x_{p_y}$ и спадает экспоненциально вне этой области. Так как мы рассматриваем случай $L_x \gg a_B$, мы предположим, что волновая функция равна $\psi_{0p_y p_z}$, если x_{p_y} внутри квантовой ямы, и равна нулю в противном случае. Нам будут нужны матричные элементы функций $\exp(\pm i\mathbf{q}\mathbf{r})$ между двумя основными состояниями осциллятора Ландау. Имеем

$$\begin{aligned} \langle p'_y p'_z | e^{\pm i\mathbf{q}\mathbf{r}} | p_y p_z \rangle &= \exp \left[\pm iq_x (x_{p_y} + x_{p'_y}) / 2 \right] \times \\ &\times \exp \left[-a_B^2 q_x^2 / 4 \right] \exp \left[-(x_{p_y} - x_{p'_y})^2 / 4a_B^2 \right] \delta_{p'_z, p_z \pm \hbar q_z} \delta_{p'_y, p_y \pm \hbar q_y}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Кулоновское увлечение может быть представлено диаграммно, см. Рис. 6.1.

Внешнее возмущающее поле входит в нашу диаграмму через неравновесные функции распределения, на диаграмме они представлены сплошными линиями с обозначением 2, это указывает, что функции распределения относятся к активной токопроводящей яме.

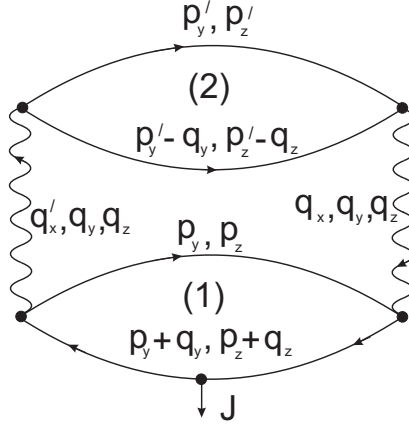


Рис. 6.1: Диаграмма, описывающая кулоновское увлечение. Здесь (2) обозначает активную яму, (1) пассивную. Точка с обозначением J означает, что измеряется ток, возникающий в пассивной яме.

Начнем анализ с законов сохранения при столкновении электронов, принадлежащих разным ямам. Имеем

$$\varepsilon_{0p_z}^{(1)} + \varepsilon_{0p'_z}^{(2)} = \varepsilon_{0p_z + \hbar q_z}^{(1)} + \varepsilon_{0p'_z - \hbar q_z}^{(2)}, \quad (6.7)$$

где $\varepsilon_{0p_z}^{(1,2)} = U_{1,2} + \hbar\omega_B/2 + p_z^2/2m$. Здесь $U_{1,2}$ описывают положение начал отсчета электронных зон в двух ямах.

Решение уравнения (6.7)

$$\hbar q_z = p'_z - p_z. \quad (6.8)$$

δ -функция, описывающая сохранение энергии можно переписать в виде

$$\delta(\varepsilon_{0p_z}^{(1)} + \varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \varepsilon_{0p_z + \hbar q_z}^{(1)} - \varepsilon_{0p'_z - \hbar q_z}^{(2)}) = \frac{m}{\hbar |q_z|} \delta[\hbar q_z - (p'_z - p_z)]. \quad (6.9)$$

Таким образом, начальные квазиимпульсы p_z и p'_z после столкновения становятся $p_z + \hbar q_z = p'_z$ и $p'_z - \hbar q_z = p_z$, т.е. в результате электроны обмениваются квазиимпульсами.

Следуя разделу 4.2 Гл.4 (см. также [67]), мы предположим, что возникающий ток увлечения в квантовой яме 1 много меньше вызывающего этот ток баллистического тока в квантовой яме 2 и вычислим его, решая кинетическое уравнение для ямы 1. Мы получим

$$v_z \frac{\partial \Delta F_{0p_y}^{(1)}(p_z, z)}{\partial z} = -I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\}, \quad (6.10)$$

где $F^{(1,2)}$ функции распределения в ямах 1 и 2 соответственно, и интеграл столкновений

$I^{(12)}\{F^{(1)}, F^{(2)}\}$ учитывает столкновения электронов, принадлежащих двум ямам

$$I^{(12)}\{F^{(1)}, F^{(2)}\} = \sum_{p'_z p'_y q'_x \mathbf{q}} W_{1p_z, 2p'_z}^{1p_z + \hbar q_z, 2p'_z - \hbar q_z}(q'_x, q_x, q_y, p_y, p'_y) \mathcal{S}. \quad (6.11)$$

В этом выражении сумма по p'_y определяется требованием, чтобы x -координата центра осциллятора не выходила за пределы второй квантовой ямы. Это требование накладывает ограничение

$$\frac{\hbar}{a_B^2} \left(W + L_x - \frac{L_x}{2} \right) < p'_y < \frac{\hbar}{a_B^2} \left(W + L_x + \frac{L_x}{2} \right), \quad (6.12)$$

произведение функций распределения \mathcal{S} дается выражением

$$\mathcal{S} = F_{0p_z}^{(1)} F_{0p'_z}^{(2)} \left(1 - F_{0p_z + \hbar q_z}^{(1)} \right) \left(1 - F_{0p'_z - \hbar q_z}^{(2)} \right) - F_{0p_z + \hbar q_z}^{(1)} F_{0p'_z - \hbar q_z}^{(2)} \left(1 - F_{0p_z}^{(1)} \right) \left(1 - F_{0p'_z}^{(2)} \right), \quad (6.13)$$

$$F_{0p_z}^{(1)} = \theta[v_z] f(\varepsilon_{0p_z} - \mu_B^{1L}) + \theta[-v_z] f(\varepsilon_{0p_z} - \mu_B^{1R}) + \Delta F_{0p_z}^{(1)}, \quad (6.14)$$

где

$$\theta[v_z] = \begin{cases} 1 & \text{для } v_z > 0 \\ 0 & \text{для } v_z < 0 \end{cases}.$$

Здесь мы предполагаем, что электроны движутся баллистически в пределах ямы (за исключением, конечно, межъямного кулоновского рассеяния). Электроны, движущиеся из левого и правого резервуаров, имеют химические потенциалы $\mu_B^{1L} = \mu_B - eV_d/2$ и $\mu_B^{1R} = \mu_B + eV_d/2$ соответственно. Мы ввели здесь напряжение V_d , индуцированное вдоль пассивной ямы благодаря передаче квазиимпульса из активной ямы, т.е. мы полагаем, что цепь пассивной ямы разомкнута.

Решение уравнения (6.10) дается выражением (мы опускаем равновесную часть)

$$\Delta F_{0p_z}^{(1)} = - \left(z \pm \frac{L_z}{2} \right) \frac{1}{v_z} I^{(12)}\{F^{(1)}, F^{(2)}\}, \quad \text{для } \begin{array}{l} p_z > 0, \\ p_z < 0. \end{array} \quad (6.15)$$

Используя свойство сохранения числа частиц интегралом столкновений

$$\sum_{p_z p_y} I^{(12)}\{F^{(1)}, F^{(2)}\} = 0, \quad (6.16)$$

мы получаем для полного тока в пассивной яме, определенного как

$$J = \frac{e}{L_z} \sum_{p_y p_z} v_z F_{0p_z}^{(1)}, \quad (6.17)$$

результат

$$J = -e \sum_{p_y, (p_z > 0)} I^{(12)} \{F^{(1)}, F^{(2)}\} + e \frac{1}{L_z} \sum_{p_y, (p_z > 0)} v_z [f(\varepsilon_{0p_z} - \mu_B^{1L}) - f(\varepsilon_{0p_z} - \mu_B^{1R})]. \quad (6.18)$$

В этих уравнениях суммирование по p_y ограничено требованием, что x -координата центра осциллятора Ландау не выходит за пределы квантовой ямы, так что $-\hbar L_x/2a_B^2 < p_y < \hbar L_x/2a_B^2$. Введя плотность состояний (спин включен) на единицу интервала квазиимпульса

$$N(p_z) dp_z = 2 \frac{L_z}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\hbar L_x L_y}{a_B^2} dp_z, \quad (6.19)$$

мы получим для второй суммы в (6.18)

$$J_{\text{Ohm}} = -e \frac{2eV_d}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\hbar L_x L_y}{a_B^2} \int_{U_1 + \hbar\omega_B/2}^{\infty} d\varepsilon \left(-\frac{\partial f(\varepsilon - \mu_B)}{\partial \varepsilon} \right). \quad (6.20)$$

Для вырожденного электронного газа это выражение можно записать так

$$J_{\text{Ohm}} = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \frac{L_x L_y}{2\pi a_B^2} V_d. \quad (6.21)$$

Здесь вместо числа каналов в одномерной ситуации появляется число "ларморовых кружков" в сечении квантовой ямы $L_x L_y / 2\pi a_B^2$.

Предположим, что заполнено только основное состояние осциллятора, так что

$$U_1 + \frac{1}{2}\hbar\omega_B < \mu_B < U_1 + \frac{3}{2}\hbar\omega_B. \quad (6.22)$$

Учитывая (6.9) для вероятности кулоновского рассеяния (6.11), мы получаем

$$\begin{aligned} W_{1p_z, 2p'_z}^{1p_z + \hbar q_z, 2p'_z - \hbar q_z}(q'_x, q_x, q_y, p_y, p'_y) &= \frac{m}{\hbar|q_z|} \delta[\hbar q_z - (p'_z - p_z)] \frac{2\pi}{\hbar} U_{\mathbf{q}} U_{q'_x, q_y, q_z} \times \\ &\times \langle p_z, p_y | e^{-iq'_x x - iq_y y - iq_z z} | p_z + \hbar q_z, p_y + \hbar q_y \rangle \langle p_z + \hbar q_z, p_y + \hbar q_y | e^{iq_x x + iq_y y + iq_z z} | p_z, p_y \rangle \times \\ &\times \langle p'_z, p'_y | e^{iq'_x x + iq_y y + iq_z z} | p'_z - \hbar q_z, p'_y - \hbar q_y \rangle \langle p'_z - \hbar q_z, p'_y - \hbar q_y | e^{-iq_x x - iq_y y - iq_z z} | p'_z, p'_y \rangle. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Для вычисления тока увлечения мы проитерлируем кинетическое уравнение по отношению к межъямному столкновительному члену, считая его малым. Соответственно можно выбрать функции распределения электронов для первой (пассивной) квантовой ямы равновесными $F_{0p}^{(1)} = f(\varepsilon_{0p}^{(1)} - \mu_B)$.

Что касается второй ямы, мы в духе подхода Ландауэра и др. [81, 117, 118] будем считать, что активная яма связана с левым l и правым r резервуарами. Каждый резервуар

находится в независимом тепловом равновесии со смещенными химическими потенциалами $\mu_B^l = \mu_B - eV/2$ и $\mu_B^r = \mu_B + eV/2$, где μ_B равновесный химический потенциал в магнитном поле. Поэтому электроны, вступающие в квантовую яму из левого (правого) резервуара и имеющие квазиимпульсы $p'_z > 0$ ($p'_z < 0$), описываются $F_{0p'_z}^{(2)} = f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B^l)$ [$F_{0p'_z}^{(2)} = f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B^r)$] и мы можем убедиться, что интеграл столкновений (6.11) обращается тождественно в нуль, если начальные p'_z и конечные $p'_z - \hbar q_z$ квазиимпульсы в активной яме имеют одинаковые знаки. Это значит, что только *процессы рассеяния назад* вносят вклад в ток увлечения.

Благодаря уравнению (6.9), у нас остаются только $p'_z < 0$ (т.к. в соответствии с (6.18) существует ограничение $p'_z - \hbar q_z = p_z > 0$) и мы получаем, с учетом δ -функции в (6.23), следующее произведение функций распределения в столкновительном члене

$$\mathcal{P} = F_{0p_z}^{(1)} F_{0p'_z}^{(2)r} (1 - F_{0p'_z}^{(1)}) (1 - F_{0p_z}^{(2)l}) - F_{0p'_z}^{(1)} F_{0p_z}^{(2)l} (1 - F_{0p_z}^{(1)}) (1 - F_{0p'_z}^{(2)r}), \quad (6.24)$$

или

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & f(\varepsilon_{0p_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B^r) [1 - f(\varepsilon_{0p'_z}^{(1)} - \mu_B)] [1 - f(\varepsilon_{0p_z}^{(2)} - \mu_B^l)] - \\ & - f(\varepsilon_{0p'_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{0p_z}^{(2)} - \mu_B^l) [1 - f(\varepsilon_{0p_z}^{(1)} - \mu_B)] [1 - f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B^r)]. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Это выражение мы проанализируем в следующем разделе.

6.3 Линейный отклик

В этом случае $eV/T \ll 1$ (мы положили Больцмановскую константу k_B равной 1, измеряя температуру в энергетических единицах) и выражение (6.25) можно переписать как

$$\mathcal{P} = \frac{eV}{T} f(\varepsilon_{0p_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B) [1 - f(\varepsilon_{0p'_z}^{(1)} - \mu_B)] [1 - f(\varepsilon_{0p_z}^{(2)} - \mu_B)]. \quad (6.26)$$

Сдвигая переменную интегрирования $p'_y \rightarrow p'_y + \hbar(W + L_x)/a_B^2$, мы получим для тока увлечения (ток увлечения описывается первой суммой в уравнении (6.18))

$$\begin{aligned} J_{\text{drag}} = & -e \frac{eV}{T} \frac{2\pi}{\hbar} \left(\frac{4\pi e^2}{\varepsilon} \right)^2 \frac{1}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{2L_z dp_z}{2\pi\hbar} \int_0^\infty \frac{dp'_z}{2\pi\hbar} \frac{m}{(p_z + p'_z)} \times \\ & \times f(\varepsilon_{0p_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{0p'_z}^{(2)} - \mu_B) [1 - f(\varepsilon_{0p'_z}^{(1)} - \mu_B)] [1 - f(\varepsilon_{0p_z}^{(2)} - \mu_B)] \times \\ & \times \int_{-\hbar L_x/2a_B^2}^{\hbar L_x/2a_B^2} \frac{2L_y dp_y}{2\pi\hbar} \frac{dp'_y}{2\pi\hbar} g_{00} \left[\frac{p_z + p'_z}{\hbar}, \frac{p_y - p'_y}{\hbar} \right], \end{aligned} \quad (6.27)$$

где ε диэлектрическая постоянная и

$$g_{00}(k_z, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_y}{2\pi} e^{-a_B^2 q_y^2} A^2(k_z, k_y, q_y), \quad (6.28)$$

$$A(k_z, k_y, q_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_x}{2\pi} \frac{e^{-ia_B^2 q_x [k_y - (W+L_x)/a_B^2 + q_y]} e^{-a_B^2 q_x^2/2}}{(k_z^2 + q_{\perp}^2)}, \quad (6.29)$$

$q_{\perp}^2 = q_x^2 + q_y^2$. Последний интеграл по координатам центров осцилляторов Ландау (т.к. $x_p = -a_B^2 p_y/\hbar$) в уравнении (6.27) играет роль эффективного кулоновского взаимодействия между электронами, свободно движущимися в направлении приложенного магнитного поля.

$$\begin{aligned} & \int_{-\hbar L_x/2a_B^2}^{\hbar L_x/2a_B^2} \frac{2L_y dp_y}{2\pi\hbar} \frac{dp'_y}{2\pi\hbar} g_{00} \left[\frac{p_z + p'_z}{\hbar}, \frac{p_y - p'_y}{\hbar} \right] = \\ & = \frac{2L_y}{(2\pi)^2} \int_0^{L_x/a_B^2} dk_y k_y \left\{ g_{00} \left[\frac{p_z + p'_z}{\hbar}, \frac{L_x}{a_B^2} - k_y \right] + g_{00} \left[\frac{p_z + p'_z}{\hbar}, k_y - \frac{L_x}{a_B^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Мы сохраним только первый член в этом выражении, так как второй член содержит сильно осциллирующую экспоненту $\sim \exp[iq_x(W + L_x)]$ по сравнению с аналогичной экспонентой в первом члене $\sim \exp(iq_x W)$.

Неравенство $W/a_B \gg 1$ позволяет существенно упростить выражение для g_{00} . Мы получаем

$$g_{00}(k_z, k_y) = \exp(a_B^2 k_z^2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_y}{2\pi} A^2(k_z, k_y, q_y), \quad (6.31)$$

$$A(k_z, k_y, q_y) \simeq \int \frac{dq_x}{2\pi} \frac{e^{iq_x[(W+L_x)-a_B^2 k_y]}}{q_x^2 + q_y^2 + k_z^2} = \frac{e^{-|W+L_x-a_B^2 k_y|\sqrt{q_y^2+k_z^2}}}{2\sqrt{q_y^2+k_z^2}}. \quad (6.32)$$

Окончательно член взаимодействия принимает вид

$$\int_{-\hbar L_x/2a_B^2}^{\hbar L_x/2a_B^2} \frac{2L_y dp_y}{2\pi\hbar} \frac{dp'_y}{2\pi\hbar} g_{00} \left[k_z, \frac{p_y - p'_y}{\hbar} \right] = \frac{L_y}{4a_B(2\pi a_B k_z)^3} \exp(a_B^2 k_z^2) \Phi(2Wk_z), \quad (6.33)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \int_1^{\infty} d\xi \frac{e^{-\alpha\xi}}{\xi^3 \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (6.34)$$

Для $\alpha \gg 1$

$$\Phi(\alpha) \simeq \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} e^{-\alpha}. \quad (6.35)$$

Этот результат для эффективного взаимодействия (6.33) можно понять следующим образом: только ларморовские кружки в пределах толщины $L_x \cdot 1/(k_z L_x)$ около поверхностей ям вносят вклад во взаимодействие. Число таких взаимодействующих кружков из двух ям равно

$$\left(\frac{L_y L_x \cdot 1/(k_z L_x)}{a_B} \right)^2.$$

Суммирование по $q_x, q'_x \sim k_z, q_y \sim \sqrt{k_z/W}$ приводит к множителю $(k_z L_x)^2 \cdot L_y \sqrt{k_z/W}$. Экспоненциальное затухание увлечения с расстоянием между ямами W есть следствие одномерного характера увлечения в сильном магнитном поле. Учитывая сказанное и умножая наш результат на $U^2 \sim (4\pi e^2)^2 / (L_x L_y L_z)^2 k_z^4$, мы и приходим к (6.33).

Произведение функций распределения в (6.27) является острой функцией p_z и p'_z при малых температурах, принимающая ненулевые значения при условии, что p_z, p'_z равны p_F^B с точностью T/v_F^B . Мы предполагаем, что интервал квазиимпульсов T/v_F^B много меньше чем \hbar/W^1

$$T \ll \frac{\hbar v_F^B}{W}. \quad (6.36)$$

Рассматривая член взаимодействия как слабо изменяющуюся функцию в (6.27), мы получим

$$J_{\text{drag}} = J_0 \frac{eV}{4\varepsilon_F^B} \frac{T}{\varepsilon_F^B} \left(\frac{U_{12}}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{U_{12}}{2T} \right) \right]^{-2}, \quad (6.37)$$

где

$$J_0 = -\frac{e^5 m}{\varkappa^2 (4\pi\hbar)^3} \frac{L_z L_y}{a_B^2} \frac{1}{(a_B k_F^B)^2} e^{(2a_B k_F^B)^2} \Phi(4W k_F^B). \quad (6.38)$$

Здесь введены обозначения $U_{12} = U_1 - U_2$ и $m v_F^B = p_F^B = \sqrt{2m[\mu_B - U_1 - \hbar\omega_B/2]}$, $k_F^B = p_F^B/\hbar$.

Мы предполагаем, что электроны вырождены в магнитном поле

$$\varepsilon_F^B \equiv \mu_B - U_1 - \frac{\hbar\omega_B}{2} \gg T. \quad (6.39)$$

¹Здесь хотелось бы отметить, что кинетический подход к явлениям переноса требует, чтобы неопределенность \hbar/L_z в продольном квазиимпульсе была много меньше, чем интервал квазиимпульсов T/v_F^B , т.е. $\hbar/L_z \ll T/v_F^B$. Последнее требование и (6.36) ведут к неравенству $W \ll L_z$, это неравенство предполагается выполненным.

Рассмотрим квантовый предел, т.е. случай, когда все электроны принадлежат первому уровню Ландау

$$\varepsilon_F^B < \hbar\omega_B. \quad (6.40)$$

Так как концентрация электронов N_B при этих условиях связана с химическим потенциалом формулой

$$N_B = \frac{m\hbar\omega_B p_F^B}{\pi^2 \hbar^3}, \quad (6.41)$$

уравнения (6.39) и (6.40) приводят к

$$T \ll \frac{(p_F^B)^2}{2m} < \hbar\omega_B, \quad p_F^B = \frac{\pi^2 \hbar^3 N_B}{m \hbar\omega_B}. \quad (6.42)$$

Первое неравенство в этом соотношении слабее, чем (6.36), если $\varepsilon_F \sim \hbar\omega_B$ и $Wk_F > 1$. Введя концентрацию электронов N и химический потенциал μ в отсутствие магнитного поля $B = 0$, связанные как

$$N = \frac{(2m\varepsilon_F)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad \varepsilon_F = \mu - U_1 \quad (6.43)$$

можно переписать (6.42) в виде

$$T \ll \frac{4}{9} \left(\frac{N_B}{N} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_B} \right)^2 \varepsilon_F < \hbar\omega_B. \quad (6.44)$$

Заметим, что второе неравенство здесь не зависит от электронной массы и может потребовать магнитные поля сильнее, чем определяемые из (6.3) [таким образом накладывая ограничение на электронную концентрацию, или, если последняя фиксирована, накладывая ограничение снизу на магнитные поля]. Например, в магнитных полях порядка $B \sim 10$ Т концентрация N должна быть меньше, чем $2.7 \cdot 10^{17}$ см⁻³.

Рассмотрим случай выстроенных квантовых ям, так что $U_1 = U_2$ [иначе эффект экспоненциально мал, см. уравнение (6.37)] и положим $N = N_B$. Мы получаем

$$J_{\text{drag}} = J_0 \frac{eV}{4T} \left(\frac{T}{\varepsilon_F} \right)^2 \left(\frac{3\hbar\omega_B}{2\varepsilon_F} \right)^4, \quad (6.45)$$

$$J_0 = -\frac{e^5 m L_y L_z k_F^2}{9\alpha^2 (4\pi\hbar)^3} \left(\frac{3\hbar\omega_B}{2\varepsilon_F} \right)^4 \exp \left[12(2\varepsilon_F/3\hbar\omega_B)^3 \right] \Phi \left(4Wk_F \frac{2\varepsilon_F}{3\hbar\omega_B} \right). \quad (6.46)$$

Ток увлечения оказывается сильно растущей функцией приложенного магнитного поля (см. Рис. 6.2). Это является следствием того, что магнитное поле увеличивает плотность

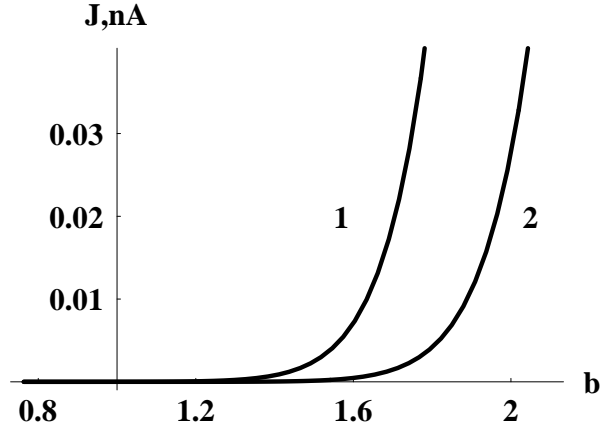


Рис. 6.2: Ток увлечения как функция (безразмерного) магнитного поля $b = \hbar\omega_B/\varepsilon_F$ для двух расстояний между ямами $W = 40\text{нм}$ (1) и $W = 50\text{нм}$ (2). Остальные параметры даны в тексте.

состояний и уменьшает передаваемые квазиимпульсы (тем самым увеличивая эффективное взаимодействие).

Оценим ток, для этого положим $m = 0.07m_0$ (где m_0 масса свободного электрона), $\hbar\omega_B \sim \varepsilon_F = 14$ мэВ, $\varkappa = 13$, $L_z \sim L_y = 1\mu\text{м}$, $W = 40\text{нм}$.

$$J_{\text{drag}} \sim 10^{-11} \text{ А.}$$

В режиме линейного отклика можно ввести понятие сопротивления увлечения как коэффициента, который зависит только от параметров двухъямной структуры, и который связывает ток в активной яме J_{drive} с индуцированным напряжением в пассивной яме $J_{\text{drive}}R_D = V_d$. Здесь ток в яме 2 дается выражением

$$J_{\text{drive}} = -V \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{L_x L_y}{\pi a_B^2} \quad (6.47)$$

(ср. с (6.21)) и V_d определяется из условия, что полный ток $J = J_{\text{drag}} + J_{\text{Ohm}}$ обращается в нуль в пассивной квантовой яме (6.18).

$$R_D = \frac{\pi\hbar}{e^2} \frac{E_B}{\varepsilon_F} \frac{T}{\varepsilon_F} \frac{L_z}{L_y} \frac{1}{(k_F L_x)^2} \left(\frac{3\hbar\omega_B}{4\varepsilon_F} \right)^6 \exp \left[12(2\varepsilon_F/3\hbar\omega_B)^3 \right] \Phi \left[4Wk_F \frac{2}{3} \frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_B} \right], \quad (6.48)$$

где мы ввели эффективную Боровскую энергию $E_B = mc^4/\varkappa^2\hbar^2$ и

$$p_F^B = \frac{2}{3} \frac{N_B}{N} \frac{\varepsilon_F}{\hbar\omega_B} p_F, \quad p_F = \sqrt{2m\varepsilon_F}. \quad (6.49)$$

С параметрами выше мы получим оценку для сопротивления увлечения

$$R_D \sim 0.4 \text{ m}\Omega.$$

6.4 Нелинейный (неомический) случай

Произведение функций распределения в уравнении (6.25) приобретает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P} = & 2 \operatorname{sh}(eV/2T) \exp\{(\varepsilon_{p_z}^{(1)} - \mu_B)/T\} \exp\{(\varepsilon_{p_z'}^{(2)} - \mu_B)/T\} \times \\ & \times f(\varepsilon_{p_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{p_z'}^{(2)} - \mu_B - eV/2) f(\varepsilon_{p_z}^{(1)} - \mu_B) f(\varepsilon_{p_z'}^{(2)} - \mu_B + eV/2). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Так как снова \mathcal{P} острая функция p_z и p_z' , можно вынести за интеграл все медленно меняющиеся функции и получить

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dp_z dp_z' \frac{\mathcal{P}}{(p_z + p_z')} \int_{-\hbar L_x/2a_B}^{\hbar L_x/2a_B} \frac{2L_y dp_y}{2\pi\hbar} \frac{dp_y'}{2\pi\hbar} g_{00} \left[(p_z + p_z')/\hbar, (p_y - p_y')/\hbar \right] = \\ & = \frac{L_y m^2 a_B^2 T^2 \exp\left[(2a_B k_F^B)^2\right]}{4(4\pi\hbar)^3 (a_B k_F^B)^6} \Phi(4Wk_F^B) \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \frac{\frac{eV}{4T} - \frac{U_{12}}{2T}}{\operatorname{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{U_{12}}{2T}\right)} \cdot \frac{\frac{eV}{4T} + \frac{U_{12}}{2T}}{\operatorname{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{U_{12}}{2T}\right)}. \end{aligned}$$

Ток увлечения дается формулой

$$J_{\text{drag}} = J_0 \frac{1}{2} \left(\frac{T}{\varepsilon_F^B}\right)^2 \operatorname{sh}\left(\frac{eV}{2T}\right) \frac{\frac{eV}{4T} - \frac{U_{12}}{2T}}{\operatorname{sh}\left(\frac{eV}{4T} - \frac{U_{12}}{2T}\right)} \cdot \frac{\frac{eV}{4T} + \frac{U_{12}}{2T}}{\operatorname{sh}\left(\frac{eV}{4T} + \frac{U_{12}}{2T}\right)}. \quad (6.51)$$

Для случая $eV \ll T$ мы получим уравнение (6.45). В противоположном случае $eV \gg T$ ненулевой результат для (6.51) получится лишь при условии $|U_{12}| < eV/2$. Тогда для тока увлечения получим

$$J_{\text{drag}} = J_0 \left[\left(\frac{eV}{4\varepsilon_F}\right)^2 - \left(\frac{U_{12}}{2\varepsilon_F}\right)^2 \right] \left(\frac{3\hbar\omega_B}{2\varepsilon_F}\right)^4. \quad (6.52)$$

Таким образом, ток увлечения возникает при $eV > 2|U_{12}|$.

6.5 Спиновый эффект

Обсудим, каким образом Зеемановское расщепление магнитным полем в плоскости ям

$$H_Z = g\mu_B \mathbf{B} \cdot \mathbf{s} \quad (6.53)$$

может сказаться на нашем эффекте. Здесь μ_B магнетон Бора, g фактор в плоскости квантовых ям на основе GaAs/AlGaAs гетероструктур в пределе широких ям мало отличается от объемной величины для GaAs, где $g = -0.44$. Для более тонких квантовых ям, в соответствии с работой Ивченко и др. [139], его абсолютная величина меньше и g -фактор может даже изменить знак.

Для энергий электрона с учетом Зеемановского расщепления мы имеем

$$\varepsilon_{0p_z\pm}^{(1,2)} = U_{1,2} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_B}{2}(1 \pm \Delta), \quad (6.54)$$

где безразмерный сдвиг энергии $\Delta = gm/2m_0$ включает отношение эффективной электронной массы m к массе свободного электрона m_0 . Так как для GaAs это отношение мало $m \approx 0.07m_0$, мы приходим к выводу, что расщепление $|\Delta| \ll 1$. Тем не менее, расщепление, пропорциональное $\hbar\omega_B\Delta$, может оказаться важным, так как этот сдвиг входит наряду со сдвигом двух подзон U_{12} , принадлежащих разным ямам (последний сдвиг также мал). Тогда мы вместо уравнения (6.37) придем к похожей формуле, имеющей "тонкую" структуру

$$J_{\text{drag}} = J_0 \frac{eV}{16\varepsilon_F^B} \frac{T}{\varepsilon_F^B} \left\{ 2 \left(\frac{U_{12}}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{U_{12}}{2T} \right) \right]^{-2} + \left(\frac{U_{12} + \hbar\omega_B\Delta}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{U_{12} + \hbar\omega_B\Delta}{2T} \right) \right]^{-2} \right. \\ \left. + \left(\frac{U_{12} - \hbar\omega_B\Delta}{2T} \right)^2 \left[\text{sh} \left(\frac{U_{12} - \hbar\omega_B\Delta}{2T} \right) \right]^{-2} \right\}. \quad (6.55)$$

Исследование этой "тонкой" структуры может также служить одним из методов определения g -фактора в плоскости квантовых ям.

6.6 Заключение

Сравним наши результаты с кулоновским увлечением между двумя двумерными (плоскими) ямами [125] в отсутствие магнитного поля. В этом случае сопротивление увлечения ρ_{12} пропорционально

$$\rho_{12} \sim T^2 \frac{1}{(k_S d)^2} \frac{1}{(k_F d)^2}, \quad (6.56)$$

где k_S внутриямный (двумерный) волновой вектор экранирования Томаса-Ферми, имеющий порядок обратного эффективного радиуса Бора, d расстояние между ямами. Во-первых, мы замечаем, что температурная зависимость кулоновского увлечения между

двумя (трехмерными) квантовыми ямами в сильном магнитном поле слабее, чем в двумерном случае. Во-вторых, в последнем случае вклад процессов рассеяния назад можно отбрасывать по сравнению с малоугловым рассеянием с переданными импульсами $0 < q < 1/d \ll k_S$, что приводит к слабой зависимости от межъямного расстояния, в то время как в нашем случае только процессы рассеяния назад и были важны (это есть следствие одномерности нашей задачи о кулоновском увлечении в квантовом пределе).

Сильное магнитное поле, квантуя поперечное движение электронов, привело в конечном итоге к тому, что мы рассматривали наши электронные состояния как "трубки" или "провода". Поэтому кулоновское увлечение в этой ситуации имеет много общего с кулоновским увлечением между двумя параллельными нанопроволоками.

Глава 7

Нелокальный динамический отклик баллистического наномостика

7.1 Введение

В этой главе мы рассмотрим нелокальный динамический отклик баллистического квантового наномостика на приложенный потенциал, осциллирующий с частотой ω . Будет показано, что кроме активной части кондактанса при этом возникает также и реактивная часть. Эта реактивная часть оказывается индуктивной при относительно малых частотах ω . Для больших частот токовый отклик может быть и индуктивного, и емкостного характера в зависимости от отношения $\omega L/v_F$, где L длина мостика, v_F скорость Ферми. Таким образом, манипулирование параметрами наномостика позволяет изменять фазу отклика.

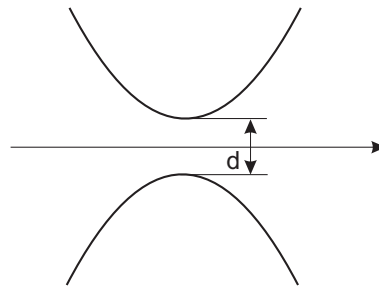


Рис. 7.1: Классический точечный контакт.

Кондактанс классического точечного контакта (см. Рис. 7.1), для которого $\lambda \ll d \ll \ell$, где λ длина волны электрона, d поперечный размер контакта, ℓ длина пробега, определяется формулой Шарвина, получаемой при замене длины проводника L в формуле $G = \sigma S/L$

на длину пробега ℓ , так что

$$G \sim \frac{ne^2S}{p_F} \sim \frac{e^2SS_F}{(2\pi\hbar)^3},$$

где p_F импульс Ферми. Кондактанс G баллистического квантового канала, для которого $d \sim \lambda$, получается из

$$J \sim ev_F(eV)\frac{1}{v_F\pi\hbar} = \frac{e^2}{\pi\hbar}V = G_0V,$$

где v_F скорость Ферми, eV полоса энергий электронов, участвующих в переносе заряда, $1/v_F\pi\hbar$ плотность состояний. В общем случае, когда в переносе участвуют несколько подзон поперечного квантования, $G = NG_0$, где N число активных каналов (заполненных подзон). Такое квантование кондактанса было обнаружено в экспериментах [9, 8] и обычно объясняется с использованием концепции работ [81, 82]. Оказалось, что имеет место не только квантование кондактанса, но и других кинетических коэффициентов, например, теплопроводности [83, 84].

Динамический отклик баллистических структур был впервые рассмотрен Куликом и др.[85] в случае классического баллистического точечного контакта между двумя металлическими берегами. Было показано, что кроме активной части импеданса также существует и реактивная добавка индуктивного характера. Последняя была названа кинетической индуктивностью. Цель этой главы исследовать такую индуктивность в одномерной баллистической структуре, где важную роль играет поперечное квантование, а именно, в баллистическом мостике.

Начнем с того, что дадим оценку этой кинетической индуктивности, не принимая пока во внимание временную дисперсию одномерного кондактанса G . Добавка к энергии электронов в наномостике при приложенном к нему напряжении V дается формулой

$$W \sim \frac{1}{2}(eV)^2\frac{\partial n_3}{\partial \mu}LA, \quad (7.1)$$

где n_3 трехмерная концентрация электронов, так что n_3LA полное число электронов в мостике, L длина мостика, A площадь поперечного сечения. Мы учли, что только электроны в полоске энергий eV около уровня Ферми μ ускоряются приложенным напряжением. Так как

$$n_3 = \frac{p_F^3}{3\pi^2\hbar^3}, \quad \frac{\partial n_3}{\partial \mu} = \frac{mp_F}{\pi^2\hbar^3}, \quad (7.2)$$

(m эффективная масса электрона) мы можем написать

$$W \sim \frac{1}{2} \frac{e^2}{G^2} \frac{mp_F}{\pi^2 \hbar^3} LAJ^2, \quad (7.3)$$

где J ток, G кондактанс мостика. С этой энергией можно связать кинетическую индуктивность \mathcal{L}_k таким образом

$$W = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{L}_k J^2}{c^2}. \quad (7.4)$$

Известно, что благодаря поперечному квантованию электронный спектр в одномерных системах представляется как набор квантовых каналов, т.е. подзон (минизон) с законом дисперсии $\varepsilon_n(p_x)$ (n номер канала). Можно переписать кондактанс G в терминах числа квантовых каналов \mathcal{N} как

$$G = G_0 \mathcal{N}, \quad \text{где } \mathcal{N} = \mathcal{A} p_F^2 / 4\pi \hbar^2 \quad (7.5)$$

и

$$G_0 = e^2 / \pi \hbar. \quad (7.6)$$

G_0 имеет размерность скорости. Имеем

$$G_0 = 6.96 \cdot 10^7 \text{ см/с}. \quad (7.7)$$

Таким образом, получим

$$\mathcal{L}_k \sim \frac{e^2 c^2}{G^2} \frac{mp_F}{\pi^2 \hbar^3} LA \sim \frac{4c^2}{Gv_F} L, \quad (7.8)$$

где $v_F = p_F/m$. В частности, для $L = 10^{-4}$ см, $\mathcal{N} = 10$, $v_F = 10^6$ см/с мы имеем \mathcal{L}_k примерно 500 см. Чтобы оценить возможность наблюдения \mathcal{L}_k , сравним индуктивное сопротивление $\omega \mathcal{L}_k / c^2$ с диссипативным G^{-1} . Как видно, их отношение становится больше единицы при частотах

$$\omega \gg \frac{v_F}{L}, \quad (7.9)$$

что для параметров, выписанных выше, дает $\omega/2\pi$ больше чем ~ 1 ГГц. Физически это значит, что частота $\omega/2\pi$ должна быть больше обратного времени пролета наномостика. Для частот, удовлетворяющих (7.9), нужно уже принимать во внимание дисперсию

кондактанса G ¹. Другими словами, для изучения кинетической индуктивности нам надо построить теорию кондактанса наномостика $G(\omega)$.

Мы рассмотрим случай, когда наномостик окружен другими проводниками, включая, в первую очередь, затворы, формирующие наш наномостик из двумерного газа электронов (см. Рис. 3). Эти проводники подавляют электрическое поле вне наномостика. В этом заключается наше принципиальное отличие от ситуации, рассмотренной в [142, 143], где вне мостика не предполагалось никаких проводников, кроме плоских электродов контактов самого мостика.

Мы увидим, что из-за электрон-электронного взаимодействия в уравнения, описывающие пространственное распределение электрического поля и тока проводимости, войдет радиус экранирования a . Отметим, что это будет в том случае, если радиус экранирования меньше поперечного размера мостика b . В обратном случае $a \gg b$, b играет роль радиуса экранирования. Мы проанализируем это в Приложении D.

Основываясь на исследованиях [144, 142, 143], можно было бы ожидать, что результаты, полученные этими авторами, в частности реактивный импеданс, имеют сугубо квантовомеханическое происхождение. Мы полагаем, следуя Кулику и др., что физика, стоящая за реактивной компонентой импеданса в рассматриваемом случае, имеет чисто классический характер (в частотном интервале, рассматриваемом в настоящей работе). Мы покажем это для динамической индуктивности. В настоящей работе мы примем во внимание эффект поперечного квантования, во всем остальном мы сформулируем задачу классическим образом. Такой подход позволит нам вывести выражение для импеданса $Z(\omega)$ для всего классического интервала частот ω , где важна дисперсия, т.е. для области

$$v_F/L \ll \omega \ll \varepsilon_F/\hbar. \quad (7.10)$$

Рассматриваемая задача зависит от трех длин, а именно от L (длины одномерного проводника), a (длины экранирования) и v_F/ω .

¹Как указано в [140] и [141] в одномерном образце конечной длины может иметь место специфический фазовый переход. Он имеет место при температуре $\Theta_c = 2\pi v_F^c/L$, определяемой величиной электрон-электронного взаимодействия. Здесь v_F^c перенормированная этим взаимодействием скорость Ферми. Можно ожидать особенности в поведении $G(\omega)$ для $\omega \sim \omega_c \equiv \Theta_c/\hbar$. Тем не менее, для больших частот, удовлетворяющих (7.9) можно не учитывать это явление — см. раздел 4 работы [141]. Выводы этой работы, касающиеся температур $T \gg \Theta_c$ годятся и для частот $\hbar\omega \gg \Theta_c = 2\pi v_F^c/L$. Они показывают, что взаимодействия при $\omega \gg 2\pi v_F^c/\hbar L$ приводят к замене $v_F \rightarrow v_F^c$.

Мы рассмотрим случаи различных соотношений между этими длинами. Все сказанное относилось к одноканальной ситуации, где электроны только одного канала принимали участие в явлениях переноса. В настоящей работе мы рассмотрим и более сложный случай, когда начала отсчета энергий нескольких каналов находятся ниже уровня Ферми и вносят вклад в переменный ток.

7.2 Одноканальный кондактанс. Случай сильного экранирования

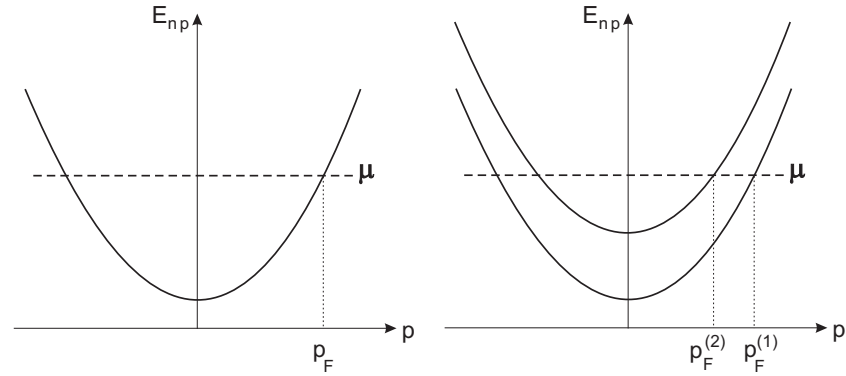


Рис. 7.2: Одноканальный (слева) и двухканальный (справа) случаи. Для одноканального (двухканального) случая уровень Ферми выше дна только для основной подзоны (для двух подзон).

До сих пор мы рассматривали случай постоянного приложенного напряжения, теперь мы введем понятие кинетической индуктивности и выясним соответствующую физику явления. В этом разделе мы рассмотрим случай сильного экранирования $L \gg a$, когда часть приложенного напряжения V резко падает на концах наномостика, в то время как функция распределения электронов внутри наномостика будет суперпозицией вкладов, возникающих от двух берегов (ср. со случаем, рассмотренным в [85])

$$f(\varepsilon) = \theta(v_x)f_0(\varepsilon - eV/2) + \theta(-v_x)f_0(\varepsilon + eV/2), \quad (7.11)$$

v_x скорость вдоль оси мостика. При выводе уравнения (7.11) использована теорема Ливилля, утверждающая, что функция распределения не меняется вдоль траектории электрона. Если частота приложенного поля ω настолько велика, что $\omega > v_F/L$, ток J и поле

$E = -\partial\varphi/\partial x$ связаны нелокально. А именно, электроны в точке x внутри мостика помнят о приложенном поле в моменты $t - x/v_F$ и распределение заряда внутри мостика неоднородно. При этих обстоятельствах электронейтральность также может быть нарушена.

Чтобы понять ситуацию и построить наглядную картину, мы начнем с (полу)качественных соображений. Рассмотрим одноканальную ситуацию, когда распределение характеризуется одной скоростью Ферми вдоль оси x . Естественно ожидать, что приложенное напряжение $V = V_0 \exp(-i\omega t)$ имеет три участка спада (см. Рис. 7.3), т. е. спад $\tilde{V}/2$ соответствует левому концу структуры, падение $-EL$ (где $E = E_0 \exp(-i\omega t)$) соответственно в самом мостике, где электрическое поле $E_0 = \text{const}$ и спад $\tilde{V}/2$ на правом конце. Условие нейтральности подразумевает, что соответствующие концевые падения резкие. Мы увидим, что пространственный масштаб этих спадов определяется длиной экранирования $a \equiv 1/\varkappa$ (см. Приложение D и конец Приложения F), где (ϵ диэлектрическая постоянная)

$$\varkappa^2 = \frac{8\pi e^2}{\mathcal{A}\pi\hbar\epsilon} \int_0^\infty dp_x \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) = \frac{8\pi e^2}{\mathcal{A}\pi\hbar\epsilon|v_F|}, \quad (7.12)$$

— в то время как электрическое поле $E = E_0 \exp(-i\omega t)$ не зависит от координат почти на всей длине наномостика L . Естественно, мы имеем

$$V = \tilde{V} - EL. \quad (7.13)$$

Концевые падения (возмущения) приведут к вкладам ξ_+ и ξ_- в электронную функцию распределения. В линейном приближении траектории электронов остаются невозмущенными полем E внутри структуры, так что ξ_+ и ξ_- даются стандартными решениями

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_+ + \xi_-, \\ \xi_+ &= -\frac{e\tilde{V}}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp[-i\omega(t - x/v_F)], \\ \xi_- &= \frac{e\tilde{V}}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp[-i\omega(t - (L - x)/v_F)]. \end{aligned} \quad (7.14)$$

В свою очередь, однородное электрическое поле E приводит к следующему отклику в электронном распределении:

$$\eta_+ = \int_{t-x/v_F}^t dt' (\mathbf{v}e\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}, \quad (7.15)$$

и

$$\eta_- = \int_{t-(L-x)/v_F}^t dt' (\mathbf{v}e\mathbf{E}) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}. \quad (7.16)$$

Основываясь на наших предположениях, мы получим

$$\begin{aligned} \eta_+ &= \frac{(\mathbf{v}e\mathbf{E}_0)}{i\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\exp(-i\omega(t-x/v_F)) - \exp(-i\omega t)], \\ \eta_- &= \frac{(\mathbf{v}e\mathbf{E}_0)}{i\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\exp(-i\omega(t-(L-x)/v_F)) - \exp(-i\omega t)]. \end{aligned} \quad (7.17)$$

Произведение $(\mathbf{v}e\mathbf{E}_0)$ для двух различных направлений скорости \mathbf{v} имеет различные знаки. Для однородного поля левая сторона уравнения Пуассона обращается в нуль. Тогда с учетом (7.14) имеем

$$\begin{aligned} e \frac{E_0 v_F}{i\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\exp(-i\omega(t-x/v_F)) - \exp(-i\omega(t-(L-x)/v_F))] = \\ = \frac{e\tilde{V}}{2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} [\exp(-i\omega(t-x/v_F)) - \exp(-i\omega(t-(L-x)/v_F))] \end{aligned} \quad (7.18)$$

и

$$v_F E_0 = i\omega \frac{\tilde{V}}{2}, \quad \text{или} \quad E_0 = ik \frac{\tilde{V}}{2} \quad \text{с} \quad k = \frac{\omega}{v_F}. \quad (7.19)$$

Полный ток проводимости через мостик, пропорциональный $v_F(\xi_+ + \eta_+ - \xi_- - \eta_-)$, равен

$$\begin{aligned} J = \int_{p>0} \frac{dp}{\pi\hbar} v_F \frac{eE_0 v_F}{i\omega} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp(-i\omega t) [\exp(i\omega x/v_F) + \exp(i\omega(L-x)/v_F) - 2] - \\ - \int_{p>0} \frac{dp}{\pi\hbar} \frac{e^2 \tilde{V}}{2} v_F \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \exp(-i\omega t) [\exp(i\omega x/v_F) + \exp(i\omega(L-x)/v_F)] = \\ - \int_{p>0} \frac{dp}{\pi\hbar} e^2 V v_F \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \frac{1}{1 - ikL/2} \exp(-i\omega t), \end{aligned} \quad (7.20)$$

где $k = \omega/v_F$. Мы использовали уравнение $V = \tilde{V}(1 - i\omega L/v_F)$. Ток дается выражением

$$J = G_0 V \frac{1}{1 - ikL/2} \exp(-i\omega t). \quad (7.21)$$

Для $kL \gg 1$ импеданс $Z(\omega)$, определенный как

$$Z = \frac{V}{J}, \quad (7.22)$$

почти полностью имеет индуктивный характер.

7.3 Кондактанс при слабом экранировании

В противоположном случае слабого экранирования $a \gg L$ резкие спады потенциала на концах мостика исчезают и электрическое поле внутри канала равно $E = V/L$. Только члены с η дают вклад в ток проводимости J и в результате

$$J = \int_{p>0} \frac{dp}{\pi\hbar} v_F \frac{v_F e^2 E}{i\omega} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right) \exp(-i\omega t) [\exp(i\omega x/v_F) + \exp(i\omega(L-x)/v_F) - 2]. \quad (7.23)$$

В общем случае ток проводимости зависит от координаты x . Это вполне возможно в отсутствие экранирования. J одинаков при обоих контактах при $x = 0$ и $x = L$. Для тока проводимости J_c мы имеем

$$\frac{J_c}{G_0 V} = \exp(ikL/2) \frac{\sin kL/2}{kL/2}. \quad (7.24)$$

Однако в этом случае (в отличие от предыдущего случая) ток смещения J_d , который связан с скачками поля на контактах, доминирует. Ток смещения определен как

$$J_d = -i \frac{\omega \epsilon}{4\pi} \mathcal{A} E_\omega(0) \quad (7.25)$$

и оказывается равным (см. далее в тексте)

$$J_d = -J_c \left(1 + \frac{2i}{kL} \right) - i \frac{G_0 V}{kL/2} \left((ak)^2 - 1 \right). \quad (7.26)$$

Таким образом, для полного тока $J = J_c + J_d$ мы получим

$$J = -i \frac{G_0 V}{kL/2} \left((ak)^2 - 1 + \exp(ikL/2) \frac{\sin kL/2}{kL/2} \right). \quad (7.27)$$

Импеданс при этом оказывается емкостного характера. Первые два члена в уравнении (7.27) больше, чем третий. Тем не менее, этот третий член может быть выделен, так как он осциллирует как функция внешних параметров. Более того, именно осциллирующий член описывает диссипацию (приводит к вещественной части отклика тока). При этом

$$\text{Re}G = G_0 \left(\frac{\sin kL/2}{kL/2} \right)^2, \quad (7.28)$$

т.е. при условии $kL = 2\pi n$, где n целое число, или, когда время пролета L/v_F равно целому числу периодов поля $T = 2\pi/\omega$, потерь не наблюдается, вполне понятный с классической точки зрения результат.

Это и составляет главное отличие от случая полной нейтральности, где импеданс всегда имеет индуктивный характер, ток проводимости внутри мостика однороден и это же выполняется для кинетической энергии электронов. Мостик действительно ведет себя как индуктивность.

7.4 Количественный анализ нелокального отклика.

Дадим детальный вывод для полей и токов для одноканального случая. Начнем с кинетического уравнения в одноканальной ситуации

$$\frac{d}{dt}f = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (7.29)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + eE \frac{\partial}{\partial p_x} \quad (7.30)$$

и τ время релаксации (оно не войдет в наши окончательные формулы). Решение этого уравнения мы проведем методом характеристик и оно имеет вид

$$f(x, p, t) = \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\tau} e^{(t'-t)/\tau} f_0(\varepsilon[p_x(t')]), \quad (7.31)$$

где интегрирование идет вдоль траектории электрона. Траектория определяется классическими уравнениями движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (7.32)$$

так что $p_x(t')|_{t'=t} = p_x$, $x(t')|_{t'=t} = x$. Явно траекторию можно записать так

$$p_x(t') = p_x + \int_t^{t'} dt_1 eE(x(t_1), t_1), \quad (7.33)$$

$$x(t') = x + \frac{p_x}{m}(t' - t) + \int_t^{t'} dt_1 \int_t^{t_1} dt_2 eE(x(t_2), t_2). \quad (7.34)$$

Таким образом (7.31) может быть записана так

$$f(x, p, t) = \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\tau} e^{(t'-t)/\tau} f_0 \left(\varepsilon + \frac{p_x}{m} \int_t^{t'} eE(x(t_1), t_1) dt_1 + \frac{1}{2m} \left(\int_t^{t'} eE(x(t_1), t_1) dt_1 \right)^2 \right), \quad (7.35)$$

или в линейном по полю приближении

$$f(x, p, t) = \int_{-\infty}^t \frac{dt'}{\tau} e^{(t'-t)/\tau} \left(f_0(\varepsilon) + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} v_x \int_t^{t'} eE(x(t_1), t_1) dt_1 \right). \quad (7.36)$$

Теперь в последнем уравнении можно использовать невозмущенную полем (свободное движение) траекторию $x(t_1) = x + (p_x/m)(t_1 - t)$. Сдвигая переменную интегрирования $t' = t + \xi$ и интегрируя по частям, мы получим для $\Delta f = f - f_0$

$$\Delta f = -e v_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^0 d\xi e^{\xi/\tau} E(x + v_x \xi, t + \xi). \quad (7.37)$$

Теперь, рассматривая баллистический случай, мы можем перейти к пределу $\tau \rightarrow \infty$. Тогда мы получим

$$\Delta f = -e v_x \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_{-\infty}^0 d\xi E(x + v_x \xi, t + \xi). \quad (7.38)$$

Мы предположили, что поле обращается в нуль при $x < 0$ и $x > L$ (граничные условия). Это означает, что для траектории электрона, приходящего из левого берега с $v_x > 0$, интегрировать нужно от $-x/v_x$ до 0

$$\theta(v_x) \int_{-x/v_x}^0 d\xi E(x + v_x \xi, t + \xi), \quad (7.39)$$

а для траектории электрона, приходящего из правого берега со скоростью $v_x < 0$, интегрировать нужно от $(L - x)/v_x$ до 0

$$\theta(-v_x) \int_{(L-x)/v_x}^0 d\xi E(x + v_x \xi, t + \xi). \quad (7.40)$$

В результате

$$\Delta f = -\theta(v_x) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_0^x dz eE(z, t + (z - x)/v_x) - \theta(-v_x) \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \int_L^x dz eE(z, t + (x - z)/|v_x|). \quad (7.41)$$

(См. также Приложение Е, где мы показываем, как это решение можно получить, исходя изначально из квантовых соображений.)

Мы подставим это уравнение в уравнение Пуассона и получим

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \frac{dE}{dx} = \int_0^x dz E(z, t + (z - x)/|v_F|) - \int_x^L dz E(z, t + (x - z)/|v_F|). \quad (7.42)$$

Введя обозначение $k = \omega/|v_F|$, мы получим уравнение для поля

$$\frac{2}{\varepsilon^2} \frac{dE_\omega}{dx} = -e^{-ikx} \int_0^L dz E_\omega(z) e^{ikz} + 2 \int_0^x dz E_\omega(z) \cos k(x - z). \quad (7.43)$$

Ток проводимости определяется из

$$J_\omega(x)/G_0 = e^{-ikx} \int_0^L dz E_\omega(z) e^{ikz} + 2i \int_0^x dz E_\omega(z) \sin k(x-z), \quad (7.44)$$

где $G_0 = e^2/\pi\hbar$. Сперва мы рассмотрим случай сильного экранирования, в соответствии с чем предположим $a \leq |v_F|/\omega \leq L$. Лапласов образ уравнения (7.43) дает

$$\frac{2}{\mathfrak{a}^2}(pE_p - E_\omega(0)) = -\frac{A}{p+ik} + 2\frac{pE_p}{p^2+k^2}, \quad (7.45)$$

где

$$A = \int_0^L dz E_\omega(z) e^{ikz}. \quad (7.46)$$

Оригинал легко восстанавливается

$$E_\omega(x) = E_\omega(0) \left(1 - \frac{\mathfrak{a}^2}{\gamma^2} (1 - \text{ch } \gamma x) \right) - \frac{A\mathfrak{a}^2}{2} \left(\frac{\text{sh } \gamma x}{\gamma} + \frac{ik}{\gamma^2} (1 - \text{ch } \gamma x) \right), \quad (7.47)$$

где

$$\gamma^2 = \mathfrak{a}^2 - k^2. \quad (7.48)$$

Используя это соотношение в (7.46), мы определим A

$$A = 2E_\omega(0) \frac{\text{sh } \gamma L/2}{\gamma \text{ch } \gamma L/2 - ik \text{sh } \gamma L/2}. \quad (7.49)$$

Тогда для поля мы имеем

$$E_\omega(x) = E_\omega(0) \left(1 + \frac{\text{ch } \gamma(x-L/2) - \text{ch } \gamma L/2}{\alpha} \right), \quad (7.50)$$

где

$$\alpha = \frac{\gamma^2}{\mathfrak{a}^2} (\text{ch } \gamma L/2 - (ik/\gamma) \text{sh } \gamma L/2). \quad (7.51)$$

Для потенциала мы получаем

$$\varphi_\omega(x) = -E_\omega(0) \left(\left(1 - \frac{\text{ch } \gamma L/2}{\alpha} \right) (x-L/2) + \frac{\text{sh } \gamma(x-L/2)}{\alpha\gamma} \right). \quad (7.52)$$

Граничные условия, наложенные на потенциал $\varphi_\omega(0) = V/2$ и $\varphi_\omega(L) = -V/2$, приводят к

$$E_\omega(0) = \frac{V}{L} \frac{\alpha}{\alpha - \text{ch } \gamma L/2 + 2(\text{sh } \gamma L/2)/\gamma L}. \quad (7.53)$$

Поле можно записать как

$$E_\omega(x) = \frac{V}{L} \left(1 + \frac{\text{ch } \gamma(x-L/2) - (2/\gamma L) \text{sh } \gamma L/2}{\alpha - \text{ch } \gamma L/2 + (2/\gamma L) \text{sh } \gamma L/2} \right), \quad (7.54)$$

потенциал при этом

$$\varphi_\omega(x) = \frac{V}{2} \frac{(1 - 2x/L)[\alpha - \text{ch } \gamma L/2] + (2/\gamma L) \text{sh } \gamma(L/2 - x)}{\alpha - \text{ch } \gamma L/2 + (2/\gamma L) \text{sh } \gamma L/2}. \quad (7.55)$$

Распределение потенциала вдоль мостика дано на Рис. 7.3. Для тока проводимости мы

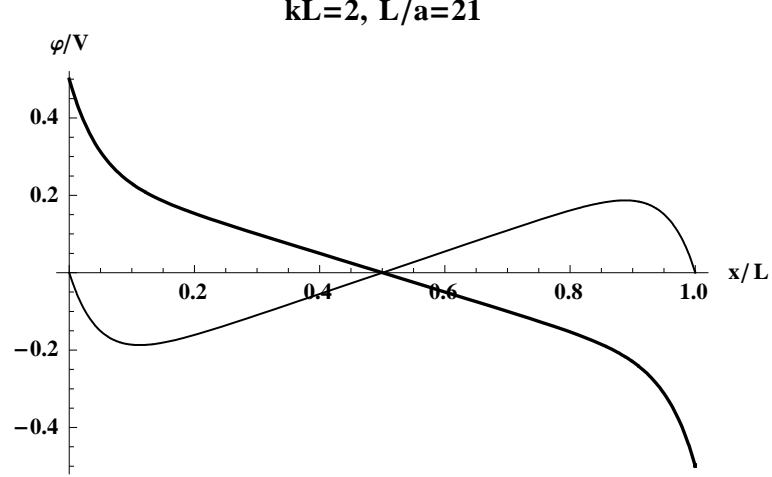


Рис. 7.3: Распределение потенциала (вещественная часть представлена жирной кривой) вдоль мостика в случае сильного экранирования. Потенциал испытывает резкие спады на концах мостика.

получаем

$$\frac{J_\omega(x)}{G_0 V} = \frac{\gamma^2 \text{th } \gamma L/2 - i(k/\gamma)(1 - \text{ch}[\gamma(x - L/2)]/\text{ch}[\gamma L/2])}{\alpha^2 (1 - ik\gamma^2 L/2\alpha^2) \text{th } \gamma L/2 - k^2 L\gamma/2\alpha^2}. \quad (7.56)$$

Используя уравнение (7.25), для полного тока имеем

$$\begin{aligned} \frac{J_\omega}{G_0 V} &= (J_\omega(0) + J_d)/G_0 V = \\ &= \frac{\gamma^2 (1 - k^2/\alpha^2) \text{th } \gamma L/2 - ik\gamma/\alpha^2}{\alpha^2 (1 - ik\gamma^2 L/2\alpha^2) \text{th } \gamma L/2 - k^2 L\gamma/2\alpha^2}. \end{aligned} \quad (7.57)$$

В этом случае (пространственно зависящий) ток проводимости почти однороден вдоль мостика. В пределе $a \ll L$, $ka \ll 1$ ток совпадает с выражением в (7.21). Последнее неравенство эквивалентно $k^2 \ll \alpha^2$, что может быть записано как

$$\omega^2 \ll \omega_p^2 \quad \text{где} \quad \omega_p^2 = \frac{8e^2 v_F}{\mathcal{A} \hbar \epsilon}. \quad (7.58)$$

Одномерная концентрация электронов n_1 равна

$$n_1 = 2p_F/\pi\hbar \quad \text{где} \quad p_F = mv_F, \quad (7.59)$$

так что

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi n_1 e^2}{\mathcal{A}\epsilon m}, \quad \text{или} \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi n_3 e^2}{\epsilon m}. \quad (7.60)$$

ω_p может быть интерпретирована как плазменная частота. Фаза отклика определяется из (мы положили здесь $\text{th } kL/2 = 1$)

$$\text{tg } \phi = \frac{1 - (ka)^2}{2/kL - (ka)\sqrt{1 - (ka)^2}}. \quad (7.61)$$

Фаза ϕ равна $\pi/4$ для $kL = \omega L/v_F \simeq 2$.

Теперь обратимся к противоположному случаю слабого экранирования. Мы предположим $|v_F|/\omega \leq L \leq a$. Теперь γ дается выражением

$$\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad (7.62)$$

а поле

$$E_\omega(x) = \frac{V}{L} \left(1 - \frac{\cos \gamma(x - L/2) - (2/\gamma L) \sin \gamma L/2}{\alpha + \cos \gamma L/2 - (2/\gamma L) \sin \gamma L/2} \right). \quad (7.63)$$

В этом случае доминирующая вещественная часть поля слабо зависит от координаты (см. Рис. 7.4). Потенциал определяется выражением

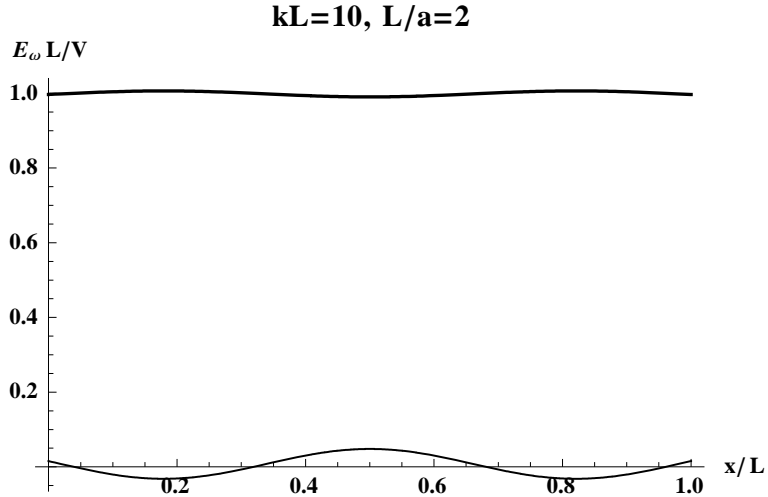


Рис. 7.4: Вещественная часть поля вдоль мостика в случае слабого экранирования почти однородна.

$$\varphi_\omega(x) = \frac{V}{2} \frac{(1 - 2x/L)[\alpha + \cos \gamma L/2] + (2/\gamma L) \sin \gamma(L/2 - x)}{\alpha + \cos \gamma L/2 - (2/\gamma L) \sin \gamma L/2}. \quad (7.64)$$

Для тока проводимости мы имеем

$$\frac{J_\omega(x)}{G_0V} = \frac{\gamma^2 \operatorname{tg} \gamma L/2 + i(k/\gamma)(1 - \cos[\gamma(x - L/2)]/\cos[\gamma L/2])}{\varkappa^2 - (1 + ik\gamma^2 L/2\varkappa^2) \operatorname{tg} \gamma L/2 + k^2 L\gamma/2\varkappa^2}. \quad (7.65)$$

Как показано на Рис. 7.5 ток проводимости в этом случае осциллирует вдоль мостика. Для определения полного тока рассмотрим сначала ток проводимости на концах мостика.

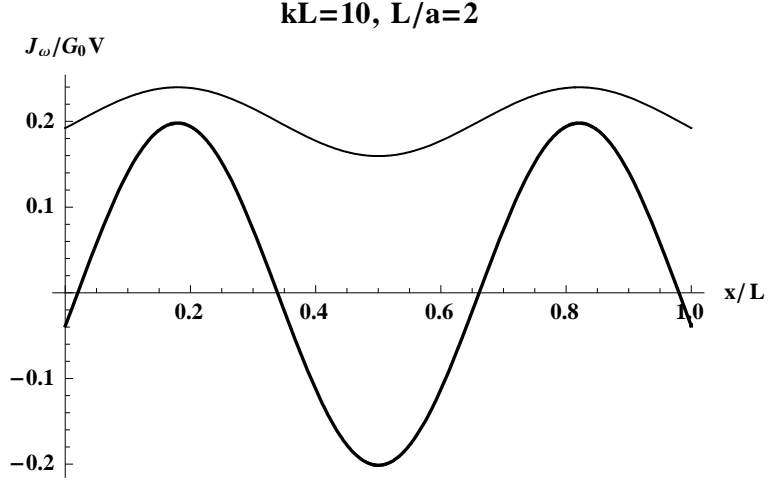


Рис. 7.5: Распределение тока проводимости вдоль баллистического мостика.

$$\frac{J_\omega(0)}{G_0V} = \frac{\sin \gamma L/2}{\gamma L/2} \frac{1}{(1 + \varkappa^2/\gamma^2) \cos \gamma L/2 - (i\sqrt{1 + \varkappa^2/\gamma^2} + 2\varkappa^2/\gamma^3 L) \sin \gamma L/2}. \quad (7.66)$$

Полный же ток дается выражением

$$\frac{J_\omega}{G_0V} = \frac{\gamma^2}{\varkappa^2} \frac{(1 - k^2/\varkappa^2) \operatorname{tg} \gamma L/2 - ik\gamma/\varkappa^2}{k^2 L\gamma/2\varkappa^2 - (1 + ik\gamma^2 L/2\varkappa^2) \operatorname{tg} \gamma L/2}. \quad (7.67)$$

Вещественная часть кондактанса обращается в нуль при условии $\sin \gamma L/2 = 0$, т.е. для частот

$$\omega = \omega_p \sqrt{1 + (2\pi na/L)^2}$$

отклик оказывается чисто реактивной природы. Для $\varkappa^2 \ll k^2$ ток проводимости и полный ток даются уравнениями (7.24) и (7.27) соответственно. Осциллирующий член в выражении для полного тока (7.27) гораздо меньше остальных. Однако мы его сохраняем, так как этот член может быть наблюдаем, если измеряется первая или вторая производная тока по ω или v_F . Зависимость тока от частоты $\omega/\omega_p \equiv k/\varkappa$ представлена на Рис. 7.6. Видно, что существует интервал частот, где индуктивный вклад в ток доминирует.

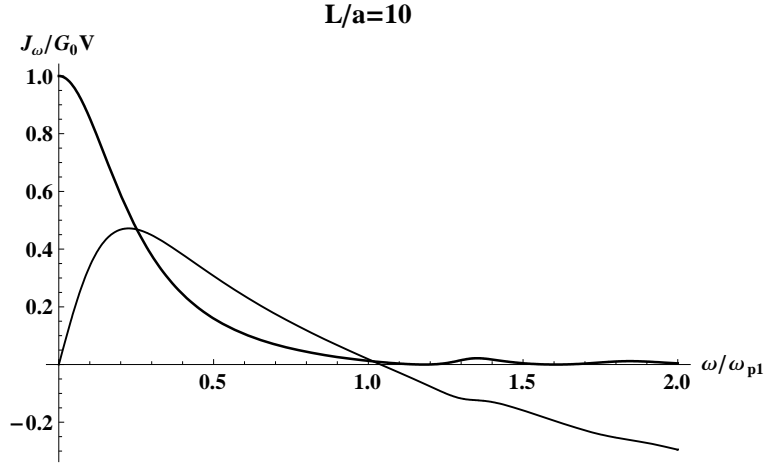


Рис. 7.6: Полный ток как функция частоты.

7.5 Многоканальный случай. Сильное экранирование.

До сих пор мы рассматривали ситуацию с одним открытым каналом в мостике с данной скоростью Ферми v_F . Можно исследовать и случай многих каналов, предполагая полную нейтральность. Предположим, что электроны в обоих резервуарах находятся в равновесии при одной и той же температуре, разница их химических потенциалов равна eV . В этой ситуации мы имеем дело с различными скоростями Ферми $v_F^{(n)}$ для разных каналов. Осциллирующие функции ξ и η также различны для различных каналов, сохранить общую нейтральность можно, только предполагая условие электронейтральности для каждого канала отдельно. Резкие падения при концах мостика сохраняются и определяются a (разными для различных каналов). Соотношения между этими падениями потенциала \tilde{V} и полем E_0 различны для разных каналов. Так как эти падения связаны с электрохимическими потенциалами, это означает, что каналы характеризуются различными парциальными химическими потенциалами. Это вовсе не уникальный случай в неравновесных условиях. Таким образом может быть сохранена электронейтральность. Помня об этих соображениях, мы получим для многоканального случая

$$\frac{G(\omega)}{G_0} = \sum_{n=1}^{n=N} \frac{1}{1 - ik_n L/2}. \quad (7.68)$$

Соответственно, для $kL \gg 1$ мы имеем чисто индуктивный отклик, полная индуктивность есть при этом сумма индуктивностей каналов.

Теперь рассмотрим двухканальный случай (см. Рис. 7.2). Сначала рассмотрим случай, когда электронов второго канала сравнительно мало, так что скорость Ферми этого канала $v_F^{(2)}$ много меньше скорости Ферми первого $v_F^{(1)}$. Тогда $k_1/k_2 = v_F^{(2)}/v_F^{(1)} \ll 1$. Полный ток при этом представлен на Рис. 7.7. Мы интересуемся областью относительно малых частот $\omega < \approx v_F^{(2)} \ll \approx v_F^{(1)}$, так как для больших частот отклик всегда емкостной и не отличается от такового в одноканальном случае (это иллюстрируется тонкой кривой на рисунке). В

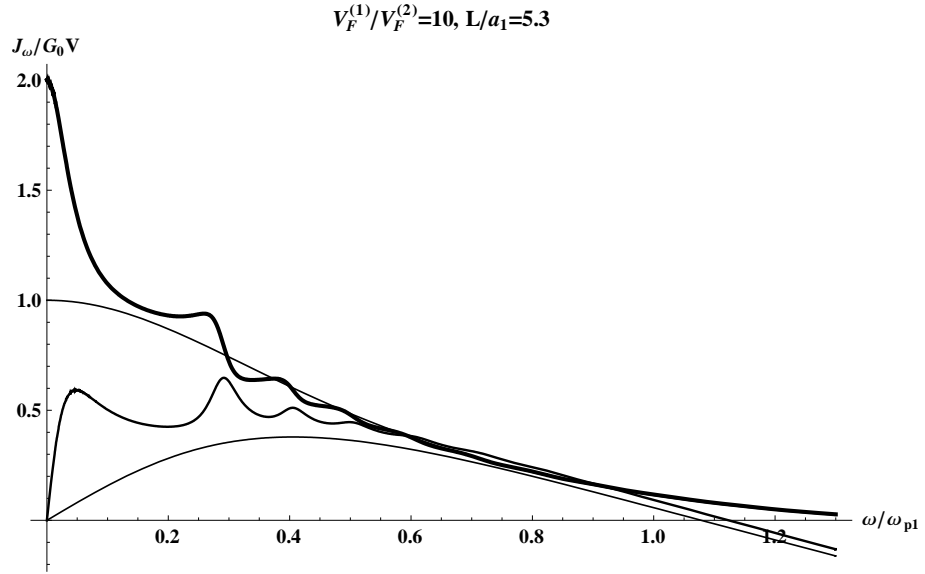


Рис. 7.7: Полный ток для двухканального случая.

этом случае мнимая часть тока всегда меньше вещественной части.

Если скорости Ферми двух каналов сближаются, мнимая часть тока может оказаться больше, чем вещественная. Тогда оба канала важны, и ситуация проиллюстрирована на Рис. 7.8. Добротность может оказаться больше в случае двух каналов по сравнению со случаем одного канала, как это видно из Рис. 7.9.

Для одного канала кинетическая индуктивность

$$\mathcal{L}_k = \frac{c^2}{2G_0 v_F} \cdot L; \quad \frac{1}{G_0} \simeq 13 \text{кОм}$$

($G_0 \simeq 6.97 \cdot 10^7 \text{см/с}$.) Сравним ее с геометрической индуктивностью \mathcal{L}_g

$$\mathcal{L}_g = 2L_c \ln \frac{L_c}{\ell},$$

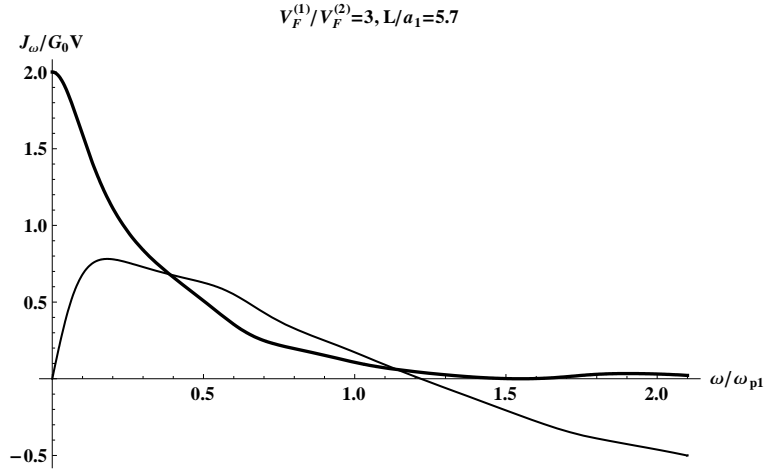


Рис. 7.8: Полный ток в случае важности обоих каналов

где ℓ поперечный размер проводника, L_c длина контура проводника. Если опустить логарифм и считать, что мы имеем многоканальный случай, то \mathcal{L}_k больше \mathcal{L}_g при

$$\frac{c^2 L}{G v_F L_c} \gg 1, \quad G = N G_0.$$

Вообще говоря [145], \mathcal{L}_g это первый член разложения по параметру квазистационарности $L_c \omega / c$ третьего члена в

$$R + \frac{\omega}{c^2} \oint \frac{\sin \omega r / c}{r} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}' - i \frac{\omega}{c^2} \oint \frac{\cos \omega r / c}{r} d\mathbf{l} \cdot d\mathbf{l}' = \mathcal{E}^{ext} / J.$$

Последнее уравнение есть следствие закона Ома

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^{ext}),$$

где учтено что поле определяется

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{i\omega}{c}\mathbf{A},$$

вектор потенциал связан с интегралом от тока по всему контуру

$$\mathbf{A}(\mathbf{l}) = \oint d\mathbf{l}' \frac{J}{r} e^{-i\omega r / c}$$

и падение потенциала вдоль всего контура

$$\oint \nabla\varphi d\mathbf{l} = 0.$$

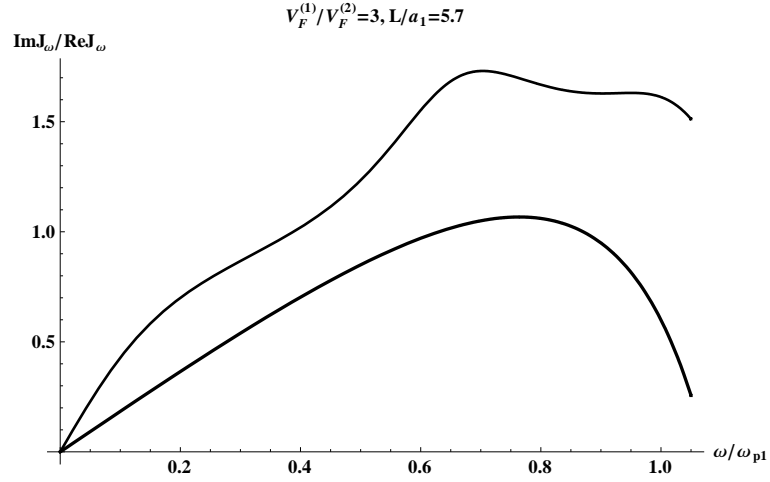


Рис. 7.9: Добротности для случаев одного и двух каналов.

7.6 Заключение

Для исследования нашей задачи мы использовали кинетическое уравнение для электронной функции распределения. Как это хорошо известно, одноканальное (чисто одномерное) состояние нестабильно и, как результат, это состояние можно описывать как жидкость Томонага-Латтинжера [20, 21]. В работах [142, 143] $G(\omega)$ вычислялся в рамках этой теории. Для наших же целей важно, что для слабого электрон-электронного взаимодействия, в частности, в случае малости газового параметра

$$g \equiv \frac{e^2}{\pi \epsilon \hbar v_F} \quad (7.69)$$

результаты оказываются такими же, как и при использовании подхода Ферми газа. Для $g > 1$ единственное различие оказывается в замене скорости Ферми v_F на перенормированную величину v_F^c . Помня об этом, мы и ограничились использованием кинетического уравнения для электронного Ферми газа при рассмотрении задачи. Существенное различие между работами [142, 143] и нашими результатами заключается в том, что при $g \ll 1$ и $k/\kappa \ll 1$ мы имеем соотношение (7.21), при этих условиях наш результат не совпадает с результатом работ [142, 143] главным образом потому, что рассматривается другая электродинамика.

Кинетическая индуктивность (в общем случае кинетическое комплексное сопротивление) можно зарегистрировать стандартными методами фазовых измерений, в частности,

измеряя импеданс контура, состоящего из мостика и емкости. В соответствии с нашими оценками, кинетическая индуктивность может быть сделана большей, чем геометрическая, так что свойства цепи могут оказаться нечувствительны к геометрии. Более того, \mathcal{L}_k можно манипулировать изменением параметров самого мостика (например, напряжением на затворе). Рассмотренная нами кинетическая индуктивность позволяет ввести индуктивные элементы в нанoeлектронные приборы (что, в принципе, позволяет, например, сдвигать фазу тока).

Глава 8

Выделение джоулева тепла при прохождении тока в наноструктурах

8.1 Введение

В течение последних десятилетий исследовались теоретически и экспериментально различные явления в квантовых проволоках, т. е. проводниках, у которых поперечные размеры порядка длины волны де Бройля электронов проводимости. Сюда относятся ступенчатое изменение кондактанса, дробовой шум, термоэлектрические свойства, кулоновское увлечение и целый ряд других кинетических явлений. Полное тепловыделение при прохождении тока через квантовую проволоку определяется из простых энергетических соображений, коль скоро известен кондактанс G проводника. Такие соображения, однако, ничего не говорят о пространственном распределении джоулева тепла. Между тем, знать соответствующие закономерности необходимо при конструировании устройств, использующих наноструктуры, равно как и больших интегральных схем с тем, чтобы уменьшить их перегрев. Обычно именно большое тепловыделение и его нелокальность затрудняют работу подобных устройств.

В этой главе обсуждается генерация джоулева тепла при бесстолкновительном прохождении постоянного и переменного тока в полупроводниковых квантовых проволоках, соединяющих два классических резервуара.

Расчет тепловыделения - альтернативный способ определения проводимости квантовой проволоки. В настоящей главе и будет рассмотрено тепловыделение при прохождении тока в квантовых проволоках [146, 147, 148, 149] (см. также обзор [150]).

Сопротивление классического баллистического точечного контакта между двумя металлами рассмотрено в пионерской работе Шарвина [10]. Характерные размеры контакта считались гораздо больше, чем длина волны де Бройля электронов. Кулик, Омелянчук и Шехтер [151] указали, что процессы, приводящие к сопротивлению контакта и к генерации тепла, пространственно разделены. Генерация джоулева тепла при прохождении тока через полупроводниковый точечный контакт в диффузионном режиме обсуждалось Рокни и Левинсоном [152].

Мы сначала обсудим выделение джоулева тепла для статической проводимости квантовых проволок. Затем мы рассмотрим высокочастотную проводимость. Считаем, что наноструктура имеет поперечный размер порядка длины волны де Бройля электронов λ . Она соединяет два резервуара — контакты, каждый из которых находится в равновесии (см. вставку на Рис. 8.1). Поданные на них потенциалы различаются, так что между ни-

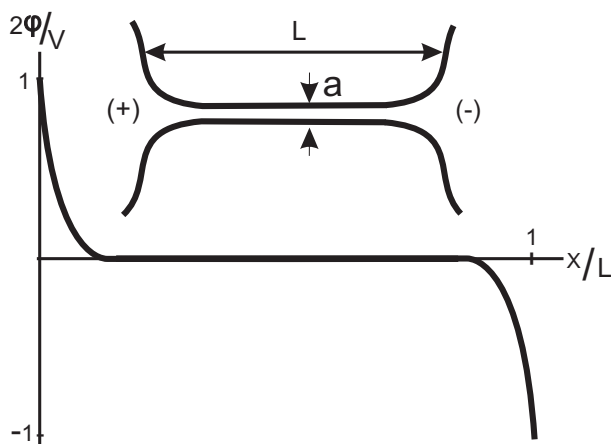


Рис. 8.1: Профиль наноструктуры в адиабатическом случае (вставка) и распределение электростатического потенциала.

ми протекает ток. Как мы убедимся, чтобы измерить кондактанс квантовой проволоки, резервуары должны удовлетворять условиям, позволяющим рассматривать их классически. Мы увидим, что это обстоятельство согласуется с общими положениями квантовой теории измерений.

Подчеркнем, что мы не делаем предположений относительно распределения потенциала вдоль наноструктуры, считая только, что оно является гладким в масштабе электронной волны де Бройля. Существует разница в постановке задач о распределении по-

тенциала в металлических микроконтактах и полупроводниковых нанопроволоках. Пространственное распределение электростатического потенциала в металле задается пространственным распределением тока и условием сильного экранирования зарядов — (см. [153, 154, 155, 156]). В полупроводниковых наноструктурах концентрация электронов сравнительно невелика и экранирование не столь существенно. Пространственное распределение потенциала в значительной мере задается расположением затворов и потенциалом на них. Обычно ток между наноструктурой и электродами-затворами пренебрежимо мал, так что потенциал вдоль поверхности каждого такого электрода постоянен.

Контакты, как уже отмечалось, будут считаться классическими. Оказывается, что тепло генерируется не в квантовой проволоке, а в резервуарах. Вот почему нам потребуется выражение для производства энтропии не только в проволоке, но и в классических проводниках — мы будем им пользоваться на протяжении всей главы. Такие формулы приведены для разных случаев в разделе 8.2. Хотя некоторые из них хорошо известны, мы запишем их в таком виде, которым удобно будет пользоваться в следующих разделах.

Будем рассматривать изолированные системы. Конкретно — имеем в виду следующую ситуацию. Имеется конденсатор, разряжающийся через интересующий нас проводник. Произведение RC такой системы, где R -сопротивление, а C - емкость, гораздо больше времени эксперимента, которое, в свою очередь, гораздо больше времен релаксации электронной и фононной систем. Это означает, что проводимость может считаться стационарной. Полная энергия такой системы \mathcal{U} сохраняется, а ее полная энтропия $\hat{\mathcal{S}}$ возрастает.

Если же речь идет о кондактансе $G(\omega)$ на конечной частоте, то можно представить себе такую ситуацию. Имеется колебательный контур с собственной частотой ω . В этот колебательный контур "встроен" интересующий нас проводник. Считается, что либо собственная частота гораздо больше коэффициента поглощения, обусловленного джоулевыми потерями, либо хотя бы одна из этих величин больше обратного времени эксперимента. При этом опять-таки полная энергия системы \mathcal{U} сохраняется, а энтропия $\hat{\mathcal{S}}$ возрастает; через нее и выражается скорость генерации тепла. Наша задача по существу и будет заключаться в вычислении $\hat{\mathcal{S}}$ для различных случаев, которые могут встретиться.

8.2 Кинетическое уравнение для электронов в полупроводниках. Трехмерный случай

Хотя наша цель и состоит в рассмотрении наноструктур, для вычисления производства энтропии нам понадобится кинетическое уравнение для объемного материала, так как практически вся механическая энергия будет диссипироваться в резервуарах.

Кинетическое уравнение для электронной функции распределения $F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ имеет вид

$$\frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} = \left[\frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.1)$$

Здесь $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \epsilon_{\mathbf{p}} + e\phi(\mathbf{r})$ полная энергия электрона, $\phi(\mathbf{r})$ электростатический потенциал. Правая часть этого уравнения описывает столкновения электронов с примесями (упругие столкновения) и с фононами (неупругие столкновения). Последние описываются фононной функцией распределения $N_{\mathbf{q}}$, которая в свою очередь удовлетворяет кинетическому уравнению для фононов

$$\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Omega_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.2)$$

Здесь $\Omega_{\mathbf{q}}$ частота фонона (которая, в общем случае, может слабо зависеть и от пространственных координат). Правая часть уравнения описывает столкновения фононов с примесями (упругие столкновения), с электронами и с фононами из-за ангармонизма колебаний решетки. Можно было бы включить в $[\partial F_{\mathbf{p}}/\partial t]_{\text{coll}}$ в уравнении (8.1) также и член, учитывающий электрон-электронные столкновения.

8.3 Сохранение энергии

Перейдем теперь к обсуждению закона сохранения энергии, или, другими словами, к скорости диссипации механической энергии. {Такой же метод можно применить к кинетическому уравнению, описывающего транспорт в наноструктурах [см. ниже уравнение (8.55)]}. Мы умножим уравнение (8.1) на $\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r})$, проинтегрируем по $d\xi_{\mathbf{p}}$, где $d\xi_{\mathbf{p}} = d^3p/(2\pi\hbar)^3$ (здесь подразумевается также суммирование по спиновым переменным; мы предполагаем, что электронная энергия не зависит от спина), и сложим с (8.2), предварительно преобразованного таким же образом, как уравнение (8.1). В последующем мы

воспользуемся следующим свойством интеграла столкновений в кинетическом уравнении

$$\int d\xi_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = 0, \quad (8.3)$$

означающего сохранение числа электронов при столкновениях. Используя закон сохранения заряда, который также следует из кинетического уравнения,

$$e \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \mathbf{j} = 0, \quad (8.4)$$

где

$$n(\mathbf{r}) = \int d\xi_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{j} = e \int d\xi_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}} \quad (8.5)$$

концентрация электронов и плотность тока соответственно, можно привести закон сохранения энергии к такой форме

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div} \mathbf{Q} = \mathbf{j} \mathbf{E}, \quad (8.6)$$

где $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ электрическое поле. Здесь мы воспользовались тем, что с учетом электрон-фононных столкновений полная энергия электронной и фононной систем сохраняется. В результате мы имеем уравнение (8.6), где плотность энергии и поток энергии даются выражениями

$$U = \int d\xi_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}} + \int d\eta_{\mathbf{q}} \hbar \Omega_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}}, \quad (8.7)$$

$$\mathbf{Q} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \epsilon_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}} \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} + \int d\eta_{\mathbf{q}} \hbar \Omega_{\mathbf{q}} N_{\mathbf{q}} \frac{\partial \Omega_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (8.8)$$

Здесь обозначение $d\eta_{\mathbf{q}} = d^3q/(2\pi)^3$ подразумевает также суммирование по фононным ветвям.

При выводе (8.6) мы воспользовались следующим преобразованием

$$\int d\xi_{\mathbf{p}} \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \int d\xi_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(\tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right]. \quad (8.9)$$

Первый член в правой части преобразуется в поверхностный интеграл, равный нулю, если поток энергии через поверхность отсутствует. Второй член в правой части можно преобразовать в интеграл по поверхности первой зоны Бриллюэна. Так как интегрируемое выражение имеет на противоположных гранях зоны одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку значения, то весь интеграл оказывается равным нулю. Точно такое же преобразование было проведено в отношении фононов.

Воспользовавшись уравнениями Максвелла (мы воспользуемся формулировкой уравнений Максвелла с тремя векторами, введя вектор обобщенной электрической индукции [157, 158]), уравнение (8.6) можно переписать в таком виде

$$\frac{\partial U^t}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{Q}^t = 0, \quad (8.10)$$

где введена полная энергия частиц и поля $U^t = U + (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)/8\pi$ и плотность потока энергии $\mathbf{Q}^t = \mathbf{Q} + c[\mathbf{E}\mathbf{B}]/4\pi$.

8.4 Производство энтропии

Уравнение для генерации энтропии, которое мы получим в этой главе, будет использовано ниже для выяснения вопроса о пространственном распределении диссипации механической энергии. Это уравнение применимо как к объемным материалам, так и к наноструктурам (как уже упоминалось), так как, хотя ток и протекает в узком канале, диссипация энергии и выделение тепла происходят в соединенных с этим каналом объемных резервуарах.

Уравнение для полной энтропии неравновесных электронного и фононного газов выглядит так

$$\hat{S} = \int d^3r S(\mathbf{r}). \quad (8.11)$$

Здесь $S = S^{(e)} + S^{(p)}$, где (мы положим постоянную Больцмана $k_B = 1$, измеряя температуру в единицах энергии)

$$S^{(e)} = \int d\xi_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{p}}^{(e)}, \quad s_{\mathbf{p}}^{(e)} = -F_{\mathbf{p}} \ln F_{\mathbf{p}} - (1 - F_{\mathbf{p}}) \ln(1 - F_{\mathbf{p}}), \quad (8.12)$$

$$S^{(p)} = \int d\eta_{\mathbf{q}} s_{\mathbf{q}}^{(p)}, \quad s_{\mathbf{q}}^{(p)} = -N_{\mathbf{q}} \ln N_{\mathbf{q}} + (1 + N_{\mathbf{q}}) \ln(1 + N_{\mathbf{q}}). \quad (8.13)$$

Дифференцируя S по времени и подставляя $\partial F_{\mathbf{p}}/\partial t$ и $\partial N_{\mathbf{q}}/\partial t$ из соответствующих кинетических уравнений для электронов (8.1) и фононов (8.2), мы получим

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{s} = \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.14)$$

Здесь скорость производства плотности энтропии дается выражением

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} \ln \frac{1 - F_{\mathbf{p}}}{F_{\mathbf{p}}} + \int d\eta_{\mathbf{q}} \left[\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} \ln \frac{1 + N_{\mathbf{q}}}{N_{\mathbf{q}}}, \quad (8.15)$$

в то время как $\mathbf{s} = \mathbf{s}^{(e)} + \mathbf{s}^{(p)}$ есть поток энтропии. Используя тождества

$$\frac{\partial F_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}(\mathbf{p})} \ln \frac{1 - F_{\mathbf{p}}}{F_{\mathbf{p}}} = \frac{\partial s_{\mathbf{p}}^{(e)}}{\partial \mathbf{r}(\mathbf{p})} \quad (8.16)$$

имеем

$$\mathbf{s}^{(e)} = \int d\xi_{\mathbf{p}} s_{\mathbf{p}}^{(e)} \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \mathbf{s}^{(p)} = \int d\eta_{\mathbf{q}} s_{\mathbf{q}}^{(p)} \frac{\partial \Omega_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}. \quad (8.17)$$

При выводе (8.14) мы воспользовались преобразованием

$$\int d\xi_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial s_{\mathbf{p}}^{(e)}}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial s_{\mathbf{p}}^{(e)}}{\partial \mathbf{p}} \right] = \int d\xi_{\mathbf{p}} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left(s_{\mathbf{p}}^{(e)} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(s_{\mathbf{p}}^{(e)} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \right) \right] \quad (8.18)$$

и учли, что интегралы

$$\int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left(s_{\mathbf{p}}^{(e)} \frac{\partial \tilde{\epsilon}_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad \int d\eta_{\mathbf{q}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(s_{\mathbf{q}}^{(p)} \frac{\partial \Omega_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{r}} \right) \quad (8.19)$$

исчезают благодаря периодичности подынтегральных выражений в обратном пространстве решетки. Предположив, что потока энтропии через границы образца нет, и проинтегрировав (8.14), получим

$$\frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt} = \int d^3r \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.20)$$

8.5 Диссипация механической энергии

Изолированная макроскопическая система обладает *механической энергией*, \mathcal{E} (см. [159], §19, а также [160], §79). Это значит, что благодаря внутренним процессам, без изменения его объема, система может совершать работу над внешними системами. В общем случае это количество работы зависит от того, каким именно образом изменяется внутреннее состояние рассматриваемой системы. Механическая энергия есть максимальная работа, производимая системой при ее переходе в термодинамическое равновесие.

Известно (см. [159]), что

$$\mathcal{U} = \mathcal{E} + \mathcal{U}_0(\hat{\mathcal{S}}), \quad (8.21)$$

где $\mathcal{U}_0(\hat{\mathcal{S}})$ это энергия системы в термодинамическом равновесии, выраженная как функция ее энтропии $\hat{\mathcal{S}}$ [т.е. (8.11)] соотношениями равновесной термодинамики. Беря производную по времени, мы можем написать

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}_0}{d\hat{\mathcal{S}}} \frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} + T_0 \frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt}, \quad (8.22)$$

где $T_0(\hat{\mathcal{S}})$ температура равновесной системы с энтропией равной $\hat{\mathcal{S}}$. Производная в правой стороне этого уравнения обращается в нуль благодаря закону сохранения энергии для изолированной системы. Используя (8.20), можно получить

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -T_0 \frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt} = -T_0 \int d^3r \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.23)$$

Это означает, что механическая энергия изолированной системы, в отличие от ее полной энергии, не сохраняется. При релаксационных процессах, приводящих систему в равновесное состояние, механическая энергия диссипирует(ся) и превращается в тепло. Уравнение (8.23) описывает скорость этой диссипации в рассматриваемой неравновесной системе.

8.6 Производство энтропии в объеме

Дадим явные выражения для производства энтропии благодаря различным типам столкновений между электронами, фононами и примесями (не предполагая отклонение от равновесия малым). Для объемных материалов мы дадим их без вывода и ограничимся обсуждением только их важных свойств. (Для малых отклонений от равновесия некоторые из этих выражений можно найти в [89]). Существенно, что мы рассматриваем контакты, связанные наноструктурой, как объемные. Мы увидим (см. 8.11), что *именно в этих (классических) объемных контактах тепло и выделяется*. Для вычислений необходимо иметь выражение для производства энтропии в объемных классических системах, т.е. в системах с размерами, намного превышающими длину волны де Бройля.

8.6.1 Столкновения электронов с примесями

Для столкновений с примесями

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \frac{n_i}{2} \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) (F_{\mathbf{p}} - F_{\mathbf{p}'}) \ln \frac{(1 - F_{\mathbf{p}'}) F_{\mathbf{p}}}{(1 - F_{\mathbf{p}}) F_{\mathbf{p}'}}. \quad (8.24)$$

Здесь n_i концентрация примесей, $w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ вероятность электрон-примесного рассеяния из состояния \mathbf{p} в состояние \mathbf{p}' . Вероятность $w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$ пропорциональна $\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'})$ из-за закона сохранения энергии¹. Видно, что это выражение (8.24) неотрицательно. Оно

¹Заметим, что при выводе этого уравнения мы воспользовались интегралом столкновений с примесями в виде $\sum_{\mathbf{p}'} [w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) F_{\mathbf{p}'} - w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') F_{\mathbf{p}}] = \sum_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) F_{\mathbf{p}'} - F_{\mathbf{p}} \sum_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Так как $\sum_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \sum_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}', \mathbf{p})$, то интеграл столкновений можно написать в упрощенном виде $\sum_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) [F_{\mathbf{p}'} - F_{\mathbf{p}}]$.

обращается в нуль, если $F_{\mathbf{p}}$ произвольная функция энергии $\epsilon_{\mathbf{p}}$. Физически это означает, что столкновения электронов с примесями приводят к релаксации электронной функции распределения лишь в пределах поверхности постоянной энергии.

Нужно заметить, что выражение (8.24) получается в результате так называемого конфигурационного усреднения, т. е. усреднения по положениям примесей. Вопрос о том, когда оно допустимо, подробно обсужден в работах [161, 107].

8.6.2 Электрон-электронные столкновения

В этом случае (ср. с [46])

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} &= \frac{1}{4} \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\xi_{\mathbf{p}_1} \int d\xi_{\mathbf{p}'_1} w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}') \times \\ &\times [(1 - F_{\mathbf{p}'}) (1 - F_{\mathbf{p}}) F_{\mathbf{p}_1} F_{\mathbf{p}'_1} - (1 - F_{\mathbf{p}_1}) (1 - F_{\mathbf{p}'_1}) F_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}'}] \times \\ &\times \ln \frac{(1 - F_{\mathbf{p}'}) (1 - F_{\mathbf{p}}) F_{\mathbf{p}_1} F_{\mathbf{p}'_1}}{(1 - F_{\mathbf{p}_1}) (1 - F_{\mathbf{p}'_1}) F_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}'}}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Здесь $w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}')$ вероятность электрон-электронных столкновений, где \mathbf{p}, \mathbf{p}' относится к начальным, а $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1$ к конечным. Она пропорциональна $\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} + \epsilon_{\mathbf{p}'} - \epsilon_{\mathbf{p}_1} - \epsilon_{\mathbf{p}'_1})$. Столкновения являются достаточно редкими, так что электронная система может рассматриваться как Ферми-газ при условии

$$\frac{e^2}{\varepsilon \hbar v} \ll 1, \quad (8.26)$$

где ε — диэлектрическая проницаемость полупроводника, v — скорость Ферми. Это условие позволяет при вычислении вероятностей переходов использовать Борновское приближение, поэтому мы можем считать, что вероятность столкновения обладает необходимым свойством симметрии $w(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1; \mathbf{p}, \mathbf{p}') = w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$, использованным при выводе (8.25).

Изменение энтропии в (8.25) обращается в нуль, если $F_{\mathbf{p}}$ функция Ферми $F^{(0)}$, зависящая от произвольного химического потенциала и температуры. Если электронный квазиимпульс \mathbf{p} сохраняется при электрон-электронных столкновениях, $[dS/dt]_{\text{coll}}$ обращается в нуль также в случае, когда функция $F_{\mathbf{p}}$ принимает вид

$$F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mathbf{p}\mathbf{V} - \mu), \quad (8.27)$$

где \mathbf{V} произвольный вектор, имеющий физический смысл дрейфовой скорости.

8.6.3 Электрон-фононные столкновения

Для вычисления произведения энтропии нужно рассматривать электрон-фононные и фонон-электронные столкновения совместно. В результате (см. [162])

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \ln \frac{(1 - F_{\mathbf{p}})F_{\mathbf{p}'}(N_{\mathbf{q}} + 1)}{(1 - F_{\mathbf{p}'})F_{\mathbf{p}}N_{\mathbf{q}}} \times \\ \times [F_{\mathbf{p}'}(1 - F_{\mathbf{p}})(N_{\mathbf{q}} + 1) - F_{\mathbf{p}}(1 - F_{\mathbf{p}'})N_{\mathbf{q}}]. \quad (8.28)$$

Здесь $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q})$ вероятность электрон-фононного столкновения, пропорциональная $\delta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \epsilon_{\mathbf{p}'} + \hbar\Omega_{\mathbf{q}})$. При излучении фонона второй аргумент в вероятности относится к начальному состоянию электрона. Квазиимпульсы электрона и фонона связаны законом сохранения

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \hbar\mathbf{q} = \hbar\mathbf{b}, \quad (8.29)$$

где \mathbf{b} вектор обратной решетки. Для нормальных процессов $\mathbf{b} = 0$ и мы имеем

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' + \hbar\mathbf{q} = 0. \quad (8.30)$$

В общем случае процессов с перебросом справедливо уравнение (8.29) с $\mathbf{b} \neq 0$.

Выражение (8.28) неотрицательно. Оно обращается в нуль, если $F_{\mathbf{p}}$ есть функция Ферми $F^{(0)}$ от $(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)/T$ с произвольным химическим потенциалом μ и температурой T , а $N_{\mathbf{q}}$ — функция Планка $N^{(0)}$ от $\hbar\Omega_{\mathbf{q}}/T$, зависящая от той же температуры T . Если важны только нормальные электрон-фононные столкновения, оно обращается в нуль также для функции распределения электронов вида (8.27), при условии, что фононная функция распределения есть функция Планка от $(\Omega_{\mathbf{q}} - \mathbf{q}\mathbf{V})/T$.

8.6.4 Фонон-фононные столкновения

Мы рассмотрим трехфононные процессы, возникающие благодаря кубическому ангармонизму в гамильтониане взаимодействия. Мы имеем (см. [163])

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \int d\eta_{\mathbf{q}} \int d\eta_{\mathbf{q}'} \int d\eta_{\mathbf{q}''} w(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}'') [(N_{\mathbf{q}} + 1)(N_{\mathbf{q}'} + 1)N_{\mathbf{q}''} - N_{\mathbf{q}}N_{\mathbf{q}'}(N_{\mathbf{q}''} + 1)] \times \\ \times \ln \frac{(N_{\mathbf{q}} + 1)(N_{\mathbf{q}'} + 1)N_{\mathbf{q}''}}{N_{\mathbf{q}}N_{\mathbf{q}'}(N_{\mathbf{q}''} + 1)}, \quad (8.31)$$

где $w(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}'')$ соответствующая вероятность трехфононного процесса [без учета множителей $N_{\mathbf{q}}$ и $(N_{\mathbf{q}} + 1)$]. Для случая поглощения одного фонона и излучения двух первые два аргумента в этой вероятности соответствуют испущенным фононам, $w(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}'')$ пропорционально $\delta(\Omega_{\mathbf{q}} + \Omega_{\mathbf{q}'} - \Omega_{\mathbf{q}''})$. Здесь

$$\mathbf{q}'' = \mathbf{q} + \mathbf{q}' + \mathbf{b}, \quad (8.32)$$

где вектор \mathbf{b} равен или 0 (для нормальных процессов), или вектору обратной решетки (для процессов с перебросом). Если важны процессы переброса, выражение (8.31) обращается в нуль, если $N_{\mathbf{q}}$ функция Планка произвольной температуры.

8.6.5 Столкновения фононов с дефектами решетки

Явные выражения для $[dS/dt]_{\text{coll}}$ не очень отличаются от уравнения (8.24) (см. [163]), и мы не будем приводить их здесь. Этот вклад обращается в нуль, если $N_{\mathbf{q}}$ произвольная функция фононной энергии $\hbar\Omega_{\mathbf{q}}$.

8.7 Закон Ома

В этом разделе мы обсудим важный случай линейной зависимости между напряжением и током, так что отклонения функций распределения от равновесных функций малы

$$F_{\mathbf{p}} = F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}}) + \Delta F_{\mathbf{p}}, \quad N_{\mathbf{q}} = N^{(0)}(\Omega_{\mathbf{q}}) + \Delta N_{\mathbf{q}}, \quad (8.33)$$

где $\Delta F_{\mathbf{p}}$ и $\Delta N_{\mathbf{q}}$ удовлетворяют *линеаризованным* кинетическим уравнениям. $\Delta F_{\mathbf{p}}$ и $\Delta N_{\mathbf{q}}$ должны быть пропорциональны внешнему электрическому полю, это поле мы считаем единственным источником, вызывающим отклонение функций от равновесия. Так как столкновительные члены исчезают для равновесных частей функций распределения, можно выразить производство энтропии через линеаризованный оператор столкновений I , который действует на $\Delta F_{\mathbf{p}}$ и $\Delta N_{\mathbf{q}}$. Линейные члены $\Delta F_{\mathbf{p}}$ и $\Delta N_{\mathbf{q}}$ не дают вклада в производство энтропии. В этом можно убедиться или непосредственной проверкой, или используя следующие физические соображения. Дело в том, что линейный член в $\Delta F_{\mathbf{p}}$ или $\Delta N_{\mathbf{q}}$ может иметь любой знак, в то время как производство энтропии должно быть неотрицательным.

Раскладывая подынтегральное выражение в (8.24) по $\Delta F_{\mathbf{p}}$ и $\Delta F_{\mathbf{p}'}$ мы получим [89]

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \frac{n_i}{2} \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} w(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \frac{(\Delta F_{\mathbf{p}} - \Delta F_{\mathbf{p}'})^2}{F_{\mathbf{p}}^{(0)}(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})}. \quad (8.34)$$

Чтобы записать главные члены разложения в уравнениях (8.25), (8.28), (8.31) в компактной форме, удобно ввести функции $\chi_{\mathbf{p}}$ и $\nu_{\mathbf{q}}$, определенные как

$$\Delta F_{\mathbf{p}} = \chi_{\mathbf{p}} F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}})[1 - F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}})], \quad \Delta N_{\mathbf{q}} = \nu_{\mathbf{q}} N^{(0)}(\Omega_{\mathbf{q}})[N^{(0)}(\Omega_{\mathbf{q}}) + 1]. \quad (8.35)$$

Мы получим для электрон-электронных, электрон-фононных и фонон-фононных столкновений соответственно

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} &= \frac{1}{4} \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\xi_{\mathbf{p}_1} \int d\xi_{\mathbf{p}'_1} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) \times \\ &\times (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)})(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})F_{\mathbf{p}_1}^{(0)}F_{\mathbf{p}'_1}^{(0)}(\chi_{\mathbf{p}} + \chi_{\mathbf{p}'} - \chi_{\mathbf{p}_1} - \chi_{\mathbf{p}'_1})^2, \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} F_{\mathbf{p}}^{(0)}(1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)})N_{\mathbf{q}}^{(0)}w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q})(\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{p}'} + \nu_{\mathbf{q}})^2, \quad (8.37)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \frac{1}{2} \int d\eta_{\mathbf{q}} \int d\eta_{\mathbf{q}'} \int d\eta_{\mathbf{q}''} N_{\mathbf{q}}^{(0)}(N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1)w(\mathbf{q}, \mathbf{q}', -\mathbf{q}'')(\nu_{\mathbf{q}} + \nu_{\mathbf{q}'} - \nu_{\mathbf{q}''})^2. \quad (8.38)$$

Для получения полного произведения энтропии надо проинтегрировать эти уравнения по всему объему проводника.

Мы уже отмечали, что уравнение (8.34) и уравнения (8.36), (8.37), (8.38) квадратичны относительно отклонений функций распределения от равновесных значений. Это означает, что для вычисления диссипации энергии и джоулевых потерь достаточно решить кинетическое уравнение с точностью до первого порядка по электрическому полю \mathbf{E} . Мы считаем это замечание важным, так как в некоторых работах для вычисления производства тепла кинетическое уравнение решается до второго порядка по полю включительно.

Имея в виду дальнейшие приложения, мы хотим отметить, что эти уравнения можно представить и в другом виде. Как пример, мы рассмотрим уравнение (8.37). Можно написать

$$\left[\frac{\partial(F^{(0)} + \Delta F)}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = I\Delta F. \quad (8.39)$$

Точно таким же образом

$$\left[\frac{\partial(N^{(0)} + \Delta N)}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = I\Delta N, \quad (8.40)$$

где мы используем одинаковое обозначение I для линеаризованного оператора, действующего на ΔF и ΔN . Так как

$$\ln \frac{1 - F^{(0)}}{F^{(0)}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu}{T}, \quad \ln \frac{1 + N^{(0)}}{N^{(0)}} = \frac{\hbar\Omega_{\mathbf{q}}}{T},$$

можно убедиться, что благодаря сохранению энергии и числа электронов при электрон-фоонных столкновениях члены, линейные по ΔF и ΔN , исчезают. Так и должно быть, так как линейные члены могут иметь любой знак, в то время как производство энтропии должно быть неотрицательным. Квадратичный член можно записать в следующем виде

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = - \int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{\Delta F_{\mathbf{p}}}{F_{\mathbf{p}}^{(0)}(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})} I \Delta F_{\mathbf{p}} - \int d\eta_{\mathbf{q}} \frac{\Delta N_{\mathbf{q}}}{N_{\mathbf{q}}^{(0)}(1 + N_{\mathbf{q}}^{(0)})} I \Delta N_{\mathbf{q}}. \quad (8.41)$$

Уравнения (8.36) и (8.38) также можно преобразовать к аналогичному виду.

Если релаксационные процессы в фоонной системе быстрые, можно пренебречь в уравнении (8.41) вторым членом и остается лишь такой вклад

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = - \int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{\Delta F_{\mathbf{p}}}{F_{\mathbf{p}}^{(0)}(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})} I \Delta F_{\mathbf{p}}, \quad (8.42)$$

где I линейный интегральный оператор, действующий на $\Delta F_{\mathbf{p}}$. Он принимает для электрон-фоонных столкновений следующий вид

$$\begin{aligned} I \Delta F_{\mathbf{p}} = & \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} \Delta F_{\mathbf{p}'} \left\{ w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \left[(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)}) N_{\mathbf{q}} + F_{\mathbf{p}}^{(0)} (N_{\mathbf{q}} + 1) \right] + \right. \\ & \left. + w(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \mathbf{q}) \left[(1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)}) (N_{\mathbf{q}} + 1) + F_{\mathbf{p}}^{(0)} N_{\mathbf{q}} \right] \right\} - \\ & - \Delta F_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} \left\{ w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \left[F_{\mathbf{p}'}^{(0)} (N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1) + (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)}) N_{\mathbf{q}}^{(0)} \right] + \right. \\ & \left. + w(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \mathbf{q}) \left[F_{\mathbf{p}'}^{(0)} N_{\mathbf{q}}^{(0)} + (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)}) (N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Это алгебраическая сумма двух членов. Один из них интегральный с $\Delta F_{\mathbf{p}'}$ под интегралом. Второй член имеет обычную форму релаксационного члена

$$\left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{\text{coll}}^{(\tau)} = - \frac{\Delta F_{\mathbf{p}}}{\tau_{\mathbf{p}}}, \quad (8.44)$$

где время релаксации $\tau_{\mathbf{p}}$ дается выражением

$$\frac{1}{\tau_{\mathbf{p}}} = \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} \left\{ w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) \left[F_{\mathbf{p}'}^{(0)} (N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1) + (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)}) N_{\mathbf{q}}^{(0)} \right] + \right.$$

$$+w(\mathbf{p}', \mathbf{p}; \mathbf{q})[F_{\mathbf{p}'}^{(0)} N_{\mathbf{q}}^{(0)} + (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)})(N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1)]\}. \quad (8.45)$$

В приближении времени релаксации, когда по каким-либо физическим причинам можно отбросить интегральный член, мы имеем

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{(\Delta F_{\mathbf{p}})^2}{\tau_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}^{(0)} (1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})}. \quad (8.46)$$

Можно использовать это выражение, если $\Delta F_{\mathbf{p}}$ имеет резкий максимум для определенных \mathbf{p} и интеграл в (8.46) определяется величинами $\Delta F_{\mathbf{p}}$ в малой окрестности максимума (см., например [164], §7.3). Такая ситуация будет нами рассмотрена ниже в разделе 8.11.

8.8 Примеры

В этом разделе мы кратко обсудим несколько примеров вычисления производства тепла в объемных материалах в омическом режиме. Их можно рассматривать как предварительный шаг для вычисления производства тепла током через наноструктуру для различных типов резервуаров. Хотя ниже (см. раздел 8.10) мы и вычислим генерацию тепла для определенного типа резервуара, рассмотрение, приведенное в этом разделе, позволяет обобщить результаты и для других случаев.

8.8.1 Остаточное сопротивление

Это простейший пример генерации тепла. Тем не менее, этот случай заслуживает обсуждения, так как иногда в физической литературе можно найти утверждения, что только неупругие столкновения могут приводить к диссипации энергии и производству тепла. Столкновения с примесями сохраняют энергию электрона. Линеаризованное кинетическое уравнение (для произвольной анизотропии электронного спектра и взаимодействия с примесями) есть

$$I\Delta F = -\frac{\partial F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}})}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} e\mathbf{E}\mathbf{v}. \quad (8.47)$$

Интеграл $\int d\xi_{\mathbf{p}} I\Delta F = 0$ из-за сохранения числа частиц (8.3). Интеграл по $d\xi_{\mathbf{p}}$ в правой стороне (8.47) также обращается в нуль, так как \mathbf{v} нечетная функция \mathbf{p} , в то время как все остальные функции четные. Это означает, что уравнение (8.47) имеет решение. Оператор I определен на классе таких функций, для которых среднее по любой изоэнергетической

поверхности обращается в нуль. Функция в правой стороне уравнения (8.47) принадлежит такому классу. Это значит, что можно ввести обратный оператор и записать решение уравнения (8.47) в следующей символической форме

$$\Delta F = -\frac{\partial F^{(0)}(\epsilon_{\mathbf{p}})}{\partial \epsilon_{\mathbf{p}}} e\mathbf{E}I^{-1}\mathbf{v}. \quad (8.48)$$

Здесь I^{-1} обратный оператор, действующий на скорость электрона \mathbf{v} . Подставляя уравнение (8.48) в (8.24), получим

$$T \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sigma_{ik} E_i E_k, \quad (8.49)$$

где

$$\sigma_{ik} = \frac{e^2}{T} \int d\xi_{\mathbf{p}} v_i I^{-1} v_k (1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)}) F_{\mathbf{p}}^{(0)}. \quad (8.50)$$

Одни лишь упругие столкновения привели к диссипации механической энергии. Это имеет ясный физический смысл. Упорядоченное электронное распределение в электрическом токе можно использовать для производства механической работы. Например, протекание тока через кольцо (катушку) втягивает магнитный стержень в кольцо. Эта работа над стержнем совершается электронами, проводящими ток. Результатом столкновений является уменьшение порядка в электронном распределении, что и означает диссипацию механической энергии.

В рассмотренном примере неупругие столкновения были необязательны для диссипации механической энергии. Если электронный вклад в теплоемкость преобладает над решеточным Дебаевским вкладом, энергия остается в электронной системе даже при каком-то электрон-фононном рассеянии. При обратном соотношении теплоемкостей тепло в конце концов перейдет к решетке. Но даже в этом последнем случае, если электрон-примесные столкновения происходят гораздо чаще, чем электрон-фононные, именно первые определяют генерацию энтропии. Конечно, неупругие столкновения необходимы для достижения электронной системой полного равновесия. Тем не менее, при наших предположениях они мало влияют на сопротивление и генерацию тепла.

8.8.2 Электрон-фононное рассеяние

Другая возможная ситуация – это производство тепла при доминирующей роли электрон-фононных столкновений. Мы предположим, что релаксационные процессы за счет фонон-

фононных столкновений и рассеяния фононов на дефектах настолько быстры по сравнению с электрон-фоонными процессами, что с достаточной точностью фононы можно рассматривать как равновесные. Тогда фононы описываются функцией Планка и результат можно представить в следующей форме

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int d\xi_{\mathbf{p}} \int d\xi_{\mathbf{p}'} \int d\eta_{\mathbf{q}} F_{\mathbf{p}}^{(0)} (1 - F_{\mathbf{p}'}^{(0)}) N_{\mathbf{q}}^{(0)} w(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{q}) (\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{p}'})^2. \quad (8.51)$$

Это можно представить себе как результат релаксации и квазиимпульса, и энергии электронов из-за столкновений их с равновесными фононами.

Этот результат можно также записать через обратный линеаризованный оператор столкновений (см. [165]). Однако в этом случае такой оператор будет смешивать электронные состояния с различными энергиями.

8.8.3 Взаимное электрон-фоонное увлечение

Если доминирующими являются нормальные электрон-фоонные столкновения, мы получим

$$\chi_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathbf{V}/T; \nu_{\mathbf{q}} = \hbar\mathbf{q}\mathbf{V}/T.$$

Учитывая уравнение (8.30), мы видим, что производство энтропии, даваемое уравнением (8.38), обращается в нуль. Это означает, что все производство энтропии происходит за счет фоонных процессов, хотя электроны и испытывают неупругие столкновения с фононами. Что касается геометрии производства тепла, этот случай может оказаться противоположным рассмотренному в разделе 8.8.1. В случае остаточного сопротивления генерация тепла дублирует пространственное распределение $\mathbf{E}^2(\mathbf{r})$ (при условии плавности этого распределения). Наоборот, случай, рассмотренный здесь, может быть нелокальным, так как генерация энтропии определяется фоонными столкновениями. Эта генерация, например, может иметь место *вне* области падения потенциала.

8.9 Перенос в квантовой наноструктуре

Перейдем к главной цели этой главы — рассмотрению наноструктуры, соединяющей два резервуара (см. вставку на Рис. 8.1). Движение электронов в продольном направлении

этой структуры (x) инфинитно и в этом же направлении протекает ток. В перпендикулярном направлении \mathbf{r}_\perp электронное движение квантовано. Для определенности мы будем говорить о трехмерной ситуации, переход к двумерной ситуации можно осуществить простым изменением обозначений. Мы рассматриваем так называемый адиабатический случай (см. [166]), где потенциальный профиль наноструктуры меняется плавно вдоль оси x , изменение происходит на масштабах гораздо больших λ (где λ длина волны де Бройля электрона). Подразумевается, что длина свободного пробега гораздо больше характерных размеров микроструктуры. Тогда имеется система одномерных электронных зон (*каналов*), описывающих движение электрона в структуре и в соединенных со структурой берегах. Это продольное движение можно рассматривать (квази)классически. Поперечное же движение квантовано. Следуя подходу Глазмана и др. [166], мы предположим, что переменные x и \mathbf{r}_\perp разделяются в адиабатическом приближении. Это значит, что при заданной продольной координате x зависимость потенциала от \mathbf{r}_\perp определяет волновую функцию поперечного движения $\eta_n(\mathbf{r}_\perp; x)$, зависящую от x координаты как от параметра. Здесь n описывает поперечное квантование. Электронный спектр зависит от x , и эта зависимость имеет вид

$$\epsilon_n(p; x) = p^2/2m + \epsilon_n(0; x), \quad (8.52)$$

где m эффективная масса электрона и $\epsilon_n(0, x)$ положение дна зоны (начала отсчета продольной части энергии одномерной зоны), зависящее от x как от параметра. $\epsilon_n(0; x)$ являются собственными значениями гамильтониана

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + e\phi(\mathbf{r}_\perp; x). \quad (8.53)$$

Электронную волновую функцию можно записать в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp \left(i \int p(x') dx' / \hbar \right) \eta_n(\mathbf{r}_\perp; x). \quad (8.54)$$

Сохранение энергии для рассматриваемой системы можно по аналогии с (8.6) записать в такой интегральной форме

$$\frac{d\mathcal{U}}{dt} = J\mathcal{V}, \quad (8.55)$$

где

$$\mathcal{U} = \sum_n \int dx \int d\xi_p \epsilon_{np} F_{np}, \quad (8.56)$$

а J полный ток через наноструктуру, даваемый выражением

$$J = e \sum_n \int d\xi_p v_{np} F_{np}. \quad (8.57)$$

Здесь $d\xi_p = dp/2\pi\hbar$ (суммирование по спиновым переменным подразумевается), $v_{np} = \partial\epsilon_{np}/\partial p = p/m$ электронная групповая скорость (не зависящая явно от n), $F_{np}(x)$ это функция распределения электронов, зависящая от квантового числа n как от параметра, в то время как p (x компонента квазиимпульса электрона) и x классические переменные. $F_{np}(x)$ удовлетворяет кинетическому уравнению

$$v \frac{\partial F_{np}(x)}{\partial x} - \frac{\partial F_{np}(x)}{\partial p} \frac{\partial \epsilon_{np}(x)}{\partial x} = \left[\frac{\partial F_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.58)$$

8.10 Производство энтропии в наноструктуре

Скорость производства энтропии для наноструктуры дается уравнением (8.23)

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -T_0 \frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt}. \quad (8.59)$$

Для системы, взаимодействующей с фононами, производство энтропии описывается формулой

$$\frac{d\hat{\mathcal{S}}}{dt} = \int dx \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} \quad (8.60)$$

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_n \int d\xi_p \ln \frac{1 - F_{np}}{F_{np}} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{\text{coll}} + \int d\eta_{\mathbf{q}} \ln \frac{1 + N_{\mathbf{q}}}{N_{\mathbf{q}}} \left[\frac{\partial N}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.61)$$

Интеграл столкновений для электронов имеет вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial F}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = & \sum_{n'} \int d\xi_{p'} \{ w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) [F'(1 - F)(N_{\mathbf{q}} + 1) - F(1 - F')N_{\mathbf{q}}] + \\ & + w_{n'n}(p', p; \mathbf{q}) [F'(1 - F)N_{\mathbf{q}} - F(1 - F')(N_{\mathbf{q}} + 1)] \}, \end{aligned} \quad (8.62)$$

где $F = F_{np}$, $F' = F_{n'p'}$, в то время как

$$w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) \propto \delta_{p', p+\hbar q} \delta(\epsilon_{n'p'} - \epsilon_{np} - \hbar\Omega_{\mathbf{q}}). \quad (8.63)$$

Величина $w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q})$ пропорциональна вероятности перехода электрона из состояния n', p' в состояние n, p , сопровождаемого эмиссией фонона с квазиимпульсом \mathbf{q} . В такой общей форме это уравнение справедливо для любых фононных состояний. Если считать, что

электрон в наноструктуре взаимодействует с объемными фононами, теория возмущений дает следующее выражение (ср. с [167, 168])

$$w_{nn'}(p, p', \mathbf{q}) = \frac{2\pi}{\hbar} |c_{\mathbf{q}}|^2 |\langle n | \exp(i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}) | n' \rangle|^2 \times \\ \times \delta[\epsilon_n(p) - \epsilon_{n'}(p') + \hbar\Omega_{\mathbf{q}}] \delta_{p', p+\hbar q_x}. \quad (8.64)$$

Здесь $c_{\mathbf{q}}$ матричный элемент взаимодействия электронов с объемными фононами; \mathbf{q}_{\perp} означает q_y, q_z .

Фононный интеграл столкновений имеет вид

$$\left[\frac{\partial N_{\mathbf{q}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_{nn'} \int d\xi_p \int d\xi_{p'} w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) [F'(1-F)(N_{\mathbf{q}}+1) - F(1-F')N_{\mathbf{q}}]. \quad (8.65)$$

Используя уравнение (8.61), мы получаем

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_{nn'} \int d\xi_p \int d\xi_{p'} \int d\eta_{\mathbf{q}} w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) \ln \frac{F_{n'p'}(1-F_{np})(N_{\mathbf{q}}+1)}{F_{np}(1-F_{n'p'})N_{\mathbf{q}}} \times \\ \times [F_{n'p'}(1-F_{np})(N_{\mathbf{q}}+1) - F_{np}(1-F_{n'p'})N_{\mathbf{q}}]. \quad (8.66)$$

Мы не приводим здесь соответствующих формул для взаимодействия электронов с примесями внутри нанопроволоки. Дело в том, что нас главным образом будут интересовать нанопроволоки, где таких примесей нет. (Если такие примеси в проволоке есть и они важны, было бы затруднительно их описывать в рамках обычно широко используемой процедуры усреднения по положениям этих примесей, что подразумевается уравнением (8.24). Отметим однако, что такая процедура обычно применима вне наноструктуры в области контактов (резервуаров)).

Прямым обобщением (8.25) можно было бы учесть и вклад электрон-электронного взаимодействия в производство энтропии в нанопроволоке. Однако, электрон-электронные столкновения в самой наноструктуре существенно подавлены (см. [169]). В самом деле, можно проверить, что из-за одномерной электронной динамики законы сохранения квазиимпульса и энергии обычно невыполнимы. (Мы хотели бы здесь сделать следующее замечание. Для существенно малых величин относительных скоростей взаимодействующих электронов их столкновения уже не могут описываться также и теорией возмущений.) Поэтому мы и не приводим здесь соответствующие выражения. Однако снова, вне самой нанопроволоки, в области контактов можно применять формулу (8.25).

8.11 Генерация джоулева тепла током в наноструктуре

8.11.1 Бесстолкновительный случай

В духе подхода Ландауэра, Бюттикера и Имри [81, 117, 118] мы предположим, что квантовая структура соединена с левым (+) и правым (−) резервуарами, каждый из которых находится в равновесии. Мы предполагаем, что электронный перенос можно описать в адиабатическом приближении [166]. Так как поперечные размеры контактов гораздо больше соответствующих размеров структуры, число каналов в контактах также гораздо больше, чем в проволоке. Большинство этих каналов не являются токопроводящими, так как электроны в этих каналах отражаются от проволоки назад в соответствующий контакт. Поэтому мы начнем с рассмотрения токопроводящих каналов в самой наноструктуре.

Как было показано в [166], электронный перенос через наноструктуру можно рассматривать практически как безотражательный, если только дно одномерной зоны не касается уровня Ферми (такой случай мы не рассматриваем). Предполагая безотражательное явление переноса, рассмотрим случай $p > 0$. Мы интересуемся областью $x > 0$, где происходит релаксация и связанная с этой релаксацией генерация энтропии. Состояния в токопроводящем канале, вступающие в область контакта, т.е. при $x = 0$, имеют функцию распределения $F^{(0)}(\epsilon_{pn} - \mu^{(+)})$. Для $x < 0$ эта функция распределения одна и та же для всех состояний при $x < 0$. Это значит, что токопроводящие состояния с $p > 0$ находятся в равновесии со всеми остальными состояниями в области $x < 0$. В самом деле, при $x < 0$ все состояния с $p > 0$, также как и состояния с $p < 0$, имеют одинаковую функцию распределения $F^{(0)}(\epsilon_{pn} - \mu^{(+)})$. Наоборот, для области $x > 0$ функция распределения электронов в токопроводящих каналах будет неравновесной по отношению к остальным электронам в этой области [чья функция распределения есть $F^{(0)}(\epsilon_{pn} - \mu^{(-)})$]. Это значит, что в этой области релаксационные процессы должны привести токопроводящие состояния в равновесие. Именно эти процессы мы и собираемся исследовать для вычисления производства тепла и выяснения его пространственного распределения.

Мы рассматриваем движение электронов внутри проволоки как баллистическое. Это означает, что их рассеяние здесь пренебрежимо мало. Для определенности предположим, что электроны в контактах релаксируют из-за столкновений с фононами. Что касается

самих фононов, предположим, что из-за ангармонизма и взаимодействия с дефектами кристалла они релаксируют так быстро, что выполняется (8.42) и фононы можно считать равновесными. Чтобы электроны рассеялись, они должны проникнуть на существенные расстояния в контакты, где электроны можно рассматривать как трехмерный электронный газ, так что для них справедливо обычное Блоховское представление. При адиабатическом переносе число узлов волновой функции поперечного квантования $\eta_n(\mathbf{r}_\perp; x)$ для токопроводящего канала не зависит от x и мало. Далеко от наноструктуры начала отсчета энергий одномерных зон $\epsilon(0, x)$ начинают сближаться. Это значит, что малое количество электронных состояний, являющихся неравновесными, имеют малые поперечные составляющие квазиимпульса по сравнению с продольной частью. Другими словами, эти состояния имеют практически одинаковую величину квазиимпульса \mathbf{p} . Это в свою очередь означает, что неравновесная функция распределения является резкой функцией квазиимпульса \mathbf{p} , и мы имеем дело с ситуацией, которую мы уже обсуждали после уравнения (8.46). Интегральная часть оператора столкновений, описывающая приход в данное состояние, должна быть мала по сравнению с уходной частью, описываемой простым членом релаксационного типа (8.46). В результате оказывается, что мы можем ограничиться приближением времени релаксации [146].

В этом приближении неравновесная часть функции распределения ΔF_{np} удовлетворяет следующему уравнению

$$v_{np} \frac{\partial \Delta F_{np}}{\partial x} + \frac{\Delta F_{np}}{\tau} = 0. \quad (8.67)$$

Строго говоря, это уравнение должно быть дополнено граничным условием где-то на границе области контакта. Но, по нашему предположению, внутри нанопроволоки перенос носителей бесстолкновительный (длина проволоки много меньше длины свободного пробега), поэтому мы не внесем существенной ошибки, если сформулируем граничное условие при $x = L$

$$\Delta F_{np} \Big|_{x=L} = \frac{\partial F_{np}}{\partial \mu} \Delta \mu, \quad (8.68)$$

где $\Delta \mu = \mu^{(+)} - \mu^{(-)} = eV$. Мы предполагаем здесь $eV \ll T$.

Решение уравнения (8.67) с граничным условием, даваемым (8.68), есть

$$\Delta F_{np} = \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \mu} \Delta \mu \exp\left(-\frac{x-L}{v\tau_{\mathbf{p}}}\right). \quad (8.69)$$

Здесь мы пренебрегли различием между скоростью в канале v_{np} и трехмерной скоростью v_p . Подставляя (8.69) в уравнение (8.46), получаем пространственное распределение генерации энтропии

$$T \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = 2(eV)^2 \sum_n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \frac{1}{\tau_p} \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \mu} \exp\left(-\frac{2(x-L)}{v\tau_p}\right). \quad (8.70)$$

Учитывая уравнения (8.59) и (8.60), мы получаем для производства полной энтропии в резервуаре

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{(eV)^2}{\tau_p} 2\mathcal{N} \int_0^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar} \int_L^{\infty} dx \exp\left(-\frac{2(x-L)}{v\tau_p}\right) \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \mu}. \quad (8.71)$$

Таким образом, в области контакта

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{(eV)^2}{2\pi\hbar} \mathcal{N}, \quad (8.72)$$

где \mathcal{N} число активных каналов, т.е. каналов, для которых начала отсчета одномерных зон расположены ниже уровня Ферми. Вычисление вклада области $x < 0$ показывает, что для рассматриваемого случая полное производство энтропии в контактах одинаково (несмотря на то, что времена релаксаций τ_p могут быть различны). Причем это справедливо независимо от действительной формы профиля потенциала самого канала. Уравнение (8.71) дает пространственное распределение генерации энтропии. Эта генерация происходит в областях с длиной порядка длины свободного пробега $v\tau_p$, т.е. только в областях, непосредственно примыкающих к наноструктуре.

Полную скорость генерации энтропии для всей системы можно представить в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -GV^2. \quad (8.73)$$

Для G можно получить хорошо известное выражение [1]

$$G = \frac{e^2}{\pi\hbar} \mathcal{N}. \quad (8.74)$$

Таким образом, рассмотрение генерации тепла обеспечивает альтернативный метод вычисления кондактанса наноструктур. Отметим, что тот факт, что время релаксации τ_p определялось электрон-фононными столкновениями, не был существенным при выводе уравнения (8.71). Мы пришли бы к такому же заключению, если, например, τ_p определялось бы каким-либо другим механизмом рассеяния в классическом контакте (например, электрон-электронными столкновениями).

Существенным допущением при нашем выводе было то, что мы пренебрегли разницей между скоростью в канале и трехмерной скоростью $v_{\mathbf{p}}$. Другими словами, это значит, что мы рассматривали *области резервуаров классически*. Последний факт согласуется с общими принципами квантовой теории измерений. Для проведения квантовых измерений (в данном случае кондактанса) необходим классический измерительный прибор (т.е. классические резервуары в нашем случае).

Можно получить тот же результат, используя чисто классическое уравнение (8.46) для производства энтропии. Кратко обсудим здесь схему такого вычисления. Для трехмерного случая мы имели

$$\left[\frac{\partial \hat{\mathcal{S}}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \int_L^\infty dx \int d^2 \mathbf{r}_\perp \int d\xi_{\mathbf{p}} \frac{(\Delta F_{\mathbf{p}})^2}{\tau_{\mathbf{p}} F_{\mathbf{p}}^{(0)} (1 - F_{\mathbf{p}}^{(0)})}. \quad (8.75)$$

Для ΔF мы можем использовать уравнение (8.69), где (как об этом уже упоминалось) можно пренебречь зависимостью квазиимпульса \mathbf{p}_\perp от малых поперечных компонент, или, другими словами, от номера канала n . Теперь интегрирование по $d^2 \mathbf{r}_\perp d^2 \mathbf{p}_\perp$ можно заменить суммированием по дискретным значениям \mathbf{p}_\perp . Как уже отмечалось, число членов в такой сумме должно равняться числу открытых каналов, и мы снова приходим к (8.72) независимо от действительного механизма рассеяния, ответственного за релаксационное время τ . Таким образом, оказывается, что результат зависит от реального профиля потенциала, формирующего наноструктуру, лишь только через число активных каналов наноструктуры \mathcal{N} .

8.11.2 Учет столкновений с фононами в наноструктуре

Учет столкновений электронов с фононами в самой наноструктуре приводит к поправке ΔG к чисто баллистическому кондактансу. Эта поправка простым образом связана с соответствующей генерацией энтропии в нанопроволоке. При фиксированном падении потенциала соответствующее изменение в производстве полной энтропии в системе отрицательно и определяется тем же ΔG . Благодаря тому же взаимодействию с фононами уменьшение генерации энтропии в каждом из резервуаров равно количеству энтропии, произведенной в самой наноструктуре (см. [148]). Таким образом, учет столкновений в нанопроволоке не нарушает равенства количества энтропий, произведенных в берегах.

Одним из результатов работы [152] являлось неравенство тепла, выделенного в правом и левом контакте, соединенных классическим точечным контактом, если только эти контакты не идентичны.

Как было показано выше, производство энтропии в двух контактах, связанных баллистической проволокой, одно и то же, и не зависит ни от формы контактов, ни от скоростей релаксаций в этих контактах. В этом разделе мы покажем, что причиной этого является особая симметрия, присущая вырожденным электронным системам. Тем не менее, мы хотели бы указать, что рассмотренные в [152] и в [146] ситуации существенно различны, а именно в [152] учитываются столкновения (в диффузионном режиме), в то время как в [146] считается, что столкновений в нанопроволоке вообще нет.

Теперь мы рассматриваем качественно другую ситуацию, мы учтем электрон-фононные столкновения в токопроводящей квантовой нанопроволоке. Другими словами, мы рассмотрим случай, когда условия наблюдения чисто баллистического кондактанса нарушены, и выясним, нарушают ли такие столкновения в проводнике (который мы предполагаем пространственно однородным) симметрию по отношению к генерации энтропии в обоих резервуарах.

Электрон-фононное взаимодействие мы рассмотрим как слабое. Это значит, что изменение $|\Delta G|$ кондактанса за счет фононов мало по сравнению с бесстолкновительным G . В то же время это вполне заметная экспериментальная величина, как показывает исследование ее температурной зависимости и оценки, приведенные в [167, 168]. Тем не менее, без соответствующих вычислений вовсе не очевидно, что производство энтропии в проволоке также определяется ΔG .

Одним из важных и интересных последствий этого исследования будет решение вопроса о том, могут ли в принципе электрон-фононные столкновения нарушить равенство производства энтропий в двух резервуарах, независимо от их формы. В [152] было подчеркнuto, что одной из возможных причин увеличения интереса к выделению тепла является кажущаяся асимметрия точечного контакта. Приводились аргументы, на наш взгляд ошибочные, что так как число электронов движущихся в одном направлении превалируют над числом электронов в обратном направлении, большее количество тепла и должно выделяться в соответствующем резервуаре. Это рассуждение годится для обратимого тепла

Пельтье, но не для джоулева тепла. Оказывается, что равенство производства энтропий сохраняется и при условии, когда слабые электрон-фононные столкновения имеют место в самой нанопроволоке. Мы проанализируем роль *электрон-дырочной симметрии*, ответственной за это свойство, при условии, что электроны подчиняются статистике Ферми. Как результат, мы приходим к выводу, что столкновения в нанопроволоке не могут служить единственной причиной для асимметричного выделения тепла в резервуарах.

Функция распределения $F_{np}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$v \frac{\partial F_{np}(x)}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi_n(x)}{\partial x} \frac{\partial F_{np}(x)}{\partial p} = \left[\frac{\partial F_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}. \quad (8.76)$$

Здесь потенциал, усредненный по поперечному движению электрона,

$$\varphi_n(x) = \int d\mathbf{r}_\perp |\eta_n(\mathbf{r}_\perp; x)|^2 \varphi(\mathbf{r}) \quad (8.77)$$

стремится к приложенной величине $+V/2$ далеко в левом контакте и к величине $-V/2$ в правом контакте.

Неравновесная функция распределения электронов в нанопроволоке в нулевом приближении по электрон-фононным столкновениям имеет вид

$$F_{np0} = \theta(p) F^{(0)}(\varepsilon_{np} - \mu^{(+)}) + \theta(-p) F^{(0)}(\varepsilon_{np} - \mu^{(-)}), \quad (8.78)$$

где $F^{(0)}$ — функция Ферми, $\mu^{(\pm)} = \mu \pm eV/2$. Это решение (8.76) получено при пренебрежении столкновениями и в предположении, что в нанопроволоке нет поля. Подставляя эту функцию в уравнение (8.66) и используя равновесную фононную функцию $N_{\mathbf{q}}$, можно увидеть, что только области $p \cdot p' < 0$ дают вклад в интеграл по квазиимпульсам. Рассмотрим сначала $p > 0$, $p' < 0$ область. Используя равенства

$$1 - F^{(0)}(\varepsilon) = e^{\varepsilon/T} F^{(0)}(\varepsilon), \quad 1 + N_{\mathbf{q}}^{(0)} = e^{\hbar\Omega_{\mathbf{q}}/T} N_{\mathbf{q}}^{(0)}$$

и закон сохранения энергии, мы существенно упростим интегрируемое выражение: логарифмический член сведется к $-eV/T$, разность функций распределения к

$$\begin{aligned} & F_{n'p'}(1 - F_{np})(N_{\mathbf{q}} + 1) - F_{np}(1 - F_{n'p'})N_{\mathbf{q}} = \\ & = -2 \operatorname{sh} \left(\frac{eV}{2T} \right) N_{\mathbf{q}} F^{(0)}(\varepsilon_{np} - \mu^{(+)}) F^{(0)}(\varepsilon_{n'p'} - \mu^{(-)}) \exp [(\varepsilon_{np} + \hbar\Omega_{\mathbf{q}} - \mu)/T]. \end{aligned} \quad (8.79)$$

Для $p < 0$, $p' > 0$ мы получим такой же результат с заменой V на $-V$. Пренебрегая $eV/2$ в аргументах Ферми функций и заменяя $\text{sh}(eV/2T)$ на $eV/2T$ для линейного режима, мы придем к

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = 2 \left(\frac{eV}{T} \right)^2 \sum_{nn'} \int_0^\infty d\xi_p \int_0^\infty d\xi_{p'} \int d\eta_{\mathbf{q}\perp} w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) N_{\mathbf{q}} \times F^{(0)}(\varepsilon - \mu) [1 - F^{(0)}(\varepsilon' - \mu)]. \quad (8.80)$$

Это уравнение учитывает только проходящие через структуру электронные моды. Мы не вводим здесь коэффициентов прохождения и отражения, подразумевая, что любая мода с энергией больше (меньше) некоторой максимальной, проходит (отражается).

В вероятности перехода из-за сохранения квазиимпульса в продольном направлении (x -ось), $q_x = (p+p')/\hbar$, $\varepsilon = \varepsilon_{np}$ и $\varepsilon' = \varepsilon_{np} + \hbar\Omega_{\mathbf{q}}$. Введя обозначение ΔG для контролируемой фононами части кондактанса

$$\Delta G = -2 \frac{e^2 L}{T} \sum_{nn'} \int d\eta_{\mathbf{q}\perp} | \langle n' | e^{i\mathbf{q}\perp \mathbf{r}\perp} | n \rangle |^2 C_{n'n}, \quad (8.81)$$

$$C_{n'n} = \int_0^\infty d\xi_p \int_0^\infty d\xi_{p'} N_{\mathbf{q}} \frac{2\pi}{\hbar} |c_{\mathbf{q}}|^2 \delta(\varepsilon' - \varepsilon - \hbar\Omega_{\mathbf{q}}) [1 - F^{(0)}(\varepsilon' - \mu)] F^{(0)}(\varepsilon - \mu), \quad (8.82)$$

(где L длина нанопроволоки), мы можем написать для производства энтропии

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = - \frac{V^2}{LT} \Delta G, \quad (8.83)$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{nan}} = T \int_{-L/2}^{L/2} dx \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = -V^2 \Delta G. \quad (8.84)$$

В однородной проволоке диссипация механической энергии происходит равномерно по всей длине L проволоки. Так как изменение кондактанса, обусловленное электрон-фононными столкновениями ΔG , отрицательно, соответствующий вклад в диссипацию механической энергии при заданном приложенном потенциале естественным образом оказывается положительным, в то время как сам кондактанс уменьшается. Это может показаться странным, так как при условии постоянства приложенного потенциала выделяемое тепло должно уменьшаться с уменьшением кондактанса, наша же формула приводит к положительному вкладу в выделяемое тепло. Тем не менее, это вполне естественно, так как столкновения изменяют функцию распределения электронов и в нанопроволоке, и в резервуарах. Мы покажем, что связанное с этим уменьшение диссипации механической энергии в контактах оказывается вдвое больше этой же диссипации в самой проволоке.

Функция распределения в нанопроволоке

Ситуацию в нанопроволоке можно описать теорией возмущений по отношению к электрон-фононным столкновениям, рассматривая столкновительный член как возмущение. Мы получим для функции распределения следующее выражение

$$F_{np}(x) = F_{np0} + \Delta F_{np}(x), \quad (8.85)$$

где F_{np0} дается (8.78) и $\Delta F_{np}(x)$ удовлетворяет следующему кинетическому уравнению

$$v \frac{\partial \Delta F_{np}(x)}{\partial x} - e \frac{\partial \Delta \varphi_n(x)}{\partial x} \frac{\partial F_{np0}}{\partial p} = I[F_{np0}]. \quad (8.86)$$

Здесь $\Delta \varphi_n(x)$ изменение самосогласованного потенциала $\varphi_n(x)$ (введенного в (8.77) как среднее по поперечным координатам) из-за столкновений. Решение F_{np0} , полученное из (8.78) при полном пренебрежении столкновениями, подставляется как в интеграл столкновений (для краткости мы снова используем для последнего компактное выражение $I[F_{np0}]$), так и в дрейфовый член. Мы интегрируем это уравнение вдоль электронных траекторий с граничными условиями, требующими $\Delta F_{np} = 0$ при $x = -L/2$ для электронов, приходящих в проволоку слева (т.е. имеющих $p > 0$), и при $x = L/2$ для электронов, приходящих слева с отрицательной скоростью (квазиимпульсом). Таким образом, решение можно записать так

$$\Delta F_{np}(x) = \left(x \pm \frac{L}{2} \right) \frac{1}{v} I[F_{np0}] + e \Delta \varphi_n \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}}, \quad (8.87)$$

где верхний (нижний) знак в первом члене соответствует функции распределения с $p > 0$ ($p < 0$). Потенциал $\Delta \varphi_n(x)$ должен быть определен в общем случае из уравнения Пуассона. В случае, если длина экранирования много меньше размеров проволоки, это эквивалентно условию электронейтральности. Тогда

$$e \Delta \varphi_n(x) = x \frac{1}{\nu_n} \int d\xi_p I[F_{np0}]/v, \quad (8.88)$$

где мы ввели плотность состояний для n -го канала

$$\nu_n = \int d\xi_p \left(-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right). \quad (8.89)$$

Учитывая (8.78) и (8.87) для отклонения функции распределения электронов, движущихся вправо, мы получим (при $x = L/2$)

$$\Delta F_{np}(L/2) = \left(-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right) \left(eV - \frac{L}{2\nu_n} \int d\xi_p \frac{1}{v} I[F_{np0}] \right) + \frac{L}{v} I[F_{np0}]. \quad (8.90)$$

Для электронов, движущихся влево (т.е. для $p < 0$), при той же координате имеем

$$\Delta F_{np}(L/2) = \left(-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right) \left(-\frac{L}{2\nu_n} \int d\xi_p \frac{1}{v} I[F_{np0}] \right). \quad (8.91)$$

Этот член, будучи представлен также и в уравнении (8.90), описывает добавку в четную по скоростям (квазиимпульсам) часть функции распределения. Так как эта часть релаксирует медленнее, чем нечетная часть, мы опустим его в последующих вычислениях.

В правом контакте отклонение ΔF_{np} функции распределения удовлетворяет кинетическому уравнению

$$v \frac{\partial \Delta F_{np}}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial p} = I \Delta F_{np} \quad (8.92)$$

с граничным условием при $L/2$, представленным уравнением (8.90). Здесь I линеаризованный интегральный оператор, действующий на ΔF_{np} , мало отличающийся от (8.43). Мы приведем здесь только "уходный" член релаксационного типа, имеющий вид

$$\left[\frac{\partial F_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}^{(\tau)} = -\frac{\Delta F_{np}}{\tau_{np}}, \quad (8.93)$$

где время релаксации τ_{np} дается выражением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau_{np}} = \sum_{n'} \int d\xi_{p'} \int d\eta_{\mathbf{q}} \{ & w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) [F_{n'p'}^{(0)}(N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1) + (1 - F_{n'p'}^{(0)})N_{\mathbf{q}}^{(0)}] + \\ & + w_{n'n}(p', p; \mathbf{q}) [F_{n'p'}^{(0)}N_{\mathbf{q}}^{(0)} + (1 - F_{n'p'}^{(0)})(N_{\mathbf{q}}^{(0)} + 1)] \}. \end{aligned} \quad (8.94)$$

Как уже неоднократно указывалось, интегральный член при описании явления переноса в резервуарах можно опустить, что позволяет использовать приближение времени релаксации. Так уравнение (8.86) приводится к

$$v \frac{\partial \Delta F_{np}}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial p} = -\frac{\Delta F_{np}}{\tau_{np}}. \quad (8.95)$$

Решение для $p > 0$, $x > L/2$ можно записать так

$$\Delta F_{np}(x) = \Delta F_{np}(L/2) \exp[-(x - L/2)/v\tau_{np}] + \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \int_{L/2}^x dx' e^{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x'}} \exp[-(x - x')/v\tau_{np}], \quad (8.96)$$

а для $p < 0$ мы имеем

$$\Delta F_{np}(x) = \frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \int_{+\infty}^x dx' e^{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x'}} \exp[-(x-x')/v\tau_{np}]. \quad (8.97)$$

Рассмотрим сначала расстояния от проволоки меньше или порядка длины свободного пробега l . На таких расстояниях мы можем отбросить второй член в уравнении (8.96), как и выражение (8.97). Отброшенная часть функции распределения становится важной только на расстояниях много больших длины пробега. Мы вернемся еще к этому вопросу.

Что касается уравнения (8.66) для производства энтропии, при тех же предположениях оно приводится к виду

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_n \int d\xi_p \frac{(\Delta F_{np})^2}{\tau_{np} F_{np}^{(0)} (1 - F_{np}^{(0)})}. \quad (8.98)$$

Сохраняя члены второго порядка по потенциалу V , мы получим

$$[\Delta F_{np}(x)]^2 = \theta(p) \left[-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right] eV \left\{ eV \left[-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right] + 2\frac{L}{v} I[F_{np0}] \right\} \exp[-2(x-L/2)/v\tau_{np}]. \quad (8.99)$$

Подставляя это выражение в уравнение (8.98) и используя равенство $F^{(0)}(1 - F^{(0)}) = -T\partial F^{(0)}/\partial \varepsilon$, мы получим

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} &= \sum_n \int_0^\infty d\xi_p \left(-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right) \frac{(eV)^2}{T\tau_{np}} \exp\left[\frac{-2(x-L/2)}{v\tau_{np}} \right] + \\ &+ \sum_n \int_0^\infty d\xi_p \frac{2LeV}{Tv\tau_{np}} I[F_{np0}] \exp\left[\frac{-2(x-L/2)}{v\tau_{np}} \right]. \end{aligned} \quad (8.100)$$

Здесь первый член воспроизводит результат для чисто баллистической проволоки (см. [146]), в то время как второй член обусловлен вкладом электрон-фононного взаимодействия. Так как

$$\sum_n \int_0^\infty d\xi_p I[F_{np0}] = \frac{V\Delta G}{eL}, \quad (8.101)$$

мы получим, что фононный вклад в диссипацию механической энергии в правом контакте дается формулой

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{\text{ph}} = V^2 \Delta G. \quad (8.102)$$

Учтя, что в левом контакте мы имеем точно такой же вклад, мы приходим к выводу, что полный отрицательный вклад в производство энтропии благодаря электрон-фононным

столкновениям есть $V^2\Delta G$, как это и должно быть из соображений закона сохранения энергии.

Теперь рассмотрим область относительно больших расстояний x от проволоки. Достаточно далеко от проволоки, так что поперечные размеры станут гораздо больше тепловой длины волны \hbar/\sqrt{mT} де Бройля, можно уже использовать классическое кинетическое уравнение, описывающее частицы с трехмерным квазиимпульсом \mathbf{p} . Из уравнений (8.96) и (8.97) следует, что на расстояниях, больших длины свободного пробега, мы имеем для нечетной по квазиимпульсу части функции распределения

$$\Delta F_{np}(x) = eE_n(x)v\tau_{np} \left(-\frac{\partial F_{np}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{np}} \right). \quad (8.103)$$

Сама форма этого уравнения подсказывает, что в рассматриваемой нами области это выражение заменится его трехмерным аналогом

$$\Delta F_{\mathbf{p}} = e\mathbf{E}v\tau_{\mathbf{p}} \left(-\frac{\partial F_{\mathbf{p}}^{(0)}}{\partial \varepsilon_{\mathbf{p}}} \right). \quad (8.104)$$

Для плотности тока имеем закон Ома с локальной проводимостью σ . Уравнение непрерывности $\text{div} \mathbf{j} = 0$ тогда сводится к $\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 0$. Считая, что полный ток задан

$$\int \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\int \sigma \nabla \varphi d\mathbf{S} = J \quad (8.105)$$

и равен GV , мы получим, что потенциал далеко от проволоки в правом контакте описывается как

$$\varphi(\mathbf{r}) = -V \left(\frac{1}{2} - \frac{G}{\sigma \Omega r} \right), \quad (8.106)$$

где Ω это телесный угол поперечного сечения проволоки из точки наблюдения в правом контакте.

Оценим производство энтропии в этой области и сравним с производством энтропии в области, расположенной на расстояниях порядка длины свободного пробега от проволоки. Локальное производство энтропии в рассматриваемой области

$$T \left[\frac{\partial S}{\partial t} \right] = \sigma (\nabla \varphi)^2. \quad (8.107)$$

Полное производство

$$\sigma \int_{r>l} (\nabla \varphi)^2 dV = V^2 G \frac{G}{\Omega \sigma l}, \quad (8.108)$$

т.е. производство энтропии в этой области меньше в соответствии с малым параметром $G/\sigma l \sim (\lambda_F/l)^2$.

8.11.3 Электрон-дырочная симметрия для вырожденных проводников

Свойство, что полное производство энтропии в обоих резервуарах одинаково, является следствием особой симметрии, типичной для проводников с сильно вырожденными по Ферми носителями. Обсудим теперь это обстоятельство детально.

Начнем с того, что мы заменим F_{np} в соответствии с

$$H_{np} = 1 - F_{np}, \quad (8.109)$$

введя H_{np} как функцию распределения дырок. Такая функция оказывается полезной в случае сильного вырождения. Тогда вместо уравнения (8.62) имеем

$$\left[\frac{\partial H_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_{n'} \int d\xi_{p'} \int d\eta_{\mathbf{q}} \{ w_{nn'}(p, p'; \mathbf{q}) [H_{n'p'}(1 - H_{np})N_{\mathbf{q}} - H_{np}(1 - H_{n'p'})(N_{\mathbf{q}} + 1)] + w_{n'n}(p', p; \mathbf{q}) [H_{n'p'}(1 - H_{np})(N_{\mathbf{q}} + 1) - H_{np}(1 - H_{n'p'})N_{\mathbf{q}}] \}. \quad (8.110)$$

Введя переменную $y = -x$, мы можем написать для малой неравновесной части ΔH

$$\frac{\partial \Delta H_{np}}{\partial y} + \frac{\Delta H_{np}}{\tau_{np}} = 0 \quad \text{для } p < 0. \quad (8.111)$$

Это уравнение имеет такую же форму, как уравнение (8.67). Однако это выражение описывает диссипацию в левом резервуаре. Соответственно, величина времени релаксации τ_{np} может быть существенно другой по сравнению с правым резервуаром при условии, что релаксационные свойства резервуаров различны. Интегрируя решение этого уравнения по y , можно увидеть, что полная диссипация, происходящая в левом резервуаре, такая же, как и в правом, независимо от механизма релаксации. Физически это означает, что несущественно, рассматривать ли эту диссипацию как связанную с переходами электронов или дырок. Это и является причиной эквивалентности скорости диссипации механической энергии в обоих резервуарах.

Необходимо отметить, что эта симметрия все же является приближенной. Она тем строже, чем лучше выполняется неравенство

$$T/\mu^{(n)} \ll 1. \quad (8.112)$$

Дело в том, что только энергетическая полоска порядка T вблизи химического потенциала $\mu^{(n)} \equiv \mu - \varepsilon_n(0; 0)$ ответственна за явления переноса, включая производство энтропии.

Электрон-дырочная симметрия остается справедливой при условии, что изменением плотности электронных состояний в этой тепловой полоске можно пренебречь. Таким образом, диссипация механической энергии в обоих берегах оказывается одинаковой с относительной точностью $T/\mu^{(n)} \ll 1$.

8.11.4 Нестационарный случай

Рассмотрим теперь случай, когда переменное напряжение

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

приложено вдоль нанопроволоки и ограничимся случаем, когда только один из токопроводящих каналов (канал 1) внутри нанопроволоки вовлечен в передачу тока. Как было выяснено в [166], перенос носителей остается одноканальным до тех пор, пока сужение, которое мы рассматриваем, удовлетворяет условию

$$\pi^2 \sqrt{2R/a} > 1, \quad (8.113)$$

где $a(x)$ ширина канала, R радиус кривизны. Это значит, что при переходе от сужения к резервуару перенос остается одноканальным. Для этого случая можно проверить, что два различных подхода для вычисления джоулевых потерь, т.е. вычисление работы внешних источников в наноструктуре и скорость роста энтропии в берегах, приводят к одному и тому же результату. Еще важнее то, что скорость возрастания плотности энтропии дает и пространственное распределение скорости диссипации механической энергии.

Электроны в резервуарах испытывают столкновения с примесями, с фононами и друг с другом. Неравновесная часть $\Delta F_{np}(x)$ должна быть зависима от координаты x из-за столкновений. Она удовлетворяет граничным условиям

$$\Delta F_{1p}|_{x=L} = \Delta F_L, \quad \Delta F_{np}|_{x=L} = 0 \quad \text{для } n \neq 1, \quad (8.114)$$

где ΔF_L это неравновесная часть функции распределения внутри проволоки при $x = L$, вычисленная в Гл.7 (см. также [170]), p это x компонента электронного квазиимпульса, n число проводящих каналов в одномерной нанопроволоке. Аналогичное граничное условие должно задаваться для $F_{n,-p}$ при $x = 0$.

Каналы в резервуарах смешиваются благодаря столкновениям. Например, для столкновений с примесями имеем

$$\left[\frac{\partial \Delta F_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = n_i \sum_{n'} \int d\xi_{p'} w_{n'n}(p', p) (\Delta F_{n'p'} - \Delta F_{np}), \quad d\xi_{p'} \equiv \frac{dp'}{2\pi\hbar}. \quad (8.115)$$

Мы будем считать, что число каналов \mathcal{N} в резервуарах большое, т.е. $\mathcal{N} \gg 1$.

Второй член в уравнении (8.115) это релаксационный член, имеющий вид

$$\left[\frac{\partial \Delta F_{1p}}{\partial t} \right]_{\text{coll}}^{(\tau)} = -\frac{\Delta F_{1p}}{\tau_p}, \quad (8.116)$$

где время релаксации τ_p дается формулой

$$\frac{1}{\tau_p} = \sum_{n'} \int d\xi_{p'} w_{n'1}(p'p). \quad (8.117)$$

Электрон-электронное рассеяние можно рассмотреть аналогичным образом. Для линейаризованного столкновительного члена мы имеем

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \Delta F_{np}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} &= \sum_{n'n_1n'_1} \int d\xi_{p'} \int d\xi_{p_1} \int d\xi_{p'_1} w_{n_1n'_1nn'}(p_1, p'_1, p, p') \times \\ &\times \left[\Delta F_{n_1p_1} F_{n'_1p'_1}^{(0)} (1 - F_{np}^{(0)}) (1 - F_{n'p'}^{(0)}) + \Delta F_{n'_1p'_1} F_{n_1p_1}^{(0)} (1 - F_{np}^{(0)}) (1 - F_{n'p'}^{(0)}) - \right. \\ &\left. - \Delta F_{np} F_{n'_1p'_1}^{(0)} (1 - F_{n_1p_1}^{(0)}) (1 - F_{n'_1p'_1}^{(0)}) - \Delta F_{n'p'} F_{n_1p_1}^{(0)} (1 - F_{n_1p_1}^{(0)}) (1 - F_{n'_1p'_1}^{(0)}) \right]. \end{aligned} \quad (8.118)$$

Снова имеем два члена, приходный и уходный. Нам интересен уходный член релаксационного типа для $n = 1$

$$\left[\frac{\partial \Delta F_{1p}}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = -\frac{\Delta F_{1p}}{\tau_{ee}}, \quad (8.119)$$

где время релаксации определяется уравнением

$$\frac{1}{\tau_{ee}} = \sum_{n'n_1n'_1} \int d\xi_{p'} \int d\xi_{p_1} \int d\xi_{p'_1} w_{1n'n_1n'_1}(p, p', p_1, p'_1) F_{n'p'}^{(0)} (1 - F_{n_1p_1}^{(0)}) (1 - F_{n'_1p'_1}^{(0)}). \quad (8.120)$$

Таким же образом можно учесть и электрон-фононные столкновения, с единственным отличием, что систему электронов и фононов при этом надо рассматривать вместе.

Часто мы встречаемся с ситуацией, когда объемные фононы почти не затрагиваются явлением переноса электронов в нанопроволоке, так как неравновесные электроны заполняют только малую часть объема системы. Если в соответствии с этим считать фононы

равновесными, то можно отбросить второй член в уравнении (8.61), и у нас остается член, аналогичный рассмотренному выше. Это значит, что все три столкновительных механизма мы можем рассматривать одним и тем же образом.

Члены, даваемые уравнением (8.116) или (8.119) и аналогичным уравнением для электрон-фоонных столкновений, обеспечивают главный вклад в производство энтропии. Электронная функция распределения, будучи порядка ΔF_L для канала 1, в других каналах не обращается в нуль только благодаря столкновениям и каждая из них пропорциональна $1/\mathcal{N}$. Это значит, что в уравнении (8.115) для функции ΔF_{1p} доминирует уходящий член. Более того, именно он и дает вклад в производство энтропии

$$\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right]_{\text{coll}} = \sum_n \int d\xi_p \frac{(\Delta F_{np})^2}{\tau F_{np}^{(0)} (1 - F_{np}^{(0)})}. \quad (8.121)$$

Здесь τ — общее время релаксации для всех типов электронных столкновений. Первый член имеет порядок ΔF_L , в то время как все остальные пропорциональны $1/\mathcal{N}^2$. Так как число этих остальных каналов \mathcal{N} , их вклад пропорционален $1/\mathcal{N}$.

Скорость производства энтропии дается

$$T \overline{\frac{dS}{dt}} = 2 \cdot 2 \int_L^\infty dx \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} \overline{(\Delta F_{1p})^2} \frac{1}{\tau (-\partial F_1^{(0)}/\partial \epsilon)}. \quad (8.122)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по периоду $2\pi/\omega$ осцилляций. Лишний множитель 2 введен для учета обоих резервуаров. Ниже черту над энтропией S и ее плотностью $S(\mathbf{r})$ мы опустим.

Введем функцию χ в соответствии с

$$\Delta F_{1p} \equiv \chi \left(-\frac{\partial F_1^{(0)}}{\partial \epsilon} \right). \quad (8.123)$$

Мы имеем

$$T \overline{\frac{dS}{dt}} = 2 \int_L^\infty dx \int_0^\infty \frac{dp}{\pi\hbar} \overline{(\chi)^2} \frac{1}{\tau} \left(-\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right). \quad (8.124)$$

χ вне проволоки определяется граничным условием

$$\chi|_{x=L} = \chi_L, \quad (8.125)$$

где χ_L величина $\chi(x)$ внутри проволоки при $x = L$.

Вне проволоки $\chi(x)$ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{l^*}\chi + \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0 \quad \text{где} \quad \frac{1}{l^*} = \frac{1}{l} - ik, \quad l = v\tau, \quad k = \frac{\omega}{v}, \quad (8.126)$$

где v скорость Ферми. Для правого резервуара ($x \geq L$) мы получим

$$\chi(x) = \chi_L e^{-(x-L)/l^*}, \quad (8.127)$$

так что полное производство энтропии дается выражением

$$T \frac{d\mathcal{S}}{dt} = 2 \int \frac{d\epsilon}{\pi\hbar} \int_L^\infty \frac{dx}{l} \chi_L^2 \left(-\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) e^{-2(x-L)/l} = \int \frac{d\epsilon}{\pi\hbar} \chi_L^2 \left(-\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \epsilon} \right) = \frac{1}{\pi\hbar} \chi_L^2 = \frac{1}{2\pi\hbar} |\chi_L|^2. \quad (8.128)$$

Так как

$$\chi_L = e^{-ikL} \int_0^L dx e^{ikx} \cdot eE(x). \quad (8.129)$$

и — см. уравнение (7.46) в Гл.7 (см. также [170], уравнение (A21))

$$\chi_L = e^{-ikL} \cdot 2eE(0) \frac{\text{sh } b}{\gamma \text{ch } b - ik \text{sh } b} \quad \text{где} \quad b \equiv \frac{\gamma L}{2}, \quad \gamma^2 = \alpha^2 - k^2, \quad (8.130)$$

так что

$$|\chi_L|^2 = 2\overline{\chi^2} = 4|eE(0)|^2 \frac{\text{sh}^2 b}{\gamma^2 \text{ch}^2 b + k^2 \text{sh}^2 b}. \quad (8.131)$$

Здесь (см. Гл.7)

$$\alpha^2 = \frac{8e^2}{\mathcal{A}\hbar\varepsilon v},$$

где \mathcal{A} это площадь сечения квантовой проволоки, ε диэлектрическая проницаемость. В соответствии с уравнением (7.53) Гл.7

$$E(0) = \frac{V}{L} \frac{\alpha}{\alpha - \text{ch } b + b^{-1} \text{sh } b} \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \left(\text{ch } b - \frac{ik}{\gamma} \text{sh } b \right) \quad (8.132)$$

и

$$|eE(0)|^2 = \frac{|eV|^2}{L^2} \frac{\gamma^2}{\alpha^4} \frac{\gamma^2 \text{ch}^2 b + k^2 \text{sh}^2 b}{\left(b^{-1} \text{sh } b - \frac{k^2}{\alpha^2} \text{ch } b \right)^2 + \frac{k^2 \gamma^2}{\alpha^4} \text{sh}^2 b}. \quad (8.133)$$

После простых вычислений получим

$$T \frac{d\mathcal{S}}{dt} = G_0 \frac{\gamma^4}{\alpha^4} \frac{\text{th}^2 b}{\left(\text{th } b - \frac{k^2}{\alpha^2} b \right)^2 + \frac{k^2 \gamma^2}{\alpha^4} b^2 \text{th}^2 b} \overline{V^2}. \quad (8.134)$$

Скорость диссипации, определяемая этим уравнением, должна сравниваться с формулой, которая определяет работу приложенного источника, вызывающего ток. Эта работа пропорциональна (см. Гл.7)

$$\operatorname{Re} G(\omega) = G_0 \frac{\gamma^4}{\varepsilon^4} \frac{\operatorname{th}^2 b}{\left(\operatorname{th} b - \frac{k^2}{\varepsilon^2} b\right)^2 + \frac{k^2 \gamma^2}{\varepsilon^4} b^2 \operatorname{th}^2 b}. \quad (8.135)$$

Поведение $\operatorname{Re} G(\omega)$ детально исследовано в Гл.7.

Пространственное распределение диссипации механической энергии в резервуарах определяется интегрируемым по x выражением в уравнении (8.128) и пропорционально

$$T \frac{dS(x)}{dt} \propto e^{-2(x-L)/l}. \quad (8.136)$$

Таким образом, диссипация энергии определяется работой переменного поля и одинакова в обоих резервуарах. Она должна быть одинаковой независимо от того, за счет каких столкновений (с примесями, друг с другом или с фононами) происходит эта диссипация. Тем не менее, пространственное распределение диссипации определяется деталями электронной релаксации в резервуарах. Мы хотим отметить, что хотя упругие столкновения и достаточны для диссипации механической энергии, состояние с определенной температурой в резервуарах достигается за счет неупругих столкновений (электрон-электронных и электрон-фононных).

8.11.5 Качественное обсуждение случая резкого контакта Стационарный случай

На практике любой прибор измеряет либо температуру (если таковая существует), либо напрямую неравновесную функцию распределения (см. ниже). В этом разделе мы проведем феноменологическое исследование стационарного случая, когда напряжение V приложено поперек тонкого мостика, связывающего два полупространства. Мы хотим проанализировать случай, когда канал резко переходит в берега, так что наш адиабатический подход больше неприменим (см. Рис. 8.2). Вместо этого подхода мы применим теперь полуклассические соображения, весьма похожие на использованные Куликом и др. [151]. Эти соображения, вне всякого сомнения, должны быть справедливы на расстояниях, где перенос частиц описывается полуклассическими уравнениями. Такой подход позволит нам

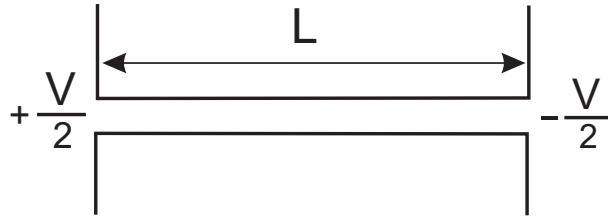


Рис. 8.2: Наноструктура с резкими контактами.

рассмотреть эффекты упругих и неупругих столкновений с единой точки зрения и выделить области пространства, где концепция "тепла" должна рассматриваться различным образом. Последнее особенно важно при обсуждении эксперимента.

Заметим, что для такой геометрии падение потенциала сконцентрировано около концов канала на расстояниях порядка ширины канала a . Мы рассмотрим симметричный случай, когда эти падения одинаковы на правом и левом концах канала и предположим $eV \gg T$.

В соответствии с рассмотрением, приведенным выше, механическая энергия диссипирует на расстояниях $\sim l$ от канала, где l упругая длина свободного пробега. Так как мы предполагаем $a \ll l$, мы можем пренебречь изменением потенциала на больших расстояниях $\sim l$. Хотя такое изменение и необходимо для поддержания тока, тем не менее мы предполагаем это изменение гораздо меньшим резких падений потенциала на концах проволоки. Для описания электронных состояний в резервуарах мы используем Блоховское представление.

Таким образом, наличие "хвостов" падения потенциала в контактах приводит к связанной с этим ненулевой дрейфовой скорости, соответственно некоторое увеличение энтропии в действительности происходит и на расстояниях, даже больших, чем l (вопреки предположениям, сделанным выше), так как упругие столкновения не приводят к полному равновесию, они только приводят к размыванию функции распределения по изоэнергетической поверхности. Только на следующем этапе формируется электронная температура, что сопровождается дальнейшим увеличением энтропии (см. [163]). Тем не менее, если $\tau_p \ll \tau_{ee}$ (где τ_{ee} электрон-электронное время релаксации), можно ожидать, что в основном производство энтропии происходит за счет упругих столкновений.

Что касается изменения функции распределения, заметим, что в баллистической об-

ласти $a < r < l$ неравновесное распределение, вызванное одноканальным проводником в правом берегу (здесь для определенности мы считаем берега двухмерными структурами), на расстояниях $r \gg a$ может быть описана как

$$\Delta F \simeq \frac{a}{r} [\theta(\mu - \varepsilon + eV/2) - \theta(\mu - \varepsilon - eV/2)] \theta(v_x) \quad (8.137)$$

(мы предполагаем $eV > 0$ и $T = 0$). Здесь мы предположили, что дифракция превращает нашу одноканальную волновую функцию в цилиндрическую волну на расстояниях, гораздо больших ширины канала a .

Количественное рассмотрение, оправдывающее такой подход, приведено в Приложении Е. В самом деле, если мы положим $\omega = 0$ в уравнении (Е.35) в Приложении Е, оценим интеграл как aeV и напишем выражение

$$[\theta(\mu - \varepsilon + eV/2) - \theta(\mu - \varepsilon - eV/2)] \theta(v_x),$$

справедливое при $eV \gg T$, вместо

$$-T(\partial\rho_0/\partial\varepsilon)\delta(\theta_p - \theta_r)$$

при $eV \ll T$, мы и приходим к уравнению (8.137), полученному выше из качественных соображений.

Контакт с каналом мы учтем через энергетические соображения (т.е. через непрерывность потока энергии). В соответствии с этим мы для простоты примем, что коэффициент прохождения электроннй волны есть единица с достаточной точностью, или, другими словами, что нет отраженной электронной волны — см. [171], где эта проблема детально обсуждена. (В противном случае нужно было бы ввести в уравнение (8.137) множитель $|\mathcal{T}|^2$, где \mathcal{T} коэффициент прохождения электронной волны через канал).

Функция распределения такого вида приводит к току

$$J = e\pi r \int v_x \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2} \Delta F = \frac{ap_F}{\hbar} VG_0, \quad G_0 = \frac{e^2}{\pi\hbar}. \quad (8.138)$$

Для левой границы канала мы имеем дело с аналогичным распределением

$$\Delta F \simeq \frac{a}{r} [\theta(\mu - \varepsilon - eV/2) - \theta(\mu + eV/2 - \varepsilon)] \theta(-v_x). \quad (8.139)$$

В действительности, именно это распределение переносит механическую энергию до областей, где благодаря упругому рассеянию она превращается в "тепло" при производстве энтропии. Поток энергии в этой области

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \pi r \int v_x \frac{2d^2p}{(2\pi\hbar)^2} (\varepsilon - \mu_R) \Delta F = \\ &= \int_0^\infty d\varepsilon (\varepsilon - \mu + eV/2) q_\varepsilon = \frac{1}{2} GV^2 = Q/2, \end{aligned}$$

где

$$q_\varepsilon = \frac{ap_F}{\pi\hbar^2} [\theta(\mu - \varepsilon + eV/2) - \theta(\mu - \varepsilon - eV/2)]. \quad (8.140)$$

Для симметричной структуры такое же положение имеет место и в левом резервуаре. Поток энергии в правое полупространство $I_\varepsilon = JV/2$ и полный поток, будучи суммой потоков влево и вправо, равен полному джоулеву теплу $Q = JV$.

Функция ΔF в двумерной области сшивается с ее величиной в канале при $r = a$. Таким образом, эти потоки энергий на расстояниях, больших длины l от обоих концов канала, превращаются в тепловые потоки.

На расстояниях больших, чем l , но все еще меньших $\nu\tau_{ee}$, мы имеем дело с уравнением диффузии

$$\nabla^2(\Delta F) = 0. \quad (8.141)$$

Для предполагаемой цилиндрической симметрии

$$\frac{q_\varepsilon}{\pi r} = -\nu(\varepsilon) D(\varepsilon) \nabla(\Delta F), \quad (8.142)$$

где ν плотность состояний, D коэффициент диффузии; правая сторона этого уравнения представляет плотность потока энергии для двумерного случая.

Соответственно для функции распределения электронов имеем

$$\Delta F = \frac{q_\varepsilon}{\nu D \pi} \frac{\ln(r_{max}/l) - \ln(r/l)}{\ln(r_{max}/l)}. \quad (8.143)$$

Здесь r_{max} это максимальное расстояние, до которого можно продолжить наше асимптотическое выражение (мы еще вернемся к обсуждению этой величины). Энергетическая зависимость ΔF все еще похожа на имевшую место в канале, за исключением того, что возмущение размылось по поверхности Ферми (не осталось зависимости от скорости v_x)

благодаря упругим столкновениям. В этой области весь поток энергии можно идентифицировать с "потокм тепла". В то же время мы все еще имеем дело с сильно неравновесным распределением, с которым невозможно ассоциировать какую-либо характерную температуру.

Что касается этой области, характеризуемой неравновесным электронным распределением, охватывающим интервал энергий eV около уровня Ферми, соответствующие тепловые измерения могут также оказаться нетривиальными. Простейшим прибором может служить болометр (приведенный в непосредственный контакт с электронной системой в исследуемой области), который измеряет поток энергии из этой области, приписывая ей некоторую измеряемую эффективную температуру. Более эффективной техникой могла бы служить туннельная спектроскопия, применяющая S-I-N контакты (сверхпроводник-изолятор-нормальный металл). Благодаря сингулярности плотности состояний в сверхпроводнике в окрестности края щели такой смещенный приложенным напряжением S-I-N контакт позволяет восстановить действительную функцию распределения в нормальном металле (см. [172]). Использование привычной термопары здесь может оказаться неэффективным, так как термоэлектрический эффект обладает высокой чувствительностью к деталям энергетического распределения, и его приложение к сильно неупорядоченным системам вызывает много вопросов.

На расстояниях, больших электрон-электронной длины свободного пробега, устанавливается электронная температура. Здесь можно уже пользоваться стандартным уравнением переноса тепла, что приведет к

$$\frac{Q}{2} = -k_e(T_e)\nabla T_e \pi r. \quad (8.144)$$

Для $k_e = \text{const}$ мы тут же получим решение, похожее на уже полученное (8.143). Для $k_e \propto T_e^\alpha$ соответствующую зависимость можно включить в градиентный член, который становится $\nabla(T_e^{1+\alpha})$, и, таким образом, мы снова получаем пространственное распределение, описываемое логарифмической зависимостью. Такая зависимость, очевидно, должна выйти на насыщение при расстояниях r , где становится важным уход тепла в подложку. Именно это расстояние играет роль r_{max} в наших рассуждениях, приведенных выше.

Обсудим экспериментальные схемы, позволяющие измерять производство тепла. Во-

первых, внутри канала на расстояниях, меньших l , мы имеем дело с чисто *механической* энергией. Хотя это неравновесное распределение можно зарегистрировать любым пробным прибором (включая гальванометр любого рода), такие измерения не имеют ничего общего с понятием тепла в общепринятом смысле. Зоне $l < r < l_{ee}$ соответствует неравновесное распределение энергии, почти совпадающее с таковой в канале. Хотя такое распределение и не может производить работу и, таким образом, связано с диссипацией механической энергии, такое понятие, как выделение тепла, традиционно здесь не употребляется. Это понятие можно применять в области $r > l_{ee}$, где понятие температуры имеет смысл. В этой области "тепло" (неравновесная температура) действительно может быть измерима термомпарой.

В промежуточной области неравновесное электронное распределение можно изучать с помощью более тонких методов типа примененных Потье и др. для изучения распределения электронов в диффузионном электронном канале [172]. Эта техника применяет контролируемый напряжением S-I-N туннельный переход, где ток почти всецело определяется электронами с энергиями около края сверхпроводящей щели в сверхпроводниках.

Нестационарный случай

На расстояниях $r < l$ мы имеем дело с зависящим от времени распределением (механической) электронной энергии. На расстояниях $r > l$ это распределение размывается во времени и в пространстве. Это сопровождается превращением механической энергии в тепло. Соответственно, поток тепла становится стационарным. Можно ожидать, что в непосредственной близости от контакта прибор типа болометра будет детектировать осцилляции с частотой 2ω и пространственным масштабом $2v/\omega$.

Усредненный во времени поток энергии в правый берег в этом случае можно вычислить так

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \frac{2}{L} \int_0^\infty \frac{dp}{2\pi\hbar} v \overline{(\varepsilon - \mu_R) \Delta F_R} = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{d\varepsilon}{\pi\hbar} \left(-\frac{\partial\mu}{\partial n} \delta n^* \right) \left(\frac{\partial F^{(0)}}{\partial \varepsilon} \right) e^{ikL} \int_0^L dx eE_\omega(x) e^{-ikx} \right\} = \frac{1}{2} \frac{|\chi_L|^2}{2\pi\hbar}, \end{aligned}$$

— что находится в соответствии с уравнением (8.128). Это половина выделяющегося тепла. Здесь мы использовали $\partial\mu/\partial n = \pi\hbar v/2$, считая $n = 2p_F/(\pi\hbar)$.

8.12 Заключение

Мы вычислили выделение джоулевого тепла при протекании тока через квантовую наноструктуру в режиме бесстолкновительного омического переноса заряда. Мы пришли к выводу, что для подсчета джоулевых потерь для этого случая (как и во всех случаях омической проводимости) достаточно решать кинетическое уравнение с точностью до первого порядка по падению потенциала (или электрическому полю \mathbf{E}) вдоль наноструктуры. Таким образом, мы установили, что диссипация механической энергии и генерация тепла при прохождении тока в наноструктурах происходит в берегах (резервуарах). Мы показали, что в области резервуара, непосредственно примыкающей к нанопроволоке и простирающейся на длины порядка длины свободного пробега происходит диссипация механической энергии. Далее мы выделили следующие области: область, находящаяся на расстояниях больших чем длина свободного пробега но меньших чем длина пробега по отношению к электрон-электронным столкновениям; на расстояниях больших чем последняя длина можно говорить об электронной температуре, и только на расстояниях еще больших можно использовать понятие температуры в общепринятом смысле. Что касается полного количества тепла, то мы нашли, что даже в случае различных длин свободного пробега в двух резервуарах производство тепла одно и то же в обоих резервуарах.

Мы установили, что учет столкновений с фононами в самой наноструктуре не изменяет симметрии тепловыделения в двух резервуарах.

Мы отметили, что расчет тепловыделения может служить альтернативным способом определения (диссипативной части) проводимости квантовых наноструктур. Наш энтропийный подход при этом позволяет ограничиться решением кинетического уравнения с точностью до первого порядка по полю при вычислении тепловыделения.

Методы, разработанные в этой главе, могут быть приложимы и к другим проблемам. Одним из таких примеров является генерация энтропии в контактах при туннелировании электронов.

В настоящей работе мы главным образом обсуждали случай омической проводимости. Простейший случай неомической проводимости - это баллистическое сопротивление для случая $eV \gg T$ [167, 173]. Снова генерация тепла происходит за пределами самой нано-

структуры, в контактах. Его вычисление должно проводиться по схеме, разработанной нами в разделе 8.11.

Более сложным случаем является случай баллистического сопротивления, сопровождаемого фононными процессами, как омического, так и неомического [167, 168, 174]. В классическом режиме нелинейные явления в вольт-амперных характеристиках точечных контактов между нормальными металлами наблюдались и обсуждались в пионерских работах Янсона [175]. Здесь мы имеем в виду квантовую ситуацию, когда электроны проводимости испытывают рассеяние внутри наноструктуры. Как было отмечено в [176], ситуация здесь отличается от обычного случая бесстолкновительного переноса, где электрон-фононное (также как электрон-электронное и электрон-примесное) взаимодействие считается существенным только в области контактов, где и генерируется все тепло. В упомянутом случае часть энергии передается фононам в самой наноструктуре и она может выделиться в областях вне как проволоки, так и контактов.

Глава 9

Спин-магнетофононное расщепление уровней в полумагнитных квантовых ямах

9.1 Введение

В этой главе рассматривается спин-магнетофононное расщепление уровней в квантовой яме из полумагнитного широкозонного полупроводника. Полумагнитные полупроводники характеризуются большим эффективным g -фактором. Условия резонанса $\hbar\omega_{\text{LO}} = \mu_B g B$ спинового расщепления между двумя уровнями Зеемана за счет взаимодействия с продольными оптическими фононами можно легко достичь, подбирая соответствующее магнитное поле B . Мы покажем, что это ведет к расщеплению уровней, которое зависит от величины электрон-фононного взаимодействия, а также от спин-орбитального взаимодействия в данной структуре.

Мы подробно рассмотрим модель Рашбы для описания спин-орбитального взаимодействия, предполагая, что квантовая яма не обладает симметрией инверсии, а также кратко обсудим другие модели связи спина и орбитального движения. Для экспериментального наблюдения расщепления уровней предлагается использовать резонансное прохождение световой волны через квантовую яму или отражение света квантовой ямой.

Резонанс между уровнями Ландау и продольными оптическими фононами (магнетофононный резонанс) был теоретически предсказан в работе [177] при изучении магнетосопротивления. Резонанс возникает каждый раз, когда частота оптического фонона равна циклотронной частоте, умноженной на небольшое целое число. Таким образом, была ука-

зана возможность „внутреннего“ циклотронного резонанса в твердых телах. С тех пор это явление было исследовано во многих экспериментах — см., например, обзор [178].

Возможность переходов с переворотом спина электронов, взаимодействующих с оптическими фононами, между уровнями Ландау с противоположной ориентацией спинов можно назвать спин-магнетофонным резонансом (СМФР). Такое явление было рассмотрено во многих работах (см. [86, 87, 88, 89]). Целью настоящей главы является обсуждение особенности СМФР в полумагнитных полупроводниках, где из-за большого эффективного g -фактора соответствующее межуровневое расстояние может быть особенно большим, и поэтому явление СМФР очень ярко выражено. Условие спинового резонанса имеет следующий вид

$$g\mu_B B = \hbar\omega_{LO}. \quad (9.1)$$

Здесь μ_B — магнетон Бора, g — эффективный g -фактор носителей, а B — внешнее магнитное поле.

Многие замечательные магнетооптические свойства широкозонных полумагнитных полупроводников, такие как гигантское расщепление свободного экситона [179], гигантский эффект Фарадея [179, 180, 181], и т.д., определяются большим расщеплением между зоной проводимости и валентной зоной в магнитном поле. Это есть следствие обменного взаимодействия зонных носителей с электронами незаполненной d -оболочки ионов Mn. В настоящей работе в качестве примера мы будем рассматривать соединение $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$, у которого ширина запрещенной зоны зависит от x — относительной концентрации атомов Mn.

В присутствии внешнего магнитного поля спины ионов Mn ориентированы вдоль магнитного поля. Через обменное взаимодействие Гейзенберговского типа эти спины взаимодействуют со спинами носителей зон. В конечном счете, в модели среднего поля динамику носителей в зонах можно описать, считая их g -фактор большим (только таким образом обменное взаимодействие и войдет в наши окончательные формулы).

Существуют два конкурирующих механизма, определяющих знак и величину константы обменного взаимодействия (и g -фактора) [182, 183, 184]. Первый механизм, возникающий из-за прямого обменного взаимодействия между зонными и d -электронами, относительно слаб и относится к ферромагнитному типу. Вторым является следствием гибри-

зации d -орбиталей и зонных состояний. Последний механизм оказывается антиферромагнитным и им можно пренебречь в зоне проводимости, в то время как в валентной зоне он определяет константу обменного взаимодействия.

Резонансное взаимодействие уровней Ландау с оптическими фононами может проявляться и иначе, хотя физика процесса остается той же. Это приводит к магнетооптическим аномалиям как в объемных [185], так и в двумерных системах [186, 187, 188]. В работах [186, 187, 188] главным образом исследовались магнетооптические аномалии в обычных гетероструктурах на основе GaAs. Было показано, что такие магнетооптические аномалии в двумерном случае являются мощным инструментом для изучения электрон-фононного взаимодействия в этих структурах. Было установлено, что в условиях резонанса по отношению к электрон-фононному взаимодействию соответствующий циклотронный пик расщепляется на дублет. Этот эффект приводит к аномалиям при оптическом поглощении и отражении (а также и в других оптических эффектах, например, при рамановском рассеянии).

В настоящей работе мы исследуем этот эффект в связи с СМФР, т.е. магнетофононный резонанс, возникающий из-за переворота спинов. Условия электрон-фононного резонанса могут иметь место как для электронов проводимости, так и для валентных электронов. При этом обменные константы оказываются различными для электронов зоны проводимости и валентной зоны [66]. Хотя резонансные условия, приводящие к расщеплению, возникают с увеличением магнитного поля раньше в валентной зоне, мы покажем, что при этом величина самого расщепления меньше для валентной зоны, чем для зоны проводимости.

В следующем разделе мы рассмотрим расщепление уровней как формальную квантово-механическую задачу. Это явление можно представить как снятие вырождения двух состояний. Вырождение энергии электрона в состоянии 2 и электрона в состоянии 1 плюс оптический фонон (см. Рис. 9.1) снимается за счет электрон-фононного взаимодействия. Мы получим выражение для расщепления уровней, не уточняя состояний, участвующих в соответствующих переходах. В разделе 9.3 мы определим состояния и энергии уровней электронов проводимости, учитывая спин-орбитальное взаимодействие в модели Рашбы. Это позволяет выразить расщепление уровня в явном виде. В конце этого раздела будут

даны необходимые оценки. В качестве экспериментального обнаружения явления расщепления предлагается резонансное отражение (прохождение) света квантовой ямой в схеме Фарадея. Считаем, что отражение (прохождение) волн происходит за счет прямых межзонных переходов, и в разделе 9.4 даются явные выражения для волновых функций и энергий для состояний в валентной зоне. В разделе 9.5 эти волновые функции используются для определения коэффициентов отражения и прохождения при возбуждении светом межзонных переходов в квантовой яме. Заключительные замечания приведены в разделе 9.7.

9.2 Расщепление уровня

Приступим к решению формальной задачи: пусть имеются два состояния 1 и 2, и нужно найти собственную энергию электрона в состоянии 2 при его взаимодействии с оптическими фононами. Предположим, что энергия рассматриваемого состояния ε_2 близка к $\varepsilon_1 + \hbar\omega_{\text{LO}}$ (т.е. электронное состояние 2 и электронное состояние 1 плюс оптический фонон с частотой ω_{LO} являются вырожденными). Это позволяет нам не рассматривать остальные возможные состояния электрона.

Как правило, одиночная квантовая яма приводит к новым фононным (колебательным) модам. Возможны три типа фононов, имеющих отношение к квантовой яме [189] (см. также книгу Строшио и Дутта [190]): фононы, не проникающие в квантовую яму, фононы с максимумом волновой функции на поверхности квантовой ямы и спадающие как в яму, так и в барьеры (поверхностные фононы), и фононы в пределах квантовой ямы. Фононную Гриновскую функцию в технике Мацубары можно записать в следующем виде

$$D(\mathbf{r}_{\perp}, z, z', i\omega_k) = - \sum_{\alpha \mathbf{q}_{\perp}} |C_{\alpha}|^2 \left(\frac{e^{i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}} \eta_{\alpha}(z) \eta_{\alpha}^*(z')}{i\omega_k + \hbar\omega_{\text{LO}}} - \frac{e^{-i\mathbf{q}_{\perp} \mathbf{r}_{\perp}} \eta_{\alpha}^*(z) \eta_{\alpha}(z')}{i\omega_k - \hbar\omega_{\text{LO}}} \right), \quad (9.2)$$

где $\eta_{\alpha}(z)$ описывает пространственное распределение фононной ветви α в направлении, перпендикулярном плоскости квантовой ямы (ось z), $\omega_k = 2\pi kT$ ($k = 0, \pm 1 \dots$) — Мацубаровские частоты бозонов, $|C_{\alpha}|^2$ — сила электрон-фононного взаимодействия. T обозначает температуру; мы будем считать ее в энергетических единицах, полагая $k_B = 1$.

Электрон-фононное взаимодействие с продольными оптическими фононами можно рассматривать в модели Фрелиха для объемных систем. Согласно этой модели $\eta_{\alpha}(z) \rightarrow$

$e^{iq_z z}$, $|C_\alpha|^2 \rightarrow 2\pi e^2 \hbar \omega_{\text{LO}} / q^2 \epsilon^*$. Использование этого приближения для относительно широких ям может быть оправдано, если заметить, что взаимодействием с поверхностными фононами можно в данном случае пренебречь. Учет взаимодействия с захваченными фононами приводит качественно к тем же результатам. Поэтому мы ограничимся приближением Фрелиха. Оптические фононы полагаем “бездисперсионными”, ω_{LO} есть их частота и

$$\frac{1}{\epsilon^*} = \frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon_0}, \quad (9.3)$$

где $\epsilon_\infty(\epsilon_0)$ является высокочастотным пределом диэлектрической проницаемости (статистической диэлектрической проницаемостью). Появление разности высокочастотной и статической проницаемости в электрон-фононном взаимодействии можно понять так: прямое электрон-электронное кулоновское взаимодействие уменьшается в среде в ϵ_∞ раз, это взаимодействие совместно с взаимодействием через оптические фононы между двумя электронами должно привести к уменьшению кулоновского взаимодействия в ϵ_0 раз, т.е. электрон-фононное взаимодействие должно включать только инерционную часть.

Собственно-энергетическую часть электрона в первом приближении теории возмущений с учетом электрон-фононного взаимодействия можно записать в следующем виде (см. диаграмму (а) на Рис. 9.9)

$$\Sigma_2(i\varepsilon_n) = -T \frac{2\pi\omega_{\text{LO}} e^2 \hbar}{\epsilon^*} \sum_k \frac{F_{21}}{i(\varepsilon_n - \omega_k) - \varepsilon_1 + \mu \omega_k^2 + (\hbar\omega_{\text{LO}})^2}, \quad (9.4)$$

где

$$F_{21} = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{| \langle 2 | e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} | 1 \rangle |^2}{q^2} \quad (9.5)$$

и

$$\varepsilon_n = \pi(2n + 1)T. \quad (9.6)$$

Для вычисления суммы по k в выражении (9.4) используем

$$G(i\varepsilon_n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\text{Im}G^R(\varepsilon)}{\varepsilon - i\varepsilon_n} \quad (9.7)$$

и

$$D(i\omega_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \frac{\text{Im}D^R(\varepsilon)}{\varepsilon - i\omega_k}. \quad (9.8)$$

Фононная Гриновская функция D^R определяется как

$$D^R(\omega) = \frac{1}{\omega - \hbar\omega_{\text{LO}} + i0} - \frac{1}{\omega + \hbar\omega_{\text{LO}} + i0}. \quad (9.9)$$

Сумму можно представить в виде

$$T \sum_k G_1(i(\varepsilon_n - \omega_k)) D(i\omega_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx dy}{\pi^2} \frac{\text{Im}G_1^R(x) \text{Im}D^R(y)}{x + y - i\varepsilon_n} [1 - n_F(x) + n_B(y)]. \quad (9.10)$$

Здесь мы воспользовались тождествами

$$T \sum_s \frac{1}{i\varepsilon_s - x} = n_F(x) - 1, \quad T \sum_k \frac{1}{i\omega_k - y} = -[n_B(y) + 1], \quad (9.11)$$

где $n_F(x)[n_B(y)]$ функции Ферми[Планка]. В результате

$$\Sigma_2(i\varepsilon_n) = -\frac{2\pi\omega_{\text{LO}}e^2\hbar}{\epsilon^*} F_{21} \left\{ \frac{n_F(\varepsilon_1) - n_B(\omega_{\text{LO}}) - 1}{i\varepsilon_n - (\varepsilon_1 - \mu) - \hbar\omega_{\text{LO}}} - \frac{n_F(\varepsilon_1) + n_B(\omega_{\text{LO}})}{i\varepsilon_n - (\varepsilon_1 - \mu) + \hbar\omega_{\text{LO}}} \right\}. \quad (9.12)$$

Ограничиваясь рассмотрением случая низких температур $T \ll \hbar\omega_{\text{LO}}$ и предполагая, что состояние ε_1 пустое, получаем

$$\Sigma_2(i\varepsilon_n) = \frac{\Delta^2/4}{i\varepsilon_n - (\varepsilon_1 - \mu) - \hbar\omega_{\text{LO}}}, \quad (9.13)$$

где

$$\Delta^2 = \frac{8\pi\omega_{\text{LO}}e^2\hbar}{\epsilon^*} F_{21}. \quad (9.14)$$

Для электронной Гриновской функции имеем

$$G_2(i\varepsilon_n) = \frac{1}{i\varepsilon_n - \varepsilon_2 + \mu - (\Delta/2)^2/(i\varepsilon_n - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} + \mu)}. \quad (9.15)$$

Аналитически продолжив, заменяя $i\varepsilon_n \rightarrow \varepsilon + i0$, получаем запаздывающую Гриновскую функцию

$$G_2^R(\varepsilon) = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} + \mu}{(\varepsilon - \varepsilon_+ + \mu + i0)(\varepsilon - \varepsilon_- + \mu + i0)}, \quad (9.16)$$

где

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + \hbar\omega_{\text{LO}}}{2} \pm \sqrt{((\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}})/2)^2 + (\Delta/2)^2}. \quad (9.17)$$

Как видно из выражения (9.16), Гриновская функция имеет два полюса; уровень ε_2 расщепляется на дублет с энергиями ε_{\pm} , расстояние между полюсами равно Δ . Расщепление

можно выразить через параметр α , который при малых величинах описывает поляронный сдвиг $m_{pol} = m(1 + \alpha/6)$ эффективной массы

$$\Delta^2 = 16\pi\alpha l_{LO}(\hbar\omega_{LO})^2 \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{|\langle 2|e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}|1\rangle|^2}{q^2}, \quad \alpha^2 = \frac{m_c e^4 / 2(\hbar\epsilon^*)^2}{\hbar\omega_{LO}}. \quad (9.18)$$

Здесь мы ввели длину $l_{LO} = \sqrt{\hbar/2m_c\omega_{LO}}$. Параметр α для материалов с относительно слабой полярностью мал. К примеру, $\alpha = 0.39$ для CdTe с частичной ионной связью. Предположим теперь, что мы можем добиться резонансного условия $\epsilon_2 - \epsilon_1 = \hbar\omega_{LO}$, меняя

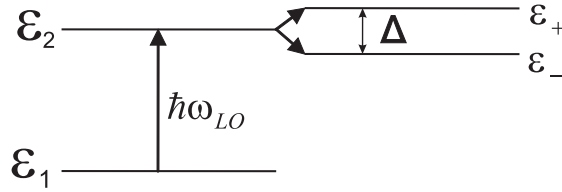


Рис. 9.1: Расщепление уровня.

межуровневое расстояние. Если состояния 2 и 1 являются соответственно состояниями со спином вверх и со спином вниз, то резонансное условие может быть достигнуто путем изменения внешнего магнитного поля. Так как расщепление пропорционально матричному элементу $\langle 2|e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}|1\rangle$, мы видим, что фононы могут привести к перевороту спина, только если состояния 2 и 1 не являются собственными функциями спиновых операторов \mathbf{s}^2 и s_z . По этой причине мы должны учесть в гамильтониане спин-орбитальное взаимодействие. Мы рассматриваем спин-орбитальное взаимодействие в модели Рашбы

$$H_R = \frac{\alpha_R}{\hbar} [\boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}]\mathbf{n}. \quad (9.19)$$

Здесь \mathbf{n} единичный вектор, перпендикулярный плоскости квантовой ямы. Это взаимодействие связано с инверсионной асимметрией структуры. Параметр α_R порядка 10^{-9} эВ·см.

Возможен также и другой механизм спин-орбитального взаимодействия из-за инверсионной асимметрии в объеме. Соответствующий трехмерный спин-орбитальный гамильтониан Дрессельхауза [191] в главных осях кристалла записывается в виде

$$H_D = \delta(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}). \quad (9.20)$$

Здесь $\hbar^3 P_x = p_y p_x p_y - p_z p_x p_z$ и другие компоненты \mathbf{P} могут быть получены циклической перестановкой. В двумерном случае этот гамильтониан имеет следующую форму (опускаем кубические по p_x, p_y члены)

$$H_D = \frac{\alpha_D}{\hbar} (\sigma_y p_y - \sigma_x p_x), \quad (9.21)$$

где $\alpha_D = \delta \langle p_z^2 \rangle / \hbar^2$, а $\langle p_z^2 \rangle$ усреднено по поперечному движению электрона. Параметр α_D может быть оценен как 10^{-10} эВ·см.

В принципе имеется еще один (прямой) механизм электрон-фононного взаимодействия: поле продольного оптического фонона может изменить g -фактор Зеемановского члена в гамильтониане

$$V_{\text{int}} = \mu_B s_i \frac{dg_{ik}}{d\varphi} B_k \varphi. \quad (9.22)$$

Здесь φ — электрический потенциал поля оптического фонона. Это слагаемое также может привести к перевороту спинов. Как мы покажем, вкладом этого взаимодействия в расщепление уровней можно пренебречь по сравнению с вкладом от слагаемого Рашбы.

Интересуясь лишь возможностью расщепления линии в экспериментах по оптическому отражению (прохождению) на квантовых ямах, мы представим явные вычисления для спин-орбитального взаимодействия в модели Рашбы, поскольку во многих полупроводниковых наноструктурах взаимодействие Рашбы сильнее взаимодействия Дрессельхауза. Однако можно показать, что слагаемое Дрессельхауза в форме (9.21) незначительно отличается от слагаемого Рашбы, так что для его учета можно просто заменить константу α_R на α_D (этого будет достаточно для оценок). В самом деле, можно показать, что слагаемое Дрессельхауза можно получить из последнего слагаемого в уравнении (9.31) ниже, заменив α_R на α_D и a на $-ia$.

9.3 Глубокая квантовая яма в поперечном магнитном поле

Пусть x, y оси параллельны плоскости квантовой ямы, ось z перпендикулярна плоскости ямы. Далее будем рассматривать простейший случай ямы с бесконечно высокими стенками. Как пример можно рассматривать структуру $\text{CdMgTe}-\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}-\text{CdMgTe}$, запрещенная зона барьеров CdMgTe порядка 3 эВ (можно изменять содержанием Mg, за-

мещающего Cd), толщину ямы можно считать порядка десятков нанометров. В принципе, фазовая диаграмма $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ (в переменных x, T) очень богатая [192], мы будем полагать, что мы находимся в области парамагнитной фазы, реализующейся при $x \leq 0.2$ почти во всем температурном интервале (с увеличением состава Mn и при малых температурах возможны и другие фазы, например, антиферромагнитное состояние).

Будем полагать, что магнитное поле \mathbf{B} направлено вдоль оси z (перпендикулярно плоскости квантовой ямы) и для магнитного поля выберем калибровку $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$. Для широкозонных материалов можно рассматривать валентную зону и зону проводимости отдельно. Для структур с симметрией цинковой обманки гамильтониан для зоны проводимости около точки Γ_6 (см. [193]) в базисе Ss_{\pm} (где S — сферически симметричная Блоховская амплитуда, s_-, s_+ — спиновые функции) имеет вид

$$H = H_0 + H_R, \quad (9.23)$$

$$H_0 = \frac{\hbar^2}{2m_c} \left(-i\nabla + \frac{e}{\hbar c} \mathbf{A} \right)^2 + U + H_Z. \quad (9.24)$$

U — потенциал, формирующий квантовую яму. Напишем гамильтониан Зеемана в виде

$$H_Z = \frac{1}{2} \mu_B \sigma_z g_c B. \quad (9.25)$$

Поскольку мы собираемся рассматривать полумагнитные полупроводники $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$, включим в гамильтониан обменное Гейзенберговское взаимодействие электронов зоны проводимости с ионами Mn

$$H_{ce} = - \sum_n J_{ce}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \mathbf{S}_n^{\text{Mn}} \mathbf{s}, \quad (9.26)$$

где $J_{ce}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$ обменный интеграл электронов с ионами Mn, локализованными в \mathbf{R}_n , суммирование проводится по всем ионам Mn. Будем пользоваться приближением среднего поля, подставляя среднее значение $\langle S_z^{\text{Mn}} \rangle$ спина Mn в направлении z вместо соответствующего оператора и приписывая спин $x \cdot \langle S_z^{\text{Mn}} \rangle$ каждому кристаллическому узлу. В этом приближении обменный гамильтониан может быть записан в форме

$$H_{ce} = -x \langle S_z^{\text{Mn}} \rangle N_0 \langle S | J_{ce}(\mathbf{r}) | S \rangle s_z \equiv -2\hbar\omega_c V_c s_z, \quad (9.27)$$

где N_0 есть плотность элементарных ячеек, а $\langle S | J_{ce}(\mathbf{r}) | S \rangle$ — обменный интеграл (который считается положительным). Здесь для удобства мы выделили циклотронную частоту

$\omega_c = eB/m_c c$. Величина V_c для зоны проводимости оказывается отрицательной и довольно большой. Ее можно записать в виде

$$V_c = x \langle S_z^{\text{Mn}} \rangle = \frac{N_0 \langle S | J_{ce}(\mathbf{r}) | S \rangle}{2\hbar\omega_c}.$$

Индукцированный спин иона Mn можно записать как

$$\langle S_z^{\text{Mn}} \rangle = -\mathcal{B}_S(\zeta), \quad \zeta = \frac{g_{\text{Mn}}\mu_B B}{k_B T},$$

где $\mathcal{B}_S(x)$ функция Бриллюэна

$$\mathcal{B}_S(x) = \frac{2S+1}{2} \text{cth} \left(\frac{2S+1}{2} x \right) - \frac{1}{2} \text{cth} \left(\frac{x}{2} \right). \quad (9.28)$$

Для $S = 5/2$

$$\mathcal{B}_{5/2}(x) = \frac{35}{12}x, \quad x \ll 1; \quad \mathcal{B}_{5/2}(x) = \frac{5}{2}, \quad x \gg 1,$$

$g_{\text{Mn}} = 2$, μ_B магнетон Бора, $S = 5/2$ спин атома марганца. Видно, что g_c в выражении (9.25) должен пониматься в смысле $g_{zz} - 4V_c$. Так как $N_0 \langle S | J_{ce}(\mathbf{r}) | S \rangle = 0.22$ эВ (см. [194]) и $\hbar\omega_c \sim 1$ мэВ, получаем, что $g_c \sim 30$.

Собственные функции H_0 как функции y могут быть выбраны в виде плоских волн $e^{ik_y y} / \sqrt{L_y}$. Как функции z они являются собственными функциями $\chi_i(z)$ бесконечно глубокой одномерной ямы с соответствующими собственными числами ε_i . Следовательно, H_0 можно переписать как

$$H_0 = \varepsilon_i - \frac{\hbar^2}{2m_c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{m_c \omega_c^2}{2} (x - x_0)^2 + H_Z. \quad (9.29)$$

Здесь положение центра осциллятора $x_0 = -k_y \hbar c / eB$ зависит от квазиимпульса $\hbar k_y$ вдоль направления оси y (движение вдоль оси y свободное). Гамильтониан Рашбы в магнитном поле равен

$$H_R = \alpha_R \begin{pmatrix} 0 & \partial/\partial x + k_y + x/l_c^2 \\ -\partial/\partial x + k_y + x/l_c^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.30)$$

Здесь мы ввели магнитную длину $l_c = \sqrt{\hbar c / eB}$. Вводя Бозе-операторы согласно $\partial/\partial x = (a - a^\dagger) / (\sqrt{2}l_c)$, $x - x_0 = l_c(a + a^\dagger) / (\sqrt{2})$, получаем

$$H = \varepsilon_i + \hbar\omega_c (a^\dagger a + 1/2) + H_Z + \frac{\sqrt{2}\alpha_R}{l_c} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.31)$$

Слагаемое Рашбы не меняет основное состояние $\varphi_0(x - x_0)$, и энергия этого состояния равна $\varepsilon_0 = \varepsilon_i + \hbar\omega_c/2 - \mu_B B g_c/2$. Другие собственные функции H равны

$$\psi_{n+} = \begin{pmatrix} \cos u_n \varphi_n(x - x_0) \\ \sin u_n \varphi_{n+1}(x - x_0) \end{pmatrix} \quad (9.32)$$

с собственными значениями

$$\varepsilon_{n+} = \varepsilon_i + \hbar\omega_c(n + 1) + \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega_c - \mu_B g_c B}{2}\right)^2 + 2\frac{\alpha_R^2}{l_c^2}(n + 1)}, \quad (9.33)$$

и

$$\psi_{n-} = \begin{pmatrix} -\sin u_n \varphi_n(x - x_0) \\ \cos u_n \varphi_{n+1}(x - x_0) \end{pmatrix} \quad (9.34)$$

с собственными значениями

$$\varepsilon_{n-} = \varepsilon_i + \hbar\omega_c(n + 1) - \sqrt{\left(\frac{\hbar\omega_c - \mu_B g_c B}{2}\right)^2 + 2\frac{\alpha_R^2}{l_c^2}(n + 1)}, \quad (9.35)$$

где

$$\operatorname{tg} 2u_n = 2\sqrt{2}\frac{\alpha_R}{l_c} \frac{\sqrt{n+1}}{\mu_B g_c B - \hbar\omega_c}.$$

Здесь φ_n — функции осциллятора от аргумента $x - x_0$

$$\varphi_n(x - x_0) = \frac{1}{\pi^{1/4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \frac{1}{l_c^{1/2}} \exp\left[-(x - x_0)^2/2l_c^2\right] H_n[(x - x_0)/l_c], \quad (9.36)$$

где $H_n(x)$ представляют собой полиномы Эрмита. Таким образом, мы приходим к двум группам уровней (как показано схематически на Рис. 9.2), разделенных (большой) энергией $\mu_B g_c B$.

Каждая из этих групп состоит из подуровней, которые являются почти эквидистантными (если пренебречь спин-орбитальным вкладом в энергию). Эти уровни отличаются друг от друга на циклотронную частоту $\hbar\omega_c$. Минимальная энергия в первой группе равна ε_0 , а во второй группе $\varepsilon_{0+} = \varepsilon_0 + \mu_B g_c B$.

В дальнейшем будем ограничиваться переходами $0 \rightarrow 0+$ и $n- \rightarrow (n+1)+$, вызванными фононами. Как мы увидим ниже, в реальных условиях оценки показывают, что расщепление уровней за счет электрон-фононного взаимодействия оказывается малым по сравнению с циклотронной энергией, поэтому достаточно рассмотреть каждую пару состояний отдельно. Действительно, для типичных магнитных полей порядка нескольких Тесла

магнитная длина $l_c = \sqrt{\hbar c/eB} \sim 10$ нм, и циклотронная энергия $\hbar\omega_c = (m_0/m_c)\hbar^2/m_0l_c^2 \sim 10^{-2}$ эВ, в то время как расщепление уровней порядка $\hbar\Delta\omega \sim 10^{-3}$ эВ (см. оценки в конце этого раздела).

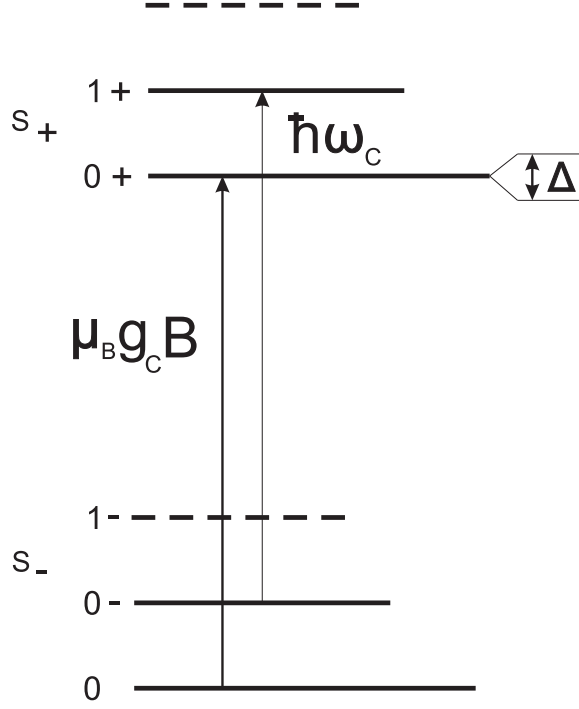


Рис. 9.2: Расщепление уровня в зоне проводимости. Показаны только электронные уровни, находящиеся в резонансе с фононами.

Вычислим матричный элемент между основным состоянием 0 первой группы и состоянием 0+ второй группы

$$| \langle i, 0+, k_y | e^{iq_x x + iq_z z} | i, 0, k_y - q_y \rangle |^2 = \sin^2 u_0 | \langle i | e^{iq_z z} | i \rangle |^2 \frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2} \exp\left(-\frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2}\right) \quad (9.37)$$

или, учитывая, что $u_0 \ll 1$,

$$\Delta_{0+,0}^2 = 4\alpha \frac{l_{LO}}{l_c} (\hbar\omega_{LO})^2 u_0^2 f\left(\frac{l_c}{L}\right), \quad (9.38)$$

где

$$f\left(\frac{l_c}{L}\right) = l_c \int dz_1 dz_2 \chi_i^2(z_1) \chi_i^2(z_2) \int_0^{\infty} dq_{\perp} \frac{q_{\perp}^2 l_c^2}{2} \exp\left(-l_c^2 q_{\perp}^2 / 2 - q_{\perp} |z_1 - z_2|\right). \quad (9.39)$$

Переходы из $n-$ в $(n+1)+$ состояний также резонансны; для этих переходов мы имеем (опуская k_y и $k_y - q_y$)

$$| \langle i, (n+1) + | e^{iq_x x + iq_z z} | i, n- \rangle |^2 = 2 \left(\frac{\alpha_R}{l_c \mu_B g_c B} \right)^2 | \langle i | e^{iq_z z} | i \rangle |^2 \times \\ \times \frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2} e^{-l_c^2 q_{\perp}^2 / 2} \left[L_{n+1}^1(l_c^2 q_{\perp}^2 / 2) - L_n^1(l_c^2 q_{\perp}^2 / 2) \right]^2,$$

где $L_n^\alpha(x)$ есть полиномы Лагерра, определенные как в [122]. Здесь учтено, что $\sin u_n \simeq u_n \simeq \sqrt{2(n+1)\alpha_R/l_c \mu_B B}$. Так как $L_{n+1}^{\alpha-1}(x) = L_{n+1}^\alpha(x) - L_n^\alpha(x)$, то это выражение можно упростить

$$| \langle i, (n+1) + | e^{iq_x x + iq_z z} | i, n- \rangle |^2 = 2 \left(\frac{\alpha_R}{l_c \mu_B g_c B} \right)^2 | \langle i | e^{iq_z z} | i \rangle |^2 \frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2} e^{-l_c^2 q_{\perp}^2 / 2} \left[L_{n+1}(l_c^2 q_{\perp}^2 / 2) \right]^2.$$

Имеем

$$\Delta_{(n+1)+, n-}^2 = 8\alpha \frac{l_{LO}}{l_c} (\hbar\omega_{LO})^2 \left(\frac{\alpha_R}{l_c \mu_B g_c B} \right)^2 f_n \left(\frac{l_c}{L} \right), \quad (9.40)$$

$$f_n \left(\frac{l_c}{L} \right) = l_c \int dz_1 dz_2 \chi_i^2(z_1) \chi_i^2(z_2) \int_0^\infty dq_{\perp} \frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2} \left[L_{n+1} \left(\frac{l_c^2 q_{\perp}^2}{2} \right) \right]^2 e^{-l_c^2 q_{\perp}^2 / 2 - q_{\perp} |z_1 - z_2|}. \quad (9.41)$$

Здесь мы оценим значение $\Delta_{0+,0}^2$ предполагая, что поперечное движение описывается волновыми функциями $\chi_1(z) = \sqrt{2/L} \sin(\pi z/L)$ [см. выражение (9.38)]

$$\Delta_{0+,0}^2 = 8\alpha (\hbar\omega_{LO})^2 \left(\frac{\alpha_R}{l_c \mu_B g_c B} \right)^2 \frac{l_{LO}}{l_c} f \left(\frac{l_c}{L} \right), \quad (9.42)$$

где $f(x) = \sqrt{2\pi}/4$ при $x \gg 1$ и $f(x) = 3x/2$ при $x \ll 1$ (см. Рис. 9.3).

Учитывая параметры CdTe, такие, как частота продольного оптического фонона $\omega_{LO} = 3.22 \cdot 10^{13} \text{ c}^{-1}$ (246 K), проницаемости $\epsilon_0 = 10.3$ и $\epsilon_\infty = 6.9$, эффективная масса электрона $m_c = 0.1m_0$ (m_0 масса свободного электрона), видим, что расщепление линии составляет $\Delta\omega = \Delta/\hbar \simeq \alpha_R \sqrt{\alpha}/\hbar l_c \sim 10^{11} \text{ c}^{-1}$. При Дрессельхаузовском взаимодействии расщепление линии будет меньше в α_D/α_R раз.

9.4 Валентная зона

Для структур с симметрией цинковой обманки около точки Γ_8 валентная зона описывается гамильтонианом Латтинжера [195]

$$H = H_0 + H(k_z), \quad (9.43)$$

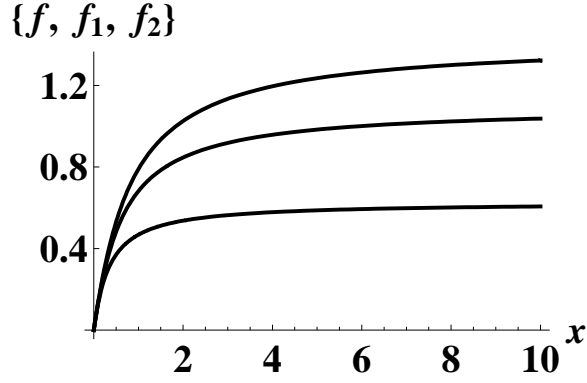


Рис. 9.3: Функции $f(x)$, $f_0(x)$ и $f_1(x)$. Вторая функция соответствует $\Delta_{1+,0-}^2$, насыщение наступает при $x \gg 1$, достигая значения $7\sqrt{2\pi}/16$. Третья соответствует переходу $1- \rightarrow 2+$, и для нее также наблюдается насыщение при $x \gg 1$, достигающее значения $145\sqrt{2\pi}/256$.

где мы отделили часть $H(k_z)$, зависящую от k_z

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2 \right) (k_x^2 + k_y^2) - 2\gamma_2 (J_x^2 k_x^2 + J_y^2 k_y^2) - 4\gamma_3 \{J_x J_y\} \{k_x k_y\} + 2\frac{e}{c} \mathfrak{a} \mathbf{J} \mathbf{B} \right\}, \quad (9.44)$$

$$H(k_z) = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left\{ \left(\gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2 \right) k_z^2 - 2\gamma_2 J_z^2 k_z^2 - 4\gamma_3 (\{J_x J_z\} \{k_x k_z\} + \{J_y J_z\} \{k_y k_z\}) \right\}. \quad (9.45)$$

Здесь $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \mathfrak{a}$ — параметры материала, \mathbf{J} — оператор углового момента $J = 3/2$, симметричное умножение определяется согласно

$$\{AB\} = \frac{AB + BA}{2}. \quad (9.46)$$

Мы добавим к гамильтониану валентной зоны обменное Гейзенберговское взаимодействие электронов валентной зоны с ионами Mn

$$H_{ve} = -\sum_n J_{ve}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \mathbf{S}_n^{\text{Mn}} \mathbf{s}, \quad (9.47)$$

где $J_{ve}(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$ обменный интеграл электронов зоны проводимости с ионами Mn.

Волновые функции можно записать в виде

$$\Psi = \sum_i F_i(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}), \quad (9.48)$$

где $u_i(\mathbf{r})$ — четыре вырожденных состояния около потолка валентной зоны [193]

$$u_{\pm 3/2} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X \pm iY) s_{\pm}, \quad u_{\pm 1/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\mp \frac{1}{\sqrt{2}} (X \pm iY) s_{\mp} + \sqrt{2} Z s_{\pm} \right]. \quad (9.49)$$

Легко видеть, что в этом базисе спиновый оператор $s_z = \sigma_z/2$ также диагонален и связан с J_z посредством $s_z = J_z/3$, поэтому мы можем переписать гамильтониан в виде

$$H_{ve} = -x \langle S_z^{\text{Mn}} \rangle N_0 \langle X | J_{ve}(\mathbf{r}) | X \rangle \frac{1}{3} J_z \equiv -2\hbar\omega_{c0} V_v J_z. \quad (9.50)$$

Здесь для удобства мы выделили циклотронную частоту $\omega_{c0} = eB/m_0c$, ожидая ее появление в следующих формулах. Введенная величина V_v для валентной зоны оказывается положительной и довольно большой. Она может быть оценена как

$$V_v = x \langle S_z^{\text{Mn}} \rangle \frac{N_0 \langle X | J_{ve}(\mathbf{r}) | X \rangle}{6\hbar\omega_{c0}}.$$

Для валентной зоны обменный интеграл $\langle X | J_{ve}(\mathbf{r}) | X \rangle$ отрицателен.

Для типичных магнитных полей порядка нескольких Тесла магнитная длина $l_c = \sqrt{\hbar c/eB} \sim 10$ нм, и циклотронная энергия $\hbar\omega_{c0} = \hbar^2/m_0l_c^2 \sim 10^{-3}$ эВ, тогда как $N_0 \langle X | J_{ve}(\mathbf{r}) | X \rangle = -0.88$ эВ [194]. Следовательно, $V_v \gg 1$.

Для магнитного поля опять выбираем калибровку в виде $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$ и вводим операторы a, a^\dagger согласно

$$k_x = -\frac{i}{\sqrt{2}l_c}(a - a^\dagger), \quad k_y = \frac{1}{\sqrt{2}l_c}(a + a^\dagger). \quad (9.51)$$

Вводя вместо операторов J_x, J_y операторы $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, получаем

$$H_0 = -\hbar\omega_{c0} \left\{ [\gamma_1 - \frac{5}{4}\gamma_2 + \gamma_2 J_z^2](a^\dagger a + 1/2) + \frac{\gamma_2}{4}(J_-^2 + J_+^2)[a^2 + (a^\dagger)^2] + \right. \\ \left. + \frac{\gamma_3}{4}(J_+^2 - J_-^2)[a^2 - (a^\dagger)^2] + \frac{e}{c} l_c^2 \mathbf{a} \mathbf{J} \mathbf{B} \right\}, \quad (9.52)$$

$$H(k_z) = -\hbar\omega_{c0} \left\{ a J_+(J_z + \frac{1}{2}) - a^\dagger J_-(J_z - 1/2) \right\} i\sqrt{2}\gamma_3(l_c k_z) - \frac{\hbar\omega_{c0}}{2} \left\{ \gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2 - 2\gamma_2 J_z^2 \right\} (l_c k_z)^2.$$

Далее мы будем использовать сферическое приближение, т.е. полагаем $\gamma_2 = \gamma_3$. В этом приближении

$$-\frac{H}{\hbar\omega_{c0}} = 2g_v J_z + (\gamma_1 - \frac{5}{4}\gamma_2 + \gamma_2 J_z^2)(a^\dagger a + 1/2) + \frac{1}{2} \left\{ \gamma_1 + \frac{5}{2}\gamma_2 - 2\gamma_2 J_z^2 \right\} (l_c k_z)^2 \\ + \frac{\gamma_2}{2} [J_+^2 a^2 + J_-^2 (a^\dagger)^2] + \left\{ a J_+(J_z + 1/2) - a^\dagger J_-(J_z - 1/2) \right\} i\sqrt{2}\gamma_2(l_c k_z), \quad (9.53)$$

где мы ввели эффективный g -фактор в валентной зоне $g_v = \hbar\mathbf{a}/2 + V_v$.

Из-за больших значений обменного гамильтониана g_v мы можем опустить последние два слагаемых, т.е.

$$V = \left\{ aJ_+(J_z + 1/2) - a^\dagger J_-(J_z - 1/2) \right\} \sqrt{2}\gamma_2 l_c \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\gamma_2}{2} (J_+^2 a^2 + J_-^2 (a^\dagger)^2) \quad (9.54)$$

в выражении (9.53), что заметно упрощает задачу. Причина такого разделения гамильтониана довольно очевидна. Гамильтониан V приводит к переходам, меняющим как спин, так и числа Ландау, что можно учесть с помощью теории возмущений. В этом приближении уровни можно рассматривать независимо друг от друга, и мы имеем для самых верхних уровней ряд уровней тяжелых и легких дырок (в дырочном представлении)

$$E_{-3/2,n,n_v}^{(\text{hh})} = E_g - 3\hbar\omega_{c0}g_v + \hbar\omega_{c0} \frac{m_0(3m_h + m_l)}{4m_l m_h} (n + 1/2) + \frac{\pi^2 \hbar^2 n_v^2}{2m_h L^2}, \quad (9.55)$$

$$\psi_{-3/2}^{(\text{hh})} = \varphi_n(x - x_{0k_y}) \chi_{n_v}(z) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} u_{-3/2}; \quad (9.56)$$

$$E_{-1/2,n,n_v}^{(\text{lh})} = E_g - \hbar\omega_{c0}g_v + \hbar\omega_{c0} \frac{m_0(3m_l + m_h)}{4m_l m_h} (n + 1/2) + \frac{\pi^2 \hbar^2 n_v^2}{2m_l L^2}, \quad (9.57)$$

$$\psi_{-1/2}^{(\text{lh})} = \varphi_n(x - x_{0k_y}) \chi_{n_v}(z) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} u_{-1/2}. \quad (9.58)$$

Здесь E_g — ширина запрещенной зоны, $m_l(m_h)$ — масса легких (тяжелых) дырок, n_v — числа квантования поперечного движения, и $\chi_{n_v}(z)$ — соответствующая волновая функция. Мы учли, что параметры γ_1, γ_2 связаны с эффективными массами как $\gamma_1 = m_0(m_h + m_l)/2m_h m_l$ и $\gamma_2 = m_0(m_h - m_l)/4m_h m_l$.

В этом нулевом приближении фононы не могут вызвать переходы между этими состояниями. В следующем приближении теории возмущений по V эти состояния смешиваются и мы получаем для верхнего состояния тяжелых дырок $\psi_{-3/2,n,n_v}^{(\text{hh})}$

$$\psi_{-3/2,0,1}^{(\text{hh})} = \varphi_0(x - x_{0k_y}) \chi_1(z) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} u_{-3/2}. \quad (9.59)$$

Для легких дырок верхнего состояния имеем

$$\psi_{-1/2,0,1}^{(\text{lh})} = \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \left\{ \varphi_0(x - x_{0k_y}) \chi_1(z) u_{-1/2} + \frac{4}{3} \frac{\gamma_2 \hbar \omega_{c0} (l_c/L)}{E_{-1/2,0,1} - E_{-3/2,1,2}} \varphi_1(x - x_{0k_y}) \chi_2(z) u_{-3/2} \right\}. \quad (9.60)$$

В последней формуле мы учли только переход в ближайшее состояние поперечного движения, дающее наименьший знаменатель. Теперь очевидно, что фонон может вызывать переходы между этими состояниями. Предположим, что, подбирая соответствующее магнитное поле, мы достигаем условия дырочно-фононного резонанса между состояниями, описываемыми выражениями (9.59) и (9.60)

$$E_{-1/2,0,1} - E_{-3/2,0,1} = \hbar\omega_{\text{LO}}$$

или

$$2g_v\hbar\omega_{c0} - \frac{m_0(m_h - m_l)}{4m_h m_l} \left(\hbar\omega_{c0} - 2\frac{\pi^2\hbar^2}{m_0 L^2} \right) = \hbar\omega_{\text{LO}}.$$

Для значения $\Delta_{-1/2,-3/2} \equiv \Delta_v$, описывающего расщепление в валентной зоне, имеем

$$\Delta_v^2 = 4\alpha \frac{l_{\text{LO}}}{l_c} (\hbar\omega_{\text{LO}})^2 6 \left(\frac{m_0(m_h - m_l)}{4m_h m_l} \right)^2 \left(\frac{\hbar\omega_{c0}}{\hbar\omega_{\text{LO}}} \right)^2 \left(\frac{l_c}{L} \right)^2 f_v(l_c/L),$$

где

$$f_v \left(\frac{l_c}{L} \right) = l_c \int dz_1 dz_2 \chi_1(z_1) \chi_2(z_1) \chi_1(z_2) \chi_2(z_2) \int_0^\infty dq_\perp \frac{q_\perp^2 l_c^2}{2} \exp(-l_c^2 q_\perp^2 / 2 - q_\perp |z_1 - z_2|). \quad (9.61)$$

Функция $f_v(x) = x$ при $x \ll 1$, $f_v(x) = (10/9\pi^2)x$ при $x \gg 1$.

Сравним СМФР-расщепление в зоне проводимости и в валентной зоне. Имеем

$$\frac{\Delta_{0+,0}}{\Delta_v} \sim \left(\frac{\alpha_R}{L\hbar^2/2m_0 L^2} \right) \left(\frac{g_v}{g_c} \right)^{3/4} \left(\frac{4m_h m_l}{m_0(m_h - m_l)} \right) \left(\frac{f(l_c/L)}{f_v(2\sqrt{g_v/g_c} l_c/L)} \right)^{1/2}$$

и видим, что расщепление в зоне проводимости больше, чем в валентной зоне, и определяется параметром g_v/g_c . Здесь l_c — магнитная длина для магнитных полей, необходимых для достижения резонансных условий в зоне проводимости.

В принципе, в валентной зоне тоже можно написать слагаемое спин-орбитального взаимодействия типа Рашбы [196]

$$H_{vR} = \frac{\alpha'}{\hbar} [\mathbf{Jp}] \mathbf{n},$$

что в магнитном поле можно переписать в следующем виде

$$H_{vR} = \frac{\alpha'}{\sqrt{2}l_c} \{ J_+ a + J_- a^+ \}.$$

Это слагаемое приводит к соотношению

$$\frac{\Delta_{0+,0}}{\Delta_v} \sim \left(\frac{\alpha_R}{\alpha'}\right) \left(\frac{g_v}{g_c}\right)^{3/4} \left(\frac{f(l_c/L)}{f'_v(2\sqrt{g_v/g_c}l_c/L)}\right)^{1/2},$$

где

$$f'_v\left(\frac{l_c}{L}\right) = \int dz_1 dz_2 \chi_1^2(z_1) \chi_2^2(z_2) \int_0^\infty dq q^4 \exp(-q^2/2 - q|z_1 - z_2|/l_c). \quad (9.62)$$

Хотя условия СМФР начинают выполняться раньше для дырочных состояний, когда мы меняем магнитное поле, расщепление в валентной зоне оказывается гораздо меньше, чем в зоне проводимости. Это является следствием более слабого спин-фононного взаимодействия для состояний, сильнее сдвинутых энергией Зеемана.

9.5 Резонансное отражение и прохождение света

Рассмотрим задачу в простейшей геометрии, когда волна $\sim e^{ikz}$ падает перпендикулярно плоскости ямы [197, 198] (см. также [199]). Чтобы понять, какими переходами мы интересуемся, на Рис. 9.4 мы схематично представили сдвиги уровней энергии в магнит-

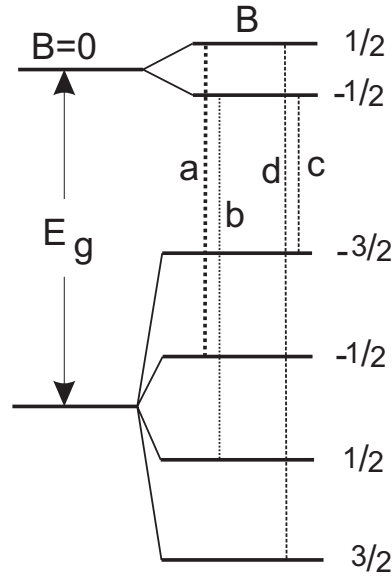


Рис. 9.4: Уровни с учетом Зеемановского расщепления.

ном поле с учетом только Зеемановского расщепления [194]. Мы будем интересоваться σ^+ переходом $-1/2 \Rightarrow 1/2$, так как сдвиг частот переходов (a,b) меньше при включении магнитного поля, чем для переходов (c,d). Волновая функция начального $-1/2, 0$ состояния

есть

$$\psi_{-1/2,0,1}^{(\text{lh})} = \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}} \varphi_0(x - x_{0k_y}) \chi_1(z) \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(X - iY)s_+ + \sqrt{2}Zs_- \right], \quad (9.63)$$

а конечного

$$\psi_{c0+} = S \chi_{n_c}(z) \left(\varphi_0(x - x_{0k_y})s_+ + u_0 \varphi_1(x - x_{0k_y})s_- \right) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}}. \quad (9.64)$$

Токи (дипольные моменты) переходов будут пропорциональны (мы пренебрегаем слагаемыми, пропорциональными u_0)

$$\langle v | j^\alpha | c \rangle \sim \int dV (X + iY) \nabla^\alpha S, \quad \langle c | j^\beta | v \rangle \sim \int dV S \nabla^\beta (X - iY),$$

что приводит для поляризационного оператора $\Pi_{\alpha\beta} \sim \langle v | j^\alpha | c \rangle \langle c | j^\beta | v \rangle$ к соотношениям $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = i\Pi_{xy} = -i\Pi_{yx}$.

Пренебрегая продольной частью в индуцированном токе (это слагаемое в индуцированном токе имеет малый множитель $u_0 \simeq \alpha_R / \mu_B g_c B l_c$), можно положить $\nabla \cdot \mathbf{D} = \epsilon_b \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$, и уравнения Максвелла для волны с частотой ω можно записать как

$$\frac{d^2}{dz^2} E_\alpha + k^2 E_\alpha = \frac{4\pi}{\hbar c^2} \int dz' \Pi_{\alpha\beta}^R(z, z', \omega) E_\beta(z'). \quad (9.65)$$

Здесь $k^2 = \omega^2 \epsilon_b / c^2$ (мы пренебрегли различием в фоновых диэлектрических проницаемостях квантовой ямы и барьеров). Мы учли, что поляризационный оператор $\Pi_{\alpha\beta}$ (здесь подразумевается макроскопическое усреднение по областям много большим, чем параметр решетки) имеет вид

$$\Pi^R(z, z', \omega) = \int dx' dy' \Pi^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega). \quad (9.66)$$

Гриновская функция оператора $d^2/dz^2 + k^2$ подчиняется уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) G(z, z') = -\delta(z - z') \quad (9.67)$$

и дается выражением

$$G^\pm(z, z') = \pm \frac{i}{2k} e^{\pm ik|z-z'|}. \quad (9.68)$$

Для задачи на прохождение и отражение следует использовать функцию $G^+(z, z')$. Тогда решение уравнения (9.65) может быть записано в виде

$$E_\alpha = E_\alpha^0 e^{ikz} - \frac{4\pi}{\hbar c^2} \int dz' dz'' G^+(z, z') \Pi_{\alpha\beta}^R(z', z'', \omega) E_\beta(z''), \quad (9.69)$$

где E_α^0 — амплитуда падающей волны. Для $z > L$, где L — ширина квантовой ямы, мы можем определить прошедшую волну как

$$E_\alpha^t = E_\alpha^0 e^{ikz} - \frac{2i\pi}{k\hbar c^2} e^{ikz} \int_0^L dz' dz'' e^{-ikz'} \Pi_{\alpha\beta}^R(z', z'', \omega) E_\beta(z''), \quad (9.70)$$

а отраженную волну можно определить, полагая $z < 0$

$$E_\alpha^r = -\frac{2i\pi}{k\hbar c^2} e^{-ikz} \int_0^L dz' dz'' e^{ikz'} \Pi_{\alpha\beta}^R(z', z'', \omega) E_\beta(z''). \quad (9.71)$$

Предполагая, что $\Pi^R(z, z')$ можно представить в виде произведения $\Pi^R(z, z') = \Pi^{(1)}(z)\Pi^{(2)}(z')$ (такая факторизация возможна, поскольку ниже будут рассматриваться переходы между двумя фиксированными состояниями по отношению к поперечному движению $\chi_{n_v}(z), \chi_{n_c}(z)$), скалярно умножим выражение (9.69) на $\Pi_\alpha^{(2)}(z)$ и проинтегрируем по z , мы получим

$$F = -F \frac{4\pi}{\hbar c^2} \int dz dz' G^+(z, z') \Pi_{\alpha\alpha}^R(z, z', \omega) + E_\alpha^0 \int_0^L dz e^{ikz} \Pi_\alpha^{(2)}(z), \quad (9.72)$$

где введено обозначение

$$F = \int_0^L dz' \Pi_\beta^{(2)}(z', \omega) E_\beta(z').$$

Решая уравнение (9.72) для F и пользуясь уравнениями (9.70) и (9.71), получаем для амплитуд прошедшей и отраженной волн следующие выражения

$$E_\alpha^t = \left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi \int dz' dz e^{-ik(z-z')} \Pi_{\alpha\beta}^R(z, z', \omega)}{2ikc^2\hbar - 4\pi \int dz' dz e^{ik|z-z'|} \Pi_{\gamma\gamma}^R(z, z', \omega)} \right) E_\beta^0, \quad (9.73)$$

$$E_\alpha^r = \frac{4\pi \int dz' dz e^{ik(z+z')} \Pi_{\alpha\beta}^R(z, z', \omega)}{2ikc^2\hbar - 4\pi \int dz' dz e^{ik|z-z'|} \Pi_{\gamma\gamma}^R(z, z', \omega)} E_\beta^0. \quad (9.74)$$

В базисе $\mathbf{e}_\pm = (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y)/\sqrt{2}$ в нашем приближении только одна из компонент $\Pi_{\alpha\beta}$ ненулевая, т.е. $\Pi_{++} = 2\Pi_{xx}$. Из соотношений симметрии имеем $\Pi_{xx} = \Pi_{yy} = i\Pi_{xy} = -i\Pi_{yx}$. Таким образом, левополяризованная падающая волна \mathbf{e}_- не отражается, а для правополяризованной волны \mathbf{e}_+ получаем

$$t_+ = 1 + \frac{4\pi \int dz' dz e^{-ik(z-z')} \Pi_{++}^R(z, z', \omega)}{2ikc^2\hbar - 4\pi \int dz' dz e^{ik|z-z'|} \Pi_{++}^R(z, z', \omega)} \quad (9.75)$$

для коэффициента прохождения $\mathbf{E}^t = t_+ E_+^0 \mathbf{e}_+ e^{ikz}$, и

$$r_+ = \frac{4\pi \int dz' dz e^{ik(z+z')} \Pi_{++}^R(z, z', \omega)}{2ikc^2\hbar - 4\pi \int dz' dz e^{ik|z-z'|} \Pi_{++}^R(z, z', \omega)} \quad (9.76)$$

для коэффициента отражения (амплитуды) $\mathbf{E}^r = r_+ E_+^0 \mathbf{e}_+ e^{-ikz}$.

Поскольку направление распространения волны теперь противоположно начальному, отраженная волна имеет левую поляризацию. Линейно-поляризованная падающая волна будет отражаться как циркулярно-левополяризованная волна. В случае, когда длина волны $2\pi/k$ больше ширины ямы L (т.е. $kL \ll 1$), экспоненциальные множители в интегралах могут быть опущены.

Рассмотрим поляризационный оператор. Для него можно написать следующее выражение

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = & -\frac{i}{2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} j_{\lambda_2 \lambda_1}^\alpha(\mathbf{r}) j_{\lambda_1 \lambda_2}^\beta(\mathbf{r}') \int \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar} \\ & \left\{ \text{th} \frac{\varepsilon + \hbar\omega}{2T} \left(G_{\lambda_1}^R(\varepsilon/\hbar + \omega) - G_{\lambda_1}^A(\varepsilon/\hbar + \omega) \right) G_{\lambda_2}^A(\varepsilon/\hbar) + \right. \\ & \left. + \text{th} \frac{\varepsilon}{2T} \left(G_{\lambda_2}^R(\varepsilon/\hbar) - G_{\lambda_2}^A(\varepsilon/\hbar) \right) G_{\lambda_1}^R(\varepsilon/\hbar) \right\}, \end{aligned} \quad (9.77)$$

где матричный элемент тока дается выражением

$$\mathbf{j}_{\lambda_1 \lambda_2}(\mathbf{r}) = \frac{ie\hbar}{2m_0} \left\{ \Phi_{\lambda_1}^*(\mathbf{r}) \nabla \Phi_{\lambda_2}(\mathbf{r}) - (\nabla \Phi_{\lambda_1}^*(\mathbf{r})) \Phi_{\lambda_2}(\mathbf{r}) \right\}. \quad (9.78)$$

Здесь $\Phi_\lambda(\mathbf{r})$ — собственные функции гамильтониана. Рассмотрим межзонные переходы и предположим, что валентная зона полностью занята, в то время как зона проводимости пуста. Учитывая только резонансный вклад в выражении (9.77), получаем

$$\Pi_{\alpha\beta}^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = \sum_{\lambda_c \lambda_v} j_{\lambda_v \lambda_c}^\alpha(\mathbf{r}) j_{\lambda_c \lambda_v}^\beta(\mathbf{r}') \int \frac{d\varepsilon}{2\pi\hbar i} G_{\lambda_c}^R(\varepsilon/\hbar + \omega) G_{\lambda_v}^A(\varepsilon/\hbar), \quad (9.79)$$

Можно считать, что состояния в валентной зоне не меняются при электрон-фононном взаимодействии (мы интересуемся только явлением расщепления в зоне проводимости), и мы получаем для коэффициента отражения циркулярно-поляризованной волны

$$r_+ = \frac{-i\Gamma(\hbar\omega - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} + \varepsilon_v)}{(\hbar\omega - \varepsilon_+ + \varepsilon_v + i0)(\hbar\omega - \varepsilon_- + \varepsilon_v + i0)/\hbar + i\Gamma(\hbar\omega - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} + \varepsilon_v)}, \quad (9.80)$$

где мы ввели обозначение для естественной ширины линии

$$\Gamma = \frac{4\pi}{\hbar\omega c \sqrt{\varepsilon_b}} \sum_{\lambda_c \lambda_v} \int d\mathbf{r}' dz j_{\lambda_c \lambda_v}^x(\mathbf{r}') j_{\lambda_v \lambda_c}^x(\mathbf{r}). \quad (9.81)$$

Здесь мы учли, что $\Pi_{xx} = \Pi_{yy}$.

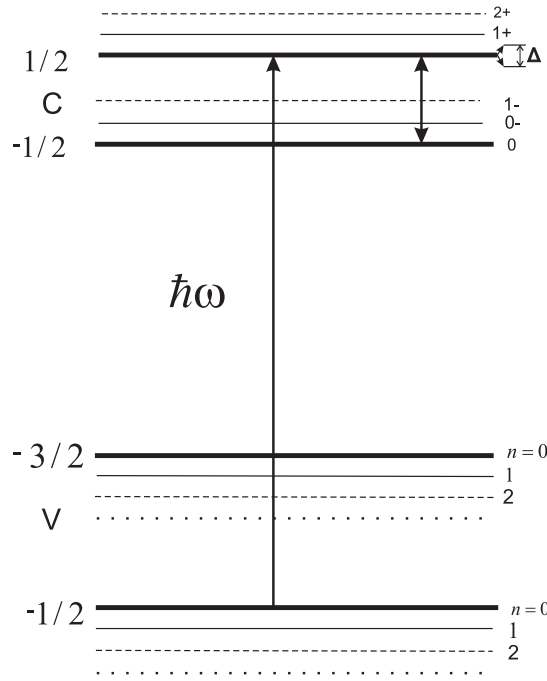


Рис. 9.5: Оптические межзонные переходы.

Так как мы интересуемся явлением расщепления, предположим, что резонансная частота света близка к переходу из основного состояния группы $+$ в зоне проводимости в основное состояние валентной зоны с $J_z = -1/2$ (см. Рис. 9.5). (Обратим внимание, что спин-орбитальное взаимодействие может вызывать оптические переходы из этой группы в верхнюю часть валентной зоны $J_z = -3/2$, но интенсивность этих переходов пропорциональна малому спин-орбитальному взаимодействию.) Таким образом, в следующих формулах положим $\varepsilon_1 = \varepsilon_{c1} = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_{c2} = \varepsilon_{0+}$, $\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1} = \mu_B g_c B$, $\varepsilon_v = -E_{-1/2,0,1}^{(lh)}$ и $\Delta = \Delta_{0+,0}$.

Переход происходит между состоянием, описываемым уравнением (9.58), и

$$\psi_{c0+} = S \chi_{n_c}(z) \left(\varphi_0(x - x_{0k_y}) s_+ + u_0 \varphi_1(x - x_{0k_y}) s_- \right) \frac{e^{ik_y y}}{\sqrt{L_y}}. \quad (9.82)$$

Это позволяет нам выразить скорость рекомбинации явно

$$\Gamma = \frac{4\pi}{\hbar \omega c \sqrt{\varepsilon_b}} \frac{e^2 |p_{cv}|^2}{6m_0^2} \frac{1}{2\pi l_c^2}, \quad p_{cv} = \langle S | p_x | X \rangle. \quad (9.83)$$

Здесь мы положили $|\langle \chi_{v1} | \chi_{c1} \rangle|^2 = 1$ для интеграла перекрытия поперечных волновых функций зоны проводимости и валентной зоны. Теперь мы введем следующие безраз-

мерные переменные: отклонение от СМФР $(\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c1} - \hbar\omega_{\text{LO}})/\Delta = \delta$, оптическую частоту $2\hbar(\omega - \omega_0)/\Delta = x$ [$\omega_0 = (\varepsilon_{c2} - \varepsilon_v)/\hbar$ является межзонной резонансной частотой], и неопределенность энергетического уровня $2\hbar\Gamma/\Delta = \gamma$. Таким образом, мы можем записать коэффициент отражения $R = |r_+|^2$ в виде

$$R = \frac{\gamma^2(x + 2\delta)^2}{(x + \delta - \sqrt{1 + \delta^2})^2(x + \delta + \sqrt{1 + \delta^2})^2 + \gamma^2(x + 2\delta)^2}. \quad (9.84)$$

Если безразмерное отклонение $\delta \gg 1$ (т.е. отклонение от условия фононного резонанса много больше расщепления), то, используя $\sqrt{1 + \delta^2} \simeq \delta$, мы видим, что восстанавливается структура с одиночной линией

$$R = \frac{\gamma^2}{x^2 + \gamma^2}. \quad (9.85)$$

В случае точного электрон-фононного резонанса, что может быть достигнуто путем подбора соответствующего магнитного поля ($\delta = 0$), получаем

$$R = \frac{\gamma^2 x^2}{(x^2 - 1)^2 + \gamma^2 x^2}. \quad (9.86)$$

В этом случае коэффициент отражения достигает своего максимального значения в условиях оптического резонанса. Для линейно-поляризованной падающей волны это максимальное значение равно $1/2$. Скорость рекомбинации может быть оценена, учитывая, что $|p_{cv}|^2/2m_0$ порядка Боровской энергии, $\hbar\omega \sim E_g \sim 1.6$ эВ. При этом $\gamma = \hbar\Gamma/\Delta \ll 1$, как и предполагалось на Рис. 9.6.

До сих пор мы предполагали, что неопределенность энергии рассматриваемого уровня намного меньше, чем расщепление Δ , в противном случае расщепление уровней невозможно разрешить. В самом деле, для Гриновской функции вместо выражения(9.15) мы будем иметь

$$G_2(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon + i\hbar\Gamma_2 - \varepsilon_2 + \mu - (\Delta/2)^2/(\varepsilon + i\hbar\Gamma_1 - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} + \mu)} \quad (9.87)$$

при условии, что мы учли энергетическую неопределенность уровня. Здесь феноменологически введены Γ_2 и Γ_1 для соответствующих энергетических уровней ε_2 и ε_1 . Из этого соотношения видно, что даже для $\varepsilon - \varepsilon_1 - \hbar\omega_{\text{LO}} = 0$ мы можем отбросить второе слагаемое в знаменателе, поскольку $\Delta \ll \hbar\Gamma_1$ и уровень не расщепляется.

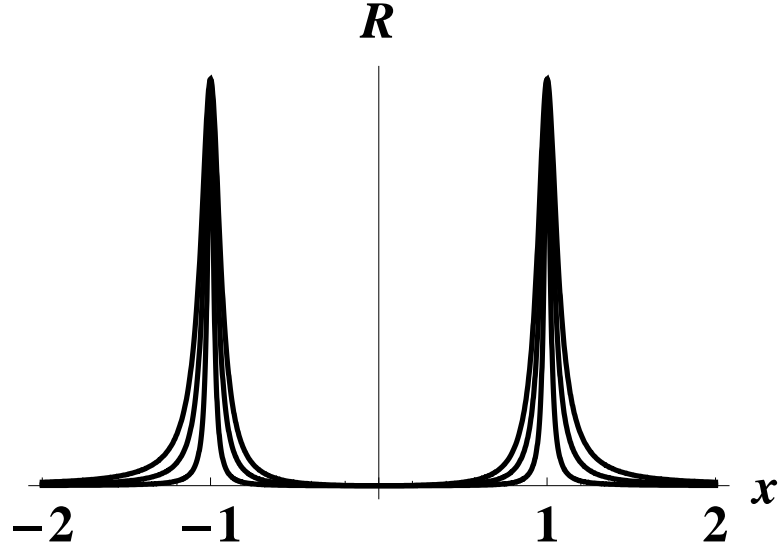


Рис. 9.6: Зависимость коэффициента отражения СМФР от оптической частоты x при $\gamma = 0.04, 0.09, 0.14$. Здесь учтена только естественная ширина линии (из-за рекомбинационных процессов).

Рассмотрим случай равенства ширин уровней $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Тогда мы можем написать для коэффициента отражения

$$R = \frac{\gamma^2[(x + 2\delta)^2 + \gamma_e^2]}{(x + \delta - \sqrt{1 + \delta^2 + \gamma_e^2})^2(x + \delta + \sqrt{1 + \delta^2 + \gamma_e^2})^2 + 4\gamma_e^2(x + \delta)^2}, \quad (9.88)$$

где мы ввели безразмерную сумму ширин уровней $\gamma_e = 4\hbar\Gamma_1/\Delta$ и пренебрегли уширением уровня из-за рекомбинационных процессов. Рис. 9.7 демонстрирует, как увеличение ширины линии размывает дублетную структуру линии отражения. Симметрия этой дублетной структуры зависит от отклонения от электрон-фононного резонанса (Рис. 9.8)

9.6 Обоснование учета простейшей диаграммы

В разделе 9.2 мы рассматривали только простейшую диаграмму для собственно-энергетической части. Теперь мы обсудим правомерность этого приближения для спин-фононного взаимодействия. Легко видеть, что каждая добавочная фононная линия в диаграммах высшего порядка может приводить к дополнительному резонансному знаменателю, следовательно, мы должны рассмотреть весь ряд наиболее расходящихся диаграмм. Эта ситуация не

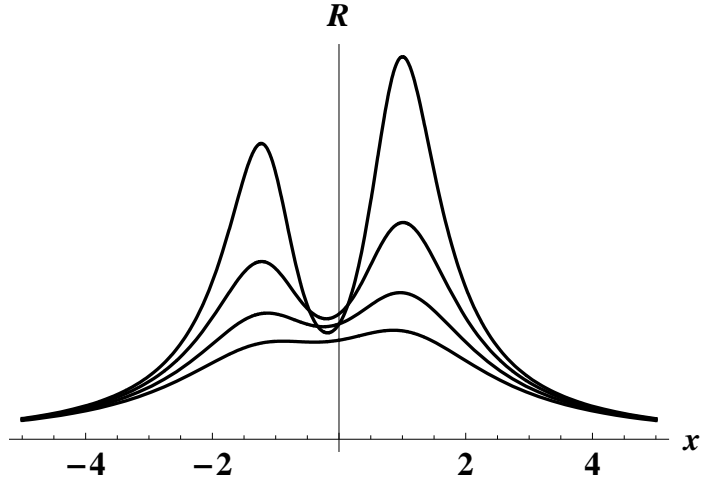


Рис. 9.7: Зависимость коэффициента отражения от оптической частоты, когда $\delta = 0.1$ при различных значениях ширины линии $\gamma_e = 0.7, 1, 1.3, 1.6$.

уникальна и встречалось ранее в задаче о поляроне в трехмерном случае. Впервые такая последовательность диаграмм была рассмотрена Питаевским [200] (см. также [201, 202]).

Рассмотрим два пустых состояния 1 и 2 с энергиями ε_1 и $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \hbar\omega_{\text{LO}}$. Для пустых состояний $\varepsilon_{1,2} > \mu$. Электронная Гриновская функция определяется выражением

$$G(\varepsilon, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\nu=1}^2 \frac{\Psi_{\nu}(\mathbf{r}_1)\Psi_{\nu}^*(\mathbf{r}_2)}{\varepsilon - (\varepsilon_{\nu} - \mu) + i0}. \quad (9.89)$$

Фононную Гриновскую функцию можно записать в таком виде

$$D(\omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sum_{\alpha\mathbf{q}} |C_{\alpha,\mathbf{q}}|^2 \left(\frac{e^{-i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}}{\omega - \hbar\omega_{\text{LO}} + i0} - \frac{e^{i\mathbf{q}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}}{\omega + \hbar\omega_{\text{LO}} - i0} \right), \quad (9.90)$$

где $|C_{\alpha}|^2 \rightarrow 2\pi e^2 \hbar\omega_{\text{LO}}/q^2 \epsilon^*$.

Мы собираемся оценить Гриновскую функцию для состояния 2. Поскольку мы рассматриваем пустые электронные состояния выше химпотенциала, то собственно-энергетические диаграммы будут включать Гриновские функции типа

$$\frac{1}{\varepsilon - \omega - (\varepsilon_{1,2} - \mu) + i0}.$$

Эти функции имеют полюс по переменной ω в верхней полуплоскости. Следовательно, в фононной Гриновской функции мы сохраняем только часть, имеющую полюс по переменной ω в нижней полуплоскости (иначе интегрирование по ω дает нуль), т.е.

$$\frac{1}{\omega - \omega_{\text{LO}} + i0}.$$

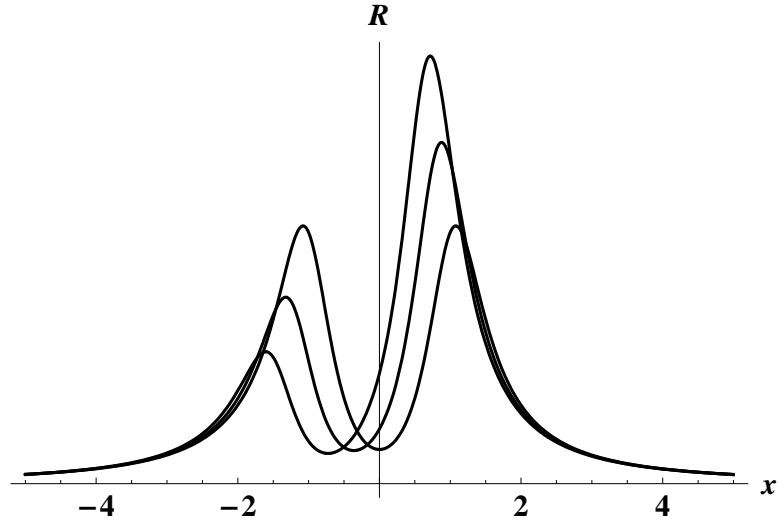


Рис. 9.8: Коэффициент отражения при различных отклонениях от спин электрон-фононного резонанса $\delta = 0, 0.2, 0.4$ при $\gamma_e = 0.5$.

Простейшая собственно-энергетическая диаграмма электрона (см. диаграмму (а) на Рис. 9.9) имеет резонансный знаменатель

$$\Sigma_2(\varepsilon) \sim i \int \frac{d\omega}{2\pi} G(\varepsilon - \omega) D(\omega) = \frac{1}{\varepsilon - \omega_{\text{LO}} - (\varepsilon_1 - \mu) + i0}, \quad (9.91)$$

для ε в окрестности $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + \omega_{\text{LO}}$.

Диаграммы с большим количеством резонансов разделяются на два типа. Первый тип приводит к поправке к Гриновской функции (к линии 1 в скелетной диаграмме (а) на Рис. 9.9)) и они могут быть учтены, если Гриновские функции считать перенормированными. Второй тип приводит к поправкам в электрон-фононную вершину. Поскольку поправки первого типа могут быть учтены в теории возмущений (эти диаграммы не включают резонансных знаменателей), мы их отложим и сосредоточимся на диаграммах второго типа.

Несколько диаграмм последнего типа представлены на Рис. 9.9. Диаграммы (b) и (c) включают два и три резонансных знаменателя соответственно. Мы можем изобразить более сложные диаграммы с двумя резонансными знаменателями (подобные диаграмме (d) на Рис. 9.9). Теперь видно, что диаграммы данного типа можно рассматривать как диаграмму (b) с блоком, не содержащим резонансных знаменателей. Такой блок мы будем называть компактным блоком. Таким образом, мы можем написать интегральное уравнение

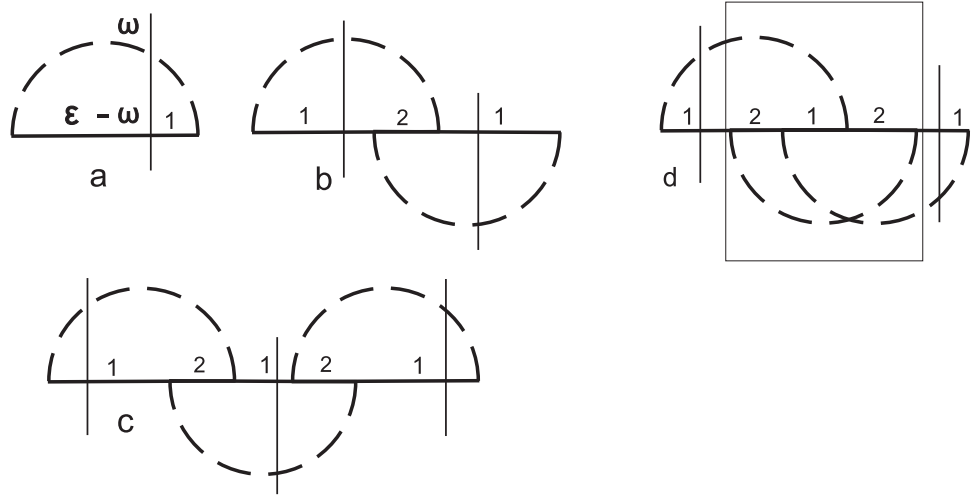


Рис. 9.9: Диаграммы для собственно-энергетической части. Резонансные сечения показаны вертикальными линиями.

для перенормированной вершины (см. Рис. 9.10). На Рис. 9.11 показано, что компактный блок является разложением по электрон-фононному взаимодействию, следовательно, мы запишем интегральное уравнение, оставляя только первое слагаемое в этом разложении блока

$$\begin{aligned} \Gamma(\varepsilon - \omega, k_y - q_y, \varepsilon, k_y, q_x, q_z) = & \langle 1k_y - q_y | e^{-iq_x x - iq_z z} | 2k_y \rangle + \\ + i \int \frac{d\omega' d\mathbf{q}'}{(2\pi)^4} & \langle 1k_y - q_y | e^{iq'_x x + iq'_z z} | 2k_y - q_y - q'_y \rangle \langle 2k_y - q_y - q'_y | e^{-iq_x x - iq_z z} | 1k_y - q'_y \rangle \times \\ & \times \frac{|C_{\mathbf{q}'}|^2 \Gamma(\varepsilon - \omega', k_y - q'_y, \varepsilon, k_y, q'_x, q'_z)}{(\omega' - \omega_{\text{LO}} + i0)(\varepsilon - \omega - \omega' - (\varepsilon_2 - \mu) + i0)(\varepsilon - \omega' - (\varepsilon_1 - \mu) + i0)}. \end{aligned}$$

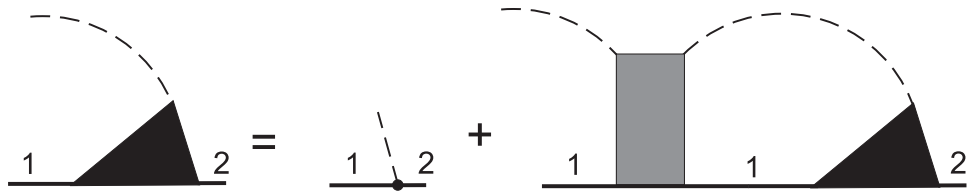


Рис. 9.10: Уравнение для вершины.

Напишем это уравнение для конкретных состояний $1 = \{n = 0, i = 1\}$ и $2 = \{n = 0+, i = 1\}$ (см. раздел. 9.3), т.е. мы рассматриваем основные состояния по отношению к

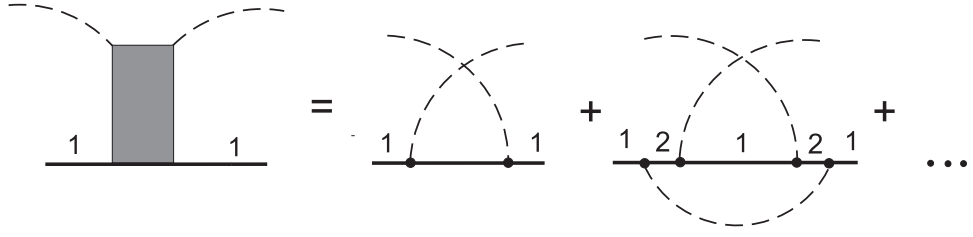


Рис. 9.11: Разложение блока.

орбитальному движению и пространственному квантованию. Чтобы упростить интегральное уравнение, введем функцию $A(q_{\perp}, \varepsilon, \omega)$, определенную соотношением

$$\Gamma(\varepsilon - \omega, k_y - q_y, \varepsilon, k_x, q_x, q_z) = e^{iq_x(k_y - q_y/2)} e^{-q_{\perp}^2/4} \frac{q_y - iq_x}{\sqrt{2}} \langle 1 | e^{-iq_z z} | 1 \rangle A(q_{\perp}, \varepsilon, \omega), \quad (9.92)$$

где $q_{\perp} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ и волновые векторы безразмерные (множителем является магнитная длина). Затем, используя для фазовых множителей под интегралом соотношение

$$e^{i(q_y q'_x - q_x q'_y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_2(q_{\perp} q'_{\perp}) e^{-in(\varphi' - \varphi)}, \quad (9.93)$$

где $J_2(x)$ функция Бесселя, мы получим

$$A(q, \varepsilon, \omega) = 1 + \frac{i}{2} \int \frac{d\omega' p^3 dp}{(2\pi)^3} \frac{e^{-p^2/2} J_2(qp) \phi(p) A(p, \varepsilon, \omega')}{(\omega' - \omega_{\text{LO}} + i0)(\varepsilon - \omega - \omega' - (\varepsilon_2 - \mu) + i0)(\varepsilon - \omega' - (\varepsilon_1 - \mu) + i0)},$$

$$\phi(p) = \frac{u_0^2}{l_c} \int dq_z |C_{p,q_z}|^2 \langle 1 | e^{iq_z z/l_c} | 1 \rangle^2. \quad (9.94)$$

Теперь предположим, что функция $A(q, \varepsilon, \omega)$ не имеет полюсов по переменной ω в нижней полуплоскости, и рассмотрим случай, когда магнитная длина намного больше ширины квантовой ямы. Последнее допущение приводит к $\phi(p) = \pi/pl_c$, и мы можем переписать интегральное уравнение для $A(q, \varepsilon, \omega_{\text{LO}}) \equiv A(q, \varepsilon)$ как уравнение Фредгольма

$$A(q, \varepsilon) = 1 + \lambda \int_0^{\infty} dp p^2 e^{-p^2/2} J_2(qp) A(p, \varepsilon), \quad (9.95)$$

где параметр λ содержит резонансный знаменатель

$$\lambda = -\frac{1}{8} \frac{u_0^2 (e^2 / \varepsilon^* l_c)}{\varepsilon - (\varepsilon_1 + \hbar\omega_{\text{LO}} - \mu) + i0}. \quad (9.96)$$

Для нахождения электронного спектра мы должны были бы решить уравнение (9.95) и использовать его в (9.92). Вычисление с этой вершинной частью собственно-энергетической части и приравнивание последней $\varepsilon - \varepsilon_2$ позволило бы нам найти уровни энергии.

Мы не будем этого делать, так как в действительности вместо $i0$ в уравнение (9.96) входит неопределенность уровня $i\hbar/\tau$. Оценим минимальное значение τ , позволяющее нам оставаться в рамках теории возмущений. При $\hbar\omega_{\text{LO}} = 0.02$ эВ, $B = 3$ Т, $m_c = 0.1m_0$, $\alpha_R = 10^{-9}$ эВ·см, $\alpha = 0.39$ получаем, что теория возмущений применима для времен релаксаций короче чем $\tau_0 = 5 \cdot 10^{-10}$ с. Только при этих условиях достаточно ограничиться скелетной диаграммой. С другой стороны, чтобы получить расщепление, неопределенность уровня должна быть меньше расщепления уровня $\Delta \simeq 5 \cdot 10^{-4}$ эВ. Для этого требуются времена большие, чем 10^{-12} с. Таким образом, мы убеждаемся, что существует область времен релаксаций $\sim 10^{-11}$ с., где теория возмущений применима и расщепление все еще наблюдаемо.

Здесь мы хотели бы отметить, что в обычном случае магнетофонных явлений можно встретить противоположный случай большого параметра λ в уравнении (9.95), в этом случае следует решать интегральное уравнение. Поэтому мы предполагаем, что теории, учитывающие только фононные процессы, описываемые скелетной диаграммой для собственно-энергетической части, нельзя считать надежными.

9.7 Заключение

Мы показали, что СМФР в квантовых ямах на основе полумангнитных полупроводников приводит к расщеплению уровней электрона. Мы предложили оптический эксперимент, где такое расщепление уровней может быть зарегистрировано, и рассчитали коэффициенты прохождения и отражения света в таком эксперименте. Мы нашли, что из-за электрон-фононной связи резонансная линия отражения и прохождения, определяемая межзонными переходами, расщепляется на две линии. Как мы выяснили, расстояние между линиями определяется силой как электрон-фононной связи, так и спин-орбитального взаимодействия.

Следует отметить, что в вычислениях мы опускали некоторые важные моменты. Среди

них наиболее важным является естественная ширина фононных уровней. Для оптических фононов при низких температурах она определяется распадом оптического фонона на два акустических.

Естественная ширина электронных линий также существенна. Она определяется столкновениями электронов с акустическими фононами и с дефектами решетки, а также рекомбинацией. Эти эффекты приводят к уширению линий, что уже неоднократно обсуждалось. В условиях, когда эти эффекты сильны, линии могут перекрываться, как и было указано выше.

Мы не обсуждали также неоднородное уширение, которое может оказаться наиболее существенным фактором для возможности наблюдения предсказываемого нами расщепления линий. Такое неоднородное уширение всегда присутствует как за счет флуктуаций ширины квантовой ямы, так и за счет флуктуаций состава. Однако разработаны спектроскопические методы, позволяющие исследовать расщепления линий гораздо меньшие, чем предсказываемые нами. Как пример мы можем указать работу [203], где зондировались микронные и субмикронные (от 25 до 0.2 микрон) области квантовой ямы. Эти области выделялись или уменьшением лазерного пятна, или путем ограничения освещаемой поверхности, применяя непрозрачные (металлические) маски с малыми отверстиями. Использование такой схемы микроспектроскопии наряду с высоким спектральным разрешением позволило исследовать особенности спектра в очень узких областях, в цитируемой работе были исследованы расщепления линий порядка десятков $\mu\text{эВ}$, что на порядок меньше СМФР расщепления.

Существуют и нелинейные методы оптической нестационарной спектроскопии (например, оптическая эхо-спектроскопия), которые позволяют получать информацию о спектральных особенностях однородно уширенных линий из анализа спектров неоднородно уширенного ансамбля. При фотонном эхе, например, система подвергается воздействию двух коротких световых импульсов, разделенных промежутком времени τ_{12} . При этом через такое же время τ_{12} после второго система излучает сигнал фотонного эха. Исследование этого сигнала как функции времени задержки между импульсами τ_{12} и позволяет исследовать особенности однородно уширенных линий.

До сих пор мы рассматривали ситуацию, когда равновесная концентрация носителей

настолько мала, что они не влияют на поглощение света. Можно представить, однако, и другой интересный случай, когда, например, в равновесии электроны (создаваемые донорами вне ямы) заполняют зону проводимости до уровня Ферми. В этом случае разрешены переходы между валентной зоной и состояниями зоны проводимости. Силы осцилляторов этих переходов могут быть больше, чем для рассмотренных нами. Можно ожидать, что ширина уровня электрона в зоне проводимости должна быть небольшой, так как электроны могут излучать акустические фононы с энергией не больше, чем расстояние между занимаемыми ими уровнями и уровнем Ферми.

Экспериментальное наблюдение СМФР может дать информацию об электрон-фононном взаимодействии. Его исследование также может предоставить важные сведения, касающиеся различных вкладов в спин-орбитальное взаимодействие, а также в силу обменного взаимодействия.

Заключение

Представленная работа посвящена изучению кинетики баллистических квазиодномерных наноструктур. Одной из основных целей работы являлось создание и развитие новых методов описания кинетики структур с пониженной размерностью. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Построена кинетическая теория флуктуаций в вырожденном случае с учетом межзонных переходов в полупроводниках в неравновесных условиях. Учтена неравновесность как за счет приложенного к образцу напряжения, так и за счет внешнего оптического поля.

Открыт новый квантовый механизм межчастичной корреляции, до сих пор остававшийся незамеченным. Указано, что такая межчастичная корреляция существует даже без прямого межчастичного взаимодействия. Выяснен физический смысл и происхождение квантовых добавок к источнику корреляции. Установлены явные выражения для дополнительных членов в источнике флуктуаций для электрон-примесного, электрон-фотонного, электрон-фононного, электрон-электронного взаимодействий. Получены явные микроскопические выражения для корреляторов Ланжевеновских случайных сил для всех рассмотренных взаимодействий. Указана важность учета дополнительных членов в источнике, не имеющих аналогов в невырожденном случае.

2. Построена теория дробового шума в режиме токов, ограниченных пространственным зарядом. Установлено, что благодаря самосогласованному полю мощность неравновесного дробового шума может быть подавлена и оказаться меньше классического Пуассоновского значения. Вычислен множитель подавления для различных механизмов рассеяния и для различных размерностей пространства.
3. Предсказаны острые осцилляции мощности шумов тока кулоновского увлечения в баллистическом режиме как функции напряжения на затворе. Мощность шумов как функция напряжения на затворе (изменяющем положение уровней энергии) составляет систему пиков, каждый из которых определяется совпадением уровней попе-

речного квантования в обеих проволоках. Указана важность этого эффекта как в исследовании межпроволочного кулоновского взаимодействия, так и для выяснения однозонной структуры поперечного квантования в нанопроволоках.

4. Построена теория кулоновского увлечения между параллельными квантовыми проволоками в нелинейном режиме. Установлено, что в случае относительно больших приложенных напряжений к активной проволоке ток кулоновского увлечения в пассивной проволоке имеет порог появления, при напряжениях больше этого порога ток увлечения оказывается квадратичной функцией напряжения. Выяснено, что наблюдаемая на эксперименте температурная зависимость сопротивления увлечения может быть объяснена в рамках теории Ферми жидкости и не может служить решающим аргументом, указывающим на проявление структурой свойств Латтинжеровской жидкости.
5. В нелинейном режиме для фононного вклада в ток увлечения между двумя нанопроволоками установлено пороговое условие, что приложенное к активной проволоке напряжение должно быть больше параметра Блоха-Грюнайзена sr_n (оно должно быть больше и сдвига уровней поперечного квантования в двух проволоках, как и в случае кулоновского увлечения). Фононный вклад в ток увлечения как функция приложенного напряжения состоит из ступенек, каждая новая ступенька появляется, когда для соответствующей подзоны начинает выполняться пороговое условие.
6. Показано, что сильное магнитное поле, приложенное вдоль двух параллельных ям, квантуя поперечное движение электронов, приводит к тому, что можно рассматривать сами электронные состояния как "трубки" или "провода". Кулоновское увлечение в этой ситуации имеет много общего с кулоновским увлечением между двумя параллельными нанопроволоками. Ток увлечения между квантовыми ямами оказывается быстро растущей функцией магнитного поля, так как магнитное поле и увеличивает плотность электронных состояний, и уменьшает передаваемый импульс (что также ведет к усилению эффекта увлечения) при столкновениях электронов, принадлежащих двум разным ямам.

7. Выяснено, что динамический отклик наномостика при относительно малых частотах приложенного осциллирующего напряжения имеет индуктивный характер. С увеличением частоты комплексный кондактанс наномостика приобретает емкостной характер. Установлено, что при определенных частотах внешнего поля реальная часть кондактанса обращается в нуль, т.е. мостик не приводит к джоулевым потерям. Предсказанную кинетическую индуктивность (в общем случае кинетическое комплексное сопротивление) можно зарегистрировать стандартными методами фазовых измерений, в частности измеряя импеданс контура, состоящего из мостика и емкости. Этой индуктивностью можно манипулировать, изменяя параметры самого мостика (например, напряжением на затворе). Рассмотренная нами кинетическая индуктивность позволяет ввести индуктивные элементы в наноэлектронные приборы.
8. Сделан вывод, что при протекании тока через квантовую наноструктуру в режиме бесстолкновительного омического переноса заряда генерация энтропии происходит на длине свободного пробега в резервуарах. В резервуарах выделены области пространства в соответствии с физическими явлениями, происходящими в этих областях. В области резервуара, непосредственно примыкающей к наноструктуре и характеризуемой длиной свободного пробега, происходит генерация энтропии и диссипация механической энергии. Дальше можно выделить диффузионную область, где все еще функция распределения сильно неравновесна по энергии. За ней располагается область, где можно ввести понятие электронной температуры. И только еще дальше область, где можно ввести понятие температуры (и тепла) в общепринятом смысле.

Указано, что для подсчета джоулевых потерь для этого случая (как и во всех случаях омической проводимости) достаточно решать кинетическое уравнение с точностью до первого порядка по падению потенциала (или электрическому полю) вдоль наноструктуры. Мы нашли, что даже в случае различных длин свободного пробега в двух резервуарах производство тепла одно и то же в обоих резервуарах. Указано, что это является следствием особой симметрии, типичной для проводников с сильно вырожденными по Ферми носителями. Отмечено также, что вычисление производ-

ства энтропии обеспечивает альтернативный метод вычисления бесстолкновительного контактанса.

9. Выяснено, что спиновый магнетофонный резонанс в квантовых ямах на основе полумагнитных полупроводников приводит к расщеплению уровней. Предложен и рассчитан оптический эксперимент, где такое расщепление может быть зарегистрировано. Указано, что резонансная линия отражения и прохождения света, определяемая межзонными переходами, расщепляется на две линии. Расстояние между линиями определяется как силой электрон-фононной связи, так и спин-орбитальным взаимодействием.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность за полезное сотрудничество соавторам по работам, вошедшим в материалы диссертации: В. Л. Гуревичу, С. В. Ганцевичу, В. И. Козубу, Д. А. Паршину, В. Д. Кагану, Р. Катилюсу, В. В. Афонину.

Я также благодарен всем участникам семинаров сектора Физической кинетики ФТИ им. А. Ф. Иоффе. Обсуждения моих работ на этих семинарах принесли несомненную пользу.

Автор выражает благодарность В. Б. Халфину и К. Овстхусу, по чьей инициативе была начата работа, вошедшая в первую главу. Автор благодарен также В. Д. Кагану, С. В. Ганцевичу за обсуждения и В. Л. Гуревичу за критический просмотр этой главы. Работа, вошедшая в эту главу, частично была поддержана Research Council of Norway через Cultural Exchange Program (KAS) и Российским фондом фундаментальных исследований (Гр. 97-02-18286).

Автор благодарен Нагаеву К. Е. за обсуждение вопросов, затронутых во второй главе. Работа, вошедшая в эту главу, была выполнена при поддержке РФФИ (Гр. 00-15-96748).

Выражаю также благодарность П. Дебрейю за присылку препринта работы [68] до публикации. Автор благодарен за поддержку РФФИ (Гр. 97-02-18286-а) работ, вошедших в третью, четвертую и пятую главы.

Работа, вошедшая в шестую главу, была поддержана РФФИ, Гр. 03-02-17638.

Автор благодарен В.В. Афонину за ценные дискуссии при подготовке работы, вошедшей в седьмую главу.

Автор с благодарностью признает поддержку Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант N 95-02-04109-а) при написании обзора, частично вошедшего в восьмую главу.

Автор благодарит Ю. Г. Кусраева за интересную дискуссию, в ходе которой и возникла тема исследования работы, вошедшей в девятую главу.

Особую признательность я хотел бы выразить В. Л. Гуревичу, чье постоянное внимание к работе и постоянная поддержка ощущалась не только при совместной работе, но и на всех этапах подготовки диссертации.

Приложение А

Релаксационные операторы

Для нахождения операторов, описывающих электрон-электронное взаимодействие, выпишем аналитическое выражение для ядра K ; для первого (b) члена мы получим

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}, t_3\mathbf{p}, t_4\mathbf{k}) = (-1)^{i+m}\delta_{ik}\delta_{ml}\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) \times \\ \times \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 G_{\alpha\delta\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{im}(t_1, t_3) G_{\beta\gamma\mathbf{p}-\mathbf{q}}^{im}(t_1, t_3). \quad (\text{A.1})$$

Подстановка этого выражения в последний член в (1.20) и вычисления приводят к

$$-\hat{B}\hat{g}_{b,el} = \quad (\text{A.2}) \\ \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \{ \delta_+(\Delta\varepsilon_{\lambda\nu}) [(n_{\alpha\lambda\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\lambda})n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}}(n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\lambda\delta})(n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\mu})] \\ + \delta_-(\Delta\varepsilon_{\lambda\mu}) [n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}}(n_{\lambda\delta\mathbf{k}} - \delta_{\lambda\delta})n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - n_{\lambda\delta\mathbf{k}}(n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\alpha\lambda})(n_{\nu\mu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\mu})] \} g_{\mu\nu}(t, \tau)_{\mathbf{p}\mathbf{k}\nu}.$$

Для следующего (c) члена имеем

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}, t_3\mathbf{p}, t_4\mathbf{k}) = (-1)^{i+m}\delta_{il}\delta_{mk}\delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4) \times \\ \times \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 G_{\alpha\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{lm}(t_1, t_2) G_{\beta\gamma\mathbf{p}-\mathbf{q}}^{ml}(t_2, t_1) \quad (\text{A.3})$$

и дальнейшие вычисления дают

$$-\hat{B}\hat{g}_{c,el} = \quad (\text{A.4}) \\ \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \{ \delta_+(\Delta\varepsilon_{\lambda\mu}) [(n_{\alpha\lambda\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\lambda})n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}(n_{\nu\mu\mathbf{p}} - \delta_{\nu\mu}) - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}}(n_{\lambda\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\lambda\delta})n_{\nu\mu\mathbf{p}}] \\ + \delta_-(\Delta\varepsilon_{\lambda\nu}) [n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}}(n_{\nu\mu\mathbf{p}} - \delta_{\nu\mu})(n_{\lambda\delta\mathbf{k}} - \delta_{\lambda\delta}) - (n_{\alpha\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}} - \delta_{\alpha\lambda})n_{\nu\mu\mathbf{p}}n_{\lambda\delta\mathbf{k}}] \} g_{\mu\nu}(t, \tau)_{\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{k}\nu}.$$

Для последнего (d) члена, возникшего из ядра K , мы получим

$$K_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm}(t_1\mathbf{k}, t_2\mathbf{p}, t_3\mathbf{p}, t_4\mathbf{k}) = (-1)^{i+k}\delta_{il}\delta_{mk}\delta(t_1 - t_3)\delta(t_2 - t_4)\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} \times$$

$$\times U_{\mathbf{k}-\mathbf{p}}^2 \sum_{\mu\nu s} G_{\mu\nu s+\mathbf{k}-\mathbf{p}}^{ik}(t_1, t_2) G_{\nu\mu s}^{ki}(t_2, t_1). \quad (\text{A.5})$$

Подстановка этого выражения в (1.20) дает

$$\begin{aligned} -\hat{B}\hat{g}_{d,el} = \pi \sum_{\mathbf{p}\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \{ & \delta_+(\Delta\varepsilon_{\lambda\mu})g_{\lambda\delta}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}\nu} \\ & [(n_{\alpha\lambda\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\lambda})n_{\mu\nu\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{\nu\mu\mathbf{p}} - \delta_{\nu\mu}) - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}}(n_{\mu\nu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\mu\nu})n_{\nu\mu\mathbf{p}}] \\ & + \delta_-(\Delta\varepsilon_{\lambda\nu})g_{\alpha\lambda}(t, \tau)_{\mathbf{k}-\mathbf{q},\mathbf{k}\nu} \\ & [n_{\mu\nu\mathbf{p}+\mathbf{q}}(n_{\nu\mu\mathbf{p}} - \delta_{\nu\mu})(n_{\lambda\delta\mathbf{k}} - \delta_{\lambda\delta}) - (n_{\mu\nu\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \delta_{\mu\nu})n_{\nu\mu\mathbf{p}}n_{\lambda\delta\mathbf{k}}]\}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Приложение В

Дополнительные члены в источнике

Подставляя явное выражение (1.43) для K , описывающего электрон-фотонное взаимодействие в наинизшем порядке, мы получим для (1.74)

$$l_{\alpha\beta\gamma\delta}^{iklm} = (-1)^{i'+k'} \int dt_1 dt_2 G_{\alpha\mu\mathbf{k}}^{i'ii'}(t + \delta t, t_1) G_{\mu\delta\mathbf{k}}^{k'm}(t_2; t) i D_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^{i'k'}(t_1, t_2) G_{\bar{\mu}\gamma\mathbf{k}'}^{iil}(t_1, t) G_{\beta\bar{\mu}\mathbf{k}'}^{kk'}(t + \delta, t_2). \quad (\text{B.1})$$

Дифференцируя по t и вычисляя l^{1112} компоненту, для генерационно-рекомбинационных процессов получим следующий источник

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi \sum_{\nu} |C_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 [(n_{\bar{\alpha}\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\bar{\alpha}\gamma}) \quad (\text{B.2}) \\ &\quad \times \{ \delta_{-}(\varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(n_{\alpha\delta\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\delta})n_{\beta\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - (\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1)n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(n_{\beta\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\bar{\alpha}})] \\ &\quad + \delta_{-}(\varepsilon_{\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{k}'} - \mathbf{k}) [(\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'} + 1)(n_{\alpha\delta\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\delta})n_{\beta\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'}n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(n_{\beta\bar{\alpha}\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\bar{\alpha}})] \} \\ &\quad + n_{\beta\bar{\delta}\mathbf{k}'} \\ &\quad \times \{ \delta_{-}(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{k}'} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(n_{\alpha\delta\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\delta})n_{\bar{\delta}\gamma\mathbf{k}'} - (\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1)n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(n_{\bar{\delta}\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\bar{\delta}\gamma})] \\ &\quad + \delta_{-}(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}} - \varepsilon_{\bar{\delta}\mathbf{k}'} + \omega_{\nu\mathbf{k}'} - \mathbf{k}) [(\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'} + 1)(n_{\alpha\delta\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\delta})n_{\bar{\delta}\gamma\mathbf{k}'} - \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'}n_{\alpha\delta\mathbf{k}}(n_{\bar{\delta}\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\bar{\delta}\gamma})] \} \\ &\quad + (n_{\alpha\bar{\gamma}\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\bar{\gamma}}) \\ &\quad \times \{ \delta_{-}(\varepsilon_{\gamma\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\bar{\gamma}\mathbf{k}} + \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [(\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1)n_{\bar{\gamma}\delta\mathbf{k}}(n_{\beta\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\gamma}) - \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(n_{\bar{\gamma}\delta\mathbf{k}} - \delta_{\bar{\gamma}\delta})n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}] \\ &\quad + \delta_{-}(\varepsilon_{\gamma\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\bar{\gamma}\mathbf{k}} - \omega_{\nu\mathbf{k}'} - \mathbf{k}) [\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'}n_{\bar{\gamma}\delta\mathbf{k}}(n_{\beta\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\gamma}) - (\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'} + 1)(n_{\bar{\gamma}\delta\mathbf{k}} - \delta_{\bar{\gamma}\delta})n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}] \} \\ &\quad + n_{\beta\bar{\delta}\mathbf{k}} \\ &\quad \times \{ \delta_{-}(\varepsilon_{\bar{\beta}\mathbf{k}} - \varepsilon_{\beta\mathbf{k}'} - \omega_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [(\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1)n_{\alpha\bar{\beta}\mathbf{k}}(n_{\beta\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\gamma}) - \mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{k}'}(n_{\alpha\bar{\beta}\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\bar{\beta}})n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}] \\ &\quad + \delta_{-}(\varepsilon_{\bar{\beta}\mathbf{k}} - \varepsilon_{\beta\mathbf{k}'} + \omega_{\nu\mathbf{k}'} - \mathbf{k}) [\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'}n_{\alpha\bar{\beta}\mathbf{k}}(n_{\beta\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\gamma}) - (\mathcal{N}_{\nu\mathbf{k}'} + 1)(n_{\alpha\bar{\beta}\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\bar{\beta}})n_{\beta\gamma\mathbf{k}'}] \} \}. \end{aligned}$$

Для членов, описывающих дополнительный источник для электрон-фононного рассеяния, мы имеем

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi |c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 \{ (n_{\alpha\gamma\mathbf{k}} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}'}) \\
&\times [\delta_-(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} n_{\beta\mu\mathbf{k}'} (\delta_{\mu\delta} - n_{\mu\delta\mathbf{k}}) - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1) n_{\mu\delta\mathbf{k}} (\delta_{\beta\mu} - n_{\beta\mu\mathbf{k}'})] \\
&+ \delta_-(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}) [(\mathcal{N}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} + 1) n_{\beta\mu\mathbf{k}'} (\delta_{\mu\delta} - n_{\mu\delta\mathbf{k}}) - \mathcal{N}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} n_{\mu\delta\mathbf{k}} (\delta_{\beta\mu} - n_{\beta\mu\mathbf{k}'})]] \\
&+ (n_{\beta\delta\mathbf{k}} - n_{\beta\delta\mathbf{k}'}) \\
&\times [\delta_+(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}) [\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} (\delta_{\alpha\mu} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}}) - (\mathcal{N}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} + 1) n_{\alpha\mu\mathbf{k}} (\delta_{\mu\gamma} - n_{\mu\gamma\mathbf{k}'})] \\
&+ \delta_+(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}}) [(\mathcal{N}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} + 1) n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} (\delta_{\alpha\mu} - n_{\alpha\mu\mathbf{k}}) - \mathcal{N}_{\mathbf{k}'-\mathbf{k}} n_{\alpha\mu\mathbf{k}} (\delta_{\mu\gamma} - n_{\mu\gamma\mathbf{k}'})]] \}. \tag{B.3}
\end{aligned}$$

Для примесного рассеяния получится весьма похожий дополнительный член, он получается из только что выписанного такими же манипуляциями, какие мы использовали при нахождении операторов B

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi |c_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}|^2 \{ (n_{\alpha\gamma\mathbf{k}} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}'}) [n_{\beta\delta\mathbf{k}'} \delta_-(\varepsilon_{\delta\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\delta\mathbf{k}}) - n_{\beta\delta\mathbf{k}} \delta_-(\varepsilon_{\beta\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\beta\mathbf{k}})] \\
&+ (n_{\beta\delta\mathbf{k}} - n_{\beta\delta\mathbf{k}'}) [n_{\alpha\gamma\mathbf{k}'} \delta_+(\varepsilon_{\alpha\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\alpha\mathbf{k}}) - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}} \delta_+(\varepsilon_{\gamma\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\gamma\mathbf{k}})] \}. \tag{B.4}
\end{aligned}$$

Для электрон-электронного рассеяния мы обработаем соответствующие члены последовательно, для первого члена (см. приложение А) мы получим

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}(\mathbf{tr})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta_-(\varepsilon_{\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}}) \\
&\{ n_{\beta\lambda\mathbf{k}'} \\
&\times [n_{\nu\delta\mathbf{k}} (n_{\alpha\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \delta_{\alpha\nu}) (n_{\lambda\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \delta_{\lambda\mu}) n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} - (n_{\nu\delta\mathbf{k}} - \delta_{\nu\delta}) n_{\alpha\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\lambda\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} (n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\mu\gamma})] \\
&+ (n_{\alpha\lambda\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\lambda}) \\
&\times [n_{\nu\delta\mathbf{k}} (n_{\lambda\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \delta_{\lambda\nu}) (n_{\beta\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \delta_{\beta\mu}) n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} - (n_{\nu\delta\mathbf{k}} - \delta_{\nu\delta}) n_{\lambda\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\beta\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} (n_{\mu\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\mu\gamma})] \} \\
&- \pi \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta_+(\varepsilon_{\nu\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}}) \\
&\{ n_{\lambda\delta\mathbf{k}} \\
&\times [(n_{\alpha\nu\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\nu}) n_{\nu\lambda\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\mu\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}} (n_{\beta\mu\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\mu}) - n_{\alpha\nu\mathbf{k}} (n_{\nu\lambda\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\lambda}) (n_{\mu\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \delta_{\mu\gamma}) n_{\beta\mu\mathbf{k}'}] \\
&+ (n_{\lambda\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\lambda\gamma}) \\
&\times [(n_{\alpha\nu\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\nu}) n_{\nu\delta\mathbf{k}+\mathbf{q}} n_{\mu\lambda\mathbf{k}'-\mathbf{q}} (n_{\beta\mu\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\mu}) - n_{\alpha\nu\mathbf{k}} (n_{\nu\delta\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \delta_{\nu\delta}) (n_{\mu\lambda\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \delta_{\mu\lambda}) n_{\beta\mu\mathbf{k}'}] \}. \tag{B.5}
\end{aligned}$$

В случае одной зоны или в невырожденном случае это единственный член, который надо удерживать, так как этот член будет второго порядка по числам заполнения, в то время как остальные по крайней мере третьего. Рассматривая второй член таким же образом, мы получим для источника

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} + \varepsilon_{\nu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \\
&\{n_{\mu\gamma\mathbf{k}'}(\delta_{\alpha\nu} - n_{\alpha\nu\mathbf{k}}) \\
&\quad \times [n_{\lambda\delta\mathbf{k}}n_{\nu\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\delta_{\beta\mu} - n_{\beta\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - n_{\beta\lambda\mathbf{k}'}n_{\nu\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\delta_{\lambda\gamma} - n_{\lambda\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}})] \\
&\quad - n_{\alpha\nu\mathbf{k}}(\delta_{\mu\gamma} - n_{\mu\gamma\mathbf{k}'})) \\
&\quad \times [n_{\lambda\delta\mathbf{k}}(\delta_{\nu\lambda} - n_{\nu\lambda\mathbf{k}-\mathbf{q}})n_{\beta\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - n_{\beta\lambda\mathbf{k}'}(\delta_{\nu\delta} - n_{\nu\delta\mathbf{k}-\mathbf{q}})n_{\lambda\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}}]\} \\
&- \pi \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}}^2 \delta_{+}(\varepsilon_{\nu\mathbf{k}} + \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}}) \\
&\{n_{\nu\delta\mathbf{k}}(\delta_{\beta\mu} - n_{\beta\mu\mathbf{k}'})) \\
&\quad \times [(\delta_{\lambda\gamma} - n_{\lambda\gamma\mathbf{k}'})(\delta_{\alpha\nu} - n_{\alpha\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}})n_{\mu\lambda\mathbf{k}'-\mathbf{q}} - (\delta_{\alpha\lambda} - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}})(\delta_{\lambda\nu} - n_{\lambda\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}})n_{\mu\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}}] \\
&\quad - n_{\beta\mu\mathbf{k}'}(\delta_{\nu\delta} - n_{\nu\delta\mathbf{k}}) \\
&\quad \times [(\delta_{\lambda\gamma} - n_{\lambda\gamma\mathbf{k}'}n_{\alpha\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\delta_{\mu\lambda} - n_{\mu\lambda\mathbf{k}'-\mathbf{q}}) - (\delta_{\alpha\lambda} - n_{\alpha\lambda\mathbf{k}})n_{\lambda\nu\mathbf{k}-\mathbf{q}}(\delta_{\mu\gamma} - n_{\mu\gamma\mathbf{k}'-\mathbf{q}})]\}.
\end{aligned} \tag{B.6}$$

Оставшийся член (он соответствует диаграмме для ядра с замкнутой фермионной петлей) равен

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\beta\gamma\delta}(t\mathbf{r})_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} &= \pi U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2 \sum_{\mathbf{p}} \delta_{-}(\varepsilon_{\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}'} + \varepsilon_{\nu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \\
&\{(n_{\alpha\gamma\mathbf{k}'} - n_{\alpha\gamma\mathbf{k}}) \\
&\quad \times [n_{\nu\delta\mathbf{k}}(n_{\lambda\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - \delta_{\lambda\mu})n_{\mu\lambda\mathbf{p}-\mathbf{k}}(n_{\beta\nu\mathbf{k}'} - \delta_{\beta\nu}) - (n_{\nu\delta\mathbf{k}} - \delta_{\nu\delta})n_{\lambda\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}'}(n_{\mu\lambda\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \delta_{\mu\lambda})n_{\beta\nu\mathbf{k}'}]\} \\
&- \pi U_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^2 \sum_{\mathbf{p}} \delta_{+}(\varepsilon_{\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}'} + \varepsilon_{\nu\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\nu\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}}) \\
&\{(n_{\beta\delta\mathbf{k}'} - n_{\beta\delta\mathbf{k}}) \\
&\quad \times [(n_{\alpha\nu\mathbf{k}} - \delta_{\alpha\nu})n_{\mu\lambda\mathbf{p}-\mathbf{k}'}(n_{\lambda\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}} - \delta_{\lambda\mu})n_{\nu\gamma\mathbf{k}'} - n_{\alpha\nu\mathbf{k}}(n_{\mu\lambda\mathbf{p}-\mathbf{k}'} - \delta_{\mu\lambda})n_{\lambda\mu\mathbf{p}-\mathbf{k}}(n_{\nu\gamma\mathbf{k}'} - \delta_{\nu\gamma})]\}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

Приложение С

Ток увлечения

Функцию Грина мы определим так

$$G^{ij}(1, 2) = \sum_{nn'} \chi_n(\mathbf{r}_{1\perp}) \chi_{n'}^*(\mathbf{r}_{2\perp}) G_{nn'}^{ij}(t_1, x_1; t_2, x_2), \quad (\text{C.1})$$

где i, j индексы Келдыша, nn' учитывают поперечное квантование. Переходы между уровнями поперечного квантования мы учитывать не будем, поэтому можно ограничиться функциями Грина в виде

$$G^{ij}(1, 2) = \sum_n \chi_n(\mathbf{r}_{1\perp}) \chi_n^*(\mathbf{r}_{2\perp}) G_n^{ij}(t_1, x_1; t_2, x_2). \quad (\text{C.2})$$

Мы с самого начала выделили продольные x координаты, по этим координатам мы перейдем к квазиклассическому описанию и получим [46]

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} f_n(t, x, p_x) = \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \left\{ -\Sigma^{12}(\epsilon, p_x) G^{21}(\epsilon, p_x) + \Sigma^{21}(\epsilon, p_x) G^{12}(\epsilon, p_x) \right\}, \quad (\text{C.3})$$

где функция распределения f

$$f_n(t, x, p_x) = -i \int \frac{d\epsilon}{2\pi} G_n^{12}(t, x; \epsilon, p_x). \quad (\text{C.4})$$

Дальше мы будем писать p вместо p_x , опуская излишние значки для обозначения продольного импульса. Используя

$$\begin{aligned} \Sigma^R &= \Sigma^{11} + \Sigma^{12}, & \Sigma^A &= \Sigma^{11} + \Sigma^{21}, \\ \Sigma^K &= \Sigma^{11} + \Sigma^{22} = -\Sigma^{12} - \Sigma^{21}, \end{aligned}$$

имеем

$$v \frac{\partial}{\partial x} f_n(t, x, p) = \int \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{1}{2} \left\{ (\Sigma_n^A(\epsilon, p) - \Sigma_n^R(\epsilon, p)) G_n^K(\epsilon, p) + \Sigma_n^K(\epsilon, p) (G_n^R(\epsilon, p) - G_n^A(\epsilon, p)) \right\}. \quad (\text{C.5})$$

Найдем решение этого уравнения, как в разделе (4.2) Гл. 4, и для тока увлечения мы получим

$$J = e \sum_{n\mathbf{q}_\perp\mathbf{q}'_\perp} \int_0^\infty \frac{Ldp}{\pi\hbar} \frac{d\epsilon}{2\pi} \frac{1}{2} C_n(\mathbf{q}_\perp) C_n(-\mathbf{q}'_\perp) \times \\ \times \left\{ (\Sigma_n^A(\epsilon, p) - \Sigma_n^R(\epsilon, p)) G_n^K(\epsilon, p) + \Sigma_n^K(\epsilon, p) (G_n^R(\epsilon, p) - G_n^A(\epsilon, p)) \right\}, \quad (\text{C.6})$$

где

$$\Sigma_n^A(\epsilon, p) = (\Sigma_n^R(\epsilon, p))^* = \frac{i}{2} \left\{ G_{p-q_x}^K D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^A + G_{p-q_x}^A D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^K \right\}, \quad (\text{C.7})$$

$$\Sigma_n^K(\epsilon, p) = \frac{i}{2} \left\{ G_{p-q_x}^K D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^K + G_{p-q_x}^R D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^R + G_{p-q_x}^A D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^A \right\}. \quad (\text{C.8})$$

Здесь $\mathbf{q} = (q_x, \mathbf{q}_\perp)$ и $\mathbf{q}' = (q_x, \mathbf{q}'_\perp)$, $D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}^\alpha$ фоновная функция Грина (или кулоновского (запаздывающего) взаимодействия) и

$$C_n(\mathbf{q}_\perp) = \langle n | e^{i\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_{1\perp}} | n \rangle. \quad (\text{C.9})$$

Введя обозначение

$$\sum_{\mathbf{q}_\perp\mathbf{q}'_\perp} C_n(\mathbf{q}_\perp) C_n(-\mathbf{q}'_\perp) D_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} = D_n(\omega, q_x), \quad (\text{C.10})$$

перепишем выражение для тока увлечения в виде

$$J = e \sum_n \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{Ldq_x}{2\pi} \frac{1}{2} \left\{ [D_n^A(\omega, q_x) - D_n^R(\omega, q_x)] \Pi_n^K(\omega, q_x) - D_n^K [\Pi_n^R - \Pi_n^A] \right\}, \quad (\text{C.11})$$

где

$$\Pi_n^R(\omega, q_x) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{Ldp}{\pi\hbar} \frac{d\epsilon}{2\pi} \left\{ G_n^R(\epsilon, p) G_n^K(\epsilon - \omega, p - q_x) + \right. \\ \left. + G_n^K(\epsilon, p) G_n^R(\epsilon - \omega, p - q_x) \right\}, \quad \Pi_n^R = (\Pi_n^A)^*,$$

$$\Pi_n^K(\omega, q_x) = -\frac{i}{2} \int_0^\infty \frac{Ldp}{\pi\hbar} \frac{d\epsilon}{2\pi} \left\{ G_n^R(\epsilon, p) G_n^A(\epsilon - \omega, p - q_x) + \right. \\ \left. + G_n^A(\epsilon, p) G_n^R(\epsilon - \omega, p - q_x) + G_n^K(\epsilon, p) G_n^K(\epsilon - \omega, p - q_x) \right\}.$$

Обратим внимание, что в поляризационных операторах интегрирование идет только по положительным импульсам p . Гриневские функции, входящие в эти операторы, можно считать равновесными, неравновесность в систему вносится электронами второй проволоки, формальна она войдет через фоновную функцию Грина (или через кулоновское

взаимодействие). Так как в равновесии поляризационные операторы связаны равенством $\Pi^K \text{th}(\omega/2T) = \Pi^R - \Pi^A$, окончательное выражение с учетом экранирования в приближении хаотических фаз приводится к формуле (5.28) в разделе (5.4) Гл.5.

В случае кулоновского увлечения мы придем к той же формуле с единственным отличием, что вместо квадрата фоновой функции Грина (с учетом экранирования) в этой формуле мы получим экранированное кулоновское взаимодействие. В приближении хаотических фаз, в принципе, не составляет особого труда учесть экранирование кулоновского взаимодействия как за счет самих проволок, так и за счет затворов. Мы здесь предположим, что экранирование за счет одномерных проволок слабое, затворы же мы рассмотрим как одну двумерную плоскость. Тогда для экранированного кулоновского взаимодействия мы получим следующее выражение

$$U_s(\omega, q_x) = \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} C_n(\mathbf{q}_\perp) U_{\mathbf{q}} C_l(-\mathbf{q}_\perp) + \\ + \int \frac{d\mathbf{q}_\perp}{(2\pi)^2} C_n(\mathbf{q}_\perp) U_{\mathbf{q}} \int \frac{dq'_z}{2\pi} C_l(-q_y, -q'_z) U_{q_x, q_y, q'_z} \frac{\Pi_\omega^R(q_x, q_y)}{1 - \Pi_\omega^R(q_x, q_y) U(q_x, q_y)}, \quad (\text{C.12})$$

где $C_l(\mathbf{q}_\perp) = \langle l | e^{i\mathbf{q}_\perp \mathbf{r}_{2\perp}} | l \rangle$ матричный элемент на поперечных волновых функциях электрона второй проволоки, $U_{\mathbf{q}}$ Фурье преобразование кулоновского (трехмерного) потенциала, $U(q_x, q_y) = \int dq_z U_{\mathbf{q}} / 2\pi$. Поляризационный оператор $\Pi^R(\omega, q_x, q_y)$ для двумерного слоя определен в Приложении F, а ток определяется

$$J = -\frac{e}{2} \sum_{nl} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{Ldq_x}{2\pi} \Pi_{0n\omega, q_x}^K |U_s(\omega, q_x)|^2 \times \\ \times \left\{ \Pi_{l\omega, q_x}^K \text{th} \frac{\omega}{2T} - [\Pi_{l\omega, q_x}^R - \Pi_{l\omega, q_x}^A] \right\}.$$

Пусть двумерный слой занимает плоскость $z = 0$, а параллельные плоскости проволок удалены от нее на одинаковые расстояния z_0 , расстояние между проволоками d . Тогда для взаимодействия получим (мы пренебрегаем здесь поперечными размерами проволок по сравнению и с d , и с z_0)

$$U_s(\omega, q_x) = e^2 \int \frac{e^{-iq_y d} dq_y}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}} + \\ + e^2 \int \frac{e^{-iq_y d} dq_y}{q_x^2 + q_y^2} \frac{2\pi e^2 \Pi_\omega^R(q_x, q_y) e^{-2\sqrt{q_x^2 + q_y^2} z_0}}{1 - 2\pi e^2 \Pi_\omega^R(q_x, q_y) / \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}. \quad (\text{C.13})$$

Смысл этого выражения такой: взаимодействие электронов с координатами $x, 0, z_0$ и x', d, z_0 , принадлежащих двум проволокам, описывается потенциалом

$$U_s(\omega, x - x') = e^2 \int \frac{e^{-iq_y d - iq_x(x-x')} dq_y dq_x}{2\pi \sqrt{q_x^2 + q_y^2}} + e^2 \int \frac{e^{-iq_y d - iq_x(x-x')} dq_y dq_x}{2\pi(q_x^2 + q_y^2)} \frac{2\pi e^2 \Pi_\omega^R(q_x, q_y) e^{-2\sqrt{q_x^2 + q_y^2} z_0}}{1 - 2\pi e^2 \Pi_\omega^R(q_x, q_y) / \sqrt{q_x^2 + q_y^2}}. \quad (\text{C.14})$$

В статическом случае, когда в длинноволновом пределе поляризационный оператор сводится просто к двумерной плотности состояний, мы приходим к простому результату

$$U_s(x - x') = \frac{e^2}{\sqrt{(x - x')^2 + d^2}} - \frac{e^2}{\sqrt{(x - x')^2 + d^2 + (2z_0)^2}}, \quad (\text{C.15})$$

второй член здесь описывает действие "изображения" (мы предположили, что проволоки удалены от плоскости на расстояния большие, чем Боровский радиус).

Приложение D

Экранирование в одномерных наноструктурах

Представим себе, что есть внешнее возмущение плотности заряда

$$\rho^{(e)} \propto e^{ikx}, \quad (\text{D.1})$$

что приводит к электростатическому потенциалу

$$\varphi \propto \frac{1}{k^2}. \quad (\text{D.2})$$

Этот потенциал был бы правильным в случае диэлектриков. Потенциал же в полупроводниках будет включать часть из-за пространственного перераспределения электронов проводимости, т.е. таким образом учитывается эффект экранирования. Потенциал можно определить из уравнения

$$\epsilon \nabla^2 \varphi = -4\pi\rho, \quad (\text{D.3})$$

где ρ полная электронная плотность $\rho = \rho^{(e)} + \rho^{(i)}$, включая часть

$$\rho^{(i)} \equiv \frac{\partial n_3}{\partial \mu} e\varphi,$$

связанную с перераспределением электронов в поле φ (она линейна по φ при условии малости этой величины). Имеем

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \equiv \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - k^2 \varphi, \quad (\text{D.4})$$

$$\varphi|_{r=b-0} = \varphi|_{r=b+0}, \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=b-0} = \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=b+0}, \quad (\text{D.5})$$

где b это радиус одномерной структуры кругового сечения. Предположим, что $\rho^{(e)}$ имеет вид

$$\rho^{(e)} = e^{ikx} f(r) \rho^{(0)}, \quad (\text{D.6})$$

где $\rho^{(0)}$ определяет масштаб изменения плотности заряда благодаря внешним источникам. Действительный вид $f(r)$ не важен для анализа экранирования в одномерном случае при условии, что $f(r)$ обращается в нуль для $r \geq b$ и является плавной функцией для $r \leq b$. Теперь имеем

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \lambda^2 \varphi = -\frac{4\pi}{\epsilon} \rho^{(0)} f(r) \quad \text{для } r \leq b, \quad \lambda^2 = k^2 + \varkappa^2, \quad (\text{D.7})$$

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - k^2 \varphi = 0 \quad \text{для } r \geq b. \quad (\text{D.8})$$

$$\varkappa^2 = \frac{4\pi e^2}{\epsilon} \frac{\partial n_3}{\partial \mu}.$$

В последующем удобно взять $f(r)$ вида

$$f(r) = \frac{\epsilon}{4\pi\rho^{(0)}} AI_0(\beta r) \quad \text{для } r \leq b \quad \text{где } \beta \ll 1/b,$$

$$f(r) = 0 \quad \text{для } r \geq b.$$

Здесь A постоянная, $I_0(z)$ модифицированная функция Бесселя. Уравнение (D.7) принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \lambda^2 \varphi = -AI_0(\beta r). \quad (\text{D.9})$$

Конечное общее решение для $r \leq b$ можно представить как

$$\varphi = C_1 I_0(\lambda r) + \frac{1}{\lambda^2 - \beta^2} AI_0(\beta r), \quad (\text{D.10})$$

в то время как для $r \geq b$ оно дается

$$\varphi = C_2 K_0(kr), \quad (\text{D.11})$$

где $C_{1,2}$ константы, $K_0(z)$ функция Макдональда. Так как $\beta b \ll 1$, мы можем разложить $I_0(\beta r)$ (см. ниже). Используя граничные условия (D.5), получаем

$$\begin{aligned} C_1 I_0(\lambda b) + \frac{A}{\lambda^2 - \beta^2} &= C_2 K_0(kb), \\ C_1 \lambda I_0'(\lambda b) + \frac{A/2}{\lambda^2 - \beta^2} \beta^2 b &= C_2 k K_0'(kb). \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

Мы получим для $y \ll 1$

$$I_0(y) = 1 + y^2/4, \quad K_0(y) = \ln(y/2)I_0(y) + \psi(1), \quad (\text{D.13})$$

где ψ дигамма функция, в то время как для $y \gg 1$

$$I_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^y. \quad (\text{D.14})$$

Теперь $kb \ll 1$, $\beta^2 \ll \lambda^2$. Систему (D.12) можно упростить

$$\begin{aligned} C_1 I_0(\lambda b) + \frac{A}{\lambda^2} &= C_2 \ln \frac{1}{kb}, \\ C_1 \lambda b I_0'(\lambda b) + \frac{A}{2\lambda^2} (\beta b)^2 &= -C_2, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

так что

$$C_1 = -\frac{1}{[I_0(\lambda b) + (\lambda b)I_0'(\lambda b) \ln(1/kb)]} \cdot \frac{A}{\lambda^2}, \quad C_2 = \frac{(\lambda b)I_0'(\lambda b)}{[I_0(\lambda b) + (\lambda b)I_0'(\lambda b) \ln(1/kb)]} \cdot \frac{A}{\lambda^2}. \quad (\text{D.16})$$

$\varphi(r)$ для $r \leq b$ можно представить в следующем виде

$$\varphi(r) = \left[1 - \frac{I_0(\lambda r)}{I_0(\lambda b) + (\lambda b)I_0'(\lambda b) \ln(1/kb)} \right] \cdot \frac{A}{\lambda^2}. \quad (\text{D.17})$$

Теперь рассмотрим два предельных случая. Для

$$\lambda b \ll 1 \quad (\text{D.18})$$

мы получаем

$$\varphi(r) = \frac{2b^2 \ln(1/kb) - r^2}{4} \cdot A. \quad (\text{D.19})$$

(Здесь мы рассматриваем величину $\ln(1/kb)$ как большую). Это значит, что экранирование определяется радиусом b , т.е. поперечными размерами структуры. В обратном случае

$$\lambda b \gg 1 \quad (\text{D.20})$$

мы имеем

$$\varphi(r) = \frac{A}{\lambda^2} = \frac{A}{\varepsilon^2 + k^2} \quad (\text{D.21})$$

вместо $\varphi = A/k^2$ в изоляторе. Экранирование определяется $a \equiv 1/\varepsilon$.

Приложение E

Функция распределения в берегах

Начнем с уравнения для матрицы плотности ρ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, \rho] = -\frac{\rho - \rho_0}{\tau}. \quad (\text{E.1})$$

Линейное решение по отношению к возмущению, взятому в виде

$$V = \int d\mathbf{r} e\varphi(\mathbf{r}, t)n(\mathbf{r}), \quad (\text{E.2})$$

можно записать как $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, где в координатном представлении

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_\omega = \int d\mathbf{r}_1 e\varphi_\omega(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' D_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau}. \quad (\text{E.3})$$

Здесь мы ввели спектральную функцию

$$D_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{1}{2i\pi} \{G_\epsilon^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_\epsilon^A(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} = \sum_\lambda \psi_\lambda(\mathbf{r})\psi_\lambda^*(\mathbf{r}')\delta(\epsilon - \epsilon_\lambda), \quad (\text{E.4})$$

где

$$G_\epsilon^R(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_\lambda \frac{\psi_\lambda(\mathbf{r})\psi_\lambda^*(\mathbf{r}')}{\epsilon - \epsilon_\lambda + i0}. \quad (\text{E.5})$$

Заметим, что спектральная функция обладает свойством

$$\int d\mathbf{r}_1 D_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = \delta(\epsilon - \epsilon') D_\epsilon(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (\text{E.6})$$

Записывая

$$\frac{1}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau} = \frac{1}{\epsilon - \epsilon'} + \frac{1}{\epsilon - \epsilon'} \frac{\hbar\omega + i\hbar/\tau}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau}, \quad (\text{E.7})$$

мы получим для $\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_\omega$

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_\omega = \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_\omega^{loc} + \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_\omega^{kin}, \quad (\text{E.8})$$

где локальная часть

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{loc} = \int d\mathbf{r}_1 e\varphi_{\omega}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'}, \quad (\text{E.9})$$

и кинетическая часть

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = \int d\mathbf{r}_1 e\varphi_{\omega}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) \frac{\hbar\omega + i\hbar/\tau}{\epsilon' - \epsilon + \hbar\omega + i\hbar/\tau} \quad (\text{E.10})$$

Так как в кинетической части $\epsilon - \epsilon'$ мало, мы заменим

$$\frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'} \quad (\text{E.11})$$

на $\partial\rho_0/\partial\epsilon$. Далеко в берегах спектральная функция может быть записана в асимптотической форме

$$D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = -\frac{1}{2i\pi\sqrt{r_1}} \left(A_{\epsilon}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r}) e^{ik_{\epsilon}r_1} - c.c. \right). \quad (\text{E.12})$$

Сохраняя члены, содержащие только разности $k_{\epsilon} - k_{\epsilon'} = (\epsilon - \epsilon')/\hbar v$ в экспонентах, произведение спектральных функций можно записать как

$$D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = \frac{2}{(2\pi)^2 r_1} |A_{\epsilon}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2 \cos\{(\epsilon - \epsilon')r_1/\hbar v\}. \quad (\text{E.13})$$

Для плотности частиц мы получим

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{kin} &= -\frac{i}{2\pi} (\hbar\omega + i\hbar/\tau) e \left(-\frac{V}{2} \right) \int_R d\theta_1 \int d\epsilon \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) |A_{\epsilon}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2 \int_0^{\infty} dr_1 e^{(i\omega/v - 1/v\tau)r_1} \\ &\quad -\frac{i}{2\pi} (\hbar\omega + i\hbar/\tau) e \left(\frac{V}{2} \right) \int_L d\theta_1 \int d\epsilon \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) |A_{\epsilon}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2 \int_0^{\infty} dr_1 e^{(i\omega/v - 1/v\tau)r_1}, \end{aligned}$$

где мы положили $\varphi_{\omega} = -V/2$ далеко в правом берегу и $\varphi_{\omega} = V/2$ далеко в левом берегу.

$$\delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{kin} = e \left(-\frac{V}{2} \right) \int_R \frac{d\theta_{\mathbf{n}_1}}{2\pi} \hbar v_F |A_{\epsilon_F}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2 + e \left(\frac{V}{2} \right) \int_L \frac{d\theta_{\mathbf{n}_1}}{2\pi} \hbar v_F |A_{\epsilon_F}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2,$$

где интегрирование идет по углам радиус вектора, направленного в правый (левый) берег.

Рассмотрим теперь локальную часть

$$\delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{loc} = \int d\mathbf{r}_1 e\varphi_{\omega}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) \frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'}. \quad (\text{E.14})$$

Классический предел этого выражения можно получить, заменяя

$$\frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'} \rightarrow \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \quad (\text{E.15})$$

и замечая, что

$$\int d\epsilon' D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (\text{E.16})$$

так что

$$\delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{loc} = -e\varphi_{\omega}(\mathbf{r}) \int d\epsilon D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}) \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) = -e\varphi_{\omega}(\mathbf{r})g_F(\mathbf{r}). \quad (\text{E.17})$$

Требование электронейтральности $\delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{loc} + \delta\rho(\mathbf{r})_{\omega}^{kin} = 0$ приводит к тому, что потенциал дается выражением

$$g_F(\mathbf{r})\varphi_{\omega}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{V}{2} \right) \int_R \frac{d\theta_{\mathbf{n}_1}}{2\pi} \hbar v_F |A_{\epsilon_F}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2 + \left(\frac{V}{2} \right) \int_L \frac{d\theta_{\mathbf{n}_1}}{2\pi} \hbar v_F |A_{\epsilon_F}(\mathbf{n}_1, \mathbf{r})|^2. \quad (\text{E.18})$$

До сих пор мы следовали работе [156].

Нам будет удобно изменить этот подход в следующем отношении. Возьмем взаимодействие с полем в другой форме

$$V = -\frac{1}{c} \int d\mathbf{r} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}), \quad (\text{E.19})$$

где

$$\mathbf{j} = \frac{ie\hbar}{2m} (\psi \nabla \psi^{\dagger} - \psi^{\dagger} \nabla \psi). \quad (\text{E.20})$$

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega} = \frac{e\hbar}{2m\omega} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega\alpha}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' \{ D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \quad (\text{E.21})$$

$$- D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \} \frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau}. \quad (\text{E.22})$$

Мы выбрали калибровку $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/c\partial t = i\omega\mathbf{A}/c$. Рассуждения, похожие на использованные выше, позволяют написать для статической (локальной) части матрицы плотности

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{loc} &= \frac{e\hbar}{2m\omega} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega\alpha}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' \times \\ &\times \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon'} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \right) \\ &= \frac{e\hbar}{2m\omega} \int d\epsilon \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} (E_{\omega\alpha}(\mathbf{r}) \nabla_r D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - E_{\omega\alpha}(\mathbf{r}') \nabla_{r'} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')). \end{aligned}$$

Здесь мы использовали замены

$$\frac{\rho_0(\epsilon) - \rho_0(\epsilon')}{\epsilon - \epsilon'} \rightarrow \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \rightarrow \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon'} \quad (\text{E.23})$$

и снова воспользовались

$$\int d\epsilon' D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (\text{E.24})$$

Далеко в правом берегу поля нет, поэтому выражение для локальной части матрицы плотности обращается в нуль.

Покажем, как наше выражение для кинетической части

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = & \frac{e\hbar}{2m\omega} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega\alpha}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon d\epsilon' \{ D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - \\ & - D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \} \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \frac{\hbar\omega + i\hbar/\tau}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau} \end{aligned} \quad (\text{E.25})$$

воспроизводит классический результат. Мы воспользуемся одномерной функцией Грина

$$G_{\epsilon}(x, x') = \frac{im}{\hbar p_{\epsilon}} e^{ip_{\epsilon}|x-x'|/\hbar}, \quad D_{\epsilon}(x, x') = -\frac{1}{\pi\hbar v_{\epsilon}} \cos k_{\epsilon}(x - x') \quad (\text{E.26})$$

и получим

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = & \frac{e(1 + i/\omega\tau)}{2m\pi^2} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega x}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon \frac{k_{\epsilon}}{v_{\epsilon}^2} \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} d\epsilon' \sin(k_{\epsilon}(x - x_1) + k_{\epsilon'}(x_1 - x')) \times \\ & \times \frac{1}{\epsilon - \epsilon' - \hbar\omega - i\hbar/\tau}. \end{aligned}$$

Введя $X = (x + x')/2$, $\xi = x - x'$ и используя $k_{\epsilon} - k_{\epsilon'} = (\epsilon - \epsilon')/v_{\epsilon}\hbar$, мы получим

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = & \frac{e(1 + i/\omega\tau)}{2\hbar\pi^2} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega x}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon \frac{1}{v_{\epsilon}} \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) \frac{d\epsilon'}{2i} \frac{1}{\epsilon' - \epsilon + \hbar\omega + i\hbar/\tau} \times \\ & \times \left(e^{ik_{\epsilon}\xi} e^{i(X-x_1)(\epsilon-\epsilon')/v_{\epsilon}\hbar} - e^{-ik_{\epsilon}\xi} e^{-i(X-x_1)(\epsilon-\epsilon')/v_{\epsilon}\hbar} \right) \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

или

$$\begin{aligned} \delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = & \frac{e(1 + i/\omega\tau)}{2\hbar\pi^2} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega x}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon \frac{1}{v_{\epsilon}} \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) \frac{d\Omega}{2i} \frac{1}{\Omega + \hbar\omega + i\hbar/\tau} \times \\ & \times \left(e^{ik_{\epsilon}\xi} e^{-i(X-x_1)\Omega/v_{\epsilon}\hbar} - e^{-ik_{\epsilon}\xi} e^{i(X-x_1)\Omega/v_{\epsilon}\hbar} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Полюс этого выражения расположен в нижней полуплоскости комплексной переменной Ω . Мы видим, что $e^{i(X-x_1)\Omega/v_{\epsilon}}$ регулярная функция Ω в нижней полуплоскости, если $X - x_1 < 0$, в то время как $e^{-i(X-x_1)\Omega/v_{\epsilon}}$ регулярна в нижней полуплоскости, если $X - x_1 > 0$. Поэтому, замыкая контур интегрирования в нижней полуплоскости, мы имеем (мы

положили $\tau \rightarrow \infty$)

$$\delta\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\omega}^{kin} = -\frac{e}{2\hbar\pi} \int d\mathbf{r}_1 E_{\omega x}(\mathbf{r}_1) \int d\epsilon \frac{1}{v_{\epsilon}} \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) \times \quad (\text{E.29})$$

$$\times \left(e^{ik_{\epsilon}\xi} e^{i(X-x_1)\omega/v_{\epsilon}} \theta(X-x_1) - e^{-ik_{\epsilon}\xi} e^{-i(X-x_1)\omega/v_{\epsilon}} \theta(x_1-X) \right) \quad (\text{E.30})$$

или

$$\delta\rho(X, \xi)_{\omega}^{kin} = -\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) e^{ik_{\epsilon}\xi} e^{i\omega X/v} \int_{-\infty}^X dx_1 e E_{\omega x}(x_1) e^{-i\omega x_1/v} \quad (\text{E.31})$$

$$+ \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) e^{-ik_{\epsilon}\xi} e^{-i\omega X/v} \int_X^{\infty} dx_1 e E_{\omega x}(x_1) e^{i\omega x_1/v}. \quad (\text{E.32})$$

Окончательно

$$\delta f(X, p)_{\omega}^{kin} = -\theta(p) \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) e^{i\omega X/v} \int_{-\infty}^X dx_1 e E_{\omega x}(x_1) e^{-i\omega x_1/v} \quad (\text{E.33})$$

$$+ \theta(-p) \left(-\frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} \right) e^{-i\omega X/v} \int_X^{\infty} dx_1 e E_{\omega x}(x_1) e^{i\omega x_1/v}, \quad (\text{E.34})$$

что совпадает с нашим классическим результатом для δf (см. формулу (7.41) в разделе 7.4 Гл.7).

В кинетической части далеко справа от контакта мы используем асимптотические выражения для спектральной функции и сохраняем члены, содержащие только медленно осциллирующие (разностные) члены в фазах, так что

$$D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') - D_{\epsilon'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') \nabla_1^{\alpha} D_{\epsilon}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) \\ \simeq \frac{1}{(2\pi)^2 \sqrt{rr'}} \left[e^{i(p_{\epsilon}r - p_{\epsilon'}r')/\hbar} (A_{\epsilon}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1) \nabla_1 A_{\epsilon'}^*(\mathbf{n}', \mathbf{r}_1) - A_{\epsilon'}^*(\mathbf{n}', \mathbf{r}_1) \nabla_1 A_{\epsilon}(\mathbf{n}, \mathbf{r}_1)) + c.c. \right].$$

Положим $p'_{\epsilon} = p_{\epsilon} - \hbar(\omega + i/\tau)/v$ в этом выражении и проведем преобразование Фурье по отношению к разности координат $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. В результате для функции распределения далеко справа имеем

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p})_{\omega} = -\frac{1}{r} \frac{\partial\rho_0}{\partial\epsilon} e^{i\omega r/v - r/l} \delta(\theta_p - \theta_r) \int d\mathbf{r}_1 e \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{r}_1) \frac{\hbar \nabla_1 \phi(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1)}{mv} e^{-i\hbar\omega \partial\phi(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1)/\partial\epsilon} \frac{\hbar^3 v}{m} |A_{\epsilon}(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1)|^2.$$

Множитель $\delta(\theta_p - \theta_r)$ означает, что далеко в правом берегу электрон движется по прямой как классическая частица. Здесь мы ввели фазу ϕ в соответствии с

$$A_{\epsilon}(\mathbf{n}, \mathbf{r}) = |A_{\epsilon}(\mathbf{n}, \mathbf{r})| \exp \{ -i\phi(\mathbf{n}, \mathbf{r}) \}.$$

Для оценки интеграла мы можем написать

$$|A_\epsilon(\mathbf{n}, \mathbf{r})|^2 = \left(\frac{m}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{2\pi k_\epsilon}$$

и

$$\phi(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1) = k_\epsilon(\mathbf{n}_p \mathbf{r}_1); \quad \nabla_1 \phi(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1) = \mathbf{p}/\hbar; \quad \partial \phi(\mathbf{n}_p, \mathbf{r}_1)/\partial \epsilon = (\mathbf{p} \mathbf{r}_1)/(\hbar v).$$

Имеем

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p})_\omega = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \rho_0}{\partial \epsilon} e^{i\omega r/v - r/l} \delta(\theta_p - \theta_r) \int d\mathbf{r}_1 e(\mathbf{n}_p \mathbf{E}_\omega(\mathbf{r}_1)) e^{-i\omega(\mathbf{n}_p \mathbf{r}_1)/v}. \quad (\text{E.35})$$

Приложение F

Поляризаационные операторы

Поляризаационный оператор двумерного слоя электронов определяется как

$$\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = \int \frac{2d\mathbf{p}}{(2\pi\hbar)^2} \frac{n_{p-q/2} - n_{p+q/2}}{\hbar\omega - \epsilon_{p+q/2} + \epsilon_{p-q/2} + i0}. \quad (\text{F.1})$$

Для Ферми газа можно написать

$$\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = -\frac{2}{(2\pi\hbar)^2\hbar} \int_{p < p_F} p dp d\varphi \left[\frac{1}{\omega_+ - \mathbf{q}\mathbf{v} + i0} - \frac{1}{\omega_- - \mathbf{q}\mathbf{v} + i0} \right], \quad (\text{F.2})$$

где $\omega_{\pm} = \omega \pm \hbar q^2/2m$. Напишем

$$\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = -\frac{2m^2 v_F}{(2\pi\hbar)^2 q \hbar} [I(\omega_+/qv_F) - I(\omega_-/qv_F)], \quad (\text{F.3})$$

где $I(\Omega)$ интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Omega/x - \cos \varphi + i0} = P.V. \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Omega/x - \cos \varphi} - i\pi \int_0^1 dx \int d\varphi \delta(\Omega/x - \cos \varphi). \quad (\text{F.4})$$

Рассмотрим сначала

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Omega/x - \cos \varphi} \quad (\text{F.5})$$

и введем новую переменную $z = e^{i\varphi}$, $d\varphi = -idz/z$ и получим

$$2i \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2z\Omega/x + 1}. \quad (\text{F.6})$$

Полюса находятся в точках $z_1 = \Omega/x + \sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}$ и $z_2 = \Omega/x - \sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}$. Если $(\Omega/x)^2 < 1$, оба полюса $z_1 = \Omega/x + i\sqrt{1 - (\Omega/x)^2}$, $z_2 = \Omega/x - i\sqrt{1 - (\Omega/x)^2}$ расположены на окружности $|z| = 1$, и мы получим в этом случае

$$\frac{2i}{z_2 - z_1} \oint_{|z|=1} dz \left(\frac{1}{z - z_2} - \frac{1}{z - z_1} \right) = \frac{2i}{z_2 - z_1} \left(\frac{1}{2} 2\pi i - \frac{1}{2} 2\pi i \right) = 0, \quad (\text{F.7})$$

так как интеграл Коши равен $1/2$ от вычета, когда точка сингулярности расположена на контуре интегрирования [204]. Если $(\Omega/x)^2 > 1$, только один из полюсов $z_1 = \Omega/x + \sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}$, $z_2 = \Omega/x - \sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}$ расположен в круге с границей $|z| = 1$. Для $\Omega > 0$ это точка z_2 , а при $\Omega < 0$ это первый полюс z_1 . (Заметим, что $x > 0$). Для $\Omega > 0$

$$2i2\pi i \left(\frac{1}{z_2 - z_1} \right) = -4\pi \frac{1}{-2\sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}} \quad (\text{F.8})$$

и

$$-2\pi \frac{1}{\sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}} \quad (\text{F.9})$$

для $\Omega < 0$. Окончательно получаем

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Omega/x - \cos \varphi} = \theta(\Omega^2 - x^2) \text{sign} \Omega \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}}. \quad (\text{F.10})$$

Мы могли бы сделать это и по-другому. Введя новую переменную $\tan \theta/2 = t$, $d\theta = 2dt/(1+t^2)$, $\cos \theta = 2(\cos \theta/2)^2 - 1 = (1-t^2)/(1+t^2)$, мы получим

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\Omega/x - \cos \varphi} = \frac{4}{\Omega/x + 1} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 + (\Omega/x - 1)/(\Omega/x + 1)}. \quad (\text{F.11})$$

Если $|\Omega/x| < 1$, тогда $(\Omega/x - 1)/(\Omega/x + 1) < 0$, и мы получим $(\alpha = \sqrt{|(\Omega/x - 1)/(\Omega/x + 1)|})$

$$\frac{4}{\Omega/x + 1} \int_0^\infty \frac{dt}{t^2 - \alpha^2} = \frac{4}{\Omega/x + 1} \frac{1}{2\alpha} \left\{ \ln \left| \frac{t - \alpha}{t + \alpha} \right|_0^{\alpha - \epsilon} + \ln \left| \frac{t - \alpha}{t + \alpha} \right|_{\alpha + \epsilon}^\infty \right\} = 0. \quad (\text{F.12})$$

Когда $|\Omega/x| > 1$, отношение $(\Omega/x - 1)/(\Omega/x + 1) > 0$ положительно, и мы получим

$$\text{sign} \Omega \frac{2\pi}{\sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned} & 2\pi \text{sign} \Omega \int_0^1 dx \theta(\Omega^2 - x^2) \frac{1}{\sqrt{(\Omega/x)^2 - 1}} = \\ & = 2\pi \text{sign} \Omega \left(\theta(1 - \Omega^2) \int_0^{|\Omega|} \frac{xdx}{\sqrt{\Omega^2 - x^2}} + \theta(\Omega^2 - 1) \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{\Omega^2 - x^2}} \right) \end{aligned}$$

или

$$2\pi \text{sign} \Omega \left(\theta(1 - \Omega^2) |\Omega| + \theta(\Omega^2 - 1) [|\Omega| - \sqrt{\Omega^2 - 1}] \right) = 2\pi \left(\Omega - \theta(\Omega^2 - 1) \sqrt{\Omega^2 - 1} \text{sign} \Omega \right).$$

Второй член в уравнении (F.4) равен

$$-i\pi \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(\Omega/x - \cos \varphi) = -i\pi \int_0^1 dx \theta(x - |\Omega|) \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{\delta(\varphi - \varphi_1)}{|\sin \varphi_1|} + \frac{\delta(\varphi - \varphi_2)}{|\sin \varphi_2|} \right), \quad (\text{F.13})$$

где $\varphi_{1,2}$ определяется из $\cos \varphi = \Omega/x$, т.е. $\varphi_1 = \arccos \Omega/x$, $\varphi_2 = 2\pi - \arccos \Omega/x$, $|\sin \varphi_{1,2}| = \sqrt{1 - (\Omega/x)^2}$. Таким образом,

$$-i\pi \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} d\varphi \delta(\Omega/x - \cos \varphi) = -2i\pi\theta(1 - \Omega^2) \int_{|\Omega|}^1 \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - \Omega^2}} = -2i\pi\theta(1 - \Omega^2) \sqrt{1 - \Omega^2}. \quad (\text{F.14})$$

Окончательно

$$I(\Omega) = 2\pi \left(\Omega - \theta(\Omega^2 - 1) \sqrt{\Omega^2 - 1} \text{sign} \Omega \right) - 2i\pi\theta(1 - \Omega^2) \sqrt{1 - \Omega^2}, \quad (\text{F.15})$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = -\frac{4m^2\pi}{(2\pi\hbar)^2 q^2 \hbar} \left\{ \frac{\hbar q^2}{m} - \theta[A_+] \sqrt{A_+} \text{sign} \omega_+ + \theta[A_-] \sqrt{A_-} \text{sign} \omega_- \right. \\ \left. - i\theta[-A_+] \sqrt{-A_+} + i\theta[-A_-] \sqrt{-A_-} \right\}, \end{aligned}$$

где $A_{\pm} = \omega_{\pm}^2 - (qv_F)^2$.

Из равенства (F.2) при $\omega \gg qv_F$ легко получить $\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega) = nq^2/m\omega^2$, где $n = 2\pi p_F^2/(2\pi\hbar)^2$ двумерная плотность электронов. Отметим, что вектор поляризации \mathbf{P} , возникающий в двумерном слое, связан с полем \mathbf{E} соотношением $\mathbf{P} = -(e^2/q^2)\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega)\mathbf{E}\delta(z)$ (оба вектора считаются здесь параллельными плоскости (x, y)), т.е. двумерная восприимчивость $\chi = -(e^2/q^2)\Pi_{\mathbf{q}}^R(\omega)$ при больших частотах равна $-ne^2/m\omega^2$. Так как вещественная и мнимая части диэлектрической проницаемости связаны соотношениями Крамерса-Кронига

$$\epsilon'(\omega) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{\epsilon''(x)}{x - \omega}, \quad (\text{F.16})$$

то для поляризационного оператора мы получим (с учетом нечетности мнимой части поляризационного оператора)

$$\Pi^{R'}(\omega) = \frac{2}{\pi} P.V. \int_0^{\infty} dx \frac{x \Pi^{R''}(x)}{x^2 - \omega^2}. \quad (\text{F.17})$$

При больших частотах $\Pi^{R'}(\omega) = -(2/\pi\omega^2) \int_0^{\infty} dx x \Pi^{R''}(x)$, т.е. мы приходим к так называемому правилу сумм

$$\int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega \Pi^{R''}(\omega) = -\frac{nq^2}{4m}. \quad (\text{F.18})$$

Для статического поляризационного оператора мы имеем

$$\Pi_{\mathbf{q}}^R(0) = -\frac{m}{\pi\hbar^2} \left(1 - \theta[\hbar q - 2p_F] \sqrt{1 - (2p_F/\hbar q)^2} \right),$$

т.е. производная оператора по q имеет разрыв при $q = 2p_F$.

В классической области $\hbar q \ll p_F$ этот результат легко получить из первой формулы, раскладывая разность Ферми функций и пренебрегая ω в знаменателе, таким образом поляризационный оператор сводится к $2D$ плотности состояний $m/\pi\hbar^2$. В этом пределе имеем для диэлектрической проницаемости

$$\epsilon(q, 0) = 1 - U_q \Pi_{\mathbf{q}}^R(0) = 1 + \frac{2\pi e^2}{q} \frac{m}{\pi\hbar^2},$$

где мы использовали, что в $2D$ $U_q = 2\pi e^2/q$, и обозначали q величину двумерного вектора $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$. Это можно получить, замечая, что в $3D$ $U_q^{3D} = 4\pi e^2/q^2$, $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2}$ и

$$U(q_x, q_y, z)|_{z=0} = \int \frac{dq_z}{2\pi} e^{iq_z z} U_q^{3D} \Big|_{z=0} = 2e^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq_z}{q_z^2 + q^2} = \frac{2\pi e^2}{q}.$$

Дальше мы будем обозначать q величину трехмерного вектора, а для величины двумерного вектора примем обозначение q_{\perp} . Рассмотрим теперь экранирование статического заряда. Оно определяется $\epsilon(q, 0)$. Предположим, что заряд Q находится в точке \mathbf{r}_0 в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_b . Нам надо найти $3D$ потенциал, учитывая присутствие $2D$ электронного газа. Уравнение Пуассона

$$-(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)\epsilon_b \varphi_{q_x, q_y, q_z} = -4\pi e \Pi_{q_x, q_y} e \varphi(q_x, q_y, z)|_{z=0} - 4\pi Q e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}$$

можно записать как

$$q^2 \epsilon_b \varphi_q = 4\pi e^2 \Pi_{q_{\perp}} \int \frac{dq_z}{2\pi} \varphi(q) + 4\pi Q e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}.$$

Введя обозначение для интеграла $\phi(q_{\perp})$, разделим предыдущее уравнение на q^2 и проинтегрируем по q_z . Мы получим

$$\epsilon_b \phi_{q_{\perp}} = \frac{2\pi e^2}{q_{\perp}} \Pi_{q_{\perp}} \phi(q_{\perp}) + 2\pi Q \frac{1}{q_{\perp}} e^{-i(q_x x_0 + q_y y_0) - q_{\perp} |z_0|},$$

т.е.

$$\phi_{q_{\perp}} = 2\pi Q \frac{1}{q_{\perp}} e^{-i(q_x x_0 + q_y y_0) - q_{\perp} |z_0|} \frac{1}{\epsilon_b - \frac{2\pi e^2}{q_{\perp}} \Pi_{q_{\perp}}}.$$

Для φ_q мы получим

$$\varphi_q = \frac{4\pi Q e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}}{\epsilon_b q^2 (\epsilon_b - \frac{2\pi e^2}{q_\perp} \Pi_{q_\perp})} \left(\epsilon_b - \frac{2\pi e^2}{q_\perp} \Pi_{q_\perp} [1 - e^{-q_\perp |z_0| + i q_z z_0}] \right),$$

или

$$\varphi_q = \frac{4\pi Q e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}}{\epsilon_b q^2} + \frac{4\pi Q e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}_0}}{\epsilon_b q^2 (\epsilon_b - \frac{2\pi e^2}{q_\perp} \Pi_{q_\perp})} \frac{2\pi e^2}{q_\perp} \Pi_{q_\perp} e^{-q_\perp |z_0| + i q_z z_0}.$$

Второй член в этом выражении представляет собой потенциал "изображения". Рассмотрим этот член и положим $x_0 = y_0 = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r})_{im} &= -\frac{2\pi Q}{\epsilon_b} \int \frac{q_\perp dq_\perp d\varphi}{(2\pi)^2} e^{-q_\perp (|z_0| + |z|)} e^{i q_\perp \rho \cos \varphi} \frac{1}{q_\perp (1 + a_B \epsilon_b q_\perp / 2)} \\ &= -\frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty dx J_0(x) e^{-x(|z| + |z_0|)/\rho} \frac{1}{1 + a_B \epsilon_b x / 2\rho}, \end{aligned}$$

где мы ввели Боровский радиус $a_B = \hbar^2 / m e^2$ (m эффективная масса электрона). Если заряд расположен далеко от плоскости (т.е. $|z_0| \gg a_B \epsilon_b$), мы имеем известный классический результат

$$\varphi(\mathbf{r})_{im} = -\frac{Q}{\rho} \int_0^\infty dx J_0(x) e^{-x(|z| + |z_0|)/\rho} = -\frac{Q}{\sqrt{\rho^2 + (|z| + |z_0|)^2}}.$$

Теперь рассмотрим экранирование заряда, находящегося в самой плоскости двумерного газа $\mathbf{r}_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi Q e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}}}{q^2 (\epsilon_b + \frac{2}{q_\perp a_B})} = 2\pi Q \int \frac{dq_\perp d\varphi}{(2\pi)^2} \frac{e^{-q_\perp |z| + i q_\perp \rho \cos \varphi}}{\epsilon_b + 2/q_\perp a_B} \\ &= Q \int dq_\perp J_0(q_\perp \rho) \frac{e^{-q_\perp |z|}}{\epsilon_b + 2/q_\perp a_B}. \end{aligned}$$

В плоскости

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, 0) &= \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty dt J_0(t) \frac{t}{t + 2\rho/a_B \epsilon_b} = \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty dt J_0(t) t \int_0^\infty d\xi e^{-\xi(t + 2\rho/a_B \epsilon_b)} \\ &= \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi\rho/a_B \epsilon_b} \int_0^\infty dt J_0(t) t e^{-\xi t} = \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi\rho/a_B \epsilon_b} \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Если $\rho \gg a_B \epsilon_b$, мы можем оценить этот интеграл как

$$\varphi(x, y, 0) = \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi\rho/a_B \epsilon_b} \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}} \simeq \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \int_0^\infty d\xi e^{-2\xi\rho/a_B \epsilon_b} \xi = \frac{Q}{\epsilon_b \rho} \frac{(a_B \epsilon_b)^2}{(2\rho)^2},$$

т.е. потенциал точечного заряда в двумерном слое спадает степенным образом в отличие от трехмерного случая, где потенциал спадает экспоненциально. Известно, что из-за (Коновской) особенности в диэлектрической проницаемости Ферми газа при $q = 2p_F$ существует также осциллирующая часть потенциала точечного заряда в газе, спадающая степенным образом. Интересно, что в двумерном слое из-за особенности в производной проницаемости от q при $q = 2p_F$ также существует аналогичная осциллирующая часть, спадающая с расстоянием от заряда как [205, 206]

$$\varphi(x, y, 0) \sim \frac{Qa_B}{2\rho^2} \frac{1}{(1 + k_F a_B \epsilon_b)} \sin 2k_F \rho.$$

Список основных работ автора

- A1** R.Katilius and S.V.Gantsevich and V.D.Kagan and M.I.Muradov, Fluctuations in Non-Equilibrium Electron Gas: Effect of Quantum Statistics, *Fluct. Noise Lett.*, **9**, 373-385, (2010)
- A2** R.Katilius and S.V.Gantsevich and V.D.Kagan and M.I.Muradov, Theory of fluctuations in non-equilibrium Fermi gas, *Sol.St. Comm.*, **149**, 1209-1211, (2009)
- A3** M.I. Muradov, Theory of fluctuations around a nonequilibrium state maintained by interband optical and driving electric field in semiconductors, *Phys. Rev. B*, **58**, 12883-12898, (1998)
- A4** S.V. Gantsevich, V.L. Gurevich, M.I. Muradov, D.A. Parshin, Theory of femtosecond photon echo decay in semiconductors, *Phys. Rev. B*, **52**, 14006-14019, (1995)
- A5** M. I. Muradov, Femtosecond photon echo in semiconductors. Diagrammatic approach, *ФТТ*, **37**, 2293-2308, (1995)
- A6** V. L. Gurevich, M. I. Muradov, The theory of shot noise in the space-charge limited diffusive conduction regime, *ЖЭТФ*, **121**, 1194-1203, (2002)
- A7** V. L. Gurevich and M. I. Muradov, Shot noise of Coulomb drag current, *Phys. Rev. B*, **62**, 1576-1579, (2000)
- A8** V.L.Gurevich, M.I. Muradov, Nonohmic Coulomb Drag in the Ballistic Electron Transport Regime, *Письма в ЖЭТФ*, **71**, 164-168, (2000)
- A9** M. I. Muradov, V. L. Gurevich, On the temperature dependence of ballistic Coulomb drag in nanowires, *J. Phys.: Condens. Matter*, **24**, 135304-135307, (2012)

- A10** M.I. Muradov, Phonon drag in ballistic quantum wires in the nonlinear regime, *Phys. Rev. B*, **66**, 115417-115424, (2002)
- A11** V. L. Gurevich, M. I. Muradov, Coulomb drag in a longitudinal magnetic field in quantum wells, *J. Phys.: Condens. Matter*, **17**, 87-98, (2005)
- A12** V.L. Gurevich, V.I. Kozub, M.I. Muradov, Nonlocal dynamical response of a ballistic nanobridge, *J. Phys.: Condens. Matter*, **22**, 025304-025312, (2010)
- A13** V.L. Gurevich, V.I. Kozub, M.I. Muradov, Dynamical response of nanostructures and Joule heat release, *J. Phys.: Condens. Matter*, **23**, 405302-405310, (2011)
- A14** V.L. Gurevich and M.I. Muradov, Spatial distribution of Joule heat in nanostructures, *J. Phys.: Condens. Matter*, **18**, 11217-11232, (2006)
- A15** В. Л. Гуревич, М. И. Мурадов, Выделение джоулева тепла при прохождении тока в наноструктурах, *ФТТ*, **54**, 625-641, (2012)
- A16** V.L. Gurevich and M.I. Muradov, Spin-magnetophonon level splitting in semimagnetic quantum wells , *Phys. Rev. B*, **78**, 125312-125323, (2008)
- A17** В. Л. Гуревич, М. И. Мурадов, Спин-магнетофононный резонанс и расщепление уровней в полумагнитных полупроводниках, *ФТТ*, **51**, 455-460, (2009)
- A18** Katilius R., Gantsevich S.V., Kagan V.D., Muradov M.I., Ramonas M., Rudan M., Correlation-fluctuation effects in non-equilibrium quantum gas, in: *Noise and Fluctuations, Proc. of 20th International Conference (ICNF 2009, Pisa, Italy)*, ed. by Macucci, M., Basso, G., New York, Melville, **AIP-CP1129**, 9-12, (2009)
- A19** В.Л. Гуревич, М. И. Мурадов, Кулоновское увлечение в квантовых ямах в продольном магнитном поле, *Труды VI Российской конференции по физике полупроводников*, СПб, 101, (2003)
- A20** В.Л.Гуревич, В.И. Козуб, М. И. Мурадов, В.В. Афонин, С. В. Ганцевич, В.Д. Каган , Спинзависимые явления в твердых телах и спинтроника, *Материалы Всероссийского совещания*, СПб, 201-207, (2006)

Литература

- [1] C. W. J. Beenakker and H. van Houten. Quantum transport in semiconductor nanostructures. In H. Ehrenreich and D. Turnbull, editors, *Solid State Physics*, volume 44. 1991.
- [2] Имри Й. *Введение в мезоскопическую физику*. Физматлит, Москва, 2004. 304 с.
- [3] D. K. Ferry and S. M. Goodnick. *Transport in nanostructures*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. 512 с.
- [4] S. Datta. *Electronic transport in mesoscopic systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. 377 с.
- [5] S. Datta. *Quantum Transport: Atom to Transistor*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. 404 с.
- [6] C. W. J. Beenakker. Random-matrix theory of quantum transport. *Rev. Mod. Phys.*, 69:731–808, 1997.
- [7] P. A. Mello, N. Kumar. *Quantum transport in Mesoscopic Systems: Complexity and statistical fluctuations*. Oxford University Press, New York, 2004. 401 с.
- [8] B. J. van Wees, H. van Houten, C. W. J. Beenakker, J. G. Williamson, L. P. Kouwenhoven, D. van der Marel, C. T. Foxon. Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 60:848–850, 1988.
- [9] D. A. Wharam, T. J. Thornton, R. Newbury, M. Pepper, H. Ahmed, J. E. F. Frost, D. G. Hasko, D. C. Peacock, D. A. Richie, G. A. C. Jones. One-dimensional transport and the quantization of the ballistic resistance. *J. Phys. C*, 21:L209–L214, 1988.

- [10] Ю. В. Шарвин. Об одном возможном методе исследования поверхности Ферми. *ЖЭТФ*, 48:984–985, 1965.
- [11] Б. Л. Альтшулер. Флуктуации остаточной проводимости неупорядоченных проводников. *Письма в ЖЭТФ*, 41:530–533, 1985.
- [12] P. A. Lee and A. D. Stone. Universal conductance fluctuations in metals. *Phys. Rev. Lett.*, 55:1622–1625, 1985.
- [13] Ya. M. Blanter and M. Büttiker. Shot noise in mesoscopic conductors. *Phys. Rep.*, 336:1–166, 2000.
- [14] C. W. J. Beenakker and M. Büttiker. Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors. *Phys. Rev. B*, 46:1889–1892, 1992.
- [15] К. Е. Нагаев. On the shot noise in dirty metal contacts. *Phys. Lett. A*, 169:103–107, 1992.
- [16] Н. Ашкрофт, Н. Мермин. *Физика твердого тела*, Т. 1,2. Мир, Москва, 1979. 399, 422 с.
- [17] О. Маделунг. *Теория твердого тела*. Наука, Москва, 1980. 416 с.
- [18] Д. Нозьер, Ф. Пайнс. *Теория квантовых жидкостей*. Мир, Москва, 1967. 382 с.
- [19] Y. Imry and R. Landauer. Conductance viewed as transmission. *Rev. Mod. Phys.*, 71:S306–S312, 1999.
- [20] S. Tomonaga. Remarks on Bloch's method of sound waves applied to many-fermion problems. *Progr. Theor. Phys.*, 5:544–569, 1950.
- [21] J. M. Luttinger. An exactly soluble model of a many-fermion system. *J. Math. Phys.*, 4:1154–1162, 1963.
- [22] G. D. Mahan. *Many-particle physics*. Plenum Press, New York, 1990. 1032 с.
- [23] J. Voit. One-dimensional fermi liquids. *Rep. Prog. Phys.*, 57:977–1116, 1994.

- [24] T. Giamarchi. *Quantum physics in one dimension*. Clarendon Press, Oxford, 2003. 424 c.
- [25] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus, and P. C. Eklund. *Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes*. Academic Press, New York, 1995. 965 c.
- [26] R. Saito, G. Dresselhaus, M. S. Dresselhaus. *Physical properties of carbon nanotubes*. Imperial College Press, London, 1998. 259 c.
- [27] A. Yacoby, H. L. Stormer, N. S. Wingreen, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West. Nonuniversal conductance quantization in quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4612–4615, 1996.
- [28] A. Yu. Alekseev and V. V. Cheyanov. Nonuniversal conductance quantization in high-quality quantum wires. *Phys. Rev. B*, 57:R6834–R6837, 1998.
- [29] S. Lal, S. Rao, and D. Sen. Transport through quasiballistic quantum wires: The role of contacts. *Phys. Rev. Lett.*, 87:26801–26801–4, 2001.
- [30] M. Lax. Fluctuations from the nonequilibrium steady state. *Rev. Mod. Phys.*, 32:25–64, 1960.
- [31] M. Lax. Classical noise IV: Langevin methods. *Rev. Mod. Phys.*, 38:541–566, 1966.
- [32] M. Lax. Quantum noise X: Density matrix treatment of field and population difference fluctuations. *Phys. Rev.*, 157:213–231, 1967.
- [33] Б. Б. Кадомцев. О флуктуациях в газе. *ЖЭТФ*, 32:943–944, 1957.
- [34] Price P. J. Fluctuations of hot electrons. In *Fluctuations phenomena in solids*, pages 355–380. 1965.
- [35] Price P. J. Noise theory for hot electrons. *IBM J. Res. Devel.*, 3:191–193, 1959.
- [36] S. V. Gantsevich, V. L. Gurevich, and R. Katilius. Theory of fluctuations in nonequilibrium electron gas. *Riv. Nuov. Cimento*, 2:1–87, 1979.

- [37] С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилос. Флуктуации тока в полупроводнике в сильном электрическом поле. *ФТТ*, 11:308–315, 1969.
- [38] С. В. Ганцевич, В. Л. Гуревич, Р. Катилос. Флуктуации тока в полупроводнике в сильном электрическом поле и рассеяние света горячими электронами. *ЖЭТФ*, 57:503–519, 1969.
- [39] Ш. М. Коган и А. Я. Шульман. К теории флуктуаций в неравновесном электронном газе. *ЖЭТФ*, 56:862–876, 1969.
- [40] В. Д. Каган. Флуктуации в системе заряженных частиц. *ФТТ*, 17:1969–1977, 1975.
- [41] П. М. Томчук и А. А. Чумак. Неравновесные флуктуации в газе с парными столкновениями. *Докл. Акад. Наук Укр. ССР*, 10 А:931–935, 1975.
- [42] А. Г. Аронов и Е. Г. Ивченко. Теория генерационно-рекомбинационных флуктуаций в полупроводниках в неравновесных условиях. *ФТТ*, 13:2550–2557, 1971.
- [43] Н. Haug. Quantum mechanical theory of fluctuations and relaxation in semiconductor lasers. *Z. Physik.*, 200:57–68, 1967.
- [44] Н. Haug and Н. Haken. Theory of noise in semiconductor laser emission. *Z. Physik.*, 204:262–275, 1967.
- [45] Л. В. Келдыш. Диаграммная техника для неравновесных процессов. *ЖЭТФ*, 47:1515–1527, 1964.
- [46] Е. М. Лифшиц и Л. П. Питаевский. *Физическая кинетика*. Наука, Москва, 1979. 528 с.
- [47] Н. В. Callen, Т. А. Welton. Irreversibility and generalized noise. *Phys. Rev.*, 83:34–40, 1951.
- [48] С. Н. Henry. Phase noise in semiconductor lasers. *Journ. Lightwave Techn.*, LT-4:298–311, 1986.

- [49] V. I. Kozub, A. M. Rudin. Shot noise in the mesoscopic diffusive conductors in the electron temperature limit. *Письма в ЖЭТФ*, 62:45–47, 1995.
- [50] F. Liefrink, J. I. Dijkhuis, M. J. M. de Jong, L. W. Molenkamp, and H. van Houten. Experimental study of reduced shot noise in a diffusive mesoscopic conductor. *Phys. Rev. B*, 49:14066–14069, 1994.
- [51] A. H. Steinbach, J. M. Martinis, and M. Y. Devoret. Observation of hot-electron shot noise in a metallic resistor. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3806–3809, 1996.
- [52] M. Henry, S. Oberholzer, C. Strunk, and C. Schönenberger. $1/3$ -shot-noise suppression in diffusive nanowires. *Phys. Rev. B*, 59:2871–2880, 1999.
- [53] T. González, C. González, J. Mateos, D. Pardo, L. Reggiani, O. M. Bulashenko, and J. M. Rubí. Universality of the $1/3$ shot-noise suppression factor in nondegenerate diffusive conductors. *Phys. Rev. Lett.*, 80:2901–2904, 1998.
- [54] R. Schomerus, E. G. Mishchenko, and C. W. E. Beenakker. Kinetic theory of shot noise in nondegenerate diffusive conductors. *Phys. Rev. B*, 60:5839–5850, 1999.
- [55] Л. Гуревич. Термоэлектрические свойства проводников. *ЖЭТФ*, 16:193–228, 1946.
- [56] H. E. M. Barlow. Surface waves. *Proc. IRE*, 46:1413–1417, 1958.
- [57] Luryi S. Photon-drag effect in intersubband absorption by a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 58:2263–2266, 1987.
- [58] A. A. Grinberg and S. Luryi. Theory of the photon-drag effect in a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. B*, 38:87–96, 1988.
- [59] A. G. Rojo and G. D. Mahan. Current drag from the van der waals interaction. *Phys. Rev. Lett.*, 68:2074–2077, 1992.
- [60] K. Flensberg and B. Y.-K. Hu. Coulomb drag as a probe of coupled plasmon modes in parallel quantum wells. *Phys. Rev. Lett.*, 73:3572–3575, 1994.

- [61] N. P. R. Hill, J. T. Nicholls, E. H. Linfield, M. Pepper, G. A. C. Jones, B. Y.-K. Hu, and K. Flensberg. Correlation effects on the coupled plasmon modes of a double quantum well. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2204–2207, 1997.
- [62] М. Б. Погребинский. Взаимное увлечение носителей тока в системе полупроводник-диэлектрик-полупроводник. *ФТТ*, 11:637–644, 1976.
- [63] Price P. J. Hot electron effects in heterolayers. *Physica B+C*, 117-118:750–752, 1983.
- [64] A. G. Rojo. Electron-drag effects in coupled electron systems. *J. Phys.: Condens. Matter*, 11:R31–R52, 1999.
- [65] А. Я. Шик, Л. Г. Бакуева, С. Ф. Мусихин, С. А. Рыков. *Физика низкоразмерных систем*. Наука, Санкт-Петербург, 2001. 156 с.
- [66] V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and E. W. Fenton. Coulomb drag in the ballistic electron transport regime. *J. Phys. Cond. Matt.*
- [67] V. L. Gurevich, M. I. Muradov. Nonohmic coulomb drag in the ballistic electron transport regime. *Письма в ЖЭТФ*, 71:164–168, 2000.
- [68] P. Debray, P. Vasilopoulos, O. Raichev, R. Perrin, M. Rahman, and W. C. Mitchel. Experimental observation of coulomb drag in parallel ballistic quantum wires. *Physica E*, 6:694–697, 1999.
- [69] P. Debray, V. Zverev, O. Raichev, R. Klesse, P. Vasilopoulos, and R. S. Newrock. Experimental studies of coulomb drag between ballistic quantum wires. *J. Phys. Cond. Mat.*, 13:3389–3402, 2001.
- [70] H. Noh, S. Zelakiewicz, T. J. Gramila, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Phonon-mediated drag in double-layer two-dimensional electron systems.
- [71] M. C. Bønsager, K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, and A. H. MacDonald. Frictional drag between quantum wells mediated by phonon exchange.
- [72] S. M. Badalyan, U. Rössler. Frictional drag between spatially separated two-dimensional electron gases mediated by virtual-phonon exchange.

- [73] O. E. Raichev. Phonon-mediated drag between one-dimensional electron systems. *Phys. Rev. B*, 64:35324–35333, 2001.
- [74] M. C. Bonsager, K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, and A.-P. Jauho. Magneto-coulomb drag: Interplay of electron-electron interactions and landau quantization. *Phys. Rev. Lett.*, 77:1366–1369, 1996.
- [75] M. C. Bonsager, K. Flensberg, B. Y.-K. Hu, and A.-P. Jauho. Frictional coulomb drag in strong magnetic fields. *Phys. Rev. B*, 56:10314–10325, 1997.
- [76] A. Kamenev and Y. Oreg. Coulomb drag in normal metals and superconductors: Diagrammatic approach. *Phys. Rev. B*, 52:7516–7527, 1995.
- [77] B. Y. K. Hu. Can hall drag be observed in coulomb coupled quantum wells in a magnetic field? *Phys. Scripta*, T69:170–173, 1997.
- [78] I. Zutic, J. Fabian, and S. Das Sarma. Spintronics: Fundamentals and applications. *Rev. Mod. Phys.*, 76:323–410, 2004.
- [79] I. DAmico and G. Vignale. Theory of spin Coulomb drag in spin-polarized transport. *Phys. Rev. B*, 62:4853–4857, 2000.
- [80] C.P. Weber, N. Gedik, J. E. Moore, J. Orenstein, J. Stephens, and D. D. Awschalom. Observation of spin Coulomb drag in a two-dimensional electron gas. *Nature*, 437:1330–1334, 2005.
- [81] R. Landauer. Spatial variation of currents and fields due to localized scatterers in metallic conduction. *IBM J. Res. Develop.*, 1:223–231, 1957.
- [82] R. Landauer. Conductance determined by transmission: probes and quantised constriction resistance. *J. Phys.: Cond. Matter*, 1:8099–8120, 1989.
- [83] L. G. C. Rego, G. Kirczenow. Quantized thermal conductance of dielectric quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 81:232–235, 1998.
- [84] P. Streda. Quantized thermopower of a channel in the ballistic regime. *J. Phys.: Cond. Matter*, 1:1025–1027, 1989.

- [85] И. О. Кулик, А. Н. Омелянчук, И. Г. Тулузов. Кинетическая индуктивность точечных контактов между нормальными металлами. *ФНТ*, 8:769–773, 1982.
- [86] С. Т. Павлов, Ю. А. Фирсов. Переворачивающее спин взаимодействие электронов с оптическими фононами в полупроводниках. *ФТТ*, 7:2634–2647, 1965.
- [87] С. Т. Павлов, Ю. А. Фирсов. О спин-фононном взаимодействии электронов и осцилляциях продольного магнетосопротивления в полупроводниках. *ФТТ*, 9:1780–1793, 1967.
- [88] I. M. Tsidilkovskii, M. M. Aksel'rod, and S. I. Uritskii. Spin-magnetophonon resonance in semiconductors. *Phys. Status Solidi*, 12:667–678, 1965.
- [89] Дж. Займан. *Электроны и фононы*. Издательство иностранной литературы, Москва, 1962. 488 с.
- [90] J. Rammer and H. Smith. Quantum field-theoretical methods in transport theory of metals. *Rev. Mod. Phys.*, 58:323–359, 1986.
- [91] M. Lindberg and S. W. Koch. Effective Bloch equations for semiconductors. *Phys. Rev. B*, 38:3342–3350, 1988.
- [92] H. Haug. Interband quantum kinetics with lo-phonon scattering in a laser-pulse-excited semiconductor. theory. *Phys. Status Solidi B*, 173:139–148, 1992.
- [93] A. V. Kuznetsov. Interaction of ultrashort light pulses with semiconductors: Effective Bloch equations with relaxation and memory effects. *Phys. Rev. B*, 44:8721–8744, 1991.
- [94] M. I. Muradov. Femtosecond photon echo in semiconductors. Diagrammatic approach. *ФТТ*, 37:2293–2308, 1995.
- [95] H. Haug, A.-P. Jauho. Quantum kinetics in transport and optics of semiconductors. In *Springer Series in Solid-State Sciences*, page 315. 1996.
- [96] C. H. Henry. Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE Journ. Quant. Electr.*, QE-18:259–264, 1982.

- [97] А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике*. Гос. Изд. Физ.-мат. литературы, Москва, 1962. 444 с.
- [98] S. V. Gantsevich, V. L. Gurevich, M. I. Muradov, and D. A. Parshin. Theory of femtosecond photon echo decay in semiconductors. *Phys. Rev. B*, 52:14006–14019, 1995.
- [99] R. Katilius, S. V. Gantsevich, V. D. Kagan, and M. I. Muradov. Fluctuations in non-equilibrium electron gas: Effect of quantum statistics. *Fluct. Noise Lett.*, 9:373–385, 2010.
- [100] R. Katilius, S. V. Gantsevich, V. D. Kagan, and M. I. Muradov. Theory of fluctuations in non-equilibrium fermi gas. *Sol.St. Comm.*, 149:1209–1211, 2009.
- [101] Katilius R., Gantsevich S. V., Kagan V. D., Muradov M. I., Ramonas M., and Rudan M. Correlation-fluctuation effects in non-equilibrium quantum gas. In Basso G. Macucci, M., editor, *Noise and Fluctuations, Proc. of 20th International Conference (ICNF 2009, Pisa, Italy)*, volume AIP-CP1129, pages 9–12. Melville, New York, 2009.
- [102] Ламперт М., Марк П. *Инжекционные токи в твердых телах*. Мир, Москва, 1973.
- [103] Мотт Н. и Герни Р. *Электронные процессы в ионных кристаллах*. Изд-во иностр. лит., Москва, 1950.
- [104] Э. И. Адирович. Электрические поля и токи в диэлектриках. *ФТТ*, 2:1410–1422, 1960.
- [105] А. Н. Зюганов, С. В. Свечников. *Инжекционно-контактные явления в полупроводниках*. Наук. думка, Киев, 1981.
- [106] К. Е. Nagaev. Comment on "universality of the 1/3 shot-noise suppression factor in nondegenerate diffusive conductors". *Phys. Rev. Lett.*, 83:1267, 1999.
- [107] В. Л. Гуревич и Р. Катилюс. К теории горячих электронов в анизотропном полупроводнике. *ЖЭТФ*, 49:1145–1156, 1965.
- [108] Ш. М. Коган и А. Я. Шульман. Электрические флуктуации в плазме твердого тела в сильном электрическом поле. *ФТТ*, 9:2259–2264, 1967.

- [109] Пикус Г. Е. *Основы теории полупроводниковых приборов*. Наука, Москва, 1965. 448 с.
- [110] А. И. Ансельм. *Введение в теорию полупроводников*. Наука, Москва, 1978. 616 с.
- [111] В. В. Степанов. *Курс дифференциальных уравнений*. Физматгиз, Москва, 1959. 468 с.
- [112] C. Erginsoy. Neutral impurity scattering in semiconductors. *Phys. Rev.*, 79:1013–1014, 1950.
- [113] V. F. Gantmacher and Y. B. Levinson. Carrier scattering in metals and semiconductors. In V. M. Agranovich and A. A. Maradudin, editors, *Modern Problems in Condensed Matter Sciences*, page 459. 1987.
- [114] T. González, C. González, J. Mateos, D. Pardo, L. Reggiani, O. M. Bulashenko, and J. M. Rubí. Reply to comment on "Universality of the 1/3 shot-noise suppression factor in nondegenerate diffusive conductors". *Phys. Rev. Lett.*, 83:1268, 1999.
- [115] M. I. Muradov. Theory of fluctuations around a nonequilibrium state maintained by interband optical and driving electric field in semiconductors. *Phys. Rev. B*, 58:12883–12898, 1998.
- [116] H. Nyquist. Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32:110–113, 1928.
- [117] Y. Imry. Directions in condensed matter physics. In G. Grinstein and G. Mazenko, editors, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, volume 101. World Scientific, Singapore, 1986.
- [118] Büttiker M. Four-terminal phase-coherent conductance. *Phys. Rev. Lett.*, 57:1761–1764, 1986.
- [119] G. Vignale and A. H. MacDonald. Drag in paired electron-hole layers. *Phys. Rev. Lett.*, 76:2786–2789, 1996.
- [120] B. Y.-K. Hu. Prospecting for the superfluid transition in electron-hole coupled quantum wells using coulomb drag. *Phys. Rev. Lett.*, 85:820–823, 2000.

- [121] V. Braude and A. Stern. Coulomb drag between a metal and a wigner crystal. *Phys. Rev. B*, 64:115431–115431–8, 2001.
- [122] И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1963. 1108 с.
- [123] K. Hubner and W. Shockley. Transmitted phonon drag measurements in silicon. *Phys. Rev. Lett.*, 4:504–505, 1960.
- [124] P. M. Solomon, P. J. Price, D. J. Frank, and D. C. La Tulipe. New phenomena in coupled transport between 2d and 3d electron-gas layers. *Phys. Rev. Lett.*, 63:2508–2511, 1989.
- [125] T. J. Gramila, J. P. Eisenstein, A. H. MacDonald, L. N. Pfeiffer, and K. W. West. Mutual friction between parallel two-dimensional electron systems. *Phys. Rev. Lett.*, 66:1216–1219, 1991.
- [126] U. Sivan, P. M. Solomon, and H. Shtrikman. Coupled electron-hole transport. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1196–1199, 1992.
- [127] M. Yamamoto, M. Stopa, Y. Tokua, Y. Hirayama, and S. Tarucha. Coulomb drag between quantum wires: magnetic field effects and negative anomaly. *Physica E*, 12:726–729, 2002.
- [128] P. Debray, V. Gurevich, R. Klesse, and R. S. Newrock. Coulomb drag between ballistic one-dimensional electron systems. *Semicond. Sci. Technol.*, 17:R21–R34, 2002.
- [129] J. Peguiron, C. Bruder, and B. Trauzettel. Temperature dependence of coulomb drag between finite-length quantum wires. *Phys. Rev. Lett.*, 99:086404–086407, 2007.
- [130] H. Totland, Y. M. Galperin, V. L. Gurevich. Phonon generation by current-carrying nanostructures. *Phys. Rev. B*, 59:2833–2840, 1999.
- [131] Т. Андо, А. Фаулер, Ф. Стерн. *Электронные свойства двумерных систем*. Мир, Москва, 1985. 416 с.
- [132] T. Novotny and B. Velicky. Electronic sliding friction of atoms physisorbed at superconductor surface. *Phys. Rev. Lett.*, 83:4112–4115, 1999.

- [133] A. I. Volokitin and B. N. J. Persson. The frictional drag force between quantum wells mediated by a fluctuating electromagnetic field. *J. Phys.: Condens. Matter*, 13:859–873, 2001.
- [134] N. A. Mortensen, K. Flensberg, and A. Jauho. Mesoscopic fluctuations of coulomb drag between quasiballistic one-dimensional wires. *Phys. Rev. B*, 65:085317–085326, 2002.
- [135] N. A. Mortensen, K. Flensberg, and A. Jauho. Coulomb drag in coherent mesoscopic systems. *Phys. Rev. Lett.*, 86:1841–1844, 2001.
- [136] B. N. Narozhny and I. L. Aleiner. Mesoscopic fluctuations of the coulomb drag. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5383–5386, 2000.
- [137] E. N. Bogachek, M. Jonson, R. I. Shekhter and T. Swahn. Discrete electronic transport through a microwire in a longitudinal magnetic field. *Phys. Rev. B*, 50:18341–18349, 1994.
- [138] Л. С. Дубинская. Отрицательное продольное магнетосопротивление при рассеянии на ионизованных примесных центрах. *ЖЭТФ*, 56:801–812, 1969.
- [139] Ivchenko E. L., Kiselev A. A., and M. Willander. Electronic g factor in biased quantum wells. *Solid State Commun.*, 102:375–378, 1997.
- [140] V. V. Afonin and V. Yu. Petrov. BKT phase in systems of spinless strongly interacting one-dimensional fermions. *ЖЭТФ*, 134:637–659, 2008.
- [141] V. V. Afonin, V. L. Gurevich, and V. Yu. Petrov. Spontaneous symmetry breaking in a system of strongly interacting multicomponent fermions (electrons with spin and conducting nanotubes). *ЖЭТФ*, 135:969–980, 2009.
- [142] В. А. Сабликов, Б. С. Щамхалова. Эффект кулоновского взаимодействия при когерентном транспорте электронов в квантовых нитях. *Письма в ЖЭТФ*, 67:184–189, 1998.
- [143] V. A. Sablikov and B. S. Shchamkhalova. Electron transport in a quantum wire with realistic coulomb interaction. *Phys. Rev. B*, 58:13847–13885, 1998.

- [144] V. V. Ponomarenko. Frequency dependences in transport through a tomonaga-luttinger liquid wire. *Phys. Rev. B*, 54:10328–10331, 1996.
- [145] В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. *Сборник задач по электродинамике*. Наука, Москва, 1970. 504 с.
- [146] В. Л. Гуревич. Heat generation by ballistic Landauer resistor. *Письма в ЖЭТФ*, 63:61–66, 1996.
- [147] V. L. Gurevich. Heat generation by electric current in nanostructures. *Phys. Rev. B*, 55:4522–4529, 1997.
- [148] V. L. Gurevich and M. I. Muradov. Spatial distribution of joule heat in nanostructures. *J. Phys.: Condens. Matt.*, 18:11217–11232, 2006.
- [149] V. L. Gurevich, V. I. Kozub, and M. I. Muradov. Dynamical response of nanostructures and joule heat release. *J. Phys.: Condens. Matt.*, 23:405302–405310, 2011.
- [150] В. Л. Гуревич, М. И. Мурадов. Выделение джоулева тепла при прохождении тока в наноструктурах. *ФТТ*, 54:625–641, 2012.
- [151] I. O. Kulik, A. N. Omelyanchouk, and R. I. Shekhter. Electron-phonon coupling and phonon generation in normal metal microbridges. *Sol. St. Comm.*, 23:301–303, 1977.
- [152] M. Rokni and Y. Levinson. Joule heat in point contacts. *Phys. Rev. B*, 52:1882–1889, 1995.
- [153] И. О. Кулик, А. Н. Омелянчук, Р. И. Шехтер. Электропроводность точечных микроконтов и спектроскопия фононов в нормальных металлах. *ФНТ*, 3:1543–1558, 1977.
- [154] И. О. Кулик, Р. И. Шехтер, А. Г. Шкорбатов. Микроконтактная спектроскопия электрон-фононного взаимодействия в металлах с малой длиной свободного пробега. *ЖЭТФ*, 81:2126–2141, 1981.
- [155] I. F. Itskovich, I. O. Kulik, and R. I. Shekhter. Point-contact spectroscopy of electron-phonon interaction in semiconductors. *Solid State Comm.*, 50:421–424, 1984.

- [156] И. Б. Левинсон. Распределение потенциала в квантовом микроконтакте. *ЖЭТФ*, 95:2175–2190, 1989.
- [157] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Электродинамика сплошных сред*. Наука, Москва, 1982. 621 с.
- [158] М. М. Бредов, В. В. Румянцев, И. Н. Топтыгин. *Классическая электродинамика*. Наука, Москва, 1985. 400 с.
- [159] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Статистическая физика, Часть 1*. Наука, Москва, 1976. 584 с.
- [160] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Гидродинамика*. Наука, Москва, 1986. 736 с.
- [161] V. L. Gurevich. Residual resistance and joule heat generation in bulk samples and nanostructures. *ФТП*, 42:931–933, 2008.
- [162] A. G. Aronov, Yu. M. Galperin, V. L. Gurevich, and V. I. Kozub. Nonequilibrium properties of superconductors (transport equation approach). In D. N. Langenberger and A. I. Larkin, editors, *Nonequilibrium Superconductivity*, pages 325–376. Elsevier, 1986. Результаты для нормальных металлов получаются из уравнений, приведенных в этой работе для сверхпроводников, предельным переходом $\Delta \rightarrow 0$ (где Δ сверхпроводящая щель).
- [163] В. Л. Гуревич. *Кинетика фононных систем*. Наука, Москва, 1980. 400 с.
- [164] А. А. Абрикосов. *Основы теории металлов*. Наука, Москва, 1987. 520 с.
- [165] S. V. Gantsevich, V. L. Gurevich, and R. Katilius. Diffusion near nonequilibrium steady state. *Phys. Cond. Matter.*, 18:165–178, 1974.
- [166] Л. И. Глазман, Г. В. Лесовик, Д. Е. Хмельницкий, Р. И. Шехтер. Безотражательный квантовый транспорт и фундаментальные ступени баллистического сопротивления в микросужениях. *Письма в ЖЭТФ*, 48:218–220, 1988.
- [167] V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and K. Hess. Phonon-assisted ballistic resistance. *Phys. Rev. B*, 51:5219–5226, 1995.

- [168] V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and K. Hess. Phonon-enhanced Landauer resistance. *J. Phys.: Condens. Matter*, 6:8363–8371, 1994.
- [169] J. P. Leburton. Optic-phonon-limited transport and anomalous carrier cooling in quantum-wire structures. *Phys. Rev. B*, 45:11022–11030, 1995.
- [170] V. L. Gurevich, V. I. Kozub, and M. I. Muradov. Nonlocal dynamical response of a ballistic nanobridge. *J. Phys.: Condens. Matter*, 22:025304–025312, 2010.
- [171] A. Szafer and A. D. Stone. Theory of quantum conduction through a constriction. *Phys. Rev. Lett.*, 62:300–303, 1989.
- [172] H. Pothier, S. Gueron, N. O. Birge, D. Estive, and M. H. Devoret. Energy distribution function of quasiparticles in mesoscopic wires. *Phys. Rev. Lett.*, 79:3490–3493, 1997.
- [173] V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and G. J. Iafrate. Electrophonon resonances in mesoscopic structures. *Phys. Rev. Lett.*, 75:1352–1355, 1995.
- [174] V. B. Pevzner, V. L. Gurevich, and E. W. Fenton. Reflection of electrons and phonon-assisted Landauer resistance. *Phys. Rev. B*, 51:9465–9475, 1995.
- [175] И. К. Янсон. Нелинейные эффекты в электропроводности точечных контактов и электрон-фононное взаимодействие в нормальных металлах. *ЖЭТФ*, 66:1035–1050, 1974.
- [176] V. L. Gurevich, V. B. Pevzner, and G. J. Iafrate. Resonant optical-phonon generation in nanowires. *J. Phys.: Condens. Matter*, 7:L445–L450, 1995.
- [177] В. Л. Гуревич, Ю. А. Фирсов. К теории электропроводности полупроводников в магнитном поле. *ЖЭТФ*, 40:199–213, 1961.
- [178] Yu. A. Firsov, V. L. Gurevich, R. V. Parfeniev, and I. M. Tsidil'kovskii. Magnetophonon resonance. In G. Landwehr and E. I. Rashba, editors, *Landau Level Spectroscopy*, pages 1181–1302. Elsevier, Amsterdam, 1991.

- [179] А. В. Комаров, С. М. Рябченко, О. В. Терлецкий, И. И. Жеру, Р. Д. Иванчук. Магнетооптические исследования и двойной оптико-магнитный резонанс экситонной полосы в CdTe:Mn^{2+} . *ЖЭТФ*, 73:608–618, 1977.
- [180] Gaj J. L., Galazka R. R., and Nawrocki M. Giant exciton Faraday rotation in $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ mixed crystals. *Solid State Commun.*, 25:193–195, 1978.
- [181] Bartholomew D. U., Furdyna J. K., and Ramdas A. K. Interband Faraday rotation in diluted magnetic semiconductors: $\text{Zn}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$ and $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$. *Phys. Rev. B*, 34:6943–6950, 1986.
- [182] A. K. Bhattacharjee, Fishman G., and Coqblin B. Virtual bound state model for the exchange interaction in semimagnetic semiconductors such as $\text{Cd}_{1-x}\text{Mn}_x\text{Te}$. *Physica B+C*, 117-118:449–451, 1983.
- [183] B. E. Larsen, K. C. Hass, H. Ehrenreich, and A. E. Carlsson. Theory of exchange interactions and chemical trends in diluted magnetic semiconductors. *Phys. Rev. B*, 37:4137–4154, 1988.
- [184] Bhattacharjee A. K. Magneto-optics near the L point of the brillouin zone in semimagnetic semiconductors. *Phys. Rev. B*, 41:5696–5700, 1990.
- [185] Л. И. Коровин, С. Т. Павлов. О роли оптических фононов в междузонном магнетооптическом поглощении полупроводников. *ЖЭТФ*, 53:1708–1716, 1967.
- [186] S. Das Sarma, A. Madhukar. Study of electron-phonon interaction and magneto-optical anomalies in two-dimensionally confined systems. *Phys. Rev. B*, 22:2823–2836, 1980.
- [187] И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, С. Т. Павлов. Волновые функции и энергии магнетопляронов в полупроводниковых квантовых ямах. *ФТТ*, 47:1704–1710, 2005.
- [188] И. Г. Ланг, Л. И. Коровин, С. Т. Павлов. Отражение и поглощение света широкой квантовой ямой при наличии двух близких уровней возбуждения. *ФТТ*, 48:1693–1703, 2006.

- [189] N. Mori, T. Ando. Electron–optical-phonon interaction in single and double heterostructures. *Phys. Rev. B*, 40:6175–6188, 1989.
- [190] Строшио М., Дутта М. *Фононы в наноструктурах*. Физматлит, Москва, 2006. 320 с.
- [191] G. Dresselhaus. Spin-orbit coupling effects in zinc blend structures. *Phys. Rev.*, 100:580–586, 1955.
- [192] M. Averous. Background on semimagnetic semiconductors. In M. Averous, M. Balkanski, editor, *Semimagnetic semiconductors and diluted magnetic semiconductors*, volume 55, pages 1–23. Plenum Press, New York, 1991.
- [193] Г. Л. Бир, Г. Е. Пикус. *Симметрия и деформационные эффекты в полупроводниках*. Наука, Москва, 1972. 584 с.
- [194] J. P. Lascaray. Magneto-optic properties of wide gap $\text{II}_{1-x}\text{Mn}_x\text{VI}$ semimagnetic semiconductors. In M. Averous, M. Balkanski, editor, *Semimagnetic semiconductors and diluted magnetic semiconductors*, volume 55, pages 169–190. Plenum Press, New York, 1991.
- [195] J. M. Luttinger. Quantum theory of cyclotron resonance in semiconductors: General theory. *Phys. Rev.*, 102:1030–1040, 1956.
- [196] R. Winkler. Rashba spin splitting in two-dimensional electron and hole systems. *Phys. Rev. B*, 62:4245–4248, 2000.
- [197] L. C. Andreani, F. Tassone, and F. Bassani. Radiative lifetime of free excitons in quantum wells. *Sol. St. Commun.*, 77:641–645, 1991.
- [198] Е. Л. Ивченко. Экситонные поляритоны в периодической структуре с квантовыми ямами. *ФТТ*, 33:2388–2393, 1991.
- [199] С. В. Гапоненко, Н. Н. Розанов, Е. Л. Ивченко, А. В. Федоров, А. М. Бонч-Бруевич, Т. А. Вартамян, С. Г. Пржибельский. *Оптика наноструктур*. Недра, СПб, 2005. 326 с.

- [200] Л. П. Питаевский. О свойствах спектра элементарных возбуждений вблизи порога распада возбуждений. *ЖЭТФ*, 36:1168–1184, 1959.
- [201] И. Б. Левинсон, А. Ю. Матулис, Л. М. Щербаков. Спектр полярона в магнитном поле. Связанные состояния электрона и фонона. *ЖЭТФ*, 61:843–858, 1971.
- [202] И. Б. Левинсон. Связанные состояния электрона и фонона в сильном магнитном поле. *Письма в ЖЭТФ*, 12:496–499, 1970.
- [203] D. Gammon, E. S. Snow, B. V. Shanabrook, D. S. Katzer, and D. Park. Fine structure splitting in the optical spectra of single gaas quantum dots. *Phys. Rev. Lett.*, 76:3005–3008, 1996.
- [204] Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. *Методы теории функций комплексного переменного*. Гостехиздат, М.-Л., 1951. 736 с.
- [205] F. Stern. Polarizability of a two-dimensional electron gas. *Phys. Rev. Lett.*, 18:546–548, 1967.
- [206] D. A. Dahl and L. J. Sham. Electrodynamics of quasi-two-dimensional electrons. *Phys. Rev. B*, 16:651–661, 1977.