

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Султанов Айдар Наильевич

**ИССЛЕДОВАНИЕ ФОТОННОГО ТРАНСПОРТА В ГИБРИДНЫХ ТВЕРДОТЕЛЬНЫХ
НАНОСТРУКТУРАХ, СОДЕРЖАЩИХ ИСКУССТВЕННЫЕ АТОМЫ**

Специальность 01.04.07 – Физика конденсированного состояния

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент
Гринберг Яков Симхонович

Новосибирск – 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ГЛАВА 1 ОБЗОР ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО ОСНОВНЫМ МЕТОДАМ ОПИСАНИЯ ТРАНСПОРТА ФОТОНОВ	15
1.1 Обзор существующих методов описания фотонного транспорта в квантовых твердотельных структурах	15
1.2 Метод неэрмитового гамильтониана: происхождение и применение	20
ГЛАВА 2 СИСТЕМЫ С ОДНИМ ИСКУССТВЕННЫМ АТОМОМ	28
2.1 Система волновод-кубит-резонатор с N фотонами.....	28
2.1.1 Расчет матрицы эффективного гамильтониана.....	31
2.1.2 Волновая функция и получение коэффициентов прохождения.....	36
2.2 Релаксация кубита в многофотонном резонаторе.....	60
2.2.1 Неэрмитовый гамильтониан в другом представлении	63
2.3 Экспериментальная часть.....	74
2.4 Выводы к главе 2.....	88
ГЛАВА 3 СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИСКУССТВЕННЫМИ АТОМАМИ	90
3.1 Два кубита в открытом волноводе	90
3.2 Два кубита в открытом волноводе: учет затуханий кубитов.....	104
3.3 Влияние общего канала распада на транспортные характеристики.....	112
3.4 Два кубита и два резонатора.....	117
3.5 Выводы к главе 3.....	125
ГЛАВА 4 РАЗРАБОТКА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ С КВАНТОВЫМ УРОВНЕМ ШУМОВ ...	127
4.1 Теоретическое обоснование возможности усиления	128
4.1.1 Обоснование необходимости фазовой подстройки	135
4.2 Расчет и обоснование конструкции усилителя на пленках	136
4.3 Расчет и обоснование конструкции усилителя на контактах Джозефсона.....	143
4.4 Численное моделирование полученных структур и проверка полосы и усиления... ..	155
4.5 Методика проведения эксперимента	157
4.6 Выводы к главе 4.....	160
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	162
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	164
Приложение А	173

<i>Формулы коэффициентов прохождения и отражения</i>	173
Приложение Б	174
<i>Вычисление матрицы эффективного гамильтониана и амплитуд перехода между подпространствами P и Q</i>	174
Приложение В	175
<i>Расчет элементов K матрицы и матрицы T</i>	175
Приложение Г	179
<i>Решение системы уравнений для матрицы плотности</i>	179

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы

Одним из главных научных открытий XX века стало (наряду со специальной теорией относительности) возникновение квантовой механики, которое началось с решения проблемы излучения абсолютно черного тела. Естественно, любая теория, развившая свою теоретическую базу, в конечном итоге приходит к различным практическим реализациям. Плодами развития квантовой теории можно по праву считать множество современных приборов и устройств, начиная с лазеров, электронных микроскопов, магнитно-резонансных томографов, жидкокристаллических дисплеев (равно, как и всю современную электронику) и заканчивая рождением или развитием, таких областей науки как химия, теория твердого тела, спинтроника, квантовая оптика и т.д.

Однако, еще в самом начале становления квантовой механики, в рамках ее концептуальных основ, возникли два парадокса, нашедших к настоящему времени экспериментальное подтверждение:

1. Согласно основным положениям квантовой механики, характеристика квантовой системы не имеет определенного значения до момента измерения, то есть нельзя утверждать, что это значение существует до измерения и не зависит от него. Мысленный эксперимент, получивший название «Кот Шрёдингера», является самым знаменитым примером данного парадокса, следующего из приведенного выше утверждения.

2. Другим следствием квантовой механики является принципиальная возможность существования так называемых запутанных объектов. Воздействие на один из таких объектов приводит к мгновенному изменению характеристик всех остальных независимо от расстояния, и даже при отсутствии взаимодействия между ними (после запутывания). Данный парадокс был впервые сформулирован Эйнштейном, Подольским и Розеном и получил название ЭПР - парадокса.

Оказалось, что данные парадоксы лежат в основе реализации квантовых алгоритмов, например для решения целого класса задач, для которых невозможно (или, по крайней мере, к настоящему моменту неизвестно как) построить алгоритм, позволяющий за разумное время найти решение. К такому классу задач можно отнести, например, задачи с большим объемом входных данных. К таким алгоритмам относятся алгоритмы Шора факторизации больших чисел на простые сомножители и Гровера, поиск в больших базах данных, предложенные в

1994 и 1996 годах, соответственно. Более того, к особому классу задач относится моделирование сложной квантовой системы, которая априори не может быть реализована на классическом компьютере.

Разработка квантовых алгоритмов для решения указанного класса задач явилась мощным стимулом развития технологической базы для создания квантовых процессоров, которое продолжается и по сей день. Существует несколько физических объектов на роль базового элемента квантового процессора-квантового бита (кубита). Это атомы рубидия (оптический диапазон), квантовые точки, вакансии азота в кремниевых подложках, сверхпроводниковые джозефсоновские кубиты и т.д. Их объединяет тот факт, что в упрощенной модели они могут рассматриваться как двухуровневая система, и если атомы рубидия представляют собой естественный атом, то параметры остальных могут быть заданы технологически и, по этой причине, называются искусственными атомами.

В современных демонстрируемых квантовых компьютерах, элементная база которых основана на сверхпроводниковых джозефсоновских переходах, процедуры записи и считывания информации, а также манипуляции с ней, при реализации квантовых вычислений основаны на взаимодействии кубитов с единичными фотонами, энергии которых лежат в микроволновом частотном диапазоне. Из этого вытекает проблема создания однофотонных детекторов и источников в микроволновом диапазоне, и к настоящему моменту она не решена полностью. Поэтому при экспериментальных исследованиях используются классические генераторы микроволнового излучения при малых мощностях, при которых среднее число фотонов в резонаторе лежит в диапазоне от 0.1 до нескольких десятков. Даже в таком приближении, уровни регистрируемых сигналов ничтожно малы и требуются либо статистические измерения, либо использование усилителей с шумом на уровне одного кванта энергии. Хотя успехи в этом направлении безусловно есть, например, реализация *single-shot readout*-а с использованием параметрического усилителя.

Другая проблема состоит в масштабируемости предлагаемых схем. По общему мнению, для создания полноценного квантового процессора требуется несколько сот кубитов. Демонстрируемые в настоящее время, процессоры с 50 кубитами требуют порядка 1000 дополнительных кубитов для коррекции ошибок измерений. Как правило, свойства многокубитной системы строятся аддитивным путем из свойств одного элемента. Тем не менее, поскольку в квантовых измерениях фазовые свойства играют важнейшую роль, когда расстоянием между элементами нельзя пренебрегать, общие свойства системы не являются простым линейным следствием из свойств единичного элемента и модифицируются. Говоря по простому, существующая аналитика для многокубитных систем использует марковское

приближение, когда взаимодействие единичного фотона с данным кубитом не содержит в себе информацию о его взаимодействии с предыдущими кубитами

Вычисления на квантовом процессоре представляют собой измерение эволюции волновой функции квантовой системы. Но для начала работы с квантовой системой необходимо уметь определять ее параметры путем простых измерений. Существующие аналитические решения хорошо работают в марковском приближении и в приближении единичного фотона, и позволяют охарактеризовать систему путем измерения ее транспортных свойств (однотоновая спектроскопия, двухтоновая спектроскопия позволяют определить рабочие точки для кубита, найти его уровни энергии, оценить ангармоничность и т.д.) и сопоставления их с аналитическими выражениями. Естественно, что если вводимые предположения оказываются нарушены, такие аналитические выражения не могут быть использованы для определения параметров системы.

Работы по решению этих проблем могут вестись в различных направлениях: например, улучшение измерительных оборудования и методов, разработка математических методов коррекции результатов измерений, или анализ системы вне озвученных приближений и использования свойств, которые могут из этого вытекать. Последняя идея не нова, постепенно появляются работы, где исследуются свойства кубитов вне двухуровневого приближения, а с использованием преимуществ, которые дает наличие третьего уровня (см. [1] и ссылки в ней). Более того, кубиты могут быть использованы не только как базовый элемент квантового процессора, но и как элемент других квантовых цепей (в частности, метаматериалы). Изучение свойств систем, содержащих кубиты, актуально и с точки зрения создания квантового процессора, и с точки зрения получения характеристик квантовых цепей на их основе, и с точки зрения изучения возможных эффектов при взаимодействии микроволнового излучения с ними.

К настоящему времени был проведен ряд экспериментальных работ, результаты которых согласуются с теоретическими результатами на основе формализма квантовой оптики. Продемонстрирована возможность усиления в системе, содержащей трехуровневый квантовый бит в открытом волноводе [1], триплет Моллоу и расщепление Отлера - Таунса в спектре отражения в системе кубит - открытый волновод [2;3]. На твердотельной системе продемонстрирован известный из нелинейной квантовой оптики эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности [4], предложено устройство микроволнового однофотонного роутера [5], продемонстрирован эффект группирования и разгруппирования микроволновых фотонов [6].

Результаты данных экспериментов хорошо согласуются с теоретическими расчетами, полученными в представлении матрицы плотности из квантовой оптики. Но работа со

сверхпроводниковыми кубитами, предполагает существенные отличия от объектов исследования в квантовой оптике, в частности искусственные атомы неизбежно обладают разбросом параметров. Также проведены эксперименты с двумя кубитами в открытом волноводе, разнесенными на некоторое расстояние друг от друга [7]. В этой работе было продемонстрировано не прямое взаимодействие между двумя разнесенными кубитами, обусловленное общим фотонным полем в открытом волноводе. В работе [8] исследовались динамические паразитные эффекты в системе с двумя кубитами (флюксонами) в одном волноводе. В ряде работ была продемонстрирована возможность считывания состояния нескольких кубитов методом дисперсионного считывания [9; 10; 11; 12]. Но во всех экспериментальных работах, за исключением [7] кубиты (или кубит + резонатор) находились на расстоянии друг от друга много меньше длины волны действующих сигналов. Тем не менее, как было продемонстрировано и исследовано в диссертационной работе, и в работе [7], наличие большого межкубитного расстояния может приводить к ряду интересных эффектов. Более того, как было сказано выше, в более крупных квантовых цепях с кубитами расстояниями между ними пренебрегать будет нельзя.

Также известен ряд экспериментальных работ с Ридберговскими атомами в микроволновых резонаторах [13; 14; 15], с квантовыми точками в фотонных кристаллах [16; 17; 18]. Однако, в отличие от реальных атомов, в случае с искусственными атомами, благодаря их большому дипольному моменту, возможна реализация режима сильной связи между кубитом и излучением. Данный режим позволил предложить реализацию нескольких устройств, таких как однофотонный ключ [19], квантовый элемент памяти и квантовые вентили [20; 21; 22; 23], что демонстрирует некоторые преимущества искусственных систем.

Для исследования транспорта микроволновых фотонов существует несколько различных теоретических подходов, берущих свое начало в квантовой оптике. Например, исследования транспорта микроволновых сигналов в одномерном волноводе с одним кубитом были выполнены в конфигурационном пространстве [22; 24-27], а также в рамках input-output формализма [28; 29]. Решение в конфигурационном пространстве дает аналитические выражения для рассеяния двухфотонных состояний с непрерывным спектром [30]. Методом input-output формализма была исследована динамика когерентных состояний, фоковских и сжатых состояний [29; 30; 31], а также получено решение для задачи рассеяния двух - и трехфотонных состояний на двухуровневой системе [32]. Данные методы кратко описаны в первой главе данной диссертации, где показано, что они приводят к громоздким вычислениям в ряде случаев (разные кубиты, многофотонные резонаторы и т.д.). Несмотря на то, что аналитическое выражение для коэффициента прохождения через однокубитную структуру было известно давно, результаты для двух и трех (идентичных) кубитов были опубликованы

относительно недавно [22; 26]. Более того, для однокубитной структуры в волноводе с нелинейной дисперсией было получено решение в работе [19]. Для случая N эквидистантных одинаковых кубитов, коэффициент прохождения может быть получен аналитически, при помощи метода из физики кристаллов с трансляционной симметрией [33], а также при помощи методов матричного анализа четырехполюсников [34].

Суммируя можно сказать, что описанные теоретические подходы к анализу данных систем имеют следующие ограничения:

- в основном они применимы для однофотонных случаев, в противном случае вычисления становятся громоздкими и нет возможности получить аналитические выражения, и используется численное решение;

- поскольку методы разработаны в рамках квантовой оптики, в исходном их виде в них отсутствует возможность учета неоднородности параметров элементов системы;

- использование марковского приближение, которое в некоторых случаях обходится с помощью задания специальных граничных условий;

- релаксация и декогеренция кубита в многокубитных структурах описывается с помощью оператора Линблада, описывающего два локальных некоррелирующих термостата, притом, что имеются результаты, показывающие, что наличие общего термостата может существенно повысить устойчивость запутанных состояний [35];

Таким образом, к настоящему времени отсутствуют аналитические методы позволяющие аналитически описать транспорт фотона с учетом разброса параметров, реально существующего в гибридных твердотельных квантовых структурах. Отсутствует устоявшийся и проверенный подход к описанию немарковских процессов, становящихся существенными с увеличением числа элементов систем. А также отсутствует аналитическое решение, позволяющее учесть релаксацию кубита, взаимодействующего с многофотонным резонатором.

Целью данной работы является развитие метода эффективного неэрмитового гамильтониана для расчета транспортных коэффициентов гибридных твердотельных квантовых цепей, содержащих искусственные атомы, при рассеивании на них фотона.

В соответствии с этим, **основными задачами** диссертационной работы являются:

1. Построение аналитической модели транспорта микроволнового фотона через гибридную структуру, содержащую один кубит и микроволновый резонатор, с произвольным числом фотонов, и определение влияния локального термостата на транспортные коэффициенты.

2. Построение аналитической модели транспорта микроволнового фотона через структуру, состоящую из двух резонаторов, расположенных на произвольном расстоянии друг от друга, в каждом из которых имеется по одному кубиту, при учете для каждого кубита, как общего, так и локальных каналов релаксации. Определение влияния расстояния между резонаторами на транспортные коэффициенты

3. Разработка аналитической модели переноса возбужденного состояния между двумя кубитами, разнесенными в пространстве одномерного открытого волновода, с учетом влияния декогеренции

4. Исследование распространения микроволнового излучения через цепочки нелинейных элементов (включая контакты Джозефсона и сильно неупорядоченные сверхпроводники) в копланарном волноводе и разработка методики проектирования топологии параметрического усилителя на основе данных нелинейных элементов.

Научная новизна. Научная новизна результатов, полученных в диссертации, заключается в следующем:

1. При исследовании транспорта микроволнового фотона через структуру, содержащую один искусственный атом и резонатор, содержащий произвольное число фотонов, обнаружено расщепление центрального пика триплета Моллоу при малом числе фотонов в резонаторе и получены аналитические выражения, позволяющие проанализировать влияние параметров системы на ее амплитудно-частотные характеристики.

2. Получены аналитические выражения, позволяющие определить как нелинейный штарковский сдвиг, так и сдвиг резонансной частоты в зависимости от числа фотонов с учетом релаксации кубита и добротности резонатора. Показано, что при определенных параметрах можно получить нелинейную зависимость этих сдвигов от числа фотонов даже при малом числе фотонов. Полученные выражения описывают тот факт, что увеличение числа фотонов приводит к нелинейному возрастанию релаксации кубита.

3. Обнаружены эффекты интерференции, проявляемые на частотных зависимостях коэффициентов прохождения и отражения, связанные с тем, что для двухкубитных структур оказывается значимым эффект запаздывания между взаимодействиями микроволнового фотона с кубитами на расстоянии, сравнимом с его длиной волны. Показано, что существенное влияние на транспорт микроволновых фотонов оказывает наличие общего нерадиационного канала распада. В общем виде транспортные коэффициенты значительно отличаются от ранее известных результатов (которые являются частными случаями полученного выражения), что связано с более полным учетом взаимодействия с термостатами, описывающими каналы нерадиационного распада.

4. Разработана методика проектирования сверхпроводниковых параметрических усилителей на основе контактов Джозефсона и сильно неупорядоченных сверхпроводников, и предложено три дизайна параметрических усилителей.

Теоретическое и практическое значение

Новые научные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационных исследований, могут быть использованы при дальнейшем развитии теории на случай многофотонного транспорта микроволновых фотонов и, в общем случае, могут быть обобщены и на случай оптического диапазона, поскольку использованные модели взаимодействия носят универсальный характер.

Полученные в диссертационной работе результаты позволят не только существенно сократить и упростить анализ экспериментальных данных, но также будут полезны при проектировании новой стремительно развивающейся элементной базы квантовых устройств и систем на основе одно- и двух кубитных структур. Более того, найденные зависимости позволяют, на этапе проектирования, произвести оценку основных характеристик ряда приборов, в которых используется лишь один кубит (роутер, ключ, детектор). и провести их оптимизацию для различных режимов работы, включая одно- и многофотонные режимы. На основании полученных в диссертации результатов предложен вариант простейшего однофотонного детектора микроволновых фотонов на базе однокубитной структуры с резонатором. Результаты, полученные при описании транспорта фотона через двухкубитные структуры с учетом локальных и общих термостатов, являются важными при их экспериментальном исследовании.

Ценность полученных аналитических решений обусловлена тем, что, во-первых, впервые решение получено для резонатора с произвольным числом фотонов, во-вторых, решения получены без использования марковских приближений, что приводит к появлению новых интерференционных эффектов. Практическую значимость имеет методика проектирования сверхпроводниковых параметрических усилителей. Предложено три варианта топологии параметрических усилителей, с подробным описанием этапов проектирования, покрывающие наиболее распространенную рабочую полосу частот квантовых твердотельных сверхпроводниковых цепей. Полученные результаты можно использовать в качестве целевой функции при оптимизации однокубитных структур с резонатором, как при их проектировании, так и при анализе экспериментальных данных. Данные результаты необходимо использовать при научно-обоснованной разработке квантовых твердотельных устройств с учетом реально существующих расстояний между его составными элементами и разброса параметров.

Положения, выносимые на защиту

1. Классический триплет Моллоу при малом числе фотонов в резонаторе модифицируется, приводя к спектру с четырьмя резонансами, что обусловлено особенностями гибридизации уровней в таком режиме. Зависимости положения резонансных уровней и их ширины от числа фотонов в резонаторе, которые описывается полученными аналитическими выражениями, соответствуют штарковскому эффекту.

2. Релаксация кубита в многофотонном резонаторе должна учитываться включением в рассматриваемую систему локального термостата. При этом получаемый результат отличается от модели Линдблада тем, что релаксация кубита входит в аналитические выражения транспортных коэффициентов как мнимая добавка к частоте Раби расщепления в резонансных частотах системы, а не к собственной частоте кубита. Также, в отличие от стандартной модели, зависимость коэффициентов прохождения от величины релаксации становится нелинейной.

3. В многокубитных структурах наличие расстояния между кубитами или резонаторами приводит к возникновению интерференционных эффектов, проявляемых в на амплитудно-частотных характеристиках транспортных коэффициентов. В частности, возникает Фано-резонанс в виде асимметричной характеристики. Интерференция волновых функций также определяет наличие суб- и сверхрадиантных эффектов, и вероятность переноса возбужденного состояния между двумя кубитами.

4. В двухкубитной структуре, влияние локальных и общего термостатов на транспортные коэффициенты существенно различается. Связь с общим термостатом приводит к появлению в недиагональных элементах эффективного гамильтониана системы мнимой добавки, в то время как локальные термостаты дают вклад только в диагональные. Поэтому распад возбужденных состояний кубитов в общий термостат определяется расстоянием между ними, учитываемом только во взаимодействии кубитов с микроволновым фотоном.

Методология и методы исследования

Теоретические результаты, представленные в настоящей диссертации, получены с использованием метода эффективного неэрмитового гамильтониана и общепринятых методов в теории электродинамики.

Личный вклад автора в получение результатов

Автором внесен определяющий вклад в получение основных результатов диссертационных исследований. Он активно участвовал в постановке и решении задач, в обсуждении и интерпретации результатов.

Апробация работы

Изложенные в диссертации результаты обсуждались на конференциях:

XI, XII, XIII Международная научно-техническая конференции «Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП)» (Новосибирск, 2016, 2014, 2012);

II, III, IV международные конференции "Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях» (Бердск 2013г., Бердск 2015, Иркутск, пос. Листвянка, 2017 г.);

XX и XXI международные симпозиумы «Нанозифика и наноэлектроника» (Нижний Новгород 2016, 2017);

International conference on quantum coherent phenomena at nanoscale (Montenegro, Petrovac, 2016);

16-ая Всероссийская школа семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (г. Екатеринбург 2015)

Результаты, составившие содержание диссертации, были получены при выполнении научно- исследовательских работ по следующим проектам

РФФИ 14-02-31601 мол_а «Экспериментальные и теоретические исследования квантовых свойств потоковых сверхпроводниковых квантовых битов, взаимодействующих с высокочастотным сверхпроводниковым копланарным резонатором при низких температурах» 2014-2015 г. (рук. Б.И. Иванов) Регистрационный номер №01201452950

Госзадание «Исследование квантовых свойств тонкопленочных твердотельных наноструктур» 2014-2016 гг. Проект № 3.338.2014/К (рук. Я. С. Гринберг). Регистрационный номер № 114102470062.

Проект РФФИ № 16-19-10069 «Когерентные свойства сверхпроводниковых кубитов» 2016-2018 гг. (рук. Е. В. Ильичев). Регистрационный номер № АААА-А16-116060950078-9.

Проект Фонда перспективных исследований (ФПИ) "Развитие и исследование эффективности использования низкотемпературной и СВЧ - электроники для измерения структур на основе сверхпроводящих кубитов". 2017-2018 гг. (рук. А. Г. Вострецов)

"Разработка технологии нанозлектрических и нанозлектромеханических систем и методов их измерений". Проект Минобрнауки № 02.740.11.5067 (2009-2010 гг.) (рук. Е. В. Ильичев). Регистрационный номер № 01200965493.

Интеграционный проект "Спектроскопия сверхпроводникового потокового квантового бита в квазидисперсионном режиме" (совместно с институтом Фотонных Технологий (г. Йена, Германия), 2016 г. (рук. Я. С. Гринберг). Регистрационный номер № АААА-А16-116041410292-5.

Интеграционный проект "Исследование эффекта усиления микроволнового сигнала при его взаимодействии со сверхпроводниковым потоковым квантовым битом". (совместно с институтом Фотонных Технологий (г. Йена, Германия), 2014 г. (рук. Я. С. Гринберг). Регистрационный номер № 01201463199.

Публикации

Оригинальные результаты по теме диссертации опубликованы в 19 научных работах, в том числе 11 материалов конференции и препринтов, а также 8 статей в международных и Российских журналах из списка ВАК.

Степень достоверности

Результаты, полученные в рамках данной диссертации, не противоречат имеющимся в литературе данным, и в предельных случаях сводятся к общеизвестным результатам. Достоверность полученных результатов подтверждена публикацией основных результатов диссертации в рецензируемых международных и отечественных журналах, входящих в наукометрические базы данных Web of Science и SCOPUS.

Структура и объём диссертации

Диссертация состоит из введения, 4 глав и заключения, списка использованной литературы из 106 наименований и 4 приложений. Общий объем работы составляет 181 страницы и включает 63 рисунка, 4 приложения и 5 таблиц.

В **Главе 1** проведен аналитический обзор по существующим методам описания транспорта фотонов в квантовых системах, а также подробно разобран метод неэрмитового гамильтониана, являющийся основным методом в рамках данной работы, на примере однокубитной структуры.

В **Главе 2** решена *первая* задача. При исследовании транспорта микроволнового фотона через структуру, содержащую один искусственный атом и резонатор, с произвольным числом фотонов, обнаружено расщепление центрального пика триплета Моллоу, при малом числе фотонов в резонаторе, и получены аналитические выражения, позволяющие оценить влияние параметров системы на ее амплитудно-частотные характеристики. Также были получены аналитические выражения, позволяющие определить, как нелинейный штарковский сдвиг, так и сдвиг резонансной частоты от числа фотонов с учетом релаксации и связи с внешним континуумом состояний. Показано, что при определенных параметрах, даже при малом числе фотонов, можно получить нетривиальную нелинейную зависимость этих сдвигов от числа фотонов. Более того, полученные выражения описывают тот факт, что увеличение числа фотонов приводит к нелинейному возрастанию постоянной релаксации кубита.

В **Главе 3** решены *вторая* и *третья* задачи. Были получены аналитические выражения, описывающие проявление интерференции на транспортных характеристиках фотона, связанной

с тем, что вне марковских приближений для двухкубитных структур, оказывается значимым эффект запаздывания между взаимодействиями микроволнового фотона с кубитами, на расстоянии сравнимом с его длиной волны. Показано, что полученные аналитические выражения эффективно описывают группировку (разгруппировку) фотонов в зависимости от условий интерференции. Также было показано, что существенное влияние на транспорт микроволновых фотонов оказывает наличие общего нерадиационного канала распада. В общем виде транспортные коэффициенты существенно отличаются от ранее известных (которые являются частными случаями полученного выражения), что связано с более полным учетом взаимодействия с термостатами, описывающими каналы нерадиационного распада.

В Главе 4 представлена методика проектирования сверхпроводниковых параметрических резонаторов, а также, представлены дизайны параметрического усилителя на контактах Джозефсона и на сильно неупорядоченных сверхпроводниках.

Благодарности

Автор выражает благодарность своему руководителю Гринбергу Я.С. за всестороннюю поддержку, наставления и вдохновение на всех этапах подготовки данной диссертационной работы. А также хотелось бы выразить благодарность коллегам из Лаборатории квантовой криогенной электроники, и в частности научному консультанту Ильичеву Е.В, за помощь при проведении экспериментов, описанных в данной работе. Также особую благодарность автор выражает Муценик Е. А. за помощь при проверке текста диссертационной работы и поддержку при её написании.

ГЛАВА 1 ОБЗОР ИНФОРМАЦИОННЫХ ИСТОЧНИКОВ ПО ОСНОВНЫМ МЕТОДАМ ОПИСАНИЯ ТРАНСПОРТА ФОТОНОВ

Существует множество методов для описания процессов рассеяния фотонов в квантовых системах. Данная глава посвящена обзору этих методов на примере однокубитной структуры в открытом волноводе, с анализом их преимуществ и недостатков. Также будет подробно разобран метод неэрмитового гамильтониана, который является базовым для данной диссертационной работы.

1.1 Обзор существующих методов описания фотонного транспорта в квантовых твердотельных структурах

В данном разделе будет приведен краткий обзор существующих методов описания рассеяния фотона на структурах, содержащих двухуровневые системы. Для простоты изложения рассмотрим систему, представляющую собой двухуровневый атом в открытом волноводе (Рисунок 1.1).

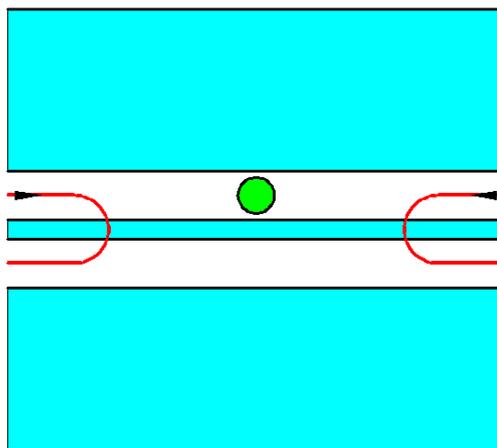


Рисунок 1.1 — Модельное представление сверхпроводникового кубита (двухуровневая система) в открытом волноводе. Голубым цветом помечен открытый волновод в виде копланарной линии. Зеленым цветом условно обозначен кубит, красные линии – условное обозначение падающих, отраженных, и прошедших фотонов

Гамильтониан такой системы записывается следующим образом:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k + \frac{1}{2} \hbar \Omega_q (1 + \sigma_z) + \sum_k \hbar \lambda_k (\sigma_- c_k^\dagger + \sigma_+ c_k), \quad (1.1)$$

где ω_k, Ω_q – частота налетающих фотонов с волновым вектором k и частота возбуждения двухуровневой системы, соответственно; $c_k^\dagger (c_k)$ – операторы рождения (уничтожения) рассеиваемых фотонов; σ_z – матрица Паули, описывающая двухуровневую систему, σ_\pm – операторы повышения/понижения её состояния; λ_k – параметр взаимодействия между волноводом и кубитом.

Теория рассеяния

В рамках метода, предложенного в работах [39; 40], мы переходим к координатному представлению бозонных операторов:

$$c_{k_{R/L}} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx c_{R/L}(x) e^{-jk_{R/L}x}, \quad (1.2)$$

где индексы L, R обозначают направление распространения фотонов (левое и правое). В случае линейной дисперсии, $k_{R/L} = \omega/v_g$, мы можем перейти к некоторому эффективному представлению гамильтониана с разделением бозонных операторов для левых и правых фотонов:

$$H_{eff} = \int dx \left(c_R^\dagger(x) \left(\omega_0 - j\nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) c_R(x) + c_L^\dagger(x) \left(\omega_0 + j\nu_g \frac{\partial}{\partial x} \right) c_L(x) \right) + \frac{1}{2} \Omega_q (\sigma_z + 1) + \int dx \lambda \delta(x) (c_R^\dagger(x) \sigma_- + c_R(x) \sigma_+ + c_L^\dagger(x) \sigma_- + c_L(x) \sigma_+).$$

Для случая одного рассеиваемого фотона можно найти собственную волновую функцию $|k^+\rangle$ данного эффективного гамильтониана, которая будет подчиняться стационарному уравнению Шредингера:

$$H_{eff} |k^+\rangle = \Omega_+ |k^+\rangle. \quad (1.3)$$

Ограничиваясь некоторым набором состояний и вводя вакуумное состояние бозонного поля $|\phi\rangle$, мы можем эту волновую функцию искать в общем виде:

$$|k^+\rangle = \int dx (\alpha_R(x) c_R^\dagger(x) + \alpha_L(x) c_L^\dagger(x) + \delta(x) \beta |e\rangle \langle g|) |\phi\rangle, \quad (1.4)$$

где $|e\rangle, |g\rangle$ – возбужденное/основное состояния кубита.

Таким образом, подставляя (1.4) в (1.3) и вводя некоторые граничные условия на краях волновода и в точке расположения кубита ($x = 0$), получаем систему уравнений для $\alpha_{R/L}(x)$ и

β . Решая полученную систему уравнений, находим данные коэффициенты, с помощью которых можем выразить транспортные коэффициенты.

К преимуществам данного метода относится тот факт, что, используя получаемый эффективный гамильтониан, мы можем решать и нестационарное уравнение Шредингера, что позволит нам анализировать динамику исследуемой системы. Правда, уже для одного кубита данную систему приходится решать численно. Также мы получаем в явном виде амплитуды вероятности возбуждения кубита, что является достаточно важным параметром с точки зрения манипуляции кубитом в квантовых цепях.

К недостаткам метода относятся следующие пункты:

1. Расчет заметно усложняется при учете более чем одного фотона в резонаторе или волноводе. Авторами метода получен результат, где рассматривается рассеивание пары фотонов в волноводе, но, например, учет произвольного числа фотонов в резонаторе не позволяет получить уравнения, удобные для решения.

2. Помимо правильного ограничения базиса состояний, требуется правильное определение граничных условий для уравнений.

3. Авторы метода, равно как и другие исследователи, использующие данный метод [41; 42], релаксацию кубита вводят как мнимую добавку к фундаментальной частоте кубита, т.е., $\Omega_q \rightarrow \Omega_q - j\gamma$, что справедливо только для единичного фотона (как будет показано в основной части диссертации)

4. Аналитические выражения получены лишь для случая двух кубитов [43]. Для трех кубитов, аналитическое решение получено для случая полностью идентичных кубитов, расположенных эквидистантно. Для большего числа кубитов используется численное решение уравнения Шредингера.

Input-output формализм

Очевидно, что гамильтониан (1.1) может быть представлен в виде суммы двух частей $H = H_0 + H_{int}$, где H_0 представляет собой первые два слагаемых (1.1), которые описывают элементы до момента взаимодействия (t_0) (при этом, также как и в предыдущем методе, вводится разделение по направлению распространения фотонов

$H_0 = \int_0^{\infty} d\omega_k \hbar \omega_k \left[c_R^\dagger(\omega_k) c_R(\omega_k) + c_L^\dagger(\omega_k) c_L(\omega_k) \right] + \frac{1}{2} \hbar \Omega_q (1 + \sigma_z)$ и после взаимодействия (t_1), а

H_{int} описывает взаимодействие между волноводом и кубитом.

Данный метод основан на гейзенберговском представлении эволюции операторов. Уравнение для бозонных операторов имеет вид:

$$\frac{dc_R(\omega, t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H_0, c_R(\omega, t)] - \frac{i}{\hbar} [H_i, c_R(\omega, t)] + \frac{\partial c_R(\omega, t)}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Полагая, что явной зависимости операторов от времени нет, мы приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dc_R(\omega, t)}{dt} = -i\omega_k c_R(\omega, t) + \sqrt{\omega} e^{-i\omega x/v} \sigma_- \lambda_k \sqrt{2}. \quad (1.6)$$

Стандартное решение уравнение (1.6) может быть записано в терминах входных ($t < t_0$) и выходных ($t_1 > t$) операторов

$$c_R^{out}(t) = c_R^{in}(t) + e^{-j\Omega_q x_q / v_g} \sqrt{\frac{\gamma}{2}} \sigma_-, \quad (1.7)$$

где x_q – это координата кубита относительно нуля (условно – центр волновода), v_g – групповая скорость и $\gamma = 2\pi\lambda^2 \cdot 2\Omega_q$. При этом, входные и выходные операторы определены как результат преобразования Фурье в соответствующие моменты времени:

$$c_R^{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega c_R(\omega, t_1) e^{-j\omega t}, \quad (1.8)$$

$$c_R^{in}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty d\omega c_R(\omega, t_0) e^{-j\omega t}.$$

Таким образом, решая уравнения для всех введенных бозонных операторов, мы можем прийти к выражениям для транспортных коэффициентов:

$$t = \frac{\langle c_R^{out} \rangle}{\langle c_R^{in} \rangle}, \quad (1.9)$$

$$r = \frac{\langle c_L^{out} \rangle}{\langle c_R^{in} \rangle}, \quad (1.10)$$

то есть коэффициент прохождения есть не что иное, как фактически отношение потока вылетающих (выходных) фотонов вправо, к потоку налетающих (входных) фотонов справа. И, аналогичным образом, интерпретируется коэффициент отражения (1.10).

Безусловно, такой метод привлекателен прозрачной интерпретацией полученных решений, достаточно простым описанием и позволяет описать коллективное поведение системы из нескольких кубитов, но, как и любой метод, обладает рядом недостатков:

1. Необходим поиск граничных условий для решения уравнений;
2. Поскольку для решения необходимо использовать формализм матрицы плотности, то мы неизбежно должны будем обрывать цепочку уравнений (так как каждое следующее уравнение из системы будет дополнительно содержать комбинации операторов, не

входившие в предыдущие уравнения). Поэтому, неизбежно вводя некоторые приближения, цепочку уравнений придется обрывать, исключая из уравнения дополнительные комбинации (например, полагая, что они не оказывают существенного влияния на динамику системы);

3. Решение системы дифференциальных уравнений в аналитическом виде может быть затруднено для сложной структуры, в частности, аналитическое решение было получено данным методом для двух кубитов в открытом волноводе [28]. Для трех кубитов решение было получено уже численно.

При этом хотелось бы отметить, что при решении также используется марковское приближение: приближение «долгого» времени, означающего, что момент рассмотрения выходных операторов t_1 , много больше момента времени фактического рассеяния. Собственно этот факт не позволяет смотреть динамику системы в общем понимании, но позволяет описывать динамику за пределами процесса рассеяния. Заходя вперед, стоит отметить, что этот последний недостаток также присущ методу неэрмитового гамильтониана, который лег в основу данной диссертации. Но, тем не менее, на описание стационарной картины данный недостаток не влияет, ни в методе input-output формализма, ни в методе неэрмитового гамильтониана.

Другие методы

Более стандартным и прямым способом решения является использование формализма матрицы плотности. В частности, решение для системы кубит-резонатор-волновод представлено в работе [44], где исходным уравнением является:

$$\frac{d\rho}{dt} = -i[H, \rho] + L(\rho), \quad (1.11)$$

где $L(\rho)$ – оператор Линдблада, описывающий диссипативную динамику системы. Таким же образом, ограничивая набор состояний (например, в нашем случае, можно взять однофотонные состояния $|k, g\rangle$ и $|0, e\rangle$), мы можем перейти к уравнениям для элементов матрицы плотности ρ , которая будет представлять собой матрицу 2×2 (в самой работе исходно приводится матрица 4×4 , но затем вводится предположение об уровне $|g\rangle$, как о наиболее вероятно заселенном уровне). Естественным образом мы можем рассчитать средние значения операторов и определить выражение для коэффициента прохождения:

$$t = -\frac{\Gamma}{2\xi} \text{Im}(\langle c \rangle), \quad (1.12)$$

здесь ξ – амплитуда входящего сигнала, Γ – величина, определяющая связь между кубитом и волноводом, $\langle c \rangle$ – среднее значение оператора уничтожения фотонов в волноводе. Поскольку

решение $\langle c \rangle$ само пропорционально ξ , то коэффициент прохождения (1.12) не зависит от амплитуды сигнала. В общем, величина ξ принимается малой, что позволяет решать получаемые уравнения методом возмущений. Данный подход также обладает недостатками, связанными с решением системы дифференциальных уравнений, и с необходимостью обрывать цепочку уравнений.

Другой подход, для случая идентичных кубитов, эквидистантно расположенных в волноводе, заключается в использовании матричного представления процесса рассеяния фотона [34]. Если у нас имеется матрица рассеяния для одного фотона S_1 , то матрицу рассеяния для цепочки из N кубитов можно получить как:

$$S_N = S_1 \times S_1 \times \dots \times S_1. \quad (1.13)$$

Данный способ фактически представляет собой классический подход, используемый в теории четырехполюсников, и, собственно, (1.13) представляет собой не что иное, как каскадное соединение четырехполюсников. Данный метод имеет ряд существенных ограничений, связанных с предположением о полной идентичности составных частей системы.

1.2 Метод неэрмитового гамильтониана: происхождение и применение

Первоначально метод неэрмитового гамильтониана возник в ядерной физике, где позволял эффективно описывать рассеяние частиц на ядрах атомов [45]. Затем он был успешно применен в ряде работ, посвященных рассеянию частиц на сложных системах [46-51], и, в частности, был адаптирован для расчета фотонного транспорта в открытых системах с квантовыми битами [52]. Поскольку данный метод занимает важную и основную часть данной диссертации, разберем его более подробно.

Как было сказано ранее, исходный гамильтониан может быть записан как $H = H_0 + H_{\text{int}}$. Давайте введем собственные состояния $|\Phi\rangle$ гамильтониана H_0 и собственные состояния $|\Psi\rangle$ гамильтониана H , и запишем стационарное уравнение Шредингера:

$$(H_0 + H_{\text{int}})|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle, \quad (1.14)$$

где E – полная энергия системы. Для простоты, исходно предположим, что взаимодействие фотона с кубитом не приводит к изменению энергии фотона, то есть, рассмотрим случай

потенциального рассеяния фотона. В этом случае, если мы устремим $H_{\text{int}} \rightarrow 0$, то должны получить состояние $|\Phi\rangle$ с той же самой энергией и можем записать уравнение

$$H_0|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle \quad (1.15)$$

Решение уравнения (1.14) должно быть таковым, чтобы при $H_{\text{int}} \rightarrow 0$ волновая функция $|\Psi\rangle$, описывающая полную систему, переходила в $|\Phi\rangle$ ($|\Psi\rangle \rightarrow |\Phi\rangle$), то есть, формально решение уравнения (1.14) можно записать в виде уравнения Липпмана-Швингера:

$$|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle + \frac{1}{E - H_0 \pm i\varepsilon} H_{\text{int}} |\Psi^\pm\rangle, \quad (1.16)$$

где ε – бесконечно малая величина, введенная для того, чтобы избежать сингулярности в знаменателе. Фактически, эта величина позволяет нам ввести некоторую комплексную энергию системы $z = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (E \pm i\varepsilon)$. Знак перед ε соответствует разным типам рассеиваемых волн, знак «плюс» – для расходящихся волн, знак «минус» – для сходящихся. Второе слагаемое содержит в себе пропагатор внутреннего гамильтониана. Введем два пропагатора, один для полного гамильтониана H и другой для гамильтониана H_0 :

$$G(z) = \frac{1}{z - H}, \quad (1.17)$$

$$g(z) = \frac{1}{z - H_0}. \quad (1.18)$$

Эти два пропагатора описывают отдельно динамику амплитуды вероятности системы без взаимодействия (1.18) и полной системы (1.17). Очевидно, что часть гамильтониана, описывающая взаимодействие, может быть записана как:

$$\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{G(z)} = H_{\text{int}}. \quad (1.19)$$

Умножая уравнение (1.18) слева на $g(z)$ и справа на $G(z)$ (и затем наоборот), мы можем получить два эквивалентных уравнения Дайсона, которые будут связывать два пропагатора друг с другом:

$$G(z) = g(z) + g(z)H_{\text{int}}G(z) \quad (1.20)$$

$$G(z) = g(z) + G(z)H_{\text{int}}g(z) \quad (1.21)$$

Если теперь мы помножим первое уравнение справа на H_{int} , то сможем результат записать в следующем представлении:

$$(1 - g(z)H_{\text{int}})(1 + G(z)H_{\text{int}}) = 1 \quad (1.22)$$

С учетом введенных пропагаторов, уравнение Липпмана - Швингера (1.15) может быть переписано в следующем виде:

$$(1 - g(z)H_{\text{int}})|\Psi^\pm\rangle = |\Phi\rangle \quad (1.23)$$

Теперь, если воспользоваться соотношением (1.22) и умножить уравнение (1.19) на $(1 + G(z)H_{\text{int}})$, мы получим

$$|\Psi^\pm\rangle = (1 + G(z)H_{\text{int}})|\Phi\rangle \quad (1.24)$$

Таким образом, происходит переход между описанием динамики состояний с учетом взаимодействия (состояний полного гамильтониана), через динамику собственных состояний гамильтониана без взаимодействия, с помощью некоторого эффективного его учёта. Эта важная особенность является одной из основополагающих для метода неэрмитового гамильтониана, который будет явно представлен далее. Но для начала можно ввести некоторую матрицу переходов между состояниями из разных наборов:

$$T_{ab} = \langle \Phi_a | H_{\text{int}} | \Psi_b^\pm \rangle \doteq \langle \Phi_a | H_{\text{int}} | \Phi_b \rangle, \quad (1.25)$$

где $\langle \Phi_a |$ представляет собой некоторое состояние из набора собственных состояний H_0 , а $|\Psi_b^\pm\rangle$ – из набора собственных состояний полного гамильтониана состояний. Последнее равенство обусловлено тем фактом, что при $H_{\text{int}} \rightarrow 0$ (например, когда мы рассматриваем полную систему до рассеяния и после рассеяния фотона на системе, т.е. когда его взаимодействием с внутренней системой можно пренебречь), волновая функция переходит из $|\Psi_b^\pm\rangle$ в $|\Phi_b\rangle$ (также как это было сделано в уравнении (1.16)). Подставляя (1.24) в (1.25), приходим к следующему виду матрицы T :

$$T = H_{\text{int}} + H_{\text{int}} \frac{1}{z - H \pm i\varepsilon} H_{\text{int}} \quad (1.26)$$

Стоит обратить внимание, что данная матрица переходов определяет амплитуды вероятности переходов между состояниями из двух базисов (с дискретным и непрерывным спектрами), причем определить эту матрицу можно только в одном из базисов. В общем-то, не имеет значение, как разбивать гамильтониан и что вкладывать в понятие H_0 , а что в понятие H_{int} . В конечном итоге можно получить матрицу переходов между собственными состояниями данных составляющих. Далее, будет показано, что корректное разбиение гамильтониана и выделение части Гильбертова пространства состояний приводит к крайне полезным и, достаточно, легким решениям.

С точки зрения изучения процессов рассеяния фотонов на различных системах, описываемых некоторым внутренним гамильтонианом, нас интересуют вероятности переходов

между внешними состояниями. Для этого давайте все пространство состояний, описывающих полную систему, разобьем на два подпространства: одно подпространство, содержащее те собственные состояния гамильтониана H_0 , которые описывают дискретный спектр (например, состояния резонатора, двухуровневых систем, и прочие, то есть, состояния тех объектов, на которых рассеивается фотон). Эти состояния мы назовем Q -подпространством и будем их описывать проекционным оператором Q , и другое подпространство, содержащее те состояния, которые описывают непрерывный спектр (то есть, фактически, состояния, которые учитывают наличие рассеиваемого фотона). Эти состояния мы назовем P -подпространством и будем их описывать проекционным оператором P . Состояния из этих двух подпространств ортогональны друг другу и представляют собой полный набор состояний, что формально может быть записано как: $P + Q = 1$; $PQ = QP = 0$; $PP = P$; $QQ = Q$.

Пользуясь свойством полноты, полную волновую функцию можно расписать как сумму двух волновых функций, относящихся к каждому из подпространств:

$$|\Psi\rangle = P|\Psi\rangle + Q|\Psi\rangle = |\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle. \quad (1.27)$$

Тогда стационарное уравнение Шредингера может быть записано следующим образом:

$$(P + Q)H(P + Q)(|\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle) = E(|\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle). \quad (1.28)$$

Поскольку подпространства ортогональны друг другу, выражение (1.26) может быть переписано через проекции гамильтониана H :

$$(H_{PP} + H_{QP})|\Psi_P\rangle + (H_{QQ} + H_{PQ})|\Psi_Q\rangle = E(|\Psi_P\rangle + |\Psi_Q\rangle), \quad (1.29)$$

где $XHY = H_{XY}$ и $X, Y = P, Q$.

Аналогично, проецируя данное уравнение сначала на подпространство с оператором P , а затем на подпространство с оператором Q , мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} (H_{PP} - E)|\Psi_P\rangle &= -H_{PQ}|\Psi_Q\rangle, \\ (H_{QQ} - E)|\Psi_Q\rangle &= -H_{QP}|\Psi_P\rangle. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Выражая $|\Psi_P\rangle$ из (1.28), уравнение Шредингера можно записать только в базисе внутренних состояний:

$$H_{eff}|\Psi_Q\rangle = E|\Psi_Q\rangle,$$

где

$$H_{eff} = H_{QQ} + H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ}. \quad (1.31)$$

Данный гамильтониан учитывает и описывает переходы как между состояниями подпространства Q (первое слагаемое), так и переходы между состояниями Q , обусловленные взаимодействием с состояниями из P . Стоит обратить внимание, что нигде не использовались приближения, выражение (1.31) получено точными алгебраическими преобразованиями. Эффективный гамильтониан определяется только в базисе внутренних состояний, где с помощью второго слагаемого «отвязывается» прямое включение состояний с непрерывным спектром (континуум). Фактически, для подпространства Q состояния из P представляют собой некоторые каналы распада. Причем полную волновую функцию $|\Psi\rangle$ можно определить через эффективный гамильтониан как:

$$|\Psi\rangle = |in\rangle + \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |in\rangle + \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ} \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |in\rangle, \quad (1.32)$$

где $|in\rangle$ – состояние системы до рассеяния фотона (состояние из подпространства с непрерывным спектром).

В общем случае, проекционные операторы можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= \sum_M \frac{L}{2\pi} \int dk |M\rangle \langle M|, \\ Q &= \sum_n |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Причем в рассматриваемых задачах, $|M\rangle$ представляет собой прямое произведение состояний единичного фотона в волноводе и некоторого состояния внутренней системы $|m\rangle$, то есть $|M\rangle = |k\rangle \otimes |m\rangle$, суммирование по M фактически означает суммирование по таким внутренним состояниям системы.

Далее можно провести серию простых выкладок:

- 1) пользуемся определением (1.31)

$$H_{eff} = H_{QQ} + QH \sum_M \frac{L}{2\pi} \int dk |M\rangle \langle M| \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} \sum_{M'} \frac{L}{2\pi} \int dk |M'\rangle \langle M'| H Q.$$

- 2) пользуемся тем фактом, что состояние $|M\rangle$ являются собственным для H_{PP}

$$H_{eff} = H_{QQ} + QH \frac{L^2}{4\pi^2} \sum_{M, M'} \iint dk dk' |M'\rangle \frac{\langle M | M' \rangle}{E - E_{M'} + i\varepsilon} \langle M' | H Q.$$

3) исходя из определения ортонормированности векторов состояний $\langle M|M' \rangle = \frac{2\pi}{L} \delta(k-k') \delta_{mm'}$, приходим к виду:

$$H_{eff} = H_{QQ} + \frac{L}{2\pi} \sum_{n,n',M} |n\rangle \int dk \frac{\langle n|H|M\rangle \langle M|H|n'\rangle}{E - E_M + i\varepsilon} \langle n'|, \quad (1.34)$$

энергия E_M включает в себя энергию налетающего фотона в явном виде, поэтому при интегрировании мы можем учесть любой характер дисперсии в волноводе, что является дополнительной степенью свободы данного метода.

4) Матричные элементы эффективного гамильтониана можно записать, введя амплитуды переходов между внутренними и внешними состояниями:

$$\langle n_1|H_{eff}|n_2\rangle = \langle n_1|H_{QQ}|n_2\rangle + \frac{L}{2\pi} \sum_M \int dk \frac{A_{n_1}^M \bar{A}_{n_2}^M}{E - E_M + i\varepsilon}. \quad (1.35)$$

Пользуясь теоремой Сохотского-Племеля $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b \frac{f(x)}{x \pm i\varepsilon} dx = p.v. \int_a^b \frac{f(x)}{x} dx \mp j\pi f(0)$

интеграл в (1.35) можно раскрыть как:

$$\frac{L}{2\pi} \sum_M \int dk \frac{A_{n_1}^M \bar{A}_{n_2}^M}{E - E_M + i\varepsilon} = \frac{L}{2\pi} p.v. \frac{L}{2\pi} \sum_M \int dk \frac{A_{n_1}^M \bar{A}_{n_2}^M}{E - E_M} - j\pi \sum_M A_{n_1}^M \bar{A}_{n_2}^M.$$

Тогда эффективный гамильтониан можно записать еще в одном представлении:

$$H_{eff} = H_{QQ} + \Delta E - \frac{j}{2} W, \quad (1.36)$$

где $W_{n_1, n_2} = 2\pi \sum_M A_{n_1}^M \bar{A}_{n_2}^M$ или в матричном представлении $W = 2\pi A A^\dagger$. Такое представление возможно, если амплитуды переходов A слабо зависят от энергии системы. При этом добавка ΔE представляет собой некоторое смещение уровней энергии внутренней системы, обусловленное взаимодействием с континуумом. В третьей главе диссертации будет показано, что в рассматриваемых нами задачах интеграл (1.35) может быть взят точно, и такая перенормировка уровней учитывается автоматически. И в этом случае, мы эффективный гамильтониан всегда можем представить как:

$$H_{eff} = H_{QQ} - \frac{j}{2} W. \quad (1.37)$$

Аналогичным образом, как в (1.26), мы можем записать матрицу переходов:

$$T_{ab} = \sum_{m,n} \bar{A}_m^b \langle n | \frac{1}{E - H_{eff}} | m \rangle A_m^a. \quad (1.38)$$

Пользуясь стандартной теорией рассеяния, матрица переходов однозначно связывается с матрицей рассеяния S следующей формулой:

$$S_{ab} = \delta_{ab} - jT_{ab}. \quad (1.39)$$

Более того, в данной диссертации будет использован еще один математический прием для описания рассеяния фотона в представлении только внутреннего гамильтониана. Для этого введем снова два пропагатора $g(E)$ и $G(E)$, являющиеся резольвентами для эффективного гамильтониана и гамильтониана внутренней системы:

$$g(E) = \frac{1}{E - H_{eff}} \quad \text{и} \quad G(E) = \frac{1}{E - H_{00}}.$$

Аналогично тому, как ранее выводились уравнения Дайсона, мы можем связать эти два пропагатора следующим уравнением:

$$G - g = \frac{j}{2} g W G. \quad (1.40)$$

Пользуясь тем, что W имеет факторизованный вид, выражение (1.40) можно записать через матрицу K :

$$g = G - \frac{j}{2} G A \frac{1}{1 + \frac{j}{2} K} A^\dagger G,$$

где $K = A^\dagger G A$. Теперь резольвента эффективного гамильтониана целиком определяется только внутренним гамильтонианом и амплитудами перехода в континуум. В этом случае, подставляя (1.40) в выражение (1.38), можно записать матрицу переходов через матрицы K

$$T = K \frac{1}{1 + \frac{j}{2} K}. \quad (1.41)$$

К явным преимуществам данного метода относятся:

- 1) отсутствие приближения возмущений. Математический аппарат позволяет точно вычислять интеграл в выражении эффективного гамильтониана, фактически это означает, что учитывается взаимодействие между внутренними и внешними состояниями во всех порядках.
- 2) отсутствие необходимости задавать граничные условия. Отправным шагом является, как и во всех других методах, выделение некоторого базиса рассматриваемых состояний системы и запись её гамильтониана.
- 3) возможность достаточно простого учета произвольной дисперсии в волноводе.
- 4) возможность учета эффектов запаздывания, причем физическое расстояние между элементами внутренней системы может быть произвольным и легко учитывается при расчетах.

5) возможность учета частотной зависимости параметра взаимодействия, которая входит только в амплитуды A_m^a .

6) возможность анализа структур с неоднородными параметрами, в том числе и для кубитов с различными частотами возбуждения и параметрами связи.

Последний пункт представляет собой особую ценность для практической реализации твердотельных квантовых цепей с кубитами, поскольку искусственные атомы заведомо обладают некоторым разбросом параметров, в отличие от естественных атомов. Остальные описанные методы исходно были разработаны в рамках квантовой оптики, которая направлена на изучение естественных атомов, и поэтому, при наличии разброса параметров у элементов системы, перенос методов квантовой оптики на неоднородную систему не является прямолинейным.

Недостатком же данного метода является невозможность описания динамической картины рассеяния фотона на системе, поскольку учитываются только начальные и конечные состояния системы (состояния с непрерывным спектром), пусть и в полном многообразии вариантов перехода между ними. Также некоторую сложность представляет задача на рассеивание нескольких частиц. Данный метод подходит лишь для описания стационарных картин рассеяния, или же, как будет показано в одном из разделов данной диссертации, может быть показана динамика уже после рассеяния, как это применяется в методе input-output формализма. В простейшем варианте данный метод ранее был применен автором диссертации для расчетов системы с наномеханическими осцилляторами, результаты которых представлены в работах [53-58].

ГЛАВА 2 СИСТЕМЫ С ОДНИМ ИСКУССТВЕННЫМ АТОМОМ

Изготовление структур с одним искусственным атомом (кубитом) стало, своего рода, рутиной, тем не менее, остается ряд не до конца ясных некоторых теоретических вопросов:

- учет произвольного числа фотонов в резонаторе;
- учет релаксации кубита при произвольном числе фотонов в резонаторе;
- многофотонные взаимодействия.

В рамках данной главы будут решены первые два вопроса, поскольку применяемый метод оказался крайне хорошо приспособлен для решения подобного рода задач. Удалось получить не только аналитические выражения для транспортных коэффициентов, но и выражения, описывающие процесс рассеяния фотона в зависимости от различных сценариев эволюции системы кубит-резонатор. Показано также, что число фотонов напрямую влияет на время жизни кубита.

2.1 Система волновод-кубит-резонатор с N фотонами

На Рисунке 2.1 представлено схематичное изображение исследуемой системы, которая включает в себя волновод, по которому могут распространяться фотоны произвольной частоты ω_k , который связан с резонатором через константу связи ξ_k . В самом резонаторе находится кубит и N фотонов с частотой ω_c .

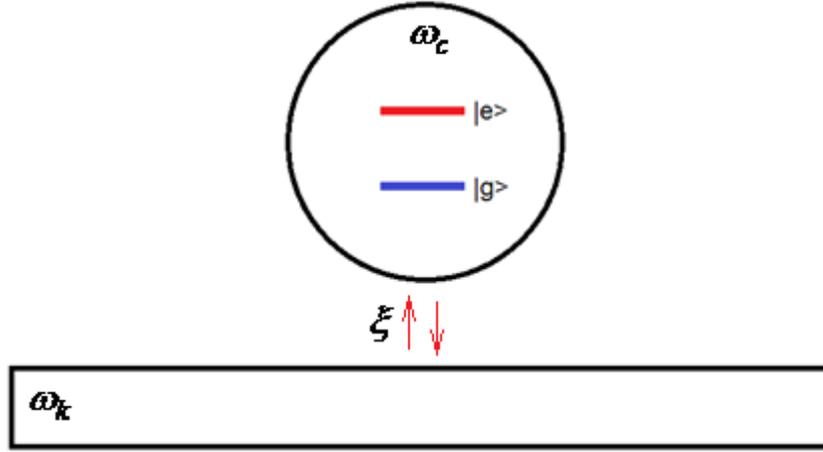


Рисунок 2.1 — Схематичное изображение исследуемой системы с одним кубитом

Гамильтониан такой системы в рамках модели однофотонных взаимодействия Джейнса-Каммингса можно записать в следующем виде:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \hbar \Omega \hat{\sigma}_Z + \hbar \omega_c \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_k \hbar \omega_k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \hbar \xi \sum_k (\hat{c}_k^\dagger \hat{a} + \hat{c}_k \hat{a}^\dagger) + \hbar \lambda (\hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_- + \hat{a} \hat{\sigma}_+), \quad (2.1)$$

где Ω – собственная частота кубита, ω_c – фундаментальная частота резонатора, ω_k – частота налетающего фотона, ξ – константа связи волновода и резонатора (которую мы здесь и далее считаем независимой от частоты налетающего фотона), λ – константа связи резонатора и кубита, оператор σ_Z – матрица Паули $\sigma_Z |g\rangle = -|g\rangle; \sigma_Z |e\rangle = |e\rangle$, σ_- (σ_+) – оператор понижения (повышения) состояния кубита ($\sigma_- |s\rangle = \delta_{e,s} |g\rangle; \sigma_+ |s\rangle = \delta_{g,s} |e\rangle$), a^\dagger (a) и c_k^\dagger (c_k) – бозонные операторы рождения (уничтожения) фотонов в резонаторе и в волноводе, соответственно.

Данную систему можно описать следующим набором состояний:

- $|G\rangle = |0_W\rangle \otimes |g, N\rangle = |0_W\rangle \otimes |L_N\rangle$ нет фотонов в волноводе, кубит находится в основном состоянии и в резонаторе имеется N фотонов.

- $|E\rangle = |0_W\rangle \otimes |e, N-1\rangle = |0_W\rangle \otimes |H_N\rangle$ нет фотонов в волноводе, кубит находится в возбужденном состоянии и в резонаторе имеется $N-1$ фотонов.

- $|K_G\rangle = |k_W\rangle \otimes |g, N-1\rangle = |k_W\rangle \otimes |L_{N-1}\rangle$ один фотон в волноводе, кубит находится в основном состоянии и в резонаторе имеется $N-1$ фотонов.

- $|K_E\rangle = |k_W\rangle \otimes |e, N-2\rangle = |k_W\rangle \otimes |H_{N-1}\rangle$ один фотон в волноводе, кубит находится в возбужденном состоянии и в резонаторе имеется $N-2$ фотонов. Здесь L_N означает нижний уровень, а H_N – верхний уровень кубита в N мультиплете.

Этот набор состояний образует полный базис, в рамках модели рассеяния единичного фотона, в чем легко убедиться, подействовав на каждое состояние гамильтонианом (2.1). Поскольку энергии состояний $|E\rangle, |G\rangle$ представляют собой дискретный спектр, а энергии состояний $|K_E\rangle, |K_G\rangle$ – непрерывный спектр (континуум состояний), то введенное пространство состояний можно условно разбить на два подпространства и ввести проекционные операторы на данные подпространства (разбивать можно абсолютно любым способом, но данное разбиение является наиболее удобным для дальнейшего анализа):

$$\hat{Q} = |E\rangle\langle E| + |G\rangle\langle G|, \quad (2.2)$$

$$\hat{P} = \sum_{k_w} |K_E\rangle\langle K_E| + \sum_{k_w} |K_G\rangle\langle K_G|. \quad (2.3)$$

Стоит отметить, что в (2.3) ведется суммирование по всем k_w , то есть учитываются абсолютно любые значения волновых векторов налетающего фотона.

Так как эффективный гамильтониан (1.31) зависит от энергии, то можно найти энергии внутренних состояний, с учетом взаимодействия с внешним континуумом по всем порядкам взаимодействия, поскольку не используется обрывание ряда Тейлора по порядку малости, что будет показано далее. Энергии внутренних состояний $E_{внутр}$ могут быть найдены из следующего уравнения

$$\det(E_{внутр} - \hat{H}_{eff}(E)) = 0, \quad (2.4)$$

что является следствием уравнения (1.31). Найденные таким способом энергии представляют собой энергии внутренних состояний с дискретным спектром, имеющие некоторую ширину, обусловленную связью с внешними состояниями. Первый член в (1.32) описывает исходное состояние системы, второй член описывает изменения во внутренних состояниях, вызванных эволюцией (на бесконечно больших временах) исходного состояния, а третий член описывает изменение внешнего состояния в результате взаимодействия, причем туда в явном виде входит часть, описывающая влияние изменений во внутренних состояниях. Таким образом, мы получаем полное квантово-механическое описание системы.

2.1.1 Расчет матрицы эффективного гамильтониана

Для расчета матрицы эффективного гамильтониана необходимо сначала определить все проекции гамильтониана на выбранные подпространства. Для этого рассчитаем следующие пары операторов:

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{Q} = & \frac{1}{2}\hbar\Omega|E\rangle\langle E| + \hbar\omega_c(N-1)|E\rangle\langle E| + \hbar\xi\sqrt{N-1}\sum_k|K_E\rangle\langle E| + \hbar\lambda\sqrt{N}|G\rangle\langle E| - \frac{1}{2}\hbar\Omega|G\rangle\langle G| \\ & + \hbar\omega_c N|G\rangle\langle G| + \hbar\xi\sqrt{N}\sum_k|K_G\rangle\langle G| + \hbar\lambda\sqrt{N}|E\rangle\langle G|, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}\hat{P} = & -\left[\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-1)\right]\sum_k|K_G\rangle\langle K_G| + \sum_k\hbar\omega_k|K_G\rangle\langle K_G| + \hbar\xi\sqrt{N}\sum_k|G\rangle\langle K_G| \\ & + \hbar\lambda\sqrt{N-1}\sum_k|K_E\rangle\langle K_G| + \left[\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-2)\right]\sum_k|K_E\rangle\langle K_E| + \sum_k\hbar\omega_k|K_E\rangle\langle K_E| \\ & + \hbar\xi\sqrt{N-1}\sum_k|E\rangle\langle K_E| + \hbar\lambda\sqrt{N-1}\sum_k|K_G\rangle\langle K_E|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теперь, согласно определению $H_{XY} = XHY$, где $X, Y = \hat{Q}, \hat{P}$:

$$\hat{H}_{QQ} = \left[\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-1)\right]|E\rangle\langle E| + \left[-\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c N\right]|G\rangle\langle G| + \hbar\lambda\sqrt{N}(|G\rangle\langle E| + |E\rangle\langle G|), \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{PP} = & \sum_k\hbar\omega_k|K_G\rangle\langle K_G| + \left[-\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-1)\right]\sum_k|K_G\rangle\langle K_G| + \hbar\lambda\sqrt{N-1}\left(\sum_k|K_G\rangle\langle K_E| + \sum_k|K_E\rangle\langle K_G|\right) \\ & + \sum_k\hbar\omega_k|K_E\rangle\langle K_E| + \left[\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-2)\right]\sum_k|K_E\rangle\langle K_E|, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\hat{H}_{PQ} = \hbar\xi\sqrt{N-1}\sum_k|K_E\rangle\langle E| + \hbar\xi\sqrt{N}\sum_k|K_G\rangle\langle G|, \quad (2.9)$$

$$\hat{H}_{QP} = \hbar\xi\sqrt{N}\sum_k|G\rangle\langle K_G| + \hbar\xi\sqrt{N-1}\sum_k|E\rangle\langle K_E|. \quad (2.10)$$

Для того чтобы правильно проложить состояния с непрерывным спектром энергии во втором слагаемом эффективного гамильтониана, нам необходимо, чтобы эти состояния являлись собственными для H_{PP} , то есть:

$$\begin{aligned}\hat{H}_{eff}(E) &= \hat{H}_{QQ} + \hat{H}_{QP} \frac{1}{E - \hat{H}_{PP}} \left(\sum_{k_w} |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + \sum_{k_w} |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2| \right) \hat{H}_{PQ} = \\ &= \hat{H}_{QQ} + \hat{H}_{QP} \left(\sum_{k_w} |\Psi_1\rangle \frac{1}{E - E_{\Psi_1}} \langle \Psi_1| + \sum_{k_w} |\Psi_2\rangle \frac{1}{E - E_{\Psi_2}} \langle \Psi_2| \right) \hat{H}_{PQ},\end{aligned}\quad (2.11)$$

где введенные волновые функции являются собственными для гамильтониана $\hat{H}_{PP} |\Psi_i\rangle = E_i |\Psi_i\rangle$. Иными словами, мы переопределили проекционный оператор P , введя новый проекционный оператор $\hat{P}' = \sum_{k_w} |\Psi_1\rangle \langle \Psi_1| + \sum_{k_w} |\Psi_2\rangle \langle \Psi_2|$, не нарушая при этом ни условия полноты, ни ортонормированности. Поскольку (2.7-2.8) содержат ненулевые недиагональные элементы, то необходимо ввести и определить такие суперпозиционные волновые функции, которые могут быть представлены как:

$$|\Psi_i\rangle = \alpha_i^{N-1} |K_G\rangle + \beta_i^{N-1} |K_E\rangle = |k_w\rangle \otimes \left[\alpha_i^{N-1} |L_{N-1}\rangle + \beta_i^{N-1} |H_{N-1}\rangle \right] = |k_w\rangle \otimes |\varphi_i^{N-1}\rangle. \quad (2.12)$$

Система уравнений для нахождения коэффициентов суперпозиции и собственных энергий суперпозиционных волновых функций выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \langle K_G | \hat{H}_{PP} | \Psi_i \rangle = \langle K_G | E_i | \Psi_i \rangle; \\ \langle K_E | \hat{H}_{PP} | \Psi_i \rangle = \langle K_E | E_i | \Psi_i \rangle, \end{cases} \quad (2.13)$$

которая с учетом (2.8) и (2.12) преобразуется к следующему виду:

$$\begin{cases} \alpha_i^{N-1} \left(-\frac{1}{2} \hbar \Omega + \hbar \omega_c (N-1) + \hbar \omega_k - E_i \right) + \beta_i^{N-1} \hbar \lambda \sqrt{N-1} = 0; \\ \alpha_i^{N-1} \hbar \lambda \sqrt{N-1} + \beta_i^{N-1} \left(\frac{1}{2} \hbar \Omega + \hbar \omega_c (N-2) + \hbar \omega_k - E_i \right) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Система (2.14) позволяет найти следующие собственные энергии и коэффициенты:

$$E_i = \hbar \omega_c (N-1) + \hbar \omega_k - \hbar \frac{\omega_c + (-1)^i \Omega_R^{N-1}}{2}, \quad (2.15)$$

$$\alpha_1^{N-1} = a^{N-1}; \beta_1^{N-1} = b^{N-1}; \alpha_2^{N-1} = -b^{N-1}; \beta_2^{N-1} = a^{N-1}, \quad (2.16)$$

где $\Omega_R^N = \sqrt{(\omega_c - \Omega)^2 + 4\lambda^2 N}$, и $a^{N-1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_c - \Omega}{\Omega_R^{N-1}} \right)}$; $b^{N-1} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\omega_c - \Omega}{\Omega_R^{N-1}} \right)}$. Стоит

отметить, что коэффициенты (2.16) имеют следующие свойства:

$$\begin{aligned}
(a^{N-1})^2 + (b^{N-1})^2 &= 1; \\
\alpha_1^{N-1} \alpha_2^{N-1} + \beta_1^{N-1} \beta_2^{N-1} &= 0; \\
\alpha_i^{N-1} \beta_i^{N-1} &= (-1)^{i+1} \frac{\lambda}{\Omega_R^{N-1}} \sqrt{N-1},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

и они действительны во всей области определения так как $(\omega_C - \Omega) < \Omega_R^{N-1}$. Первые два из (2.17) представляют собой естественную нормировку и требуемую ортогональность. Интересно отметить, что коэффициенты суперпозиции не зависят от частоты налетающего фотона, так как запутывание происходит во внутреннем дискретном базисе. Поскольку волновой вектор в открытом волноводе принимает не дискретные, а произвольные значения, делая формальную замену для одномерного волновода $\sum_k \rightarrow \frac{L}{2\pi} \int dk$, сумму в (2.11) необходимо переписать как интеграл:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{eff} &= \hat{H}_{QQ} + \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_1\rangle \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_1 | \hat{H}_{PQ} + \\
&+ \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_2\rangle \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_2 | \hat{H}_{PQ},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где L – это длина открытого волновода, а множитель $\frac{L}{2\pi}$ введен для нормировки. Эффективный гамильтониан можно представить в матричном виде, где матричный элемент определяется как $H_{eff}^{mn} = \langle m | \hat{H}_{eff} | n \rangle$. Далее будет приведен подробно расчет одного из матричных элементов, например, H_{eff}^{GG} , а для остальных будут записаны лишь конечные результаты.

Расчет матричного элемента H_{eff}^{GG}

Согласно определению, данный матричный элемент эффективного гамильтониана можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
H_{eff}^{GG} &= \langle G | \hat{H}_{QQ} | G \rangle + \langle G | \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_1\rangle \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_1 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle \\
&+ \langle G | \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_2\rangle \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_2 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle.
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Пользуясь явным видом проекций гамильтониана (2.6)(2.9) и найденными волновыми функциями (2.12), мы можем записать каждый член суммы в (2.18) в виде:

$$\text{а) } \langle G | \hat{H}_{QQ} | G \rangle = -\frac{1}{2} \hbar \Omega + \hbar \omega_C N.$$

б)

$$\begin{aligned}
& \langle G | \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_1\rangle \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_1 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle = \\
& \langle G | \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk (\alpha_1^{N-1} |K_G\rangle + \beta_1^{N-1} |K_E\rangle) \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} (\alpha_1^{N-1*} \langle K_G| + \beta_1^{N-1*} \langle K_E|) \hat{H}_{PQ} | G \rangle = \\
& = \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | K_G \rangle \frac{|\alpha_1^{N-1}|^2}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle K_G | \hat{H}_{PQ} | G \rangle + \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | K_G \rangle \frac{\alpha_1^{N-1} \beta_1^{N-1*}}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle K_E | \hat{H}_{PQ} | G \rangle \\
& + \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | K_E \rangle \frac{\alpha_1^{N-1*} \beta_1^{N-1}}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle K_G | \hat{H}_{PQ} | G \rangle + \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | K_E \rangle \frac{|\beta_1^{N-1}|^2}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle K_E | \hat{H}_{PQ} | G \rangle = \\
& = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \iiint dk'' dk' dk \frac{\hbar^2 \xi^2 N \langle K'_G | K_G \rangle |\alpha_1^{N-1}|^2 \langle K_G | K''_G \rangle}{E - E_1(k) + i\varepsilon} = \frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N |\alpha_1^{N-1}|^2 \int dk \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon},
\end{aligned}$$

где использовалось свойство ортогональности волновых векторов $\langle K_G | K'_G \rangle = \frac{2\pi}{L} \delta(k_w - k'_w)$ и $\langle K_E | K'_E \rangle = \frac{2\pi}{L} \delta(k_w - k'_w)$, а также тот факт, что коэффициенты суперпозиции (2.16) можно

вынести за знак интеграла, так как они не зависят от частоты налетающего фотона.

в)

$$\langle G | \hat{H}_{QP} \frac{L}{2\pi} \int dk |\Psi_2\rangle \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_2 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle = \frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N |\alpha_2^{N-1}|^2 \int dk \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon}.$$

В данных выражениях E соответствует полной энергии системы, и, согласно идеологии данного метода, представляет собой энергии состояний до (начальное состояние) взаимодействия с внутренними состояниями (в нашем случае – это кубит-резонатор) и после взаимодействия (конечное состояние). Таким образом, эти энергии должны представлять собой энергии суперпозиционных состояний $|\Psi_i\rangle$, когда налетающий фотон еще не провзаимодействовал с системой, а наличие фотонов в резонаторе с кубитом уже привело к гибридизации состояний. Если представить, что резонатор не взаимодействует с волноводом вообще, то E будет представлять собой действительные значения энергии, при этом даже в состояниях $|G\rangle, |E\rangle$ в отсутствие фотона. То есть, иными словами, эти состояния будут стабильными. При наличии данного взаимодействия, а оно будет «существенным» при $\text{Re}(E) \approx \text{Re}(E_i(k))$ (то есть, когда энергия системы совпадает или близка к энергии из непрерывного спектра), состояния $|G\rangle, |E\rangle$ становятся нестабильными и их энергии комплексными. Давайте условимся, для простоты дальнейшего изложения, что энергию E мы будем брать равной энергии начального состояния системы до рассеяния. Это ни на что в дальнейшем не повлияет, так как далее будут рассчитываться волновые функции для различных

начальных состояниях системы. Получаемые при этом интегралы удобно брать с помощью вычетов, так как под интегралом стоит функция с одним полюсом.

$$\int dk \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} = \int dk \frac{1}{\hbar\omega_k^0 - \hbar\omega_k + i\varepsilon} = \frac{1}{\hbar v_g} \int d\omega_k \frac{1}{\omega_k^0 - \omega_k + i\varepsilon} = \frac{2\pi i}{\hbar v_g} \text{Res}_{\omega_k = \omega_k^0} \Phi(\omega_k) = -\frac{2\pi i}{\hbar v_g}, \quad (2.20)$$

здесь мы полагаем, что в нашем одномерном волноводе имеется линейная дисперсия $\omega_k = |k| \frac{d\omega_k}{dk} = |k| v_g$, где v_g – это групповая скорость фотонов. Строго говоря, из-за того, что ω_k представляет собой четную функцию от k , то полюс может находиться в двух разных полуплоскостях относительно мнимой оси на комплексной плоскости:

$$\begin{aligned} \omega_k &= \omega_k^0 + (k - k_0) \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=+q} = \omega_k^0 + (k - k_0) v_g; \\ \omega_k &= \omega_k^0 + (k + k_0) \left. \frac{d\omega_k}{dk} \right|_{k=-q} = \omega_k^0 - (k + k_0) v_g. \end{aligned} \quad (2.21)$$

На Рисунке 2.2 наглядно продемонстрировано значение выражений (2.21)

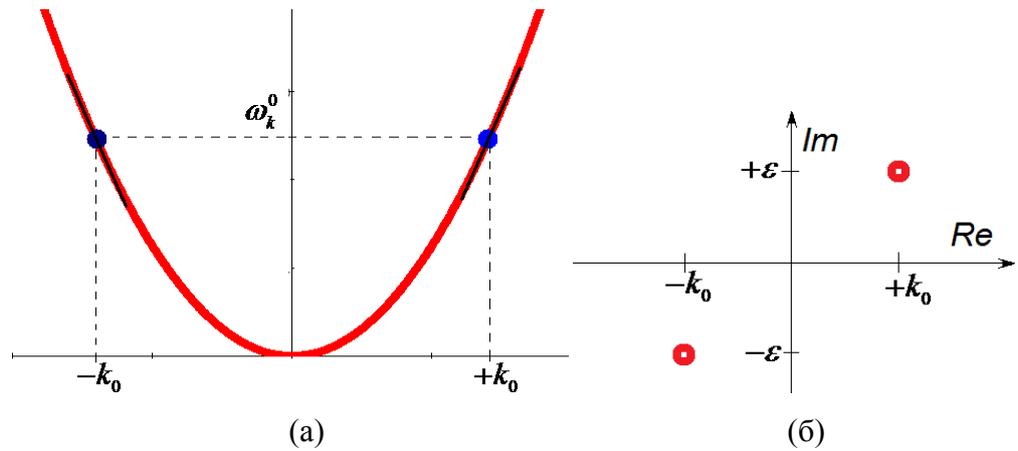


Рисунок 2.2 — а) Дисперсия в одномерном волноводе; черной непрерывной линией показан участок с приближением линейной дисперсии. б) расположение полюсов подынтегрального выражения в (2.19) на комплексной плоскости

В общем случае, данный метод может быть применен для расчета систем с произвольной дисперсией, где сложность расчета будет сводиться к сложности взятия интеграла. В рамках данной диссертации рассмотрение ограничивается случаем линейной дисперсии.

В итоге (2.19) можно записать в следующем виде:

$$H_{eff}^{GG} = -\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c N - i\hbar\Gamma N \left| \alpha_1^{N-1} \right|^2 - i\hbar\Gamma N \left| \alpha_2^{N-1} \right|^2 = -\frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c N - i\hbar\Gamma N, \quad (2.22)$$

где $\Gamma = \frac{L}{v_g} \xi^2$ – скорость излучения фотонов из резонатора в волновод и учтены свойства (2.17). Стоит обратить внимание, что получившийся матричный элемент представляет собой энергию состояния $|G\rangle$ в отсутствие взаимодействия и некоторую мнимую добавку, определяемую, фактически, связью с гибридизированными состояниями $|\Psi_i\rangle$.

Аналогичным образом, можно получить выражения для оставшихся матричных элементов:

$$\begin{aligned} H_{eff}^{EG} &= H_{eff}^{GE} = \hbar\lambda\sqrt{N}; \\ H_{eff}^{EE} &= \frac{1}{2}\hbar\Omega + \hbar\omega_c(N-1) - j\hbar(N-1)\Gamma. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, в данном разделе были определены матричные элементы эффективного гамильтониана, подробно были приведены основные моменты расчета, которые в дальнейшем, для краткости изложения, будут опускаться, так как механика расчета будет аналогична. В следующем разделе будет приведен расчет волновых функций рассматриваемой системы волновод-резонатор-кубит.

2.1.2 Волновая функция и получение коэффициентов прохождения

Как было сказано ранее, полная волновая функция системы (1.32) представляет собой сумму проекций на выбранные подпространства состояний. Поскольку возможны два различных исходных состояния для системы $|\Psi_i^{in}\rangle = \alpha_i^{N-1}|k_{in}, g, N-1\rangle + \beta_i^{N-1}|k_{in}, e, N-2\rangle$, то далее мы будем рассматривать сразу пару следующих волновых функций:

$$|\Phi_i\rangle = |\Psi_i^{in}\rangle + \frac{1}{E_i^{in} - H_{eff}} \hat{H}_{QP} |\Psi_i^{in}\rangle + \frac{1}{E_i^{in} - \hat{H}_{PP}} \hat{H}_{PQ} \frac{1}{E_i^{in} - H_{eff}} \hat{H}_{QP} |\Psi_i^{in}\rangle. \quad (2.24)$$

Поскольку нас интересуют транспортные коэффициенты, то мы опустим второе слагаемое, и рассмотрим только фотонную часть волновых функций. Для расчета необходимо снова проложить данные волновые функции введенными проекционными операторами:

$$|\tilde{\Phi}_i\rangle = |\Psi_i^{in}\rangle + \frac{1}{E_i^{in} - \hat{H}_{PP}} (\hat{P}' + \hat{Q}) \hat{H}_{PQ} (\hat{P}' + \hat{Q}) \frac{1}{E_i^{in} - H_{eff}} (\hat{P}' + \hat{Q}) \hat{H}_{QP} |\Psi_i^{in}\rangle,$$

и, пользуясь свойством ортогональности $\widehat{P}'\widehat{Q} = \widehat{Q}\widehat{P}' = 0$, данное выражение можно переписать в следующем виде:

$$|\tilde{\Phi}_i\rangle = |\Psi_i^{in}\rangle + \sum_{k_w} \sum_{j=1,2} \sum_{A,B=G,E} |\Psi_j\rangle \frac{1}{E_i^{in} - E_j} \langle \Psi_j | \widehat{H}_{PQ} | A \rangle R_{AB}^i \langle B | \widehat{H}_{QP} | \Psi_i^{in} \rangle, \quad (2.25)$$

где $R_{AB}^i = \langle A | \frac{1}{E_i^{in} - H_{eff}} | B \rangle$ элемент обратной матрицы эффективного гамильтониана.

Расчет обратной матрицы эффективного гамильтониана

Поскольку $\langle A | (E_i^{in} - H_{eff}) | B \rangle$ – это квадратная матрица 2×2 , обратная к ней матрица R_{AB} определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} R_{GG}^i &= \frac{E_i^{in} - \langle E | H_{eff} | E \rangle}{\text{Det}(E_i^{in})}; & R_{GE}^i &= -\frac{E_i^{in} - \langle G | H_{eff} | E \rangle}{\text{Det}(E_i^{in})}; \\ R_{EG}^i &= -\frac{E_i^{in} - \langle E | H_{eff} | G \rangle}{\text{Det}(E_i^{in})}; & R_{EE}^i &= \frac{E_i^{in} - \langle G | H_{eff} | G \rangle}{\text{Det}(E_i^{in})}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\text{Det}(E_i^{in}) = \left(E_i^{in} + \frac{1}{2}\Omega - \omega_c N + jN\Gamma \right) \left(E_i^{in} - \frac{1}{2}\Omega - \omega_c(N-1) + j(N-1)\Gamma \right) - \lambda^2 N$.

Введем некоторые обозначения

- расстройку между частотами кубита и резонатора $\Delta_{q-r} = \Omega - \omega_c$.
- расстройку между частотами налетающего фотона и резонатором $\delta = \omega_k - \omega_c$.

Тогда, опуская подробности расчета, мы можем в явном виде записать две матрицы, соответствующие двум различным исходным состояниям системы:

$$\begin{pmatrix} R_{GG}^i & R_{GE}^i \\ R_{EG}^i & R_{EE}^i \end{pmatrix} = \frac{1}{\text{Det}(E_i)} \begin{pmatrix} \delta - \frac{1}{2}(\Delta_{q-r} + (-1)^i \Omega_R) + j(N-1)\Gamma & \lambda\sqrt{N} \\ \lambda\sqrt{N} & \delta + \frac{1}{2}(\Delta_{q-r} - (-1)^i \Omega_R) + jN\Gamma \end{pmatrix},$$

где соответствующие определители записываются

$$\text{Det}(E_i) = (\omega - \omega_i^1)(\omega - \omega_i^2),$$

через комплексные корни

$$\begin{aligned}\omega_1^i &= \omega_c - \frac{1}{2} \left(\Omega_R^{N-1} + j(2N-1)\Gamma \right) - (-1)^i \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2 N}; \\ \omega_2^i &= \omega_c + \frac{1}{2} \left(\Omega_R^{N-1} - j(2N-1)\Gamma \right) - (-1)^i \frac{1}{2} \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2 N}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Реальные части этих корней, как будет показано далее, будут определять положение резонансов (Рисунок 2.3) при различных исходных состояниях системы, а мнимая часть – ширины резонансных уровней (Рисунок 2.4). Положение резонансов и их ширины зависят явным образом от числа фотонов.

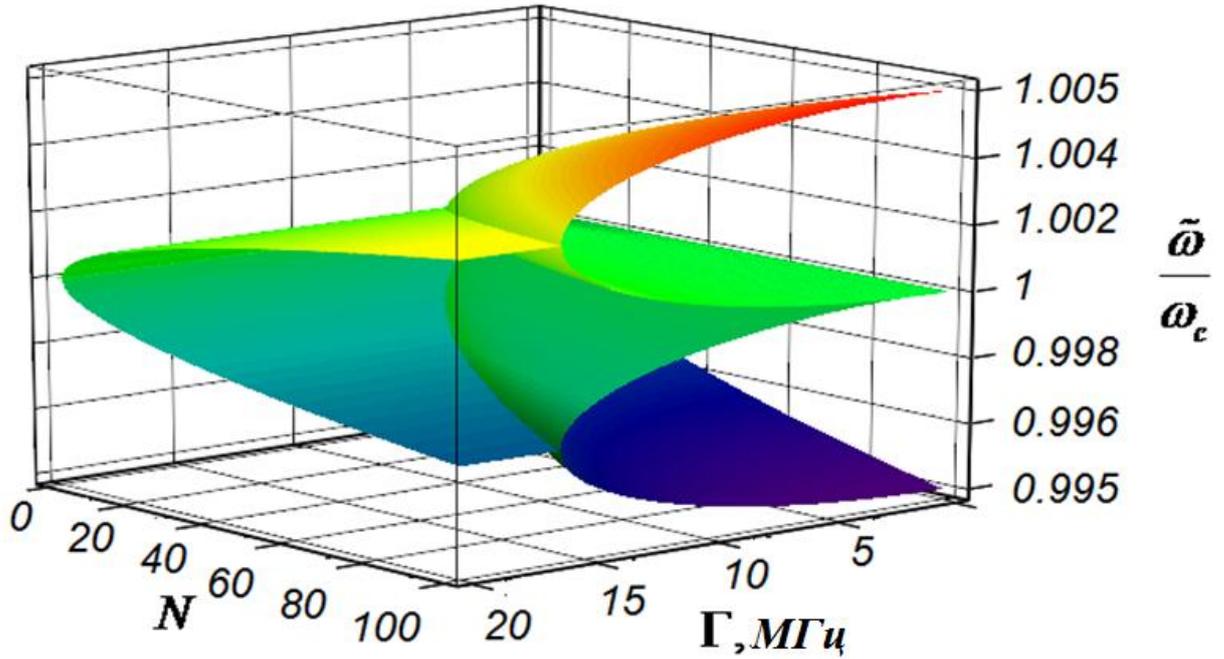


Рисунок 2.3. — Зависимость положения резонансов системы от числа фотонов в резонаторе и его связи с волноводом. Параметры системы: $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}$, $\lambda = 0.8\text{MHz}$

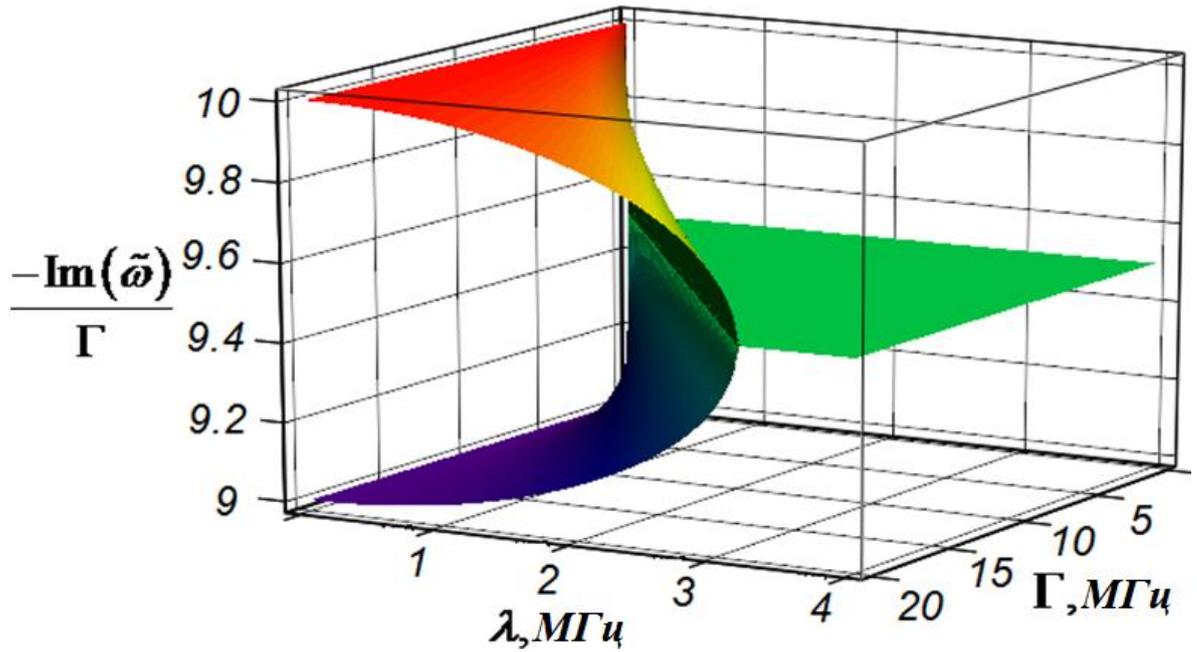


Рисунок 2.4 — Зависимость ширины резонансов от связи резонатора с волноводом и кубитом. Параметры системы: $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}$, $N = 10$

Из Рисунка 2.3. видно, что существуют области, где возможен только один резонанс ($N=0$), так как нет гибридизированных состояний, два резонанса – когда $\Gamma > 2\lambda\sqrt{N}$ (мы видим, что линии раздела в плоскости XU имеют вид функции \sqrt{N}), три резонанса – когда $\Gamma \approx 2\lambda$ (данное условие выполняется для любых N и возникает из уравнения $\text{Re}(\omega_1^1) = \text{Re}(\omega_2^2)$) и четыре резонанса когда $\Gamma < 2\lambda\sqrt{N} \cap \Gamma \neq 2\lambda$ (то есть система демонстрирует квадруплет, а не триплет Моллоу). Последний вариант является следствием того, что при малой связи разница энергий между гибридизированными уровнями $|\varphi_i\rangle = \alpha_i^{N-1}|L_{N-1}\rangle + \beta_i^{N-1}|H_{N-1}\rangle$ в мультиплетах $N-1$ отличается от разницы энергии между гибридизированными уровнями $|\chi_i\rangle = \alpha_i^N|L_N\rangle + \beta_i^N|H_N\rangle$ в мультиплетах N (см. Рисунок 2.5). Стоит обратить внимание на то, что $|\Psi_i\rangle = |k_w\rangle \otimes |\varphi_i\rangle$ из (2.12), а коэффициенты α_i^N, β_i^N получаются формальной заменой в формулах (2.16) $N-1 \rightarrow N$. Также видно, что данный эффект квадруплета определяется не только «малым» числом фотонов в резонаторе, но и связью резонатора с внешней средой.

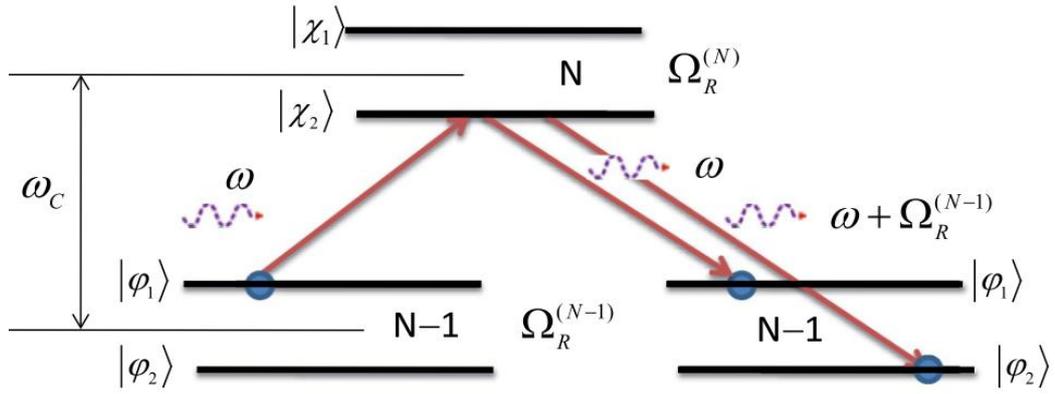


Рисунок 2.5 — Схема рассеяния одиночного фотона при исходном состоянии $|\varphi_1\rangle$, в качестве примера приведено возбуждение уровня $|\chi_2\rangle$

Переход в координатное представление

Таким образом, рассчитаны элементы обратной матрицы. Теперь, пользуясь явным видом проекции гамильтониана (2.7) – (2.10), можно переписать (2.25):

$$\begin{aligned}
 |\tilde{\Phi}_i\rangle &= |\Psi_i^{in}\rangle \\
 &+ \sum_k \sum_{A,B=G,E} |\Psi_1\rangle \frac{1}{E_i^{in} - E_1 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_1^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_1^{N-1} \right) R_{AB}^i \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_i^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_i^{N-1} \right) \\
 &+ \sum_k \sum_{A,B=G,E} |\Psi_2\rangle \frac{1}{E_i^{in} - E_2 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_2^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_2^{N-1} \right) R_{AB}^i \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_i^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_i^{N-1} \right).
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

Безусловно, при внимательном прочтении возникает вопрос, почему после ввода нового проекционного оператора мы не переопределили проекции гамильтониана (2.7) – (2.10)? Ответ заключается в том, что конечный результат не будет зависеть от вида проекций гамильтониана, определены ли они через \hat{P} или \hat{P}' , так как свойства коэффициентов суперпозиции, в конечном счете, позволяют скомпоновать слагаемые таким образом, что конечный результат останется таким же. Единственное, что важно при учете гибридизации состояний – это модификация уровней энергии. Поэтому изложение построено таким образом, что мы не вводили изначально каких-либо суперпозиционных состояний, так как исходно не было ясно, по каким причинам их нужно вводить, но их введение обосновали в процессе рассуждений и показали, как их можно ввести без ошибки для конечного результата.

Для дальнейшего анализа необходимо перейти к координатному представлению волновых функций, для этого необходимо вспомнить следующее свойство фотонных состояний:

$$\langle x|k_w\rangle = e^{jk_w x}, \quad (2.29)$$

где x – текущая координата в одномерном волноводе и выражение представляет собой квазистационарную волну де Бройля. Основываясь на данном свойстве, введем следующие функции:

$$\tilde{\Phi}_1 = \Phi_{11}|\varphi_1\rangle + \Phi_{12}|\varphi_2\rangle, \quad (2.30)$$

$$\tilde{\Phi}_2 = \Phi_{21}|\varphi_1\rangle + \Phi_{22}|\varphi_2\rangle. \quad (2.31)$$

Переходя к координатному представлению функций (2.25), можно выделить при этом четыре возможные комбинации исходного и конечного состояния системы, которые приведены в Таблице 2.1. Получается четыре волновые функции в координатном представлении:

$$\Phi_{11} = e^{ik_{in}x} + \sum_k \sum_{A,B=G,E} \frac{e^{ikx}}{E_1^{in} - E_1 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_1^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_1^{N-1} \right) R_{AB} \times \quad (2.32)$$

$$\times \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_1^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_1^{N-1} \right)$$

$$\Phi_{12} = \sum_k \sum_{A,B=G,E} \frac{e^{jkx}}{E_1^{in} - E_2 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_2^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_2^{N-1} \right) R_{AB} \times \quad (2.33)$$

$$\times \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_1^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_1^{N-1} \right)$$

$$\Phi_{21} = \sum_k \sum_{A,B=G,E} \frac{e^{jkx}}{E_2^{in} - E_1 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_1^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_1^{N-1} \right) R_{AB} \times \quad (2.34)$$

$$\times \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_2^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_2^{N-1} \right)$$

$$\Phi_{22} = e^{jk_{in}x} + \sum_k \sum_{A,B=G,E} \frac{e^{jkx}}{E_2^{in} - E_2 + i\varepsilon} \left(\hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_2^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_2^{N-1} \right) R_{AB} \times \quad (2.35)$$

$$\times \left(\hbar\xi\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_2^{N-1} + \hbar\xi\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_2^{N-1} \right)$$

Связь данных волновых функций с различными сценариями также приведена в Таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Комбинации исходных и конечных состояний в однокубитной структуре

	№ формулы	Исходное состояние	Конечное состояние
А	(2.32)	$ \varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_1 $
Б	(2.33)	$ \varphi_1\rangle$	$\langle\varphi_2 $
В	(2.34)	$ \varphi_2\rangle$	$\langle\varphi_1 $
Г	(2.35)	$ \varphi_2\rangle$	$\langle\varphi_2 $

Интегралы (формально представленные в виде суммы по k) в (2.32)–(2.35) также будем брать с помощью теоремы о вычетах. При этом полюсы в этих выражениях будут равны:

а) Полюс в выражении (2.32) находится из уравнения $E_1^{in} - E_1 + i\varepsilon = 0$, которое здесь будет расписано подробно. Пользуясь (2.15) данное уравнение может быть переписано:

$$\hbar\omega_{k_{in}} + \hbar\omega_c(N-1) - \hbar\frac{\omega_c - \Omega_R^{N-1}}{2} - \hbar\omega_k - \hbar\omega_c(N-1) + \hbar\frac{\omega_c - \Omega_R^{N-1}}{2} = 0;$$

$$\omega_k = \omega_{k_{in}}.$$

б) Полюс в выражении (2.33)

$$E_1^{in} - E_2 + i\varepsilon = 0;$$

$$\omega_k = \omega_{k_{in}} + \Omega_R^{N-1},$$

данный вариант рассеяния изображен на Рисунке 2.5, где наглядно показан случай с увеличением энергии рассеянного фотона на $\hbar\Omega_R^{N-1}$

в) Полюс в выражении (2.34)

$$E_2^{in} - E_1 + i\varepsilon = 0;$$

$$\omega_k = \omega_{k_{in}} - \Omega_R^{N-1};$$

г) Полюс в выражении (2.35)

$$E_2^{in} - E_2 + i\varepsilon = 0$$

$$\omega_k = \omega_{k_{in}}$$

При взятии интегралов, необходимо помнить, что контур должен замыкаться при обходе в положительном направлении реальной оси k , поэтому экспонента e^{jkx} должна иметь соответствующий знак. Иными словами, вблизи полюса $-k_{in}$ (соответствующем волне распространяющейся против положительного направления оси x) необходимо x брать отрицательным, чтобы добавка к мнимой части была отрицательной и контур замкнулся через нижнюю полуплоскость, аналогично при $+k_{in}$ (соответствующем волне распространяющейся по положительному направлению оси x) знак текущей координаты должен быть только положительным (см. Рисунок 2.2б). Данное свойство можно обеспечить, взяв модуль от координаты, приняв положение $x=0$ за положение резонатора в волноводе.

Таким образом, после взятия интегралов, получаем следующие волновые функции:

$$\Phi_{11} = e^{ik_{in}x} - j\Gamma \sum_{A,B=G,E} e^{ik_{in}|x|} \left(\hbar\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_1^{N-1} + \hbar\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_1^{N-1} \right) R_{AB} \left(\hbar\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_1^{N-1} + \hbar\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_1^{N-1} \right). \quad (2.36)$$

$$\Phi_{12} = -j\Gamma \sum_{A,B=G,E} e^{j\left(k_{in} + \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g}\right)|x|} \left(\hbar\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_2^{N-1} + \hbar\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_2^{N-1} \right) R_{AB} \times \\ \times \left(\hbar\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_1^{N-1} + \hbar\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_1^{N-1} \right) \quad (2.37)$$

$$\Phi_{21} = -j\Gamma \sum_{A,B=G,E} e^{j\left(k - \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g}\right)|x|} \left(\hbar\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_1^{N-1} + \hbar\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_1^{N-1} \right) R_{AB} \left(\hbar\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_2^{N-1} + \hbar\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_2^{N-1} \right). \quad (2.38)$$

$$\Phi_{22} = e^{jk_{in}x} - j\Gamma \sum_{A,B=G,E} e^{jk_{in}|x|} \left(\hbar\sqrt{N-1}\delta_{AE}\beta_2^{N-1} + \hbar\sqrt{N}\delta_{AG}\alpha_2^{N-1} \right) R_{AB} \left(\hbar\sqrt{N}\delta_{BG}\alpha_2^{N-1} + \hbar\sqrt{N-1}\delta_{BE}\beta_2^{N-1} \right). \quad (2.39)$$

В выражениях (2.37) и (2.38), мы видим, что исходный волновой вектор меняется на величину $\pm\Omega_R^{N-1}\frac{1}{v_g}$, что точно совпадает с расстоянием между уровнями (2.15) и является прямым следствием закона сохранения энергии. Коэффициенту прохождения соответствует ситуация, когда модуль x раскрывается с положительным знаком, в этом случае удобно переписать волновые функции $\tilde{\Phi}_1$ и $\tilde{\Phi}_2$ как:

$$\Phi_1 = e^{ik_{in}x}|\varphi_1\rangle - j\Gamma t_{11}e^{ik_{in}x}|\varphi_1\rangle - j\Gamma t_{21}e^{j\left(k_{in} + \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g}\right)x}|\varphi_2\rangle; \quad (2.40)$$

$$\Phi_2 = e^{ik_{in}x}|\varphi_2\rangle - j\Gamma t_{22}e^{ik_{in}x}|\varphi_2\rangle - j\Gamma t_{12}e^{j\left(k_{in} - \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g}\right)x}|\varphi_1\rangle,$$

где $t_{11}, t_{12}, t_{21}, t_{22}$ – комплексные амплитуды вероятности для сценариев А, Б, В, Г соответственно (см. Таблицу 2.1). Данные комплексные амплитуды вероятности строго связаны с коэффициентами передачи

$$T_{11} = 1 - j\Gamma t_{11}; \quad (2.41)$$

$$T_{22} = 1 - j\Gamma t_{22},$$

- соответствующие двум волнам на выходе из системы при потенциальном рассеянии

$$T_{12} = -j\Gamma t_{12}; \quad (2.42)$$

$$T_{21} = -j\Gamma t_{21},$$

-соответствующие двум волнам на выходе из системы при непотенциальном рассеянии.

Явные выражения для коэффициентов прохождения и отражения приведены в *Приложении А*. Вопрос в том, а что является результатом измерения? Возможны три ситуации: первая такая, что, будут проводиться единичные измерения, с неизменной инициализацией системы в одном и том же исходном состоянии, при этом из-за того, что при потенциальном и непотенциальном рассеяниях наблюдается изменение энергии вылетающего сигнала, то

возможно разделять эти два случая, получая при этом фактически значения T_{i1}, T_{i2} . Вторая ситуация, когда также инициализируются исходные состояния системы, но нет разделения по энергии вылетающего фотона, в этом случае измеряемая величина будет характеризоваться как:

$$\begin{aligned} |\Phi_1|^2 &= 1 + \Gamma^2 |t_{11}|^2 + \Gamma^2 |t_{21}|^2 + i\Gamma (t_{11}^* - t_{11}); \\ |\Phi_2|^2 &= 1 + \Gamma^2 |t_{22}|^2 + \Gamma^2 |t_{12}|^2 + i\Gamma (t_{22}^* - t_{22}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Третья ситуация предполагает, что нас не интересует инициализация исходного состояния системы и, фактически, исходное состояние системы нам неизвестно, мы просто посылаем последовательность фотонов, и в этом случае возникнет интерференция волновых функций Φ_1 и Φ_2 . Тогда измеряемый коэффициент прохождения будет определяться как:

$$T_{meas} = |\Phi_1 + \Phi_2|^2 = |\Phi_1|^2 + |\Phi_2|^2 + \Phi_1^* \Phi_2 + \Phi_2^* \Phi_1, \quad (2.44)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_1 \Phi_2^* + \Phi_2 \Phi_1^* &= \cos\left(\frac{\Omega_R^{N-1}}{\nu_g} x\right) \left(2\Gamma (\text{Im}(t_{12}) + \text{Im}(t_{21})) + 2\Gamma^2 \left(\begin{array}{l} \text{Im}(t_{11})\text{Im}(t_{12}) + \text{Re}(t_{11})\text{Re}(t_{12}) \\ + \text{Im}(t_{21})\text{Im}(t_{22}) + \text{Re}(t_{21})\text{Re}(t_{22}) \end{array} \right) \right) \\ - 2\sin\left(\frac{\Omega_R^{N-1}}{\nu_g} x\right) &\left(+\Gamma (\text{Re}(t_{12}) - \text{Re}(t_{21})) + \Gamma^2 \left(\begin{array}{l} +t_{21} \text{Im}(t_{11}) + t_{12} \text{Im}(t_{22}) \\ -t_{22} \text{Im}(t_{21}) - t_{11} \text{Im}(t_{12}) \end{array} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогию можно провести с «классическим» экспериментом с двумя щелями, результат измерений будет зависеть от того, различаем мы или нет через какую щель или по какому сценарию будет рассеиваться электрон. Тогда, в рамках таких представлений, можно судить о текущей координате, как о координате на оси, которая будет перпендикулярна интерференционным линиям на «экране».

Результаты моделирования приведены на Рисунках 2.6-2.7. На первом рисунке приведена зависимость коэффициентов прохождения фотона при непотенциальном рассеянии от связи резонатора с волноводом и от его частоты. Выбраны именно эти коэффициенты, так как на них получается более контрастная цветовая гамма, что связано с тем, что вне резонансов данные коэффициенты стремятся к нулю, а коэффициенты при потенциальном рассеянии стремятся к единице. Фактически, если сделать срез плоскостью, перпендикулярной к плоскости YZ (или в наших обозначениях плоскость образованная осями Γ и *Амплитуда*), то мы получим различные амплитудно-частотные характеристики. Оставшиеся параметры системы выбраны такими же, как и на Рисунке 2.3. Таким образом, мы ожидаем с увеличением Γ сначала увидеть четыре резонансных пика, потом при $\Gamma \approx 2\lambda$ увидеть слияние двух резонансов, затем снова расхождение на четыре пика вплоть до $\Gamma = 2\lambda\sqrt{2}$, и затем два резонансных пика.

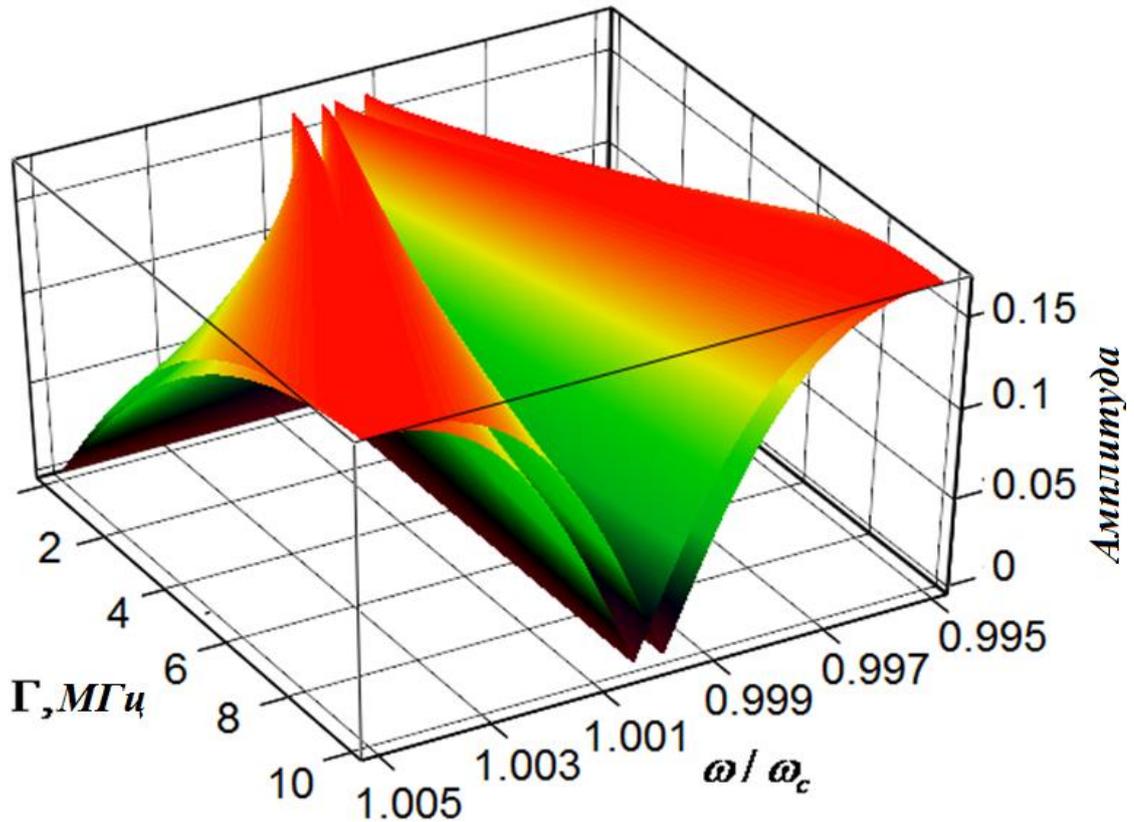


Рисунок 2.6 — Зависимость амплитуды коэффициентов прохождения при непотенциальном рассеянии T_{12}, T_{21} от частоты налетающего фотона и связи резонатора с волноводом. Параметры системы: $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}$, $\lambda = 0.8\text{MHz}$, $N = 2$

Но, как мы видим, области с тремя пиками нигде не существует, это связано с тем, как мы предполагаем, что при достаточно малых λ (в частности таких, что $2\lambda \approx \Gamma$) важную роль играют ширины резонансных уровней, и при полном совпадении уровней наблюдается некоторая эффективная гибридизация, связанная с «взаимодействием» перекрывающихся уровней. Уровни перекрываются достаточно эффективно, когда расстояние между ними (пропорциональное λ) меньше или равно сумме полуширин уровней. Схематичное пояснение дано на Рисунке 2.7.

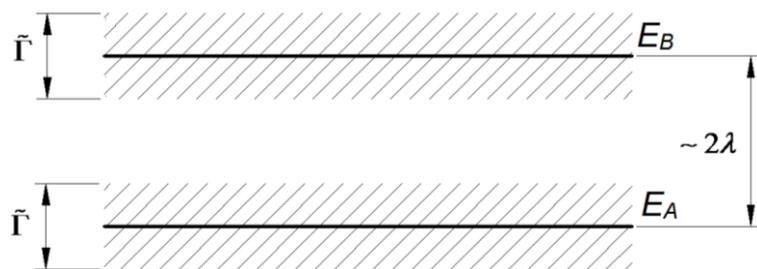


Рисунок 2.7 — Условное обозначение резонансных уровней энергии системы и их ширины

Очевидно, что уровни перекрываются при $2\lambda \approx \tilde{\Gamma}$. Поскольку при $2\lambda = \Gamma$ происходит полное совпадение уровней и при этом существует эффективное взаимодействие, из-за перекрытия, то возникает антикроссинг уровней, что является частным случаем теоремы Вигнера фон Неймана. Для случая, где гамильтониан не зависит от энергии, этот эффект описан в [58], где приводятся следующие условия для наблюдения антикроссинга связанного с энергией уровней или с их ширинами:

антикроссинг энергий и пересечение ширин

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\omega_1^1 - \omega_2^1) > 0; \\ \operatorname{Im}(\omega_1^1 - \omega_2^1) = 0. \end{cases} \quad (2.45)$$

антикроссинг ширин и пересечение энергий

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\omega_1^1 - \omega_2^1) < 0; \\ \operatorname{Im}(\omega_1^1 - \omega_2^1) = 0. \end{cases} \quad (2.46)$$

На Рисунке 2.8 приведены зависимости действительной и мнимой частей расстройки от отношения связи резонатора с кубитом к связи резонатора с волноводом для $N=2$.

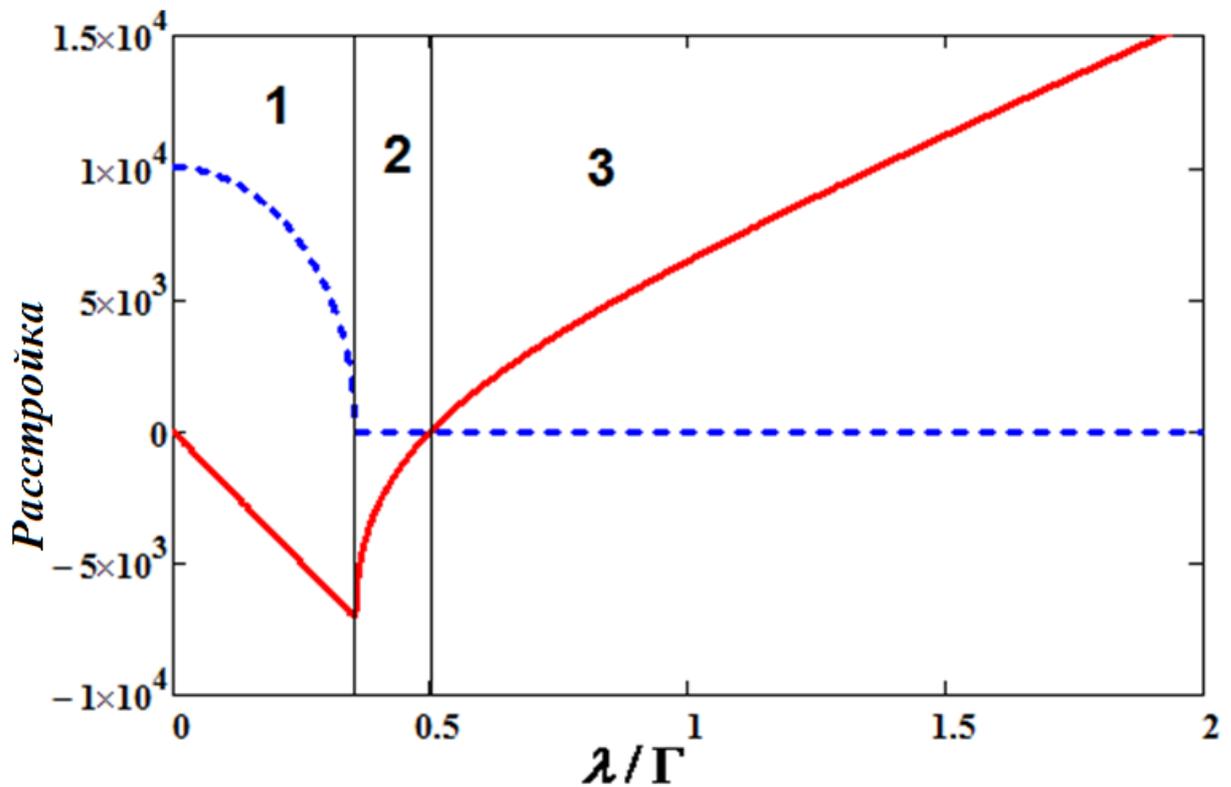


Рисунок 2.8 — Зависимость действительной и мнимой частей расстройки от соотношения связи резонатора с кубитом и волноводом для $N=2$. Сплошная красная соответствует $\operatorname{Re}(\omega_1^1 - \omega_2^1)$, синяя пунктирная — $\operatorname{Im}(\omega_1^1 - \omega_2^1)$

Из Рисунка 2.8 видно, что можно выделить три различных области. Области 2 и 3 описывают условия (2.45) и (2.46), соответственно. Область 1 представляет собой область более сложной картины, описана в [59].

Амплитудно-частотные характеристики, в зависимости от связи резонатора с кубитом и от числа фотонов, приведены на Рисунках 2.9 и 2.10, где мы видим стандартную картину, при которой резонансные пики «разъезжаются» при увеличении силы связи. Надо отметить, что картина с квадруплетом Моллоу быстро размывается при увеличении числа фотонов, что наверняка в настоящий момент затрудняет возможность экспериментальной проверки, хотя частично удалось снять спектр такой лестницы энергии в работе [60], где проводилась спектроскопия суперпозиционных состояний до $N=2$, с помощью экспериментального метода «pump and probe». Эксперимент проводился в режиме резонансной QED(quantum electrodynamics), где в качестве кубита использовался трансмон, размещенный в высокодобротном копланарном резонаторе. Высокая добротность приводила к тому, что измерительный фотон имел ту же частоту, что и регистрируемый, иными словами, измерялись коэффициенты соответствующие потенциальному рассеянию. Измерения проводились в резонансном режиме ($\omega_c = \Omega$) и сильной связи ($\lambda \gg \gamma, \Gamma$), здесь и далее γ – постоянная декогеренции. Гибридизация происходит между состояниями $|L_1\rangle, |H_1\rangle$ и $|L_2\rangle, |H_2\rangle$ (см. формулу (2.2) и выше).

Одно из основных отличий, состоит в том, что в нашем случае мы рассчитали систему, где резонатор фактически четвертьволновый для копланарного исполнения (или side-coupled), а в работе [60] полуволновый (direct-coupled). Но коэффициенты T могут быть преобразованы для случая direct-coupled, через простое соотношение [27]:

$$T_{ii}^{dc} = 1 - T_{ii} \quad (i=1,2), \quad (2.47)$$

то есть коэффициенты прохождения при direct coupling соответствуют коэффициентам отражения при side-coupling.

Фактически удалось измерить переходы $|\varphi_1\rangle \leftrightarrow |\chi_1\rangle$ и $|\varphi_2\rangle \leftrightarrow |\chi_2\rangle$ при $N=2$ (см. Рисунок 2.5), а переходы $|\varphi_1\rangle \leftrightarrow |\chi_2\rangle$ и $|\varphi_2\rangle \leftrightarrow |\chi_1\rangle$ оказались неизмеримыми в силу их маленькой амплитуды и чувствительности измерительной системы.

В качестве модифицированного варианта, наличие этих переходов можно подтвердить путем измерения спектра выходного сигнала из системы, в которой резонатор предварительно накачивается. В силу того, что в (2.40) слагаемые с t_{12}, t_{21} содержат измененный волновой вектор, энергия исходного фотона будет изменяться на величину $\pm \Omega_R^{N-1}$, что даст нам

возможность, например, накапливать события на определенной частоте и таким образом разделять события (2.33) и (2.34).

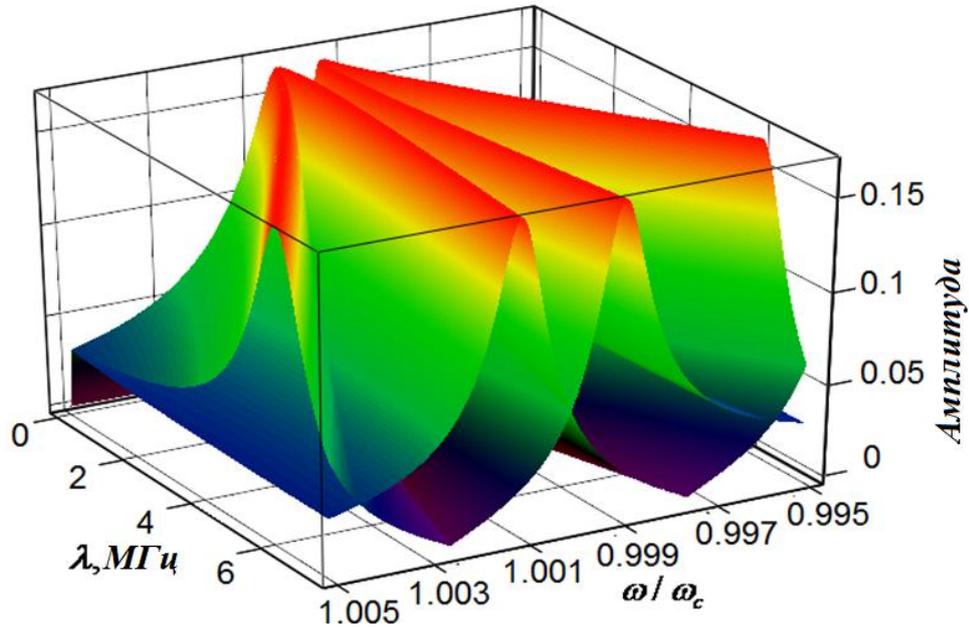


Рисунок 2.9 — Зависимость амплитуды коэффициентов прохождения при непотенциальном рассеянии T_{12}, T_{21} от частоты налетающего фотона и связи резонатора с кубитом. Параметры системы $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}, \Gamma = 0.8\text{MHz}, N = 2$

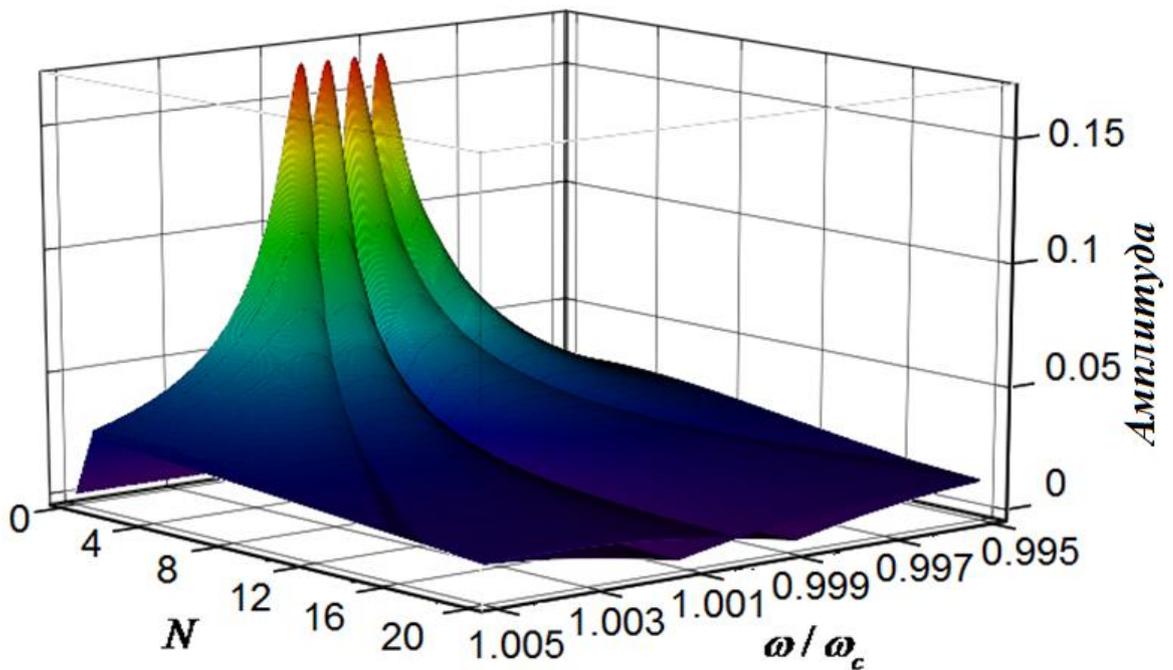


Рисунок 2.10 — Зависимость амплитуды коэффициентов прохождения при непотенциальном рассеянии T_{12}, T_{21} от частоты налетающего фотона и связи резонатора с кубитом. Параметры системы: $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}, \Gamma = \lambda = 0.8\text{MHz}$

На Рисунках 2.11а и 2.11б приведены амплитудно-частотные зависимости от числа фотонов и от соотношения связи резонатора с кубитом и волноводом для результатов измерений по типу (2.43) и (2.44), соответственно.

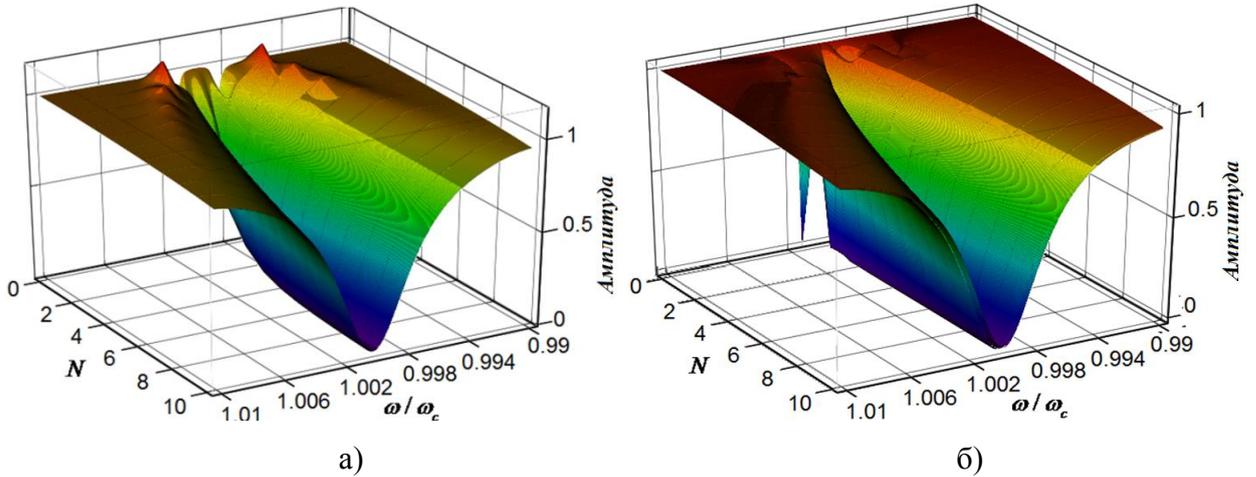


Рисунок 2.11 — Зависимость коэффициентов прохождения: а) при интерференции (2.44) между всеми исходами и б) интерференции (2.43) между исходами с одинаковыми начальными состояниями. Параметры системы: $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}$, $\Gamma = 0.8\text{MHz}$; $\lambda = 4\text{MHz}$

Мы видим, что основная разница между Рисунками 2.11 а) и б) состоит в том, что в случае интерференции волновых функций Φ_1 и Φ_2 , возможно получить коэффициент прохождения больше 1. Также примечательно, что такая положительная интерференция быстро разрушается с ростом числа фотонов в резонаторе, когда разница между энергетическими уровнями $|\chi_i\rangle$ (на которые происходит возбуждение системы при поглощении фотона) и $|\varphi_i\rangle$ (из которых состоят исследуемые волновые функции) становится несущественной. Другая интерпретация такого быстрого спада может быть проведена на основании результатов представленных на Рисунке 2.10. Мы видим, что амплитуды переходов T_{12}, T_{21} быстро спадают с ростом числа фотонов, а поскольку связь между «чистыми» траекториями эволюции системы T_{11} и T_{22} осуществляется как раз благодаря непотенциальным рассеяниям, то очевидно, что при уменьшении их амплитуд должны пропадать интерференционные эффекты.

Поскольку полученные выражения явным образом включают в себя зависимость от числа фотонов, то они должны описывать так называемый эффект фотонной блокады, который экспериментально был продемонстрирован в [61]. Для начала более подробно разберем особенности данного эффекта и особенности эксперимента. Идея фотонной блокады, при

которой прохождение через систему возможно только единичного фотона, а при избыточном числе фотонов наблюдается или поглощение или отражение, впервые была предложена в [62]. К настоящему моменту опубликовано множество статей, посвященных данному эффекту см. статьи [63-66] и ссылки в них. Фотонная блокада наблюдается, когда взаимодействие кубита (или атома) с фотоном приводит к появлению энергетического спектра, который нелинейно зависит от N (см. формулы (2.15) и (2.27)). Обычно в эксперименте фотонная блокада изучается с помощью корреляции фотонной статистики на выходе системы [64, 66]. Другим вариантом обнаружения данного эффекта, является наблюдение ступенчатой зависимости выходной мощности от ширины спектра налетающего фотона [61].

Пусть у нас исходно резонатор не содержит ни одного фотона, и при этом мы посылаем один фотон в волновод, то есть $|k_w\rangle \otimes |L_{N-1}\rangle = |k_w\rangle \otimes |L_0\rangle = |k_w\rangle \otimes |g, 0\rangle$ и $N=1$. Волновая функция $|\varphi_1\rangle$ будет иметь коэффициенты суперпозиции $\alpha_1^0 = 1; \beta_1^0 = 0$, и абсолютное значение энергии этого состояния, согласно (2.15), равно $E_1 = \omega_k - \frac{\Omega}{2}$. Для того, чтобы фотон в квазистационарном случае был поглощен системой, необходимо чтобы его энергия, согласно (2.27), соответствовала:

$$\text{Re}(\omega_1^1) = \text{Re}\left(\omega_c - \frac{1}{2}(\Delta + j\Gamma) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2}\right), \quad (2.48)$$

$$\text{Re}(\omega_1^2) = \text{Re}\left(\omega_c - \frac{1}{2}(\Delta + j\Gamma) - \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2}\right), \quad (2.49)$$

где (2.48) соответствует поглощению с переходом на уровень $|\chi_1\rangle$, а (2.49) на уровень $|\chi_2\rangle$ (см. Рисунок 2.5). Безусловно, на первый взгляд ответ кажется алогичным, поскольку поглощение должно происходить на частоте ω_c и только, но это при условии, что нет взаимодействия с кубитом, в таком случае выражения сведутся к простым:

$$\text{Re}(\omega_1^1) = \text{Re}(\omega_c - j\Gamma) = \omega_c,$$

$$\text{Re}(\omega_1^2) = \text{Re}(\omega_c - \Delta) = \Omega,$$

где в первом случае мы получаем уровень резонатора с шириной Γ , и уровень возбужденного состояния кубита Ω , который будет абсолютно стабильным и не иметь ширины вообще. В этом есть некоторое проявление чисто квантово-механического поведения системы, когда для взаимодействия с резонатором не обязательно иметь некоторую энергию в нем, как например, в случае вакуумных колебаний Раби. С другой стороны, можно объяснить это иначе, если рассматривать динамику такой системы, то при таком исходном состоянии наверняка первое поглощение должно произойти на частоте резонатора, и говорить далее об исходных

состояниях можно, только если после поглощения посылать очередной фотон, и, в этом случае, все рассуждения можно описывать в рамках состояний (2.12) и $N=2$. Очевидно, что в квазистационарном случае такие рассуждения о последовательности актов поглощения-испускания, не несут в себе точной информации, и пригодны лишь для более наглядного представления процессов в системе. Тем не менее, этот факт позволяет смотреть на $N=1$ как на среднее число фотонов в системе, включая, налетающий фотон. После того как один фотон будет поглощен системой на уровень $|\chi_1\rangle$ и будет послан следующий, то и «исходное» состояние системы будет $|k_W\rangle \otimes [\alpha_1 |L_1\rangle + \beta_1 |H_1\rangle] = |k_W\rangle \otimes |\varphi_1\rangle$ с коэффициентами определяемыми (2.16) и $N=2$ согласно той же формуле (2.27) чтобы было возможным поглощение следующего фотона необходимо, чтобы его энергия равнялась:

$$\text{Re}(\omega_1^1) = \text{Re}\left(\omega_c - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2} + j3\Gamma\right) + \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 8\lambda^2}\right), \quad (2.50)$$

$$\text{Re}(\omega_1^2) = \text{Re}\left(\omega_c - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2} + j3\Gamma\right) - \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 8\lambda^2}\right). \quad (2.51)$$

Тот факт, что частоты (2.48) и (2.50), (2.49) и (2.51) не равны между собой означает, что если мы бы послали второй фотон на частоте (2.48), то он бы не был поглощен системой, так как нет уровня, на который он мог бы быть поглощен. Разница между уровнями, соответствующими N мультиплету и $N+1$ мультиплету, становится тем меньше, чем больше N . Это хорошо видно из выражения (2.27). Давайте посмотрим на разницу между резонансными частотами в таких мультиплетах:

$$\begin{aligned} \{\omega_1^1\}_{N+1} - \{\omega_1^1\}_N &= \frac{1}{2}\left[\left(\Omega_R^{N-1} - \Omega_R^N - j2\Gamma\right) + \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2(N+1)} - \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2N}\right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2}\left[\left(\Omega_R^N - \Omega_R^N - j2\Gamma\right) + \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2N} - \sqrt{(\Delta - j\Gamma)^2 + 4\lambda^2N}\right] = -j\Gamma, \end{aligned} \quad (2.52)$$

то есть разницы в реальной части резонанса нет.

Таким образом, мы ожидаем, что при определенной частоте налетающего фотона, коэффициент его прохождения (отражения) будет сильно зависеть от числа фотонов в резонаторе при малом их числе. Предлагается следующий эксперимент: полагаем, что у нас имеется детектор мощности с регулируемой полосой детектирования $2\Delta\omega$. Пусть мы можем менять среднее число фотонов, находящихся в резонаторе, и этот детектор регистрирует мощность отраженного сигнала. Коэффициент отраженного сигнала, при N фотонах в резонаторе, определяется как:

$$\left| R_p^N \right|^2 = \Gamma^2 \left(|t_{11}|^2 + |t_{21}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 + 2 \operatorname{Re} \left(t_{11} t_{21}^* e^{j \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g} x} \right) + 2 \operatorname{Re} \left(t_{22}^* t_{12} e^{j \frac{\Omega_R^{N-1}}{v_g} x} \right) \right), \quad (2.53)$$

где $i, j=1,2$ и $i \neq j$, при этом данный коэффициент соответствует ситуации, когда нам неизвестно исходное состояние системы, более подробно вывод можно посмотреть в *Приложении А*. Тогда, детектор с полосой $2\Delta\omega$ и центральной частотой ω_c , в случае, когда исходно в резонаторе было N_p фотонов, за всё время регистрирует мощность равную:

$$P_R(N_p, \Delta\omega) = \sum_{N=1}^{N_p} \int_{\omega_c - \Delta\omega}^{\omega_c + \Delta\omega} \left| R_p^N \right|^2 d\omega. \quad (2.54)$$

Зависимость регистрируемой мощности от полосы детектирования приведена на Рисунке 2.12, где можно наблюдать ступенчатую характеристику.

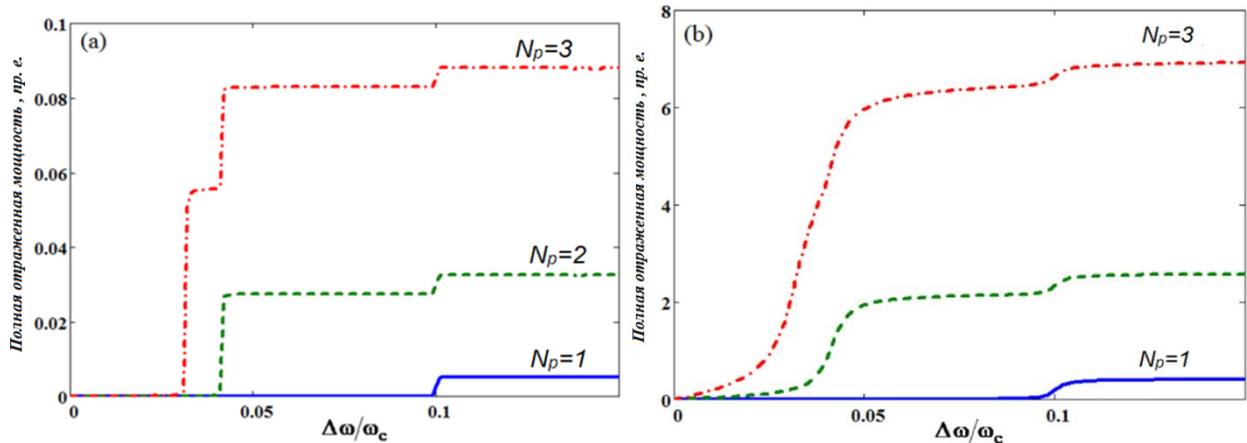


Рисунок 2.12 — Ступенчатая характеристика при фотонной блокаде. Параметры системы $\omega_c = \Omega = 3$ ГГц; $\lambda = 0.1\omega_c$ (a) $\Gamma = 0.1$ МГц (b) $\Gamma = 8$ МГц

Из Рисунка 2.12 видно, что если $N_p=3$, то на характеристике видны ступеньки, связанные с $N_p=2,1$. Это соответствует тому факту, что в рамках рассмотренных однофотонных взаимодействий, система, испуская фотоны, «пройдет» по всем мультиплетам от N_p до 0, т.е. пока в резонаторе не останется фотонов.

В общем случае, при наличии N -фотонов в резонаторе всегда существует вероятность вылета одновременно нескольких фотонов, что кардинально должно менять поведение системы и распределение уровней (иными словами система может быть вообще использована в качестве источника фотонов или преобразователя частоты). Ниже приведены выкладки, которые показывают, что область применимости вышеполученных результатов для описания

экспериментов лежит в такой области параметров, которые обеспечивают так называемый режим сильной связи, характерный для твердотельных квантовых систем.

Влияние двухфотонных процессов на процесс рассеяния

В данном разделе на примере двухфотонных процессов будет показано, что область применимости выражений из этой главы определяется режимом сильной связи. Полученные здесь оценки и выкладки, интуитивным образом могут быть обобщены на случай взаимодействий более высоких порядков. Для простоты ограничимся задачей, в которой резонатор содержит два фотона, поскольку этого количества достаточно для реализации высвечивания двух фотонов.

В общем виде, базис состояний такой системы представим в виде:

$$\left. \begin{array}{l} |0g\rangle = |0, g, 2\rangle \\ |0e\rangle = |0, e, 1\rangle \end{array} \right\} \text{внутренние}$$

$$\left. \begin{array}{l} |1_k, g, 1\rangle \\ |1_k 1_{k'}, g, 0\rangle \\ |2_k, g, 0\rangle \\ |1_k, e, 0\rangle \end{array} \right\} \text{внешние} \quad (2.55)$$

где учтено, что два фотона могут иметь различные волновые векторы. Таким образом, проекционный оператор P увеличивается на два слагаемых. При введении двухфотонных состояний, необходимо корректно обращаться с бозонными операторами, в частности, необходимо помнить, что :

$$c_q^+ |1_k\rangle = \begin{cases} \sqrt{2} |2_k\rangle, & k = q \\ |1_k, 1_q\rangle, & k \neq q \end{cases} = \sqrt{2} |2_k\rangle \delta_{qk} + |1_k, 1_q\rangle (1 - \delta_{qk})$$

$$c_q |1_k, 1_{k'}\rangle = \begin{cases} c_q c_k^+ c_{k'}^+ |0\rangle = \delta_{qk} c_{k'}^+ |0\rangle + \delta_{qk'} c_k^+ |0\rangle = \delta_{qk} |1_{k'}\rangle + \delta_{qk'} |1_k\rangle, & k \neq k' \\ \sqrt{2} \delta_{qk} |1_k\rangle, & k = k' \end{cases} \quad (2.56)$$

Гамильтониан системы (2.1) для простоты расчета сдвинем на $1/2\Omega$, что означает просто переопределение уровня нулевой энергии. Этот гамильтониан приводит к крайне богатой суперпозиции состояний (2.55), но при этом, на первый взгляд, обеспечивает переходы из внутренних в только такие внешние состояния, в которых в волноводе имеется лишь один фотон. Но, стоит напомнить, что эффективный гамильтониан включает в себя следующий оператор

$$\frac{1}{E - H_{pp}} = \frac{1}{E} \left(1 + \frac{H_{pp}}{E} + \left(\frac{H_{pp}}{E} \right)^2 + \left(\frac{H_{pp}}{E} \right)^3 + \dots \right)$$

который обкладывается всеми введенным внешними состояниями, поэтому в этом смысле, член, описывающий фотон-фотонное взаимодействие $(\hat{c}_k^\dagger \hat{a} + \hat{c}_k \hat{a}^\dagger)$ будет учитывать и процессы более высоких порядков $((\hat{c}_k^\dagger \hat{a} + \hat{c}_k \hat{a}^\dagger)^2)$. Ранее в работе было показано, что для вычисления эффективного гамильтониана необходима диагонализация оператора H_{pp} , матрица которого, для данной задачи, представляется следующим образом:

$$H_{pp} = \begin{pmatrix} H_{11} & 0 & 0 & H_{41} \\ 0 & H_{22} & 0 & H_{42} \\ 0 & 0 & H_{33} & H_{43} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D & z \\ z^T & \alpha \end{pmatrix} \quad (2.57)$$

где

$$\begin{aligned} H_{43} &= \langle 1_q, g, 1 | PHP | 1_q, e, 1 \rangle = \lambda; \\ H_{42} &= \langle 1_q, g, 1 | PHP | 2_q, g, 0 \rangle = V_{1p} \sqrt{2}; \\ H_{14} &= \langle 1_q, g, 1 | PHP | 1_q 1_{q'}, g, 0 \rangle = V_{1p} (1 - \delta_{qq'}); \\ H_{44} &= \langle 1_q, g, 1 | PHP | 1_q, g, 1 \rangle = (\omega_q + \omega_c); \\ H_{33} &= \langle 1_q, e, 0 | PHP | 1_q, e, 0 \rangle = (\omega_q + \Omega); \\ H_{22} &= \langle 2_q, g, 0 | PHP | 2_q, g, 0 \rangle = 2\omega_q; \\ H_{11} &= \langle 1_q 1_{q'}, g, 0 | PHP | 1_q 1_{q'}, g, 0 \rangle = 2(\omega_{q'} + \omega_q); \end{aligned} \quad (2.58)$$

Данная матрица имеет стрелочный вид, который облегчает поиск собственных векторов и значений. Собственные значения данной матрицы (2.57) были найдены численно. Согласно утверждениям из статьи [67], собственные значения – есть решения следующих уравнений:

$$f(E_0) \equiv \alpha - E_0 - z^T (D - E_0 I)^{-1} z = 0 \quad (2.59)$$

А собственные вектора – есть

$$v = \frac{x_i}{\|x_i\|}; x_i = \begin{bmatrix} (D - E_0 I)^{-1} z \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Для режима сильной связи, таким образом, были найдены зависимости от частоты налетающего фотона коэффициентов следующей суперпозиции:

$$|\Psi_i\rangle = \alpha_i |1_k, g, 1\rangle + \beta_i |1_k, e, 0\rangle + \gamma_i |2_k, g, 0\rangle + \delta_i |1_k, 1_q, g, 0\rangle \quad (2.61)$$

где $i=1,2,3,4$. Данные зависимости представлены на Рисунке 2.13. Для симуляции использовались следующие параметры системы, обеспечивающие режим сильной связи:

$$\omega_c = 3 \text{ ГГц}$$

$$\Gamma = 0.3 \text{ МГц}$$

$$\Omega = 3 \text{ ГГц} + 10 \text{ МГц}$$

$$\lambda = 10 \text{ МГц}$$

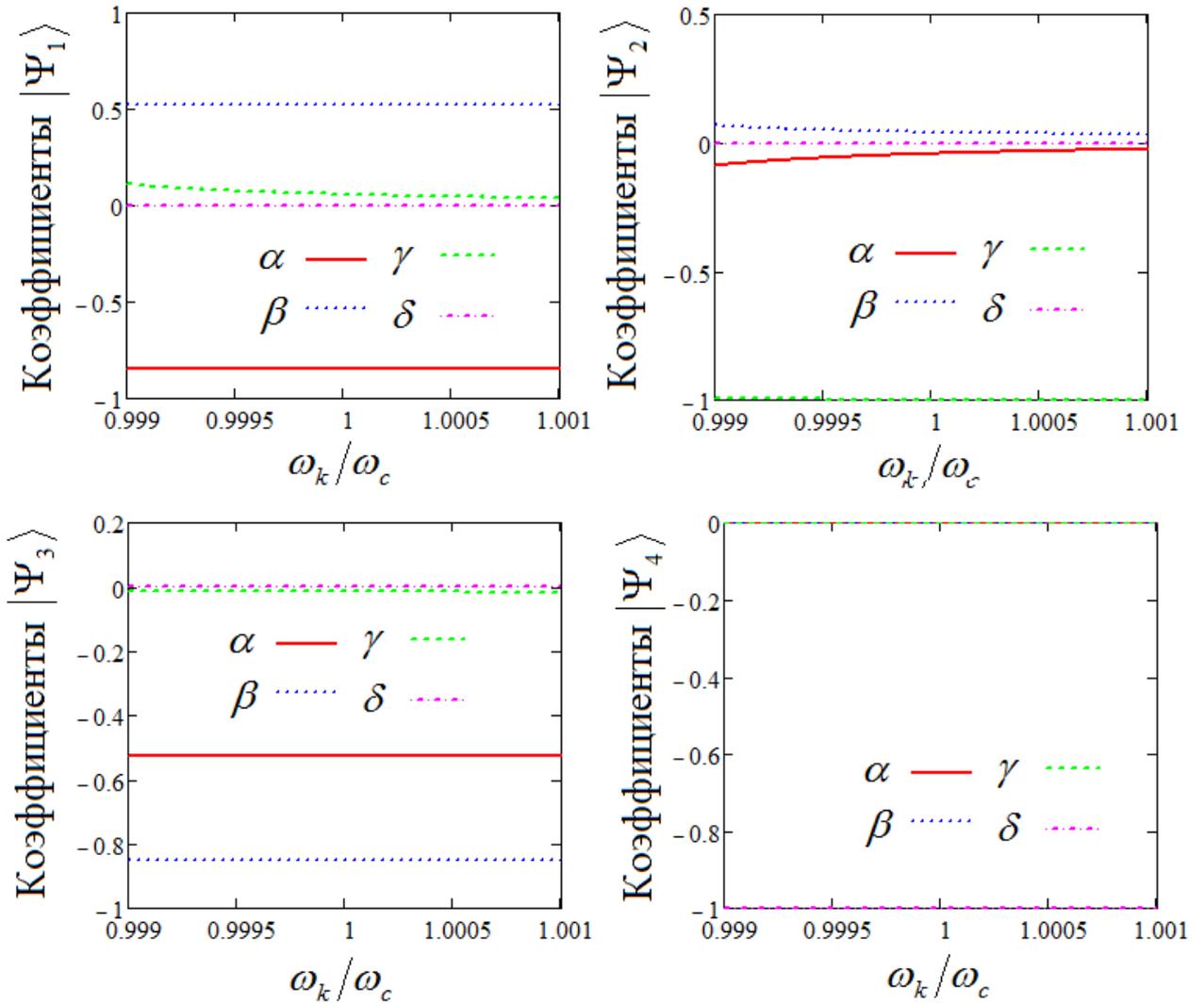


Рисунок 2.13 Зависимость коэффициентов суперпозиции (2.61) от частоты налетающего фотона для системы в режиме сильной связи в полосе 3 МГц, и частоте $\omega_i = 0.999\omega_c$.

Из Рисунка 2.13 видно, что в режиме сильной связи суперпозиции разделяются на два класса: а) суперпозиция с преобладанием однофотонных состояний ($|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$) б) суперпозиция с преобладанием двухфотонных состояний ($|\Psi_2\rangle$ и $|\Psi_4\rangle$). Такое разбиение классов позволяет

утверждать, что функции $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$ близки к функциям, полученным при учете только однофотонных состояний в волноводе.

На Рисунке 2.14 показана зависимость первых трех уровней энергии от частоты рассеиваемого фотона (четвертый лежит на порядок выше, но тоже имеет линейную зависимость).

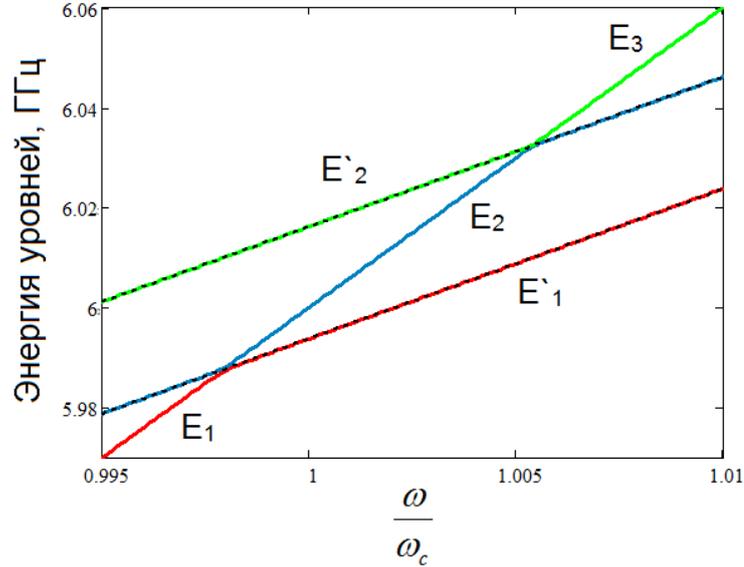


Рисунок 2.14 Зависимость уровней энергии суперпозиционных состояний (2.61) от частоты рассеиваемого фотона (сплошные линии) и зависимость суперпозиционных состояний (2.12)

Строгий вывод матричных элементов эффективного гамильтониана дает следующие их значения:

$$\begin{aligned}
 H_{eff}^{11} &= 2\omega_c + \sum_{i,k} \frac{2V_{1p}^2 \alpha_i^2}{E - E_i(k)}; H_{eff}^{22} = \Omega + \omega_c + \sum_{i,k} \frac{V_{1p}^2 \beta_i^2}{E - E_i(k)}; \\
 H_{eff}^{12} &= \lambda\sqrt{2} + \sum_{i,k} \frac{\sqrt{2}V_{1p}^2 \alpha_i \beta_i}{E - E_i(k)}; H_{eff}^{21} = \lambda\sqrt{2} + \sum_{i,k} \frac{\sqrt{2}V_{1p}^2 \alpha_i \beta_i}{E - E_i(k)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.62}$$

которые похожи на элементы (например (2.22)), полученные при учете только однофотонных состояний (суммы по индексам $i=1,3$) с добавкой влияния двухфотонных процессов ($i=2,4$).

Если в качестве исходного состояния взять $|\Psi_1\rangle$ и подставить его энергию в качестве исходной энергии (а мы вправе выбирать частоту рассеиваемого фотона), то для выражений (2.62) в суммах мы получим полюсы, которые будут лежать в области близкой к фундаментальной частоте (для $i=1,2,3$). Касательно полюса в выражении $\frac{1}{E - E_i(k)}$ его положение крайне сильно

зависит от частоты второго фотона (поскольку из Рисунка 2.13 видно, что для данной энергии преобладает состояние с двумя различными фотонами). Если один фотон обладает энергией близкой к резонансной частоте, то полюс относительно другого (например рассеиваемого) будет

лежать вдали от нее. Мы можем условиться и взять такую частоту второго фотона, которая будет давать вклад в полосу резонатора, то есть из пары фотонов один будет лежать вблизи резонансной частоты, а другой в области низких частот (например $k'v_g = 3\text{МГц}$). Для того чтобы убедиться, построим следующие функции:

$$E_i(k_0) - E_i(k, k')$$

где k_0 - импульс рассеиваемого фотона, k, k' произвольные импульсы фотонов во всех состояниях. Полученные зависимости представлены на Рисунке 3Б

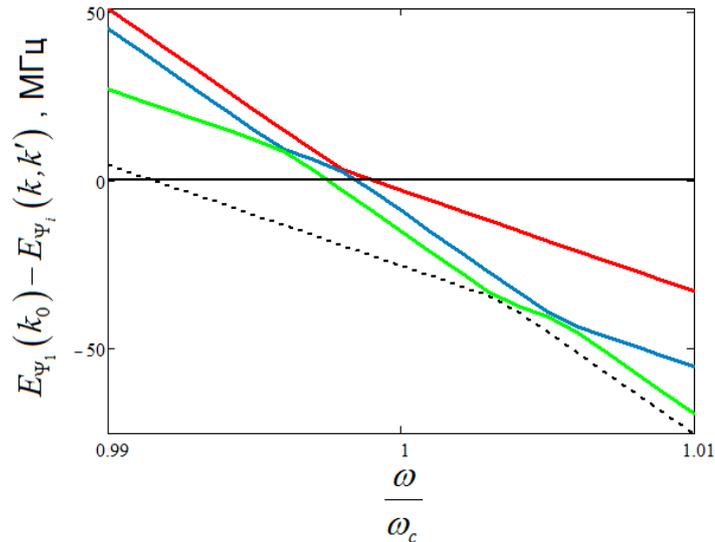


Рисунок 2.15 Нахождение полюсов функции при $k_0 v_g = 0.999 \omega_c$. Положение полюса определяется пересечением зависимостей $E_1(k_0) - E_i(k, k')$ с нулем. Красная линия соответствует $E_1(k_0) - E_1(k, k')$; синяя линия $E_1(k_0) - E_2(k, k')$; зеленая линия $E_1(k_0) - E_3(k, k')$; черная пунктирная $E_1(k_0) - E_4(k, k')$

В этом случае, поскольку коэффициенты суперпозиции представляют собой гладкие функции и не содержат особых точек в суммах (2.62) мы можем воспользоваться теоремой о вычетах, и получить следующие выражения:

$$\begin{aligned} H_{eff}^{11} &= 2\omega_c - j \frac{L}{v_g} 2V_{1p}^2 \sum_i \alpha_i^2(\omega_{pi}) \\ H_{eff}^{22} &= \Omega + \omega_c - j \frac{L}{v_g} V_{1p}^2 \sum_i \beta_i^2(\omega_{pi}) \\ H_{eff}^{12} &= \lambda\sqrt{2} - \sqrt{2}j \frac{L}{v_g} V_{1p}^2 \sum_i \alpha_i(\omega_{pi}) \beta_i(\omega_{pi}) \\ H_{eff}^{21} &= \lambda\sqrt{2} - \sqrt{2}j \frac{L}{v_g} V_{1p}^2 \sum_i \alpha_i(\omega_{pi}) \beta_i(\omega_{pi}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

где ω_{p_i} соответствующий полюс.

Поскольку и собственные энергии, и коэффициенты суперпозиции найдены численно, мы можем только подставить их конкретные значения в соответствующих полюсах.

$$\begin{aligned}\alpha_1(\omega_{p_1}) &\approx -0.8501 \\ \beta_1(\omega_{p_1}) &\approx 0.5248 \\ \alpha_2(\omega_{p_2}) &\approx -0.06 \\ \beta_2(\omega_{p_2}) &\approx 0.0517 \\ \alpha_3(\omega_{p_3}) &\approx -0.023 \\ \beta_3(\omega_{p_3}) &\approx 0.0268 \\ \alpha_4(\omega_{p_4}) &\approx -0.5259 \\ \beta_4(\omega_{p_4}) &\approx -0.8505\end{aligned}$$

И прямая подстановка в (2.63) дает нам:

$$\begin{aligned}H_{eff}^{11} &= 2\omega_c - j2\Gamma_1 \cdot 1.0034 \\ H_{eff}^{22} &= \Omega + \omega_c - j\Gamma_1 \cdot 1.0021 \\ H_{eff}^{12} &= \lambda\sqrt{2} + j\sqrt{2}\Gamma_1 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3} \\ H_{eff}^{21} &= \lambda\sqrt{2} + j\sqrt{2}\Gamma_1 \cdot 2.6 \cdot 10^{-3}\end{aligned}\tag{2.64}$$

При сравнении (2.64) с (2.22) и (2.23) мы видим, что ширины внутренних уровней получают добавки порядка килогерц, которые не существенны в масштабах выбранных параметров системы. Тем не менее, не диагональные члены приобретают положительную мнимую добавку. Тем не менее эта добавка на уровне также нескольких кГц по сравнению с величиной связи в 10 МГц не существенна, и, более того, как показывает прямой расчет (который мы здесь не приводим из-за его громоздкости) все собственные значения эффективного гамильтониана, характеризующие резонансы нашей системы, имеют отрицательную мнимую часть, то есть, как и должно быть, лежат в нижней полуплоскости комплексной энергии. Интересно отметить, что в случае если все полюса лежат в одной точке (или иными словами для значений коэффициентов для одной частоты), коэффициенты суперпозиции обладают следующими свойствами. В общем виде, систему уравнений на нахождение собственных функций можно представить как:

$$\begin{pmatrix} |\Psi_1\rangle \\ |\Psi_2\rangle \\ |\Psi_3\rangle \\ |\Psi_4\rangle \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} |\phi_1\rangle \\ |\phi_2\rangle \\ |\phi_3\rangle \\ |\phi_4\rangle \end{pmatrix} \Leftrightarrow \Psi = A\phi \quad (2.65)$$

где A это матрица коэффициентов суперпозиции.

Из свойств нормировки можно записать, что

$$\begin{aligned} \Psi^\dagger &= \phi^\dagger A^T \\ \Psi\Psi^\dagger &= A\phi\phi^\dagger A^T = I \end{aligned}$$

где I это единичная матрица.

Причем для функций должно выполняться $\phi\phi^\dagger = I$, откуда следует, что

$$AA^T = I \quad (2.66)$$

Очевидно, что произведение этих транспонированных матриц есть:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \sum_i \alpha_i^2 & \sum_i \alpha_i \beta_i & \sum_i \alpha_i \gamma_i & \sum_i \alpha_i \delta_i \\ \sum_i \alpha_i \beta_i & \sum_i \beta_i^2 & \sum_i \beta_i \gamma_i & \sum_i \beta_i \delta_i \\ \sum_i \alpha_i \gamma_i & \sum_i \beta_i \gamma_i & \sum_i \gamma_i^2 & \sum_i \gamma_i \delta_i \\ \sum_i \alpha_i \delta_i & \sum_i \beta_i \delta_i & \sum_i \gamma_i \delta_i & \sum_i \delta_i^2 \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

Из равенства (2.67) и (2.66) следует, что для совпадающих полюсов в выражении (2.63) получатся единицы в диагональных элементах и нули в недиагональных. Таким образом, порядки величин в (2.64) представляют собой незначительные отклонения от данного случая с совпадающими полюсами.

Разбиение по классам дает возможность утверждать, что для функций $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_3\rangle$ я получу транспортные коэффициенты идентичные полученным в однофотонном приближении, поскольку и вид матрицы эффективного гамильтониана не сильно отличается от ранее полученного. Таким образом, область применимости результатов и работоспособности однофотонного приближения может быть выражена следующими, в общем-то, стандартными неравенствами:

$$\begin{aligned} \lambda &\gg \Gamma; \lambda \gg \omega_c - \Omega; \\ \omega_c - 10\Gamma &< \omega < \omega_c + 10\Gamma \end{aligned} \quad (2.68)$$

И это хорошо ложится на тот факт, что качественное согласование по наблюдаемым эффектам, а именно фотонной блокады [61] и ангармоничности уровней резонатора при наличии кубита [60], обусловлено тем, что исследуемые в них системы находились в режиме сильной связи и пробный сигнал посылался в полосе резонатора. Дальнейшие исследования

могут быть направлены на аналитическое взятие интегралов возникающих в эффективном гамильтониане и исследование других режимов работы.

Таким образом, полученные результаты могут быть использованы для анализа процессов рассеяния одиночного фотона на структуре кубит–резонатор для режима сильной связи и позволяют учесть, как различные реализации процессов рассеяния, так и оценить вклад каждого из них. Более того, общий характер полученных выражений позволяет оценить свойства и характер интерференции, которая, в рамках данного подхода, представляет собой чисто квантово-механический эффект. Общий характер выражений был продемонстрирован с помощью сравнения с двумя экспериментально полученными эффектами, а именно с фотонной блокадой [61] и ангармоничностью уровней резонатора при наличии кубита [60]. Следует отметить, что полученные результаты не могут быть применены к недавно открытому режиму сверхсильной связи [68]. Основные результаты, представленные в данном разделе, были опубликованы в [69]. Тем не менее, остался открытым вопрос по учету релаксационных свойств самого кубита, который будет решен в следующем разделе.

2.2 Релаксация кубита в многофотонном резонаторе

Как было показано в **Главе 1**, в рамках формализма уравнений эволюций и уравнений Гейзенберга, релаксационные свойства кубита вводятся через оператор Линдблада, который в конечном выражении для транспортных коэффициентов приводит к появлению мнимой части у фундаментальной частоты кубита, т.е. происходит формальная замена $\Omega \rightarrow \Omega - j\gamma$, где

$\gamma = \gamma_{rel} + \frac{\gamma_\phi}{2}$ – это полная релаксация системы, представляющая собой сумму прямой потери

энергии и декогеренцию состояний кубита. Данная замена справедлива только для $N = 1$, и в этом случае из (2.41) ненулевым останется единственный коэффициент T_{11} (который соответствует исходному и конечному состоянию $|k_W\rangle \otimes |g, 0\rangle$, так как другое состояние становится не физическим) и он полностью совпадает с результатом, полученным в рамках формализма уравнений эволюции [40]. При подстановке $N = 1$ в коэффициент T_{11} и с учетом (A1) мы получаем следующее выражение:

$$T_{11}^{N=1} = 1 - j\Gamma \frac{\delta + \Delta}{\text{Det}(E_1)} = 1 - j\Gamma \frac{\omega - \Omega}{\delta^2 + \delta\Delta - \lambda^2 + j\Gamma\delta + j\Gamma\Delta} = 1 - j\Gamma \frac{\omega - \Omega}{(\omega - \Omega)(\omega - \omega_c + j\Gamma) - \lambda^2}. \quad (2.69)$$

Если сравнивать с результатом из [40]:

$$T_{om} = \frac{\kappa}{2} \frac{\omega - \Omega + i\gamma}{[\omega - \Omega + i\gamma] \left(\omega - \omega_c + \frac{j}{2} \kappa \right) - \lambda^2},$$

то мы видим, что если совершить переход от direct-coupled к side-coupled резонатору в соответствие с [27], то можно выделить формальные соответствия $\frac{\kappa}{2} \leftrightarrow \Gamma$ и увидеть, что формальная замена в (2.69) $\Omega \rightarrow \Omega - j\gamma$ даст нам полностью совпадающие результаты. Но, всегда ли данная замена оправдана? Как оказалось – нет, так как такая подстановка справедлива только для $N = 1$, а в случае $N > 1$, при некоторых условиях, приводит к полностью абсурдному результату, что проявляется в бесконечном больших коэффициентах прохождения, которые показаны на Рисунке 2.16. Значения, при которых наблюдается полное расхождение и максимальный коэффициент прохождения при резонансном режиме $\omega_c = \Omega$, подчиняются следующему соотношению:

$$\gamma_{кр} = 2\lambda\sqrt{N-1}, \quad (2.70)$$

что соответствует обращению в ноль величины Ω_R^{N-1} .

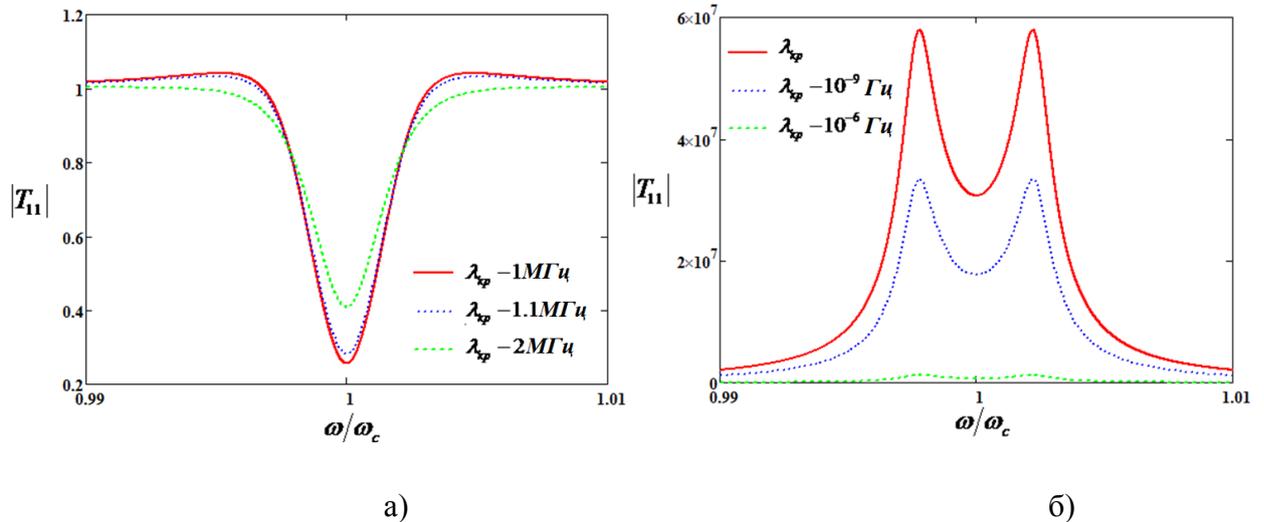


Рисунок 2.16 — Зависимость коэффициента прохождения T_{11} при формальном включении релаксации $\gamma_{кр}$ для $\omega_c = \Omega = 3\text{GHz}$; $\lambda = 4\text{MHz}$; $N = 3$; а) при большой отстройке от критического значения связи $\lambda_{кр}$ б) при малой отстройке от критического значения связи $\lambda_{кр}$

Таким образом, остается открытым вопрос о правильном учете влияния релаксации кубита на транспортные характеристики одиночного фотона при произвольном числе фотонов в резонаторе. Для решения данного вопроса мы рассмотрим следующий гамильтониан системы, в котором релаксацию кубита учтем через введение локального осцилляторного термостата.

$$H = \frac{1}{2} \hbar \Omega \hat{\sigma}_Z + \hbar \omega_C \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_k \hbar \omega_k \hat{c}_k^\dagger \hat{c}_k + \hbar \xi \sum_k (\hat{c}_k^\dagger \hat{a} + \hat{c}_k \hat{a}^\dagger) + \hbar \lambda (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) \hat{\sigma}_x + \sum_l \hbar \omega_l \hat{b}_l^\dagger \hat{b}_l + \hat{\sigma}_x \sum_l \gamma_l (\hat{b}_l^\dagger + \hat{b}_l), \quad (2.71)$$

где последние два слагаемых описывают термостат (частота ω_l и бозонные операторы $\hat{b}_l^\dagger, \hat{b}_l$) и его взаимодействие с двухуровневой системой (γ_l – постоянная взаимодействия). Хочется обратить внимание, что в (2.71) взаимодействие кубита и резонатора записано не в модели Джейнса-Каммингса, нежели в (2.1). Сделано это намерено, с целью демонстрации того, как RWA (rotating wave approximation) определяется в рамках данного формализма и как можно перейти к задачам без данного приближения.

Состояние, означающее возбуждение осциллятора в термостате, обозначим как $|p_\gamma\rangle$. Тогда в рассматриваемой задаче по однофотонному транспорту можно ввести следующие векторы состояний:

$$\begin{aligned} |G_\gamma\rangle &= |0_W\rangle \otimes |L_N\rangle \otimes |0_\gamma\rangle; \\ |E_\gamma\rangle &= |0_W\rangle \otimes |H_N\rangle \otimes |0_\gamma\rangle, \end{aligned} \quad (2.72)$$

которые описывают ситуацию, когда в волноводе отсутствует фотон, и атом находится либо в основном, либо в возбужденном состоянии. Данные состояния условно можно принять за исходные, и поскольку исходное число фотонов N выбирается произвольно, это ни на что в дальнейшем не повлияет. Теперь возможны следующие варианты эволюции этих векторов. Либо

$$\begin{aligned} |K_{G_\gamma}\rangle &= |k_W\rangle \otimes |L_{N-1}\rangle \otimes |0_\gamma\rangle; \\ |K_{E_\gamma}\rangle &= |k_W\rangle \otimes |H_{N-1}\rangle \otimes |0_\gamma\rangle, \end{aligned} \quad (2.73)$$

когда из резонатора в волновод испустился один фотон. Либо возбужденный атом отдаст энергию в термостат:

$$|C_\gamma\rangle = |0_W\rangle \otimes |L_{N-1}\rangle \otimes |p_\gamma\rangle. \quad (2.74)$$

Мы не учитываем состояние $|k_W, p_\gamma, g, N-2\rangle$, поскольку амплитуда вероятности перехода в него, в рамках однофотонных взаимодействий, из состояний (2.72) равна нулю, что будет показано далее. Решать задачу мы также будем в рамках формализма неэрмитового

гамильтониана, но с другим математическим подходом, поскольку он более удобен в случае, когда число внутренних состояний меньше числа внешних состояний, что будет видно из дальнейших выкладок.

2.2.1 Неэрмитовый гамильтониан в другом представлении

Если мы обратим внимание на форму неэрмитового гамильтониана, полученную в предыдущем разделе, то заметим, что его можно представить в следующем виде:

$$\hat{H}_{eff}(E) = H_{внутр} + H_{расп}(E), \quad (2.75)$$

где $H_{внутр}$ представлено в базисе гибридизированных внутренних состояний (см. формулу (2.12) и Рисунок 2.5), или, иными словами, представляет собой диагонализированную матрицу $H_{Q'Q'}$, определяемую через следующие проекционные операторы:

$$Q' = |\chi_1^N\rangle\langle\chi_1^N| + |\chi_2^N\rangle\langle\chi_2^N|, \quad (2.76)$$

$$P' = |k_W\rangle\langle k_W| \otimes (|\varphi_1^{N-1}\rangle\langle\varphi_1^{N-1}| + |\varphi_2^{N-1}\rangle\langle\varphi_2^{N-1}|) \otimes |C_\gamma\rangle\langle C_\gamma|, \quad (2.77)$$

С переопределением проекционных операторов, безусловно, изменится и формальный вид проекций гамильтониана (2.1) и эффективного гамильтониана (2.22)-(2.23), подробности расчета указаны в *Приложении Б*. Такая запись (2.75), с учетом явного вида матричных элементов эффективного гамильтониана, дает возможность представить эффективный гамильтониан как:

$$\hat{H}_{eff}(E) = H_{внутр} - j \frac{W}{2}, \quad (2.78)$$

где W представляет собой неэрмитовую часть, которая определяется амплитудами перехода, и формально представима в виде:

$$W_{ij} = \sum_c A_i^c A_j^{c*}, \quad (2.79)$$

где c – было определено нами как внешние состояния континуума, представляющие собой каналы распада для внутренних состояний (2.73)-(2.74).

Сопоставим данные выражения (2.78) и (2.79) с явно рассчитанным значением эффективного гамильтониана H_{eff}^{GG} :

1) Исходная запись для расчета данного матричного элемента была представлена в (2.19), откуда мы делаем следующий вывод, что

$$а) \langle G | H_{внутр} | G \rangle = \langle G | \hat{H}_{QQ} | G \rangle$$

в представлении (2.19) мы рассчитывали распад в гибридизированные состояния (2.12), поэтому каналы распада представляют собой функции $|\Psi_1\rangle$ и $|\Psi_2\rangle$.

$$б) -j \frac{W_{GG}}{2} = -j \frac{1}{2} (W_{GG}^{1c} + W_{GG}^{2c}) \text{ и}$$

$$-jW_{GG}^{1c} = \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | \Psi_1 \rangle \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_1 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle = -j2A_G^{\Psi_1} A_G^{*\Psi_1},$$

$$-jW_{GG}^{2c} = \frac{L}{2\pi} \int dk \langle G | \hat{H}_{QP} | \Psi_2 \rangle \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon} \langle \Psi_2 | \hat{H}_{PQ} | G \rangle = -j2A_G^{\Psi_2} A_G^{*\Psi_2},$$

в)

$$-jA_G^{\Psi_1} A_G^{*\Psi_1} = \left[\frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N |\alpha_1^{N-1}|^2 \int dk \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \right] = -2 \frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N \alpha_1^{N-1} \alpha_1^{N-1*} \frac{2\pi j}{\hbar v_g},$$

$$-jA_G^{\Psi_2} A_G^{*\Psi_2} = \left[\frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N |\alpha_2^{N-1}|^2 \int dk \frac{1}{E - E_2(k) + i\varepsilon} \right] = -2 \frac{L}{2\pi} \hbar^2 \xi^2 N \alpha_2^{N-1} \alpha_2^{N-1*} \frac{2\pi j}{\hbar v_g},$$

Хочется обратить внимание на то, что интегралы в данных выражениях могут содержать пространственные экспоненты, которые будут определять фазу комплексных амплитуд перехода, и, как будет показано далее, для многокубитных структур будут «причиной» интерференционных эффектов в них.

2) последние выражения дают нам основания найти непосредственно амплитуды перехода:

$$\begin{aligned} A_G^{\Psi_1} &= \alpha_1^{N-1} \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; & A_G^{*\Psi_1} &= \alpha_1^{N-1*} \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; \\ A_G^{\Psi_2} &= \alpha_2^{N-1} \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; & A_G^{*\Psi_2} &= \alpha_2^{N-1*} \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}, \end{aligned} \quad (2.80)$$

то есть мы видим, что амплитуды распада из внутреннего состояния $|G\rangle$ (кубит в основном состоянии) в состояние $|\Psi_i\rangle = \alpha_i^{N-1} |L_{N-1}\rangle + \beta_i^{N-1} |H_{N-1}\rangle$ пропорциональны коэффициенту гибридизации внешних состояний α_i^{N-1} , который стоит перед вектором, когда кубит также находится в основном состоянии. Безусловно, это не совсем корректный результат, поскольку в случае $N > 1$ распаду подвергается гибридизированное внутреннее состояние, и в конечное выражение для амплитуд (2.80) войдут её коэффициенты суперпозиции. Заходя вперед, можно сказать, что при дальнейшей работе, в рамках представления (2.78), мы должны учитывать

гибридизацию внутренних состояний (так как аппарат сводится к рассмотрению внутренних состояний), чтобы получить корректный результат, что не обязательно в рамках представления (1.34), где наличие такой гибридации учитывалось автоматически, поскольку аппарат сводился к рассмотрению с точки зрения внешних состояний. Обобщая можно сказать, что:

- если мы работаем в представлении (2.11) и у нас имеются гибридизированные состояния, то нам достаточно учесть только гибридизацию внешних состояний;
- если мы работаем в представлении (2.78) и у нас имеются гибридизированные состояния, то нам достаточно учесть только гибридизацию внутренних состояний.

Таким образом, мы убедились в необходимости гибридации внутренних состояний. Кстати говоря, в этом случае можно отказаться от гибридации внешних состояний. Интересно, что в этом случае получится так, что все сведется к формальной замене $\alpha_i^{N-1}(\beta_i^{N-1}) \rightarrow \alpha_i^N(\beta_i^N)$ в (2.77), так как суперпозиция внутренних состояний представляет собой $|\chi_i\rangle = \alpha_i^N |H_N\rangle + \beta_i^N |L_N\rangle$. В этом случае, можно W представить в матричном виде [42]:

$$W = 2\pi \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger, \quad (2.81)$$

где $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{\chi_1}^{K_{G\gamma}} & A_{\chi_1}^{K_{E\gamma}} & A_{\chi_1}^{C_\gamma} \\ A_{\chi_2}^{K_{G\gamma}} & A_{\chi_2}^{K_{E\gamma}} & A_{\chi_2}^{C_\gamma} \end{pmatrix}$ и

$$A_{\chi_1}^{K_{G\gamma}} = \alpha^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; A_{\chi_1}^{K_{E\gamma}} = -\beta^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; A_{\chi_1}^{C_\gamma} = \beta^N \gamma \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L_{bath}}{v_g^{bath}}}; \quad (2.82)$$

$$A_{\chi_2}^{K_{G\gamma}} = -\beta^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; A_{\chi_2}^{K_{E\gamma}} = \alpha^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N-1}; A_{\chi_2}^{C_\gamma} = \alpha^N \gamma \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L_{bath}}{v_g^{bath}}}. \quad (2.83)$$

В выражениях (2.82) и (2.83) L_{bath} представляет собой эффективный объём термостата в одномерном случае, и, к примеру, может определяться плотностью дефектов в подложке вблизи точки размещения квантового бита; v_g^{bath} – групповая скорость частиц (квантов энергии) в термостате, и если мы говорим об основном вкладе со стороны дефектов в твердом теле, то предполагаем, что данная скорость, скорее всего, определяется как скорость электромагнитной волны. При получении амплитуд переходов в термостатные состояния, мы, при взятии интеграла, брали приближение линейной дисперсии волнового вектора термостатных частиц от частоты поглощенных фотонов.

В обратимых относительно времени системах, коэффициенты суперпозиции, а, следовательно, и амплитуды перехода, являются чисто действительными числами, то есть:

$$\mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^T. \quad (2.84)$$

Данное тождество справедливо лишь в тех случаях, когда амплитуды перехода не содержат пространственных экспонент, и в нашем случае справедливо лишь для однокубитных структур. В **Главе 3** будет показано, что наличие пространственной экспоненты, фактически, означает нарушение обратимости по времени и позволяет учесть влияние немарковских процессов в многокубитных системах.

Согласно (1.39) переходы между внешними состояниями (2.73)-(2.74) (с участием внутренних состояний), описываются матрицей T_Q :

$$T_Q = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{g}(E) \mathbf{A},$$

$$\langle i | T_Q | j \rangle \equiv T_{Q,i,j} = \sum_\nu \langle i | K | \nu \rangle \langle \nu | \left[1 + \frac{j}{2} K \right]^{-1} | j \rangle, \quad (2.85)$$

где индекс ν относится к внешним состояниям. Безусловно, присутствуют процессы, соответствующие переходам без участия внутренних состояний, которые описываются матрицей T_P , при этом полная матрица переходов представляет собой сумму

$$T = T_P + T_Q.$$

Связь матрицы переходов с матрицей рассеяния задается следующим уравнением:

$$S_{i,j} = 1 - jT_{i,j} = -jT_P + \frac{1 - \frac{j}{2} K(E)}{1 + \frac{j}{2} K(E)}. \quad (2.86)$$

Рассчитывая таким образом элементы матрицы рассеяния S , можно получить аналитические выражения, описывающие транспорт единичного фотона в однокубитной структуре с N фотонами в резонаторе и с учетом затухания кубита.

При этом выражения для элементов матрицы переходов записываются следующим образом:

$$T_{11} = \langle \varphi_1 | T | \varphi_1 \rangle = \Gamma_w \frac{1}{4\Omega'_R D_1} \left[\frac{N(\Omega'_R + \Delta)(2\delta_t + \Delta + \Omega'_R) + (N-1)(\Omega'_R - \Delta)(2\delta_t - \Delta + \Omega'_R)}{+2j\Gamma_w N(N-1)\Omega'_R + 8\lambda^2 N(N-1) + i\Gamma_q N\Omega'_R + i\Delta\Gamma_q N} \right], \quad (2.87)$$

$$T_{22} = \langle \varphi_2 | T | \varphi_2 \rangle = \Gamma_w \frac{1}{4\Omega'_R D_2} \left[\frac{N(\Omega'_R - \Delta)(2\delta_t + \Delta - \Omega'_R) + (N-1)(\Omega'_R + \Delta)(2\delta_t - \Delta - \Omega'_R)}{+i2\Gamma_w N(N-1)\Omega'_R - 8\lambda^2 N(N-1) + i\Gamma_q \Omega'_R N - i\Gamma_q \Delta N} \right], \quad (2.88)$$

$$T_{21} = \langle \varphi_2 | T | \varphi_1 \rangle = -\Gamma_w \frac{\lambda\sqrt{N-1}}{2\Omega'_R D_1} \left[2\delta_t - \Omega'_R - \Delta + iN\Gamma_q \right], \quad (2.89)$$

$$T_{12} = \langle \varphi_1 | T | \varphi_2 \rangle = -\Gamma_w \frac{\lambda\sqrt{N-1}}{2\Omega'_R D_2} \left[2\delta_t + \Omega'_R - \Delta + iN\Gamma_q \right], \quad (2.90)$$

где D_i содержат в себе комплексные резонансы системы:

$$\begin{aligned} D_1 &= (\omega - \omega_{1+})(\omega - \omega_{1-}); \\ D_2 &= (\omega - \omega_{2+})(\omega - \omega_{2-}); \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$\begin{aligned} \omega_{1\pm} &= \omega_c - \frac{\Omega_R^{N-1}}{2} - \frac{i}{4}(\Gamma_w(2N-1) + \Gamma_q) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\Delta - \frac{j}{2}(\Gamma_w - \Gamma_q) \right]^2 + 4\lambda^2 N}; \\ \omega_{2\pm} &= \omega_c + \frac{\Omega_R^{N-1}}{2} - \frac{i}{4}(\Gamma_w(2N-1) + \Gamma_q) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left[\Delta - \frac{j}{2}(\Gamma_w - \Gamma_q) \right]^2 + 4\lambda^2 N}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

здесь введены расстройки $\Delta = \omega_c - \Omega$ и $\delta_t = \omega - \omega_c$, а также постоянные спонтанного излучения из резонатора в волновод $\Gamma_w = 2\frac{\xi^2}{v_g}L$ и релаксация кубита $\Gamma_q = 2\frac{\gamma^2}{v_g}L_{bath}$. Мы видим, что

$\Gamma_w = 2\Gamma$ и $\Gamma_q = 2\gamma_q$, где Γ взята из (2.22), а γ_q взята из (Б1). Такая замена в уравнениях (2.87)-(2.92) вкупе с $\Gamma_q = 0$ дает нам результаты, полученные в предыдущем разделе. Более подробный расчет элементов матрицы T без учета гибридизации внешних состояний приведен в *Приложении В*. Очевидно, что используя выражения для гибридизированных внешних состояний, можно придти к выражениям (2.87)-(2.90)

Формулы (2.87)-(2.90) учитывают как влияние взаимодействий на амплитуду, так и на фазу регистрируемого фотона на выходе системы. Так, при процессах соответствующих (2.87) и (2.88), внутренняя система и энергия налетающего фотона остаются без изменений, что соответствует потенциальному рассеянию фотона. В случаях неупругого рассеяния (2.89) и (2.90) энергия фотонов изменяется на $\pm\hbar\Omega'_R$, что также напрямую следует из закона сохранения энергии (для случая, когда мы пренебрегаем потерями). Резонансные частоты (2.92) соответствуют квадруплету, чисто квантовому проявлению эффекта, известного как триплет Моллоу. Основное отличие состоит в расщеплении центрального пика на два условно «центральных», при этом стандартные «боковые» пики триплета сохраняются. Типичный вид описанной амплитудно-частотной характеристики для процессов потенциального рассеяния, соответствующих (2.87) и (2.88), представлен на Рисунке 2.17.

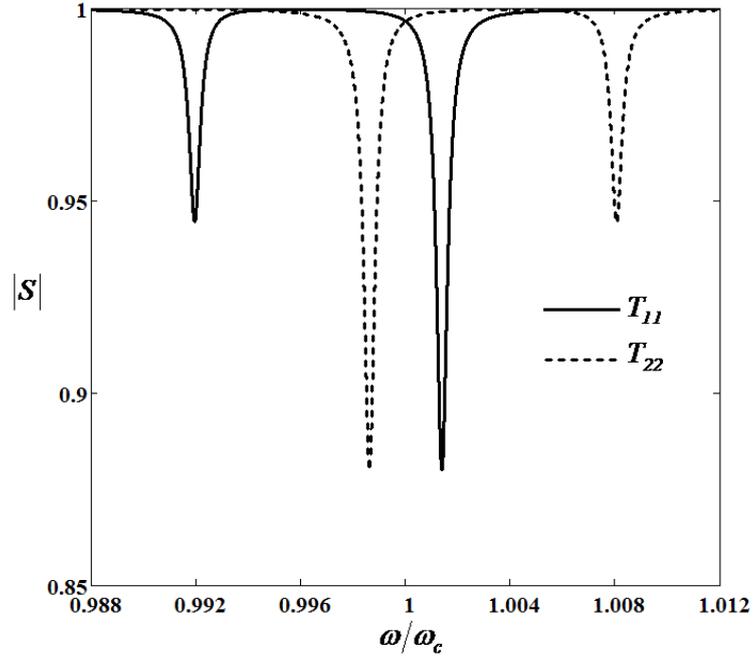


Рисунок 2.17 — Амплитудно-частотная характеристика в сильном резонансном режиме для потенциального рассеяния. Параметры системы: $\Omega=3$ ГГц, $\omega=3$ ГГц, $\Gamma_w=1$ МГц, $\lambda=10$ МГц, $\gamma^2=0.1\Gamma$, $N=2$

Перейдем к анализу комплексных корней (2.92). Видим, что в части, находящейся под корнем, затухание входит стандартно и независимо от числа фотонов N . При этом увеличение числа фотонов приводит к большему расщеплению Раби-уровней. Часть, находящуюся не под корнем, для лучшего понимания, можно представить в виде:

$$\left(\omega_c - \frac{i}{2} \Gamma_w N + \frac{i}{4} \Gamma_w \right) \mp \frac{1}{2} \left[\Omega_R^{N-1} \pm \frac{i}{2} \Gamma_q \right], \quad (2.93)$$

то есть затухание кубита, не зависящее от N , добавляется к Раби-частоте, а не к частоте кубита. Также следует отметить, что положение резонанса всегда будет слабо зависеть от величины релаксации, поскольку часть, находящаяся под корнем, даже при нулевой Δ , будет действительной при малой разности $\Gamma_q - \Gamma_w$. Все рассуждения касательно граничного значения релаксации могут быть применены и для зависимостей ширин комплексных резонансов.

Более того, видно, что с ростом числа фотонов увеличивается ширина резонанса и падает его амплитуда на определенной частоте, что экспериментально наблюдалось в работе [7]. На Рисунке 2.18 представлены АЧХ для разного числа фотонов в резонаторе вблизи боковых пиков, поскольку удобно смотреть именнорядом с последними, так как они примерно пропорциональны $\omega_c \pm \left(\frac{\Omega_R^{N-1}}{2} + \frac{\Omega_R^N}{2} \right)$, а центральные пики — $\omega_c \pm \left(\frac{\Omega_R^{N-1}}{2} - \frac{\Omega_R^N}{2} \right)$.

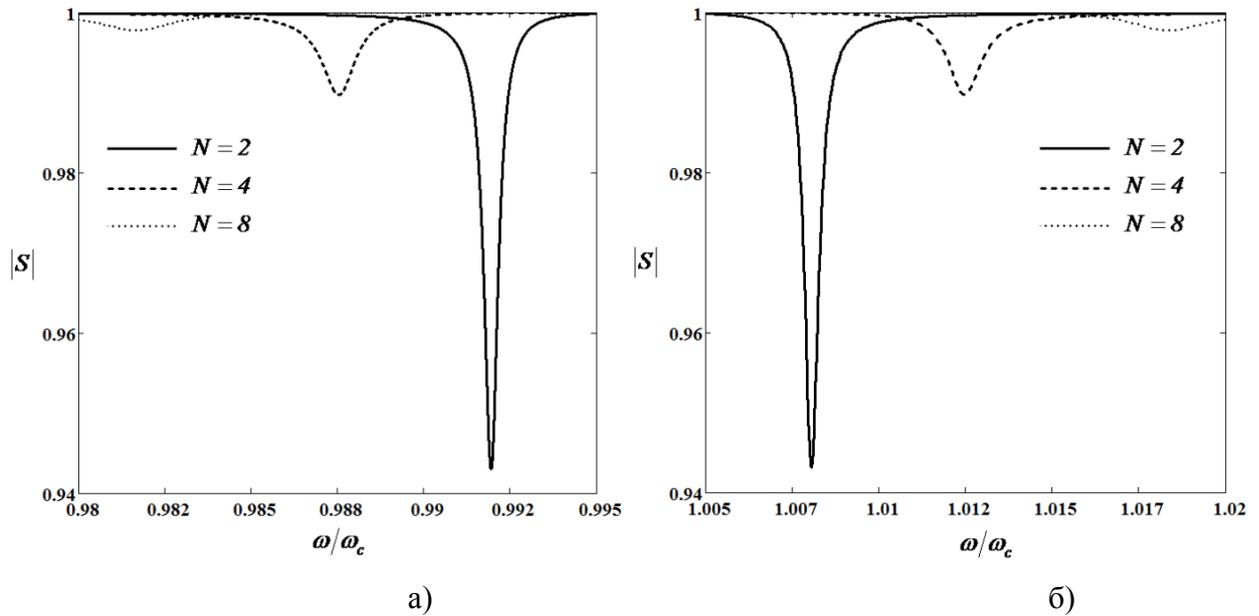


Рисунок 2.18 — Амплитудно-частотные характеристики коэффициента прохождения на боковых резонансах а) в сильном резонансном режиме T11. б) в сильном резонансном режиме T22. Параметры системы те же, что и для Рисунка 2.14

Для сильного дисперсионного режима отличие АЧХ от тех, что представлены на Рисунке 2.18 будет состоять в том, что пики будут расположены гораздо ближе, а большие провалы будут вблизи боковых резонансов, а не центральных.

Моделирование и анализ

Для начала рассмотрим достаточно простой случай, когда $N = 1$. Можем заметить, что при этом все коэффициенты, кроме (2.87), будут равны константам либо 1, либо 0. При этом выражение (2.87) упрощается к виду:

$$T_{11} = \frac{\Gamma_w}{2} \frac{\omega - \Omega + \frac{i}{2} \Gamma_q}{\left[\omega - \left(\Omega - \frac{i}{2} \Gamma_q \right) \right] \left(\omega - \left(\omega_c - \frac{j}{2} \Gamma_w \right) \right) - \lambda^2}.$$

Данное выражение совпадает с тем, что получается при решении уравнения эволюции с Линдбладдианом [40]. В этом случае мы видим, что затухание вводится простым переходом к комплексным фундаментальным частотам. Эта формула была проверена многочисленными экспериментами [7; 70-72].

На Рисунке 2.19 показаны зависимости амплитуды и фазы коэффициентов прохождения от параметра релаксации при различном числе фотонов в резонаторе вблизи фундаментальной частоты резонатора («центральные» пики). При этом, параметры системы таковы, что $\omega_c = \Omega$. На фундаментальной частоте изменение числа фотонов на единицу приводит к значительным

изменениям, как фазы, так и амплитуды сигнала после потенциального рассеяния. При наличии одного фотона у нас остается лишь одно состояние из (2.72), при котором в резонаторе не остается фотонов ни до, ни после процесса рассеяния, поэтому фаза сигнала не изменяется, поскольку формально это «тот же самый» фотон. Параметр взаимодействия между фотонами и кубитом является эффективно малым, и это приводит к тому, что амплитуда сигнала близка к единице при малых величинах релаксации кубита, с их ростом амплитуда уменьшается по стандартному процессу диссипации энергии в термостат.

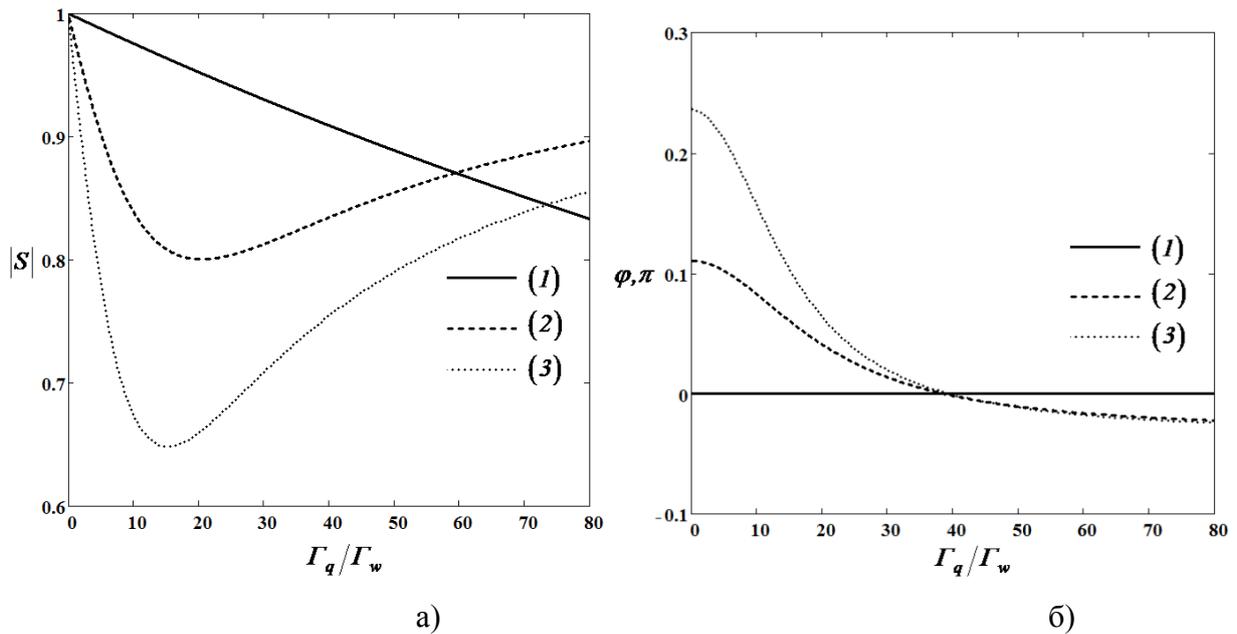


Рисунок 2.19 — Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) коэффициента прохождения T_{11} на фундаментальной частоте резонатора. Сплошная линия соответствует формуле из [40], пунктирные линии 2 и 3 соответствуют двум и трем фотонам соответственно. Параметры системы те же, что и для Рисунка 2.14

Добавление дополнительного фотона в резонатор предполагает, что процесс взаимодействия фотонов с атомом происходит еще до процесса рассеяния, и сам процесс становится менее тривиальным. По виду фазовой зависимости на Рисунке 2.19 (б) можно предположить, что при малых значениях релаксации ($\Gamma_q \ll \Gamma_w$) обратно в волновод вылетает фотон, успевший многократно провзаимодействовать с атомом. Этим же можно и объяснить быстрое уменьшение амплитуды сигнала, поскольку все фотоны через различные виртуальные переходы, автоматически учитывающиеся в данном формализме, теряют часть энергии. При дальнейшем увеличении постоянной релаксации атома, амплитуда растет, и фаза коэффициента прохождения приближается к нулю, что говорит о том, что после рассеяния в волноводе наиболее вероятно зарегистрировать «тот же самый» фотон. С другой стороны, точка минимума

на амплитудной характеристике, как мы предполагаем, соответствует такому соотношению между параметрами релаксации и скорости испускания фотона из резонатора в волновод, когда фотоны в резонаторе (в нашей задаче их число «поддерживается» постоянным для каждого акта рассеяния) вероятнее отдают свою энергию в термостат, чем участвуют в волноводном транспорте. С ростом релаксации эффективно приближается ситуация, когда $N=1$ и релаксация мала (черная сплошная) на Рисунке 2.20.

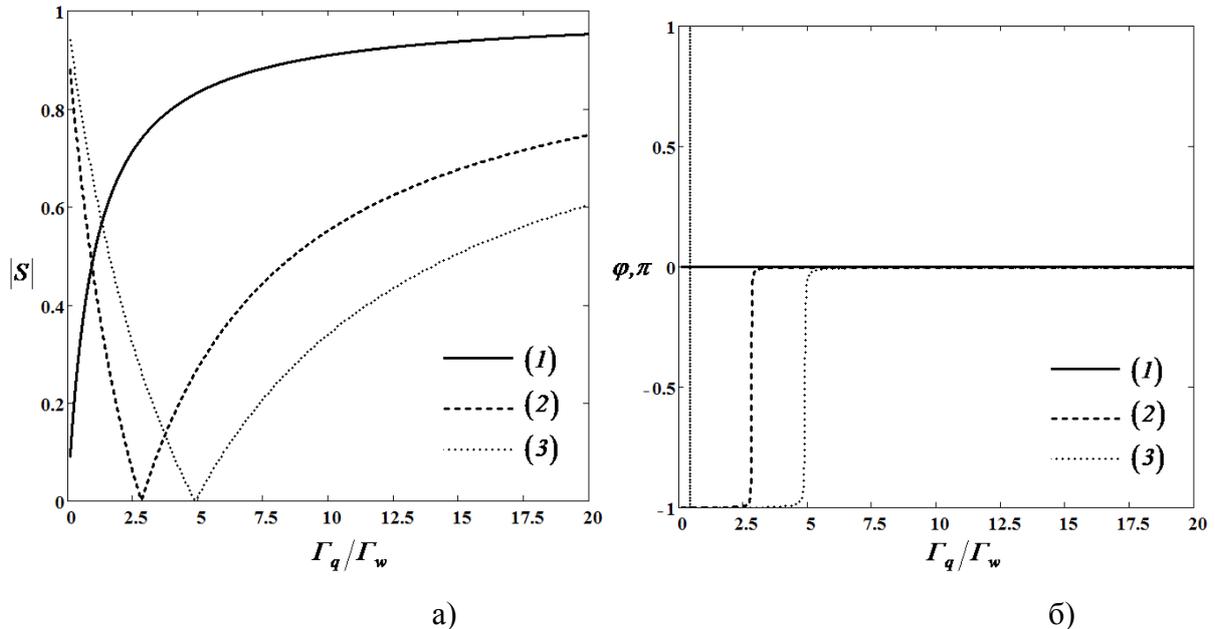


Рисунок 2.20 — Зависимость амплитуды (а) и фазы (б) коэффициента прохождения T_{11} на боковых резонансах от релаксации кубита в сильном резонансном режиме. Сплошная линия соответствует формуле из [40], пунктирные линии 2 и 3 соответствуют двум и трем фотонам. Параметры системы: $\Omega=3$ ГГц, $\omega=3$ ГГц, $\Gamma=0.1$, $\lambda=10$ МГц

В случае регистрации фотонов на боковых частотах, ситуацию уже не так легко описать, поскольку взаимодействие через виртуальные уровни в резонаторе носит весьма сложный характер. Из Рисунка 2.17 можно сделать вывод лишь о том, что при двух фотонах не происходит взаимодействия фотонов с атомом, и поэтому, наиболее вероятно зарегистрировать «тот же самый» фотон, так как частота сигнала достаточно далека от Ω . Это следует из того факта, что фаза практически не меняется с ростом релаксации. Тем не менее, при малых значениях релаксации существенна разница в амплитуде проходящего сигнала для разного числа фотонов резонаторе. Поскольку амплитуда S_{11} может быть интерпретирована как вероятность обнаружить фотон в волноводе после потенциального рассеяния, то с увеличением числа фотонов в резонаторе, и при их малой диссипации в термостат, растет и вероятность вылета фотона в волновод, что интуитивно кажется логичным. С ростом релаксации, различие между ситуациями с разным числом фотонов уменьшается, что, как предполагалось ранее,

свидетельствует об эффективном наличии только одного фотона в резонаторе. Более того, с ростом релаксации вероятность обнаружить фотон на этой частоте растет, что также означает уменьшение вероятности перехода между одетыми состояниями из P и Q подпространствами, поскольку в этом случае Раби-колебания затухают быстрее (время жизни одетых состояний уменьшается), чем фотон успевает высветиться в волновод. На Рисунке 2.20 мы видим, что с ростом релаксации амплитуда приближается к единице даже для случая $N = 1$. Это означает «расползание» центрального провала, что формально соответствует тому, что при сильно больших постоянных релаксации, вероятность фотона провзаимодействовать с системой приближается к нулю, и соответственно вероятность зарегистрировать его в волноводе – к единице (это также видно по фазовой характеристике). В случаях $N = 2, 3$ видно, что эта вероятность падает до какого-то значения релаксации Γ_q^{2p} , а после начинает также приближаться к единице. Γ_q^{2p} определяется как числом фотонов в резонаторе, так и постоянной испускания фотонов в волновод. Эту величину можно интерпретировать следующим образом, при $\Gamma_q < \Gamma_q^{2p}$ Раби-колебания между одетыми состояниями затухают медленно, так что вероятность фотона попасть в систему (определяемая Γ_w и наличием одетых уровней) отлична от нуля. После попадания фотона в систему, есть вероятность фотона рассеяться в термостат, при этом падает вероятность обнаружить фотон в волноводе. При $\Gamma_q > \Gamma_q^{2p}$ одетые состояния пропадают раньше, чем фотон успевает провзаимодействовать с системой (при условии, что $\Gamma_w < \Gamma_q$), а также, пропадают все уровни, на которые может попасть фотон, кроме одного $|K_G\rangle$, поэтому зависимость приближается к случаю $N = 1$. Этот эффект схож с эффектом блокады.

Одетые состояния полностью пропадают, когда все фотоны в резонаторе рассеиваются в термостат, а поскольку скорость рассеивания в термостат определяется величиной Γ_q , то с ростом числа фотонов граничное значение релаксации сдвигается в сторону больших величин, аналогичный эффект происходит с увеличением Γ_w . При этом интересно отметить, что независимо от величины Γ_w , относительное положение граничных релаксаций сохраняется и для приведенных чисел фотонов в резонаторе будет равно: $\Gamma_q^{N=2} / \Gamma_w \approx 2.83$; $\Gamma_q^{N=3} / \Gamma_w \approx 4.9$.

Фотонная блокада проявляется при малом числе фотонов в резонаторе, и поскольку, как было сказано ранее, эффект проявляется в резком изменении коэффициента прохождения фотона на определенной частоте при изменении числа фотонов на единицу, можно ввести функцию, описывающую степень этого изменения:

$$P = \frac{|T(\omega(N), N)|}{|T(\omega(N), N+1)|}, \quad (2.94)$$

где $\omega(N) = \omega_c \pm \left(\frac{\Omega'_R}{2} - \frac{\Omega_R}{2} \right)$ – частота, соответствующая провалам на АЧХ. То есть при проявлении фотонной блокады P будет сильно отличаться от единицы.

На Рисунке 2.21 показано, что в диапазоне малого числа фотонов, где $\Omega_R \neq \Omega'_R$, явно проявляется фотонная блокада, которая при увеличении числа фотонов исчезает, т.е. $P=1$. В зависимости от частоты налетающего фотона, блокада будет происходить при различных исходных состояниях. Напомним, что T_{11} соответствует процессу рассеяния, когда исходно система находилась на верхнем уровне и после взаимодействия осталась на нем же. Аналогично T_{22} соответствует потенциальному рассеянию из исходного нижнего уровня.

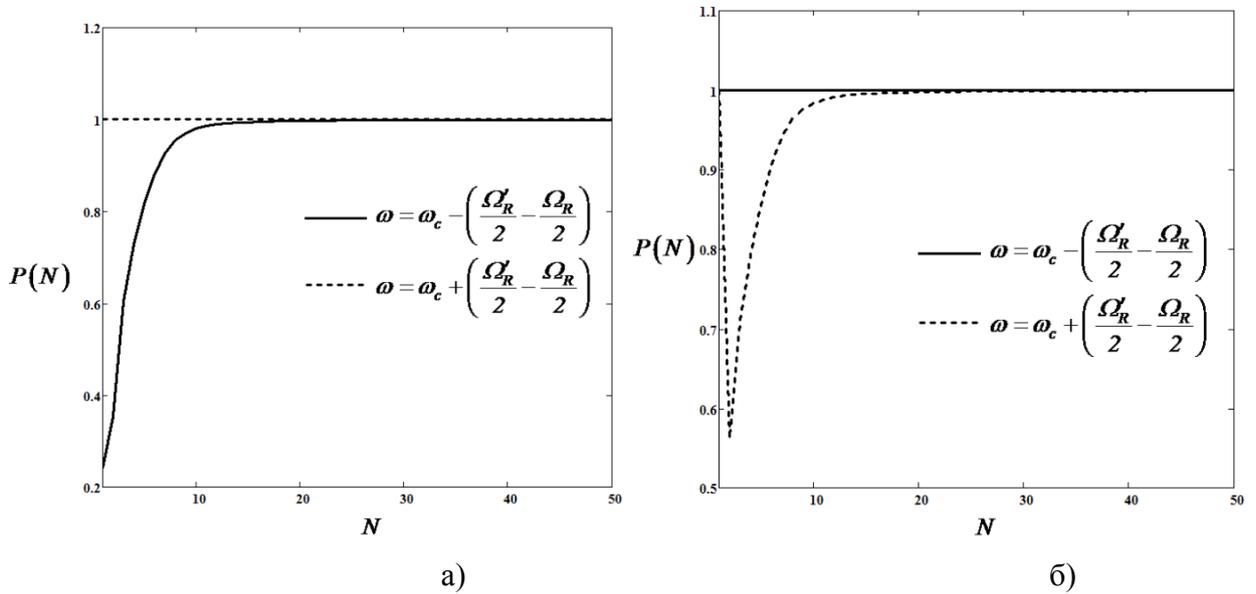


Рисунок 2.21 — Фотонная блокада на различных резонансных частотах при исходном состоянии (а) $|\varphi_1\rangle$ и (б) $|\varphi_2\rangle$

В данном разделе нами были получены аналитические выражения в чистом квантовом режиме, описывающие вероятности процессов потенциального и не потенциального рассеивания одиночного фотона на однокубитной системе с резонатором, в котором имеются N фотонов. Выражения получены с учетом затухания кубита. Было показано, что для $N > 1$ параметр релаксации кубита входит нетривиально, поскольку учитываются взаимодействия системы с термостатом во всех порядках, поэтому, в отличие от уравнений эволюции, не приходится искусственно обрывать цепочку уравнений для операторов. Полученные формулы, в квазистационарном приближении, описывают изменение вероятности обнаружения фотона при различных соотношениях между постоянными релаксации и испускания фотонов в

волновод, и могут быть использованы для описания эффекта фотонной блокады. Полученные выражения (2.87)-(2.91) могут быть использованы для случая когда $\left| \frac{\omega_c - \Omega}{\omega_c} \right| < 1$, так как мы учитывали только однофотонное взаимодействие.

2.3 Экспериментальная часть

В данном разделе будет описан ряд экспериментов с однокубитной структурой, приведены способы извлечения основных параметров из результатов одно- и двухчастотного возбуждений системы кубит-резонатор. Часть данных результатов была опубликована в двух статьях [70] и [72] в соавторстве с коллегами из ЛККЭ (Лаборатория квантовой криогенной электроники), наибольший вклад автором данной диссертации был внесен со стороны обработки полученных данных и их интерпретации. Другая часть данных описана только в рамках данной работы и представляет собой интерес лишь с точки зрения проверки полученных выражений в двух предыдущих разделах.

Сверхпроводниковый полуволновый резонатор и потоковый кубит были изготовлены за два технологических цикла в чистой комнате Института фотонных технологий города Йена, Германия. Для создания тонкопленочного резонатора использовалась технология вакуумного напыления, а для создания контактов Джозефсона, прерывающих сверхпроводниковое кольцо, что вкупе создает потоковый кубит, использовалась технология теневого напыления. Материал пленки резонатора – Nb, толщиной 200 нм. Пленка была напылена на слаболегированную высокоомную кремниевую подложку. Структура резонатора вместе с подводящими копланарными линиями на кристалле была согласована на 50 Ом. На Рисунке 2.22 показано, что кубит расположен в центральной части, где имеется сужение копланарной линии резонатора, что обеспечивает большой коэффициент связи (поскольку потоковый кубит чувствителен к потоку магнитного поля, величина связи отчасти определяется магнитным полем, которое индуцируется токами, протекающими по копланарной линии резонатора, которые тем больше, чем уже линия). Фундаментальная мода резонатора равна частоте $f_c = 2.59 ГГц$, ширина резонансной линии – $\frac{\Gamma_w}{2} = 25 \text{ } \mu\text{Гц}$, что соответствует добротности $Q = 10^5$.

Эксперимент проводился в рефрижераторе растворения BF-LD400 при номинальной температуре 10 мК. Для того чтобы уменьшить воздействие внешних электромагнитных помех

использовался магнитный экран с коэффициентом подавления 100 для постоянного магнитного поля и более 8000 для переменного электромагнитного поля, в полосе частот от 10 Гц и выше. Во всех экспериментах измерялся коэффициент прохождения с помощью векторного анализатора цепей ZVL13, компании Rohde and Schwartz с разрешением по частоте 1 Гц и точностью измерения коэффициента прохождения 0,2 дБ в диапазоне частот от 9 кГц до 13 ГГц. Мощность на выходе генератора векторного анализатора цепей регулировалась от 0 дБм до -70 дБм, которая в совокупности с аттенюаторами во входной линии (см. Рисунок 2.22) и, с учетом потерь в ней, обеспечивала мощность на входе в образец от -70 дБм до -140 дБм. На выходе образца использовался криогенный малошумящий усилитель с коэффициентом усиления, в исследуемой полосе от 2 до 3 ГГц, равным 35 дБ. Поскольку измерения проводятся векторным анализатором цепей, мы можем регистрировать только потенциальное рассеяние, так как данный прибор сравнивает амплитуды сигналов на одной и той же частоте. Схема измерительной установки представлена на Рисунке 2.22

Для спектроскопии

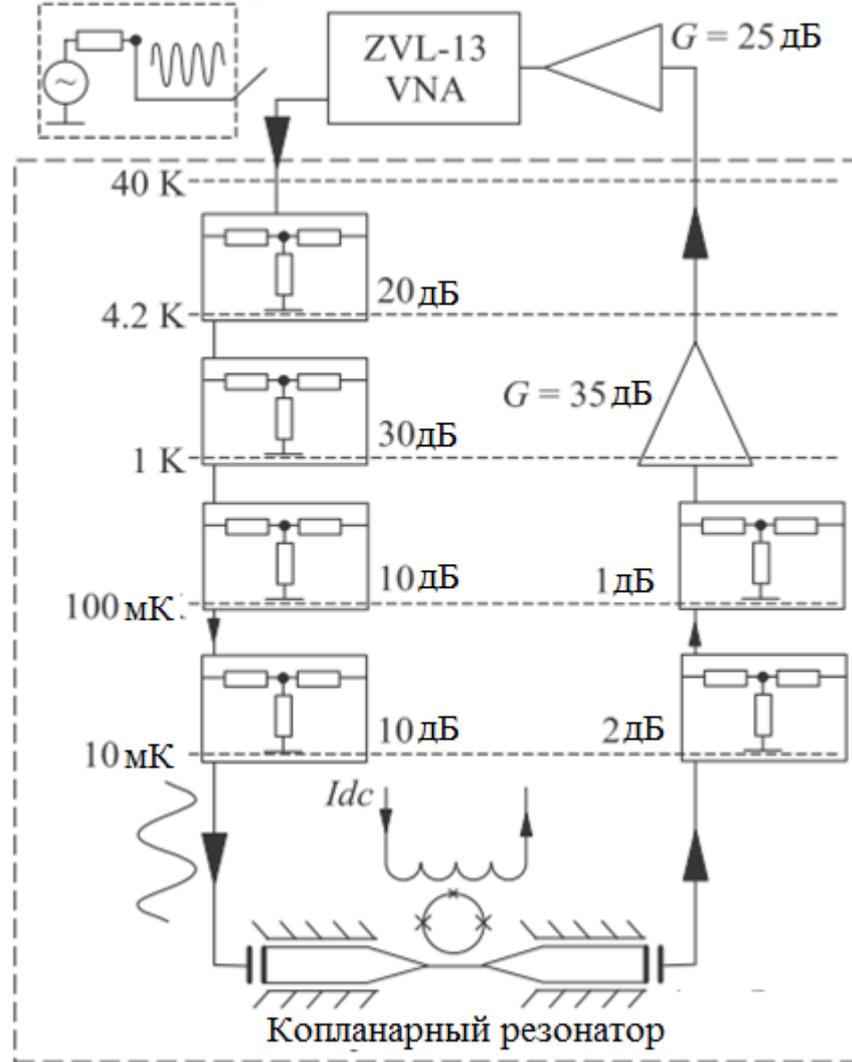


Рисунок 2.22 — Схема измерительной установки для исследования системы кубит-резонатор при одно- и двухчастотном возбуждениях

Основными параметрами сверхпроводникового кубита являются его энергетическая щель Δ_0 (разность энергий между основным и возбужденным состоянием), незатухающий ток в сверхпроводниковом кольце I_q , постоянная релаксации γ и параметр взаимодействия с резонатором g . Для потокового кубита связь Δ_0 с ранее введенной частотой возбуждения кубита Ω определяется следующим выражением:

$$\Omega = \sqrt{\varepsilon^2 + \Delta_0^2}, \quad (2.95)$$

где ε — энергия внешнего постоянного магнитного поля определяемая как

$$\varepsilon = 2I_q \left(\Phi_x - \frac{\Phi_0}{2} \right), \quad (2.96)$$

здесь Φ_0 – квант магнитного потока, $\Phi_x = \Phi_{trap} + \Phi_{кат}$ поток внешнего магнитного поля, который состоит из потока создаваемого катушкой индуктивности $\Phi_{кат} = MI_{кат}$ (где M – взаимная индуктивность между катушкой и кольцом кубита, $I_{кат}$ – ток в катушке) с учетом захваченного кольцом магнитного потока Φ_{trap} . Стоит обратить внимание что ε может иметь два разных знака, в зависимости от того где находится по величине внешний магнитный поток. Также уместно сразу ввести понятие точки вырождения, которая определяется как величина внешнего магнитного потока при котором $\varepsilon = 0$. Связь g с ранее введенным параметром взаимодействия λ определяется как:

$$\lambda = g \frac{A_0}{\Omega}, \quad (2.97)$$

здесь и далее мы рассматриваем взаимодействие с фундаментальной модой резонатора, поскольку частота возбуждения кубита лежит вблизи f_c и потоковый кубит обладает большой ангармоничностью (порядка 10 ГГц).

Нам известно, что полученные ранее выражения соответствуют случаю side-coupled резонатора, или четвертьволнового резонатора и переход, к системе с полуволновым резонатором осуществляется согласно [27] как:

$$S^{dc} = 1 - S^{sd}, \quad (2.98)$$

что формально означает, что коэффициент отражения меняется на коэффициент прохождения. Таким образом, мы можем ожидать, что при возбуждении кубита, на измеряемой амплитудно-частотной характеристике мы будем наблюдать провал как на Рисунке 2.17.

Дисперсионный и резонансный режимы системы. Отличия и соображения о детекторе фотонов

По характеру зависимости АЧХ от внешнего магнитного потока, можно заранее оценить в каком режиме функционирует исследуемая система. На Рисунках 2.20 и 2.21 приведены два разных случая для direct-coupled системы. Возможны два основных режима 1) дисперсионный ($A_0 > f_c$) или 2) резонансный ($A_0 < f_c$). Базовое отличие между этими режимами – это возможность достигнуть полного резонанса энергий между кубитом и резонатором $\Omega = f_c$. Из (2.95) видно, что при дисперсионном режиме полный резонанс не будет наблюдаться.

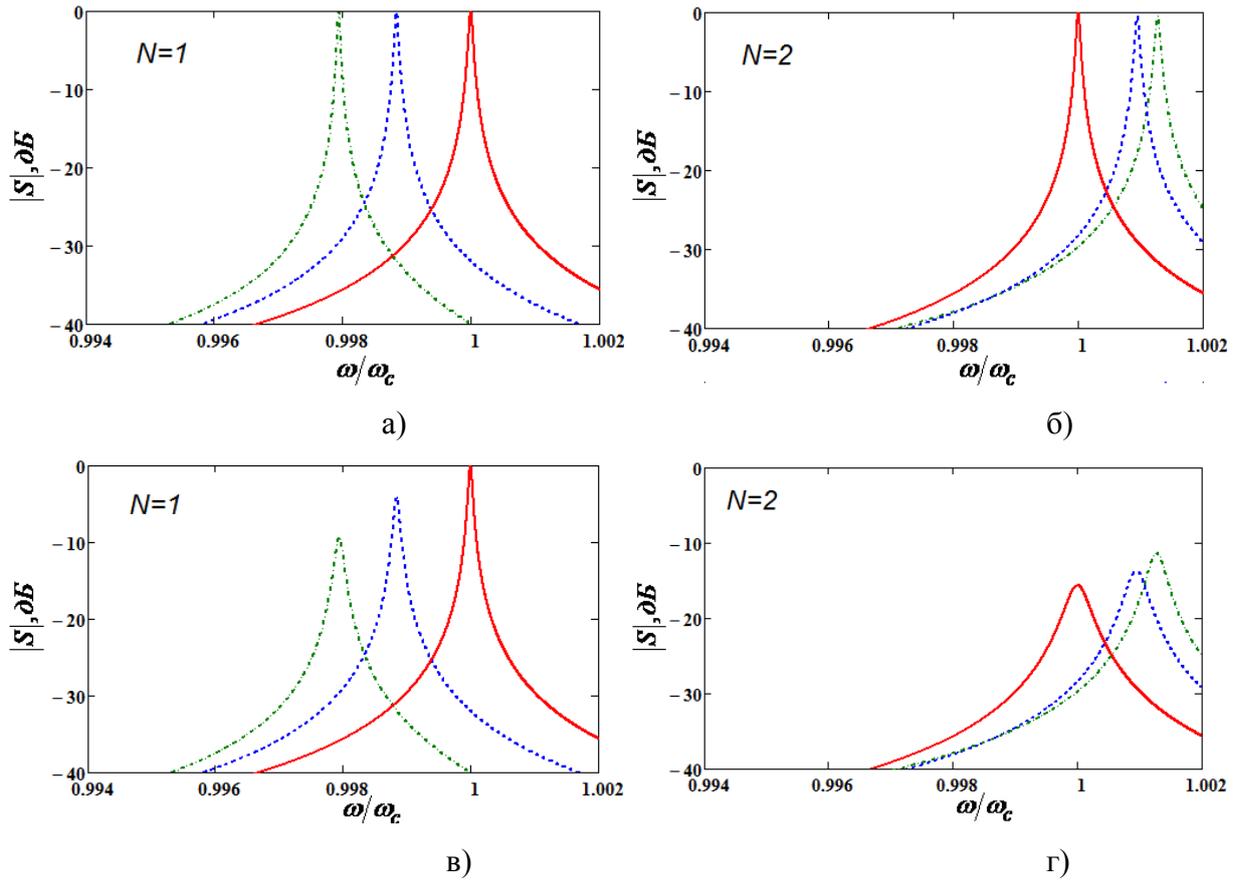


Рисунок 2.23 — Коэффициент прохождения, соответствующий потенциальному рассеянию фотона T_{11} для системы в дисперсионном режиме (параметры системы $\Delta_0 = 3.01$ ГГц, $\omega = 3$ ГГц, $\Gamma = 0.1$ МГц, $g = 10$ МГц) при отсутствии релаксации кубита (а, б) и при релаксации кубита $\Gamma_q = 1$ МГц. Красные сплошные линии соответствуют $\varepsilon = -2 \Delta_0$, синие пунктирные — $\varepsilon = -0.1 \Delta_0$, а зеленые штрихпунктирные — $\varepsilon = 0 \Delta_0$

Сравнивая случаи $N=1$ и $N=2$ на Рисунках 2.20 и 2.21 можно заметить резкое изменение резонансной частоты при фиксированном смещении кубита. Данный эффект наиболее четко проявляется при переходе от одного к двум фотонам, а при дальнейшем увеличении их числа «замывается». Такой резкий переход очень легко объяснить, если вспомнить про состояния (2.72) и (2.73), в случае $N=1$ остается только состояние $|K_{G_\gamma}\rangle$ и гибридные состояния из $|G_\gamma\rangle$ и $|E_\gamma\rangle$. При этом мы получаем две резонансные частоты, соответствующие потенциальному рассеянию T_{11} , согласно (2.87) и (2.92). В случае $N=2$ остаются все состояния, причем происходит гибридизация и по внешним состояниям, а также изменяется расстояние между гибридными уровнями $|G_\gamma\rangle$ и $|E_\gamma\rangle$, которая и приводит к сдвиге. Предположительно, найденная зависимость может быть использована для регистрации фотонов

на частоте резонатора в однофотонных режимах, поскольку есть измеряемая величина с большой чувствительностью к изменению числа фотонов на единицу.

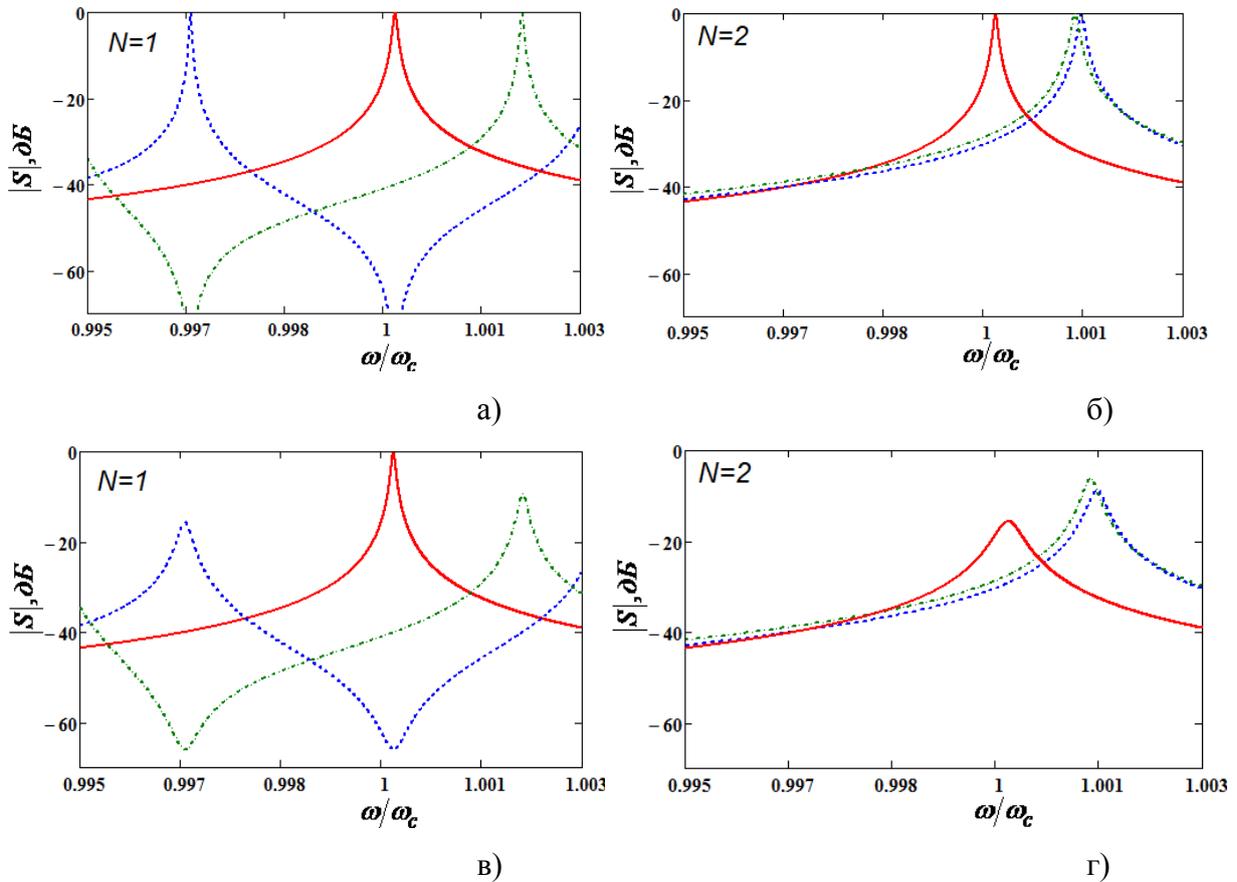


Рисунок 2.24 — Коэффициент прохождения, соответствующий потенциальному рассеянию фотона T_{11} для системы в резонансном режиме (параметры системы $\Delta_0 = 2.99$ ГГц, $\omega = 3$ ГГц, $\Gamma = 0.1$ МГц, $g = 10$ МГц) при отсутствии релаксации кубита (а, б) и при релаксации кубита $\Gamma_q = 1$ МГц (в, г). Красные сплошные линии соответствуют $\varepsilon = -2 \Delta_0$, синие пунктирные — $\varepsilon = -0.085 \Delta_0$, а зеленые штрихпунктирные — $\varepsilon = 0 \Delta_0$

Сравнивая Рисунки 2.23 и 2.24, мы видим, что характер изменения вида АЧХ от внешнего смещения (и фактически от приложенного тока в катушке) разительно отличается, что и позволяет по её «поведению» определить, в каком же режиме находится система. Если же сравнивать АЧХ при наличии релаксации и при её отсутствии, можно сделать важный вывод о необходимых шумовых параметрах усилительной части измерительной системы. Мы видим, что при наличии релаксации глубина провала полностью определяется её величиной, (например на Рисунке 2.24 она соответствует -65 дБ, а шум, в свою очередь, должен соответствовать этому же уровню и ниже). Таким образом, точность определения параметра релаксации методом, предложенным ниже, определяется шумовыми характеристиками измерительного тракта.

Извлечение основных параметров системы

Поскольку в сверхпроводящем кольце магнитный поток квантуется, то минимумы коэффициента прохождения будут периодичны по внешнему магнитному потоку, согласно (2.95) и (2.96). Измеренная зависимость коэффициента прохождения от тока в катушке представлена на Рисунке 2.25.

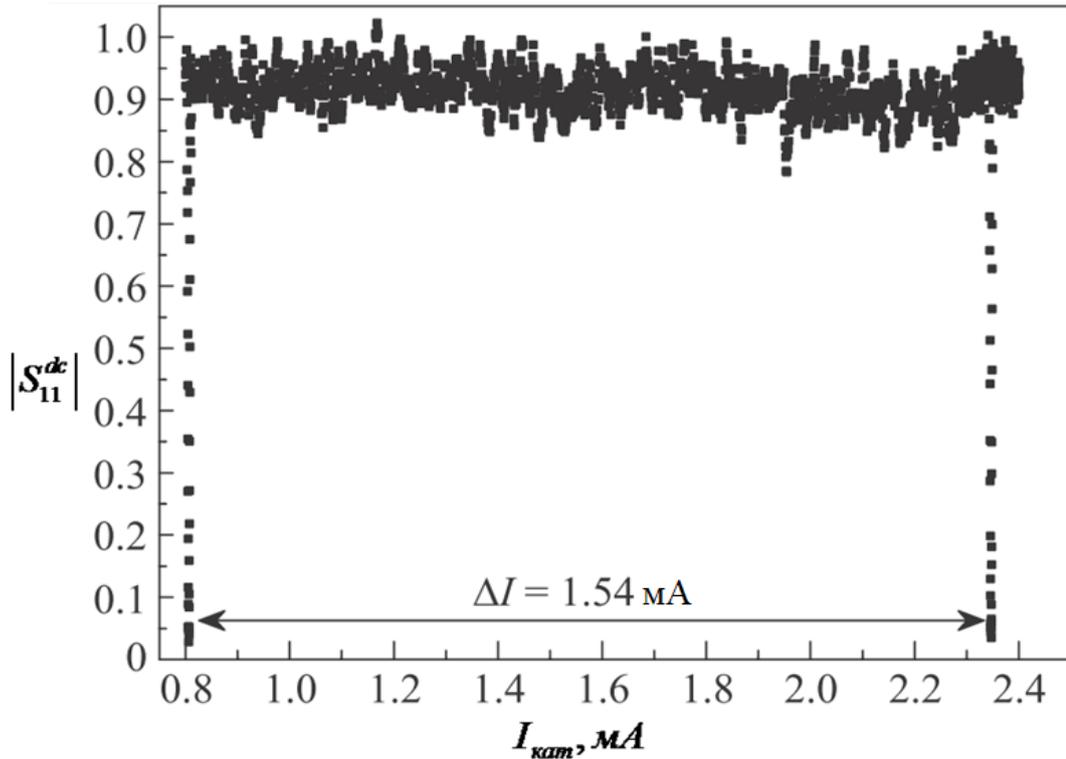


Рисунок 2.25 — Экспериментальная зависимость коэффициента прохождения при потенциальном рассеянии фотона на структуре кубит-резонатор от тока в катушке

Величина внешнего магнитного потока представляется, как было сказано ранее, в виде суммы:

$$\Phi_x = \Phi_{trap} + \Phi_{кат} = \Phi_{trap} + I_{кат}M, \quad (2.99)$$

где $I_{кат}$ — ток в катушке индуктивности. Зная расстояние в единицах тока катушки, которое в нашем случае составило 1,54 мА, мы можем составить следующее уравнение:

$$\Phi_{x2} - \Phi_{x1} = (I_{кат2} - I_{кат1})M = \Phi_0, \quad (2.100)$$

откуда однозначно можно определить величину взаимной индуктивности $M = 1.342$ нГн. На Рисунке 2.26 представлен вид измеренного коэффициента прохождения на частоте f_c для direct-coupled резонатора с кубитом в зависимости от тока в катушке.

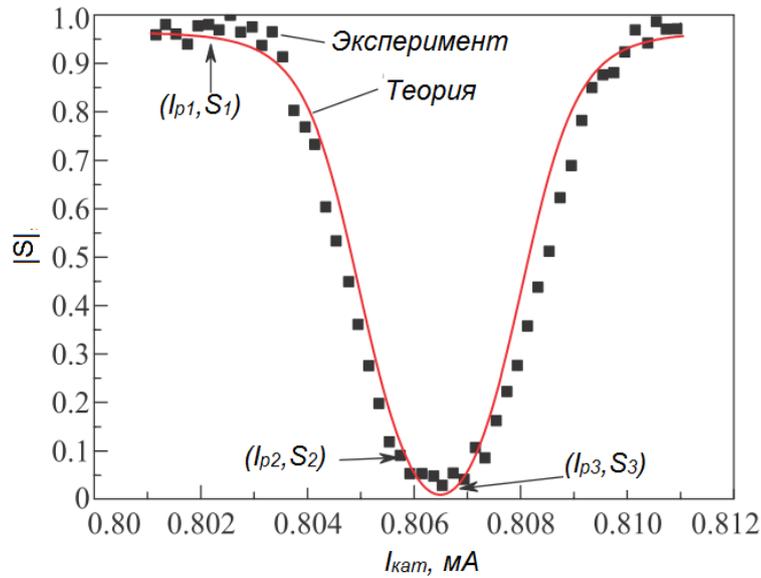


Рисунок 2.26 — Зависимость коэффициента прохождения на фундаментальной частоте резонатора от тока в катушке индуктивности. Экспериментальные данные обозначены квадратами. Точка вырождения соответствует току 0,8064 мА. Сплошная кривая рассчитана по формулам (2.87) и (2.98) для параметров $\Delta_0 = 3$ ГГц, $I_p = 3$ ГГц, $g = 2.63$ МГц, $\gamma = 2.73$ МГц

Для определения параметров кубита из результатов одночастотного исследования была предложена следующая методика:

1. Измеряется зависимость модуля коэффициента прохождения от тока смещения вблизи точки вырождения.
2. Берется несколько точек по току смещения таким образом, чтобы иметь АЧХ в точке вырождения и вдали от неё, как на Рисунке 2.26, и дополнительно несколько точек между ними. Измеряются значения коэффициента прохождения S_p в этих точках.
3. Составляется система уравнений типа:

$$\begin{cases} S_{11}(A_0, g, \Gamma_q, I_q, I_{p1}, f_{res}^1) = S_A(f_{res}^1); \\ S_{11}(A_0, g, \Gamma_q, I_q, I_{p2}, f_{res}^2) = S_B(f_{res}^2); \\ \vdots \\ S_{11}(A_0, g, \Gamma_q, I_q, I_{pN}, f_{res}^N) = S_P(f_{res}^N), \end{cases} \quad (2.101)$$

где в качестве неизвестных выступают A_0, g, Γ_q, I_p , где I_p — значение тока смещения в конкретной точке P , f_{res}^P — резонансная частота при данном токе смещения. Казалось бы, можно обойтись четырьмя точками для четырех неизвестных, но поскольку автору не удалось найти аналитического решения данной системы нелинейных уравнений, решение искалось

численными методами, поэтому «излишние» уравнения используются для повышения точности решения.

4. Полученное решение должно удовлетворять режиму системы, как один из критериев адекватности решения. То есть, если система в дисперсионном режиме, найденная Δ_0 не должна превышать ω_c (которая свободно измеряется при больших ε , где влияния кубита пренебрежительно мало).

Первая серия экспериментов проводилась в 2016 году с системой, представляющей собой полуволновый резонатор связанный индуктивно с потоковым сверхпроводниковым кубитом. Для измерений кубита использовался сигнал малой мощности -140 дБм (10^{-17} Вт). Данный уровень мощности был получен с помощью серии криогенных аттенуаторов с суммарным затуханием -80 дБ (см. Рисунок 2.22). Сигнал малой мощности на выходе резонатора подавался на вход маломощного криогенного усилителя на основе SiGe биполярных транзисторов. Малая мощность рассеяния дала возможность поместить его на уровне 1 К в рефрижераторе растворения, таким образом, шумы определялись только собственным шумом усилителя. Полоса усилителя 4 ГГц, коэффициент усиления 35 дБ. На выходе из криостата при комнатной температуре были расположены комнатные усилители, которые обеспечивали коэффициент усиления 25 дБ. Таким образом, уровень мощности сигнала на приемном входе векторного анализатора цепей на резонансной частоте составил -35 дБ.

С использованием вышеописанной методики, были получены следующие параметры системы:

$$\begin{aligned} \Gamma_q &= 2.73 \text{ МГц}; \\ g &= 2.63 \text{ МГц}; \\ \Delta_0 &= 2.615 \text{ ГГц}; \\ I_q &= 180 \text{ нА}. \end{aligned} \tag{2.102}$$

При полученных параметрах мы смогли оценить среднее количество фотонов при заданной мощности с помощью формулы из [73]:

$$\langle N \rangle = C_k^2 Z \frac{P_{in} Q}{2 \max(\Gamma_q, \Gamma_w) h C_r}, \tag{2.103}$$

где C_k – величина емкости связи резонатора, определяемая размерами щели между открытой линией и линией полуволнового резонатора; Z – импеданс исследуемой системы C_r – емкость линии резонатора, которая определяется как $C_r = C_r^{nog} \cdot l_{pez}$, где C_r^{nog} – погонная емкость линии резонатора и её длина l_{pez} . Согласно данной формуле, среднее число фотонов равно $\langle N \rangle \approx 0.2$,

что подтверждает справедливость использования формулы (A1) для случая $N=1$ ($C_k = 6 \phi\Phi$ $C_r=2.3 \text{ нФ}$). В знаменателе (2.103) стоит Γ_q как наибольшая величина, определяющая рассеивание или уход энергии из системы. Безусловно, внимательный читатель может возразить, что при заданной геометрии резонатора и входной мощности всегда можно подобрать такую величину Γ_q , чтобы среднее число удовлетворяло однофотонному режиму. Если допустить, что $\Gamma_q \ll \Gamma_w$, то окажется что среднее число фотонов будет равно порядка 12. В этом есть некоторое лукавство, имеющее за собой соображение о характерных временах жизни кубита и, соответственно, о характерных величинах Γ_q , которые составляют порядка единиц МГц. Более того, если мы обратим внимание на Рисунок 2.17, то увидим, что с ростом числа фотонов амплитуда коэффициента прохождения на боковых резонансах падает экспоненциально, так что регистрация их становится затруднительной, поскольку изменение амплитуды будет лежать ниже уровня шумов измерительной системы. В каком-то смысле, в грубом приближении, увеличение числа фотонов приводит к тому, что «квантовость» системы пропадает, поскольку классический сигнал есть не что иное, как огромное неопределенное количество фотонов. Тем не менее, предложенный метод не претендует на истину в последней инстанции и пригоден лишь для предварительных оценок параметров системы, а для уточнения Γ_q требуется проводить эксперименты с импульсным возбуждением, чтобы явно пронаблюдать динамику системы (эксперименты с Раби-колебаниями и полосами Рамзей).

На Рисунке 2.27 приведены экспериментальные АЧХ и кривые, полученные при параметрах (2.102) и с помощью формулы (2.98).

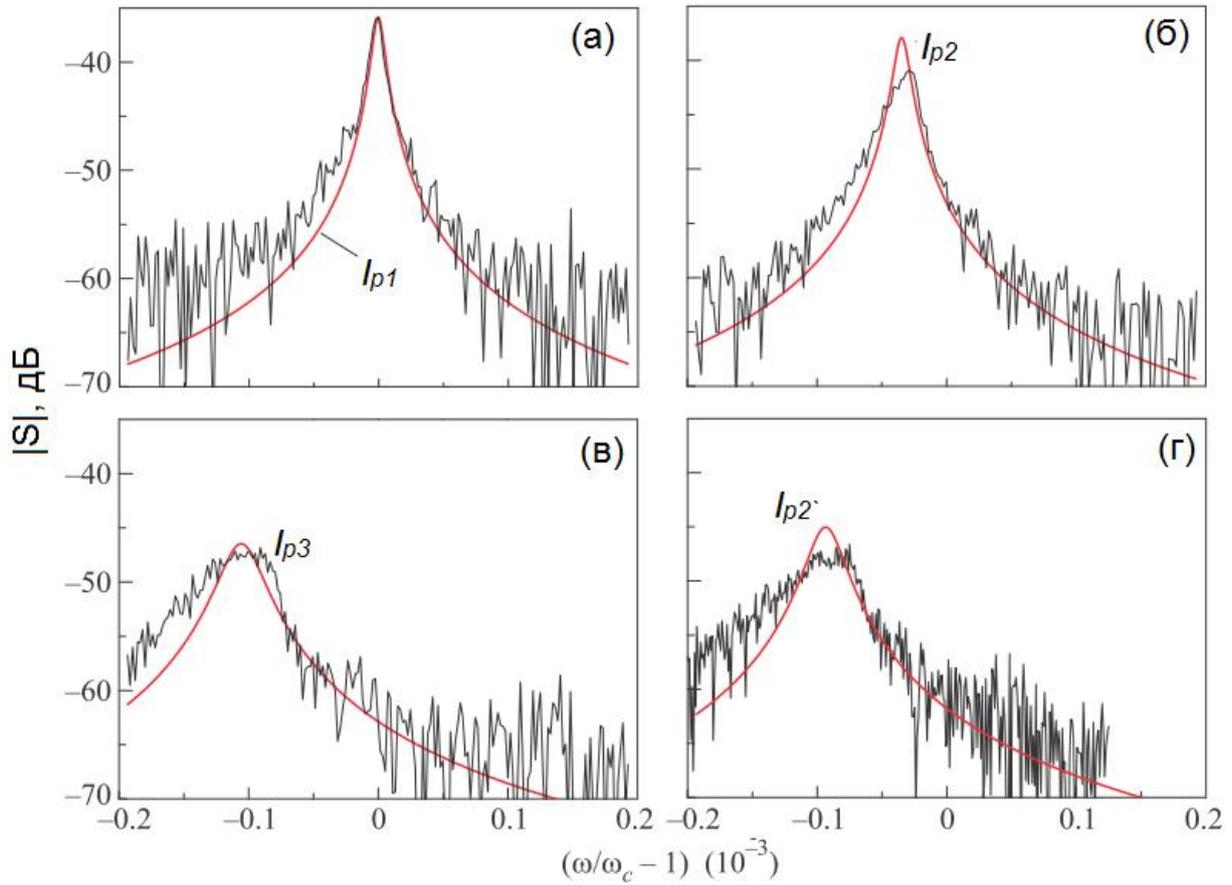


Рисунок 2.27 — Амплитудно-частотные характеристики при различных токах смещения в катушке, указанных на Рисунке 2.25. Ток $I_{p2'}$ соответствует току, точка которого на характеристике симметрична к току I_{p2} относительно точки вырождения на Рисунке 2.23

Видно, что точность полученных характеристик может быть улучшена, поэтому был предложен иной метод анализа экспериментальных данных. Другой вариант извлечения параметров связан с уравнениями для положения резонансов (2.92). Для этого составляется система уравнений следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Re}\left(\omega_{1-}\left(\Gamma_q, g, \Delta_0, I_q, I_{p_1}\right)\right) = f_{res}^1; \\ \operatorname{Im}\left(\omega_{1-}\left(\Gamma_q, g, \Delta_0, I_q, I_{p_1}\right)\right) = \Delta f_{res}^1; \\ \operatorname{Re}\left(\omega_{1-}\left(\Gamma_q, g, \Delta_0, I_q, I_{p_2}\right)\right) = f_{res}^2; \\ \vdots \\ \operatorname{Re}\left(\omega_{1-}\left(\Gamma_q, g, \Delta_0, I_q, I_{p_n}\right)\right) = f_{res}^n; \\ \operatorname{Im}\left(\omega_{1-}\left(\Gamma_q, g, \Delta_0, I_q, I_{p_n}\right)\right) = \Delta f_{res}^n, \end{array} \right. \quad (2.104)$$

где Δf_{res}^n — это ширина n -го резонанса.

Данный способ менее чувствителен к шумам, поскольку положение резонансов априори не так подвержено их влиянию, как амплитуда сигнала. Суть дальнейшего решения мало чем отличается от предыдущего варианта, используется численное решение системы уравнений, которое приводит нас к следующему набору параметров:

$$\begin{aligned} \Gamma_q &= 4.73 \text{ МГц}; \\ g &= 2.63 \text{ МГц}; \\ \Delta_0 &= 2.615 \text{ ГГц}; \\ I_q &= 180 \text{ нА}. \end{aligned} \tag{2.105}$$

видно, что при данных параметрах мы добиваемся лучшего согласования с экспериментальными данными (см. Рисунок 2.28).

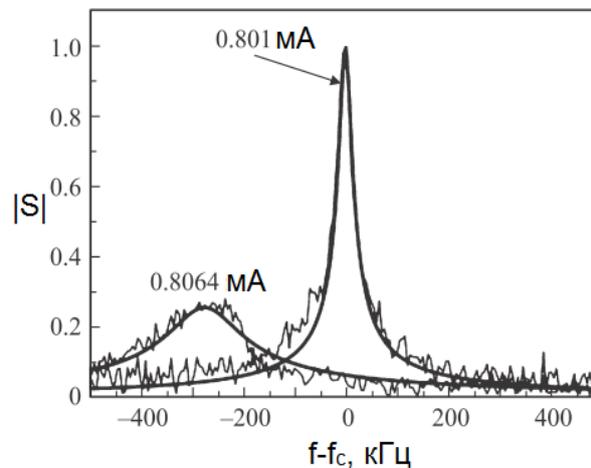


Рисунок 2.28 — Зависимость АЧХ от тока смещения в катушке. Жирная сплошная кривая получена при параметрах (2.105)

Можно сделать вывод о том, что точность оценки параметра Γ_q зависит напрямую от шумов измерительной системы и лучше определяется из положения резонансов и их ширины.

Двухчастотный эксперимент

Эксперименты с использованием двух сигналов дают возможность максимально точно определить Δ_0 и I_q , ввиду разделения сигнала «считывающего» и сигнала вызывающего изменения в системе (сигнал накачки).

Это связано с тем, что с точки зрения физики системы, не важно каким образом мы сможем возбудить кубит, важно то, что изменение состояния двухуровневого атома (кубита) приведет к изменению поведения системы в целом. Так, в случае одночастотного возбуждения из предыдущего пункта, АЧХ резонансного вида подвергалось изменению, также, как и добротности и положения резонансной частоты. И, собственно, это изменение было вызвано тем, что частота посылаемого сигнала совпадала с частотой возбуждения кубита, которая

регулировалась внешним полем катушки индуктивности. Безусловно, в идеальном образце с квантовой системой такие изменения носили бы строго дискретный характер, и происходили бы только при абсолютном совпадении этих двух величин. Более того, время жизни фотонов, способных провзаимодействовать с кубитом, обусловлено их временем жизни в резонаторе, так фотоны, имеющие частоту совпадающую с частотой резонатора, имеют большую вероятность провзаимодействовать с кубитом (при условии, что эта частота близка к частоте возбуждения последнего). Не маловажным является и количество фотонов, так как вероятность возбуждения прямо пропорциональна числу фотонов в резонаторе. Утрируя, можно сказать, что 100 фотонов со временем жизни в резонаторе 1 мкс, имеют такой же шанс провзаимодействовать с кубитом, как и один фотон со временем жизни 100 мкс (при равенстве их частот). Из-за наличия связи как резонатора с окружающей его средой (которая включает неизбежно и измерительную систему), так и самого кубита с таким резонатором и различными дефектами и внешним окружением, приводит к уширению уровней. Это приводит к тому, что вероятность возбуждения уже будет отлична от нуля даже если частота возбуждения кубита и частота сигнала не совпадают. Степень их равенства лишь характеризует вероятность возбуждения, поэтому при непрерывном накоплении информации о системе (которое и есть суть измерения с помощью векторного анализатора цепей), мы видим некоторую усредненную картину. То есть, например, на Рисунке 2.26 при токе I_{p3} разница между частотой тех фотонов, что «долго» живут в резонаторе и собственной частотой кубита минимальна, и мы видим максимальное изменение АЧХ системы. Но, если мы теперь введем два сигнала, частоты которых будут подобраны таким образом, что первый, информационный сигнал, будет иметь частоту равную фундаментальной частоте резонатора, а второй, возбуждающий, будет иметь частоту, которая будет подбираться таким образом, чтобы равняться частоте возбуждения кубита при заданном внешнем смещении, мы сможем обойти довольно-таки сложную динамику взаимодействия, описанную выше. Так, использование фазочувствительного детектирования векторного анализатора цепей позволяет измерять коэффициент прохождения информационного сигнала независимо от того, какой сигнал примешивается еще. А возможность контролировать мощность возбуждающего сигнала, позволяет контролировать среднее число фотонов в резонаторе, и, таким образом, частично компенсировать короткое время жизни фотонов с частотой, выходящей за резонансную полосу, но, тем не менее, совпадающей с частотой возбуждения кубита.

Двухчастотный эксперимент проводился с тем же самым образцом, что и предыдущие эксперименты, но два года спустя. Такой продолжительный период времени, к сожалению, вызвал некоторую деградацию образца и изменение его параметров. По истечении двух лет, деградация кристалла привела к тому, что мы стали работать в другом режиме, в резонансном.

Не вдаваясь в детали измерений и анализа данных, приведем лишь полученные вышеописанной методикой параметры системы:

$$\begin{aligned}
 \omega_c &= 2.59 \text{ ГГц}; \\
 \Gamma &= 32 \text{ кГц}; \\
 \Gamma_q &= 6 \text{ МГц}; \\
 g &= 3.19 \text{ МГц}; \\
 \Delta_0 &= 2.465 \text{ ГГц}; \\
 I_q &= 175 \text{ нА}.
 \end{aligned}
 \tag{2.106}$$

Далее будут приведены результаты такого эксперимента и их обсуждение. На Рисунке 2.29 показана зависимость коэффициента прохождения на частоте резонатора в зависимости от частоты сигнала накачки и от тока в катушке.

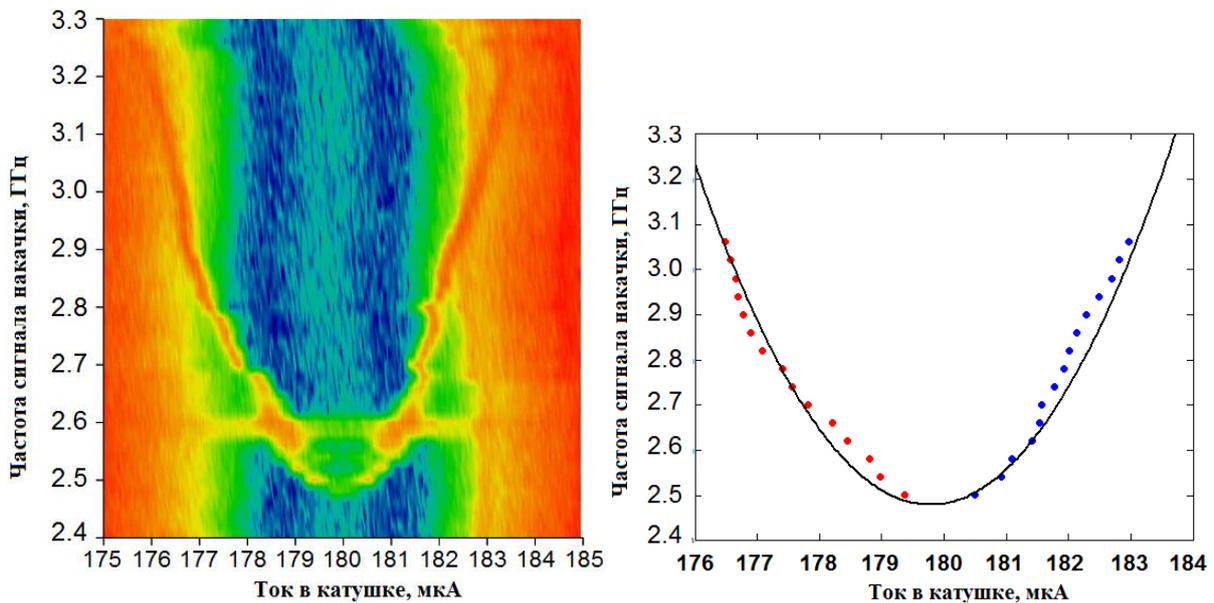


Рисунок 2.29 — Результат двухчастотной спектроскопии системы кубит-резонатор.

а) Полная зависимость. Красный цвет соответствует максимуму прохождения, синий – минимуму. б) экспериментальные точки, полученные из а), соответствующие возбуждению кубита при заданном токе в катушке. Сплошная кривая получена полиномиальной регрессией.

Мощность сигнала накачки на входе в образец –145 дБм

Параболическая зависимость на Рисунке 2.29 соответствует функции частоты возбуждения от внешнего смещения (2.95). Из полученных экспериментальных данных можно определить Δ_0 и I_q . Первый параметр определяется как точка экстремума интерполированной параболы и равен 2.484 ГГц, второй параметр определяется на «линейном» участке параболы как её наклон и равен 169 нА, что достаточно хорошо согласуется с параметрами, полученными вышеописанным методом, который приводит к 2.465 ГГц и 175 нА.

Таким образом, мы подтвердили работоспособность методики по оценке базовых параметров кубита, с помощью выражений для коэффициента прохождения, полученных в разделе 2.1, а также убедились в деградации этих параметров со временем.

2.4 Выводы к главе 2

Исследования, проведенные в этой главе, привели к следующим результатам:

1. Полученные выражения описывают замещение триплета Моллоу квадруплетной картиной на амплитудно-частотной характеристике коэффициента прохождения. Данный эффект удалось описать благодаря чисто квантовомеханическому подходу к расчету системы, с помощью которого удалось получить явную зависимость положения энергетических уровней системы от числа фотонов (и от параметров самой системы). При этом полученное решение при увеличении числа фотонов приводит к «классическому» триpletу Моллоу.
2. Полученные аналитические выражения, описывающие вероятности рассеяния одиночного фотона по различным сценариям, позволяют качественно и количественно описать эффект фотонной блокады. Эффект, который заключается в сильном изменении положения резонансной энергии при малом изменении количества фотонов в системе.
3. Показано, что стандартный подход к учету процессов диссипации в системе кубит - резонатор-волновод с помощью введения оператора Линдблада, справедлив только в пределах малого числа фотонов. При этом получены аналитические решения, которые позволяют учесть влияние числа фотонов в резонаторе на постоянную релаксацию. Данные решения также получены в чисто квантово-механическом описании системы, в которую феноменологически был введен термостат, представляющий собой канал нерadiационного распада возбужденного состояния кубита.
4. Получены волновые функции системы кубит-резонатор-волновод для произвольного числа фотонов в резонаторе. Показано, что данные функции могут быть использованы для описания различных результатов измерения, в том числе и проявление такого квантово-механического эффекта, как интерференция волновых функций. Данный пункт, совместно с пунктами 1-3, может быть использован для

анализа экспериментальных данных, а также при разработке и проектировании устройств на основе квантовых битов и цепей.

5. В разделе, посвященном экспериментальной части диссертации, на основании полученных выражений для коэффициентов прохождения, предложена схема детектирования единичных фотонов. Чувствительность на уровне одного фотона обусловлена сильной зависимостью резонансных частот системы от числа фотонов в резонаторе.
6. Предложен и описан метод экстракции основных параметров системы кубит-резонатор-волновод из результатов экспериментального одночастотного исследования транспортных характеристик. Показано, что получаемые при этом параметры хорошо согласуются с теми, что могут быть измерены с помощью дополнительного эксперимента.

Результаты, полученные в данной главе, были опубликованы в работах [69;70;72;74-78].

ГЛАВА 3 СИСТЕМЫ С ДВУМЯ ИСКУССТВЕННЫМИ АТОМАМИ

Для работы простейшего базового элемента квантового компьютера требуется как минимум два кубита, так как для реализации квантовой запутанности необходимо два объекта с квантовыми свойствами. Поэтому данная глава будет посвящена изучению различных систем, содержащих два кубита в различной конфигурации, а именно:

- система, представляющая собой открытый волновод в различных пространственных координатах которого расположены два кубита;
- система, представляющая собой открытый волновод, взаимодействующий с двумя резонаторами в различных пространственных координатах, которые, в свою очередь, взаимодействуют каждый со своим кубитом.

Оба случая позволяют осуществить не прямое взаимодействие между двухуровневыми системами, посредством общего фотонного поля в открытом волноводе. Нами будут изучены эффекты, связанные с интерференцией волновых функций двух различных объектов (либо кубиты, либо гибридизированная система кубит-резонатор), а именно: эффект переноса возбужденного состояния между кубитами в открытом волноводе, влияние общих и локальных каналов нерadiационного распада (релаксация кубитов) на транспорт микроволнового фотона, а также, влияние расстояния между кубитами. Использование метода неэрмитового гамильтониана при решении задач позволяет обойти марковское приближение, и, в явном виде, получить эффект запаздывания, который, по сути своей, учитывает не мгновенное распространение фотона от одного объекта к другому. В рамках стационарной картины будет видно, что рассеяние на втором объекте будет зависеть от взаимодействия с первым объектом, и от того, на каком расстоянии эти объекты находятся друг от друга. Поскольку сам метод был достаточно подробно разобран в предыдущей главе, мы не будем детально останавливаться на всех моментах решения.

4.1 Два кубита в открытом волноводе

Данный раздел посвящен изучению системы, схематично представленной на Рисунке 3.1. Для данной системы будут решены задачи переноса состояния между двумя кубитами на произвольном расстоянии, будут получены аналитические решения, описывающие влияние

локальных термостатов на такой перенос состояния. Предложено возможное рассмотрение динамики внутренней системы (два кубита, как квантовые объекты напрямую не связанные с внешней измерительной средой) с учетом явления декогеренции, в рамках гибридного метода неэрмитового гамильтониана и уравнения эволюции для матрицы плотности состояний. А также, представлены результаты, описывающие влияние общего термостата на транспорт микроволнового фотона.

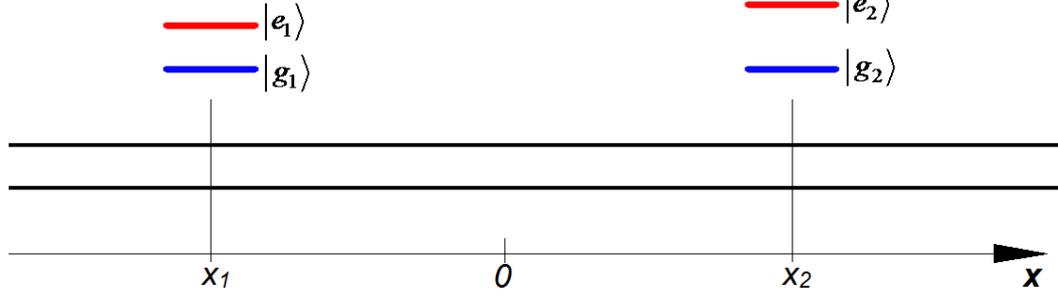


Рисунок 3.1 — Система с открытым волноводом и двумя кубитами

Исследуемая система состоит из открытого волновода, по которому могут распространяться фотоны произвольной частоты ω_k , наличие фотона на этой частоте описывается вектором $|k\rangle$. Таким образом, волновод можно описать с помощью бозонных операторов рождения c_k^\dagger и уничтожения c_k гамильтонианом H_{wg} :

$$H_{wg} = \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k. \quad (3.1)$$

Два кубита с частотами возбуждения Ω_1 и Ω_2 из основного $|g_i\rangle$ в возбужденное $|e_i\rangle$ состояние, расположенных на расстоянии d друг от друга (координата первого кубита $x_1 = -d/2$, координата $x_2 = d/2$; $x_2 - x_1 = d$), взаимодействуют с открытым волноводом с константами взаимодействия ξ_1 и ξ_2 , соответственно. Таким образом, полный гамильтониан системы можно записать в следующем виде:

$$H = \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \hbar \Omega_i \sigma_z^{(i)} + \sum_k \sum_{i=1}^2 \hbar \xi_i \left(c_k^\dagger \sigma_-^{(i)} e^{-jkx_i} + c_k \sigma_+^{(i)} e^{jkx_i} \right), \quad (3.2)$$

где σ_z , σ_x – спиновые операторы Паули, а $\sigma_+^{(i)} = |e_i\rangle\langle g_i|$ ($\sigma_-^{(i)} = |g_i\rangle\langle e_i|$) – операторы повышения (понижения) состояния i -го кубита.

Перенос состояния между кубитами

Использование метода неэрмитового гамильтониана требует определения набора состояний из пространства Гильберта. В рамках данной работы ограничимся рассмотрением

однофотонных процессов, что позволяет выделить из всего гильбертова пространства для изучения переноса состояния между кубитами следующий набор векторов состояний:

$$\begin{aligned} |k\rangle \otimes |g_1, e_2\rangle &\equiv |k\rangle \otimes |4\rangle \equiv |A\rangle, \\ |k\rangle \otimes |e_1, g_2\rangle &\equiv |k\rangle \otimes |3\rangle \equiv |B\rangle, \\ |k\rangle \otimes |g_1, g_2\rangle &\equiv |k\rangle \otimes |2\rangle \equiv |C\rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} |0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |e_2\rangle &\equiv |0\rangle \otimes |1\rangle, \\ |0\rangle \otimes |g_1\rangle \otimes |g_2\rangle &\equiv |0\rangle \otimes |2\rangle, \\ |0\rangle \otimes |e_1\rangle \otimes |g_2\rangle &\equiv |0\rangle \otimes |3\rangle, \\ |0\rangle \otimes |g_1\rangle \otimes |e_2\rangle &\equiv |0\rangle \otimes |4\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Состояния $|A\rangle$ и $|B\rangle$ соответствуют ситуации, когда подготовлен один кубит в возбужденном состоянии и посылается один фотон в волновод. В состоянии $|C\rangle$ оба кубита находятся в основном состоянии и в волноводе имеется фотон. Данные состояния, в рассматриваемом формализме, являются внешними, поскольку представляют собой

непрерывный спектр энергий: $E_a = \omega_k - \frac{1}{2}\Omega_1 + \frac{1}{2}\Omega_2$ $E_b = \omega_k + \frac{1}{2}\Omega_1 - \frac{1}{2}\Omega_2$ и

$E_c = \omega_k - \frac{1}{2}\Omega_1 - \frac{1}{2}\Omega_2$, что обусловлено произвольной энергией фотона в волноводе. Здесь и

далее, полагаем $\hbar = 1$. В рамках обозначенных взаимодействий, возможен переход из внешних состояний, в которых имеется фотон произвольной частоты в волноводе (состояния (3.3)), в одно из внутренних состояний (состояния (3.4)) с дискретным энергетическим спектром.

Внешние состояния $|k\rangle \otimes |4\rangle$, $|k\rangle \otimes |3\rangle$ и $|k\rangle \otimes |2\rangle$, так же, как это показано в предыдущей главе, формируют проекционный оператор $P = \sum_{j,k} |j\rangle \langle j|$, (или в интегральном представлении

$P = \frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sum_j |j\rangle \langle j|$) где $j = A, B, C$, а L – это длина волновода. Состояния $|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle$

формируют проекционный оператор на подпространство внутренних состояний $Q = \sum_{m=1}^4 |m\rangle \langle m|$.

Таким образом, закрытая система, описываемая набором состояний (3.4), распадается, вследствие взаимодействия с континуумом, описываемым набором внешних состояний (3.3) с непрерывным спектром. Распад закрытой системы, взаимодействующей с континуумом, описывается эффективным неэрмитовым гамильтонианом, собственные значения которого представляют собой комплексные энергии, их действительные и мнимые части, в общем случае, зависят от частоты налетающего фотона (эффект запаздывания). При этом эффективный гамильтониан записывается через проекции полного гамильтониана, как было показано в (1.31):

$$H_{eff} = H_{QQ} + H_{QP} \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} H_{PQ}. \quad (3.5)$$

В (3.5) E – полная энергия системы до рассеяния, которая может соответствовать энергиям системы в исходном состоянии $|A\rangle$, $|B\rangle$, $|C\rangle$ или их суперпозиции.

Рассчитывая проекции гамильтониана, приходим к следующему виду эффективного гамильтониана:

$$H_{eff}(E) = \sum_{n=1}^4 E_n |n\rangle \langle n| + \sum_q \left(\frac{\xi_1^2 |1\rangle \langle 1|}{E - E_a + i\varepsilon} + \frac{\xi_2^2 |1\rangle \langle 1|}{E - E_b + i\varepsilon} + \frac{\xi_1^2 |3\rangle \langle 3|}{E - E_c + i\varepsilon} \right) + \sum_q \left(\frac{\xi_1 \xi_2 |3\rangle \langle 4| e^{jk(x_1 - x_2)}}{E - E_c + i\varepsilon} + \frac{\xi_1 \xi_2 e^{-jk(x_1 - x_2)} |4\rangle \langle 3|}{E - E_c + i\varepsilon} + \frac{\xi_2^2 |4\rangle \langle 4|}{E - E_c + i\varepsilon} \right). \quad (3.6)$$

В выражении (3.6) слагаемое во второй сумме определяется наличием связи внутренних состояний с континуумом, и поэтому, в рамках выбранных однофотонных взаимодействий, в нем отсутствуют матричные элементы с состоянием $|2\rangle$.

В матричном виде эффективный гамильтониан имеет следующий вид:

$$H_{eff}(E) = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{33} & H_{34} \\ 0 & 0 & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$H_{11}(E) = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) + \frac{L}{2\pi} \int dq \left(\frac{\xi_1^2}{E - E_a(q) + i\varepsilon} + \frac{\xi_2^2}{E - E_b(q) + i\varepsilon} \right);$$

$$H_{22}(E) = -\frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2); \quad H_{33}(E) = \frac{1}{2}(\Omega_1 - \Omega_2) + \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_1^2}{E - E_c(q) + i\varepsilon};$$

$$H_{44}(E) = \frac{1}{2}(\Omega_2 - \Omega_1) + \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_2^2}{E - E_c(q) + i\varepsilon}; \quad H_{34}(E) = \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_1 \xi_2 e^{iq(x_1 - x_2)}}{E - E_c(q) + i\varepsilon};$$

$$H_{43}(E) = \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_1 \xi_2 e^{-iq(x_1 - x_2)}}{E - E_c(q) + i\varepsilon}.$$

Значения интегралов в недиагональных матричных элементах зависят от начального состояния системы. Пример взятия таких интегралов показан в предыдущей **Главе 2** и в соответствующем приложении. Например, один из интегралов, соответствующий начальному состоянию $|k\rangle \otimes |a\rangle$, будет равен:

$$H_{43}(E_a) = \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_1 \xi_2 e^{-iq(x_2-x_1)}}{\omega_k - \omega_q + \Omega_2 + i\varepsilon} = -i\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{i\left(k + \frac{\Omega_2}{v_g}\right)|x_2-x_1|}. \quad (3.8)$$

Также нам необходимо рассчитать обратную матрицу $R = \frac{1}{E - H_{eff}}$, которая имеет вид,

аналогичный (3.7):

$$R(E) = \begin{bmatrix} R_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{33} & R_{34} \\ 0 & 0 & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Состояние $|in\rangle$ является начальным состоянием системы до рассеяния и может быть одним из состояний непрерывного спектра или же их суперпозиций, а волновая функция $|\Psi_Q(E)\rangle = RH_{QP}|in\rangle$ представляет собой внутреннюю часть полной волновой функции системы.

Для примера зададимся начальным состоянием $|k\rangle \otimes |a\rangle$. В этом случае матричные элементы обратной матрицы R равны:

$$R_{11} = \frac{1}{E_a - H_{11}} = \frac{1}{\omega_k - \Omega_1 + i\Gamma_1 + i\Gamma_2}; \quad (3.10)$$

$$R_{22} = \frac{1}{E_a - H_{22}} = \frac{1}{\omega_k + \Omega_2}; \quad (3.11)$$

$$R_{33} = \frac{E_a - H_{44}}{D(\omega_k)}; \quad (3.12)$$

$$R_{44} = \frac{E_a - H_{33}}{D(\omega_k)}; \quad (3.13)$$

$$R_{34} = \frac{-H_{34}(E_a)}{D(\omega_k)}; \quad (3.14)$$

$$R_{43} = \frac{-H_{43}(E_a)}{D(\omega_k)}, \quad (3.15)$$

где

$$D(\omega_k) = \left(\omega_k - \frac{1}{2}\Omega_1 + i\Gamma_1\right) \left(\omega_k - \frac{1}{2}\Omega_2 + i\Gamma_2\right) + \Gamma_1 \Gamma_2 e^{2i\left(k + \frac{\Omega_2}{v_g}\right)|x_2-x_1|}, \quad (3.16)$$

здесь введена скорость спонтанного испускания фотона i -м кубитом $\Gamma_i = \frac{\xi_i^2 L}{v_g}$, v_g – групповая скорость фотона в волноводе, аналогичная той, что вводилась в предыдущей главе, как скорость спонтанного излучения из резонатора в открытый волновод.

Остальные случаи рассчитываются точно так же, и поэтому, в дальнейшем, для них приведем лишь конечный результат.

Для определения амплитуды перехода между состояниями (3.3), при исходном состоянии $|A\rangle$, нам необходимо переходить в конфигурационное пространство. В результате, используя определение $\langle x|k\rangle = e^{ikx}$, получим волновую функцию в конфигурационном пространстве:

$$\langle x|\Psi_a(E_a)\rangle = e^{ikx}|4\rangle - j\Gamma_1 e^{jk|x-x_1|} e^{jkx_1} R_{11}(E_a)|4\rangle - je^{jkx_1} e^{j\left(k + \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{v_g}\right)|x-x_2|} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} R_{11}(E_a)|3\rangle. \quad (3.17)$$

Область $x > x_2$ соответствует прошедшему фотону, а область $x < x_1$ – отраженному.

Если сравним (3.17) и (2.40), то увидим, что первые два слагаемых в (3.17) описывают фотон после рассеяния, в результате которого, конфигурация состояний кубитов сохранилась в состоянии $|4\rangle$. Третье слагаемое в (3.17) описывает ситуацию, когда конфигурация кубитов сменилась от состояния $|4\rangle$ к состоянию $|3\rangle$. В соответствии с этим, амплитуды вероятности обнаружения фотона в области $x > x_2$, с сохранением исходной конфигурации (T_{aa}) и с изменением исходной конфигурации (T_{ba}), запишутся следующим образом:

$$T_{aa} = 1 - i\Gamma_1 R_{11}(E_a), \quad (3.18)$$

$$T_{ba} = -ie^{-ikd} e^{-i\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{v_g}\right)\frac{d}{2}} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} R_{11}(E_a). \quad (3.19)$$

Амплитуды вероятности обнаружения фотона в области $x < x_1$, соответственно, будут следующими:

$$T_{aa}^R = -ie^{-ikd} \Gamma_1 R_{11}(E_a), \quad (3.20)$$

$$T_{ba}^R = -ie^{i\left(\frac{\Omega_2 - \Omega_1}{v_g}\right)\frac{d}{2}} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} R_{11}(E_a). \quad (3.21)$$

Чтобы подчеркнуть тот факт, что эти амплитуды имеют и амплитуду и фазу, которые могут быть экспериментально измерены, будем называть их коэффициентами прохождения и отражения, соответственно.

Непосредственным расчетом можно убедиться в справедливости следующего тождества:

$$|T_{aa}|^2 + |T_{aa}^R|^2 + |T_{ba}|^2 + |T_{ba}^R|^2 = 1. \quad (3.22)$$

Выражение (3.22) отражает тот факт, что полная вероятность всех возможных исходов рассеяния фотона должна быть равна единице.

Далее приведем выражения волновых функций в конфигурационном пространстве для двух оставшихся исходных состояний:

$$\langle x | \Psi_b(E) \rangle = e^{ikx} |3\rangle - i\Gamma_2 e^{ikx_2} e^{ik|x-x_2|} R_{11}(E_b) |3\rangle - i\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{ikx_2} e^{i\left(k + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{v_g}\right)|x-x_1|} R_{11}(E_b) |4\rangle, \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \langle x | \Psi_c(E_c) \rangle &= e^{ikx} |2\rangle - i\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} \left(e^{ikx_1} e^{ik|x-x_2|} R_{43}(E_c) + e^{ikx_2} e^{ik|x-x_1|} R_{34}(E_c) \right) |2\rangle \\ &- i \left(\Gamma_2 e^{ikx_2} e^{ik|x-x_2|} R_{44}(E_c) + \Gamma_1 e^{ikx_1} e^{ik|x-x_1|} R_{33}(E_c) \right) |2\rangle. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Выражение (3.23) соответствует исходному состоянию $|3\rangle$, а выражение (3.24) соответствует исходному состоянию $|2\rangle$.

Стоит обратить внимание на то, что в выражениях (3.17) и (3.23) входит экспонента, описывающая фотон с измененной частотой $\omega_k \pm (\Omega_2 - \Omega_1)$, что является прямым следствием закона сохранения энергии. В зависимости от произошедшего сценария рассеяния и от конфигурации системы, можно регистрировать в спектре выходного сигнала три различные частоты. Вероятность этих процессов и изменения фазы исходного сигнала определяются выражениями (3.17), (3.23), (3.24). Для этого нам необходимо выделить в этих выражениях члены, отвечающие за распространяющиеся фотоны, и стоящие при них амплитуды прохождения (отражения).

Для произвольной суперпозиции состояний $|j\rangle = |k\rangle \otimes (\alpha|4\rangle + \beta|3\rangle + \gamma|2\rangle)$ можно перейти в конфигурационное пространство и подставить в выражение (1.34) в качестве исходного состояния:

$$|\Psi_j\rangle = |j\rangle + \frac{1}{E_j - H_{eff}} \hat{H}_{QP} |j\rangle + \frac{1}{E_j - \hat{H}_{PP}} \hat{H}_{PQ} \frac{1}{E_j - H_{eff}} \hat{H}_{QP} |j\rangle.$$

Или можно переписать это выражение как:

$$|\Psi_j\rangle = \alpha |\Psi_a\rangle + \beta |\Psi_b\rangle + \gamma |\Psi_c\rangle.$$

Чтобы рассчитать вероятность перехода в любое другое состояние $\langle \Psi_{fin} | = \alpha_1^* \langle 4 | + \beta_1^* \langle 3 | + \gamma_1^* \langle 2 |$ можно воспользоваться следующей формулой, полученной в конфигурационном пространстве:

$$\begin{aligned}
\langle x, l | \Psi_{in} \rangle = & \alpha_1 e^{jkx} \left(\alpha - j\alpha\Gamma_1 R_{11}(E_a) - j\beta\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} e^{jkd} e^{j\delta(x_1-x)} R_{11}(E_b) \right) \\
& + \beta_1 e^{jkx} \left(-j\alpha\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} e^{-jkd} e^{j\delta(x-x_2)} R_{11}(E_b) + \beta - j\beta\Gamma_2 R_{11}(E_b) e^{jkx} \right) \\
& + \gamma_1 \gamma e^{ikx} \left(1 - i\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \left(e^{ik(x_1-x_2)} R_{43}(E_c) + e^{ik(x_2-x_1)} R_{34}(E_c) \right) - i \left(\Gamma_2 R_{44}(E_c) + \Gamma_1 R_{33}(E_c) \right) \right), \quad (3.25)
\end{aligned}$$

где $\delta = \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{\nu_g}$. Остается открытым вопрос, а какова энергия E_j такой суперпозиции и как эта

энергия начального состояния должна войти в решение? Чтобы можно было использовать данный результат (3.24), нам необходимо, чтобы $|j\rangle$ было собственной функцией H_{PP} , и в этом достаточно легко убедиться, так как гамильтониан (3.2) не дает переходов между состояниями $\langle A|, \langle B|, \langle C|$. Для определения энергии E_j необходимо решить следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
H_{PP} |j\rangle &= E_j |j\rangle, \\
\alpha E_a |A\rangle + \beta E_b |B\rangle + \gamma E_c |C\rangle &= E_j |j\rangle,
\end{aligned}$$

откуда можно, поочередным домножением, справа на $\langle k, a|, \langle k, b|, \langle k, c|$, получить систему уравнений относительно коэффициентов суперпозиции, определитель которой равен

$$(E_a - E_j)(E_b - E_j)(E_c - E_j) = 0. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) представляет собой уравнение на собственные энергии суперпозиции $|j\rangle$ в системе с гамильтонианом (3.2). Данное уравнение имеет только тривиальное решение:

$$E_a = E_b = E_c = E_j,$$

причем равенство $E_a = E_b = E_c$ возможно лишь при нулевых частотах возбуждения кубита, что само по себе бессмысленно. А равенство $E_a = E_b$ имеет место при совпадающих частотах возбуждения кубита. Таким образом, можно сделать вывод, что в рамках рассматриваемого гамильтониана возможны лишь суперпозиции $|j\rangle = |k\rangle \otimes (\alpha|4\rangle + \beta|3\rangle)$, которые не лишены физического смысла и могут быть реализованы в рамках описанных взаимодействий. В противном случае, нельзя брать произвольное состояние, оторванное от гамильтониана системы, или же пытаться получить квазистационарное решение для состояния, полученного каким-либо произвольным гамильтонианом, предшествующим моменту начала наблюдения. Последний факт, кажется, целиком и полностью соответствует идеологии квазистационарных решений. Далее будут приведены результаты численного моделирования, по которым можно будет оценить вероятности каждого из процессов в зависимости от частоты рассеиваемого фотона. Рассмотрим две ситуации, когда у нас имеется система из двух идентичных кубитов с

одинаковыми параметрами, с частотами ($\Omega_1 = \Omega_2 = 2\pi \cdot 3\text{GHz}$ и параметрами связи $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 1\text{MHz}$), и с различными параметрами (с частотами $\Omega_1 = 2\pi \cdot 3\text{GHz}$, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99\text{GHz}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 1\text{MHz}$; и $\Omega_1 = 2\pi \cdot 3\text{GHz}$, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99\text{GHz}$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 50\text{MHz}$) [79; 80]. При этом, для каждого случая будет рассмотрена система, в которой кубиты расположены на расстоянии много меньшем характерной длины волны $\lambda_i = v_g / \Omega_i$, и на расстоянии соразмерной с ней. На последующих рисунках приведена амплитудная зависимость элементов матрицы рассеяния от частоты налетающего фотона и их представление в полярных координатах (Рисунок 3.2 а), где радиусы окружностей соответствуют модулям комплексного числа S , а угловая координата соответствует его фазе. Таким образом, для рассматриваемого диапазона частот получаем геометрическое множество точек, соответствующее тем или иным процессам. Так, например, на Рисунке 3.2 видно, что фазы процессов S_{ab} и S_{ba} лежат во второй и третьей четверти полярного угла, а фазы процессов S_{aa} и S_{bb} – в первой и четвертой четвертях.

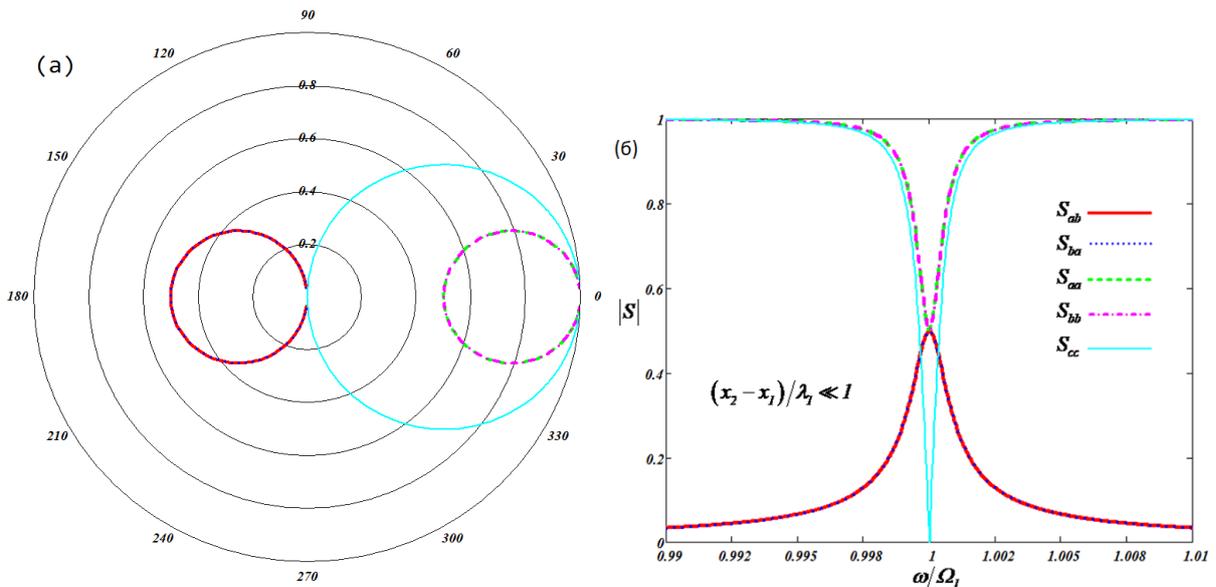


Рисунок 3.2 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с идентичными кубитами, расстояние между которыми много меньше характерной длины волны

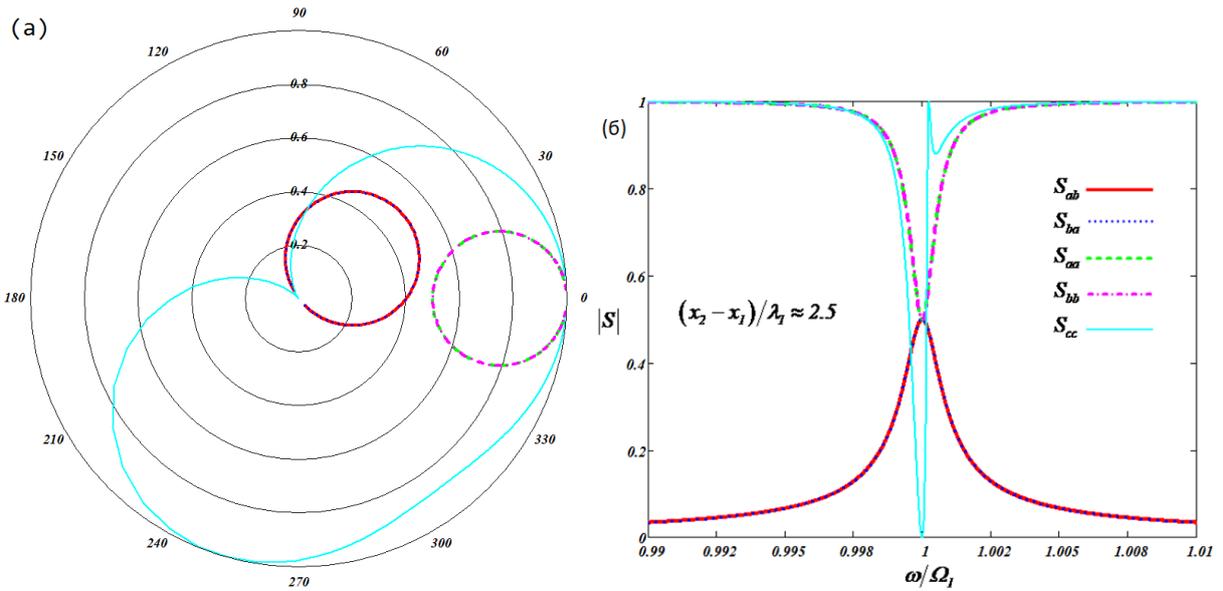


Рисунок 3.3 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с идентичными кубитами, расстояние между которыми соизмеримо с характерной длиной волны

Из Рисунка 3.2 и Рисунка 3.3 видно, что в такой системе процессы передачи состояния и сохранения, при частоте фотона равной частоте кубита, являются равновероятными. И, как только расстояние становится соизмеримым с характерной длиной волны, начинают проявляться интерференционные эффекты, когда вероятность обнаружить фотон на выходе системы зависит от расстояния между «переизлучающими» объектами. Расстояние между кубитами на Рисунках 3.3 и 3.5 соответствует примерно 20 см, что вполне можно реализовать на чипе размером $6 \times 30 \text{ мм}^2$, используя меандровую структуру волновода.

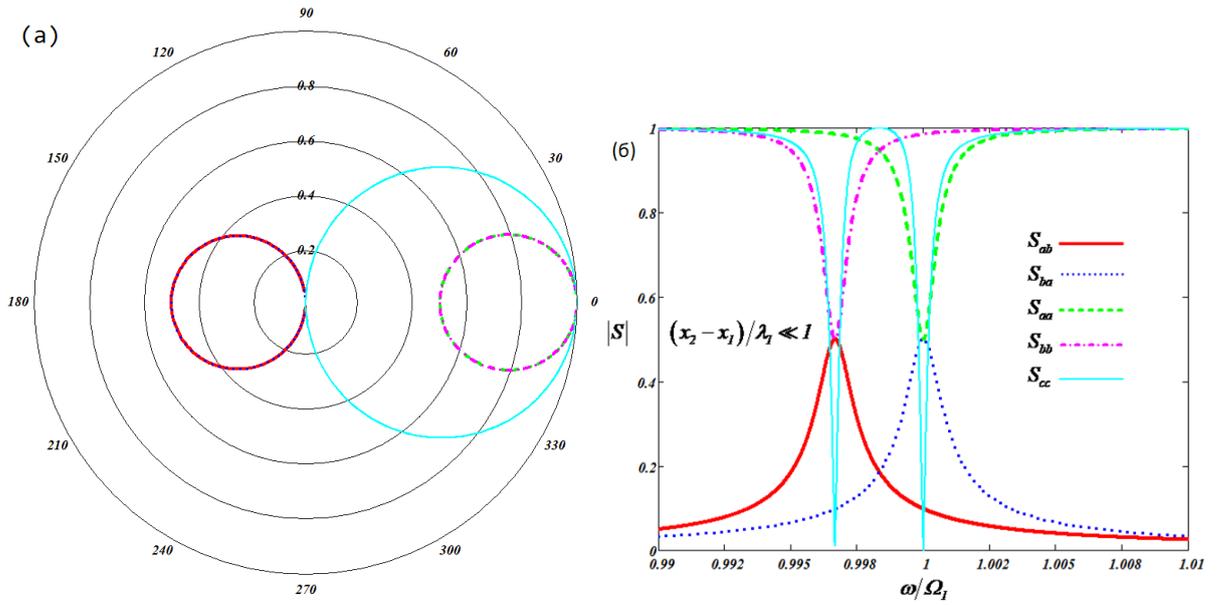


Рисунок 3.4 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с различными кубитами ($\Omega_1 = 2\pi \cdot 3 \text{ ГГц}$, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99 \text{ ГГц}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 1 \text{ МГц}$) расстояние между которыми много меньше характерной длины волны

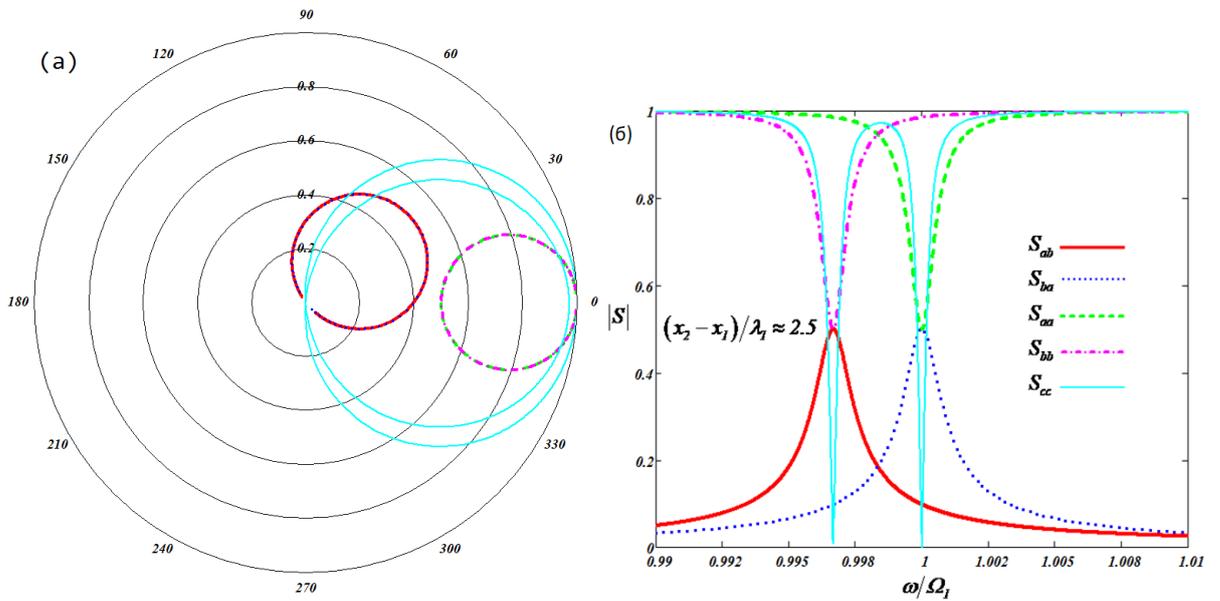


Рисунок 3.5 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с различными кубитами ($\Omega_1 = 2\pi \cdot 3 \text{ ГГц}$, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99 \text{ ГГц}$ и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 1 \text{ МГц}$), расстояние между которыми соизмеримо с характерной длиной волны

Видно, что при расстояниях много меньше длины волны (Рисунок 3.4), фазовая характеристика не отличается от характеристики для идентичных кубитов, но вероятности

данных процессов существенно зависят от частоты налетающего фотона. Также в спектре должны появиться частоты, разнесенные на 10 МГц друг от друга.

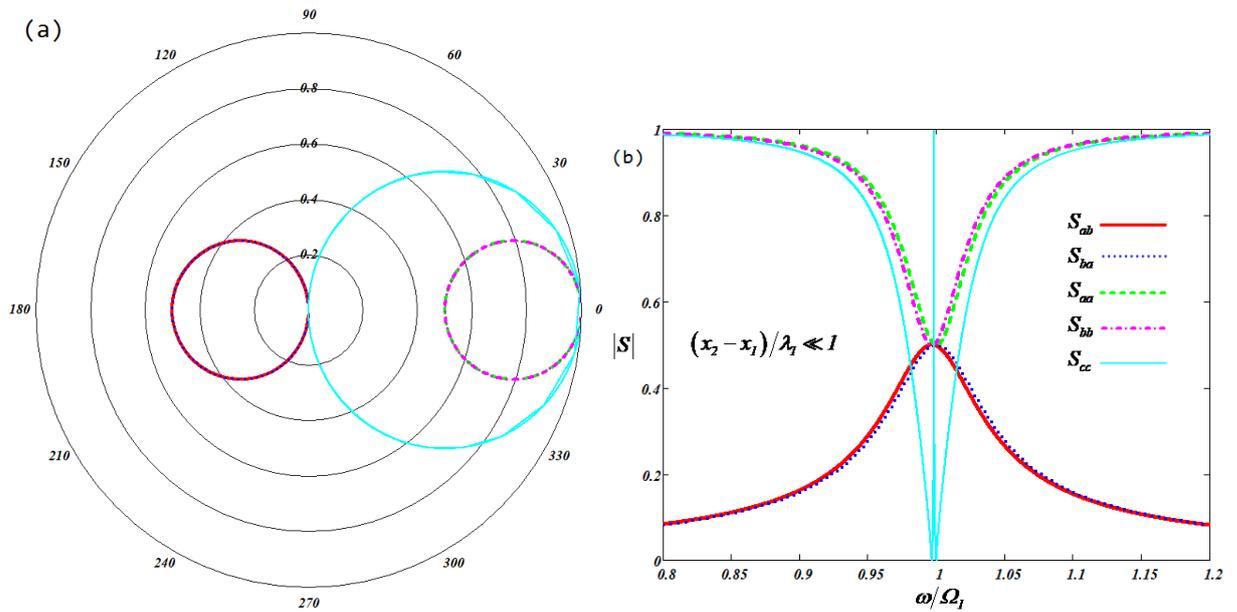


Рисунок 3.6 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с различными кубитами ($\Omega_1 = 2\pi \cdot 3$ ГГц, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99$ ГГц и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 50$ МГц), расстояние между которыми много меньше характерной длины волны

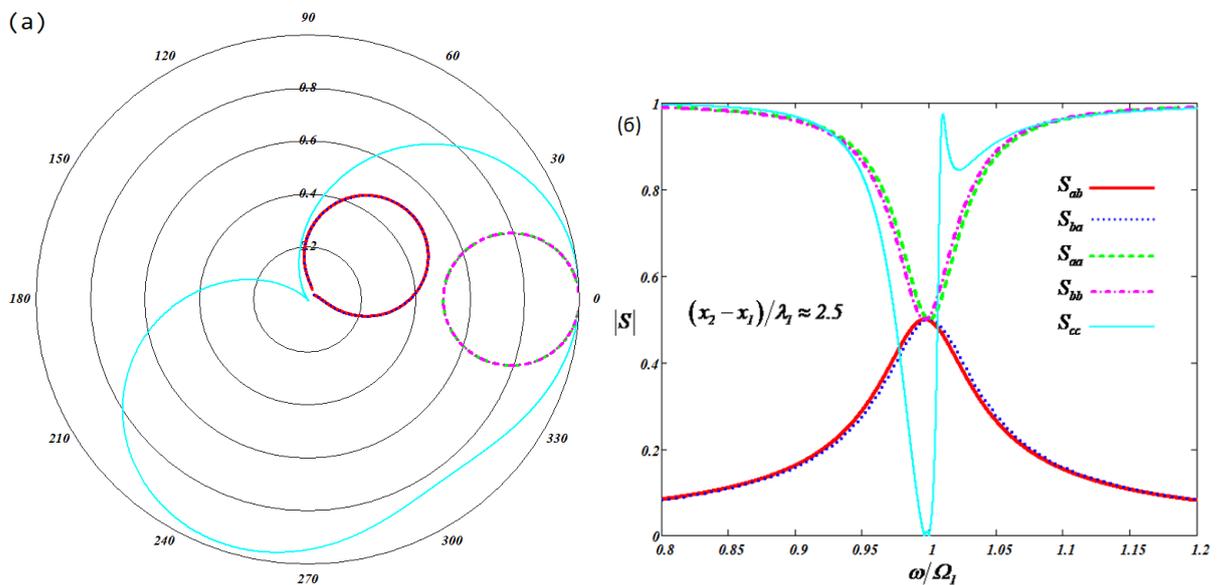


Рисунок 3.7 — Амплитуды прохождения фотона для различных исходов в зависимости от частоты в системе с различными кубитами ($\Omega_1 = 2\pi \cdot 3$ ГГц, $\Omega_2 = 2\pi \cdot 2.99$ ГГц и $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 2\pi \cdot 50$ МГц), расстояние между которыми соизмеримо с характерной длиной волны

В случае, когда ширина резонансных пиков много больше разницы между частотами резонансов, система ведет себя как система с идентичными кубитами, с той лишь разницей, что вблизи частоты кубита появляется пик, соответствующий полному прохождению фотона (Рисунки 3.6 и 3.7).

Полагаем, что возможно изготовить систему с двумя кубитами в открытом волноводе, имеющими одинаковую энергетическую щель, но разные геометрические размеры [79]. Отличие в размерах будет определять различную чувствительность к внешнему магнитному полю смещения. Тогда, при отсутствии внешнего магнитного поля, мы, согласно выражениям (3.62), (3.69)-(3.70), (3.71) и Рисункам 3.2-3.3, будем видеть, при частоте фотона $\omega = \Omega_1$, полное поглощение фотона, что и наблюдалось в большинстве экспериментов. Теперь, если возбуждать первый кубит, то с вероятностью 0.5 будем обнаруживать фотон на выходе системы. Если смотреть усредненную картину, то полагаем обнаружить уменьшение глубины провала на частоте кубита. В проходящем спектре будем видеть пики только на той частоте, на которой будем возбуждать систему. Зная ширину этих пиков, сможем определить такие параметры как Γ_1, Γ_2 .

Далее, если мы воздействуем на систему постоянным магнитным полем, то из-за разной чувствительности к внешнему полю, фактические частоты возбуждения кубитов будут отличаться. Это означает, что вероятности процессов будут отличаться, в зависимости от частоты налетающего фотона и от расстояния между кубитами, а также параметров Γ_1, Γ_2 . Полагаем, для примера, что будем посылать фотон на частоте $\omega \approx 0.966\Omega_1$ и при этом возбуждаем первый кубит, то есть, иными словами, инициализируем систему в состоянии $|3\rangle$. С вероятностью 0.5 у нас кубит останется в том же состоянии $|3\rangle$, и с вероятностью 0.5 система перейдет в состояние $|4\rangle$. (При условии, что время жизни возбужденного состояния кубита больше времени требуемого на регистрацию сигнала). При этом в спектре будут наблюдаться два равновероятных сигнала на частоте $\omega \approx 0.966\Omega_1 (S_{bb})$ и на частоте $\omega \approx 0.966\Omega_1 + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} (S_{ab})$.

Манипуляции с запутанными состояниями представляют собой базовые операции для квантовых вычислений. Рассмотрим два максимально запутанных белловских состояния:

$$\begin{aligned} |\Psi_{bell}^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|4\rangle + |3\rangle), \\ |\Psi_{bell}^-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|4\rangle - |3\rangle). \end{aligned} \tag{3.27}$$

На Рисунке 3.8 показаны зависимости вероятности перехода между состояниями (3.7) для системы с частотами $\Omega_1 = \Omega_2 = 2\pi \cdot 9 \text{ ГГц}$ и параметрами связи при различных расстояниях между кубитами $d_1 \approx 0 \text{ м}; d_2 = 2 \text{ м}; d_3 = 5 \text{ м}$, при групповой скорости $v_g = 0.6 \text{ с}$. Такая скорость может быть реализована в так называемых slow-lightmode волноводах [80]. Более того, использование копланарной меандровой структуры позволяет на относительно небольшом кристалле $30 \times 6 \text{ мм}^2$ разместить волновод протяженностью в несколько метров [38].

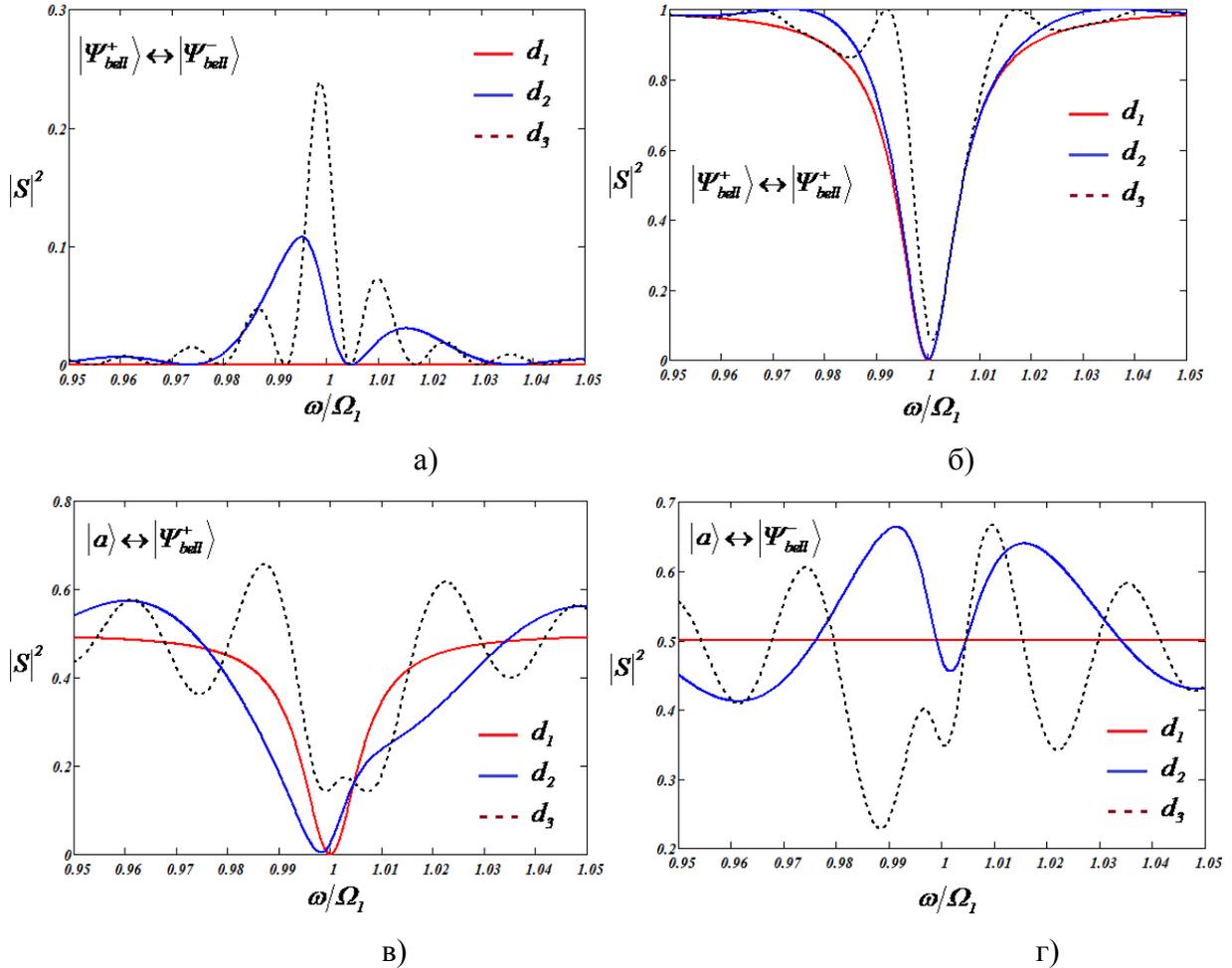


Рисунок 3.8 — Вероятности перехода между белловскими состояниями (а, б) и переход от чистого состояния $|A \rangle$ к белловским состояниям (в, г) при различных расстояниях между кубитами $d_3 > d_2 > d_1$

Примечательно, что уход от марковских приближений дает нам интерференционные картины на Рисунках 3.8, более того, переход между симметричным и антисимметричным состоянием отличен от нуля только при расстояниях много больших характерной длины волны ($\lambda = v_g / \Omega_1$). И это вполне естественно, поскольку данные состояния лишь отличаются фазой, а

для того чтобы изменить фазу, нужно воздействовать на каждый кубит «по отдельности», что возможно только при больших расстояниях между ними.

В следующем разделе рассмотрим эту же систему, но уже с учетом влияния релаксации и декогеренции на процессы рассеяния фотона.

4.2 Два кубита в открытом волноводе: учет затуханий кубитов

В реальных системах двухуровневая система является диссипативной, поэтому данный раздел будет посвящен изучению влияния релаксации и декогеренции на процесс переноса состояния между кубитами, а также на транспорт фотона через двухкубитную структуру. Стандартным методом включения релаксации кубита является включение в исходный гамильтониан термостата. Рассмотрим случай, когда каждый кубит связан со своим термостатом. Таким образом, исходный гамильтониан можно представить в следующем виде:

$$H = \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} \hbar (1 + \sigma_{zi}) \Omega_i + \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \sum_{i=1,2} \hbar \lambda_i \left(a_k \sigma_+^{(i)} e^{jkx_i} + a_k^\dagger \sigma_-^{(i)} e^{-jkx_i} \right) + H_{th} + H_{dec}, \quad (3.28)$$

где H_{dec} – гамильтониан, описывающий взаимодействие кубитов с термостатами, H_{th} – гамильтониан, описывающий сами термостаты. Эти два слагаемых можно описать феноменологически, чтобы отвлечься от конкретного механизма затухания. Хочется обратить внимание, что гамильтониан, описывающий двухуровневую систему, записан несколько иначе, чем в (3.2), дабы показать, что независимо от того как отсчитывать уровни энергии ответ получается один и тот же. А наличие нулевого уровня энергии, как будет видно дальше, может, в некоторых случаях, облегчить счёт.

Пусть $|Bath_i\rangle$ описывает состояние в i -м термостате, тогда можно записать выражения, описывающие данные гамильтонианы:

$$\begin{aligned} H_{th} |Bath_1\rangle &= E_{B1} |Bath_1\rangle, \\ H_{th} |Bath_2\rangle &= E_{B2} |Bath_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$H_{dec} = H_{dec}^{Bath_1} + H_{dec}^{Bath_2} = \gamma_1 |Bath_1\rangle |g_1\rangle \langle e_1| + \gamma_2 |Bath_2\rangle |g_2\rangle \langle e_2|, \quad (3.30)$$

где γ_i описывает энергию распада в i -й термостат.

Теперь, пользуясь таким определением гамильтониана взаимодействия (3.30) с термостатом и записывая его воздействие на состояния (3.4), можно обнаружить, что появляются четыре дополнительных канала распада для внутренней системы:

$$\begin{aligned}
H_{dec}^{Bath_1} |1\rangle &= \gamma_1 |Bath_1\rangle \otimes |4\rangle = \gamma_1 |T_1\rangle, \\
H_{dec}^{Bath_2} |1\rangle &= \gamma_2 |Bath_2\rangle \otimes |3\rangle = \gamma_2 |T_2\rangle, \\
H_{dec}^{Bath_2} |4\rangle &\Rightarrow \gamma_2 |Bath_2\rangle \otimes |2\rangle = \gamma_2 |T_3\rangle, \\
H_{dec}^{Bath_1} |3\rangle &\Rightarrow \gamma_1 |Bath_1\rangle \otimes |2\rangle = \gamma_1 |T_4\rangle, \\
H_{dec}^{Bath_i} |2\rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Тогда, пользуясь (3.30), нетрудно получить выражения для матричных элементов полного гамильтониана (3.28):

$$\begin{aligned}
\langle T_1 | H | 1 \rangle &= \gamma_1; & \langle T_1 | H | 4 \rangle &= 0; \\
\langle T_2 | H | 1 \rangle &= \gamma_2; & \langle T_2 | H | 4 \rangle &= 0; \\
\langle T_3 | H | 1 \rangle &= 0; & \langle T_3 | H | 4 \rangle &= \gamma_2; \\
\langle T_4 | H | 1 \rangle &= 0; & \langle T_4 | H | 4 \rangle &= \langle Bath_1 | Bath_2 \rangle; \\
\\
\langle T_1 | H | 2 \rangle &= 0; & \langle T_1 | H | 3 \rangle &= 0; \\
\langle T_2 | H | 2 \rangle &= 0; & \langle T_2 | H | 3 \rangle &= 0; \\
\langle T_3 | H | 2 \rangle &= 0; & \langle T_3 | H | 3 \rangle &= \langle Bath_2 | Bath_1 \rangle; \\
\langle T_4 | H | 2 \rangle &= 0; & \langle T_4 | H | 3 \rangle &= \gamma_1.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Стоит обратить внимание на $\langle T_4 | H | 4 \rangle$ и $\langle T_3 | H | 3 \rangle$, поскольку в самом общем случае $\langle Bath_i | Bath_j \rangle \neq 0$, и собственно говоря, данное произведение выражает степень корреляции между двумя разными термостатами. Наличие данной корреляции между термостатами, взаимодействующими с двумя разными кубитами, эффективно может быть определено как общий термостат, изучению которого посвящен ряд пионерских работ, в частности посвященных созданию устойчивых запутанных состояний с помощью специальных общих термостатов [81-86]. В рамках данной диссертационной работы, коррелированные термостаты рассмотрены для двухкубитной структуры с резонаторами в следующих разделах. В текущем разделе рассмотрим некоррелированные термостаты.

Итак, у нас имеется семь каналов распада, формирующих континуум состояний с непрерывным спектром, которые составляют проекционный оператор на данный континуум:

$$P = |A\rangle\langle A| + |B\rangle\langle B| + |C\rangle\langle C| + |T_1\rangle\langle T_1| + |T_2\rangle\langle T_2| + |T_3\rangle\langle T_3| + |T_4\rangle\langle T_4|. \tag{3.33}$$

В рамках метода неэрмитового гамильтониана, необходимо, чтобы выполнялись два условия:

1. Набор P должен быть собственным для рассматриваемого гамильтониана (3.28). Это очевидно, поскольку в первом порядке однофотонных взаимодействий, и в отсутствие прямого взаимодействия между кубитами, а также в отсутствие корреляции между

термостатами, невозможно, посредством выбранного гамильтониана, осуществлять переход между состояниями составляющими P .

$$\left. \begin{aligned} H|A\rangle &= E_a|A\rangle + \lambda_1 e^{jkx_1}|1\rangle + \gamma_2|k_w\rangle \otimes |T_3\rangle, \\ H|B\rangle &= E_b|B\rangle + \lambda_2 e^{jkx_2}|1\rangle + \gamma_1|k_w\rangle \otimes |T_4\rangle, \\ H|C\rangle &= E_c|C\rangle + \lambda_2 e^{jkx_2}|4\rangle + \lambda_1 e^{jkx_1}|3\rangle, \\ H|T_1\rangle &= |Bath_1\rangle \otimes \left[(\Omega_2 + E_{B_1})|4\rangle + \lambda_2 e^{-jkx_2}|k\rangle \otimes |2\rangle + \gamma_2|Bath_2\rangle \otimes |2\rangle \right], \\ H|T_2\rangle &= |Bath_2\rangle \otimes \left[(\Omega_1 + E_{B_2})|3\rangle + \lambda_1 e^{-jkx_1}|k\rangle \otimes |2\rangle + \gamma_1|Bath_1\rangle \otimes |2\rangle \right], \\ H|T_3\rangle &= E_{B_2}|T_3\rangle, \\ H|T_4\rangle &= E_{B_1}|T_4\rangle. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Выражения (3.34) содержат двухфотонные состояния, и переход к однофотонному рассмотрению означает, что они преобразуются к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} H|A\rangle &= E_a|A\rangle + \lambda_1 e^{jkx_1}|1\rangle, \\ H|B\rangle &= E_b|B\rangle + \lambda_2 e^{jkx_2}|1\rangle, \\ H|C\rangle &= E_c|C\rangle + \lambda_2 e^{jkx_2}|4\rangle + \lambda_1 e^{jkx_1}|3\rangle, \\ H|T_1\rangle &= |Bath_1\rangle \otimes (\Omega_2 + E_{B_1})|4\rangle \equiv E_{B_1}|T_1\rangle, \\ H|T_2\rangle &= |Bath_2\rangle \otimes (\Omega_1 + E_{B_2})|3\rangle \equiv E_{B_2}|Bath_2\rangle, \\ H|T_3\rangle &= E_{B_2}|T_3\rangle, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

По определению, $E_{B_i} \gg \Omega_i, \lambda_i, \gamma_i$, что позволяет перейти к двум тождествам в (3.35).

2. Состояния из P должны быть ортогональными друг другу, это условие автоматически вытекает из предположения, что рассматривается взаимодействие в первом порядке и в однофотонном режиме, то есть либо высвечивается фотон в радиационный канал, либо в термостат (то есть $\langle k_w|Bath_i\rangle = 0$). Иными словами, исключается дальнейший распад системы в термостаты.

Определяя эффективный гамильтониан и проекционные операторы также как и в предыдущей главе, можно рассчитать матричные элементы эффективного гамильтониана:

$$\begin{aligned} \langle 1|H_{eff}|1\rangle &= \Omega_1 + \Omega_2 + \sum_k \left(\frac{\lambda_1^2}{E - E_A + i\varepsilon} + \frac{\lambda_2^2}{E - E_B + i\varepsilon} + \frac{\gamma_1^2}{E - E_{B_1} + i\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2}{E - E_{B_2} + i\varepsilon} \right) = \\ &= \Omega_1 + \Omega_2 - j\Gamma_1 - j\Gamma_2 - j\Gamma_{1\gamma} - j\Gamma_{2\gamma}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\langle 4|H_{eff}|4\rangle = \Omega_2 + \sum_k \left(\frac{\lambda_2^2}{E - E_C + i\varepsilon} + \frac{\gamma_2^2}{E - E_{B_2} + i\varepsilon} \right) = \Omega_2 - j\Gamma_2 - j\Gamma_{2\gamma}, \quad (3.37)$$

$$\langle 3|H_{eff}|3\rangle = \Omega_1 + \sum_k \left(\frac{\lambda_1^2}{E - E_C + i\varepsilon} + \frac{\gamma_1^2}{E - E_{B_1} + i\varepsilon} \right) = \Omega_1 - j\Gamma_1 - j\Gamma_{1\gamma}, \quad (3.38)$$

$$\langle 3|H_{eff}|4\rangle = \sum_k \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{jk(x_1 - x_2)}}{E - E_C + i\varepsilon}. \quad (3.39)$$

Все остальные неуказанные элементы равны нулю. Аналогичным образом можно ввести обратную матрицу R (3.9) и записать волновые функции системы:

$$|\Psi_A\rangle = |A\rangle + \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |A\rangle + \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} \left(\lambda_1 e^{-jkx_1} |A\rangle + \lambda_2 e^{-jkx_2} |B\rangle + \gamma_1 |T_1\rangle + \gamma_2 |T_2\rangle \right) R_{11} \lambda_1 e^{jk_0 x_1}, \quad (3.40)$$

$$|\Psi_B\rangle = |B\rangle + \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |B\rangle + \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} \left(\lambda_1 \sum_k e^{-jkx_1} |A\rangle + \lambda_2 \sum_k e^{-jkx_2} |B\rangle + \gamma_1 \sum_{k_{bath}} |T_1\rangle + \gamma_2 \sum_{k_{bath}} |T_2\rangle \right) R_{11} \lambda_2 e^{jk_0 x_2}, \quad (3.41)$$

$$|\Psi_C\rangle = |C\rangle + \frac{1}{E - H_{eff}} H_{QP} |C\rangle + \frac{1}{E - H_{PP} + i\varepsilon} \left(\sum_{k_{bath}} |T_4\rangle \left(R_{34} \lambda_2 \gamma_1 e^{jk_0 x_2} + R_{33} \lambda_1 \gamma_1 e^{jk_0 x_1} \right) + \sum_{k_{bath}} |T_3\rangle \left(R_{44} \lambda_2 \gamma_2 e^{jk_0 x_2} + R_{43} \lambda_1 \gamma_2 e^{jk_0 x_1} \right) + \sum_k |C\rangle \left(R_{44} \lambda_2^2 e^{jk_0 x_2} e^{-jkx_2} + R_{43} \lambda_1 \lambda_2 e^{jk_0 x_1} e^{-jkx_2} + R_{34} \lambda_1 \lambda_2 e^{jk_0 x_2} e^{-jkx_1} + R_{33} \lambda_1^2 e^{jk_0 x_1} e^{-jkx_1} \right) \right). \quad (3.42)$$

Чтобы понять, почему в (3.37) и (3.38) входит только один матричный элемент, удобно составить карту переходов между состояниями P и Q , (что позволяет определить ненулевые матричные элементы H_{QP} и H_{PQ}):

$$\begin{aligned} |1\rangle &\rightarrow \{|A\rangle, |B\rangle, |T_1\rangle, |T_2\rangle\} \\ |2\rangle &\rightarrow |2\rangle \\ |3\rangle &\rightarrow \{|C\rangle, |T_4\rangle\} \\ |4\rangle &\rightarrow \{|C\rangle, |T_3\rangle\} \end{aligned}$$

Таким образом, можно перейти к конфигурационному пространству для обнаруживаемого фотона:

$$|\Psi_A\rangle = e^{jk_0 x} |4\rangle + |4\rangle R_{11} \Gamma_1 e^{jk|x-x_1|} e^{jk_0 x_1} + |3\rangle R_{11} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{j\left(k + \frac{\Omega_2 - \Omega_1}{v_g}\right)|x-x_2|} e^{jk_0 x_1}, \quad (3.43)$$

$$|\Psi_B\rangle = e^{jk_0 x} |3\rangle + |4\rangle R_{11} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{jk_0 x_2} e^{j\left(k + \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{v_g}\right)|x-x_1|} + |3\rangle R_{11} \Gamma_2 e^{jk_0 x_2} e^{jk|x-x_2|}, \quad (3.44)$$

$$|\Psi_C\rangle = e^{jk_0x} |2\rangle + |2\rangle (R_{44}\Gamma_2 e^{jk_0x_2} + R_{43}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} e^{jk_0x_1}) e^{jk|x-x_2|} + (R_{34}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} e^{jk_0x_2} + R_{33}\Gamma_1 e^{jk_0x_1}) e^{jk|x-x_1|}. \quad (3.45)$$

Если сравнить данные выражения с ранее полученными выражениями (3.17), (3.23 и (3.24), то видно, что нет никаких различий по форме. Единственная разница в определении обратных матричных элементов, которые теперь включают релаксацию кубитов. А как видно из (3.36)-(3.39) релаксация входит просто как добавка к мнимой части матричных элементов. И получен тривиальный ответ, который также получается в рамках представления Гейзенберга и уравнений эволюции. Откуда можно сделать вывод, что более интересный результат должен получиться если:

- взять реальный гамильтониан, описывающий тот или иной механизм релаксации, что, во-первых, приведет к некоторой гибридизации состояний непрерывного спектра, и, во-вторых, может обогатить динамику системы за счет разделения степени распада для различных внутренних состояний;

- учесть наличие корреляции между термостатами, что приведет к тому, что в конечные выражения должна будет войти степень корреляции, т.е. дополнительная степень свободы для рассеяния фотона.

- попробовать учесть двухфотонные процессы. Основная сложность с такими процессами – это построение правильного гамильтониана, позволяющего их описывать, а также стоит вопрос о корректном описании корреляции фотонов и их рассеянии друг на друге.

Тем не менее, полученный результат ложится в рамки существующих представлений и позволяет описать прохождение фотона, с учетом релаксации в двухкубитной структуре.

Учет неэрмитового гамильтониана в представлении матрицы плотности

Другой механизм затухания представляет собой декогеренцию состояний кубита, который выражается, в общем-то, затуханием недиагональных элементов матрицы плотности состояний. Иными словами, можно объединить формализм уравнений эволюции и метод неэрмитового гамильтониана [43]:

$$\frac{d\langle\rho\rangle_{mn}}{dt} = -j[H_{eff}, \langle\rho\rangle]_{mn} + 2\alpha_\phi(1-\delta_{mn})\langle\rho\rangle_{mn}, \quad (3.46)$$

где $m, n = 1, 2, 3, 4$; δ_{mn} – символ Кронекера и $\langle\rho\rangle_{mn}$ – элемент матрицы плотности состояний.

Данное уравнение нельзя рассматривать как уравнение эволюции в обычном понимании, поскольку сам эффективный гамильтониан описывает распад системы после момента рассеяния. Поэтому населенности следует интерпретировать как населенности, полученные уже непосредственно после рассеяния.

Если обратить внимание на (3.36)-(3.39), то увидим, что матричные элементы эффективного гамильтониана можно выразить как:

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} B+C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & D^* \\ 0 & 0 & D & C \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

где $B = \Omega_1 - j\Gamma_1 - j\Gamma_{1\gamma}$; $C = \Omega_2 - j\Gamma_2 - j\Gamma_{2\gamma}$; и $D = \sum_k \frac{\lambda_1 \lambda_2 e^{jk(x_1 - x_2)}}{E - E_C + i\varepsilon}$.

В этом случае можно достаточно легко рассчитать коммутатор с матрицей плотности (здесь и далее для простоты опускаем символ усреднения, и подразумеваем, что считаем средние значения):

$$[H_{eff}, \langle \rho \rangle] = \begin{pmatrix} \rho_{11} 2j \operatorname{Im}(B+C) & \rho_{21}(B+C) & \rho_{31}(2j \operatorname{Im} B + C) - \rho_{41} D & \rho_{41}(B + 2j \operatorname{Im} C) - \rho_{31} D^* \\ -\rho_{12}(B^* + C^*) & 0 & -\rho_{42} D - \rho_{32} B^* & -\rho_{42} C^* - \rho_{32} D^* \\ \rho_{13}(2j \operatorname{Im} B - C^*) + \rho_{14} D^* & \rho_{24} D^* + \rho_{23} B & \rho_{33} 2j \operatorname{Im} B + \rho_{34} D^* - \rho_{43} D & \rho_{43}(B - C^*) + D^*(\rho_{44} - \rho_{33}) \\ \rho_{14}(2j \operatorname{Im} C - B^*) + \rho_{13} D & \rho_{24} C + \rho_{23} D & \rho_{34}(C - B^*) + D(\rho_{33} - \rho_{44}) & \rho_{44} 2j \operatorname{Im} C + \rho_{43} D - \rho_{34} D^* \end{pmatrix}.$$

Особенностью данного коммутатора является тот факт, что видно, что состояние $|2\rangle$ полностью отвязано от других внутренних состояний, поскольку оно является стабильным состоянием с наименьшей возможной энергией. Тогда, пользуясь (3.47), можно составить шесть систем уравнений (безусловно, это не шесть отдельных систем, поскольку они связаны некоторыми нормировочными соотношениями, но могут быть решены отдельно и это разделение введено для удобства):

$$\frac{d\rho_{11}}{dt} = \rho_{11} 2 \operatorname{Im}(B+C); \quad (3.48)$$

$$\frac{d\rho_{22}}{dt} = 0; \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{33}}{dt} = \rho_{33} 2 \operatorname{Im} B - j\rho_{34} D^* + j\rho_{43} D; \\ \frac{d\rho_{34}}{dt} = -j\rho_{34}(C - B^*) - jD(\rho_{33} - \rho_{44}) + 2\alpha_\phi \rho_{34}; \\ \frac{d\rho_{43}}{dt} = -j\rho_{43}(B - C^*) - jD^*(\rho_{44} - \rho_{33}) + 2\alpha_\phi \rho_{43}; \\ \frac{d\rho_{44}}{dt} = \rho_{44} 2 \operatorname{Im} C - j\rho_{43} D + j\rho_{34} D^*; \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{13}}{dt} = -j\rho_{13}(2j\text{Im}B - C^*) - j\rho_{14}D_{mn}^* + 2\alpha_\phi\rho_{13}; \\ \frac{d\rho_{14}}{dt} = -j\rho_{14}(2j\text{Im}C - B^*) - j\rho_{13}D + 2\alpha_\phi\rho_{14}; \\ \frac{d\rho_{31}}{dt} = -j\rho_{31}(2j\text{Im}B + C) + j\rho_{41}D + 2\alpha_\phi\rho_{31}; \\ \frac{d\rho_{41}}{dt} = -j\rho_{41}(B + 2j\text{Im}C) + j\rho_{31}D^* + 2\alpha_\phi\rho_{41}; \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{12}}{dt} = +j\rho_{12}(B^* + C^*) + 2\alpha_\phi\rho_{12}; \\ \frac{d\rho_{21}}{dt} = -j\rho_{21}(B + C) + 2\alpha_\phi\rho_{21}; \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho_{23}}{dt} = -j\rho_{24}D^* - j\rho_{23}B + 2\alpha_\phi\rho_{23}; \\ \frac{d\rho_{24}}{dt} = -j\rho_{24}C - j\rho_{23}D + 2\alpha_\phi\rho_{24}; \\ \frac{d\rho_{32}}{dt} = j\rho_{42}D + j\rho_{32}B^* + 2\alpha_\phi\rho_{32}; \\ \frac{d\rho_{42}}{dt} = j\rho_{42}C^* + j\rho_{32}D^* + 2\alpha_\phi\rho_{42}; \end{cases} \quad (3.53)$$

Уравнения (3.48) и (3.49) описывают тот факт, что состояние с двумя возбужденными кубитами затухает, а состояние с двумя кубитами в основном состоянии – стационарно. И для них сразу можно найти решение:

$$\rho_{11} = C_{11}^0 e^{2\text{Im}(B+C)t}, \quad (3.54)$$

$$\rho_{22} = C_{22}^0. \quad (3.55)$$

Для остальных систем аналитическое решение может быть найдено только для идентичных кубитов ($B = C$), причем для системы (3.50) удобно ввести следующую замену переменных:

$$\begin{aligned} \rho_- &= \rho_{44} - \rho_{33}; \\ \rho_+ &= \rho_{44} + \rho_{33}; \\ \rho_1 &= \rho_{43} + \rho_{34}; \\ \rho_2 &= \rho_{43} - \rho_{34}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Подробности решения данных систем приведены в *Приложении Г*. Итак, имеется ряд общих решений для матрицы плотности. Можно утверждать, исходя из определения матрицы плотности, что $\rho_{mn} = \rho_{nm}^*$. Теперь требуется задать некоторые начальные условия и попробовать найти соответствующие коэффициенты. Тогда, для начального момента времени, можно записать следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho_{11}(0) = C_{11}^0; \\
\rho_{22}(0) = C_{22}^0; \\
\rho_+(0) = C_+; \\
\rho_-(0) = C_{1-} + C_{2-}; \\
\rho_1(0) = -2 \operatorname{Im} D \left(\frac{C_{1-}}{\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-}}{\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_1^0; \\
\rho_2(0) = -j2 \operatorname{Re} D \left(\frac{C_{1-} e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-} e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_2^0; \\
\rho_{13}(0) = C_{13}^{0+} + C_{13}^{0-}; \\
\rho_{14}(0) = -\frac{|D|}{D^*} (C_{13}^{0+} - C_{13}^{0-}); \\
\rho_{12}(0) = C_{12}^0; \\
\rho_{23}(0) = C_{23}^{0+} + C_{23}^{0-}; \\
\rho_{24}(0) = \frac{|D|}{D^*} (-C_{23}^{0+} + C_{23}^{0-});
\end{array} \right. \quad (3.57)$$

Здесь 11 уравнений и 12 неизвестных. Дополнительное уравнение следует из нормировки и имеет вид:

$$C_{11}^0 + C_{22}^0 + C_+ = 1. \quad (3.58)$$

Здесь не будут приведены аналитические решения для различных исходных состояний, а просто разберем ряд интересных состояний, для которых приведем лишь конечные решения для коэффициентов.

Два кубита возбуждены

Для начала рассмотрим ситуацию, когда после рассеяния система осталась на самом верхнем уровне энергии. Это означает, что населенность состояния, описываемого матричным элементом ρ_{11} , равна единице. Тогда, следуя условиям нормировки, можно утверждать, что

$$\begin{aligned}
\rho_{11} &= 1; \\
\rho_{22} &= 0; \\
\rho_{33} &= 0; \\
\rho_{44} &= 0.
\end{aligned} \quad (3.59)$$

А также равны нулю все недиагональные элементы. Используя (3.58) мы получаем, что только C_{11}^0 не равен нулю, остальные коэффициенты равны нулю. Следовательно, мы будем наблюдать только затухание возбужденных состояний с постоянной $2 \operatorname{Im}(B+C)$. Это

полностью ложится в рамки вышеизложенных представлении об интерпретации результатов гибридного метода.

4.3 Влияние общего канала распада на транспортные характеристики

В данном разделе рассмотрим систему, как и в разделе 3.2, но, во-первых, будет включен общий канал распада в феноменологическом представлении, а во-вторых, нас будет интересовать транспорт фотона в такой системе, для чего можно ограничиться состояниями, при которых оба кубита будут находиться в основном состоянии, если в волноводе имеется фотон, в-третьих, будет добавлено прямое диполь-дипольное взаимодействие между кубитами. Изучение такого общего термостата интересно с точки зрения создания устойчивых запутанных состояний в многокубитных системах [81, 83], и применительно к сверхпроводниковым кубитами описано в [86-88], и к квантовым точкам [89, 90].

В этом случае полный гамильтониан системы будет похож на гамильтониан (3.28) с добавлением некоторых слагаемых, то есть:

$$H = \sum_{i=1,2} \frac{1}{2} \hbar (1 + \sigma_{zi}) \Omega_i + \sum_k \hbar \omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k \sum_{i=1,2} \hbar \lambda_i \left(a_k \sigma_+^{(i)} e^{jkx_i} + a_k^\dagger \sigma_-^{(i)} e^{-jkx_i} \right) + \hbar J \left(\sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(2)} + \sigma_+^{(2)} \sigma_-^{(1)} \right) + H_{th} + \tilde{H}_{dec}, \quad (3.60)$$

где J – константа прямого взаимодействия между кубитами, а \tilde{H}_{dec} теперь описывает затухание не только в локальные нерadiационные каналы, но и в общий канал распада $|T_5\rangle$.

Остановимся подробнее на выборе состояний. Так как нас в данном разделе не будет интересовать перенос состояния между кубитами, то ограничим ранее введенный набор состояний следующим образом. Поскольку мы хотим рассмотреть процесс транспорта фотона, то необходимо и, в то же время удобно, взять за исходное состояние $|C\rangle$ из (3.3), где у нас имеется один фотон в волноводе и два кубита в основном состоянии. Удобство связано с тем, что дальнейший набор состояний вытекает из взаимодействий, описываемых гамильтонианом (3.60), третье слагаемое которого приводит нас к состояниям $|3\rangle$ и $|4\rangle$ из (3.4). Эти состояния, $|3\rangle$ и $|4\rangle$, могут, помимо распада обратно в радиационный канал, распасться в три нерadiационных канала, вводя локальные термостаты как в предыдущем разделе, видно, что

согласно (3.32) у нас остаются два термостатных состояния $|T_3\rangle$ и $|T_4\rangle$. Теперь остается открытым вопрос только касательно общего термостата.

Для этого давайте вернемся к определению эффективного гамильтониана (2.78):

$$\hat{H}_{eff}(E) = H_{внутр} - j \frac{W}{2}.$$

Если обратиться к (3.7) и (3.36)-(3.39), то можно записать следующие тождества, аналогично тому, как это было проделано в разделе 2.2.2 предыдущей главы:

$$\begin{aligned} \langle 4 | H_{внутр} | 4 \rangle &= \Omega_2, \\ -j \frac{W_{44}}{2} &= -j \frac{1}{2} (W_{44}^{[C]} + W_{44}^{[T_4]}) = -j \frac{1}{2} \sum_{ch} A_4^{[ch]} \bar{A}_4^{[ch]}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \langle 3 | H_{внутр} | 3 \rangle &= \Omega_1, \\ -j \frac{W_{33}}{2} &= -j \frac{1}{2} (W_{33}^{[C]} + W_{33}^{[T_4]}) = -j \frac{1}{2} \sum_{ch} A_3^{[ch]} \bar{A}_3^{[ch]}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \langle 3 | H_{внутр} | 4 \rangle &= 0, \\ -j \frac{W_{34}}{2} &= \frac{L}{2\pi} \int dq \frac{\xi_1 \xi_2 e^{-iq(x_2-x_1)}}{\omega_k - \omega_q + i\varepsilon} = -j \frac{1}{2} W_{34}^{[C]} = -j \frac{1}{2} A_3^{[C]} \bar{A}_4^{[C]}, \end{aligned} \quad (3.63)$$

где аналогично тому, как это было сделано в (2.80), можно записать амплитуды распада:

$$\begin{cases} A_i^{[C]} \bar{A}_i^{[C]} = 2\Gamma_i; \\ A_3^{[C]} \bar{A}_4^{[C]} = 2\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{ik|x_2-x_1|}; \\ A_i^{[T_{3,4}]} \bar{A}_i^{[T_{3,4}]} = 2\gamma_{2,1}. \end{cases} \quad (3.64)$$

Эти выражения получены для гамильтониана (3.28), поэтому необходимо дополнить матрицу эффективного гамильтониана некоторыми элементами, а именно:

1) Членами, обусловленными прямым взаимодействием, очевидно, что оно привет к появлению недиагональных элементов, то есть можно записать:

$$\hbar J \langle m | (\sigma_+^{(1)} \sigma_-^{(2)} + \sigma_+^{(2)} \sigma_-^{(1)}) | n \rangle = \hbar J (1 - \delta_{mn}).$$

2) Членами, обусловленными наличием общего термостата, который будет введен феноменологически, описав амплитуды распада в него как:

$$\begin{cases} A_3^{[T_5]} \bar{A}_3^{[T_5]} = 2\kappa_2; \\ A_4^{[T_5]} \bar{A}_4^{[T_5]} = 2\kappa_1; \\ A_3^{[T_5]} \bar{A}_4^{[T_5]} = 2\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}, \end{cases}$$

где, в отличие локальных термостатов, будем иметь ненулевые амплитуды $A_i^{T_5} \bar{A}_j^{T_5} \neq 0$, что приведет к появлению дополнительной мнимой части как в диагональных, так и в недиагональных элементах. Безусловно, можно аналогичным образом в последнем соотношении ввести экспоненту, которая будет описывать некоторую задержку в «реакции» между кубитами при взаимодействии с общим термостатом. Но в данном случае, полагаем, что необходимо рассматривать конкретный механизм взаимодействия с таким термостатом. Поэтому рассмотрим марковское приближение переноса взаимодействия в общем термостате, что соответствует длинноволновому приближению, то есть длина волны такого взаимодействия много больше расстояния между кубитами. Данное рассмотрение справедливо, поскольку, к примеру, взаимодействие с фоновым полем имеет длинноволновый характер.

Таким образом, матрицу полного эффективного гамильтониана можно записать в следующем виде:

$$H_{eff} = \begin{pmatrix} \Omega_1 - j\tilde{\Gamma}_1 & A \\ A & \Omega_2 - j\tilde{\Gamma}_2 \end{pmatrix}, \quad (3.65)$$

где

$$\begin{aligned} A &= J - j\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ik|x_2-x_1|} - j\sqrt{\kappa_1\kappa_2}, \\ \tilde{\Gamma}_i &= \Gamma_i + \kappa_i + \gamma_i. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Положение комплексных резонансов, как и ранее, определяется приравниванием определителя матрицы $\det(E - H_{eff}) = 0$ к нулю. В результате решения такого уравнения получаем:

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\Omega_1 + \Omega_2) - j\frac{1}{2}(\tilde{\Gamma}_1 + \tilde{\Gamma}_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Omega_1 - \Omega_2 + j(\tilde{\Gamma}_2 - \tilde{\Gamma}_1))^2 + 4A^2}. \quad (3.67)$$

Недиагональные элементы в матрице (3.65), помимо прямого взаимодействия J , описывают не прямое взаимодействие $\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{ik|x_2-x_1|}$, обусловленное спонтанным излучением возбужденных кубитов, а также взаимодействие $\sqrt{\kappa_1\kappa_2}$, обусловленное нерадиационными каналами распада. При этом вклад спонтанного излучения зависит от частоты рассеиваемого фотона ω ($k = \omega/v_g$), а это приводит к тому, что положение резонансов (3.67), в комплексной плоскости, зависит от частоты рассеиваемого фотона, что является проявлением эффекта запаздывания, как это было показано ранее. Также положение резонансов на реальной оси частот определяется, в общем случае, нелинейным уравнением $\omega = \text{Re}(\omega_{\pm}(\omega))$.

Для идентичных кубитов из (3.67) находим

$$\operatorname{Re}(\omega_{\pm}) = \Omega \pm J \pm \Gamma \sin k |x_2 - x_1|, \quad (3.68)$$

$$\operatorname{Im}(\omega_{\pm}) = -\Gamma(1 \pm \cos k |x_2 - x_1|) - \gamma - (1 \pm 1)\kappa. \quad (3.69)$$

Как следует из (3.69), ширина резонанса $\operatorname{Im}(\omega_{\pm})$ не зависит от параметра κ , и, в пределе $kd \ll 1$, определяется только релаксацией γ в локальный канал.

Этот результат обусловлен корреляционным межкубитным взаимодействием, являющимся следствием наличия общего канала распада (последнее слагаемое справа в уравнении (3.66)). Если его не учитывать, то ширины обеих резонансов будут пропорциональны κ . Таким образом, с ростом κ ширина одного резонанса линейно растет, а другого – не меняется. На Рисунке 3.9 показан резонансный спектр $S(\omega)$ для двух идентичных кубитов, который определяется нулями реальной части детерминанта $D(\omega)$ ($S(\omega) \approx 1/D(\omega)$). Левый пик соответствует частоте $\operatorname{Re}(\omega_-)$, правый – частоте $\operatorname{Re}(\omega_+)$. С ростом κ ширина и амплитуда левого пика не меняются, тогда как ширина правого пика увеличивается и его амплитуда уменьшается. На этом и последующих рисунках вычисления проведены в предположении $\kappa_i \ll \gamma_i$.

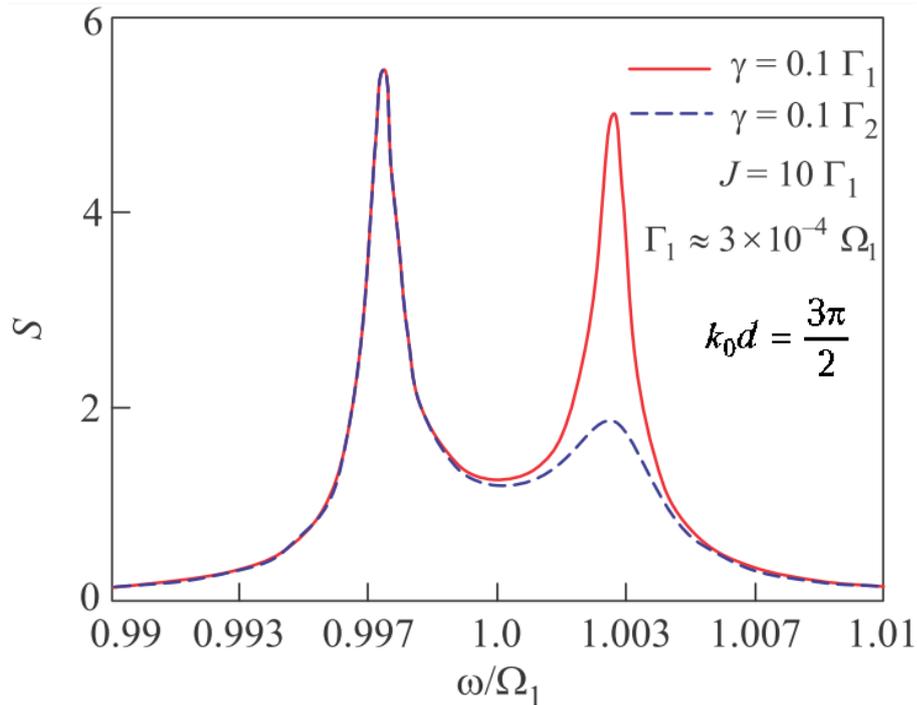


Рисунок 3.9 — Спектр коэффициента прохождения в произвольных единицах для двух идентичных кубитов. Здесь $k_0 = \Omega/v_g$

Одним полезным бонусом к данной задаче является нахождение волновой функции внутренней системы, или волновой функции двух кубитов. Если вспомнить, что полная волновая функция складывается из трех различных элементов (см. 1.32), то легко будет записать часть, отвечающую внутренней системе:

$$\Psi_Q = \sum_{m,n=1}^2 |n+2\rangle \lambda_m R_{n+2,m+2} e^{jkx_m},$$

где R – это обратная матрица в базисе состояний $|3\rangle, |4\rangle$. Итоговая волновая функция принимает вид:

$$\begin{aligned} \Psi_Q = & \frac{\lambda}{\det(E - H_{eff})} (\omega - \Omega + j\tilde{\Gamma}_1) (|3\rangle e^{-jk|x_2-x_1|} + |4\rangle e^{jk|x_2-x_1|}) + \\ & + \frac{\lambda}{\det(E - H_{eff})} A (|3\rangle e^{jk|x_2-x_1|} + |4\rangle e^{-jk|x_2-x_1|}). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Формула (3.70) позволяет определять амплитуду вероятности возбуждения каждого из кубитов ($\langle 3|\Psi_Q, \langle 4|\Psi_Q$), а также степень запутанности двухкубитного состояния. Из (3.70) следует, что максимальная запутанность $\Psi_Q \approx |3\rangle + |4\rangle$ при произвольной частоте ω рассеиваемого фотона имеет место в пределе $kd \ll 1$, а также при дискретных частотах, определяемых соотношением $kd = n\pi/2$, где $n = 1, 2, 3, \dots$

Транспортные коэффициенты будем вычислять так же, как это было сделано во второй главе, а именно, согласно уравнениям (2.85) и (2.86). Опуская подробности расчета, которые были описаны ранее в упомянутой главе, приведем лишь конечные результаты.

$$S = \frac{1}{D(\omega)} (\delta_1 \delta_2 - J^2 - 2J \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} \sin kd + B), \quad (3.71)$$

$$R = \frac{-j}{D(\omega)} (\delta_2 \Gamma_1 e^{jkd} + \delta_1 \Gamma_2 e^{-jkd} + 2\Gamma_1 \Gamma_2 \sin kd + 2J \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} + C), \quad (3.72)$$

где введен следующий ряд обозначений:

$$\text{а) } \delta_i = \omega - \Omega_i + j\kappa_i + j\gamma_i; \quad \text{б) } d = |x_2 - x_1|;$$

$$\text{в) } D(\omega) = \delta_1 \delta_2 - J^2 + j\delta_1 \Gamma_2 + j\delta_2 \Gamma_1 + 2jJ \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{jkd} - \Gamma_1 \Gamma_2 (1 - e^{2jkd}) + A;$$

$$\text{г) } A = \frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{2} (2\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} + 4j(J - j\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} e^{jkd}));$$

$$\text{д) } B = \frac{\sqrt{\kappa_1 \kappa_2}}{2} (2\sqrt{\kappa_1 \kappa_2} + 4j(J + j\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} \sin kd)); \quad \text{е) } C = -2\sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2} \sqrt{\kappa_1 \kappa_2};$$

Пренебрегая в выражениях (3.71) и (3.72) величинами A , B и C , получаем для коэффициентов S и R выражения, в точности совпадающие с уже известными (выражения (11a) и (11b) в работе [39]). На Рисунке 3.10 проведено сравнение поведения коэффициента прохождения $|t|$ (3.72) с формулой (11a) из работы [39]. Расчеты проводились для идентичных кубитов: $\Omega_1 = \Omega_2, \Gamma_1 = \Gamma_2, \gamma_1 = \gamma_2$ при фиксированных значениях $\Omega_1 = 3 \Gamma \Gamma_1, \Gamma_1 = 3 \cdot 10^{-4} \Omega_1$. Из

Рисунка 3.10 следует, что в области $J < 2\Gamma_1$ выражение (3.71) приводит к результатам, которые существенно отличаются от тех, что следуют из выражения (11а) в работе [39]. Еще более существенно это отличие видно на Рисунке 3.10б, где наличие непрямого взаимодействия между кубитами, обусловленного нерадиационными каналами распада, приводит к значительному подавлению коэффициента прохождения. Также вблизи $k_0d = 3\pi/2$ имеется область прозрачности, в которой коэффициент прохождения близок к единице в широком частотном диапазоне. Численное моделирование показало, что ширина этой области по вертикальной оси пропорциональна величине J и обратно пропорциональна скорости нерадиационного распада γ .

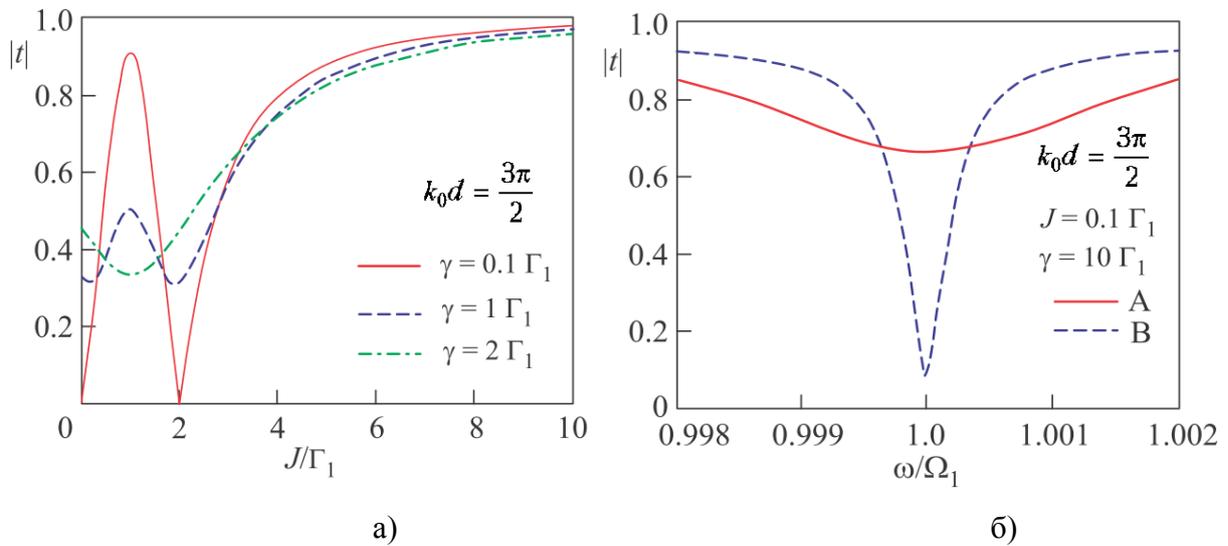


Рисунок 3.10 — Зависимость коэффициента прохождения при наличии общего нерадиационного канала распада. а) от величины диполь-дипольного взаимодействия между кубитами б) от частоты налетающего фотона. Сплошные линии соответствуют расчету по формулам из [39], пунктирные – по формуле (3.71)

4.4 Два кубита и два резонатора

В данном разделе рассматривается система, представляющая собой открытый волновод который взаимодействует с двумя резонаторами на произвольном расстоянии. В каждом резонаторе расположено по одному кубиту. Полный гамильтониан, описывающий данную систему, включает фотонные резонаторы с фундаментальными частотами ω_{c1} и ω_{c2} , расположенные на расстоянии d в волноводе, по которому могут распространяться фотоны с произвольной частотой ω_k , а также два кубита с собственными частотами Ω_1 и Ω_2 . Параметры

взаимодействия резонаторов с волноводом обозначены как ξ_1 и ξ_2 , соответственно, и резонаторов с кубитом как λ_1 и λ_2 .

$$H = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} \hbar \Omega_i \sigma_{zi} + \sum_{i=1}^2 \hbar \omega_{ci} a_i^\dagger a_i + \sum_k \hbar \omega_k c_k^\dagger c_k + \sum_{i=1}^2 \sum_k \hbar \xi_i (c_k^\dagger a_i e^{-jkx_i} + c_k a_i^\dagger e^{jkx_i}) + \sum_{i=1}^2 \hbar \lambda_i (a_i^\dagger + a_i) \sigma_{xi}, \quad (3.73)$$

где первые три члена описывают поведение всех вышеперечисленных элементов (кубиты, резонаторы, волновод), а последние два описывают взаимодействие между ними. $\sigma_{zi} = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$, $\sigma_{xi} = |e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|$ – спиновые операторы i -го кубита, a_i^\dagger (c_k^\dagger) и a_i (c_k) – бозонные операторы рождения и уничтожения фотонов в резонаторе (волноводе); здесь x_i – координата i -го резонатора в одномерном волноводе вдоль оси x , при этом $|x_1 - x_2| = d$. Задача будет решаться для однофотонного приближения, где мы ограничимся только такими состояниями, где число возбуждений равно единице. В соответствие с этим мы можем выделить в гильбертовом пространстве набор состояний:

$$\begin{aligned} |K\rangle &= |k_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle; \\ |1\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 1_{c1}, 0_{c2}\rangle; \\ |2\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 1_{c2}\rangle; \\ |3\rangle &= |0_w\rangle \otimes |e_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle; \\ |4\rangle &= |0_w\rangle \otimes |g_1, e_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle, \end{aligned} \quad (3.74)$$

где $|g\rangle$ ($|e\rangle$) – основное (возбужденное) состояние кубитов, k_w (0_w) импульс (отсутствие импульса) фотона в волноводе с произвольным волновым вектором k , последние два элемента означают наличие или отсутствие фотона в одном или другом резонаторах. Постоянный обмен фотоном между кубитом и своим резонатором приводит к гибридизации уровней энергии

$$\Omega_{Ri} = \sqrt{(\Omega_i + j\Gamma_i - \omega_{ci})^2 + 4\lambda_i^2},$$

где Γ_i – скорости распада фотона в волновод из i -го резонатора, формально равные полуширине лоренциана, соответствующего амплитудно-частотной характеристике резонатора. Для состояний (3.74) проекционные операторы запишутся как:

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{n=1}^4 |n\rangle\langle n|, \\ P &= \sum_{k_w} |K\rangle\langle K|. \end{aligned}$$

В выбранном базисе состояний эффективный гамильтониан представляет собой матрицу 4 на 4:

$$\begin{aligned}
\langle 1|H_{eff}|1\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2 + \hbar\omega_{c1} - j\hbar\Gamma_1; \\
\langle 2|H_{eff}|2\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2 + \hbar\omega_{c2} - j\hbar\Gamma_2; \\
\langle 3|H_{eff}|3\rangle &= \frac{1}{2}\hbar\Omega_1 - \frac{1}{2}\hbar\Omega_2; \\
\langle 4|H_{eff}|4\rangle &= -\frac{1}{2}\hbar\Omega_1 + \frac{1}{2}\hbar\Omega_2; \\
\langle 1|H_{eff}|2\rangle &= \langle 2|H_{eff}|1\rangle = \hbar^2\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{jkd}; \\
\langle 1|H_{eff}|3\rangle &= \langle 3|H_{eff}|1\rangle = \hbar\lambda_1; \\
\langle 1|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|1\rangle = 0; \\
\langle 2|H_{eff}|3\rangle &= \langle 3|H_{eff}|2\rangle = 0; \\
\langle 2|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|2\rangle = \hbar\lambda_2; \\
\langle 3|H_{eff}|4\rangle &= \langle 4|H_{eff}|3\rangle = 0.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

В данном выражении элементы $\langle 1|H_{eff}|2\rangle$ и $\langle 2|H_{eff}|1\rangle$ содержат зависимость от частоты налетающего фотона. При этом структура волновой функции такова, что эта частота представляет собой частоту фотона в исходном состоянии системы.

С точки зрения рассеяния нас интересует вероятность обнаружить фотон в волноводе после взаимодействия с системой, данную вероятность можно определить, перейдя, как и ранее, к координатному представлению волновой функции $\langle x|\Psi\rangle = \Psi_x$, где $|x\rangle = |x_w\rangle \otimes |g_1, g_2, 0_{c1}, 0_{c2}\rangle$. При этом волновая функция в координатном представлении запишется как:

$$\Psi_x = e^{jkx} - j\hbar\Gamma_1 e^{jk|x-x_1|} e^{jkx_1} R_{11} - j\hbar\Gamma_2 e^{jk|x-x_2|} e^{jkx_2} R_{22} - j\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \left(e^{jk|x-x_1|} e^{jkx_2} R_{12} - e^{jk|x-x_2|} e^{jkx_1} R_{21} \right), \tag{3.76}$$

где $R_{i,j} = \left(\frac{1}{E - H_{eff}} \right)_{i,j}$. Ниже приведены выражения лишь тех элементов матрицы $R_{i,j}$, которые

необходимы для вычисления (3.76) и учтем, что энергия исходного состояния системы

$$E = \hbar \left(\omega - \frac{1}{2}\Omega_1 - \frac{1}{2}\Omega_2 \right):$$

$$R_{11} = \frac{(\omega - \Omega_1)(\omega - \tilde{\omega}_2^-)(\omega - \tilde{\omega}_2^+)}{D(\omega)}, \tag{3.77}$$

$$R_{22} = \frac{(\omega - \Omega_2)(\omega - \tilde{\omega}_1^-)(\omega - \tilde{\omega}_1^+)}{D(\omega)}, \tag{3.78}$$

$$R_{12} = R_{21} = \frac{-j\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}e^{jkd}(\omega - \Omega_1)(\omega - \Omega_2)}{D(\omega)}, \quad (3.79)$$

$$\tilde{\omega}_i^\pm = \frac{\Omega_i + \omega_{ci} - j\Gamma_i \pm \Omega_{Ri}}{2}, \quad (3.80)$$

где определитель матрицы R может быть в общем виде представлен как:

$$D(\omega) = (\omega - \omega_{1+})(\omega - \omega_{1-})(\omega - \omega_{2+})(\omega - \omega_{2-}). \quad (3.81)$$

Выражение (3.81) представляет собой трансцендентное уравнение, при этом аналитические выражения для корней можно найти только для случая полностью идентичных пар кубит-резонатор ($\Omega_1 = \Omega_2$; $\omega_{c1} = \omega_{c2}$):

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\Omega + \omega_c - j\Gamma + j\Gamma e^{j\frac{\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\Omega - \omega_c + j\Gamma - j\Gamma e^{j\frac{\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right)^2 + 4\lambda^2 \right]^{1/2}, \quad (3.82)$$

$$\omega_{3,4} = \frac{1}{2} \left(\Omega + \omega_c - j\Gamma - j\Gamma e^{j\frac{\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right) \pm \frac{1}{2} \left[\left(\Omega - \omega_c + j\Gamma + j\Gamma e^{j\frac{\omega}{\omega_c} k_{c1}d} \right)^2 + 4\lambda^2 \right]^{1/2}. \quad (3.83)$$

В выражениях (3.82)-(3.83) была введена следующая замена $kd = \frac{\omega}{v_g} d = \frac{\omega}{v_g} \frac{\omega_{c1}}{\omega_{c1}} d = \frac{\omega}{\omega_{c1}} k_{c1}d$, k_{c1} – волновой вектор фотона в первом резонаторе (можно нормировать на волновой вектор фотонов из любого резонатора). Из выражений (3.82)-(3.83) видно, что и энергия резонанса и его ширина зависят от частоты налетающего фотона. Этот факт является непрямым доказательством эффекта запаздывания воздействия фотона, то есть если мы положим расстояние много меньшим длины волны, то эта зависимость пропадает и фотон «мгновенно» воздействует на обе пары кубит-резонатор. Именно благодаря эффекту запаздывания, который формально присущ как виртуальным фотонам, так и реальному, возникает интерференция. Выражения (3.82) и (3.83) позволяют найти зависимости реальных резонансов системы и их ширин от её параметров. Эти зависимости от расстояния между кубитами представлены на Рисунках 3.11 и Рисунках 3.12.

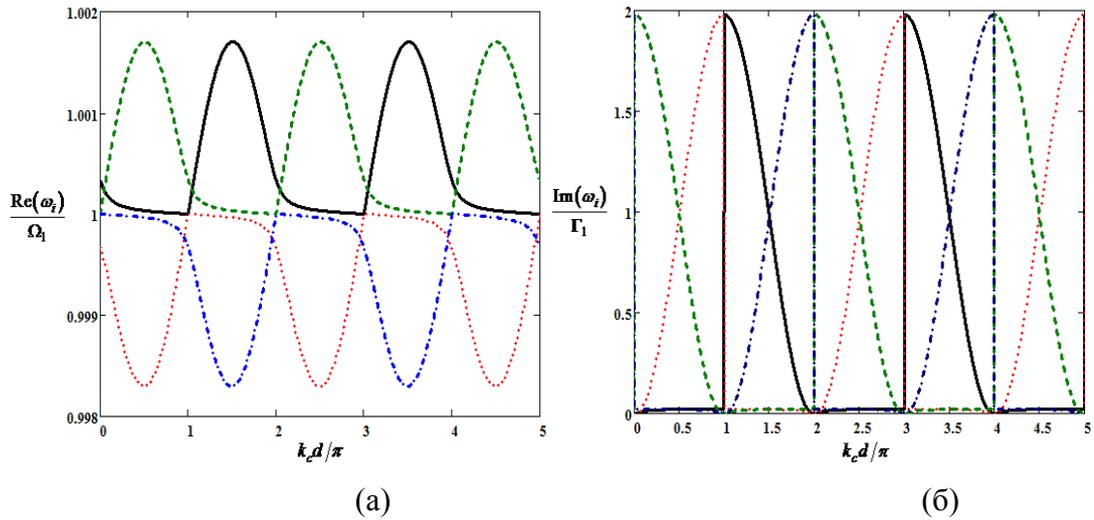


Рисунок 3.11 — Зависимость энергии резонанса (а) и его ширины (б) от расстояния между резонаторами с кубитами для случая $\Omega_1 = \omega_{c1}$ в слабом дисперсионном режиме ($\lambda \ll \Gamma$) при частоте налетающего фотона равной $\omega = \omega_{c1}$. Черная непрерывная линия – ω_1 , красная пунктирная – ω_2 , зеленая пунктирная – ω_3 , синяя штрихпунктирная – ω_4

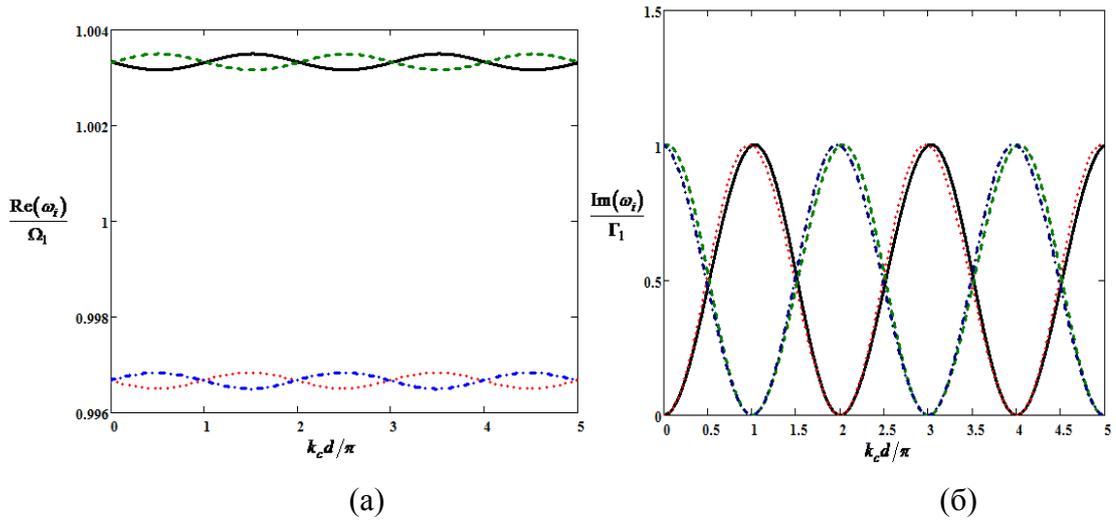


Рисунок 3.12 — Зависимость энергии резонанса (а) и его ширины (б) от расстояния между резонаторами с кубитами для случая $\Omega_1 = \omega_{c1}$ в сильном резонансном режиме ($\lambda \gg \Gamma$) при частоте налетающего фотона равной $\omega = \omega_{c1}$. Черная непрерывная линия – ω_1 , красная пунктирная – ω_2 , зеленая пунктирная – ω_3 , синяя штрихпунктирная – ω_4

Из Рисунка 3.11 и Рисунка 3.12 видно, что в случае слабой связи $\lambda \ll \Gamma$ можно наблюдать эффекты как увеличения скорости испускания фотона из резонатора в волновод, так и её уменьшения. Данный эффект связан с тем, что располагая пары кубит-резонатор на различных расстояниях, кратных длине волны на фундаментальной частоте резонатора, мы, тем самым, заставляем конструктивно или деструктивно интерферировать волновые функции

каждой пары [19]. Причем в слабом дисперсионном режиме, мы видим, что вклад в эти эффекты при различных расстояниях дают разные корни определителя. В сильном резонансном режиме мы видим более сильное расщепление резонансных энергий, что связано с большим Раби-расщеплением между внутренними уровнями системы. Поскольку задача решается в квазистационарном приближении, то вклад в наблюдаемый результат будут давать все четыре корня, поэтому эффект уменьшения скорости испускания можно будет наблюдать на расстояниях кратных $\pi/2$, так как в этих точках вклад от всех корней будет равным, при этом в сильном резонансном режиме данный эффект будет сильнее (см. Рисунок 3.11 и Рисунок 3.12). Данное явление можно объяснить следующим образом, после того как фотон будет испущен первым резонатором, то он может повторно отразиться от второго резонатора и снова поглотиться первым, таким образом меняя расстояние между резонаторами мы меняем вероятность таких повторных возбуждений и испусканий, более того, предполагается, что также должно происходить повторное возбуждение и кубитов, что, как и в случае без резонаторов [19], приведет к увеличению времени жизни первого.

В нашей задаче не было учтено затухание самого волновода, мы полагаем, что если мы его учтем, то это приведет к уменьшению амплитуды регистрируемого сигнала, а также к ослаблению эффекта изменения скорости испускания фотона в волновод с увеличением расстояния между парами кубит-резонатор, поскольку последний связан с интерференцией волновых функций. Иными словами, с ростом расстояния будет уменьшаться взаимный вклад в интерференцию от обеих пар, так как будут уменьшаться амплитуды волновых функций.

Из выражения (3.76) получим выражение для коэффициента прохождения ($x > x_2$) и отражения ($x < x_1$).

$$T = 1 - j\hbar\Gamma_1 R_{11} - j\hbar\Gamma_2 R_{22} - j\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \left(e^{jkd} R_{12} + e^{-jkd} R_{21} \right), \quad (3.84)$$

$$R = -j\hbar\Gamma_1 R_{11} e^{-jkd} - j\hbar\Gamma_2 R_{22} e^{jkd} - j\hbar\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} (R_{12} + R_{21}). \quad (3.85)$$

Нами условно было принято, что фотон движется со стороны первого резонатора с координатой x_1 . На Рисунках 3.13, 3.14 представлены амплитудно-частотные характеристики для полностью одинаковых пар кубит-резонатор для сильного резонансного (Рисунок 3.13) и слабого дисперсионного (Рисунок 3.14) режимов рассмотренных ранее.

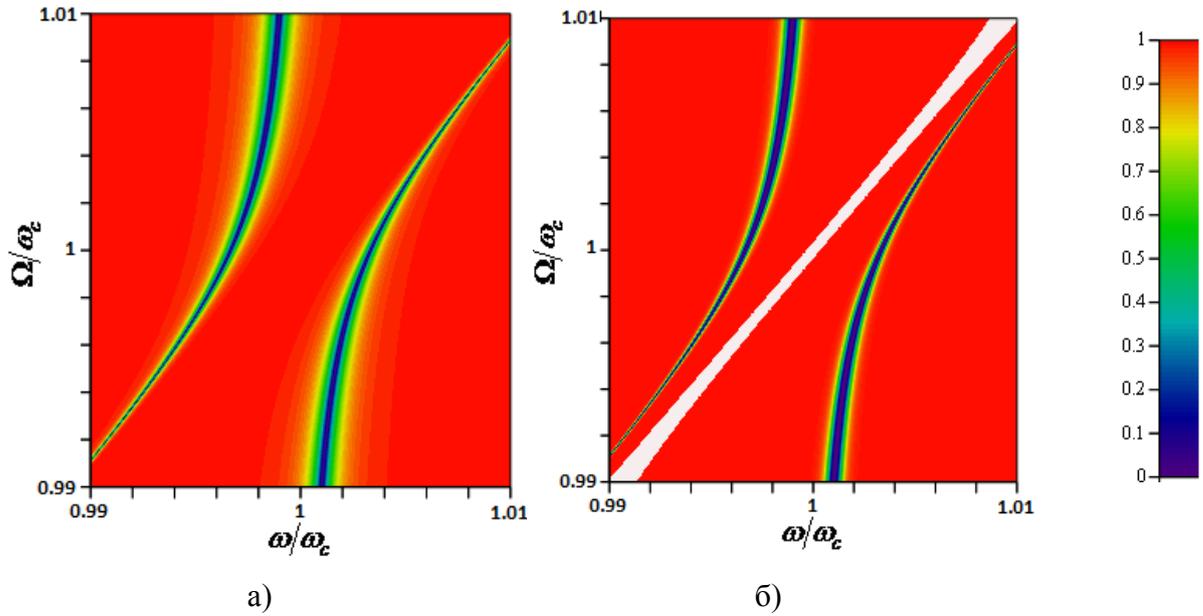


Рисунок 3.13 — Зависимость амплитуды коэффициента прохождения T (величина указана на цветовой шкале) от частоты налетающего фотона и расстояния между уровнями кубита при малых (а) и больших ($k_c d = \pi/2$) между резонаторами в сильном резонансном режиме ($\lambda \gg \Gamma$)

Белым цветом на Рисунке 3.13б отмечена область крайне малых изменений амплитуды вблизи единицы, в то время как красным цветом отмечены области, где амплитуда равна точно единице и постоянна. Это означает, что при сильной связи, с увеличением расстояния интерференционные свойства проявляются слабо. При этом отчетливо видно проявление антикроссинга.

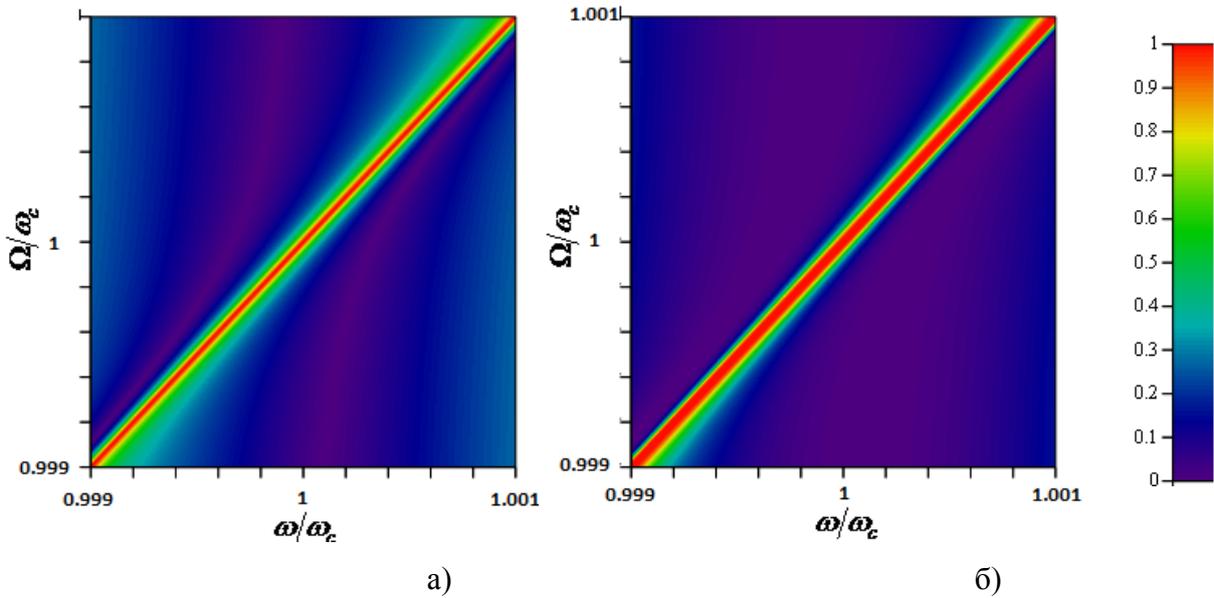


Рисунок 3.14 — Зависимость амплитуды коэффициента прохождения T (величина указана на цветовой шкале) от частоты налетающего фотона и расстояния между уровнями кубита при малых (а) и больших ($k_c d = \pi/2$) между резонаторами в слабом дисперсионном режиме

В случае слабой связи мы видим четкое проявление интерференционных эффектов на линиях, соответствующих антикроссингу, иными словами, связанных с вне резонансным взаимодействием моды резонатора с кубитом. При этом, на расстояниях кратных π , мы будем наблюдать картины, идентичные Рисунку 3.14а, а при кратных $\pi/2$ – Рисунку 3.14б. Также интересно отметить, что максимальный коэффициент прохождения будет наблюдаться тогда, когда внешний фотон будет иметь энергию равную энергии кубита и резонатора (рассматриваемая полоса частот входит в полосу резонатора). Более того, при увеличении расстояния мы видим, что возрастает полоса частот прозрачности системы в случае, когда кубит и резонатор отстроены друг от друга.

При расстояниях менее $\pi/2$ и сравнимых с длиной волны фундаментальных мод резонатора, мы будем наблюдать резонанс Фано, представленный на Рисунке 3.15.

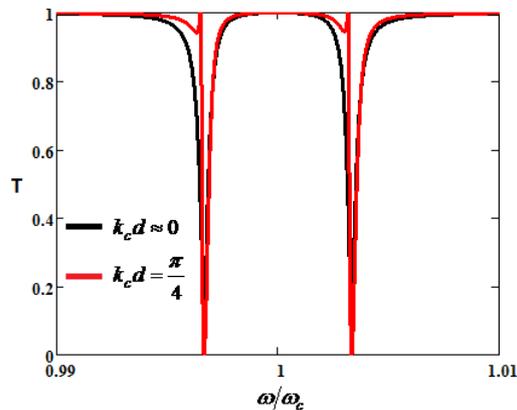


Рисунок 3.15 — Амплитудно-частотная характеристика в случае резонанса $\Omega_1 = \omega_{c1}$ в сильном резонансном режиме

Проявление Фано резонанса также является непрямым доказательством интерференции волновых функций резонаторов с кубитами.

Таким образом, наша модель описывает ранее известные эффекты, такие как увеличение и уменьшение скорости испускания фотона в резонатор в зависимости от расстояния между кубитами, напрямую связанные с наличием расстояния между резонаторами, появление резонансов Фано на частотах с учетом Раби-расщепления в чистом квантово-механическом случае. Это показывает, что наблюдаемые эффекты имеют место даже в случае распространения единичного фотона в системе. Также данный расчет учитывает эффект не мгновенного взаимодействия фотона с двумя резонаторами, что обуславливает появление интерференции волновых функций виртуальных (не регистрируемых) фотонов. Было показано, что внутренние резонансы системы зависят не только от её конфигурации, но и от частоты налетающего фотона.

3.5 Выводы к главе 3

В данной главе были исследованы два типа систем с двумя кубитами:

Два кубита в открытой линии.

Основными результатами исследования такой системы с помощью метода неэрмитового гамильтониана являются:

1. Рассчитаны вероятности переноса состояния между двумя кубитами на произвольном расстоянии. Полученные выражения позволяют описывать как перенос чистого состояния, так и перенос белловских состояний. Показано, что данные вероятности зависят не только от расстройки между налетающим фотоном, который фактически является переносчиком состояния, и кубитами, но и от расстояния между последними. Такая зависимость обусловлена наличием эффекта запаздывания, который выходит за рамки марковских приближений.
2. Описано влияние релаксации и декогеренции на транспорт фотона через такую структуру. Причем влияние декогеренции получено вследствие объединения двух подходов: неэрмитового гамильтониана и формализма матрицы плотности. Получены общие решения, описывающие эволюцию населенностей системы после рассеяния на ней фотона.

3. Описано влияние общего канала затухания на транспорт фотонов. Приведены основные отличия от ранее известных результатов. В частности показано значительное подавление коэффициента прохождения при наличии непрямого взаимодействия между кубитами через общий канал затухания. Также показано наличие окна прозрачности, являющегося следствием интерференционных эффектов, так как оно зависит от расстояния между кубитами. Поскольку реальные системы устроены таким образом, что расстояние между двумя квантовыми объектами, в частности кубитами, отлично от нуля, а также неизбежно присутствуют различные каналы релаксации, то полученные выражения могут оказаться крайне полезными при проектировании устройств с цепочками квантовых битов.

Два кубита и два резонатора в открытой линии

Также в результате исследования системы, представляющей собой два резонатора в открытом волноводе на произвольном расстоянии, которые содержат по одному кубиту, были получены следующие основные результаты:

1. Показано возникновение резонанса Фано при рассеянии одиночного фотона на такой структуре. Этот результат также является следствием того, что используемый метод неэрмитового гамильтониана позволяет не прибегать к марковским приближениям, что приводит к появлению эффекта запаздывания.
2. Показано, что ширина уровней, или иными словами эффекты сверхизлучения и субизлучения, зависят от расстояния между резонаторами. Более того, показано, что положение резонансных уровней зависит от частоты налетающего фотона.

Поскольку реальные системы обладают различными каналами релаксации, а также расстояние между двумя квантовыми объектами, в частности кубитами, отлично от нуля, то полученные результаты полезны при экспериментальном исследовании таких систем, а также при разработке реальных устройств, содержащих цепочку кубитов (например, использование интерференционных эффектов). Результаты, представленные в данной главе, были опубликованы в следующих работах [91-97]

ГЛАВА 4 РАЗРАБОТКА И ПРОЕКТИРОВАНИЕ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОГО ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО УСИЛИТЕЛЯ С КВАНТОВЫМ УРОВНЕМ ШУМОВ

Для проведения манипуляции с квантовыми системами приходится иметь дело с сигналами малой мощности, соответствующей эффективно нескольким фотонам. Очевидно, что для регистрации таких сигналов вносимые шумы измерительной системы не должны превышать несколько квантов. Поскольку полупроводниковые усилители априори не способны обеспечивать такой уровень шумов, переходным звеном между малым сигналом от квантовой системы к классической системе регистрации сигналов является параметрический усилитель, который преобразует малый сигнал из нескольких фотонов в более мощный сигнал, не внося существенных шумов. В настоящее время существуют различные вариации криогенных параметрических усилителей базирующихся на кинетической индуктивности. В ряде работ [98-100] используются СКВИДы (Сверхпроводящие квантовые интерферометры), которые обеспечивают усиление в узкой полосе частот. Различными способами реализуются системы изменения этой полосы. Безусловно, такие усилители обеспечивают хорошее усиление и приемлемый уровень шумов, но из-за конечного времени перестраивания полосы усиления не могут быть использованы в системах, где необходимо регистрировать сигналы от нескольких квантовых систем одновременно.

Перспективными являются широкополосные параметрические усилители, не обладающие данным недостатком, хотя и несколько уступают по шумовым характеристикам. Одним из простых вариантов реализации таких усилителей был предложен в [38], где в рамках однослойной технологии удалось достичь усиления порядка 15 дБ в полосе 3 ГГц. Недостатком такого усилителя является относительно большая протяженность, которая может вызвать трудности для технологии. Возможным решением данной проблемы является использование копланарных линий с искусственным замедлением фазовой скорости. Другие варианты были реализованы на контактах Джозефсона с подстройкой на резонаторах в сосредоточенном базисе [37] и в распределенном [36]. Поэтому в рамках настоящей работы были проработаны три варианта реализации с определенными модификациями для упрощения конструкции усилителей в виду отсутствия пятислойной и более технологии.

Поэтому нами было проведено теоретическое исследование таких структур, по результатам которых были получены аналитические выражения, позволяющие относительно быстро анализировать и подбирать основные параметры элементарных ячеек таких усилителей.

А также была проведена оптимизация структуры элементарной ячейки представляющей собой четыре контакта Джозефсона и компактный микроволновый резонатор с помощью полной электромагнитно симуляции.

4.1 Теоретическое обоснование возможности усиления

Криогенный квантовый параметрический усилитель по существу представляет собой длинную линию, в которой индуктивность является нелинейной. Распространение сигнала в такой линии описывается с помощью системы телеграфных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial Q}{\partial t}; \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = C(U) \frac{\partial U}{\partial t}; \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}; \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = L(I) \frac{\partial I}{\partial t}; \end{cases}, \quad (4.1)$$

где C – погонная емкость линии, $L(I)$ – погонная индуктивность линии, представляющая собой нелинейную индуктивность, I – ток в линии, U – напряжение в линии, Q – заряд в линии, ϕ – магнитный поток. Эквивалентная схема линии представлена на Рисунке 4.1.

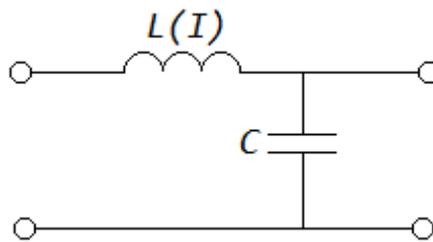


Рисунок 4.1 — Эквивалентная схема линии передачи с нелинейной индуктивностью

Полагая, что емкость линейная и не зависит от напряжения в линии, а также, используя следующие соотношения, мы можем перейти к системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial z} = -C \frac{\partial U}{\partial t}; \\ \frac{\partial U}{\partial z} = -L(I) \frac{\partial I}{\partial t} \end{cases}. \quad (4.2)$$

Наличие кинетической индуктивности для джозефсоновских контактов описывается зависимостью индуктивности от тока

$$L_{JJ} = \frac{\hbar}{2eI_c \cos(\phi)} = \frac{h}{2e2\pi I_c \cos(\phi)} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c \cos(\phi)} = \left| \begin{array}{l} I = I_c \sin(\phi) \\ \phi = \arcsin\left(\frac{I}{I_c}\right) \end{array} \right| =$$

$$= \frac{\Phi_0}{2\pi} \frac{1}{I_c \sqrt{1 - \left(\frac{I}{I_c}\right)^2}} \approx \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} \left(1 + \left(\frac{I}{I_c}\right)^2 \right)$$

Данная формула получена в приближении $\frac{I}{I_c} \ll 1$, что следует помнить при дальнейших расчетах. Её можно обобщить следующим образом:

$$L(I) = L_0 \left(1 + \frac{I^2}{I_0^2} \right), \quad (4.3)$$

где $L_0 = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} \cdot \frac{1}{l_c}$; $I_0 = \sqrt{2}I_c$ – в случае усилителя на Джозефсоновских контактах для ячейки l_c ,

и $L_0 = \frac{\hbar R_N}{2\pi k_b T_c} \cdot \frac{1}{l_s}$; $I_0 = 2I_c$ – в случае усилителя на неоднородных сверхпроводящих пленках.

Здесь и далее I_c – величина критического тока, R_N – нормальное поверхностное сопротивление сверхпроводящей пленки длиной l_s , T_c – критическая температура сверхпроводника, k_b – постоянная Больцмана, Φ_0 – квант магнитного потока.

Систему (4.2) можно свести к одному уравнению по току:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - CL_0 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{CL_0}{I_0^2} \frac{\partial}{\partial t} I^2 \frac{\partial I}{\partial t} = 0. \quad (4.4)$$

В линию усилителя подается сигнал, представляющий собой сумму сигнала накачки I_p и усиливаемого сигнала I_s . Далее, с целью демонстрации эффектов и обоснования допущений, которые мы вводим, положим, что решение будет представлять собой сумму исходных сигналов (иными словами мы рассматриваем первое приближение по нелинейности):

$$I = I_s + I_p, \quad (4.5)$$

где $I_n = \frac{1}{2} \left(A_n e^{j(\omega_n t - k_n z)} + \bar{A}_n e^{-j(\omega_n t - k_n z)} \right)$ представляют собой бегущие волны на соответствующих

частотах ($n \equiv s, p$). Далее в общем виде волновой вектор связан с частотой сигнала как

$k_n^2 = CL_0 \omega_n^2$, где $CL_0 \approx \frac{1}{v_g^2}$ определяет групповую скорость волн в рассматриваемой линии.

Для начала рассмотрим первый член уравнения (4.5) с пространственной производной второго порядка.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_n}{\partial z} &= \frac{1}{2} \sum_{n=s,p} \left(-jk_n A_n e^{j(\omega_n t - k_n z)} + jk_n \bar{A}_n e^{-j(\omega_n t - k_n z)} + \frac{\partial A_n}{\partial z} e^{j(\omega_n t - k_n z)} + \frac{\partial \bar{A}_n}{\partial z} e^{-j(\omega_n t - k_n z)} \right) \\ \frac{\partial^2 I_n}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \sum_{n=s,p} \left(\begin{aligned} &-k_n^2 A_n e^{j(\omega_n t - k_n z)} - k_n^2 \bar{A}_n e^{-j(\omega_n t - k_n z)} - 2jk_n \frac{\partial A_n}{\partial z} e^{j(\omega_n t - k_n z)} \\ &+ 2jk_n \frac{\partial \bar{A}_n}{\partial z} e^{-j(\omega_n t - k_n z)} + \frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2} e^{j(\omega_n t - k_n z)} + \frac{\partial^2 \bar{A}_n}{\partial z^2} e^{-j(\omega_n t - k_n z)} \end{aligned} \right) \end{aligned} \right\} (4.6)$$

Первое допущение о том, что сигналы распространяются преимущественно по направлению оси z , то есть $\frac{\partial^2 \bar{A}_n}{\partial z^2} \ll k_n \frac{\partial A_n}{\partial z}$. Данное допущение позволяет отбросить последние члены во второй производной из (4.6).

Подставляя (4.5) в (4.4) и разделяя переменные, получим следующие уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{j}{2k_s} \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} &= -j \frac{1}{8} \frac{k_s}{I_0^2} \left(A_s |A_s|^2 + 2A_s |A_p|^2 \right) \\ \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{j}{2k_p} \frac{\partial^2 A_p}{\partial z^2} &= -\frac{j}{8} \frac{k_p}{I_0^2} \left(A_p |A_p|^2 + 2A_p |A_s|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

В правой части уравнений (4.7) присутствуют члены, отвечающие за самомодуляцию фазы (SPM – Self Phase Modulation) $A_n |A_n|^2$ и за перекрестную модуляцию фазы (XPM – Cross Phase Modulation) $A_n |A_m|^2$. Мы видим, что разницы в исходных уравнениях для амплитуд усиливаемого сигнала и сигнала накачки нет. Допущение о распространении сигнала вдоль оси z (что также предполагает отсутствие паразитных мод распространения электромагнитной волны) позволяет отбросить второй член с левой стороны уравнения, т.е. $\frac{\partial^2 A_n}{\partial z^2} = 0$. Далее, мы полагаем, что сигнал накачки много больше усиливаемого сигнала, это позволяет свести систему уравнений (4.7) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_s}{\partial z} &= -j \frac{1}{4} \frac{k_s}{I_0^2} A_s |A_p|^2 \\ \frac{\partial A_p}{\partial z} &= -\frac{j}{8} \frac{k_p}{I_0^2} A_p |A_p|^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, мы говорим, что сигнал накачки претерпевает только самомодуляцию фазы (SPM), а модуляция фазы усиливаемого сигнала обусловлена только влиянием накачки (XPM). Поскольку искомое решение представляло собой сумму лишь исходных сигналов, то

мы пренебрегаем всеми дополнительными слагаемыми, которые появлялись из-за нелинейности (из-за члена $I^2 \frac{\partial I}{\partial t}$ в исходном уравнении (4.4)). И по этой причине система (4.8) не содержит решения, соответствующего усилению сигнала, а только лишь отражает эффекты первого порядка.

Поэтому, теперь искомое решение мы представляем в виде следующей суммы:

$$I = I_s + I_p + I_{i+} + I_{i-}, \quad (4.9)$$

где $I_{i\pm} = \frac{1}{2} \left(A_{i\pm} e^{j((2\omega_p \pm \omega_s)t - k_{i\pm}z)} + \bar{A}_{i\pm} e^{-j((2\omega_p \pm \omega_s)t - k_{i\pm}z)} \right)$ – это зеркальные сигналы вблизи второй гармоники сигнала накачки, здесь введем обозначение $\omega_{\pm} = 2\omega_p \pm \omega_s$. Если посмотреть внимательнее, то член $I^2 \frac{\partial I}{\partial t}$ дает также частоты вблизи второй гармоники усиливаемого сигнала, а также третьей гармоники и сигнала накачки и усиливаемого сигнала. Но их мы не рассматриваем по следующим причинам:

- гармоники усиливаемого сигнала малы по сравнению с гармониками сигнала накачки, поскольку амплитуда сигнала накачки выше амплитуды усиливаемого сигнала.

- появление третьих и выше гармоники влечет за собой уход энергии сигнала, и потому – нежелательно. Причем данные гармоники в рассматриваемой нелинейности не дают вклада в интересующие нас сигналы, поэтому мы здесь предполагаем, что мы проектируем систему так, чтобы давать все гармоники выше второй.

Также можно заметить, что в зеркальных сигналах волновые векторы не равны комбинации волновых векторов k_p и k_s . Это обусловлено тем, что только в среде с линейной дисперсией (зависимостью волнового вектора от частоты $k(\omega) = \omega/v_g$) волновой вектор зеркального сигнала равен $k_{i\pm} = 2k_p \pm k_s$, но в общем случае данное соотношение не всегда выполняется.

Подставляем (4.9) в уравнение (4.4) и также разделяем переменные, при этом получается система уравнений для амплитуд сигналов (4.9):

$$\begin{cases}
\frac{1}{2} \left(-2jk_s \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_s}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{8} \frac{k_s^2}{I_0^2} \left[\begin{aligned} & \left(A_s |A_s|^2 + 2A_s |A_p|^2 + 2A_s |A_{i+}|^2 + 2A_s |A_{i-}|^2 \right) \\ & + A_{i+} \bar{A}_p^2 e^{j(k_{i+}-k_s-2k_p)z} + \bar{A}_{i-} A_p^2 e^{j(k_s+k_{i-}-2k_p)z} \end{aligned} \right] = 0; \\
\frac{1}{2} \left(-2jk_p \frac{\partial A_p}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_p}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{8} \frac{k_p^2}{I_0^2} \left[\begin{aligned} & A_p |A_p|^2 + 2A_p |A_s|^2 + 2A_p |A_{i-}|^2 + 2A_p |A_{i+}|^2 \\ & + 2\bar{A}_p \bar{A}_s A_{i+} e^{j(k_s-k_{i+}+2k_p)z} + 2\bar{A}_p A_s A_{i-} e^{j(-k_{i-}-k_s+2k_p)z} \end{aligned} \right] = 0; \\
\frac{1}{2} \left(-2jk_{i-} \frac{\partial A_{i-}}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_{i-}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{8} \frac{k_{i-}^2}{I_0^2} \left[\begin{aligned} & A_{i-} |A_{i-}|^2 + 2A_{i-} |A_s|^2 + 2A_{i-} |A_p|^2 + 2A_{i-} |A_{i+}|^2 \\ & + \bar{A}_s A_p^2 e^{j(k_s+k_{i-}-2k_p)z} + A_{i+} \bar{A}_s^2 e^{j(k_{i-}-k_{i+}+2k_s)z} \end{aligned} \right] = 0; \\
\frac{1}{2} \left(-2jk_{i+} \frac{\partial A_{i+}}{\partial z} + \frac{\partial^2 A_{i+}}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{8} \frac{k_{i+}^2}{I_0^2} \left[\begin{aligned} & A_{i+} |A_{i+}|^2 + 2A_{i+} |A_s|^2 + 2A_{i+} |A_p|^2 + 2A_{i+} |A_{i-}|^2 \\ & + A_s A_p^2 e^{j(k_{i+}-k_s-2k_p)z} + A_{i-} A_s^2 e^{j(k_{i+}-k_{i-}-2k_s)z} \end{aligned} \right] = 0.
\end{cases} \quad (4.10)$$

Уравнения (4.10) являются, в некотором смысле, общими, поэтому необходимо вновь задаться ограничениями и допущениями.

1) Допущение о распространении сигнала только вдоль оси z позволяет отбросить вторые производные по координате.

2) Допущение о большой амплитуде накачки позволяет сразу решить второе уравнение из системы (4.10), которое упрощается к следующему виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_p}{\partial z} &= -j \frac{1}{8} \frac{k_p}{I_0^2} A_p |A_p|^2, \\
A_p(z) &= A_p(0) e^{-j\gamma k_p z}; \gamma = \frac{1}{8} \frac{|A_p|^2}{I_0^2}; A_p(0) = |A_p(0)| e^{j\phi_0},
\end{aligned} \quad (4.11)$$

то есть сигнал накачки испытывает только самомодуляцию собственной фазы. Также это допущение фактически означает, что $|A_p|^2 \gg |A_s|^2, |A_{i\pm}|^2$.

В системе уравнений (4.10) присутствуют три типа условий фазового согласования:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= k_s + k_{i-} - 2k_p \\
\Delta_2 &= k_{i+} - k_s - 2k_p \\
\Delta_3 &= k_{i+} - k_{i-} - 2k_s
\end{aligned}$$

Условие фазового согласования Δ_2 соответствует процессу уничтожения (рождения) двух фотонов с частотой ω_p и одного фотона с частотой ω_s и рождения (уничтожения) одного фотона с частотой ω_+ [101]. А условие Δ_3 соответствует рождению фотона с частотой ω_+ через уничтожение двух фотонов с частотой ω_s и одного фотона с частотой ω_- . Оба этих процесса

соответствуют, так называемой, конверсии в область высоких частот и требуют особой и достаточно сложной системы подстройки фазы для своей реализации. Это позволяет отбросить A_{i+} из рассмотрения. Тогда система уравнений переписется следующим образом:

$$\begin{cases} -jk_s \frac{\partial A_s}{\partial z} + \frac{1}{8} \frac{k_s^2}{I_0^2} \left[2A_s |A_p|^2 + \bar{A}_{i-} A_p^2 e^{jA_1 z} \right] = 0; \\ -jk_{i-} \frac{\partial A_{i-}}{\partial z} + \frac{1}{8} \frac{k_{i-}^2}{I_0^2} \left[2A_{i-} |A_p|^2 + \bar{A}_s A_p^2 e^{jA_1 z} \right] = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

В систему (4.12) необходимо подставить решение (4.11).

$$\begin{cases} \frac{\partial A_s}{\partial z} = -j \frac{1}{8} \frac{k_s}{I_0^2} |A_p|^2 \left[2A_s + \bar{A}_{i-} e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z + j2\phi_0} \right]; \\ \frac{\partial A_{i-}}{\partial z} = -j \frac{1}{8} \frac{k_{i-}}{I_0^2} |A_p|^2 \left[2A_{i-} + \bar{A}_s e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z + j2\phi_0} \right]. \end{cases}$$

Преобразовывая дальше, в соответствии с введенными обозначениями, мы получаем окончательный вариант системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial A_s}{\partial z} = -jk_s \gamma \left[2A_s + \bar{A}_{i-} e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z + j2\phi_0} \right]; \\ \frac{\partial A_{i-}}{\partial z} = -jk_{i-} \gamma \left[2A_{i-} + \bar{A}_s e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z + j2\phi_0} \right]. \end{cases}$$

Полученную систему можно свести к следующему дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2 \bar{A}_s}{\partial z^2} + j \frac{\partial \bar{A}_s}{\partial z} \left[2k_{i-} \gamma - 2k_s \gamma - 2\gamma k_p + A_1 \right] + \bar{A}_s \left(3k_s k_{i-} \gamma^2 + 2k_s \gamma (A_1 - 2\gamma k_p) \right) = 0. \quad (4.13)$$

Решение характеристического уравнения для (4.13):

$$\lambda_{1,2} = -j \frac{\chi}{2} \pm g, \quad (4.14)$$

где

$$g = \sqrt{\gamma^2 k_{i-} k_s - \frac{1}{4} (A_1 + 2\gamma k_p)^2};$$

$$\chi = 2\gamma (k_{i-} - k_s - k_p) + A_1.$$

Таким образом, решение уравнения (4.13) можно записать в виде:

$$\bar{A}_s(z) = C_1 e^{-j \frac{\chi}{2} z - gz} + C_2 e^{-j \frac{\chi}{2} z + gz}. \quad (4.15)$$

И из системы (4.12) можно получить решение для зеркального сигнала A_{i-} :

$$A_{i-}(z) = \frac{j}{k_s \gamma} \left(C_1 \left(j \frac{\chi}{2} + g + 2jk_s \gamma \right) e^{-j \frac{\chi}{2} z - gz} + C_2 \left(j \frac{\chi}{2} - g + 2jk_s \gamma \right) e^{-j \frac{\chi}{2} z + gz} \right) e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z + j2\phi_0} \quad (4.16)$$

Для дальнейшего решения нам необходимо вычислить коэффициенты C_1 и C_2 и задаться начальными условиями, которые определяются величинами сигналов на входе усилителя ($z = 0$):

$$\begin{cases} \bar{A}_s(0) = C_1 + C_2; \\ A_{i-}(0) = \frac{j}{k_s \gamma} \left(C_1 \left(j \frac{\chi}{2} + g + 2jk_s \gamma \right) + C_2 \left(j \frac{\chi}{2} - g + 2jk_s \gamma \right) \right) e^{j2\phi_0}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Из системы уравнений (4.17) находим выражения для коэффициентов:

$$\begin{aligned} C_1 &= - \left(j \frac{k_s \gamma}{2g} \right) e^{-j2\phi_0} A_{i-}(0) + \frac{1}{2g} \left(-j \frac{\chi}{2} + g - 2jk_s \gamma \right) \bar{A}_s(0); \\ C_2 &= \left(j \frac{k_s \gamma}{2g} \right) e^{-j2\phi_0} A_{i-}(0) + \frac{1}{2g} \left(j \frac{\chi}{2} + g + 2jk_s \gamma \right) \bar{A}_s(0). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким образом, решение для зеркального и усиливаемого сигнала можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_s(z) \\ A_{i-}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}_s(0) \\ A_{i-}(0) \end{pmatrix},$$

где матричные элементы равны:

$$\begin{aligned} U_{11} &= e^{-j \frac{\chi}{2} z} \left(ch(gz) + j \frac{1}{g} \left(\frac{\chi}{2} + 2k_s \gamma \right) sh(gz) \right); \\ U_{12} &= jk_s \gamma \frac{1}{g} e^{-j \frac{\chi}{2} z - j2\phi_0} sh(gz); \\ U_{21} &= - \frac{j}{k_s \gamma} \frac{1}{g} \left(g^2 + \left(\frac{\chi}{2} + 2k_s \gamma \right)^2 \right) e^{j \left(A_1 - 2\gamma k_p - \frac{\chi}{2} \right) z + j2\phi_0} sh(gz); \\ U_{22} &= \frac{1}{2g} e^{j(A_1 - 2\gamma k_p)z} e^{-j \frac{\chi}{2} z} \left(ch(gz) - j \frac{1}{g} \left(\frac{\chi}{2} + 2k_s \gamma \right) sh(gz) \right). \end{aligned}$$

Нас интересует коэффициент U_{11} , поскольку квадрат его модуля представляет собой коэффициент усиления и показывает зависимость амплитуды усиливаемого сигнала от координаты в линии параметрического усилителя.

4.1.1 Обоснование необходимости фазовой подстройки

По определению коэффициент усиления есть:

$$G_s = |U_{11}| = \left| ch(gz) + j \frac{1}{g} \left(\frac{\chi}{2} + 2k_s \gamma \right) sh(gz) \right|. \quad (4.19)$$

Для начала рассмотрим случай линейной дисперсии, иными словами $k(\omega) = \frac{\omega}{v_g}$. Это

означает, что $\Delta_1 = 0$ и при этом коэффициент усиления (4.19) будет равен:

$$G_s = |U_{11}| = \sqrt{\cos^2(\gamma|k_s - k_p|z) + \sin^2(\gamma|k_s - k_p|z) \frac{k_p^2}{|k_s - k_p|^2}}. \quad (4.20)$$

В пределе, когда сигнал накачки близок к усиливаемому сигналу, мы получаем следующее выражение для коэффициента усиления в случае линейной дисперсии:

$$\lim_{k_p \rightarrow k_s} G_s = \sqrt{1 + (k_p \gamma z)^2}.$$

Мы видим, что усиление имеет квадратичную зависимость от длины параметрического усилителя, при этом возникает проблема выделения усиливаемого сигнала, поскольку его частота будет очень близка к частоте сигнала накачки. Для этого необходимо будет создавать очень узкополосные и перестраиваемые фильтры, что усложняет систему.

Рассмотрим случай, когда у нас имеется некоторая нелинейная дисперсия в линии параметрического усилителя. Решение (4.20) содержит тригонометрические функции, поскольку коэффициент g является комплексной величиной в общем виде. Поэтому, проектируемая дисперсия должна быть таковой, чтобы коэффициент g имел ненулевую действительную часть, и гиперболические функции не вырождались в тригонометрические, как в случае линейной дисперсии. Очевидно, что дисперсия должна быть таковой, чтобы $\Delta_1 + 2\gamma k_p = 0$, в этом случае коэффициент g будет равен $g = \gamma \sqrt{k_i k_s}$, и если в волноводе способны распространяться сигналы с частотами ω_i, ω_s (иными словами k_i, k_s представляют собой комплексные числа с ненулевой реальной частью), то g всегда будет действительной величиной. В случае такой дисперсии, коэффициент усиления (4.19) можно переписать в следующем виде:

$$G_s = |U_{11}| = \frac{1}{2} \left| e^{gz} + e^{-gz} + j \frac{k_{i-} + k_s - 2k_p}{\sqrt{k_{i-}k_s}} (e^{gz} - e^{-gz}) \right|.$$

В идеальном случае при отсутствии потерь в линии на интересующих нас частотах волновые векторы будут чисто действительными, выражение для коэффициента усиления можно упростить до следующего:

$$G_s = \frac{1}{2} \sqrt{\left(e^{2gz} + e^{-2gz} + G_b \right) \left(1 + \frac{(k_{i-} + k_s - 2k_p)^2}{k_{i-}k_s} \right)}. \quad (4.21)$$

где G_b - это некоторая постоянная добавка к усилению, не зависящая от расстояния, а только от конфигурации дисперсии в линии:

$$G_b = 2 \frac{\left(1 - \frac{(k_{i-} + k_s - 2k_p)^2}{k_{i-}k_s} \right)}{\left(1 + \frac{(k_{i-} + k_s - 2k_p)^2}{k_{i-}k_s} \right)}.$$

Данная добавка может варьироваться в пределах от -2 до 2 и является несущественной. Второй член в (4.21) является быстро затухающим, а из первого члена видно, что в случае корректной фазовой подстройки волновых векторов усиление будет экспоненциально зависеть от длины линии усилителя.

4.2 Расчет и обоснование конструкции усилителя на пленках

В качестве примера возьмем пленки NbN , которые обладают большой кинетической индуктивностью и обладают большой нелинейностью [102]. Пусть критический ток в данной пленке равен I_c , тогда, согласно ранее введенным обозначениям, необходимо во всех формулах из раздела 1 положить $I_0 = 2I_c$. Для начала не будем задаваться конкретными значениями этих параметров, а проведем анализ, опираясь на общие соображения.

Для усилителей на неоднородных сверхпроводящих пленках удобно фазовую подстройку, необходимую для экспоненциального усиления, реализовывать с помощью линии с неоднородным импедансом [38]. Это дает в полной мере использовать преимущества

однослойной технологии. Рассмотрим элементарную ячейку такого усилителя, которая представлена на Рисунке 4.2.

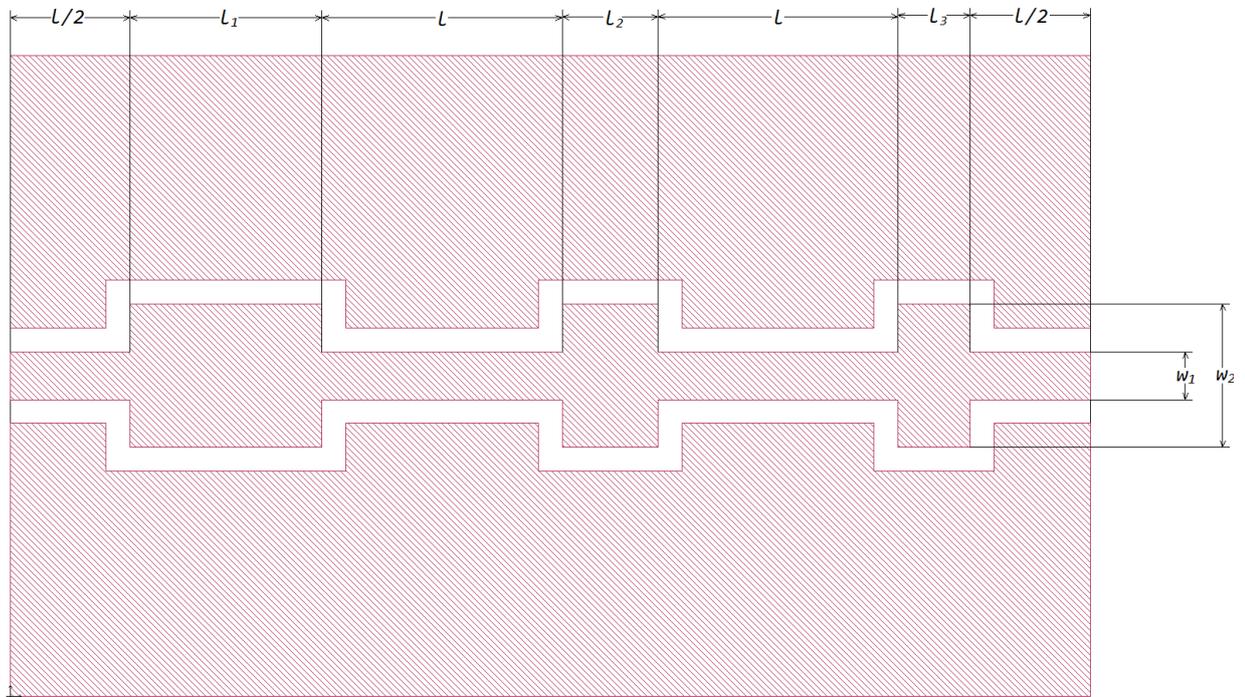


Рисунок 4.2 — Схематичное изображение копланарной линии с неоднородностью по импедансу для подстройки фазы в параметрическом усилителе на неоднородных сверхпроводящих пленках

Неоднородность по импедансу в такой структуре создается за счет изменения погонных параметров копланарной линии при изменении характерных геометрических размеров. Изменение импеданса создает условие для отражения электромагнитных волн и как следствие для возникновения резонансов. Эти резонансы создают так называемые полосы заграждения по частот. В данной полосе, как известно, волновой вектор принимает чисто мнимый характер и волны на данных частотах не распространяются. Данные полосы заграждения должны приходиться на все гармоники сигнала накачки выше второй, в соответствии с введенными допущениями и необходимостью предотвратить уход энергии в высшие гармоники, а также переход самого усилителя в режим насыщения. Более того, благодаря резонансам возникает нелинейная дисперсия волнового вектора по частоте, что позволяет соблюсти условие $\Delta_1 + 2\gamma k_p = 0$.

На начальном этапе коэффициент передачи через такую элементарную ячейку и дисперсионное соотношение можно оценить с помощью теории матриц передачи. Известно, что матрица передачи для линии выглядит следующим образом:

$$ABCD_b(Z, l) = b(Z, l) = \begin{pmatrix} \cos(k(\omega)l) & Z \sin(k(\omega)l) \\ -\frac{1}{Z} \sin(k(\omega)l) & \cos(k(\omega)l) \end{pmatrix}, \quad (4.22)$$

где Z – нормированное характеристическое сопротивление линии (нормировка идет на импеданс узкой части элементарной ячейки), а $k(\omega)$ – дисперсия в линии (в нашем случае линейная, так как представлена только линия). Таким образом, полная матрица элементарной ячейки, представленной на рисунке 4.2 равна:

$$b_{cell}(Z, l) = b\left(1, \frac{l}{2}\right) \times b(Z, l_1) \times b(1, l) \times b(Z, l_2) \times b(1, l) \times b(Z, l_3) \times b\left(1, \frac{l}{2}\right). \quad (4.23)$$

Зная выражение для полной матрицы (4.23) можно извлечь зависимость волнового вектора от частоты в параметрическом усилителе такого типа с помощью следующего выражения:

$$k_{cell}(\omega) = \frac{1}{na} \arccos\left(\frac{\text{Tr}(b_{cell}(Z, l))}{2}\right), \quad (4.24)$$

где a – полная длина одной ячейки, т.е. в нашем случае она определяется как $a = 3l + l_1 + l_2 + l_3$, а n – число ячеек.

При выполнении $4 + 2\gamma k_p = 0$, коэффициент определяется следующим образом $g \approx \gamma k_p$ (это справедливо, если частоты усиливаемого сигнала и сигнала накачки лежат вблизи частоты резонатора, что и должно быть, так как выполнение условия возможно только там). Данное приближенное равенство очень удобно для вводного анализа, но при расчете необходимо считать без него. В этом случае коэффициент усиления определяется следующим выражением:

$$G_s = \frac{1}{4} e^{2\gamma k_p z}. \quad (4.25)$$

Если мы зададимся усилением в 20 дБ, это означает что для линии длиной d необходимо, чтобы $2\gamma k_p d \approx 1.2\pi$. Это означает, что должно выполняться следующее соотношение:

$$k_s + k_{i-} - 2k_p = -\frac{1.2\pi}{d}. \quad (4.26)$$

В работе [102] представлены следующие параметры пленок NbN :

Толщины пленок: $t=3-40$ нм

Критическая температура: $T_c=9-14$ К

Нормальное поверхностное сопротивление: 10^5 - 10^2 Ом/□

Плотность критического тока: 0.001-0.08 А/мкм²

Это означает, что доступен следующий диапазон кинетической индуктивности:

$$L_k = 7 \text{ нГн/□} - 7.75 \text{ пГн/□}.$$

При выборе пленки необходимо придерживаться определенного компромисса. С одной стороны, для большего усиления при одной и той же длине линии необходимо иметь как можно большую кинетическую индуктивность. С другой стороны, чем больше кинетическая индуктивность, тем меньше величина критического тока, а это означает, что во-первых, у нас уменьшается динамический диапазон усилителя, поскольку для выполнения допущения

$$\gamma = \frac{1}{32} \frac{|A_p|^2}{I_c^2} \ll 1 \text{ необходимо чтобы } A_p < I_c, \text{ так что меньшее значение критического тока}$$

предполагает меньшее значение амплитуды тока накачки. Во-вторых, это означает, что усилитель раньше будет уходить в режим насыщения.

На Рисунке 4.3 представлены зависимости нормального поверхностного сопротивления пленок NbN различной толщины от температуры, полученных в работе [102].

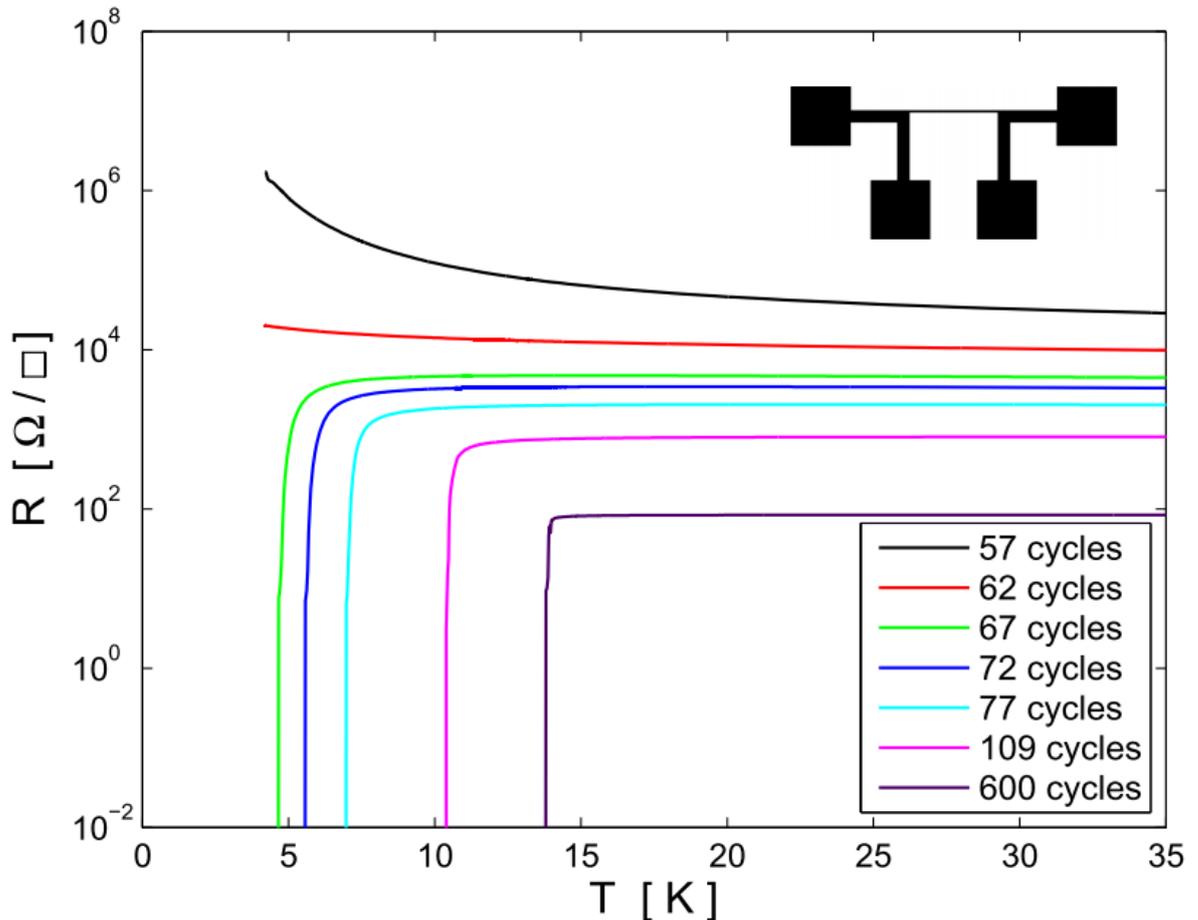


Рисунок 4.3 — Температурная зависимость поверхностного сопротивления для образцов пленок NbN различной толщины от 2.6 до 5 нм, и для образца с толщиной 28 нм. Один цикл

осаждения атомного слоя соответствует толщине пленки в 0.046 нм. На вставке показана структура мостиков для измерения плотности критического тока и поверхностного сопротивления четырехконтактным способом. Ширина мостика из NbN 5 мкм, длина 300 мкм. Разрешение по температуре 0.1 К [102]

В соответствии с этими соображениями, нами были выбраны следующие параметры пленки и геометрические размеры, представленные в Таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Параметры пленки NbN и подложки Si для параметрического усилителя на пленках

Параметр	Значение	Описание
t	5 нм	толщина пленки
R_{\square}	1900 Ом/□	нормальное поверхностное сопротивление
T_c	13,8 К	критическая температура
j_c	$1,2 \cdot 10^4$ мкА/мкм ²	плотность критического тока
ϵ_r	11,9	диэлектрическая проницаемость
h_s	525 мкм	толщина подложки

Расчет погонных параметров сверхпроводящей копланарной линии хорошо известен, и достаточно подробно описан в [103]. В Таблице 4.2 приведены геометрические размеры и погонные параметры копланарной линии на выбранных пленках.

Таблица 4.2 – Параметры неоднородной копланарной линии передачи для параметрического усилителя на пленках

Параметр	Значение	Описание
w_1	1 мкм	ширина линии в узкой части (см. рисунок 4.2)
w_2	10 мкм	ширина линии в широкой части (см. рисунок 4.2)
g	1 мкм	зазоре между сигнальной линией и землей
l	340 мкм	характерная длина узкой части (см. рисунок 4.2)
l_1	9 мкм	длина первого участка с широкой линией (см. рисунок 4.2)
l_2	6 мкм	длина второго участка с широкой линией (см. рисунок 4.2)
l_3	3 мкм	длина третьего участка с широкой линией (см. рисунок 4.2)
$L_{K1\Box}$	167,4 пГн	поверхностная кинетическая индуктивность пленки
L_{K1}	167,4 пГн/мкм	погонная кинетическая индуктивность линии в узкой части
L_{K2}	16,737/мкм	погонная кинетическая индуктивность линии в широкой части
L_{G1}	0,49 пГн/мкм	погонная геометрическая индуктивность линии в узкой части
L_{G2}	0,26 пГн/мкм	погонная геометрическая индуктивность линии в широкой части
C_1	0,14 фФ/мкм	погонная емкость линии в узкой части
C_2	0,27 фФ/мкм	погонная емкость линии в широкой части
Z_1	1100 Ом	импеданс линии в узкой части
Z_2	250 Ом	импеданс линии в широкой части
v_f	0,0 21·с	фазовая скорость в узкой части в единицах скорости света

Дадим некоторые пояснения касательно выбранных размеров. Ширина линии и зазор между ней и землей выбраны из соображений обеспечения как можно меньшей фазовой скорости, что фактически означает большее время взаимодействия электромагнитного поля и

нелинейной линии параметрического усилителя. Расстояние между широкими элементами выбирается так, чтобы оно соответствовало примерно половине длине волны на частоте соответствующей третьей гармонике сигнала накачки. Это приведет к тому, что сигнал на третьей гармонике не будет распространяться в такой линии, и гармоники выше второй не будут генерироваться, что и было заложено в теоретический расчет в разделе 4.1 (это и есть полоса заграждения). Устанавливая длину каждого третьего широкого участка равной одной трети длины первого, мы создаем дополнительные полосы заграждения на частотах $\frac{f_{stop}}{3}, \frac{2f_{stop}}{3}$. В работе [38] было показано, что наибольшее отклонение от линейного закона дисперсии наблюдается на $\frac{2f_{stop}}{3}$ (не считая полосы заграждения, предотвращающей появление высших гармоник), вблизи этой полосы заграждения должны находиться частоты сигнала и сигнала накачки (около 6 ГГц), следовательно:

$$\lambda = \frac{v_f}{\frac{3}{2} f_{centr}} \approx 350 \text{ мкм}$$

То есть, для возникновения полуволнового резонанса расстояние между широкими частями должны быть равно примерно 340 мкм, что обеспечит резонанс чуть выше 9 ГГц, и поскольку добротность остается примерно такой же, то на третьей гармонике полоса будет больше, чем на первой. Таким образом, в относительно широкой полосе третьей гармоники будет лежать ряд частот, которые не смогут распространяться, что позволяет нам изменять частоту сигнала накачки в более широком диапазоне. Понятно, что данные рассуждения достаточно грубые и приемлемы только для первого шага в итерационном процессе проектирования элементарной ячейки, а выбранные размеры и частоты должны проверяться путем полного электромагнитно моделирования.

Поверхностная кинетическая индуктивность рассчитывается по следующей формуле:

$$L_K = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar R_N}{k_b T_c} \quad (4.27)$$

При этом погонная кинетическая индуктивность может быть рассчитана по следующей формуле:

$$L_{Ki} = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar R_N}{k_b T_c} \cdot \frac{1}{w_i} \quad (4.28)$$

Таким образом, мы определили все необходимые для расчета параметры линии. Результаты численного моделирования такой ячейки, согласно уравнениям (4.22)-(4.24), представлены на Рисунке 4.4, где показана зависимость разности волнового вектора ячейки с

параметрами из Таблицы 4.1 и Таблицы 4.2 и волнового вектора линии с линейной дисперсией (

$$k_{lin}(f) = \frac{\omega}{v_f}.$$

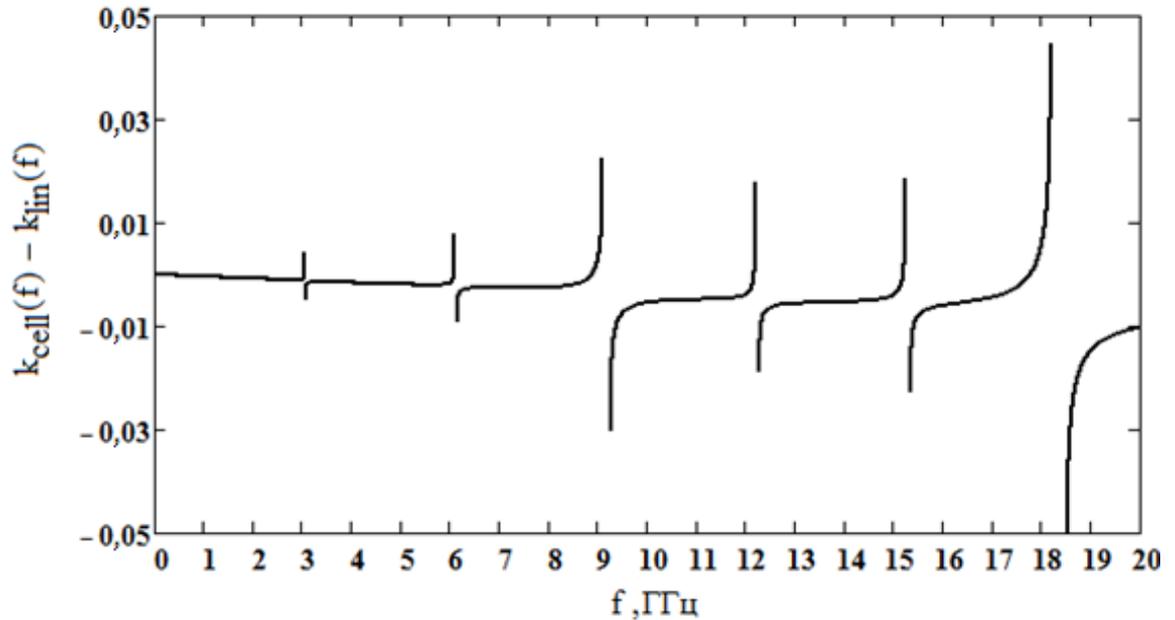


Рисунок 4.4 — Разность зависимости волнового вектора неоднородной копланарной (нелинейная дисперсия) линии и однородной копланарной линии (линейная дисперсия) от частоты

Мы видим, что возникают полосы заграждения как вблизи 9 ГГц, так и вблизи 18 ГГц. Иными словами, если мы работаем в области 6 ГГц, то третья гармоника сигнала накачки подавляется, и усиление будет отсутствовать для сигналов вблизи 3 и 9 ГГц.

Вблизи 6 ГГц разница между линейной дисперсией и спроектированной составляет 0,003 рад/ячейка. Это означает, что для усиления в 20 дБ нам потребуется:

$$\frac{1,2}{0,003} \approx 400 \text{ ячеек}$$

4.3 Расчет и обоснование конструкции усилителя на контактах Джозефсона

Мы располагаем технологией изготовления контактов Джозефсона Al/AlO/Al. Использование контактов сразу делает невозможным подстройку фазы как в [38], поскольку в

этом случае, по первичным оценкам, потребуется порядка нескольких сотен тысяч контактов. Поэтому для подстройки фазы были использованы два следующих решения:

- подстройка фазы с помощью резонаторов на сосредоточенных элементах;
- подстройка фазы с помощью копланарных резонаторов.

Преимуществом первого решения является то, что резонатор будет осуществлять подстройку фазы только для одной единственной частоты, исключая возможность фазового согласования на не интересующих нас частотах. При этом, безусловно, несколько сложнее становится технология изготовления таких резонаторов и необходимо использовать диэлектрики с как можно меньшими потерями, поскольку они будут давать вклад в собственные шумы параметрического усилителя.

Второе решение предполагает использование копланарных четвертьволновых резонаторов с непрямой связью, которые реализуются в однослойной технологии. Недостатком таких резонаторов является большие геометрические размеры в области интересующих нас рабочих частот, и наличие фундаментальных гармоник, на которых тоже в общем случае возможно выполнение подстройки фазы. Проблема больших размеров была решена частичной подстройкой фазы, когда резонаторы размещаются через некоторое расстояние нелинейной линии передач [37]. Далее, мы разберем оба варианта.

Подстройка фазы с помощью резонаторов на сосредоточенных элементах

Эквивалентная схема цепи усилителя с подстройкой фазы с помощью резонатора на сосредоточенных элементах показана на Рисунке 4.5

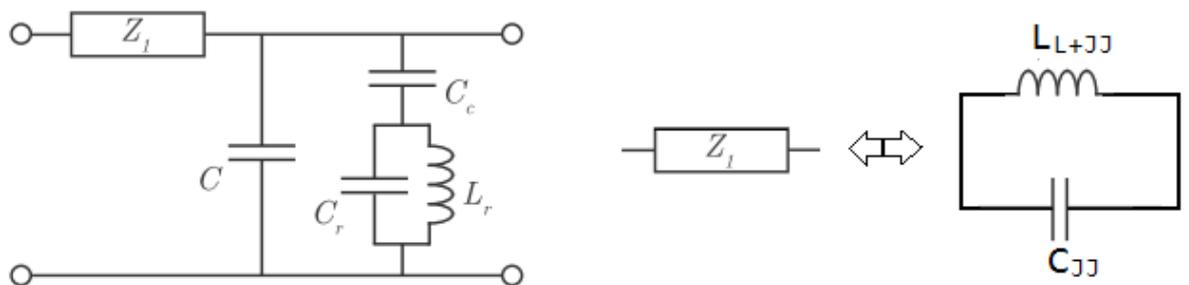


Рисунок 4.5 — Эквивалентная схема элементарной ячейки параметрического усилителя с резонатором на сосредоточенных элементах. Z_1 – нелинейная часть, состоящая из джоузефсоновской индуктивности L_{JJ} и линейной геометрической индуктивности L и емкости контакта Джоузефсона C_{JJ} ; C – геометрическая емкость и емкость шунтирующего конденсатора, выполняющего роль *air-bridge*, C_r , L_r – емкость и индуктивность параллельного резонансного контура, C_c – емкость, определяющая связь контура с линией

Геометрические емкость и индуктивность определяются характерными размерами линии и представляют собой эквивалентную схему длинной линии передачи. Из геометрии

копланарной линии можно рассчитать погонные параметры линии $C_{ног}$ и $L_{ног}$, и зная размеры элементарной ячейки a_{cell} , параметры L и C можно рассчитать следующим образом:

$$\begin{aligned} L &= L_{ног} \cdot a_{cell}; \\ C &= C_{ног} \cdot a_{cell}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Параметры контакта Джозефсона определяются его геометрией и материалами. Зададимся следующими параметрами контакта в Таблице 4.3

Таблица 4.3 – Параметры контакта Джозефсона

Параметр	Значение	Описание
j_c	10 мкА/мкм ²	плотность критического тока
S_{JJ}	1*1 мкм ²	площадь контакта
$\epsilon_{ох}$	9,1	диэлектрическая проницаемость окисла
t_{JJ}	1 нм	толщина окисла

Из Таблицы 4.3 следует, что критический ток контакта равен $I_c = j_c S_{JJ} = 10 \text{ мкА}$, откуда из формулы (4.3) получаем, $L_{JJ} = \frac{\Phi_0}{2\pi I_c} = 32,39 \text{ нГн}$. По формуле Амбегаокара - Баратофа ($I_c = \frac{\pi \Delta_{Al}}{2eR_N}$, Δ_{Al} - энергетическая щель для алюминия, e – элементарный заряд) для алюминиевого контакта нормальное сопротивление должно составлять $R_N = \frac{\pi \Delta_{Al}}{2eI_c} \approx 100 \text{ Ом}$. Поскольку по расчету нам необходимо иметь джозефсоновскую индуктивность порядка 130 пГн (по результатам оптимизации), то мы будем располагать в одной ячейке 4 контакта, что в сумме даст нам 129,56 пГн. Другим важным параметром контакта Джозефсона, с точки зрения параметрического усиления, является его емкость, которую можно оценить по эмпирическим формулам [104]:

$$C_{JJ}^1 = \frac{\epsilon_{ох} \epsilon_0 S_{JJ}}{2t_{JJ}} \approx 22,66 \text{ фФ};$$

$$C_{JJ}^2 = \left(0,0037 \cdot j_c \left[\frac{\text{А}}{\text{см}^2} \right] + 37 \right) S_{JJ} = 22,89 \text{ фФ} \text{ для } \begin{cases} R_N S_{JJ} > 10 \text{ Ом} \cdot \text{см}^2 \\ j_c < 20 \frac{\text{кА}}{\text{см}^2} \end{cases};$$

$$C_{JJ}^3 = 49 \exp(0,0002 j_c) \left[\frac{A}{\text{см}^2} \right] S_{JJ} = 33,66 \phi\Phi \text{ для } R_N S_{JJ} < 10 \text{ Ом} \cdot \text{см}^2;$$

$$C_{JJ}^4 = \frac{S_{JJ}}{0,47 - 0,0047 \lg \left(\frac{1}{R_N S_{JJ} [\text{Ом} \cdot \text{см}^2]} \right)} = 31,91 \phi\Phi \text{ для } R_N S_{JJ} > 20 \text{ Ом} \cdot \text{см}^2.$$

Используя данные формулы можно предположить, что емкость контакта составит порядка 30 фФ, в работе [37] контакты имели емкость 70 фФ/мкм², поэтому данные оценки очень грубые и мы будем полагаться на литературные источники, и полагаем, что контакт заданного размера будет иметь емкость 70 фФ.

Поскольку ширина контакта Джозефсона составляет порядка 1 мкм, то ширина сигнального провода копланарной линии должна быть тоже порядка 1 мкм во избежание возникновения отражений связанных с изменением импеданса. Щель между сигнальным проводом и заземленным полигоном выберем равной 1 мкм, опираясь на технологические возможности изготовления таких линий и изготовления шунтирующих конденсаторов, которые будут выполнять роль air-bridge-й для предотвращения паразитных мод распространения волн.

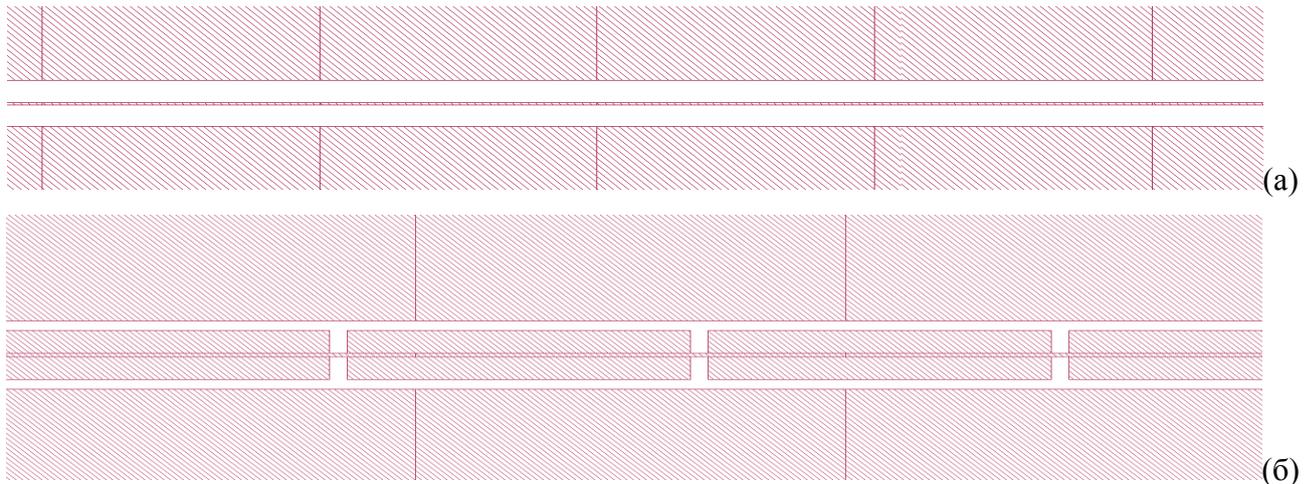
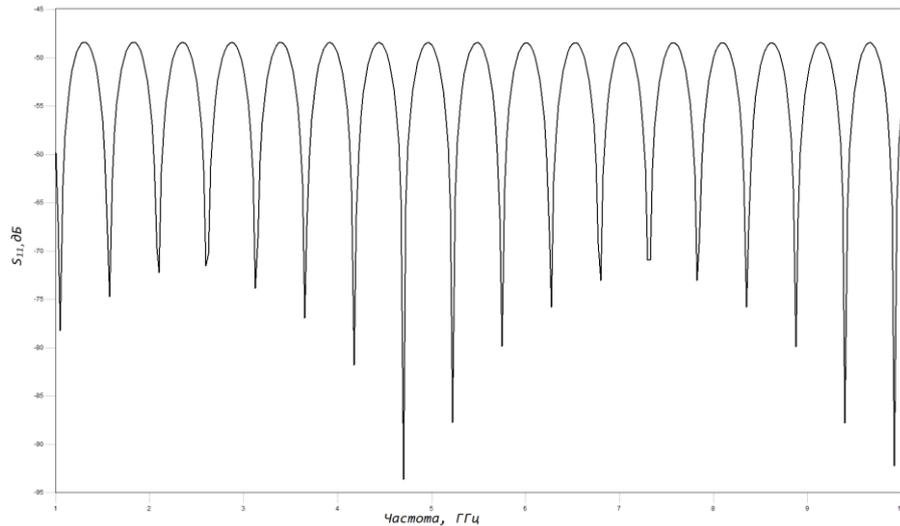
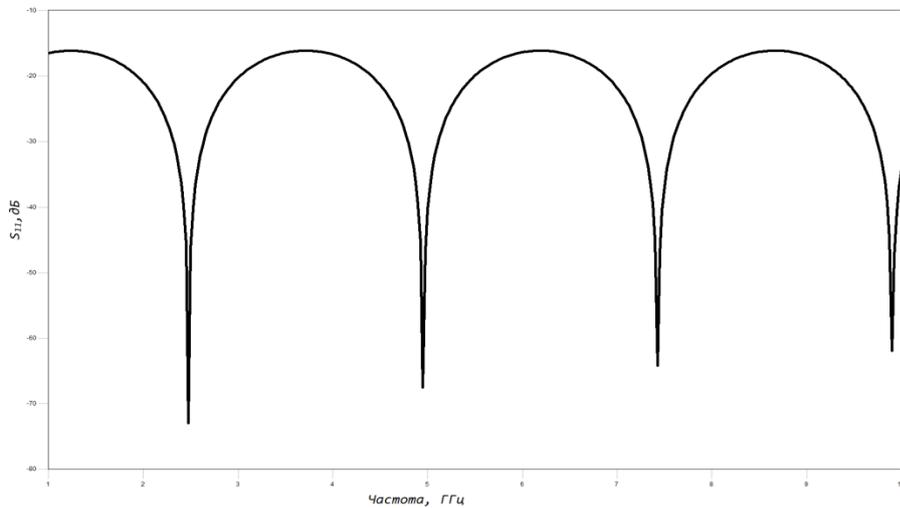


Рисунок 4.6 — Схематическое изображение однородной (а) и неоднородной линии (б). При моделировании использовалась длина линии порядка нескольких миллиметров

Для демонстрации влияния перепадов ширины линии даже на коротких расстояниях были промоделированы следующие структуры, отрезки которых условно представлены на Рисунке 4.6. Длина узкой части на Рисунке 4.5 (б) бралась равно 1 мкм (длина контакта), ширина широкой части 15 мкм. Результаты численного моделирования показаны на рисунке 4.7.



(а)



(б)

Рисунок 4.7 — Зависимость модуля коэффициента отражения для однородной линии (а), и неоднородной линии (б)

Несимметричность частотных зависимостей на Рисунках 4.7 а и б обусловлены разной длиной моделируемых линий. Тем не менее, обе зависимости соответствуют длинной линии, и мы видим, что отражение, в случае большой разницы между шириной контакта и шириной сигнального провода копланарной линии, составляет порядка трех раз. Отражение является критичным параметром для параметрического усилителя, поскольку усилитель не имеет направленности, поэтому необходимо уменьшать разницу между ширинами контакта и линии. В качестве компромисса между технологией и требуемыми параметрами возьмем копланарную линию с сигнальным проводом шириной 10 мкм и 5 мкм зазором между ним и полигоном заземления при этом возьмем контакт размеров 1 мкм шириной, и длиной 1 мкм. Другое соображение, которое накладывает ограничение на характерные размеры копланарной линии,

связано с импедансом емкостной и индуктивной частей. Необходимо, чтобы импеданс индуктивной части был меньше импеданса емкостной, для того чтобы большая часть энергии сигнала проходила через нелинейную часть. И, таким образом, мы согласно [103] получаем следующие погонные параметры линии:

$$\begin{aligned} L_{noz} &= 0,435 \frac{nГн}{мкм}, \\ C_{noz} &= 0,179 \frac{фФ}{мкм}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

То есть, геометрическая емкость будет равна $C_{geom} = 26,78$ фФ и геометрическая индуктивность $L_{geom} = 65,36$ пГн.

Согласно общей теории цепей, эквивалентную схему на Рисунке 4.5 можно представить с помощью матрицы:

$$[ABCD] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ -\frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

где

$$Z_1 = \frac{j\omega(L + L_{JJ})}{1 - \omega^2 C_{JJ}(L + L_{JJ})} \text{ – импеданс последовательной части нелинейной линии;}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{res}}{1 + j\omega C Z_{res}} \text{ – импеданс параллельной части нелинейной линии;}$$

$$Z_{res} = \frac{1}{j\omega C_c} + \frac{j\omega L_r}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} \left(1 + \frac{C_c}{C_r}\right)}{j\omega C_c \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}\right)} \text{ – импеданс резонатора.}$$

$$\text{Здесь и далее мы определяем резонансные частоты } \omega_r = \frac{1}{\sqrt{C_r L_r}}, \quad \omega_{JJ} = \frac{1}{\sqrt{C_{JJ}(L + L_{JJ})}}.$$

Из общей теории цепей, зависимость волнового вектора определяется из ABCD – матрицы:

$$k(\omega) = \frac{1}{a_{cell}} \arccos\left(\frac{1}{2}(A + D)\right). \quad (4.32)$$

Согласно [37] коэффициент нелинейности в ячейке несколько модифицируется с учетом размера ячейки и принимает вид

$$k_{disrpm} = \left[a_{cell} k(\omega_p) \right]^2 \frac{|Z_1|^2}{16L^2 \omega_p^2} \frac{|A_p|^2}{I_c^2},$$

т.е. условие фазового согласования принимает вид:

$$\Delta_1(\omega_p, \omega_s) - 2k_{disrpm} \cdot k(\omega_p) = 0. \quad (4.33)$$

При этом формулу (4.14) можно переписать в следующем виде:

$$g = \sqrt{\gamma^2 \bar{\kappa}_{i-} \kappa_s - \left(\frac{\Delta_1}{2}\right)^2}; \kappa_2 = \left(\frac{k_p a_{cell} |Z_{line}| |A_p|}{\omega_p L_1 4I_c}\right)^2; \quad (4.34)$$

$$\kappa_s = \frac{\kappa_2 (2k_p - k_{i-}) k_s k_i a_{cell}^2}{L_{L+JJ} C \omega_s^2}; \kappa_i = \frac{\kappa_2 (2k_p - k_s) k_s k_i a_{cell}^2}{L_{L+JJ} C \omega_{i-}^2}.$$

Таким образом, перед нами стоит задача подбора номиналов элементов резонатора для обеспечения условия (4.33) и полосы обозначенной в начале расчета. Резонанс должен находиться чуть ниже центральной частоты требуемой полосы, тогда условие (4.33) будет выполняться в области данной центральной частоты с режекцией на фундаментальной частоте резонатора.

Нами были подобраны следующие номиналы сосредоточенных элементов резонатора:

$$C_r = 1 \text{ нФ};$$

$$L_r = 1100 \text{ нГн}; \quad (4.35)$$

$$C_c = 10 \text{ фФ}.$$

Подставляя данные значения в формулу (4.32), мы получаем дисперсию, представленную на Рисунке 4.8, где для наглядности показана зависимость для такой же системы, но без резонатора.

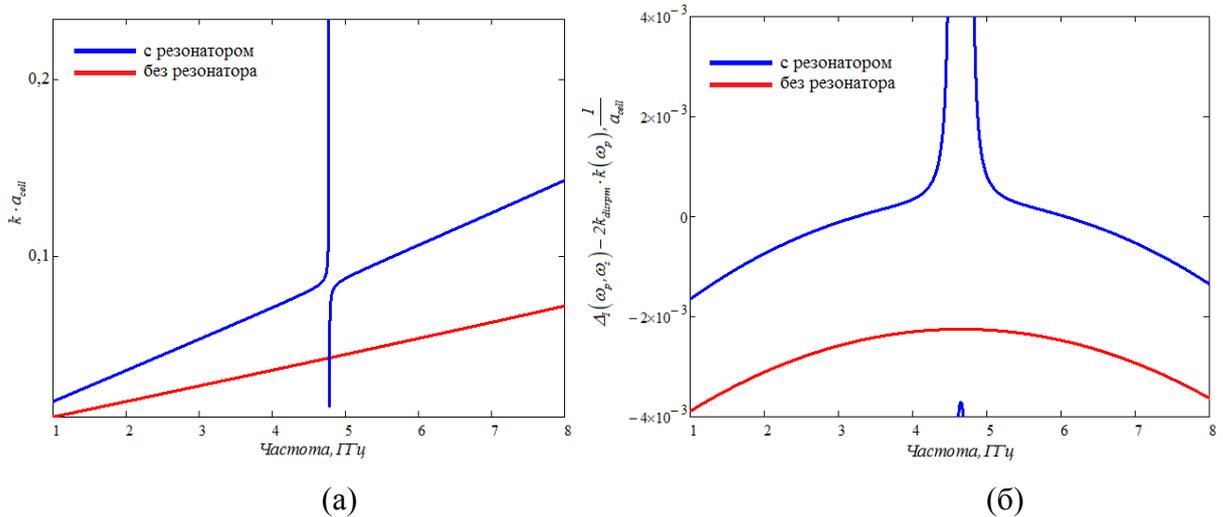


Рисунок 4.8 — Дисперсия элементарной ячейки параметрического усилителя с резонатором на сосредоточенных элементах и без него (а) и условие фазового согласования при частоте накачке 4,65 ГГц и нелинейности $|A_p|/I_c = 0.5$

Для того чтобы убедиться что в интересующей нас области частот мы построили зависимость выражения (4.33) от частоты сигнала при частоте накачки вблизи резонансной частоты. Для проверки усиления необходимо воспользоваться формулой (4.19) и подставить значения уточненных коэффициентов (4.34). Полученная зависимость показана на Рисунке 4.9, где показана разница между системой с подстройкой и без подстройки фазы.

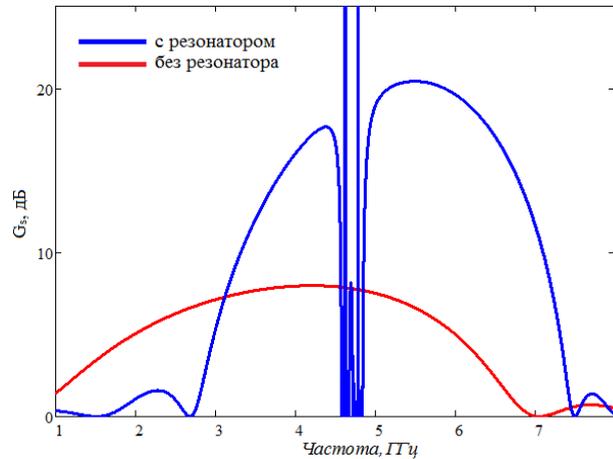


Рисунок 4.9 — Коэффициент усиления параметрического усилителя на джозефсоновских контактах с 2000 ячеек

В рабочей полосе от 5 ГГц до 7,4 ГГц, (и в полосе 2,2 ГГц до 4,2 ГГц) обеспечивается усиление выше 15 дБ. Далее будет рассмотрен усилитель с частичной подстройкой с помощью копланарного четвертьволнового резонатора.

Подстройка фазы с помощью копланарных резонаторов

Для подстройки фазы предполагается использовать частичную подстройку с помощью распределенных копланарных четверть волновых резонаторов как в работе [36]. Поскольку недостатком данного типа резонаторов является наличие высших гармоник, для частичного их подавления заграждающие полосы будем создавать размещением резонаторов на расстоянии, равном половине длине волны третьей гармоники сигнала накачки. Поскольку в месте расположения резонатора будет возникать локальное изменение импеданса, это приведет к частичному отражению волны и возникновению полуволнового резонанса. И чем больше будет разница импедансом резонатора и импедансом копланарной линии, тем больше будет отражение, и тем эффективнее будет подавление высших гармоник. Размеры копланарной линии берем, как и в разделе 4.2 – 10 мкм ширина и 5 мкм зазор, что заведомо с учетом импеданса контактов и шунтирующих конденсаторов, будет давать импеданс выше 100 Ом. Скорость волны в четверть волновом резонаторе будет определяться только его геометрией и погонными параметрами копланарной линии, которые мы выберем таким образом, чтобы импеданс соответствовал 50 Ом, что как минимум обеспечит отражение порядка 30 процентов.

Другое соображение, которое следует иметь в виду, относится к геометрическим размерам резонатора, поэтому фазовую скорость в резонаторе необходимо делать как можно меньше. Исходя из этого, мы выбрали ширину копланарной линии резонатора 100 мкм, и зазор 5 мкм. При этом погонные параметры будут равны:

$$\begin{aligned} L_{noz} &= 0,402 \frac{n\Gamma n}{\text{мкм}}; \\ C_{noz} &= 0,178 \frac{\phi\phi}{\text{мкм}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Частоту резонатора выберем равной 4,8 ГГц, что соответствует длине 12 мм, а емкость связи рассчитаем так, чтобы она была равна 10 фФ [103].

Поскольку у нас будет только частичная подстройка, то линия до резонатора будет иметь модифицированные погонные параметры. При этом, если мы будем размещать контакты на расстоянии $a_{JJ}=5$ мкм друг от друга, эквивалентная схема такой линии, длиной 6 мкм (1 мкм контакт), может быть представлена в следующем виде:

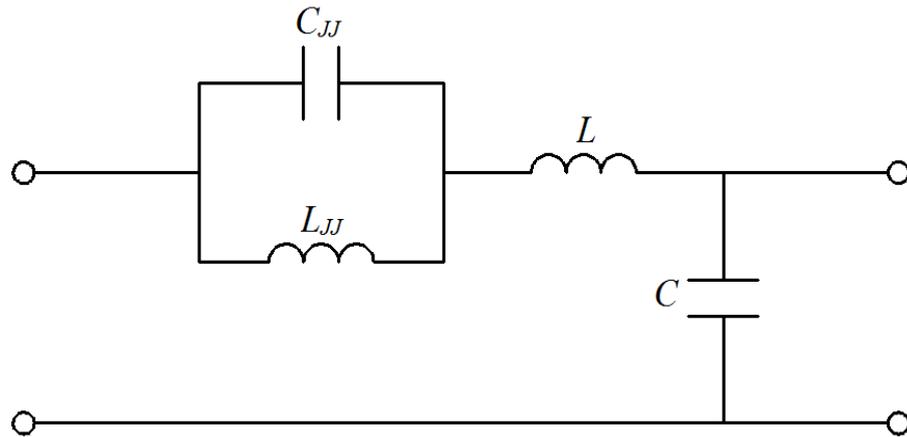


Рисунок 4.10 — Эквивалентная схема длинной линии составленной из контактов Джозефсона, размещенных на расстоянии 5 мкм друг от друга

Импеданс части схемы на Рисунке 4.10 без емкости C можно рассчитать как:

$$\begin{cases} Z_{JJ} = \frac{Z_{C_{JJ}} Z_{L_{JJ}}}{Z_{C_{JJ}} + Z_{L_{JJ}}}; \\ Z_{L_{eff}} = Z_{JJ} + Z_L = \frac{Z_{C_{JJ}} (Z_{L_{JJ}} + Z_L) + Z_L Z_{L_{JJ}}}{Z_{C_{JJ}} + Z_{L_{JJ}}} \approx \frac{Z_{C_{JJ}} (Z_{L_{JJ}} + Z_L)}{Z_{C_{JJ}} + Z_{L_{JJ}}}. \end{cases} \quad (4.37)$$

То есть формально, в случае, когда импеданс емкости джозефсоновского контакта больше импеданса джозефсоновской индуктивности (об этом требовании мы говорили выше), эквивалентная схема совпадает со схемой на Рисунке 4.5 за исключением резонатора. Матрица ABCD для N_{JJ} -контактов, соединенных последовательно может быть представлена в следующем виде:

$$[ABCD]_{JJ_array} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -Z_1 \\ -\frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_1}{Z_2} \end{bmatrix}^{N_{JJ}}, \quad (4.38)$$

где $Z_1 = \frac{j\omega(L+L_{JJ})}{1-\omega^2 C_{JJ}(L+L_{JJ})}$, $Z_2 = \frac{1}{j\omega C}$.

Поскольку аналитически в данном формализме достаточно тяжело включить копланарный резонатор, мы, в первом приближении, возьмем параметры резонатора такими же, как и в (4.35). Далее потребуется матрица конкретной реализации копланарного резонатора, которую можно получить после полного электромагнитного моделирования. В качестве шунтирующих емкостей мы возьмем емкость порядка 10 фФ, которая должна быть уменьшена в два раза вблизи размещения резонатора для лучшего согласования.

Элементарная ячейка первого уровня представляет собой $n_{JJ} = 3$ контакта Джозефсона расположенных на расстоянии 5 мкм друг от друга, далее через 2 мкм располагается шунтирующий конденсатор с продольной протяженностью в 10 мкм. Таким образом, ячейка первого уровня имеет протяженность 28 мкм (см Рисунок 4.11).

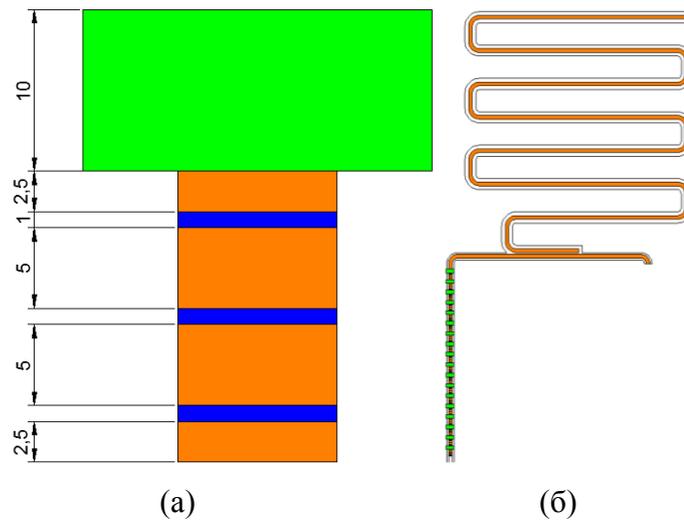


Рисунок 4.11 — Ячейка первого уровня (а) зеленым показана верхняя обкладка шунтирующего конденсатора, оранжевым – копланарная линия, синим – место расположения контактов (размеры даны в микронах). (б) ячейка второго уровня (не в масштабе)

Ячейка второго уровня представляет собой $N_{cell_1} = 25$ ячеек первого уровня, соединенных каскадом и заканчивающаяся копланарным резонатором. Таким образом, ячейка второго уровня содержит 75 контактов Джозефсона и имеет протяженность порядка $d_{cell_2} = 1,4$ мм. Получаемая при этом дисперсия представлена на Рисунке 4.12.

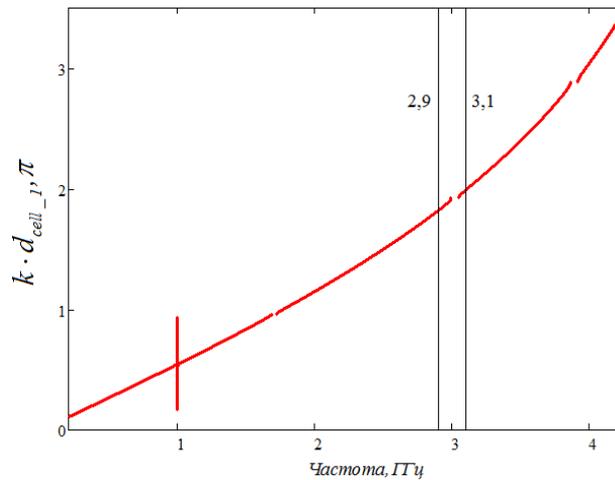


Рисунок 4.12 — Зависимость волнового вектора от частоты в системе с резонатором после 75 контактов Джозефсона

Мы видим, что добавление резонатора, во-первых, создает возможность подстройки вблизи резонансной частоты, а во-вторых, возникают полосы заграждения, связанные с размещением резонатора через расстояние, равное половине длине волны на третьей гармонике предполагаемой накачки. С дополнительной полосой заграждения, которая не должна нам мешать, поскольку соответствует 8 ГГц, что не входит ни в рабочую полосу и не является второй гармоникой, которая должна распространяться для получения усиления.

Теперь, если каскадировать ячейки второго уровня в количестве 41 единица, то мы получим следующую картину коэффициента усиления, которая представлена на Рисунке 4.13

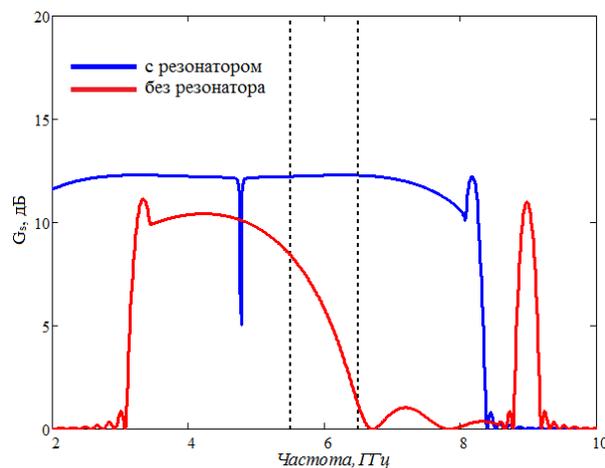


Рисунок 4.13 — Зависимость усиления от частоты сигнала при накачке равной 4,7704 ГГц

Мы видим, что присутствие резонатора позволяет обеспечить усиления порядка 12 дБ в достаточно широкой полосе. Итоговые параметры усилителя представлены в Таблице 4.4

Таблица 4.4 – Параметры параметрического усилителя на контактах Джозефсона с копланарными резонаторами

	Параметр	Значение	Описание
Копланарная линия	S	10 мкм	ширина сигнальной линии
	W	5 мкм	зазор между сигнальной линией и земляным полигоном
	L_{CPW}	0,402 пГн/мкм	погонная индуктивность
	C_{CPW}	0,178 фФ/мкм	погонная емкость
Контакт Джозефсона	I_c	2 мкА	критический ток
	L_{JJ}	109 пГн	индуктивность кинетическая
	C_{JJ}	300 фФ	емкость контакта
Ячейка уровня 1	n_{JJ}	3	количество контактов на ячейку
	C_{shunt}	10 фФ	шунтирующая емкость
	d_{shunt}	10 мкм	протяженность шунтирующей емкости
	d_{cell1}	28 мкм	длина ячейки первого уровня
Ячейка уровня 2	N_{cell_1}	25	количество ячеек первого уровня в ячейке второго уровня
	ω_r	4,8 ГГц	резонансная частота
	C_c	10 фФ	емкость связи копланарного резонатора и микроволновой линии
	N_{cell_2}	41	общее число ячеек второго уровня

Общее количество контактов в данном параметрическом усилителе равно:

$$N_{JJ} = n_{JJ} \cdot N_{cell_1} \cdot N_{cell_2} = 3075.$$

Далее требуется проведение оптимизации структуры путем полного электромагнитного моделирования и проверка усиления уже с учетом его результатов.

4.4 Численное моделирование полученных структур и проверка полосы и усиления

Для усилителей на контактах Джозефсона с подстройкой фазы с помощью резонаторов на сосредоточенных элементах была разработана и оптимизирована следующая конструкция резонатора, представленная на Рисунке 4.14

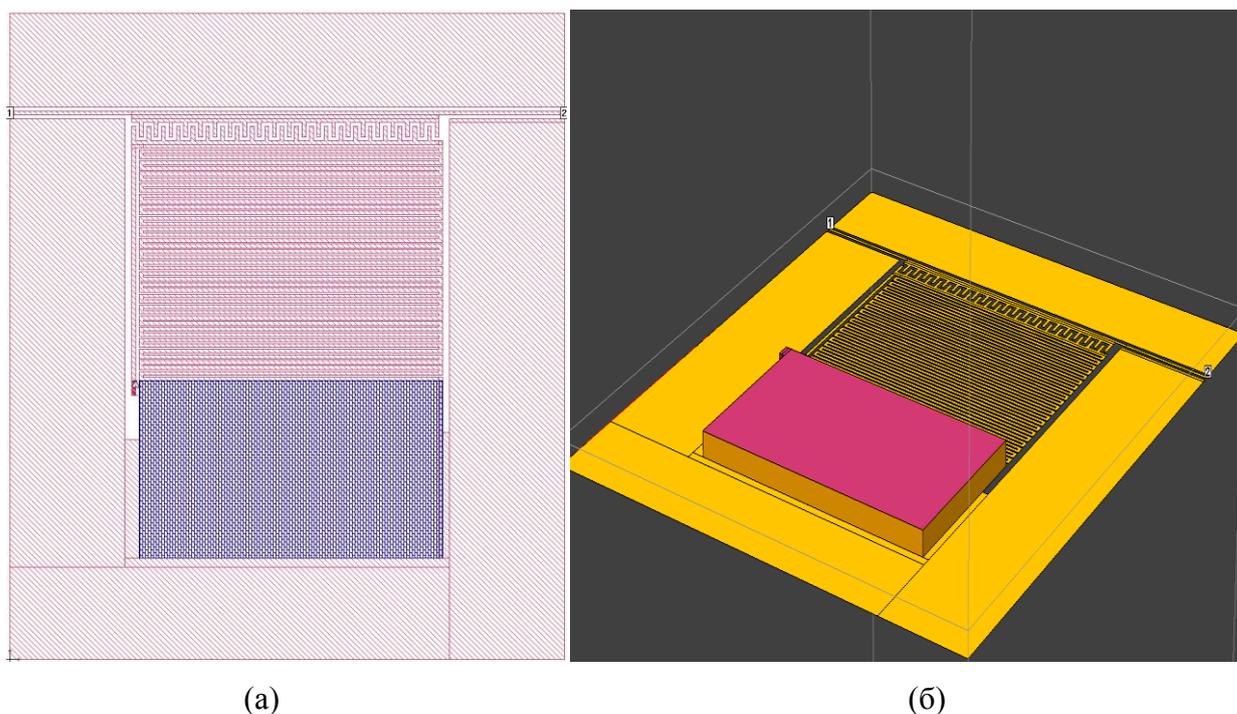


Рисунок 4.14 — Топология элементарной ячейки представляющей собой резонатор (а) вид сверху; (б) трехмерная модель

Численное моделирование данной ячейки показывает резонанс на частоте 4.825 ГГц, модуль коэффициента прохождения S_{21} представлен на Рисунке 4.15.

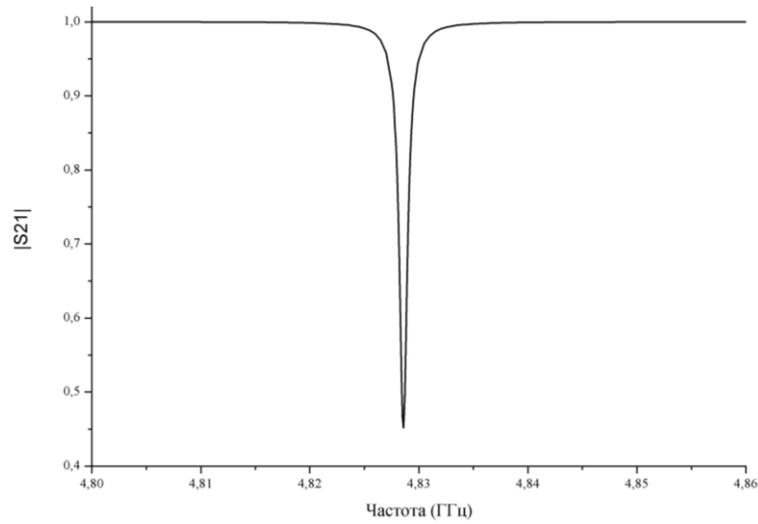


Рисунок 4.15 — Модуль коэффициента прохождения элементарной ячейки представленной на рисунке 4.14

Матричный анализ полученных характеристик дает нам следующую зависимость коэффициента усиления. Мы видим, небольшое смещение по частоте и небольшое уменьшение амплитуды усиления, поскольку в моделирование были учтены потери в кремниевой подложке, которые при криогенных температурах составляют порядка $\tan\delta = 0.0001$ [105]. При этом смоделированные потери в элементарной ячейке оказались равны $A_1=0,9995$, а усиление, приходящееся на одну ячейку, оказалось равным примерно 1,002 раз. Суммарные потери в линейных единицах на 2000 ячеек составят 85,23 единиц, при усилении 82,05. Тогда, согласно формулам из [37, 50], квантовая эффективность будет равна:

$$\eta = \frac{82.05}{85.23} \approx 0.96,$$

что удовлетворяет поставленным требованиям при условии, что потери в диэлектриках не будут превышать выбранных значений.

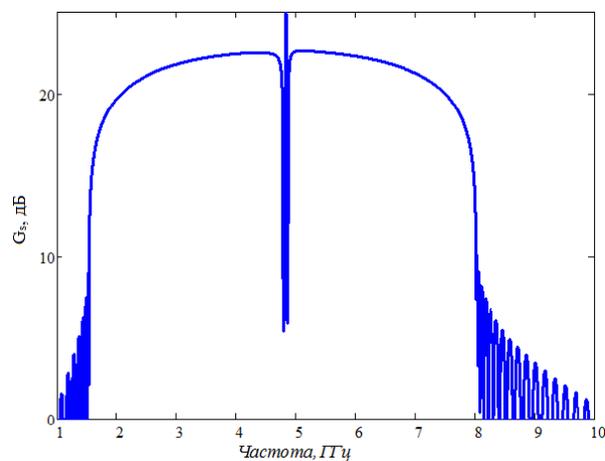


Рисунок 4.16 — Коэффициент усиления параметрического усилителя с сосредоточенными резонаторами при частоте накачки 8 ГГц с резонатором, описанным с помощью электромагнитного моделирования

Для усилителей на тонких пленках, при параметрах, перечисленных в соответствующей главе, частотная зависимость коэффициентов прохождения представлена на Рисунке 4.17, где видно наличие полос заграждения на частотах вблизи 6 ГГц и вблизи 16 ГГц.

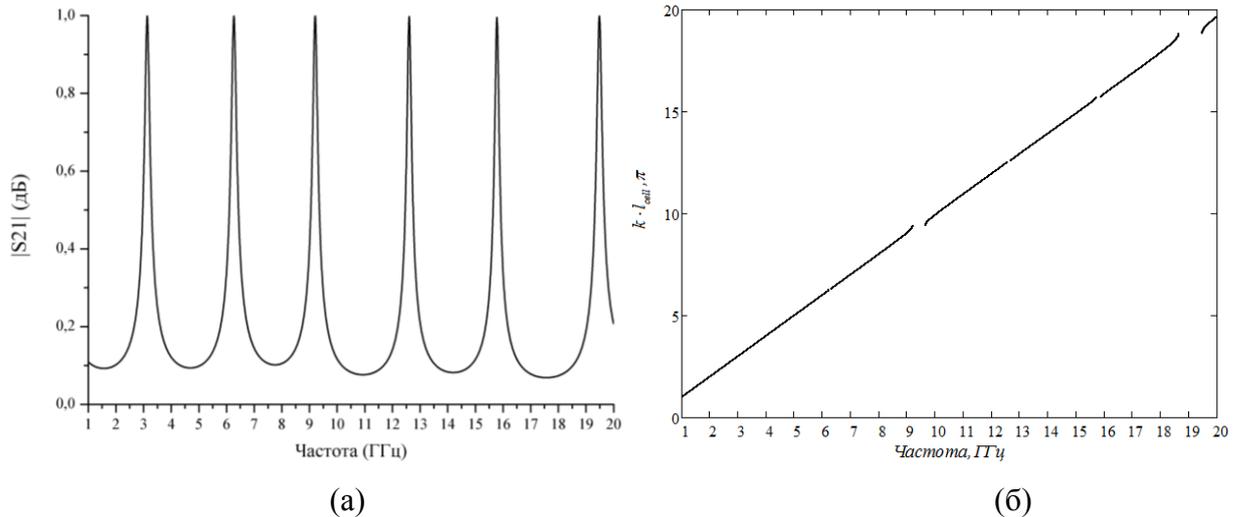


Рисунок 4.17 — Частотная зависимость коэффициента прохождения для элементарной ячейки для параметрического усилителя на тонких пленках (а) и зависимость волнового вектора от частоты (б)

Мы видим, что полосы заграждения создаются там же, где и полосы заграждения на Рисунке 4.4. Таким образом, выбранная ячейка протяженностью 1038 мкм, может быть использована для создания параметрического усилителя на пленках, что для 400 ячеек даст нам общую длину усилителя (без трансформаторов) в 0.415 м.

4.5 Методика проведения эксперимента

Поскольку в настоящее время у нас отсутствуют образцы параметрических усилителей, представляется возможным только обзор методик экспериментального исследования, имеющих в открытом доступе.

Так как существующая в России тонкопленочная технология ограничена по длине копланарной линии из NbN до десятков мм, и отсутствует схемотехническое решение, как получить требуемое усиление на малых длинах, далее будут представлены методики измерения параметрических усилителей на контактах Джозефсона.

Согласно [36] для характеристики параметрического усилителя необходимо провести два типа экспериментов:

- калибровочные и тестовые измерения
- измерение шумовых характеристик усилителя.

Для измерения коэффициента усиления необходимо собрать следующую измерительную установку, представленную на Рисунке 4.18

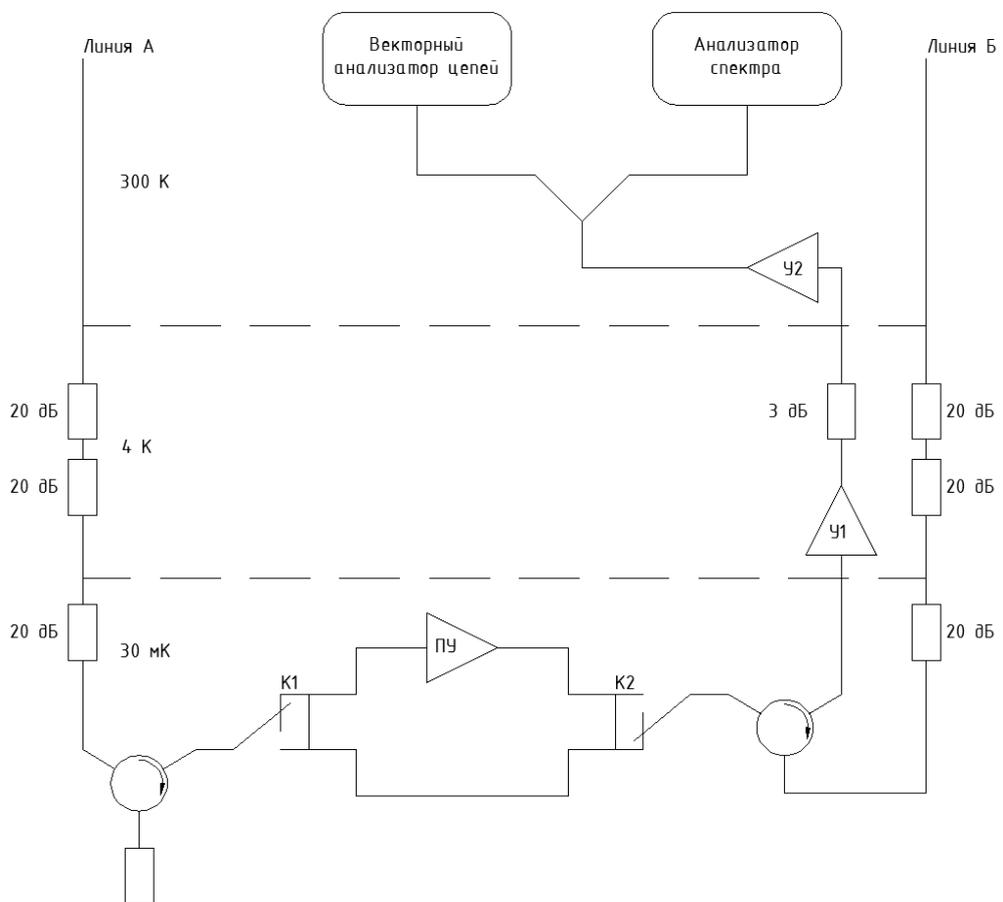


Рисунок 4.18 — Измерительная установка для определения коэффициента усиления параметрического усилителя. Введенные обозначения ПУ – параметрический усилитель; У1 – криогенный СВЧ усилитель; У2 – комнатный СВЧ усилитель; К1, К2 – криогенные СВЧ переключатели волноводные

Для определения коэффициента усиления требуется:

1. Собрать измерительную установку по схеме, представленной на Рисунке 4.18.
2. Переключить ключи К1 и К2 в нижнее положение.

3. Подать сигналы с векторного анализатора цепей на линию А и измерить коэффициент прохождения T_1 в рабочей полосе частот.
4. Подать сигналы с векторного анализатора цепей на линию Б и измерить коэффициент отражения R_1 в рабочей полосе частот.
5. Переключить ключи К1 и К2 в верхнее положение и повторить пункты 3, 4 и измерить коэффициенты T_2 и R_2 в рабочей полосе частот.
6. Убедиться, что T_2 имеет провал на амплитудно-частотной характеристике на частоте резонаторов, используемых в ПУ.
7. Убедиться, что вне полосы резонанса T_1 и T_2 отличаются не более чем на 1 дБ.
8. Сравнить коэффициенты отражения R_1 и R_2 .

Для измерения шумовых характеристик следует собрать измерительную установку, представленную на Рисунке 4.19

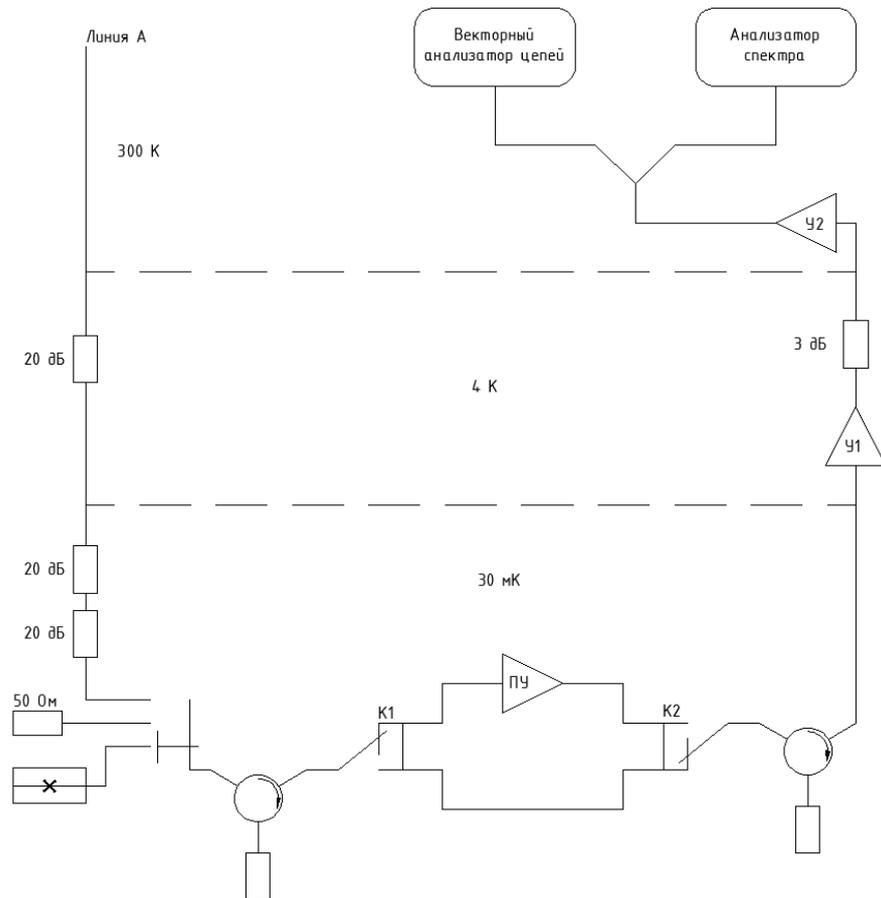


Рисунок 4.19 — Измерительная установка для определения шумовых характеристик параметрического усилителя

Для определения шумовой температуры требуется:

1. Собрать измерительную установку по схеме, представленной на Рисунке 4.19.

2. Трехпозиционный ключ выставить в самое верхнее положение.
3. Подать систему два сигнала через линию А. Первый сигнал, усиливаемый должен быть сигналом с векторного анализатора цепей, второй сигнал должен быть сигналом накачки.
4. Переключить выключатели К1 и К2 в нижнее положение.
5. Измерить коэффициент прохождения T_1 и мощность шума P_{N1} .
6. Переключить выключатели К1 и К2 в верхнее положение.
7. Измерить коэффициент прохождения T_2 и мощность шума P_{N2} .
8. Переключить выключатели К1 и К2 в нижнее положение и трехпозиционный переключатель в положение соответствующее резистору в 50 Ом.
9. Повысить температуру нижней платы до 6 К (или альтернативно нагреть резистор)
10. Повторить пункты 5-8.
11. Рассчитать собственную шумовую температуру параметрического усилителя.

Данная методика подробно описана в [106] и должна быть уточнена при проведении экспериментов с рабочими образцами.

4.6 Выводы к главе 4

Предложено три типа параметрических усилителей на кинетической индуктивности, которая может быть обусловлена либо тонкими сверхпроводящими пленками типа NbN или $NbTiN$, либо контактами Джозефсона. В первом случае, была просчитана и промоделирована численными методами полного электромагнитного моделирования структура элементарной ячейки общей протяженностью 1038 мкм. Было показано, что такая ячейка дает возможность подстройки фазы вблизи 6 ГГц в достаточно широкой полосе (более 2 ГГц).

В случае усилителя на контактах Джозефсона была предложена подстройка фазы с помощью резонаторов либо в копланарном исполнении, либо в виде сосредоточенных элементов. В первом случае, пока что просчитан вариант только с помощью идеализированных аналитических формул, который показал, что предложенная элементарная ячейка, представляющая собой 75 контактов Джозефсона, где после каждого третьего контакта стоит шунтирующая емкость 10 фФ, и заканчивающаяся четвертьволновым резонатором на 4,8 ГГц, дает нам возможность подстройки фазы в интересующей нас полосе, с подавлением высших гармоник накачки вблизи 18 ГГц. В настоящее время требуется оптимизация такого типа

усилителей, поскольку не найдены оптимальные размеры копланарных линий, позволяющие обеспечить приемлемый выход годных изделий. Также, в данном дизайне необходимо использование шунтирующих конденсаторов, для предотвращения распространения паразитных гармоник, обусловленных разностью потенциалов двух полигонов заземления копланарной линии передачи.

Для подстройки фазы, с помощью резонаторов в сосредоточенном базисе, разработка дизайна завершена полностью, были получены положительные результаты, как по итогам численного анализа аналитических формул, так и по итогам полного электромагнитного моделирования. Данный тип усилителей содержит порядка 2000 контактов Джозефсона и порядка 2000 компактных микроволновых резонаторов. Такой тип усилителей является наиболее перспективным, поскольку в данных резонаторах отсутствуют высшие гармоники, что исключает возможность фазового согласования на высших гармониках и, как следствие, переход усилителя в режим насыщения.

В обоих случаях, в качестве диэлектриков для плоскопараллельных конденсаторов, предполагается использовать аморфный кремний, поскольку он обладает достаточно низкими потерями при криогенных температурах и достаточно высокой диэлектрической проницаемостью. Помимо внутренних отражений, потери в диэлектрике и потери в подложке будут определять шумовые характеристики усилителя и могут быть оценены по итогам изготовления пробных образцов, когда возможно будет измерить данные потери. Обзор литературы показал, что при использовании данных материалов можно достичь шума порядка трех фотонов, что соответствует шумовой температуре порядка 0.5 К.

Подробно разобраны все основные этапы проектирования сверхпроводниковых параметрических усилителей, с подробным описанием результатов каждого этапа и их анализа. В качестве одного из базовых методов расчета, была использована методика описанная в работе [103], написанная автором совместно с коллегами из Лаборатории квантовой криогенной электроники НГТУ. Полученное описание может быть использовано в качестве методики проектирования такого типа усилителей для произвольного частотного диапазона с учетом технологических возможностей. Данного описания достаточно для написания несложных программ расчета, позволяющих проводить симуляцию основных параметров таких усилителей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развит метод неэрмитового эффективного гамильтониана для задач рассеивания фотона в гибридных твердотельных наноструктурах с искусственными атомами. С использованием данного метода решен ряд задач, и установлены следующие особенности транспорта фотонов в гибридных твердотельных структурах:

- Показано, что при малом числе фотонов в резонаторе происходит расщепление центрального пика в триплете Моллоу. Этот чисто квантовый эффект, который связан с значимым различием величины расщепления уровней в системе кубит-резонатор в мультиплетах соответствующих разному числу фотонов в резонаторе. Выведены аналитические выражения, описывающие зависимость положения и ширины уровней системы от числа фотонов в резонаторе, а также вероятности прохождения и отражения единичного фотона через такую систему. Продемонстрировано, что полученные выражения могут быть использованы для описания таких известных эффектов как фотонная блокада, штарковский сдвиг и спектр Моллоу.

- Установлено, что стандартный подход к учету процессов диссипации в системе кубит - резонатор - волновод с помощью введения оператора Линдблада, справедлив только в пределе одного фотона в резонаторе. Для случая, когда число фотонов больше одного, получены аналитические решения, которые позволяют учесть влияние числа фотонов в резонаторе на транспортные характеристики системы при наличии релаксации кубита. Данные решения получены в квантовомеханическом описании системы, в которую феноменологически был введен локальный термостат, представляющий собой канал нерадиационного распада возбужденного состояния кубита.

- Показано, что получаемые методом эффективного неэрмитового гамильтониана волновые функции, описывающие состояния твердотельных квантовых структур могут быть использованы для описания различных результатов измерения, в том числе и с учетом интерференции волновых функций.

- Показано, что вероятность переноса состояния между двумя кубитами в открытом волноводе нелинейно зависит от расстояния между ними. Полученные выражения позволяют описывать как перенос незапутанного состояния, так и перенос Белловских состояний. Установлено, что данные вероятности зависят не только от частотной расстройки между налетающим фотоном, который фактически является переносчиком состояния, и кубитами, но и от расстояния между кубитами. Предложены аналитические выражения, описывающие влияние релаксации (локальный и общий термостаты) и декогеренции на транспорт фотона через такую структуру. Влияние декогеренции получено, вследствие объединения двух методов: неэрмитового эффективного гамильтониана и формализма матрицы плотности.

-Показано, что в структуре с двумя резонаторами и двумя кубитами возникает резонанс Фано и эффект электромагнитно-индуцированной прозрачности. Установлено, что ширина уровней или, иными словами, эффекты сверхизлучения и субизлучения, зависят от расстояния между резонаторами. Также показано, что положение резонансных уровней зависит от частоты налетающего фотона.

- Предложен и описан метод экстракции основных параметров системы кубит - резонатор - волновод из результатов экспериментального одночастотного исследования транспортных характеристик.

- Подробно описана методика расчета и разработки дизайнов трех типов параметрических усилителей с квантовым уровнем шумов на базе сильно неупорядоченных сверхпроводниковых пленок, и контактов Джозефсона. Результаты численного моделирования разработанных усилителей показывают, что они обеспечивают усиление более 15 дБ в полосе порядка 3 ГГц.

Разработанные в данной диссертационной работе подходы к решению задач транспорта микроволновых фотонов через одно- и двухкубитные цепи естественным образом обобщаются на случай большего числа кубитов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] **Astafiev O. V.** Ultimate on-chip amplifier /Astafiev O. V., Abdumalikov A. A. Jr., Zagoskin A. M., Pashkin Yu. A., Nakamura Y., Tsai J. S. // *Phys. Rev. Lett.* – 2010 - N 104 – Art. 183603.
- [2] **Astafiev O. V.** Resonance fluorescence of a single artificial atom/ Astafiev O. V., Zagoskin A. M., Abdumalikov A. A. Jr, Pashkin Yu. A., Yamamoto T., Inomata K., Nakamura Y., and Tsai J. S.//*Science* – 2010 – N 327- Art. 5969 – pp. 840-843.
- [3] **Hoi I. C.** Microwave quantum optics with an artificial atom in one-dimensional open space/ Hoi I. C., Wilson C. M., Johansson G., Lindkvist J., Peropadre B., Palomaki T., Delsing P.// *New Journal of Physics* – 2013 –V. 15 –Art. 025011 – 15 pp.
- [4] **Abdumalikov A. A.** Electromagnetically induced transparency on a single artificial atom/ Abdumalikov A. A. Jr., Astafiev O., Zagoskin A. M., Pashkin Yu. A., Nakamura Y., Tsai J.S.// *Phys. Rev.Lett.* – 2010 – N 104 – Art. 193601.
- [5] **Hoi I. C.** Demonstration of a single-photon router in the microwave regime/ Hoi I. C., Wilson C. M., Johansson G., Peropadre B, Delsing P. // *Phys. Rev. Lett.* – 2011 – V. 107 – Art. 073601.
- [6] **Hoi I. C.** Generation of nonclassical microwave states using an artificial atom in 1D open space/ Hoi I. C., Palomaki T., Lindkvist J., Johansson G., Delsing P. Wilson C. M.// *Phys. Rev. Lett.* – 2012 – V. 108 – Art. 263601.
- [7] **van Loo A. F.** Photon-mediated interactions between distant artificial atoms/ van Loo A. F., Fedorov A., Lalumiere K., Sanders B.C., Blais A., Wallraff A. // *Science* – 2013 – V. 342 –iss. 6165 – pp. 1494-1496.
- [8] **Kou A.** Simultaneous monitoring of fluxonium qubits in a waveguide/ Kou A., Smith W. C., Vool U., Pop I. M., Sliwa K. M., Hatridge M., Frunzio L., Devoret M.H. // *Phys. Rev. Applied* – 2018 – V. 9 – Art. 064022.
- [9] **Schmitt V.** Multiplexed readout of transmon qubits with Josephson bifurcation amplifiers/ Schmitt V., Zhou X., Juliusson K., Royer B., Blais A., Bertet P., Vion D., Esteve D. // *Phys. Rev. A*– 2014 – V. 90 – Art. 062333.
- [10] **Chen Yu.** Multiplexed dispersive readout of superconducting phase qubits/ Chen Yu., Sank D., Malley P. O., White T., Barends R., Chiaro B., Kelly J., Lucero E., Mariantoni M., Megrant A., Neill C., Vainsencher A., Wenner J., Yin Y., Cleland A.N., Martinis J.M.// *Appl. Phys. Lett.* – 2012 – V.101 – Art. 182601.
- [11] **McDermott R.** Simultaneous state measurement of coupled Josephson phase qubits/ McDermott R., Simmonds R.W., Steffen M., Cooper K. B., Cicak K., Osborn K.D., Oh S., Pappas D.P., Martinis J.M. // *Science*– 2005 – V. 307 – iss. 5713 – pp.1299-1302.

- [12] **Altomare F.** Measurement crosstalk between two phase qubits coupled by a coplanar waveguide/ Altomare F., Cicak K., Sillanpaa M. A., Allman M. S., Sirois A. J., Li D., Park J. I., Strong J. A., Teufel J. D., Whittaker J. D., Simmonds R.W. // *Phys. Rev. B*– 2010 – N 82 – Art. 094510.
- [13] **Nogues G.** Seeing a single photon without destroying it/ Nogues G., Raushenbeutel A., Osnaghi S., Brune M., Raimond J.M., Haroche S. // *Nature*– 1999 – V.400 – pp. 239-242.
- [14] **Raimond J. M.** Manipulating quantum entanglement with atoms and photons in a cavity/ Raimond J. M., Brune M., Haroche S. // *Rev. Mod. Phys.* – 2001 V. 73 – iss. 565.
- [15] **Guerlin C.** Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting/ Guerlin C., Bernu J., Deleglise S., Sayrin C., Gleyzes S., Kuhr S., Brune M.// *Nature* – 2007 – V. 448 – pp.889-893.
- [16] **Yoshie T.** Vacuum Rabi splitting with a single quantum dot in a photonic crystal nanocavity / Yoshie T., Schreier A., Hendrickson J., Khitrova G., Gibbs H., Rupper G., Ell C., Shchekin O., Deppe D. // *Nature*– 2004 – V. 432 – pp. 200-203.
- [17] **Badolato A.** Deterministic coupling of single quantum dots to single nanocavity modes/ Badolato A., Hennessy K., Atature M., Dreiser J., Hu E., Petroff P. M., Imamoglu A.// *Science*– 2005 – N 308 – Art. 5725 – pp. 1158-1161.
- [18] **Fushman I.** Controlled phase shifts with a single quantum dot/ Fushman I., Englund D., Faraon A., Stoltz N., Petroff P., Vuckovic J. // *Science*– 2008 – V. 320 – iss. 5877 – pp. 769-772.
- [19] **Zhou L.** Controllable scattering of a single photon inside a one-dimensional resonator waveguide/ Zhou L., Gong Z. R., Liu Y., Sun C. P., Nori F. // *Phys. Rev. Lett.* – 2008 – V.101 – Art. 100501.
- [20] **Koshino K.** Deterministic photon-photon \sqrt{SWAP} gate using a Λ system/ Koshino K., Ishizaka S., Nakamura Y. // *Phys. Rev. A*– 2010 – V. 82 – Art. 010301.
- [21] **Ciccarello F.** Quasideterministic realization of a universal quantum gate in a single scattering process/ Ciccarello F., Browne D. E., Kwek L. C., Schomerus H., Zarcone M., Bose S. // *Phys. Rev. A*– 2012 – V. 85 – Art. 050305(R).
- [22] **Zheng H.** Persistent quantum beats and long-distance entanglement from waveguide-mediated interactions/ Zheng H., Baranger H. U. // *Phys. Rev. Lett.* – 2013 – V. 110 – Art. 113601.
- [23] **Rosenblum S.** Analysis of deterministic swapping of photonic and atomic states through single photon Raman interaction/ Rosenblum S., Borne A., Dayan B.// *Phys. Rev. A* – 2017 – V. 95 – Art. 033814.
- [24] **Shen J. T.** Coherent single photon transport in a one-dimensional waveguide coupled with superconducting quantum bits/ Shen J. T., Fan S.// *Phys. Rev. Lett.* – 2005 – V.95 – Art. 213001.
- [25] **Shen J. T.** Coherent photon transport from spontaneous emission in one-dimensional waveguides/ Shen J. T., Fan S. // *Opt. Lett.* – 2005 – V.30 – iss. 15 – pp. 2001-2003.

- [26] **Fang Y.-L. L.** One-dimensional waveguide coupled to multiple qubits: photon-photon correlations/ Fang Y.-L. L., Zheng H., Baranger H. U. // EPJ Quantum Technology – 2014 – V. 1 –iss. 3.
- [27] **Shen J. T.** Theory of single-photon transport in a single-mode waveguide. I. Coupling to a cavity containing a two-level atom/ Shen J. T., Fan S. // Phys. Rev. A– 2009 – V. 79 – Art. 023837.
- [28] **Lalumiere K.** Input-output theory for waveguide QED with an ensemble of inhomogeneous atoms/ Lalumiere K., Sanders B. C., van Loo A. F., Fedorov A., Wallraff A., Blais A.// Phys. Rev. A– 2013 – V. 88 – Art. 043806.
- [29] **Fan S.** Input-output formalism for few-photon transport in one-dimensional nanophotonic waveguides coupled to a qubit/ Fan S., Kocabas S. E., Shen J.T. // Phys. Rev. A– 2010 V. 82 – Art. 063821.
- [30] **Zheng H.** Waveguide QED: many-body bound-state effects in coherent and Fock-state scattering from a two-level system/ Zheng H., Gauthier D. J., Baranger H. U. // Phys. Rev. A – 2010 – V. 82 – Art. 063816.
- [31] **Peropadre B.** Scattering of coherent states on a single artificial atom/ Peropadre B., Lindkvist J., Hoi I. - C., Wilson C. M., Garcia-Ripoll J. J., Delsing P., Johansson G. // New Journal of Physics – 2013 – V. 15 – Art. 035009 – 17 pp.
- [32] **Xu S.** Input-output formalism for few-photon transport: A systematic treatment beyond two photons/ Xu S., Fan S. // Phys. Rev. A– 2015 – V. 91 – Art. 043846.
- [33] **Tsoi T. S.** Quantum interference effects of a single photon interacting with an atomic chain inside a one-dimensional waveguide/ Tsoi T. S., Law C.K. // Phys. Rev. A – 2008 – V.78 – Art. 063832.
- [34] **Romero G.** Photodetection of propagating quantum microwaves in circuit QED/ Romero G., Garcia-Ripoll J.J., Solano E. // Phys. Scr. – 2009 – T. 137 – Art. 014004 – 13 pp.
- [35] **Motzoi F.** Backaction-driven, robust, steady-state long-distance qubit entanglement over lossy channels/ Motzoi F., Halperin E., Wang X., Whaley K. B., Schirmer S.// Phys. Rev. A – 2016 – V. 94 – Art. 032313.
- [36] **White T. C.** Travelling wave parametric amplifier with Josephson junctions using minimal resonator phase matching/ White T. C., Mutus J. Y., Hoi I.-C., Barends R., Campbell B., Chen Y., Chen Z., Chiaro B., Dunsworth A., Jeffrey E., Kelly J., Megrant A., Neill C., O'Malley P. J. J., Roushan P., Sank D., Vainsencher A., Wenner J., Chaudhuri S., Gao J., Martinis J. M. // Appl. Phys. Lett. – 2015 – V. 106 – Art. 242601.
- [37] **O'Brien K.** Resonant phase matching of Josephson junction travelling wave parametric amplifiers/ O'Brien K., Macklin C., Siddiqi I., Zhang X. // Phys. Rev. Lett. – 2014 – V. 113 – Art. 157001.

- [38] **Eom B. H.** A wideband, low-noise superconducting amplifier with high dynamic range/ Eom B. H., Day P. K., LeDuc H. G., Zmuidzinas J. // *Nat. Phys.* – 2012 – V. 8 – iss. 8 – pp. 623-627.
- [39] **Shen J.T.** Strongly correlated multiparticle transport in one dimension through a quantum impurity/ Shen J.T., Fan S.// *Phys. Rev. A*– 2007 – V. 76 – 062709.
- [40] **Shen J.T.** Strongly correlated two-photon transport in a one-dimensional waveguide coupled to a two-level system/ Shen J.T., Fan S. // *Phys. Rev. Lett.* – 2007 – V. 98 – Art. 153003.
- [41] **Rephaeli E.** Dissipation in few-photon waveguide transport/ Rephaeli E., Fan S. // *Photon. Res.* – 2013 V.1 – iss. 3 – pp. 110-114.
- [42] **Roy D.** Few-photon optical diode/ Roy D. // *Phys. Rev. B* – 2010 – V. 81 – Art. 155117.
- [43] **Cheng M.- T.** Waveguide transport mediated by strong coupling with atoms/ Cheng M.- T. , Xu J., Agarwal G. S. // *Phys. Rev. A*– 2017 – V.95 – Art. 053807.
- [44] **Omelyanchouk A. N.** Quantum behavior of a flux qubit coupled to a resonator/ Omelyanchouk A. N., Shevchenko S. N., Greenberg Ya. S., Astafiev O., Il'ichev E. // *Low Temp. Phys.* – 2010 – V.36 – iss. 893.
- [45] **Feshbach H.** A unified theory of nuclear reactions. II/ Feshbach H. // *Ann. of Phys.* – 1962 – V. 19 – iss. 2 – pp. 287 - 313.
- [46] **Auerbach N.** Super-radiant dynamics, doorways and resonances and other open mesoscopic systems/ Auerbach N., Zelevinsky V. // *Rep. on Progr. in Phys.* – 2011 – N74 – iss. 10.
- [47] **Tayebi A.** Enviroment-protected solid-state-based distributed charge qubit/ Tayebi A., Hoatson T. N., Wang J., Zelevinsky V. // *Phys. Rev. B*– 2016 – V. 94 – Art. 235150.
- [48] **Greenberg Y.S.** Quantum signal transmission through a single-qubit chain/ Greenberg Y.S., Merrigan C., Tayebi A., Zelevinsky V. // *Eur. Phys. J. B* – 2013 V. 86 – iss. 368.
- [49] **Shchedrin G.** Resonance width distribution for open quantum systems/ Shchedrin G., Zelevinsky V. // *Phys. Rev. C*– 2012 – V. 86 – Art. 044602.
- [50] **Ziletti A.** Coherent transport in multibranch quantum circuits/ Ziletti A., Borgonovi F., Celardo G. L., Izrailev F. M., Kaplan L., Zelevinsky V. G. // *Phys. Rev. B*– 2012 – V. 85 – Art. 052201.
- [51] **Giusteri G. G.** Non-Hermitian Hamiltonian approach to quantum transport in disordered networks with sinks: Validity and effectiveness/ Giusteri G. G., Mattiotti F., Celardo G. L.// *Phys. Rev. B*– 2015 – V.91 – Art. 094301.
- [52] **Greenberg Ya. S.** Non-Hermitian Hamiltonian approach to the microwave transmission through a one-dimensional qubit chain/ Greenberg Ya. S., Shtygashev A. A.// *Phys. Rev. A* – 2015 –V. 92 – Art. 063835.
- [53] . **Гринберг Я. С.** Микроволновая наноэлектромеханическая система: усиление слабых сигналов / Я. С. Гринберг, А. А. Штыгашев, Ю. Г. Пейсахович, А. Н. Султанов // *Научный*

вестник Новосибирского государственного технического университета. - 2013. – № 4. – С. 41–49.

[54] **Гринберг Я. С.** Применение метода неэрмитового Гамильтониана для описания взаимодействия наномеханического осциллятора с микроволновым полем / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов // Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях = Mesoscopic structures : fundamentals and applications : 3 междунар. конф. : сб. докл. [и тез.], г. Бердск, 22–26 июня 2015 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2015. – С. 72-75. - 50 экз. - ISBN 978-5-7782-2679-1.

[55]. **Гринберг Я. С.** Microwave characterization of nanomechanical resonator / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов, Е. В. Ильичев // Актуальные проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2014) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2014) : тр. 12 междунар. конф., Новосибирск, 2–4 окт. 2014 г. : в 7 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – Т. 1. – С. 41-45. - 250 экз. - ISBN 978-1-4799-6019-4, 978-5-7782-2506-0.

[56] **Гринберг Я. С.** Микроволновая диагностика наномеханических резонаторов / Я. С. Гринберг, Е. В. Ильичев, А. А. Штыгашев, А. Н. Султанов // Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях = Mesoscopic structures: fundamentals and applications : сб. докл. 2 междунар. конф., Бердск, 23–29 июня 2013 г. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2013. – С. 46.

[57] **Гринберг Я. С.** Исследование параметрического взаимодействия микроволнового СВЧ резонатора с наномеханическим резонатором. / Я. С. Гринберг, А. А. Штыгашев, Ю. Г. Пейсахович, Султанов А. Н. // Материалы XI-й международной конференции "Актуальные проблемы электронного приборостроения" (АПЭП-2012), т. 2, стр. 117-123, Новосибирск, 2-4 октября 2012 г.

[58] **von Brentano P.** Crossing and anticrossing of energies and widths for unbound levels/ von Brentano P., Philipp M.// Phys. Lett. B– 1999 – V. 454 – iss. 3-4 – pp.171-175.

[59] **Mondragon A.** Degeneracy and crossing of resonance energy surfaces / Mondragon A., Hernandez E. // J. Phys. A: Math. Gen. – 1993 – V. 26 – pp. 5595-5611.

[60] **Fink J. M.** Climbing the Jaynes-Cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity QED system/ Fink J. M., Goppl M., Baur M., Bianchetti R., Leek P. J., Blais A., Wallraff A.// Nature– 2008 – V. 454 – pp. 315 - 318.

[61] **Hoffman A. J.** Dispersive photon blockade in a superconducting circuit/ Hoffman A.J., Srinivasan S. J., Schmidt S., Spietz L., Aumentado J., Tureci H. E., Houck A. A.// Phys. Rev. Lett. – 2011 – V. 107 – Art. 053602.

[62] **Imamoglu A.** Strongly interacting photons in a nonlinear cavity/ Imamoglu A., Schmidt H., Woods G., Deutsch M. // Phys. Rev. Lett. – 1998 –V. 87 – Art. 2836.

- [63] **Deng W.-W.** Photon blockade via quantum interference in a strong coupling qubit-cavity system/ Deng W.-W., Li G.X., Qin H. // *Opt. Express* – 2017 – V. 25 – iss. 6 – pp. 6767-6783.
- [64] **Bajcsy M.** Photon blockade with a four level quantum emitter coupled to a photonic-crystal nanocavity/ Bajcsy M., Majumdar A., Rundquist A., Vuckovic J.// *New Journal of Physics* – 2013 – V. 15 – Art. 025014 (16 pp.).
- [65] **Lang C.** Observation of resonant photon blockade at microwave frequencies using correlation function measurements/ Lang C., Bozyigit D., Eichler C., Steffen L., Fink J. M., Abdumalikov A.A. Jr., Baur M., Filipp S., da Silva M.P., Blais A., Wallraff A.// *Phys. Rev. Lett.* – 2011 – V. 106 – Art. 243601.
- [66] **Birnbaum K. M.** Photon blockade in an optical cavity with one trapped atom/ Birnbaum K. M., Boca A., Miller R., Boozer A. D., Northrup T. E., Kimble H. J. // *Nature* – 2005 – V. 436 – pp. 87-90.
- [67] **N. J. Stor** Accurate eigenvalue decomposition of real symmetric arrowhead matrices and applications / N. J. Stor, I. Slapnicar, J. L. Barrow // *Linear Algebra Its Appl.* – 2015 – V. 464 – pp. 62-89
- [68] **Forn-Diaz P.** Ultrastrong coupling of a single artificial atom to an electromagnetic continuum in the nonperturbative regime/ Forn-Diaz P., Garcia-Ripoll J. J., Peropadre B., Orgiazzi J.-L., Yurtalan M. A., Belyansky R., Wilson C. M., Lupascu A.// *Nature Physics*– 2017 – V.13 – pp. 39-43.
- [69] **Greenberg Y. S.** Mollow triplet through pump-probe single-photon spectroscopy of artificial atoms / Y. S. Greenberg, A. N. Sultanov // *Physical Review. A: Atomic, Molecular, and Optical Physics.* - 2017. - Vol. 95, iss. 5. - Art. 053840 (16 p.).
- [70] **Novikov I. L.** Measurement of the superconducting flux qubit parameters in the quasi-dispersive regime/ Novikov I. L., Ivanov B. I., Sultanov A. N., Greenberg Y. S., Il'ichev// *Phys. of the Sol. State* – 2016 – V. 58 – iss. 11 – pp. 2155-2159.
- [71] **Oelsner G.** Weak continuous monitoring of a flux qubit using coplanar waveguide resonator/ Oelsner G., van der Ploeg S. H. W., Macha P., Hubner U., Born D., Anders S., Il'ichev E., Meyer H. – G., Grajcar M., Wunsch S., Siegel M., Omelyanchouk A. N., Astafiev O. // *Phys. Rev. B*– 2010 – V. 81 – Art. 172505.
- [72] **Ivanov B. I.** Spectroscopy of a superconducting flux qubit in a quasidispersive mode/ Ivanov B. I., Novikov I. L., Sultanov A. N., Greenberg Ya. S., Krivetskii A. V., Vostretsov A. G., Il'ichev E., // *JETP Letter*– 2016 – V. 103 – iss. 6 – pp. 425-430.
- [73] **Shevchenko S. N.** Amplification and attenuation of a probe signal by doubly dressed states/ Shevchenko S. N., Oelsner G., Greenberg Ya. S., Macha P., Karpov D. S., Grajcar M., Hubner U., Omelyanchouk A. N., Il'ichev E. // *Phys. Rev. B*– 2014 – V. 89 – Art. 184504.
- [74] **Sultanov A. N.** Effect of the qubit relaxation on transport properties of microwave photons / A.N. Sultanov, Ya.S. Greenberg // *Physics of the Solid State* -2017- V.59 № 11- pp.2103-2109

- [75] **Гринберг Я. С.** Влияние релаксации кубита на транспортные свойства микроволновых фотонов / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов // Нанозфизика и Нанозлектроника : тр. 21 междунар. симп., Нижний Новгород, 13–16 марта 2017 г. : в 2-х т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2017. – Т. 1. – С. 57-58. - ISBN 978-5-91326-371-1.
- [76] **Sultanov A. N.** Mollow triplet: pump probe single photon spectroscopy of artificial atoms / A. N. Sultanov, Y. S. Greenberg // International conference on quantum coherent phenomena at nanoscale : [progr. and] abstr., Montenegro, Petrovac, 4–9 Sept. 2016. – Petrovac, 2016. – P. 13.
- [77] **Султанов А. Н.** Исследование микроволнового транспорта в твердотельной гибридной структуре кубит-резонатор / А. Н. Султанов, Д. С. Карпов, Я. С. Гринберг, С. Н. Шевченко // Нанозфизика и нанозлектроника : материалы 20 междунар. симп., Нижний Новгород, 14–18 марта 2016 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2016. – Том 1. – С. 128–129. - 250 экз. - ISBN 978-5-91326-378-0.
- [78] **Иванов Б. И.** Двухчастотная спектроскопия сверхпроводникового потокового кубита в квазидисперсионном режиме / Б. И. Иванов, И. Л. Новиков, А. Н. Султанов, Я. С. Гринберг, А. В. Кривецкий, А. Г. Вострецов, Е. В. Ильичев // Нанозфизика и нанозлектроника : материалы 20 междунар. симп., Нижний Новгород, 14–18 марта 2016 г. В 2 т. – Нижний Новгород : Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2016. – Том 1. – С. 48–49. - 250 экз. - ISBN 978-5-91326-378-0
- [79] **Majer J.** Coupling superconducting qubits via a cavity bus/ Majer J., Chow J. M., Gambetta J. M., Koch J., Johnson B. R., Schreier J. A., Frunzio L., Schuster D. I., Houck A. A., Wallraff A., Blais A., Devoret M. H., Girvin S. M., Schoelkopf R. J. // Nature– 2007 – V. 449 – pp. 443-447.
- [80] **Shi X.** Robust quantum state transfer inspired by Dzyaloshinskii-Moriya interactions/ Shi X., Yuan X., Mao X., Ma Y., Zhao H. Q. // Phys. Rev. A– 2017 – V. 95 – Art. 052332.
- [81] **Rosa A.** Microwave index engineering for slow-wave coplanar waveguides/ Rosa A., Verstuylt S., Brimont A., van Thourhout D., Sanchis P. // Sci. Rep. – 2018 V. 8 – Art. 5672.
- [82] **Reiter F.** Steady-state entanglement of two superconducting qubits engineered by dissipation/ Reiter F., Tornberg L., Johansson G., Sorensen A. // Phys. Rev. A – 2013 V. 88 – Art. 032317.
- [83] **Rodriguez-Briones N. A.** Heat-bath algorithmic cooling with correlated qubit-environment interactions/ Rodriguez-Briones N. A., Li J., Peng X., Mor T., Weinstein Y., Laflamme R. // New J. Phys. – 2017 V. 19 – Art. 113047.
- [84] **Ma J.** Entanglement dynamics of two qubits in a common bath/ Ma J., Sun Z., Wang X., Nori F. // Phys. Rev. A – 2012 V. 85 – Art. 062323.
- [85] **Zhao X.** Dynamics of interacting qubits coupled to a common bath: Non-Markovian quantum-state-diffusion approach/ Zhao X., Jing J., Corn B., Yu T. // Phys. Rev. A– 2011 – V. 84 – Art. 032101.

- [86] **Braun D.** Creation of entanglement by interaction with a common heat bath/Braun D. // *Phys. Rev. Lett.* – 2002 – V.89 – N 27 – Art. 277901.
- [87] **Storz M. J.** Decoherence and gate performance of coupled solid-state qubits/ Storz M. J., Wilhelm F. K. // *Phys. Rev. A* – 2003 – V. 67 – Art.042319.
- [88] **Storz M. J.** Decoherence of a two-qubit system away from perfect symmetry/ Storz M. J., Hellmann F., Hrelescu C., Wilhelm F. K. // *Phys. Rev. A*– 2005 – V. 72 – Art. 052314.
- [89] **Vorrath T.** Dicke effect in the tunnel current through two double quantum dots/ Vorrath T., Brandes T. // *Phys. Rev. B* – 2003 – V. 68 – Art. 035309.
- [90] **Brandes T.** Spontaneous emission of phonons by coupled quantum dots/ Brandes T., Kramer B. // *Phys. Rev. Lett.* – 1999 – V. 83 – N 15 – Art. 3021.
- [91] **Султанов А. Н.** Перенос возбужденного состояния между двумя кубитами через открытый волновод / А. Н. Султанов, Я. С. Гринберг// *Физика низких температур.* – **2018.** – Т. 44, № 3. – С. 1–8.
- [92] **Султанов А. Н.** Рассеяние одиночного фотона на двухкубитной структуре с резонаторами = Scattering of a single photon on a two-qubit structure with resonators / А. Н. Султанов, Д. С. Карпов, Я. С. Гринберг, С. Н. Шевченко, А. А. Штыгашев // *Физика низких температур.* - **2017.** – Т. 43, № 7. – С. 1003–1010.
- [93] **Гринберг Я. С.** Влияние нерadiационного затухания кубитов в общий канал на транспорт микроволновых фотонов / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов // *Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики.* - 2017. - Т. 106, вып. 6. - С. 381-386. - DOI: 10.7868/S0370274X17180114.
- [94] **Greenberg Y. S.** Influence of qubit relaxation on the transport properties of microwave photons / Y. S. Greenberg, A. N. Sultanov // *IV международная конференция "Мезоскопические структуры в фундаментальных и прикладных исследованиях": сб. докл., Отель " Байкал", пос. Листвянка, 5-9 июля 2017 г.-Новосибирск, изд-во НГТУ, 2017, с. 49. - 50 copy - ISBN 978-5-7782-3273-0.*
- [95] **Greenberg Y. S.** The influence of nonradiative decay channels on the transport properties of microwave photons [Electronic resource] / Y. S. Greenberg, A. N. Sultanov. - **2017.** - 5 p. - (Electronic preprint / Cornell University, Library). – Mode of access: <https://arxiv.org/pdf/1706.08028.pdf>.
- [96] **Гринберг Я. С.** Исследование микроволнового транспорта в твердотельной гибридной структуре кубит- резонатор / Я. С. Гринберг, А. Н. Султанов, Д. С. Карпов // *16 Всероссийская школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (СПФКС–16) : тез. докл., Екатеринбург, 12–19 нояб. 2015 г. – Екатеринбург : ИФМ УрО РАН, 2015. – С. 217. - ISBN 2306-5494.*
- [97] **Sultanov A. N.** Transport properties of a microwave photon in a system with two artificial atoms / A. N. Sultanov, Y. S. Greenberg, D. S. Karpov, B. I. Ivanov, S. N. Shevchenko // *Актуальные*

- проблемы электронного приборостроения (АПЭП–2016) = Actual problems of electronic instrument engineering (APEIE–2016) : тр. 13 междунар. науч.-техн. конф., Новосибирск, 3–6 окт. 2016 г. : в 12 т. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2016. – Т. 2. - С. 38-41. - ISBN 978-5-7782-2991-4.
- [98] **Bell M. T.** Travelling wave parametric amplifier based on a chain of coupled asymmetric SQUIDs / Bell M. T., Samolov A. // *Phys. Rev. Appl.* – 2015 – N4 – Art. 024014.
- [99] **Abdo B.** Intermodulation and parametric amplification in a superconducting stripline resonator integrated with a dc-SQUID/ Abdo B., Suchoi O., Segev E., Shtempluck O., Blencowe M., Buks E. // *EPL* - 2009- N 85- Iss. 6.
- [100] **Spietz L.** Input impedance and gain of gigahertz amplifier using dc superconducting quantum interference device in quarter wavelength resonator/ Spietz L., Irwin K., Aumentado J. // *Appl. Phys. Lett.* – 2008 – V.93 – Art. 082506.
- [101] **Agrawal G. P.** Nonlinear fiber optics/ Agrawal G. P. – Kidlington: Oxford, Elsevier Inc. – 2013. – 629 p.
- [102] **Linzen S.** Structural and electrical properties of ultrathin niobium nitride films grown by atomic layer deposition/ Linzen S., Ziegler M., Astafiev O. V., Schmelz M., Hubner U., Diegel M., Il'ichev E., Meyer H.-G. // *Supercond. Sci. Tech*– 2017 – V. 30 – Art. 035010.
- [103] **Mutsenik E.A.** Design of superconducting side-coupled coplanar resonator/ Mutsenik E.A., Sultanov A.N., Ivanov B.I. // *Proceedings of the Russian higher school Academy of sciences* – 2017 –V. 34 – N 1 – pp. 85–97.
- [104] **Aghdam P. Y.** Specific capacitance dependence in the specific resistance in Nb/Al-AlO_x/Nb tunnel junctions/ Aghdam P. Y., Rashid H., Pavolotsky A., Desmaris V., Meledin D., Belitsky V.// *IEEE Trans. On Terahertz Sci. and Tech.* – 2017 – N 7 – iss.5.
- [105] **O`Connel A. D.** Microwave dielectric loss at single photon energies and millikelvin temperatures/ O`Connel A. D., Ansmann M., Bialczak R. C., Hofheinz M., Katz N., Lucero R., McKenney C., Neeley M., Wang H., Weig E. M., Cleland A. N., Martinis J. M. // *Appl. Phys. Lett.* – 2008 – V. 92 – Art. 112903.
- [106] The Y-Factor technique for noise figure measurements»/ Leffel M., Daniel R. // Режим доступа: https://www.rohde-schwarz.com/us/applications/the-y-factor-technique-for-noise-figure-measurements-application-note_56280-15484.html.

Приложение А

Формулы коэффициентов прохождения и отражения

Амплитуды вероятности из (2.38) определяются следующими выражениями:

$$t_{11} = \frac{1}{4\Omega_R^{N-1} \text{Det}(E_1)} \left[\frac{N(\Omega_R^{N-1} + \Delta)(2\delta + \Delta + \Omega_R^{N-1}) + (N-1)(\Omega_R^{N-1} - \Delta)(2\delta - \Delta + \Omega_R^{N-1})}{+4jN(N-1)\Omega_R^{N-1}\Gamma + 8\lambda^2 N(N-1)} \right] \quad (\text{A1})$$

$$t_{21} = -\frac{\lambda\sqrt{N-1}}{4\Omega_R^{N-1} \text{Det}(E_1)} (2\delta + \Omega_R^{N-1} - \Delta) \quad (\text{A2})$$

$$t_{22} = \frac{1}{4\Omega_R^{N-1} \text{Det}(E_2)} \left[\frac{N(\Omega_R^{N-1} - \Delta)(2\delta + \Delta - \Omega_R^{N-1}) + (N-1)(\Omega_R^{N-1} + \Delta)(2\delta - \Delta - \Omega_R^{N-1})}{+4jN(N-1)\Omega_R^{N-1}\Gamma - 8\lambda^2 N(N-1)} \right] \quad (\text{A3})$$

$$t_{12} = -\frac{\lambda\sqrt{N-1}}{4\Omega_R^{N-1} \text{Det}(E_2)} (2\delta - \Omega_R^{N-1} - \Delta) \quad (\text{A4})$$

где $\delta = \omega - \omega_c$ и $\Delta = \omega_c - \Omega$, а определители записаны в (2.27).

Комплексные коэффициенты прохождения T и отражения R в случае side-coupled резонатора определяются как:

Коэффициент прохождения	Коэффициент отражения
$T_{11} = 1 - j\Gamma t_{11}$	$R_{11} = -j\Gamma t_{11}$
$T_{22} = 1 - j\Gamma t_{22}$	$R_{22} = -j\Gamma t_{22}$
$T_{12} = -j\Gamma t_{12}$	$R_{12} = -j\Gamma t_{12}$
$T_{21} = -j\Gamma t_{21}$	$R_{21} = -j\Gamma t_{21}$

В случае перехода к direct-coupled, столбцы меняются местами.

Приложение Б

Вычисление матрицы эффективного гамильтониана и амплитуд перехода между подпространствами P и Q

Включение состояния описывающего термостат приводит к тому, что элемент H_{eff}^{EE} приобретает дополнительную мнимую часть:

$$H_{eff}^{EE} = \frac{1}{2} \hbar \Omega + \hbar \omega_c (N-1) - j \hbar (N-1) \Gamma - j \Gamma_q \quad (\text{Б1})$$

где $\Gamma_q = \frac{\gamma^2}{v_g} L_{bath}$.

В базисе гибридизированных внутренних состояний $|\chi_i\rangle$ диагональные элементы матрицы эффективного гамильтониана могут быть записаны как:

$$H_{eff}^{\chi_1 \chi_1} = \left(\begin{array}{l} \langle G | \hat{H}_{eff} | G \rangle |\alpha_1^N|^2 + \langle E | \hat{H}_{eff} | E \rangle |\beta_1^N|^2 \\ + \alpha_1^N \beta_1^{*N} \langle E | \hat{H}_{eff} | G \rangle + \alpha_1^{*N} \beta_1^N \langle G | \hat{H}_{eff} | E \rangle \end{array} \right) = -\frac{1}{2} \hbar \Omega \frac{\Delta}{\Omega_R^N} + \hbar (\omega_c - i \Gamma) \left(N - |\beta_1^N|^2 \right) - j \gamma_q |\beta_1^N|^2 + 2 \hbar \frac{\lambda^2}{\Omega_R^N} N \quad (\text{Б2})$$

$$H_{eff}^{\chi_2 \chi_2} = \left(-\frac{1}{2} \hbar \Omega \frac{\Delta}{\Omega_R^N} + \hbar (\omega_c - j \Gamma) \left(N - |\beta_2^N|^2 \right) - \gamma_q |\beta_2^N|^2 - 2 \hbar \frac{\lambda^2}{\Omega_R^N} N \right) \quad (\text{Б3})$$

Согласно различным представлениям эффективного гамильтониана (2.18) и (2.78), можно записать следующее соответствие неэрмитовых частей данного неэрмитового гамильтониана:

$$-j \frac{W_{\chi_1 \chi_1}^{K_G}}{2} = \frac{L}{2\pi} \int dk \langle \chi_1 | \hat{H}_{QP} | K_G \rangle \frac{1}{E - E_1(k) + i\varepsilon} \langle K_G | \hat{H}_{PQ} | \chi_1 \rangle = -j \frac{A_{\chi_1}^{K_G} A_{\chi_1}^{*K_G}}{2} - j \frac{A_{\chi_1}^{K_G} A_{\chi_1}^{*K_G}}{2} = -j \frac{\hbar L}{v_g} \alpha_1^N \alpha_1^{*N} \xi^2 N; \Rightarrow A_G^{\chi_1} = \alpha_1^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; A_G^{*\chi_1} = \alpha_1^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N};$$

где мы воспользовались тем, что $\langle K_G | \hat{H}_{PQ} | \chi_1 \rangle = \alpha_1^{*N} \hbar \xi \sqrt{N}$ и $\langle \chi_1 | \hat{H}_{QP} | K_G \rangle = \alpha_1^N \hbar \xi \sqrt{N}$

Аналогично находим, что $A_G^{\chi_2} = \alpha_2^N \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}; A_G^{*\chi_2} = \alpha_2^{*N} \xi \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L}{v_g}} \sqrt{N}$ и

$$A_{\chi_1}^{C_\gamma} = \beta_1^N \gamma \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L_{bath}}{v_g^{bath}}}; A_{\chi_1}^{*C_\gamma} = \beta_1^{*N} \gamma \sqrt{2} \sqrt{\frac{\hbar L_{bath}}{v_g^{bath}}}.$$

Приложение В

Расчет элементов K матрицы и матрицы T

Согласно введенному определению матрицы амплитуд переходов (2.78)- (2.80), мы определяем стандартные преобразования над ней:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{\chi_1}^{K_{G\gamma}} & A_{\chi_1}^{K_{E\gamma}} & A_{\chi_1}^{C_\gamma} \\ A_{\chi_2}^{K_{G\gamma}} & A_{\chi_2}^{K_{E\gamma}} & A_{\chi_2}^{C_\gamma} \end{pmatrix} \text{ и } \mathbf{A}^\dagger = \begin{pmatrix} A_{\chi_1}^{K_{G\gamma}} & A_{\chi_2}^{K_{G\gamma}} \\ A_{\chi_1}^{K_{E\gamma}} & A_{\chi_2}^{K_{E\gamma}} \\ A_{\chi_1}^{C_\gamma} & A_{\chi_2}^{C_\gamma} \end{pmatrix} \quad (\text{B1})$$

Пропагатор не содержит недиагональных элементов, так как внутренние состояния ($|\chi_i\rangle$) уже гибридизированные:

$$\mathbf{G}(E) = \begin{pmatrix} \frac{1}{E - E_{\chi_1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{E - E_{\chi_2}} \end{pmatrix}.$$

По определению (1.39) матрицу K можно записать следующим образом:

$$K_{ab} = \sum_i \langle a | \mathbf{A}^\dagger | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \mathbf{G}(E) | \chi_i \rangle \langle \chi_i | \mathbf{A} | b \rangle \quad (\text{B2})$$

здесь $a, b = K_G, K_E, K_C$.

Прямое вычисление по формуле (B2) дает нам следующие результаты:

$$K_{K_G K_G} = 2\Gamma N \left(\frac{|\alpha_1^N|^2}{E - E_{\chi_1}} + \frac{|\alpha_2^N|^2}{E - E_{\chi_2}} \right) \quad K_{K_E K_E} = 2\Gamma(N-1) \left(\frac{|\beta_1^N|^2}{E - E_{\chi_1}} + \frac{|\beta_2^N|^2}{E - E_{\chi_2}} \right);$$

$$K_{K_C K_C} = 2\Gamma_q \left(\frac{|\beta_1^N|^2}{E - E_{\chi_1}} + \frac{|\beta_2^N|^2}{E - E_{\chi_2}} \right); \quad K_{K_G K_C} = \sqrt{4\Gamma\Gamma_q} \sqrt{N} \left(\frac{\alpha_1^{*N} \beta_1^N}{E - E_{\chi_1}} + \frac{\alpha_2^{*N} \beta_2^N}{E - E_{\chi_2}} \right);$$

$$K_{K_E K_C} = \sqrt{4\Gamma\Gamma_q} \sqrt{N-1} \left(\frac{|\beta_1^N|^2}{E - E_{\chi_1}} + \frac{|\beta_2^N|^2}{E - E_{\chi_2}} \right); \quad K_{K_G K_E} = \alpha_1^N \beta_1^N 2\Gamma \sqrt{N(N-1)} \left(\frac{\alpha_1^{*N} \beta_1^N}{E - E_{\chi_1}} + \frac{\alpha_2^{*N} \beta_2^N}{E - E_{\chi_2}} \right)$$

Остальные элементы получаются путем комплексного сопряжения.

Поскольку энергию внутренних состояний $|\chi_i\rangle$ можно представить в виде,

$$E_{\chi_i} = E_0 - (-1)^i \Delta E, \text{ где } E_0 = \hbar\omega_c N - \hbar\frac{\omega_c}{2}; \Delta E = \frac{\Omega_R^N}{2}, \text{ то вводя расстройку } \delta_E = E - E_0 \text{ и}$$

учитывая свойства (2.16) полученные матричные элементы можно упростить до

$$\begin{aligned}
K_{K_G K_G} &= 2\Gamma N Y_1; K_{K_E K_E} = 2\Gamma(N-1)Y_2; \\
K_{CC} &= 2\Gamma_q Y_2; K_{K_G C} = \sqrt{4\Gamma\Gamma_q} \sqrt{N} Y_3; \\
K_{K_E C} &= \sqrt{4\Gamma\Gamma_q} \sqrt{N-1} Y_2; K_{K_G K_E} = 2\Gamma \sqrt{N(N-1)} Y_3
\end{aligned} \tag{B3}$$

$$\text{где } Y_1 = \frac{\delta_E + \frac{\omega_C - \Omega}{2}}{\delta_E^2 - \Delta E^2}; Y_2 = \frac{\delta_E - \frac{\omega_C - \Omega}{2}}{\delta_E^2 - \Delta E^2}; Y_3 = \frac{\lambda \sqrt{N}}{\delta_E^2 - \Delta E^2};$$

Введенные величины Y_i обладают следующим свойством:

$$Y_1 Y_2 - Y_3^2 = \frac{1}{\delta^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2};$$

Обратную матрицу $\left[1 + \frac{j}{2} K(E)\right]^{-1}$ считаем классическим способом согласно определению обратной матрицы:

$$\left[1 + \frac{j}{2} K(E)\right]^{-1} = \frac{1}{\text{Det}_2} \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{pmatrix} \tag{B4}$$

где

$$\text{Det}_2 = \frac{j}{2} (K_{EE} + K_{GG} + K_{CC}) + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} K_{GC}^2 - K_{CC} K_{GG} + K_{GE}^2 \\ -K_{EE} K_{GG} \\ +K_{EC}^2 - K_{CC} K_{EE} \end{pmatrix} + \frac{j}{8} \begin{pmatrix} K_{EE} (K_{GC}^2 - K_{CC} K_{GG}) \\ +K_{EC} (K_{GG} K_{EC} - K_{GC} K_{GE}) \\ +K_{GE} (K_{CC} K_{GE} - K_{EC} K_{GC}) \end{pmatrix} + 1 \tag{B5}$$

и элементы обратной матрицы равны:

$$\begin{aligned}
I_{11} &= 1 + \frac{j}{2} (K_{CC} + K_{EE}) + \frac{1}{4} (K_{EC}^2 - K_{CC} K_{EE}); I_{21} = -\frac{j}{2} K_{GE} + \frac{1}{4} (K_{CC} K_{GE} - K_{EC} K_{GE}); \\
I_{31} &= -\frac{j}{2} K_{GC} + \frac{1}{4} (K_{EE} K_{GC} - K_{EC} K_{GE}); I_{22} = 1 + \frac{j}{2} (K_{GG} + K_{CC}) + \frac{1}{4} (K_{GC}^2 - K_{CC} K_{GG}); \\
I_{32} &= -\frac{j}{2} K_{EC} + \frac{1}{4} (K_{EC} K_{GG} - K_{GC} K_{GE}); I_{33} = 1 + \frac{j}{2} (K_{GG} + K_{EE}) + \frac{1}{4} (K_{GE}^2 - K_{GG} K_{EE});
\end{aligned}$$

Теперь можно определить следующие полезные соотношения между элементами матрицы K :

$$\begin{aligned}
K_{GC}^2 - K_{CC} K_{GG} &= 4\Gamma\Gamma_q N (Y_3^2 - Y_2 Y_1); K_{GE}^2 - K_{EE} K_{GG} = 4\Gamma^2 N (N-1) (Y_3^2 - Y_1 Y_2); \\
K_{EC}^2 - K_{CC} K_{EE} &= 0; \\
K_{GG} K_{EC} - K_{GC} K_{GE} &= 2\Gamma \sqrt{4\Gamma\Gamma_q} N \sqrt{N-1} (Y_1 Y_2 - Y_3^2); \\
K_{CC} K_{GE} - K_{EC} K_{GC} &= 0;
\end{aligned} \tag{B6}$$

что позволяет упростить выражения для определителя до следующего вида:

$$Det_2 = \frac{1}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2} \left(\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2 + \delta_E j(\Gamma(2N-1) + \Gamma_q) - \frac{\Delta}{2} j(\Gamma_q - \Gamma) - \Gamma N(\Gamma_q + \Gamma(N-1)) \right) \quad (B7)$$

А также получить выражения для элементов обратной матрицы:

$$\begin{aligned} I_{11} &= 1 + jY_2(\Gamma_q + \Gamma(N-1)); I_{12} = -j\Gamma\sqrt{N(N-1)}Y_3; I_{13} = -j\sqrt{\Gamma\Gamma_q}\sqrt{N}Y_3; \\ I_{22} &= 1 + j(\Gamma NY_1 + \Gamma_q Y_2) - \frac{\Gamma\Gamma_q N}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2}; I_{32} = \sqrt{\Gamma\Gamma_q}\sqrt{N-1} \left(-jY_2 + \frac{\Gamma N}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2} \right); \\ I_{33} &= 1 + \frac{j}{2}(2\Gamma NY_1 + 2\Gamma(N-1)Y_2) - \frac{\Gamma^2 N(N-1)}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2}; \end{aligned} \quad (B8)$$

Поскольку все необходимые элементы определены, то матрицу T можно представить как:

$$\langle K_G | T | K_G \rangle = \frac{2\Gamma N \left(\delta_E + \frac{\Delta}{2} + j(\Gamma_q + \Gamma(N-1)) \right)}{\left(\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2 + \delta_E j(\Gamma(2N-1) + \Gamma_q) - \frac{\Delta}{2} j(\Gamma_q - \Gamma) - \Gamma N(\Gamma_q + \Gamma(N-1)) \right)} \quad (B9)$$

$$\langle K_E | T | K_E \rangle = \frac{2\Gamma(N-1) \left(\delta_E - \frac{\Delta}{2} + j\Gamma N \right)}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2 + \delta_E j(\Gamma(2N-1) + \Gamma_q) - \frac{\Delta}{2} j(\Gamma_q - \Gamma) - \Gamma N(\Gamma_q + \Gamma(N-1))} \quad (B10)$$

$$\langle C_\gamma | T | C_\gamma \rangle = \frac{2\Gamma_q \left(\delta_E - \frac{\Delta}{2} + j\Gamma N \right)}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2 + \delta_E j(\Gamma(2N-1) + \Gamma_q) - \frac{\Delta}{2} j(\Gamma_q - \Gamma) - \Gamma N(\Gamma_q + \Gamma(N-1))}; \quad (B11)$$

$$\langle K_G | T | K_E \rangle = 2\Gamma\sqrt{N(N-1)}Y_3; \langle K_G | T | C \rangle = 2\sqrt{\Gamma\Gamma_q}\sqrt{N}Y_3; \quad (B12)$$

$$\langle K_E | T | C \rangle = 2\sqrt{\Gamma\Gamma_q}\sqrt{N-1} \left(\frac{j\Gamma N}{\delta_E^2 - \left(\frac{\Omega_R^N}{2}\right)^2} + Y_2 \right); \quad (\text{B13})$$

Приложение Г

Решение системы уравнений для матрицы плотности

После замены (3.52) систему (3.46) можно переписать как:

$$\frac{d\rho_+}{dt} = \rho_+ 2 \operatorname{Im} B;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho_-}{dt} - \rho_- 2 \operatorname{Im} B = 2(-j\rho_2 \operatorname{Re} D + \rho_1 \operatorname{Im} D); \quad (1) \\ \frac{d\rho_1}{dt} = 2\rho_1 (\operatorname{Im} B + \alpha_\phi) - 2 \operatorname{Im} D \rho_-; \quad (2) \\ \frac{d\rho_2}{dt} = 2\rho_2 (\operatorname{Im} B + \alpha_\phi) - j2 \operatorname{Re} D \rho_-; \quad (3) \end{array} \right. \quad (\Gamma 1)$$

Откуда можно получить решение $\rho_+ = C_+ e^{2 \operatorname{Im} B t}$, а для оставшихся элементов продельвается следующее:

1. Берем производную от уравнения (1)
2. Подставляем в получившееся уравнение второго порядка получившиеся

производные $\frac{d\rho_1}{dt}$ и $\frac{d\rho_2}{dt}$ из уравнений (2) и (3)

3. Группируем так, чтобы получить член $2(-j\rho_2 \operatorname{Re} D + \rho_1 \operatorname{Im} D)$
4. Заменяем найденный член выражением из (1)

В итоге получается уравнение второго порядка для ρ_- :

$$\frac{d^2 \rho_-}{dt^2} - \frac{d\rho_-}{dt} (4 \operatorname{Im} B + 4\alpha_\phi) + \rho_- 4 (\operatorname{Im} B (\operatorname{Im} B + 2\alpha_\phi) + |D|^2) = 0; \quad (\Gamma 2)$$

решение которого есть

$$\rho_- = C_{1-} e^{\lambda_1 t} + C_{2-} e^{\lambda_2 t}; \quad (\Gamma 3)$$

где $\lambda_{1,2} = 2 \operatorname{Im} B + 2\alpha_\phi \pm 2\sqrt{\alpha_\phi^2 - |D|^2}$.

Далее можно подставить найденное решение (Г3) в уравнения (2) и (3) из (Г1) и увидим, что общее решение для $\rho_i(t) = C_i(t) e^{2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)t}$ имеет вид, при котором коэффициенты зависят от времени. Экспонента получается из частного решения, когда из уравнения исключается переменный свободный член. Подставляя $\rho_i(t)$ в соответствующие уравнения, получаем уравнения для коэффициентов $C_i(t)$ и решения которых имеют вид:

$$C_1(t) = -2 \operatorname{Im} D \left(\frac{C_{1-} e^{(\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi))t}}{\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-} e^{(\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi))t}}{\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_1^0; \quad (\Gamma 4)$$

$$C_2(t) = -j 2 \operatorname{Re} D \left(\frac{C_{1-} e^{(\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi))t}}{\lambda_1 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-} e^{(\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi))t}}{\lambda_2 - 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_2^0; \quad (\Gamma 5)$$

Переходим к решению системы (3.47) стандартным способом решая системы двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \rho_{13}(t) &= C_{13}^{0+} e^{\lambda_3 t} + C_{13}^{0-} e^{\lambda_4 t}; \\ \rho_{14}(t) &= -\frac{|D|}{D^*} (C_{13}^{0+} e^{\lambda_3 t} - C_{13}^{0-} e^{\lambda_4 t}); \\ \rho_{31}(t) &= C_{31}^{0+} e^{\lambda_5 t} + C_{31}^{0-} e^{\lambda_6 t}; \\ \rho_{41}(t) &= \frac{|D|}{D} (C_{31}^{0+} e^{\lambda_5 t} - C_{31}^{0-} e^{\lambda_6 t}); \end{aligned} \quad (\Gamma 6)$$

где $\lambda_{3,4} = 2(\operatorname{Im} B + \alpha_\phi) + jB^* \pm j|D|$; и.

Аналогичным образом можно получить решения системы (3.48) и (3.49):

$$\begin{aligned} \rho_{12}(t) &= C_{12}^0 e^{2(jB^* + \alpha_\phi)t}; \\ \rho_{21}(t) &= C_{21}^0 e^{2(-jB + \alpha_\phi)t}; \\ \rho_{23}(t) &= C_{23}^{0+} e^{\lambda_7 t} + C_{23}^{0-} e^{\lambda_8 t}; \\ \rho_{24}(t) &= \frac{|D|}{D^*} (-C_{23}^{0+} e^{\lambda_7 t} + C_{23}^{0-} e^{\lambda_8 t}); \\ \rho_{32}(t) &= C_{32}^{0+} e^{\lambda_9 t} + C_{32}^{0-} e^{\lambda_{10} t}; \\ \rho_{42}(t) &= \frac{|D|}{D} (C_{32}^{0+} e^{\lambda_9 t} - C_{32}^{0-} e^{\lambda_{10} t}); \end{aligned} \quad (\Gamma 8)$$

где .

Таким образом, найдены все общие решения для матрицы плотности, которые для удобства продублированы здесь:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho_{11}(t) = C_{11}^0 e^{2\text{Im}(B+C)t}; \\
\rho_{22}(t) = C_{22}^0; \\
\rho_+(t) = C_+ e^{2\text{Im}B \cdot t}; \\
\rho_-(t) = C_{1-} e^{\lambda_1 t} + C_{2-} e^{\lambda_2 t}; \\
\rho_1(t) = -2\text{Im} D \left(\frac{C_{1-} e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - 2(\text{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-} e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - 2(\text{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_1^0 e^{2(\text{Im} B + \alpha_\phi)t}; \\
\rho_2(t) = -j2\text{Re} D \left(\frac{C_{1-} e^{\lambda_1 t}}{\lambda_1 - 2(\text{Im} B + \alpha_\phi)} + \frac{C_{2-} e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - 2(\text{Im} B + \alpha_\phi)} \right) + C_2^0 e^{2(\text{Im} B + \alpha_\phi)t}; \\
\rho_{13}(t) = C_{13}^{0+} e^{\lambda_3 t} + C_{13}^{0-} e^{\lambda_4 t}; \\
\rho_{14}(t) = -\frac{|D|}{D^*} (C_{13}^{0+} e^{\lambda_3 t} - C_{13}^{0-} e^{\lambda_4 t}); \\
\rho_{31}(t) = C_{13}^{*0+} e^{\lambda_5 t} + C_{13}^{*0-} e^{\lambda_6 t}; \\
\rho_{41}(t) = \frac{|D|}{D} (C_{13}^{*0+} e^{\lambda_5 t} - C_{13}^{*0-} e^{\lambda_6 t}); \\
\rho_{12}(t) = C_{12}^0 e^{2(jB^* + \alpha_\phi)t}; \\
\rho_{21}(t) = C_{12}^{*0} e^{2(-jB + \alpha_\phi)t}; \\
\rho_{23}(t) = C_{23}^{0+} e^{\lambda_7 t} + C_{23}^{0-} e^{\lambda_8 t}; \\
\rho_{24}(t) = \frac{|D|}{D^*} (-C_{23}^{0+} e^{\lambda_7 t} + C_{23}^{0-} e^{\lambda_8 t}); \\
\rho_{32}(t) = C_{23}^{*0+} e^{\lambda_9 t} + C_{23}^{*0-} e^{\lambda_{10} t}; \\
\rho_{42}(t) = \frac{|D|}{D} (C_{23}^{*0+} e^{\lambda_9 t} - C_{23}^{*0-} e^{\lambda_{10} t});
\end{array} \right.$$