

УДК 539.3

КОНТИНУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ КОМПОЗИТНЫХ СЕТЧАТЫХ ОБОЛОЧЕК, ОБРАЗОВАННЫХ СИСТЕМОЙ СПИРАЛЬНЫХ РЕБЕР

(поступила в редакцию 25.08.2015, принята в печать 23.09.2015)

Азаров А.В.

Сколковский институт науки и технологий, Россия

Статья посвящена анализу композитных сетчатых оболочек, образованных системами спиральных ребер. Рассмотрено деформирование ячейки сетчатой оболочки, состоящей из спиральных ребер, при растяжении и сдвиге и определены коэффициенты жесткости сетчатой структуры, которые могут быть использованы при расчете сетчатых оболочек на основе континуальной модели. Проведено сравнение полученных результатов с результатами конечно-элементного анализа и эксперимента. Обсуждаются возможные практические приложения композитных сетчатых конструкций, состоящих из композитных спиральных ребер.

Ключевые слова: сетчатые конструкции, композитные материалы, оболочки, континуальная модель.

CONTINUUM MODEL OF COMPOSITE LATTICE SHELLS FORMED BY HELICAL RIBS

Azarov A.V.

Skolkovo Institute of Science and Technology, Russia

The paper is concerned with the analysis of composite lattice structures consisting of systems of helical ribs. Deformation of the lattice cell formed by helical ribs under tension and shear is studied to specify the stiffness coefficients of the lattice structure which can be used to analyze lattice shells by using a continuum model. The obtained solutions are compared with results of the finite-element analysis and experimental data. Possible practical applications of composite lattice structures formed by systems of helical ribs are discussed.

Keywords: lattice structures, composite materials, shells, continuum model

1. Введение

Сетчатые композитные конструкции представляют собой оболочки из системы однонаправленных ребер, которые изготавливаются методом непрерывной автоматической намотки. Они обладают высокой удельной прочностью и жесткостью и в настоящее время широко применяются в ракетной и космической технике [1,2]. На Рис. 1 показана сетчатая конструкция корпуса космического аппарата.

При расчете и проектировании сетчатых конструкций в настоящее время используются два основных подхода – дискретный и континуальный. В дискретной модели сетчатая оболочка рассматривается как система ребер. Эта система рассчитывается методом конечных элементов, при этом ребра могут моделироваться балочными или плоскими элементами. Недостатком дискретных моделей является сложность их построения. В связи с этим использование таких моделей на начальном этапе проектирования конструкции нецелесообразно. Поэтому в настоящее время для проектирования сетчатых конструкций используется, как правило, континуальные модели, рассматриваемые в работах [3-5], а дискретная модель применяется для поверочного расчета. Сравнение дискретной и континуальной моделей сетчатых конструкций представлено в работе [6].

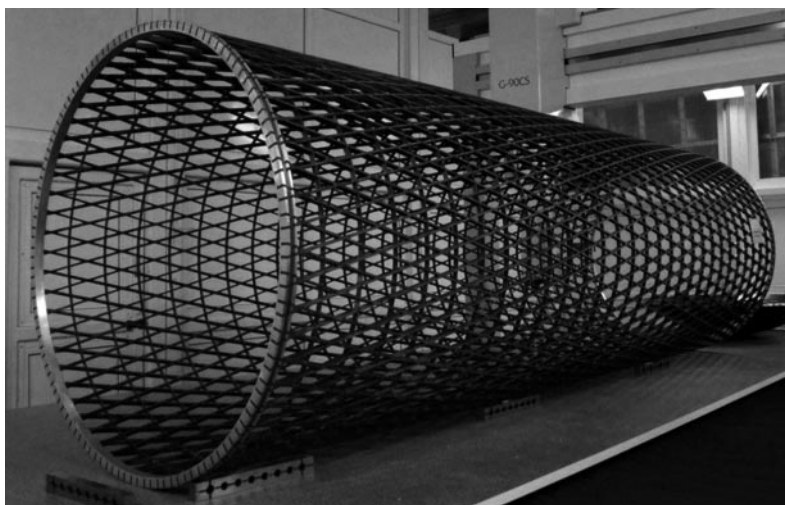


Рис. 1. Композитная сетчатая конструкция
Composite lattice structure

Традиционная сетчатая конструкция, спроектированная и рассчитанная на восприятие внешних нагрузок, состоит из систем спиральных, кольцевых и (или) продольных ребер (Рис. 1), обеспечивающих высокую прочность и жесткость конструкции при действии произвольных внешних нагрузок. В настоящей работе исследуется частная сетчатая структура, состоящая только из спиральных ребер, которая практически не используется при проектировании несущих сетчатых конструкций. Такая структура обладает специфическими свойствами и рекомендуется для специальных приложений, которые обсуждаются ниже.

2. Континуальная модель сетчатой конструкции

Континуальная модель предполагает, что ребра осредняются (размазываются) по поверхности и оболочка рассматривается как условно однородная. Усилия и моменты, действующие в оболочке, связаны с деформациями следующим образом:

$$\begin{aligned}
 N_{\alpha} &= B_{11}\varepsilon_{\alpha} + B_{12}\varepsilon_{\beta}, \quad M_{\alpha} = D_{11}\kappa_{\alpha} + D_{12}\kappa_{\beta}, \\
 N_{\beta} &= B_{21}\varepsilon_{\alpha} + B_{22}\varepsilon_{\beta}, \quad M_{\beta} = D_{21}\kappa_{\alpha} + D_{22}\kappa_{\beta}, \\
 N_{\alpha\beta} &= N_{\beta\alpha} = B_{33}\gamma_{\alpha\beta}, \quad M_{\alpha\beta} = M_{\beta\alpha} = D_{33}\chi_{\alpha\beta}, \\
 Q_{\alpha} &= C_{11}\psi_{\alpha}, \quad Q_{\beta} = C_{22}\psi_{\beta}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ε_{α} , ε_{β} , $\gamma_{\alpha\beta}$ - деформации срединной поверхности; κ_{α} , κ_{β} , $\chi_{\alpha\beta}$ - изгибные деформации оболочки; ψ_{α} , ψ_{β} - деформации поперечного сдвига; B_{mn} , C_{mn} , D_{mn} - коэффициенты жесткости, зависящие от параметров сетчатой структуры. Сетчатая структура может включать в себя спиральные, продольные и кольцевые ребра. Для наиболее распространенной сетчатой структуры, состоящей из спиральных и кольцевых ребер (Рис. 2), традиционные коэффициенты жесткости, входящие в выражения (1), имеют вид

$$B_{11} = 2 \frac{B_h}{a_h} c^4, \quad B_{12} = B_{21} = B_{33} = 2 \frac{B_h}{a_h} s^2 c^2$$

$$B_{22} = 2 \frac{B_h}{a_h} s^4 + \frac{B_c}{a_c}, \quad D_{mn} = \frac{h^2}{12} B_{mn} \quad (mn = 11, 12, 22, 33), \quad (2)$$

$$C_{11} = 2 \frac{C_h}{a_h} c^2, \quad C_{22} = 2 \frac{C_h}{a_h} s^2 + \frac{C_c}{a_c},$$

где

$$B_h = \delta_h h E_h, \quad B_c = \delta_c h E_c, \quad (3)$$

$$C_h = \delta_h h G_h, \quad C_c = \delta_c h G_c,$$

– жесткости спиральных и кольцевых ребер при растяжении-сжатии и сдвиге, $s = \sin \phi$, $c = \cos \phi$, ϕ – угол наклона спиральных ребер к образующей; h – толщина сетчатой структуры (высота ребер), δ_h , δ_c – ширина спиральных и кольцевых ребер; a_h , a_c – расстояния между спиральными и кольцевыми ребрами; E и G – модули упругости и сдвига ребер.

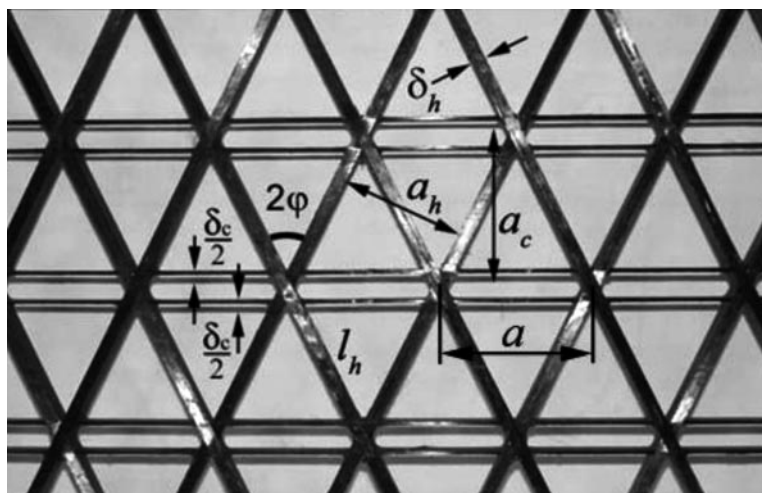


Рис. 2. Параметры сетчатой структуры, состоящей из спиральных и кольцевых ребер
Parameters of the lattice structure consisting of helical and hoop ribs

В выражения для коэффициентов жесткости сетчатой структуры (2) входят отношения жесткостей ребер к расстояниям между ними (Рис. 2). Расстояния между ребрами зависят от диаметра оболочки D , числа пар спиральных ребер n_h и угла наклона ребер и определяются следующими выражениями:

$$a = \frac{\pi D}{n_h}, \quad a_h = a \cos \phi, \quad a_c = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \phi, \quad l_h = \frac{a}{2 \sin \phi}, \quad (4)$$

где a – расстояние между точками пересечения симметричных спиральных ребер по окружности сечения оболочки (Рис. 2).

Традиционная континуальная модель является приближенной и обладает рядом недостатков. В частности, она не учитывает местный изгиб ребер. В связи с тем, что в выражения для коэффициентов жесткости (2) входят только отношения жесткостей ребер к расстояниям между ними, конструкции, которые имеют

различное число спиральных ребер при одинаковых относительных толщинах ребер являются в рамках континуальной модели эквивалентными [6].

В результате, традиционная континуальная модель не позволяет описать сетчатую конструкцию, состоящую только из спиральных ребер. Рассмотрим осевое сжатие цилиндрической сетчатой оболочки, состоящей из симметричных спиральных ребер, расположенных под углами $\pm\phi$ к образующей. Для осевого сжатия усилиями N_α из выражений (1), связывающих усилия в оболочке с деформациями получим

$$N_\alpha = B_\alpha \varepsilon_\alpha .$$

Здесь коэффициент жесткости B_α определяется равенством

$$B_\alpha = B_{11} - \frac{B_{12}^2}{B_{22}} . \quad (5)$$

Для оболочки, которая состоит только из спиральных ребер, коэффициенты жесткости B_{mn} (2) имеют следующий вид:

$$B_{11} = 2 \frac{B_h}{a_h} c^4 , \quad B_{12} = B_{21} = B_{33} = 2 \frac{B_h}{a_h} s^2 c^2 , \quad B_{22} = 2 \frac{B_h}{a_h} s^4 . \quad (6)$$

Подставив эти коэффициенты в равенство (5), получим $B_\alpha = 0$, т.е. система, состоящая только из спиральных ребер, теоретически имеет нулевую осевую жесткость, что не соответствует действительности. Для определения действительной жесткости такой оболочки, необходимо учесть местный изгиб спиральных ребер и соответственно уточнить выражения для коэффициентов жесткости (6).

3. Жесткость сетчатой структуры, образованной спиральными ребрами, при растяжении и сжатии

Рассмотрим ячейку сетчатой структуры, состоящей из спиральных ребер, показанную на Рис. 3. Используя континуальную модель структуры, введем средние растягивающие усилия N_α и N_β и соответствующие средние деформации ячейки ε_α и ε_β . Перемещения точки 1, показанные на Рис. 4а, связаны с деформациями ячейки следующим образом

$$u_\alpha^1 = \varepsilon_\alpha l_h \cos \phi , \quad u_\beta^1 = \varepsilon_\beta l_h \cos \phi . \quad (7)$$

Перемещения вдоль и поперек ребра связаны с перемещениями в направлении осей α и β соотношениями

$$u_s^1 = u_\alpha^1 \cos \phi + u_\beta^1 \sin \phi , \quad u_n^1 = u_\beta^1 \cos \phi + u_\alpha^1 \sin \phi . \quad (8)$$

Отсюда

$$u_\alpha^1 = u_s^1 \sin \phi + u_n^1 \cos \phi , \quad u_\beta^1 = u_s^1 \cos \phi - u_n^1 \sin \phi . \quad (9)$$

Подставив перемещения (7) в выражения (8), получим

$$u_s^1 = \varepsilon_\alpha l_h \cos^2 \phi + \varepsilon_\beta l_h \sin^2 \phi, \quad u_n^1 = l_h (\varepsilon_\beta - \varepsilon_\alpha) \sin \phi \cos \phi. \quad (10)$$

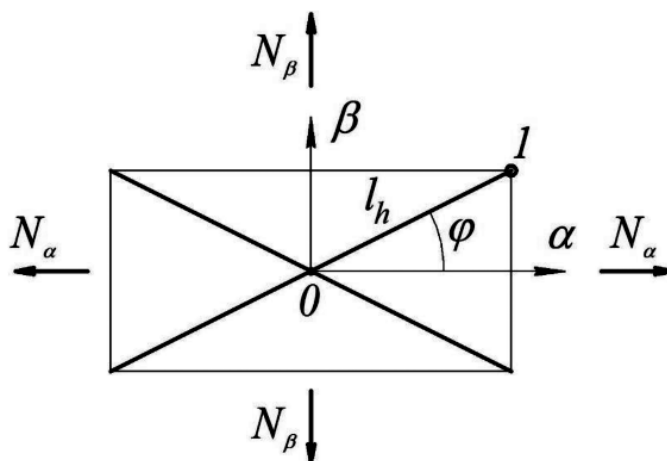


Рис. 3. Ячейка сетчатой структуры, состоящей из спиральных ребер
Element of a lattice structure consisting of helical ribs

При деформировании в ребре возникают осевая сила P , перерезывающая сила Q и изгибающий момент M , которые распределяются по длине элемента ребра следующим образом (Рис. 4б):

$$P(s) = P_0, \quad Q(s) = Q_0, \quad M(s) = M_0 + Q_0 s. \quad (11)$$

Здесь s - координата точки ребра, отсчитываемая от начала координат O (Рис. 4), а величины с индексом «0» соответствуют начальному сечению элемента ребра $s = 0$.

Перемещения точек ребра и угол поворота его сечения определяются следующими соотношениями:

$$\frac{du_s}{ds} = \frac{P}{B_h}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{D_h}, \quad \frac{du_n}{ds} = -\theta, \quad (12)$$

Здесь $B_h = E_h h \delta_h$ - осевая жесткость ребра, и D_h - изгибная жесткость ребра в плоскости сетчатой структуры, определяемая равенством

$$D_h = \frac{h \delta_h^3}{12} E_h = \frac{\delta_h^2}{12} B_h. \quad (13)$$

Проинтегрировав выражения (12) с учетом равенств (11) и граничных условий $u_s(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ и $u_n(0) = 0$, следующих из условия симметрии структуры, получим

$$u_s = \frac{P_0}{B_h} s, \quad \theta = \frac{1}{D_h} \left(Q_0 \frac{s^2}{2} + M_0 s \right), \quad u_n = -\frac{1}{D_h} \left(\frac{Q_0 s^3}{6} + \frac{M_0 s^2}{2} \right). \quad (14)$$

Подставив в выражения (11) и (14) $s = l$, определим силы, действующие в точке 1 (Рис. 3)

$$P_1 = P_0, \quad Q_1 = Q_0, \quad M_1 = M_0 + Q_0 l_h, \quad (15)$$

и перемещения точки 1

$$u_s^1 = \frac{P_0}{B_h} l_h, \quad \theta^1 = \frac{1}{D_h} \left(Q_0 \frac{l_h^2}{2} + M_0 l_h \right), \quad u_n^1 = -\frac{1}{D_h} \left(\frac{Q_0 l_h^3}{6} + \frac{M_0 l_h^2}{2} \right). \quad (16)$$

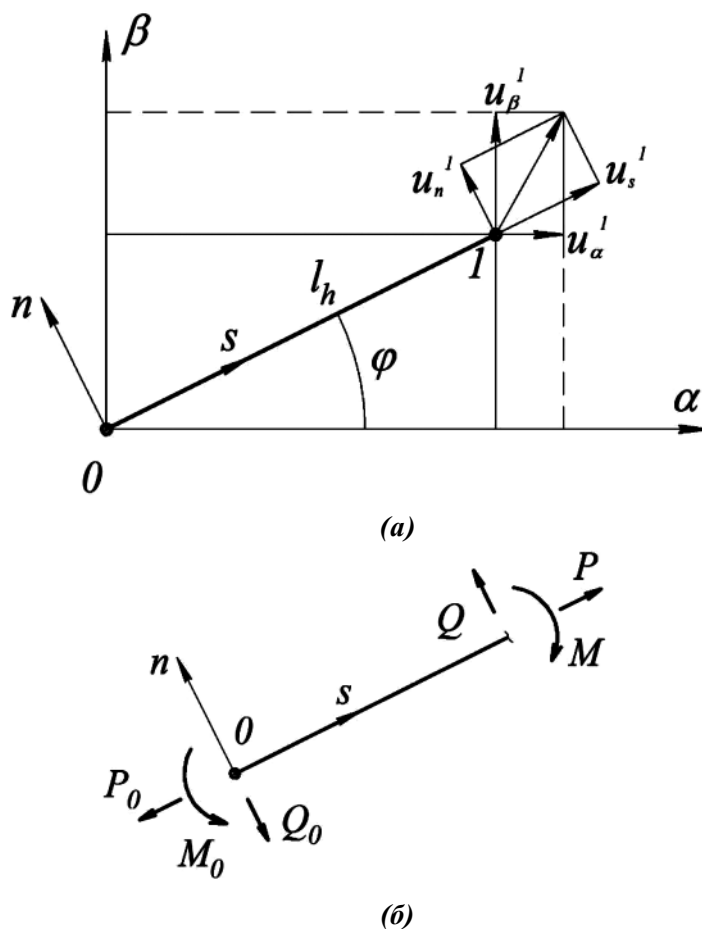


Рис. 4. Перемещения элемента спирального ребра (а) и действующие в нем силы и моменты (б)
Displacements (a) and forces and moments (б) of an element of the helical rib

Из условия симметрии и периодичности сетчатой структуры $\theta^1 = 0$. Тогда

$$M_0 = -\frac{Q_0 l_h}{2}. \quad (17)$$

Подставив выражение (17) в равенства (16) и выразив из них силы, действующие в точке 0, получим

следующие выражения для сил, действующих в точке 1:

$$P_1 = \frac{B_h}{l_h} u_s^1, \quad Q_1 = \frac{12D_h}{l_h^3} u_n^1. \quad (18)$$

Зная силы, действующие на ребро в точке 1 можно найти средние усилия, действующие в стенке условно гладкой оболочки

$$\begin{aligned} N_\alpha l_h \sin \phi &= P_1 \cos \phi - Q_1 \sin \phi \\ N_\beta l_h \cos \phi &= P_1 \sin \phi - Q_1 \cos \phi \end{aligned} \quad (19)$$

Подставив перемещения (9) в равенства (18), а полученные выражения для сил в соотношения (19), после некоторых преобразований с учетом равенств (4) можно получить следующие соотношения упругости, связывающие средние усилия со средними деформациями структуры:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \tilde{B}_{11} \varepsilon_\alpha + \tilde{B}_{12} \varepsilon_\beta \\ N_\beta &= \tilde{B}_{12} \varepsilon_\alpha + \tilde{B}_{22} \varepsilon_\beta \end{aligned}$$

Входящие сюда коэффициенты жесткости структуры имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{11} &= \frac{2B_h}{a_h} (\cos^4 \phi + \lambda \sin^2 \phi \cos^2 \phi), \quad \tilde{B}_{12} = \frac{2B_h}{a_h} \sin^2 \phi \cos^2 \phi (1 - \lambda), \\ \tilde{B}_{22} &= \frac{2B_h}{a_h} (\sin^4 \phi + \lambda \sin^2 \phi \cos^2 \phi), \quad \lambda = \frac{12D_h}{B_h l_h^2} = \left(\frac{\delta_h}{l_h} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Если подставить коэффициенты жесткости \tilde{B}_{mn} (14) вместо коэффициентов B_{mn} (6) в выражение для осевой жесткости (5), получим следующее выражение для коэффициента осевой жесткости сетчатой структуры, состоящей из спиральных ребер:

$$B_\alpha = \frac{2B_h \lambda \sin^2 \phi \cos^2 \phi (1 + \lambda \sin^2 \phi \cos^2 \phi)}{a_h (\sin^4 \phi + \lambda \sin^2 \phi \cos^2 \phi)}. \quad (21)$$

Учитывая, что параметр λ (20) является малым по сравнению с единицей, выражение (21) можно записать в более простой приближенной форме. С учетом равенств (3) и (20) для B_h и λ окончательно получим

$$B_\alpha = 2E_h \frac{h \delta_h^3}{a_h l_h^2} \operatorname{ctg}^2 \phi. \quad (22)$$

В качестве примера рассмотрим сетчатую структуру со следующими параметрами: модуль упругости

ребер $E_h = 151$ ГПа; высота ребер $h = 3.6$ мм; ширина спиральных ребер $\delta_h = 2.55$ мм; расстояние между спиральными ребрами $a_h = 30,65$ мм; длина элемента спирального ребра $l_h = 49,6$ мм; угол наклона спиральных ребер $\varphi = 19.2^\circ$. Для такой сетчатой структуры параметр $\lambda = 0,00264$ и формулы (21) и (22) дают практически один и тот же результат $B_\alpha = 1,97$ МН/м.

Сравним полученный коэффициент осевой жесткости с результатом конечно-элементного расчета. Конечно-элементная модель сетчатой структуры с приведенными выше параметрами показана на рис. 5. Ребра сетчатой структуры моделировались балочными элементами, узлы пересечения ребер на правом торце закреплялись по всем степеням свободы, кроме поперечных перемещений. Нагрузка прикладывалась через жесткий элемент, соединяющий узлы пересечения ребер, расположенные на левом торце и обеспечивающий их совместное перемещение вдоль продольной оси. Продольные перемещения левого торца под действием силы $P = 100$ Н составили $\Delta = 0.199$ мм, что при длине фрагмента сетчатой структуры $L = 771.4$ мм и ширине $b = 195.6$ мм соответствует коэффициенту осевой жесткости $B_\alpha^{FE} = Pl / b\Delta = 1,98$ МН/м, что практически совпадает с результатом, следующим из формулы (22).

Для экспериментального подтверждения полученного результата были проведены испытания элемента сетчатой структуры с приведенными выше параметрами на сжатие (Рис. 6). Коэффициент осевой жесткости, определенный по результатам испытаний, составил $B_\alpha = 2,09$ МН/м. Полученное значение отличается от расчетного на 5.7%.

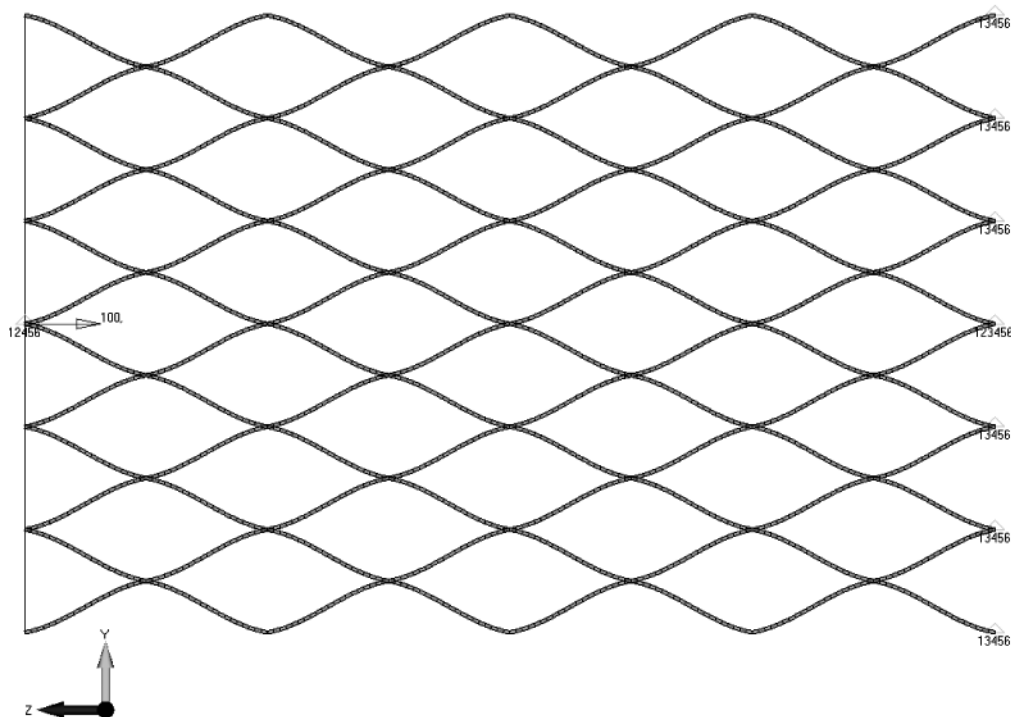


Рис. 5. Деформированное состояние конечно-элементной модели сетчатой структуры при сжатии
Deformation of the finite-element model of a lattice structure under compression

Таким образом, жесткость сетчатой структуры, образованной системой спиральных ребер, при растяжении и сжатии в направлении осей α определяется равенством (22). При нагружении в направлении оси β жесткость определяется аналогичной формулой, в которой угол в равенстве (22) следует заменить на $(\pi/2 - \varphi)$. Коэффициенты изгибной жесткости сетчатой структуры могут быть определены аналогично выражению (2)

$$\tilde{D}_{mn} = \frac{h^2}{12} \tilde{B}_{mn} \quad (mn = 11, 12, 22, 33) .$$



*Рис. 6. Испытания элемента сетчатой структуры на сжатие
Compression test of the lattice structural element*

4. Жесткость сетчатой структуры, образованной спиральными ребрами, при сдвиге

Традиционный коэффициент жесткости сетчатой структуры при сдвиге определяется соответствующим равенством (2) и имеет вид

$$B_{\alpha\beta} = B_{33} = 2 \frac{B_h}{a_h} \sin^2 \phi \cos^2 \phi = 2E_h h \frac{\delta_h}{a_h} \sin^2 \phi \cos^2 \phi . \quad (23)$$

Поскольку сдвиг рассматриваемой структуры, в отличие от растяжения, рассмотренного в разделе 3, не приводит в рамках традиционной континуальной модели структуры к геометрически изменяемой системе, можно предположить, что выражение (23) приближенно описывает жесткость структуры при сдвиге и влияние изгиба ребер в плоскости структуры можно не учитывать. Действительно, опуская достаточно громоздкий вывод аналогичный проведенному в разделе 3, окончательно получим

$$B_{\alpha\beta} = 2 \frac{B_h}{a_h} \left[\sin^2 \phi \cos^2 \phi + \eta (\sin^4 \phi + \cos^4 \phi) \right], \quad \eta = \frac{D_h}{B_h l_h^2} = \frac{\delta_h^2}{12 l_h^2}$$

Пренебрегая малым членом, включающим параметр η , получим равенство (23). Для сетчатой структуры, рассмотренной в разделе 3, формула (23) дает $B_{\alpha\beta} = 86,8$ МН/м. Для сравнения, жесткость сетчатой структуры на сдвиг, определенная по результатам расчета на кручение сетчатой цилиндрической оболочки диаметром 248 мм с перечисленными ранее параметрами сетчатой структуры (Рис. 7.), составила 87.1 МН/м, что практически совпадает с результатом расчета по формуле (23). Заметим, что жесткость при сдвиге превышает жесткость структуры при растяжении почти в 45 раз.

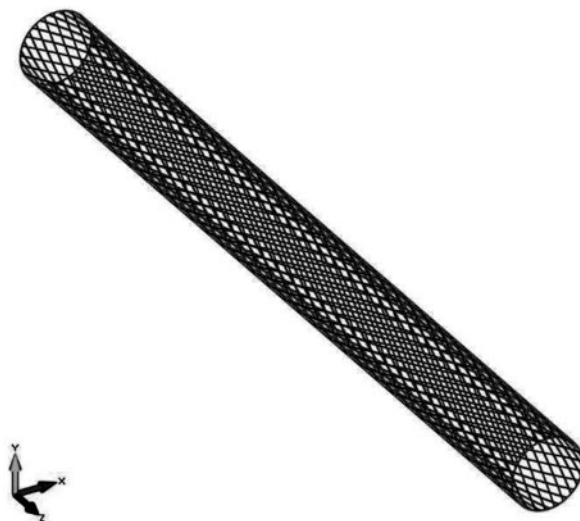


Рис. 7. Конечно-элементная модель сетчатой цилиндрической оболочки, образованной спиральными ребрами
Finite element model of a composite lattice shell formed by helical ribs

5. Практическое применение сетчатых конструкций, образованных системой спиральных ребер

Полученное большое различие в коэффициентах жесткости структуры при растяжении и сдвиге позволяет использовать их в конструкциях где требуется такое соотношение жесткостей. К таким конструкциям относятся приводные валы, передающие крутящий момент при возможной несоосности торцевых сечений вала, вызванной конструкцией или деформациями корпуса. В частности, такой особенностью обладает карданный вал автомобиля или судовые валы с большим удлинением, расположенные в упругом корпусе. Изгибная и крутильная жесткости тонкостенного цилиндрического вала с радиусом R определяются равенствами

$$D_b = \pi B_\alpha R^3, \quad D_t = 2\pi B_{\alpha\beta} R^3.$$

Используя равенства (22) и (23), получим

$$\omega = \frac{D_b}{D_t} = \frac{\delta_h^2}{l_h^2 \sin^4 \phi}.$$

Максимальная крутильная жесткость сетчатого композитного вала реализуется при $\phi = 45^\circ$. При этом $\omega = (2\delta_h / l_h)^2$. Выбирая соответствующим образом параметры сетчатой структуры δ_h и l_h (Рис. 2), можно обеспечить необходимое соотношение между жесткостью вала при кручении и его податливостью при изгибе.

Библиографический список

1. Барынин В.А., Бунаков В.А., Васильев В.В., Майоров Б.Г., Разин А.Ф., Композитные сетчатые конструкции: обзор. *Вопросы оборонной техники*, 2001, сер.15, Вып 1(123) – 2(124), с. 9-16.
2. Васильев В.В., Барынин В.А., Разин А.Ф., Петроковский С.А., Халиманович В.И. Анизотридные композитные сетчатые конструкции – разработка и применение к космической технике. *Композиты и наноструктуры*, 2009 №3, с. 38-50.
3. Пшеничнов Г.И. *Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок*. М.: Наука, 1982.
4. Бунаков В.А. Оптимальное проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек. *Механика конструкций из композиционных материалов. Сборник научных статей*. Вып.1. М.: Машиностроение, 1992, с. 101-125.
5. Васильев В.В., Бунаков В.А. Проектирование сетчатых композитных цилиндрических оболочек, сжатых в осевом направлении. *Конструкции из композиционных материалов*, 2000, №2, с. 68-77.
6. Азаров А.В. Континуальные и дискретные модели сетчатых композитных цилиндрических оболочек. *Механика композиционных материалов и конструкций*, 2012, Т. 18, № 1, с. 121-130.

References

1. Barynin V.A., Bunakov V.A., Vasiliev V.V., Mayorov B.G., Razin A.F. Composite lattice structures: review. *Problems of Defense Technology*, 2001, Ser. 15, №1(123)-2(124), pp. 9-16 (In Russian).
2. Vasiliev V.V., Barynin V.A., Razin A.F., Petrokovskii S.A., Khalimanovoch V.I. Anisogrid composite lattice structure – development and space applications. *Composites and Nanostructures*, 2009, №3, pp. 38-50 (In Russian).
3. Pshenichnov G.I. *Teoriya tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok* [Theory of thin elastic lattice shells and plates]. Moscow, Nauka Publ., 1982 (In Russian)..
4. Bunakov V.A. Optimal design of lattice composite cylindrical shells. *Mechanics of Composite Structures. Collection of Scientific Papers*, № 1. Moscow, Mashinostroenie. 1992, pp. 101-125 (In Russian).
5. Vasiliev V.V., Bunakov V.A. Design of lattice composite cylindrical shells compressed in the axial direction. *Composite Structures*, 2000, № 2, pp. 68-77(In Russian).
6. Azarov A.V. Continuum and discrete models of lattice composite cylindrical shells. *Composite Mechanics And Design*, 2012, Vol.18, №1, pp. 121-130 (In Russian).

Сведения об авторе

А.В. Азаров: канд. техн. наук, ст. научный сотрудник Сколковского института науки и технологий, Москва, Россия, avazar@bk.ru, +7 916 5689317.