УДК 539

ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ МИНДЛИНА

(получена редакцией 14.01.2015, принята к печати – 10.03.2015)

П.А.Белов

МИЦ «НМКН» МГТУ им. Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия

Строится общее решение уравнений уточненной теории Миндлина. Уточнение заключается в том, что тензор модулей шестого ранга содержит не одиннадцать модулей, как в классической теории Миндлина, а только семь. Ранее было доказано, что такое сокращение неклассических модулей определяется выполнением требования положительной определенности потенциальной энергии. Построенное решение для перемещений представлено в виде суперпозиции трех векторных полей: поля классических перемещений и двух полей когезионных перемещений, которые можно трактовать как неклассические поправки в теории Миндлина к классическому решению для перемещений. Поля когезионных перемещений удовлетворяют обобщенным бигармоническим уравнениям, которые можно представить как произведения двух разных операторов Гельмгольца. В отличие от теории Тупина, в которой поле когезионных перемещений одно, в уточненной теории Миндлина таких когезионных полей два, и они могут быть комплексно-сопряженными. Это приводит к возможности описания качественно иных полей перемещений, чем в классической теории упругости или градиентной теории Тупина. Кроме того, построено решение для поля несовместной дисторсии, которое наряду с фундаментальными функциями, входящими в выражения для перемещений, содержит три дополнительных фундаментальных решения. Эти фундаментальные решения нельзя представить в виде вектора, так как они имеют разную тензорную природу и ранги. Одно решение является псевдоскаляром и определяет потенциальную часть векторного поля спинов (несовместных поворотов). Два других фундаментальных решения определяются независимыми компонентами тензора-девиатора несовместных дисторсий, на который наложено дополнительное требование равенства нулю его дивергенции.

Ключевые слова: градиентные теории упругости, механика дефектных сред, поля сохраняющихся дислокаций, наномеханика, когезионные взаимодействия, неклассические упругие характеристики.

GENERAL DECISION IN THE SPECIFIED MINDLIN’S THEORY

Belov P.A.

MIC «NMKN» of MSTU of N.E. Bauman, Moscow, Russia

The general decision of the specified Mindlin’s theory equations is under construction. Specification is that a tensor of moduli of the sixth rank contains not eleven moduli as in the classical theory of Mindlin but only seven. Earlier it was proved that such reduction of nonclassical moduli is defined by implementation of the requirement of positive definiteness of potential energy. The constructed decision for displacements is presented in the form of superposition of three vector fields: field of classical displacements and two fields of cohesive displacements which can be treated as nonclassical amendments in Mindlin’s theory to the classical decision for displacements. Fields of cohesive displacements satisfy to the generalized biharmonic equations which can be presented as multiplication of two different Helmholtz’ operators. Unlike Toupin’s theory in which there is one field of cohesive displacements, in the specified Mindlin’s theory the number of such cohesive fields is two, and they can be complex interfaced. It leads to possibility of the description qualitatively of other fields of displacements, than in the classical theory of elasticity or the gradient theory of Toupin. Besides, the decision for a field of free distortion which along with the fundamental functions entering expressions for displacements contains three additional fundamental decisions is constructed. These fundamental decisions can’t be presented in the vector form as they have the different tensor nature and ranks. One decision is a pseudo-scalar and defines potential part of a vector field of spin. Two other fundamental decisions are defined by independent components of a tensor-deviator of free distortions on which the additional requirement of equality to zero its divergention is imposed.

***Keywords*:** gradient theories of elasticity, the mechanics of defective continuum, fields of conserved dislocations, nanomechanics, cohesive interactions, nonclassical elastic characteristics.

Введение

Кинематические переменные в теории Миндлина [1], помимо вектора перемещений R_i, включают в себя два сорта дисторсий (стесненную $D^1_{ij} = R_{i,j}$ и D^2_{ij} свободную). Как видно из определения стесненной дисторсии, она является совместной, т.е. по ней может быть восстановлено непрерывное поле перемещений. В противоположность стесненной, свободная дисторсия является несовместной, её нельзя представить как градиент векторного потенциала. Кроме того, кинематическая сторона теории Миндлина содержит свободные кривизны $D^2_{ijk} = D^2_{ij,k}$.

В статьях [2,3] сформулировано обобщение теории Миндлина, в которой кинематическая сторона содержит два сорта кривизн: стесненные кривизны $D^1_{ijk} = R_{i,jk}$, обладающие свойством $D^1_{ipq}Э_{pqj} \equiv 0$, и свободные кривизны $D^2_{ijk} = D^2_{ij,k}$, обладающие свойством $D^2_{ip,q}Э_{pqj} \neq 0$. Свойства совместности/несовместности позволили ввести понятие «сорта» кинематических переменных, отраженных в верхних индексах кинематических переменных. Соответственно, и упругие свойства приобретают верхние индексы (индексы сортности) [4]. В частности, тензор Тупина [2,5] C^{11}_{ijkmnl} определяет плотность потенциальной энергии кривизн первого сорта (градиентов стесненных дисторсий). Тензор Миндлина [2,6] C^{22}_{ijkmnl} определяет плотность потенциальной энергии кривизн второго сорта (градиентов свободных дисторсий).

В статье [6] исследована структура потенциальной энергии в теории Миндлина, обнаружен и устранён её недостаток (не положительная определенность потенциальной энергии) и предложена «уточненная» теория Миндлина, в которой количество модулей тензора Миндлина сокращено с одиннадцати до семи.

Целью данной статьи является построение общего решения уравнений уточненной теории Миндлина и исследование его свойств.

Построение общего решения

Лагранжиан уточненной теории Миндлина имеет тот же вид, что и классической теории Миндлина:

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{C^{11}_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n} + 2C^{12}_{ijmn}R_{i,j}D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ij,k}D^2_{mn,l}\}dV\ . \tag{1}$$

Силовая модель уточненной теории Миндлина строится с помощью объемной плотности потенциальной энергии U_V по формулам Грина:

$$\begin{cases} \sigma^1_{ij} = \dfrac{\partial U_V}{\partial D^1_{ij}} = \dfrac{\partial U_V}{\partial R_{i,j}} = C^{11}_{ijmn}R_{m,n} + C^{12}_{ijmn}D^2_{mn} \\ \sigma^2_{ij} = \dfrac{\partial U_V}{\partial D^2_{ij}} = C^{21}_{ijmn}R_{m,n} + C^{22}_{ijmn}D^2_{mn} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma^1_{ijk} = \dfrac{\partial U_V}{\partial D^1_{ij,k}} = \dfrac{\partial U_V}{\partial R_{i,jk}} = 0 \\ \sigma^2_{ijk} = \dfrac{\partial U_V}{\partial D^2_{ij,k}} = C^{22}_{ijkmnl}D^2_{mn,l} \end{cases}$$

Как видно, из формул Грина, силовая модель теории Миндлина обладает асимметрией: в ней имеют место два сорта напряжений σ^1_{ij} и σ^2_{ij}, связанных с существованием двух сортов дисторсий (стесненных $D^1_{ij} = R_{i,j}$ и свободных D^2_{ij}), но только один сорт моментных напряжений σ^2_{ijk}, связанных с градиентом только свободных дисторсий. Заметим, что первый сорт моментных напряжений σ^1_{ijk} используется в теории Тупина [7], где моментные напряжения являются линейными функциями вторых производных от перемещений (градиентами стесненных дисторсий), но не используются σ^2_{ijk}. В работе [3] сформулирована теория, в которой используются оба сорта и напряжений, и оба сорта моментных напряжений.

Разница между классической теорией Миндлина и её уточнением заключается только в структуре тензора Миндлина. Классический тензор Миндлина имеет в своей структуре одиннадцать модулей:

$$\begin{aligned}
C^{22}_{ijkmnl} &= C^{22}_1(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk})/2 + C^{22}_2(\delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik})/2 + \\
&+ C^{22}_3(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk})/2 + C^{22}_4(\delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} + \delta_{mj}\delta_{nk}\delta_{li})/2 + \\
&+ C^{22}_5\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + C^{22}_6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} + C^{22}_7\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + C^{22}_8\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \\
&+ C^{22}_9\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{nk} + C^{22}_{10}\delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl} + C^{22}_{11}\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{mk}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Уточненный тензор Миндлина имеет в своей структуре семь модулей:

$$\begin{aligned}
C^{22}_{ijkmnl} &= C^{22}_0(\delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik})/2 + \\
&+ C^{22}_3(\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{ni}\delta_{jk})/2 + \\
&+ C^{22}_6(6\delta_{ik}\delta_{jn}\delta_{ml} - \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} - \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} + \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} + \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk})/6 + \\
&+ C^{22}_7(6\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{nl} + \delta_{ij}\delta_{kn}\delta_{ml} + \delta_{mn}\delta_{lj}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{km}\delta_{nl} - \delta_{mn}\delta_{li}\delta_{jk})/6 + \\
&+ C^{22}_5\delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{mn} + C^{22}_8\delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + C^{22}_{10}\delta_{in}\delta_{mj}\delta_{kl}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тензоры четвертого ранга имеют одинаковую структуру и, в общем случае, содержат по три модуля:

$$\begin{cases}
C^{11}_{ijmn} = \lambda^{11}\delta_{ij}\delta_{mn} + (\mu^{11} + \chi^{11})\delta_{im}\delta_{jn} + (\mu^{11} - \chi^{11})\delta_{in}\delta_{jm} \\
C^{12}_{ijmn} = \lambda^{12}\delta_{ij}\delta_{mn} + (\mu^{12} + \chi^{12})\delta_{im}\delta_{jn} + (\mu^{12} - \chi^{12})\delta_{in}\delta_{jm} \\
C^{22}_{ijmn} = \lambda^{22}\delta_{ij}\delta_{mn} + (\mu^{22} + \chi^{22})\delta_{im}\delta_{jn} + (\mu^{22} - \chi^{22})\delta_{in}\delta_{jm}
\end{cases}. \tag{4}$$

Вариационное уравнение теории Миндлина:

$$\begin{aligned}
\delta L &= \iiint \{(C^{11}_{ijmn}R_{m,nj} + C^{12}_{ijmn}D^2_{mn,j} + P^V_i)\delta R_i + \\
&+ (C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ij,kl} - C^{12}_{ijmn}R_{i,j} - C^{22}_{ijmn}D^2_{ij})\delta D^2_{mn}\}dV + \\
&+ \oiint \{[P^F_i - (C^{11}_{ijmn}R_{m,n} + C^{12}_{ijmn}D^2_{mn})n_j]\delta R_i - C^{22}_{ijkmnl}n_l D^2_{ij,k}\delta D^2_{mn}\}dF = 0.
\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения равновесия сил $P_i = 0$ и моментов $M_{mn} = 0$:

$$\begin{cases} P_i = C^{11}_{ijmn} R_{m,nj} + C^{12}_{ijmn} D^2_{mn,j} + P^V_i = 0 \\ M_{mn} = C^{22}_{ijkmnl} D^2_{ij,kl} - C^{22}_{ijmn} D^2_{ij} - C^{12}_{ijmn} R_{i,j} = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Введем для вектора перемещений векторный потенциал ψ_i соотношением:

$$R_i = \psi_i - a^1_1 \Delta\psi_i - a^1_2 \psi_{k,ki} + a^2_1 \Delta\Delta\psi_i + a^2_2 \Delta\psi_{k,ki} . \tag{7}$$

Тензор стесненных дисторсий, выраженный через векторный потенциал:

$$R_{i,j} = \psi_{i,j} - a^1_1 \Delta\psi_{i,j} - a^1_2 \psi_{k,kij} + a^2_1 \Delta\Delta\psi_{i,j} + a^2_2 \Delta\psi_{k,kij} . \tag{8}$$

Тензор свободных дисторсий, выраженный через векторный потенциал:

$$D^2_{ij} = D^{\circ}_{ij} + c^1_1 \delta_{ij} \psi_{k,k} + c^1_2 \psi_{i,j} + c^1_3 \psi_{j,i} + D_1 \delta_{ij} \Delta\psi_{k,k} + D_2 \Delta\psi_{j,i} + D_3 \Delta\psi_{i,j} + D_4 \psi_{k,kij} . \tag{9}$$

Обратим внимание на то, что тензор стесненной дисторсии удовлетворяет условиям совместности – каждое слагаемое в (8) является градиентом некоторого вектора, а в целом – стесненная дисторсия (8) является градиентом вектора перемещений (7). В то же время тензор свободной дисторсии (9) не удовлетворяет условиям совместности, так как все слагаемые, кроме второго и шестого не являются градиентами некоторых векторов. Поэтому и в целом: не существует такого непрерывного вектора, градиентом которого мог бы быть тензор свободной дисторсии (9).

Подставляя (8) и (9) в уравнения равновесия моментов (6), обнаружим, что они тождественно удовлетворяются при произвольном векторе-потенциале ψ_i, если параметры a^1_1, a^1_2, a^2_1, a^2_2, c^1_1, c^1_2, c^1_3 и D_1, D_2, D_3, D_4 удовлетворяют системе одиннадцати неоднородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) c^1_1 + \lambda^{22} c^1_2 + \lambda^{22} c^1_3 = -\lambda^{12} \\ (\mu^{22} + \chi^{22}) c^1_2 + (\mu^{22} - \chi^{22}) c^1_3 = -(\mu^{12} + \chi^{12}) \\ (\mu^{22} - \chi^{22}) c^1_2 + (\mu^{22} + \chi^{22}) c^1_3 = -(\mu^{12} - \chi^{12}) \end{cases} \tag{10a}$$

$$\begin{cases} 2\mu^{22} D_4 - 2\mu^{12} a^1_2 = \\ = (3C^{22}_0 + C^{22}_3 + C^{22}_6 + C^{22}_7) c^1_1 + (C^{22}_0 + C^{22}_3/2 + C^{22}_6) c^1_2 + (C^{22}_0 + C^{22}_3/2 + C^{22}_7) c^1_3 \\ (2\mu^{22} + 3\lambda^{22}) D_1 + \lambda^{22} D_2 + \lambda^{22} D_3 + \lambda^{22} D_4 - \lambda^{12} a^1_1 - \lambda^{12} a^1_2 = \\ = (C^{22}_0 + 3C^{22}_5 + C^{22}_8 + C^{22}_{10}) c^1_1 + (C^{22}_0 + C^{22}_5) c^1_2 + (C^{22}_0 + C^{22}_5) c^1_3 \\ (\mu^{22} + \chi^{22}) D_2 + (\mu^{22} - \chi^{22}) D_3 - (\mu^{12} - \chi^{12}) a^1_1 = (C^{22}_3/2 + C^{22}_{10}) c^1_2 + (C^{22}_6 + C^{22}_8) c^1_3 \\ (\mu^{22} - \chi^{22}) D_2 + (\mu^{22} + \chi^{22}) D_3 - (\mu^{12} + \chi^{12}) a^1_1 = (C^{22}_8 + C^{22}_7) c^1_2 + (C^{22}_3/2 + C^{22}_{10}) c^1_3 \end{cases} \tag{10b}$$

$$\begin{cases}(3C_0^{22}+C_3^{22}+C_6^{22}+C_7^{22})D_1+(C_0^{22}+C_3^{22}/2+C_7^{22})D_2+(C_0^{22}+C_3^{22}/2+C_6^{22})D_3+\\+(C_0^{22}+C_3^{22}+C_6^{22}+C_7^{22}+C_8^{22}+C_{10}^{22})D_4-2\mu^{12}a_2^2=0\\(C_0^{22}+3C_5^{22}+C_8^{22}+C_{10}^{22})D_1+(C_0^{22}+C_5^{22})D_2+(C_0^{22}+C_5^{22})D_3+(C_0^{22}+C_5^{22})D_4-\\-\lambda^{12}(a_1^2+a_2^2)=0\\(C_6^{22}+C_8^{22})D_2+(C_3^{22}/2+C_{10}^{22})D_3-(\mu^{12}-\chi^{12})a_1^2=0\\(C_3^{22}/2+C_{10}^{22})D_2+(C_7^{22}+C_8^{22})D_3-(\mu^{12}+\chi^{12})a_1^2=0\end{cases} \qquad (10c)$$

а тензор D_{ij}° системе однородных дифференциальных уравнений:

$$C_{ijkmnl}^{22}D_{ij,kl}^{\circ}-C_{ijmn}^{22}D_{ij}^{\circ}=0\,. \qquad (11)$$

Подставляя (8) и (9) в уравнения равновесия сил, обнаружим, что записанные с помощью векторного потенциала:

$$\begin{aligned}&+[(\mu^{11}+\chi^{11})+(\mu^{12}+\chi^{12})c_2^1+(\mu^{12}-\chi^{12})c_3^1](\Delta\psi_i-\psi_{k,ki})+\\&+[(2\mu^{11}+\lambda^{11})+(2\mu^{12}+3\lambda^{12})c_1^1+(2\mu^{12}+\lambda^{12})(c_2^1+c_3^1)]\psi_{k,ki}-\\&-[(\mu^{11}+\chi^{11})a_1^1-(\mu^{12}-\chi^{12})D_2-(\mu^{12}+\chi^{12})D_3]\Delta(\Delta\psi_i-\psi_{k,ki})-\\&-[(2\mu^{11}+\lambda^{11})(a_1^1+a_2^1)-(2\mu^{12}+3\lambda^{12})D_1-(2\mu^{12}+\lambda^{12})(D_2+D_3+D_4)]\Delta\psi_{k,ki}+\\&+(\mu^{11}+\chi^{11})a_1^2\Delta\Delta(\Delta\psi_i-\psi_{k,ki})+(2\mu^{11}+\lambda^{11})(a_1^2+a_2^2)\Delta\Delta\psi_{k,ki}+P_i^V=0\end{aligned} \qquad (12)$$

они дают разрешающие уравнения на вектор-потенциал, если тензор D_{ij}^{*} одновременно с системой (11) удовлетворяет ещё и однородным относительно перемещений уравнениям равновесия сил:

$$C_{ijmn}^{12}D_{mn,j}^{\circ}=0\,. \qquad (13)$$

Дадим следующие определения параметрам среды через исходные компоненты тензоров модулей:

$$\begin{cases}(\mu+\chi)=[(\mu^{11}+\chi^{11})+(\mu^{12}+\chi^{12})c_2^1+(\mu^{12}-\chi^{12})c_3^1]\\(2\mu+\lambda)=[(2\mu^{11}+\lambda^{11})+(2\mu^{12}+3\lambda^{12})c_1^1+(2\mu^{12}+\lambda^{12})(c_2^1+c_3^1)]\\(\mu+\chi)(l_{1\omega}^2+l_{2\omega}^2)=[(\mu^{11}+\chi^{11})a_1^1-(\mu^{12}-\chi^{12})D_2-(\mu^{12}+\chi^{12})D_3]\\(2\mu+\lambda)(l_{1\theta}^2+l_{2\theta}^2)=\\=[(2\mu^{11}+\lambda^{11})(a_1^1+a_2^1)-(2\mu^{12}+3\lambda^{12})D_1-(2\mu^{12}+\lambda^{12})(D_2+D_3+D_4)]\\(\mu+\chi)l_{1\omega}^2l_{2\omega}^2=(\mu^{11}+\chi^{11})a_1^2\\(2\mu+\lambda)l_{1\theta}^2l_{2\theta}^2=(2\mu^{11}+\lambda^{11})(a_1^2+a_2^2)\end{cases} \qquad (14)$$

Обратим внимание на то, что параметры a_1^1, a_2^1, a_1^2, a_2^2, c_1^1, c_2^1, c_3^1 и D_1, D_2, D_3, D_4 выражаются через компоненты исходных тензоров классических и неклассических модулей уточненной теории Миндлина в соответствии с системой (10).

Тогда уравнения равновесия сил (12) с учетом (14) приводятся к виду:

$$L_{ip}H^1_{pq}H^2_{qj}\psi_j + P_i^V = 0$$
$$\begin{cases} L_{ip}(...) = (\mu+\chi)(\delta_{ip}\Delta(...) - (...)_{,ip}) + (2\mu+\lambda)(...)_{,ip} \\ H^1_{pq}(...) = l^2_{1\omega}(\Delta(...)\delta_{pq} - (...)_{,pq}) + l^2_{1\theta}\Delta(...)_{,pq} - (...)\delta_{pq} \\ H^2_{qj}(...) = l^2_{2\omega}(\Delta(...)\delta_{qj} - (...)_{,qj}) + l^2_{2\theta}\Delta(...)_{,qj} - (...)\delta_{qj} \end{cases} \tag{15}$$

Форма и структура уравнений равновесия сил (15) показывают, что вектор-потенциал содержит наряду с частным решением ψ_i^* неоднородных уравнений (15) три фундаментальных решения $\psi_i^0, \psi_i^1, \psi_i^2$:

$$\psi_i = \psi_i^0 + \psi_i^1 + \psi_i^2 + \psi_i^*$$
$$\begin{cases} L_{ip}\psi_p^0 = (\mu+\chi)(\delta_{ip}\Delta\psi_p^0 - \psi^0_{p,pi}) + (2\mu+\lambda)\psi^0_{p,pi} = 0 \\ H^1_{pq}\psi_q^1 = l^2_{1\omega}(\Delta\psi_p^1 - \psi^1_{q,pq}) + l^2_{1\theta}\psi^1_{q,pq} - \psi_p^1 = 0 \\ H^2_{qj}\psi_j^2 = l^2_{2\omega}(\Delta\psi_q^2 - \psi^2_{j,jq}) + l^2_{2\theta}\psi^2_{j,jq} - \psi_q^2 = 0 \end{cases} \tag{16}$$
$$L_{ip}H^1_{pq}H^2_{qj}\psi_j^* + P_i^V = 0$$

Введем для каждого фундаментального решения свой вектор потенциал:

$$\begin{cases} \psi_p^0 = (\Delta\phi_p^0 - \phi^0_{j,jp}) + \phi^0_{j,jp}(\mu+\chi)/(2\mu+\lambda) \\ \psi_q^1 = l^2_{1\theta}(\Delta\phi_q^1 - \phi^1_{j,jq}) + l^2_{1\omega}\phi^1_{j,jq} - \phi_q^1 \\ \psi_j^2 = l^2_{2\theta}(\Delta\phi_j^2 - \phi^2_{p,pj}) + l^2_{2\omega}\phi^2_{p,pj} - \phi_j^2 \end{cases} \tag{17}$$

Тогда разрешающие уравнения на векторы классических ψ_i^0 и двух когезионных перемещений ψ_i^1, ψ_i^2 могут быть представлены произведением двух скалярных операторов второго порядка, действующие на соответствующие вектор-потенциалы:

$$\begin{cases} L_{ip}\psi_p^0 = (\mu+\chi)\Delta\Delta\phi_i^0 = 0 \\ H^1_{pq}\psi_q^1 = [l^2_{1\omega}\Delta(...) - (...)][l^2_{1\theta}\Delta(...) - (...)]\phi_p^1 = 0 \\ H^2_{qj}\psi_j^2 = [l^2_{2\omega}\Delta(...) - (...)][l^2_{2\theta}\Delta(...) - (...)]\phi_q^2 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

Обратим внимание на то, что классическое решение ψ_p^0 в (17) естественным образом распалось на сумму вихревого и потенциального поля. Действительно, поле $(\Delta\phi_p^0 - \phi^0_{j,jp})$ имеет дивергенцию, тождественно равную нулю, и по определению является вихревым. Соответственно, поле $\phi^0_{j,jp}(\mu+\chi)/(2\mu+\lambda)$ имеет ротор, тождественно равный нулю и по определению является потенциальным. К сожалению, такое естественное разделение не произошло с оставшимися двумя когезионными полями. Тем не менее, такое разделение можно осуществить, прибегнув к следующей процедуре. Представим вектор-потенциалы когезионных полей как суперпозиции собственных функций операторов второго порядка, являющихся сомножителями в уравнениях (18):

$$\begin{array}{ll} \phi^1_p=\phi^{1\omega}_p+\phi^{1\theta}_p & \phi^2_p=\phi^{2\omega}_p+\phi^{2\theta}_p \\ \begin{cases} l^2_{1\omega}\Delta\phi^{1\omega}_p-\phi^{1\omega}_p=0 \\ l^2_{1\theta}\Delta\phi^{1\theta}_p-\phi^{1\theta}_p=0 \end{cases} & \begin{cases} l^2_{2\omega}\Delta\phi^{2\omega}_p-\phi^{2\omega}_p=0 \\ l^2_{2\theta}\Delta\phi^{2\theta}_p-\phi^{2\theta}_p=0 \end{cases} \end{array} \tag{19}$$

С учетом (19), вектор-потенциалы ψ^1_q и ψ^2_q в соответствии с (17) будут выражаться через $\phi^{1\omega}_p,\phi^{1\theta}_p$ и $\phi^{2\omega}_p,\phi^{2\theta}_p$ в следующем виде:

$$\begin{cases} \psi^0_q=(\Delta\phi^0_q-\phi^0_{j,jq})+\phi^0_{j,jq}(\mu+\chi)/(2\mu+\lambda) \\ \psi^1_q=(l^2_{1\theta}-l^2_{1\omega})(\Delta\phi^{1\omega}_q-\phi^{1\omega}_{j,jq})-(l^2_{1\theta}-l^2_{1\omega})\phi^{1\theta}_{j,jq} \\ \psi^2_q=(l^2_{2\theta}-l^2_{2\omega})(\Delta\phi^{2\omega}_q-\phi^{2\omega}_{j,jq})-(l^2_{2\theta}-l^2_{2\omega})\phi^{2\theta}_{j,jq} \end{cases} \tag{20}$$

Первые слагаемые в (20) имеют дивергенцию, тождественно равную нулю, и по определению являются вихревыми полями. Вторые слагаемые имеют ротор, тождественно равный нулю, и по определению являются потенциальными полями.

Обратим внимание на то, что в (20) входят только вихри векторных полей $\phi^{1\omega}_p,\phi^{2\omega}_p$. Поэтому можно потребовать, чтобы и сами векторные поля $\phi^{1\omega}_p,\phi^{2\omega}_p$ были вихревыми:

$$\begin{aligned} \phi^{1\omega}_{p,p}&=0 \\ \phi^{2\omega}_{p,p}&=0 \end{aligned} \tag{21}$$

Соответственно, в (20) входят только градиенты дивергенции векторных полей $\phi^{1\theta}_p,\phi^{2\theta}_p$. Поэтому можно потребовать, чтобы и сами эти векторные поля являлись градиентами скаляров:

$$\begin{aligned} \phi^{1\theta}&=-(l^2_{1\theta}-l^2_{1\omega})\phi^{1\theta}_{p,p} \\ \phi^{1\theta}&=-(l^2_{2\theta}-l^2_{2\omega})\phi^{2\theta}_{p,p} \end{aligned} \tag{22}$$

Тогда соотношения (20) приобретают финальный вид:

$$\begin{cases} \psi^0_q=(\Delta\phi^0_q-\phi^0_{j,jq})+\phi^0_{j,jq}(\mu+\chi)/(2\mu+\lambda) \\ \psi^1_q=(l^2_{1\theta}/l^2_{1\omega}-1)\phi^{1\omega}_q+\phi^{1\theta}_{,q} \\ \psi^2_q=(l^2_{2\theta}/l^2_{2\omega}-1)\phi^{2\omega}_q+\phi^{2\theta}_{,q} \end{cases} \tag{23}$$

Вернемся теперь к выражению (7). Вектор перемещений с учетом (16), (17), (19) и (23) выражается через фундаментальные функции следующим образом:

$$R_i = U_i + u_i^1 + u_i^2 + R_i^*$$
$$\begin{cases} U_i = \psi_i^0 - a_1^1\Delta\psi_i^0 - a_2^1\psi_{k,ki}^0 + a_1^2\Delta\Delta\psi_i^0 + a_2^2\Delta\psi_{k,ki}^0 \\ u_i^1 = \psi_i^1 - a_1^1\Delta\psi_i^1 - a_2^1\psi_{k,ki}^1 + a_1^2\Delta\Delta\psi_i^1 + a_2^2\Delta\psi_{k,ki}^1 \\ u_i^2 = \psi_i^2 - a_1^1\Delta\psi_i^2 - a_2^1\psi_{k,ki}^2 + a_1^2\Delta\Delta\psi_i^2 + a_2^2\Delta\psi_{k,ki}^2 \\ R_i^* = \psi_i^* - a_1^1\Delta\psi_i^* - a_2^1\psi_{k,ki}^* + a_1^2\Delta\Delta\psi_i^* + a_2^2\Delta\psi_{k,ki}^* \end{cases} \tag{24}$$

Здесь введены обозначения классического вектора перемещений U_i и двух полей когезионных перемещений u_i^1 и u_i^2. С учетом (20), получим выражение перемещений через фундаментальные функции:

$$\begin{cases} U_i = [(...) - a_1^1\Delta(...)](\Delta\phi_i^0 - \phi_{j,ji}^0) + [(...) - (a_1^1 + a_2^1)\Delta(...)]\phi_{j,ji}^0(\mu+\chi)/(2\mu+\lambda) \\ u_i^1 = \dfrac{(l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)}{l_{1\omega}^2}(1 - \dfrac{a_1^1}{l_{1\omega}^2} + \dfrac{a_1^2}{l_{1\omega}^2 l_{1\omega}^2})\phi_i^{1\omega} + (l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)(-1 + \dfrac{(a_1^1 + a_2^1)}{l_{1\theta}^2} - \dfrac{(a_1^2 - a_2^2)}{l_{1\theta}^2 l_{1\theta}^2})\phi_{j,ji}^{1\theta} \\ u_i^2 = \dfrac{(l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)}{l_{2\omega}^2}(1 - \dfrac{a_1^1}{l_{2\omega}^2} + \dfrac{a_1^2}{l_{2\omega}^2 l_{2\omega}^2})\phi_i^{2\omega} + (l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)(-1 + \dfrac{(a_1^1 + a_2^1)}{l_{2\theta}^2} - \dfrac{(a_1^2 + a_2^2)}{l_{2\theta}^2 l_{2\theta}^2})\phi_{j,ji}^{2\theta} \\ R_i^* = \psi_i^* - a_1^1\Delta\psi_i^* - a_2^1\psi_{k,ki}^* + a_1^2\Delta\Delta\psi_i^* + a_2^2\Delta\psi_{k,ki}^* \end{cases} \tag{25}$$

Вернемся к выражению (9). Тензор свободных дисторсий, выражается через фундаментальные функции следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{ij}^2 = D_{ij}^\circ &+ \{c_2^1\psi_{i,j}^0 + D_3\Delta\psi_{i,j}^0 + D_4\psi_{k,kij}^0 + c_3^1\psi_{j,i}^0 + D_2\Delta\psi_{j,i}^0 + c_1^1\delta_{ij}\psi_{k,k}^0 + D_1\delta_{ij}\Delta\psi_{k,k}^0\} + \\ &+ \{\frac{(l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)}{l_{1\omega}^2}(c_2^1 + D_3/l_{1\omega}^2)\phi_{i,j}^{1\omega} - [(c_2^1 + c_3^1)l_{1\theta}^2 + (D_2 + D_3 + D_4)]\frac{(l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)}{l_{1\theta}^2}\phi_{k,kij}^{1\theta} - \\ &+ \frac{(l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)}{l_{1\omega}^2}(c_3^1 + D_2/l_{1\omega}^2)\phi_{j,i}^{1\omega} - (c_1^1 + D_1/l_{1\theta}^2)\frac{(l_{1\theta}^2 - l_{1\omega}^2)}{l_{1\theta}^2}\delta_{ij}\phi_{k,k}^{1\theta}\} + \\ &+ \{\frac{(l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)}{l_{2\omega}^2}(c_2^1 + D_3/l_{2\omega}^2)\phi_{i,j}^{2\omega} - [(c_2^1 + c_3^1)l_{2\theta}^2 + (D_2 + D_3 + D_4)]\frac{(l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)}{l_{2\theta}^2}\phi_{k,kij}^{2\theta} + \\ &+ \frac{(l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)}{l_{2\omega}^2}(c_3^1 + D_2/l_{2\omega}^2)\phi_{j,i}^{2\omega} - (c_1^1 + D_1/l_{2\theta}^2)\frac{(l_{2\theta}^2 - l_{2\omega}^2)}{l_{2\theta}^2}\delta_{ij}\phi_{k,k}^{2\theta}\} + \\ &+ \{c_1^1\delta_{ij}\psi_{k,k}^* + c_2^1\psi_{i,j}^* + c_3^1\psi_{j,i}^* + D_1\delta_{ij}\Delta\psi_{k,k}^* + D_2\Delta\psi_{j,i}^* + D_3\Delta\psi_{i,j}^* + D_4\psi_{k,kij}^*\} \end{aligned} \tag{26}$$

Обратим внимание на то, что соотношения (18) определяют разрешающие уравнения для девяти компонентов трех трехмерных векторов, будь то фундаментальные функции $\psi_i^0, \psi_i^1, \psi_i^2$, или векторы классических U_i и когезионных перемещений u_i^1 и u_i^2. Таким образом, осталось построить ещё три фундаментальных функции, которые определяются системой однородных уравнений (11), (13). Для удобства введем определения свободного изменения объёма θ°, спина ω_{ij}° и свободного формоизменения γ_{ij}°:

$$\begin{cases} \theta^\circ = D_{kk}^\circ \\ \omega_{ij}^\circ = (D_{ij}^\circ - D_{ji}^\circ)/2 \\ \gamma_{ij}^\circ = (D_{ij}^\circ + D_{ji}^\circ)/2 - D_{kk}^\circ \delta_{ij}/3 \end{cases} \tag{27}$$

Тогда развернутом виде, с учетом (3),(4) и (27), система (11) имеет вид:

$$\begin{aligned} & C_1^M \Delta\theta^2 - (2\mu^{22}/3 + \lambda^{22})\theta^2 = [-C_2^M \gamma_{kp,p}^2]_{,k} \\ & C_6^M \Delta\gamma_{ij}^2 - 2\mu^{22}\gamma_{ij}^2 = [-C_2^M \theta_{,i}^2 - C_3^M \gamma_{ip,p}^2 - C_4^M \omega_{ip,p}^2]_{,j}/2 + \\ & \quad + [-C_2^M \theta_{,j}^2 - C_3^M \gamma_{jp,p}^2 - C_4^M \omega_{jp,p}^2]_{,i}/2 - \\ & \quad - [-C_2^M \theta_{,k}^2 - C_3^M \gamma_{kp,p}^2 - C_4^M \omega_{kp,p}^2]_{,k}\delta_{ij}/3 \\ & C_7^M \Delta\omega_{ij}^2 - 2\chi^{22}\omega_{ij}^2 = [-C_4^M \gamma_{ip,p}^2 - C_5^M \omega_{ip,p}^2]_{,j}/2 - \\ & \quad - [-C_4^M \gamma_{jp,p}^2 - C_5^M \omega_{jp,p}^2]_{,i}/2 \end{aligned} \tag{28}$$

Здесь введены новые определения модулей тензора Миндлина, которые являются множителями при соответствующих слагаемых плотности потенциальной энергии кривизн:

$$\begin{aligned} 2U_V \Big|_{curv} = {} & C_1^M \theta_{,k}^2\theta_{,k}^2 + 2C_2^M \theta_{,k}^2\gamma_{kj,j}^2 + C_3^M \gamma_{ki,i}^2\gamma_{kj,j}^2 + 2C_4^M \gamma_{ki,i}^2\omega_{kj,j}^2 + \\ & + C_5^M \omega_{ki,i}^2\omega_{kj,j}^2 + C_6^M \gamma_{ij,k}^2\gamma_{ij,k}^2 + C_7^M \omega_{ij,k}^2\omega_{ij,k}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_1^M = (2C_0^{22}/3 + C_3^{22}/9 + C_5^{22} + C_6^{22}/9 + C_7^{22}/9 + C_8^{22}/3 + C_{10}^{22}/3) \\ C_2^M = (C_0^{22} + C_3^{22}/3 + C_6^{22}/3 + C_7^{22}/3) \\ C_3^M = (C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22}) \\ C_4^M = (-C_6^{22} + C_7^{22}) \\ C_5^M = (-C_3^{22} + C_6^{22} + C_7^{22}) \\ C_6^M = (C_8^{22} + C_{10}^{22}) \\ C_7^M = (C_8^{22} - C_{10}^{22}) \end{cases}$$

Как хорошо видно из структуры плотности потенциальной энергии кривизн, модули C_6^M, C_7^M стоят множителями при канонических положительно определенных квадратичных формах, образованных свертками тензоров третьего ранга $\gamma_{ij,k}^2$ и $\omega_{ij,k}^2$.

Пять модулей $C_1^M, C_2^M, C_3^M, C_4^M, C_5^M$ являются множителями неканонической квадратичной формы относительно трех векторов $\theta_{,k}^2, \gamma_{kj,j}^2, \omega_{kj,j}^2$. Шестой модуль, который формально должен был стоять множителем при билинейном слагаемом $\theta_{,k}^2 \omega_{kj,j}^2$, принудительно положен равным нулю, чтобы соответствующая этому слагаемому потенциальная энергия не была не положительно определенной [6].

В развернутом виде, с учетом (3), (4) и (27), система (13) имеет вид:

$$K^{12}\theta_{,i}^{\circ} + 2\mu^{12}\gamma_{ij,j}^{\circ} + 2\chi^{12}\omega_{ij,j}^{\circ} = 0\,. \tag{29}$$

Подействуем на второе и третье уравнения системы (28) оператором дивергенции, а на уравнение (29) – оператором Лапласа. В результате, исключая старшие производные, получим:

$$\begin{cases} \gamma_{ij,j}^{\circ} = 0 \\ \theta^{\circ} = 0 \\ \omega_{ij,j}^{\circ} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

Возвращаясь к исходной системе (28)-(29), с учетом (30) имеем:

$$\begin{cases} C_6^M \Delta\gamma_{ij}^{\circ} - 2\mu^{22}\gamma_{ij}^{\circ} = 0 \\ \gamma_{ij,j}^{\circ} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} C_7^M \Delta\omega_{ij}^{\circ} - 2\chi^{22}\omega_{ij}^{\circ} = 0 \\ \omega_{ij,j}^{\circ} = 0 \end{cases}$$

Первая система записана относительно пяти линейно независимых компонент тензора девиатора γ_{ij}°. Все они удовлетворяют уравнению Гельмгольца, причем между ними существуют три связи, определяемые векторным уравнением $\gamma_{ij,j}^{\circ} = 0$.

Вторая система имеет решение, выраженное через псевдоскаляр Ω, удовлетворяющий уравнению Гельмгольца:

$$\begin{cases} \omega_{ij}^{\circ} = \Omega_{,k} Э_{ijk} \\ C_7^M \Delta\Omega - 2\chi^{22}\Omega = 0 \end{cases} \tag{31}$$

Заключение

Построено общее решение уравнений уточненной теории Миндлина. Оно содержит три компоненты вектора классических перемещений U_i, шесть компонент двух векторов когезионных перемещений u_i^1 и u_i^2, две из пяти компонент тензора-девиатора несовместных дисторсий γ_{ij}° и потенциал тензора несовместных поворотов Ω. По этим фундаментальным решениям строятся основные кинематические переменные: вектор перемещений и тензор несовместных дисторсий. Два поля когезионных перемещений являются или комплексно-сопряженными, или (в вырожденном случае) определяются кратными операторами в соответствии с (15) и (16). И в том, и в другом случае поля когезионных перемещений в теории Миндлина принципиально не могут быть сведены к полю когезионных перемещений теории Тупина. Действительно, поле когезионных перемещений в теории Тупина определяет дополнительные перемещения в идеальной (бездефектной) среде. С другой стороны, модули тензора Миндлина определяют свойства дефектной среды и, соответственно, свойства когезионных полей теории Миндлина.

Характерные длины когезионных взаимодействий – качественно иные механические параметры среды. В теории Тупина - это характерные длины когезионных взаимодействий в идеальных (бездефектных) средах, а в теории Миндлина – характерные длины когезионных взаимодействий в средах с полями сохраняющихся дислокаций. Семь компонент тензора Миндлина определяют: две характерные длины потенциальных частей когезионных перемещений, две характерных длины вихревых частей когезионных перемещений, характерную длину потенциальной части спинов (несовместных псевдоповоротов), и характерную длину тензора-девиатора несовместных деформаций.

Таким образом, необходимы дополнительные исследования по обоснованию сокращения количества компонентов тензора Миндлина с семи до шести.

Краевая задача представляет собой систему двенадцати альтернативных пар граничных условий в каждой не особенной точке поверхности тела.

Подробный анализ спектра краевых задач в теории Миндлина является сложной, требующей отдельного исследования, проблемой.

Библиогрфический список

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 1964, no 1, pp. 51-78.

2. Белов П.А. Существующие модели градиентных теорий упругости и их обобщение // *Сборник трудов X международной научно-практической конференции «Перспективные научные исследования – 2014»*, стр.42-57.

3. Белов П.А. Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Обобщение модели Миндлина // *Композиты и наноструктуры*, 2011, т.3, №1, стр. 24-38.

4. Белов П.А. Пространство моделей градиентных теорий упругости // *Сборник трудов Международной заочной научно-практической конференции «Актуальные вопросы образования и науки»*, 2013, часть 13, стр. 23-29.

5. Белов П.А. Пространство моделей градиентных теорий упругости. Подпространство Тупина» // *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*, 2014, №4, часть 1, стр. 11-15.

6. Белов П.А. Пространство моделей градиентных теорий упругости. Подпространство Миндлина // *Сборник материалов IX Международной научной конференции «Тенденции и перспективы развития современного научного знания», 2014*.

7. Toupin R.A. «Elastic materials with couple-stresses» // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 1964, № 2, p. 85-112.

References

1. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 1964, no 1, pp. 51-78.

2. Belov P.A. [The existing models of gradient theories of elasticity and their generalization] // *Sbornik trudov X mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Perspektivnyie nauchnyie issledovaniya – 2014»* [Collection of works of X International scientific and practical conference «Perspective Scientific Researches — 2014»], pp.42-57.

3. Belov P.A. [The theory of continuum with conserved dislocations. Generalization of Mindlin's model] // *Composites and Nanostructures*, 2011, vol. 3, no 1, pp. 24-38.

4. Belov P. A. [The space of models of gradient theories of elasticity] // *Sbornik trudov Mezhdunarodnoy zaochnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii «Aktualnyie voprosyi obrazovaniya i nauki»* [Collection of works of the International scientific and practical conference «Topical Issues of Science and Education»], 2013, part 13, pp. 23-29.

5. Belov P. A. [The space of models of gradient theories of elasticity. Toupin's subspace] // *Aktualnyie problemyi gumanitarnyih i estestvennyih nauk* [Actual problems of humanitarian and natural sciences], 2014, no. 4, part 1, pp. 11-15.

6. Belov P. A. [The space of models of gradient theories of elasticity. Mindlin's subspace]//*Sbornik materialov IX Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Tendentsii i perspektivyi razvitiya sovremennogo nauchnogo znaniya»* [Collection of materials of IX International scientific conference «Tendencies and Prospects of Development of Modern Scientific Knowledge»], *2014*.

7. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses // *Archive of Rational Mechanics and Analysis*, 1964, № 2, p. 85-112.

Сведения об авторах

П.А. Белов: д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИЦ «НМКН» МГТУ им. Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия, BelovPA@yandex.ru, тел +7(915) 335 88 35.