

УДК 531.01

## МОДЕЛЬ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

(поступила в редакцию 12.03.2015, принята в печать 18.03.2015)

В.В.Васильев, С.А.Лурье

*Институт проблем механики РАН (Россия)*

В статье описывается модель сплошной среды с микроструктурой, для которой соотношения классической механики твердого тела, основанные на анализе функций, описывающих поведение среды в окрестности точки, оказываются несправедливыми. Предполагается, что среда состоит из частиц с малыми, но конечными размерами, не позволяющими выделить из нее бесконечно малый элемент, и в связи с этим обобщаются функциональные соотношения, основанные на анализе бесконечно малых величин. Полученные соотношения для скалярных, векторных и тензорных функций предлагается использовать в задачах, решения которых в рамках классической модели среды обладают большими градиентами или являются сингулярными. В качестве примеров рассматриваются задача об одноосном растяжении стержня и сферически симметричная сингулярная задача для модельной среды.

**Ключевые слова:** механика сплошных сред, среды со структурой, сингулярные решения.

## MODEL OF A SOLID WITH MICROSTRUCTURE

Vasiliev V.V., Lurie S.A.

*Institute of Problems in Mechanics, Russian Academy of Sciences,  
101 Vernadskogo, Moscow 119526, Russia*

The paper is concerned with mathematical simulation of the solid for which the classical equations of solids based on the analysis of the field functions behavior in the vicinity of a point are not valid. The solid is assumed to consist of a system of particles whose small but finite dimensions does not allow us to single out an infinitesimal volume element and to apply directly the classical differential calculus. It is proposed to use the obtained expressions for scalar, vector and tensor functions to study the problems whose solutions obtained within the framework of the classical solid mechanics are characterized with high gradients or are singular. A beam under uniaxial tension and a model singular spherically symmetric problem are considered as examples.

**Keywords:** mechanics of solids, solids with microstructure, singular solutions.

### 1. Введение

Традиционная механика сплошной среды является феноменологической теорией, основанной на двух основных гипотезах:

- среда является сплошной и выделенный из нее бесконечно малый объемный элемент обладает такими же свойствами, как и среда в целом,
- постоянные или функции, характеризующие свойства среды, могут быть определены в результате испытаний макроскопических образцов.

В рамках феноменологической теории описание поведения среды осуществляется на основе дифференциальных уравнений, полученных в результате рассмотрения движения, геометрии и физических соотношений для бесконечно малого элемента среды. При этом получаемые решения иногда находятся в противоречии с предположениями, на которых основана феноменологическая теория. В частности, таковыми являются широко распространенные в механике сингулярные решения, которые бесконечно возрастают в

окрестности точек сингулярности. При этом бесконечно большими оказываются и производные получаемых в результате решения функций по координатам. Это означает, что эти функции не являются дифференцируемыми в точках сингулярности, т.е., что уравнения, включающие соответствующие производные, являются несправедливыми.

В настоящей работе предпринята попытка обобщить классическую феноменологическую теорию на среды, поведение которых описывается функциями, обладающими большими градиентами. В отличие от известных моментных, градиентных, микрополярных и микроструктурных теорий [1-5], основанных на классической модели среды и обобщении традиционных напряжений и деформаций, приводящим к соотношениям упругости с дополнительными системами упругих постоянных, в предлагаемой теории используется обобщенная модель среды и традиционным постоянным добавляется только один структурный параметр, который предлагается определять экспериментально.

## 2. Модель среды с микроструктурой

Введем декартову систему координат  $x, y, z$  и рассмотрим малый, но конечный элемент среды, показанный на рис 1. Предположим, что от центра элемента – точки  $O$  с координатами  $(x, y, z)$  вводятся локальные координаты  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , изменяющиеся в пределах  $-a/2 \leq (\alpha, \beta, \gamma) \leq a/2$ , где  $a$  - структурный параметр.

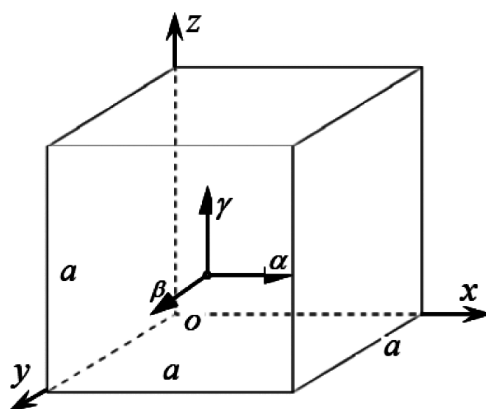


Рис. 1. Конечный элемент среды  
Element of the solid

Рассмотрим некоторую функцию  $f$ , определяющую состояние среды, и представим ее рядом Маклорена в окрестности точки  $(x, y, z)$ , т.е.

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) &= f(x, y, z) + \alpha \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} + \\
 &= + \frac{1}{2!} (\alpha^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2\alpha\beta \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + 2\alpha\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} + 2\beta\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}) + \\
 &+ \frac{1}{3!} (\alpha^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \beta^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \gamma^3 \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} + 3\alpha^2\beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y} + 3\alpha\beta^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2} + \\
 &+ 3\alpha^2\gamma \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial z} + 3\alpha\gamma^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial z^2} + 3\beta^2\gamma \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z} + 3\beta\gamma^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2})
 \end{aligned} \tag{1}$$

В дальнейшем ограничимся членами, представленными в равенстве (1). Осредним функцию  $f$  по объему, показанному на рис. 1, следующим образом:

$$\bar{f}(x, y, z) = \frac{1}{a^3} \iiint_{-a/2}^{a/2} f(x, y, z; \alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \quad (2)$$

Подставляя разложение (1) в равенство (2), получим

$$\bar{f}(x, y, z) = f(x, y, z) + \frac{a^2}{24} \Delta f(x, y, z), \quad \Delta f(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Заметим, что  $f$  может быть как скалярной функцией, так и координатной функцией вектора или тензора. Так как оператор Лапласа является инвариантным, соотношение (3), полученное в декартовых координатах, справедливо в любой системе координат.

### 3. Одномерная задача

Рассмотрим одноосное растяжение среды напряжением  $\sigma_x$  (все остальные компоненты тензора напряжений отсутствуют). Используя равенство (3), получим

$$\bar{\sigma}_x = \sigma_x + \frac{a^2}{24} \Delta \sigma_x, \quad (4)$$

где  $(...)' = d(...)/dx$ . Как известно, условием сохранения тензорного поля при отсутствии объемных сил является равенство нулю дивергенции поля [6]. Для одноосного растяжения имеем

$$\bar{\sigma}_x' = \sigma_x' + \frac{a^2}{24} \sigma_x''' = 0. \quad (5)$$

При  $a^2 = 0$  уравнение (5) вырождается в уравнение равновесия классической теории упругости.

Рассмотрим уравнение (5). Структура решения уравнения, включающего малый параметр при старшей производной, известна. Оно должно состоять из проникающего решения, которое следует из уравнения (5) при  $a^2 = 0$ , и решения типа быстро затухающего погранслоя. Однако уравнение (5) может иметь решение с такой структурой только при  $a^2 \leq 0$ . Таким образом, примем

$$a = 2\sqrt{6} ik, \quad (6)$$

где  $i$  – мнимая единица, и приведем уравнение (5) к виду

$$L_x = \sigma_x' - k^2 \sigma_x''' = 0, \quad (7)$$

где  $k$  – структурный параметр, определяемый экспериментально. Можно предложить следующее обоснование

вание преобразования (6). Как уже отмечалось, предлагаемая теория является феноменологической. При этом предполагается, что структурный параметр  $k$  определяется экспериментально на макрообразцах. Однако есть основания считать, что параметр  $a$ , характеризующий микроструктуру среды, в принципе не может быть найден с помощью соотношений феноменологической теории и макроскопических экспериментов. Таким образом, преобразование (6) исключает возможность определения параметра  $a$  по найденному экспериментально параметру  $k$ .

Для получения граничных условий, соответствующих уравнению (7), воспользуемся принципом возможных перемещений, согласно которому

$$\int L_x \delta u \, dx = 0, \quad (8)$$

где оператор  $L_x$  определяется равенством (7), а  $u$  – перемещение в направлении координаты  $x$ . Осуществляя в равенстве (8) интегрирование по частям, получим следующие естественные граничные условия:

$$\bar{\sigma}_x \delta u = 0, \quad k^2 \sigma'_x \delta \varepsilon_x = 0. \quad (9)$$

Здесь

$$\varepsilon_x = u' \quad (10)$$

- деформация и согласно традиционного закона Гука

$$\sigma_x = E \varepsilon_x. \quad (11)$$

Решение уравнения (7), затухающее при удалении от края  $x = 0$ , имеет вид

$$\sigma_x = \sigma_\infty + C e^{-x/k}, \quad (12)$$

где  $\sigma_\infty = \sigma(x \rightarrow \infty)$ . Закрепляя сечение  $x = 0$ , из условий (9) для этого сечения получим  $u = 0$  и  $\sigma'_x = 0$ . В результате из решения (12) следует  $C = 0$  и  $\sigma_x = \sigma_\infty$ . Таким образом, при отсутствии градиента напряжений полученное решение совпадает с традиционным.

Для определения параметра  $k$  необходимо наличие градиента напряжения. В связи с этим рассмотрим стержень с длиной  $l$ , сечение  $x = 0$  которого закреплено, а сечение  $x = l$  свободно от нагрузки. Стержень нагружен усилиями  $q$ , равномерно распределенными по его длине. Тогда уравнение равновесия (7) обобщается следующим образом:

$$\sigma'_x - k^2 \sigma'''_x + q = 0,$$

и его решение, затухающее при удалении от закрепленного края стержня, имеет вид

$$\sigma_x = C_1 - qx + C_2 e^{-x/k}. \quad (13)$$

Согласно первому граничному условию (9), имеем  $\bar{\sigma}_x(x=l) = 0$ . Предполагая, что длина стержня достаточно велика и не учитывая при  $x = l$  экспоненциальную часть решения (13), получим  $C_1 = ql$  и

$$\sigma_x = q(l - x) + C_2 e^{-x/k}.$$

Согласно второму граничному условию (9),  $\sigma'_x(0) = 0$ . Тогда  $C_2 = -qk$  и решение (13) принимает следующую окончательную форму:

$$\sigma_x = q(l - x - k e^{-x/k}). \quad (14)$$

Перемещение  $u$  можно определить из равенств (10) и (11) если подставить напряжение из выражения (14). Интегрируя и удовлетворяя первое граничное условие (9), т.е. полагая  $u(0) = 0$ , получим

$$u = \frac{q}{E} [lx - x^2 - k^2(1 - e^{-x/k})]. \quad (15)$$

Это равенство позволяет, в принципе, определить параметр  $k$ . Действительно, замеряя перемещение конца стержня  $u_l = u(x = l)$  и пренебрегая экспоненциальной частью решения (15) при  $x = l$ , найдем

$$k^2 = \frac{l^2}{2} - \frac{u_l E}{q}.$$

Заметим, что использование этого соотношения требует высокой точности измерений, так как малый параметр  $k^2$  является разностью относительно больших величин. Более реалистичным представляется непосредственное использование равенства (15). Замеряя перемещение  $u_1$  в сечении  $x = x_1$ , находящемся вблизи закрепленного края, получим следующее трансцендентное уравнение для  $k$ :

$$k^2(1 - e^{-x_1/k}) = \frac{q}{E} x_1(l - \frac{x_1}{2}) - u_1.$$

#### 4. Пространственная задача

В соответствие с равенствами (3) и (6) введем тензор обобщенных напряжений

$$\bar{t} = t - k^2 \Delta t, \quad (16)$$

где  $t = t(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz})$ . Условиями сохранения тензорного поля при отсутствии объемных сил являются равенство нулю дивергенции тензора, что соответствует уравнениям равновесия, и симметрия тензора, обеспечивающая выполнение уравнений моментов [6]. В результате получим следующие уравнения равновесия:

$$L_x = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\tau}_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{xy}, \quad (x, y, z), \quad (17)$$

где символ  $(x, y, z)$  обозначает круговую перестановку индексов. Второе уравнение (17) выполняется авто-

матически в силу симметрии тензора напряжений, согласно которому  $\tau_{xy} = \tau_{yx}(x, y, z)$ . Традиционные деформации связаны с напряжениями обобщенным законом Гука. Ограничиваясь для простоты изотропным материалом, имеем

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)], \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} \quad (x, y, z), \quad (18)$$

где деформации выражаются через перемещения с помощью геометрических соотношений

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (x, y, z). \quad (19)$$

Введем по аналогии с равенством (16) обобщенные деформации и перемещения

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - k^2 \Delta \varepsilon, \quad \bar{u} = u - k^2 \Delta u. \quad (20)$$

Тогда соотношения (18) и (19) можно записать в форме

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{1}{E}[\bar{\sigma}_x - \nu(\bar{\sigma}_y + \bar{\sigma}_z)], \quad \bar{\varepsilon}_{xy} = \bar{\varepsilon}_{yx} = \frac{\bar{\tau}_{xy}}{G} \quad (x, y, z) \quad (21)$$

и

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x} \quad (x, y, z), \quad (22)$$

Как следует из соотношений (17), (21) и (22), уравнения предлагаемой градиентной теории упругости по форме совпадают с уравнениями классической теории, но включают не традиционные, а обобщенные напряжения, деформации и перемещения. Различие между классической и градиентной теориями проявляется в граничных условиях, для вывода которых воспользуемся принципом возможных перемещений, т.е.

$$\iiint (L_x \delta u_x + L_y \delta u_y + L_z \delta u_z) dx dy dz = 0.$$

Отсюда можно получить естественные граничные условия краевой задачи. Например, для края  $x = const$  они имеют следующий вид:

$$\bar{\sigma}_x \delta u_x = 0, \quad \bar{\tau}_{xy} \delta u_y = 0, \quad \bar{\tau}_{xz} \delta u_z = 0, \quad (23)$$

$$k \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} \delta \varepsilon_x = 0, \quad k^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} \delta \varepsilon_{xy} = 0, \quad k^2 \frac{\partial \bar{\tau}_{xz}}{\partial x} \delta \varepsilon_{xz} = 0. \quad (24)$$

Заметим, что в граничные условия (23) входят комбинации обобщенных напряжений и традиционных перемещений. Если все граничные условия формулируются в напряжениях, то краевая задача рассматриваемой градиентной теории вырождается в традиционную краевую задачу. Если часть граничных условий задана в перемещениях, то уравнения (17), (21), (22) позволяют определить только обобщенные напряжения или перемещения. Для восстановления традиционных напряжений и перемещений необходимо использовать соотношения (16) и (20) в совокупности с граничными условиями (24).

### 5. Сферически симметричная задача для шара

Основная особенность построенной выше теории заключается в возможности устранения сингулярности в решениях классической теории упругости. Для демонстрации этой возможности рассмотрим сплошной шар образованный из ортотропного материала, обладающего сферической симметрией. Шар нагружен равномерно распределенным наружным давлением  $q$ . Напряженное состояние шара зависит от отношения  $\alpha = E_\theta / E_r$  где  $E_\theta$  и  $E_r$  – кольцевой и радиальный модули упругости материала. Как известно [7], при  $\alpha = 1$ , т.е. для изотропного шара, радиальные  $\sigma_r$  и кольцевые  $\sigma_\theta$  напряжения не зависят от радиальной координаты  $r$ . При  $\alpha > 1$  напряжения обращаются в нуль в центре шара, а при  $\alpha < 1$  они бесконечно возрастают в окрестности точки  $r = 0$ . Наиболее ярко сингулярность решения проявляется при  $E_\theta = 0$  и  $\alpha = 0$ , т.е. в модельном шаре, состоящем из радиальных стержней, не имеющих поперечной жесткости. Для такого шара напряжения, следующие из классической теории упругости, имеют вид [7]

$$\sigma_r = -\frac{qR}{r}, \quad \sigma_\theta = 0, \quad (25)$$

где  $R$  – радиус шара. Радиальное перемещение определяется следующим образом:

$$u_r = C + \int \frac{\sigma_r}{E_r} dr = C - q \ln r. \quad (26)$$

Согласно физическому смыслу задачи радиальное перемещение должно обращаться в нуль в центре шара. Однако как следует из равенства (26), это условие не может быть выполнено. Таким образом, классическое решение рассматриваемой задачи приводит к сингулярному выражению для напряжения и не позволяет определить перемещение.

Согласно рассматриваемой градиентной теории, равенство (25) определяет не традиционное напряжение  $\sigma_r$ , а обобщенное напряжение  $\bar{\sigma}_r$ . Традиционное напряжение может быть найдено из уравнения (16). Используя выражение для оператора Лапласа в сферических координатах, запишем это уравнение в виде

$$\sigma_r - \frac{\rho^2}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\sigma_r}{dr} \right) = \bar{\sigma}_r = -\frac{qR}{r}. \quad (27)$$

Заметим, что коэффициент  $k$  в равенстве (16) имеет размерность длины. В рассматриваемой задаче его можно трактовать как радиус некоторой поверхности внутри шара. В связи с этим, в уравнении (27) этот коэффициент обозначен через  $\rho$ .

Общее решение уравнения (27) имеет вид

$$\sigma_r = \frac{1}{r} (C_1 e^{\bar{r}} + C_2 e^{-\bar{r}} - q), \quad (28)$$

где  $C_1, C_2$  – постоянные интегрирования и

$$\bar{r} = r / \rho, \quad \bar{q} = q\bar{R}, \quad \bar{R} = R / \rho.$$

Для того, чтобы устранить сингулярность решения (28) при  $r = 0$ , примем  $C_1 + C_2 = \bar{q}$ . Воспользуемся далее граничным условием на поверхности шара, согласно которому  $\sigma_r(r = R) = -q$ . Определяя постоянные интегрирования в решении (28), окончательно получим

$$\sigma_r = -\frac{\bar{q}}{r} \left( 1 - \frac{e^{2\bar{R}} e^{-\bar{r}} - e^{\bar{r}}}{e^{2\bar{R}} - 1} \right). \quad (29)$$

Для качественного анализа разложим экспоненциальные функции, входящие в решение (29), в степенные ряды. В результате найдем

$$\sigma_r = -\bar{q} \left[ \frac{e^{2\bar{R}} + 1}{e^{2\bar{R}} - 1} \left( 1 + \frac{\bar{r}^2}{6} \right) - \frac{\bar{r}}{2} - \frac{\bar{r}^3}{24} - \dots \right]. \quad (30)$$

При  $r = 0$  отсюда получим

$$\sigma_r = \frac{qR e^{2\bar{R}} + 1}{\rho e^{2\bar{R}} - 1}.$$

Таким образом, напряжение в центре шара оказывается конечным. Для определения радиального перемещения воспользуемся первым равенством (26). Заметим, что интегрирование выражения (29) приводит к так называемой интегральной показательной функции. Для качественного анализа используем приближенное выражение (30). В результате, принимая в равенстве (26)  $C = 0$ , найдем

$$u_r = -\frac{qRr}{\rho E_r} \left[ \frac{e^{2\bar{R}} + 1}{e^{2\bar{R}} - 1} \left( 1 + \frac{\bar{r}^2}{18} \right) - \frac{\bar{r}}{4} - \frac{\bar{r}^3}{96} - \dots \right].$$

Как и следовало ожидать, перемещение в центре шара оказывается равным нулю.

Решение рассматриваемой задачи, так же как и задачи описанной в разделе 3, в принципе позволяет определить постоянную  $\rho$ . Для этого можно рассмотреть шар с малой полостью в центре и экспериментально измерить изменение диаметра полости под действием наружного давления. Решение этой достаточно сложной в вычислительном отношении и практически мало значимой задачи здесь не приводится.

#### Библиографический список

1. Новацкий В., *Теория упругости*, М.: Мир, 1975.
2. Эринген А.К., *Теория микрополярной упругости// Разрушение. Т.2: Математические основы тео-*



*при разрушения* / под ред. А.Ю. Ишлинского. М.: Мир 1975. С. 646-751.

3. Lakes R. Cosserat micromechanics of structural media experimental methods// *Proc. of the 3-rd Tech. Conf. of American Society for Composites. Technomic.* 1988. P. 506-516.

4. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity// *Int. J. Solids Structures.* 1965. Vol. P. 417-438.

5. Mindlin R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Arch. Rational Mech. and Analysis.* 1964. Vol. **16**. No.1. P. 51-78.

6. Синг Д.Л. *Общая теория относительности*. М.: Изд. Иностранной литературы. 1963.

7. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Наука. 1977.

### References

1. Novatskiy V, *Teoriya uprugosti* [Elastic theory] Moscow,; Mir, 1975.

2. Eringen A.K., *Teoriya mikropolyarnoy uprugosti. Razrushenie. T.2: Matematicheskie osnovyi teorii razrusheniya* / pod red. A.Yu. Ishlinskogo, [Theory of micropolar elasticity//Destruction. v.2: Mathematical bases of the theory of destruction]. М.: Mir 1975. pp. 646-751.

3. Lakes R. Cosserat micromechanics of structural media experimental methods// *Proc. of the 3-rd Tech. Conf. of American Society for Composites. Technomic.* 1988. P. 506-516.

4. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity// *Int. J. Solids Structures.* 1965. Vol. P. 417-438.

5. Sing D.L., *Obshchaya teoriya otositelnosti* [General theory of relativity] Moscow, Izd. Inostrannoy literatury, 1963.

6. Lekhnitsky S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of an anisotropic state], Moscow, Nauka. 1977.

### Сведения об авторах

**В.В.Васильев:** д-р техн. наук, член-корр. РАН, гл. научный сотрудник Института проблем механики РАН, г. Москва, Россия, vvvas@iim.ras.ru, тел. 8(916) 607 1281.

**С.А.Лурье:** д-р техн. наук, вед. научный сотрудник Института проблем механики РАН, г. Москва, Россия, salurie@mail.ru, тел. 8(903) 794 7279.