

УДК 536.2

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ТЕКСТУРИРОВАННОГО КОМПОЗИТА С АНИЗОТРОПНЫМИ ПЛАСТИНЧАТЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

(поступила в редакцию 14.01.2015, принята к печати – 22.01.2015)

В.С.Зарубин, Г.Н.Кувыркин, И.Ю.Савельева

*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

С использованием разработанной математической модели переноса тепловой энергии в композите с анизотропными включениями в виде трехосных эллипсоидов предложена процедура вычисления компонентов тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита с пластинчатыми включениями, представленными сильно сплюснутыми сфероидами, обладающими свойством трансверсальной изотропии относительно оси вращения. Проведены расчеты для разных вариантов конической текстуры композита. Полученные результаты могут быть использованы для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности текстурированных композитов, модифицированных наноструктурными элементами (в частности, фрагментами графена). В силу электротепловой аналогии эти результаты применимы при рассмотрении характеристик электропроводности и диэлектрической проницаемости текстурированных композитов.

**Ключевые слова:** текстурированный композит, пластинчатые анизотропные включения, эффективные коэффициенты теплопроводности.

## THERMAL CONDUCTIVITY OF THE TEXTURED COMPOSITE WITH ANISOTROPIC LAMELLAR INCLUSIONS

Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Y.

*Bauman Moscow State Technical University, Russia*

A mathematical model of thermal energy transfer in a composite with anisotropic inclusions in the form of three-axis ellipsoids the procedure of calculation of tensor components of effective thermal conductivity of the textured composite containing lamellar inclusions modelled by strongly flattened spheroids of a transversal isotropy around a relative axis of rotation is suggested. The general model was developed earlier. Calculations for various of conic textures of the composite are carried out. Results obtained can be used for an evaluator of effective coefficients of thermal conductivity of the textured composites modified by nanostructural elements (in particular, by graphene fragments). Due to electrothermal analogy, these results are applicable to consideration of characteristics of electric conductivity and dielectric permeability of textured composites.

**Keywords:** textured composite, lamellar anisotropic inclusions, effective thermal conductivity.

### 1. Введение

Пространственная ориентация армирующих включений в матрице композита зависит от особенностей технологического процесса его формирования. При наличии определенной закономерности в пространственном расположении включений говорят о текстурированном композите.

Текстура композита, а также форма и свойства включений могут существенным образом повлиять на свойства композита в целом, в том числе на характеристики теплопроводности, в значительной степени определяющие области его применения. Среди возможных форм включений достаточно часто встречаются включения, размер которых в одном из ортогональных направлений существенно меньше размеров в

двух других направлениях. Такую форму можно отнести к пластинчатой.

Природа возникновения пластинчатых включений различна. Например, близкую к такой форме имеют некоторые включения новых фаз, образующихся при термической обработке поликристаллических материалов [1-3], которые в силу неоднородности их структуры тоже можно считать композиционными материалами. Для улучшения технологических характеристик полимерного связующего как составной части композита используют мелкодисперсные наполнители различной формы, в частности пластинчатой формы чешуйки [4, 5]. Это дает возможность получить экзотермический эффект в процессе отверждения связующего, уменьшить его усадку и улучшить механические, теплофизические, электромагнитные и другие эксплуатационные характеристики изготавливаемого композита.

В последнее время в качестве включений для перспективных композитов рассматривают различные наноструктурные элементы [6], в том числе фрагменты графена [7-9]. Пластинки однослойного графена в виде двумерной структуры, состоящей из правильных шестиугольников с атомами углерода в их вершинах, обладает уникальными физическими свойствами. Среди этих свойств следует отметить аномально высокую теплопроводность, превосходящую теплопроводность всех известных материалов [9]. Экспериментальные измерения [10, 11] и результаты математического моделирования [12-14] дают оценки коэффициента теплопроводности однослойного графена в его плоскости между 3500 и 5500 Вт/(м К).

Выявлено влияние различных факторов на теплопроводность графена, которая зависит от температуры, возрастает с увеличением размера листа и уменьшается с увеличением числа слоев. Для четырехслойного графена коэффициент теплопроводности лежит в интервале 1300 - 1700 Вт/(м К) [15], что сопоставимо с теплопроводностью высококачественного кристаллического графита. С ростом размера листа в его плоскости от 5 до 10 мкм можно ожидать увеличения коэффициента теплопроводности графена примерно в полтора раза [14].

Вместе с высокой тепло- и электропроводностью графен имеет ряд полезных электронных свойств и высокие упругие характеристики, что позволяет рассматривать графен в качестве составной части наноматериалов с улучшенными теплофизическими, электрическими и механическими параметрами, а также для создания элементов наноэлектронных устройств [8, 9]. Для графена количественная характеристика эффекта Пельтье выше удельной мощности, связанной с выделением джоулевой теплоты при прохождении электрического тока. Поэтому применение графена открывает принципиальную возможность создания элементов наноэлектроники, не требующих охлаждения.

Перспективы использования в композитах различно ориентированных высокотеплопроводных пластинчатых включений связаны с прогнозом ожидаемых характеристик теплопроводности таких композитов. Поэтому представляют интерес оценки теплопроводности текстурированных композитов в зависимости от объемной концентрации и пространственной ориентации включений. Эти оценки можно получить путем модификации разработанной математической модели теплового взаимодействия с матрицей анизотропных эллипсоидальных включений [16-19].

## 2. Основные соотношения

Включение пластинчатой формы геометрически можно представить как эллипсоид, сильно сплюснутый вдоль одной из его осей. Будем рассматривать круглое в плане пластинчатое включение, которому соответствует сильно сплюснутый сфероид, поверхность которого в прямоугольной декартовой системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  описывает уравнение  $(\xi_1^2 + \xi_2^2)/b^2 + \xi_3^2/b_3 = 1$ , где  $b$  – радиус сфероида, а  $b_3$  – его полуось, направленная по оси вращения. Все включения считаем геометрически подобными.

Пластинчатое включение примем трансверсально изотропным [20] относительно оси вращения сфероида  $O\xi_3$ , которая будет одной из главных осей тензора теплопроводности включения с главным значением  $\lambda_3$ . Расположение двух остальных ортогональных главных осей  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$  этого тензора в плоскости, перпендикулярной оси вращения, произвольно и им соответствуют равные главные значения  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Сле-

довательно, тензор теплопроводности включения определен лишь двумя независимыми параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_3$ .

Представленная в [17] математическая модель переноса тепловой энергии в композите с одинаково ориентированными анизотропными эллипсоидальными включениями и изотропной матрицей позволила получить оценки для величин  $\lambda_\alpha^\circ$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) эффективных коэффициентов теплопроводности композита. В случае одинаково ориентированных сфероидальных включений  $\lambda_1^\circ = \lambda_2^\circ$ , т.е. композит является трансверсально изотропным относительно оси, параллельной оси вращения сфероидов, а главные значения имеют вид

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{\lambda_1^\circ}{\lambda_m} = \frac{1 + C_V(\bar{\lambda}_1 - 1)(D_1 + (1 - D_1)C_V)}{1 + (1 - C_V)(\bar{\lambda}_1 - 1)D_3}, \quad (1)$$

$$\tilde{\lambda}_3 = \frac{\lambda_3^\circ}{\lambda_m} = \frac{1 + C_V(\bar{\lambda}_3 - 1)(D_3 + (1 - D_3)C_V)}{1 + (1 - C_V)(\bar{\lambda}_3 - 1)D_3}, \quad (2)$$

где  $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1 / \lambda_m$ ,  $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3 / \lambda_m$ ,  $\lambda_m$  - коэффициент теплопроводности изотропной матрицы,  $C_V$  - объемная концентрация включений,

$$D_1 = \frac{\text{arcctg} v - v / (1 + v^2)}{2(1 - h^2)^{3/2}} h, \quad D_3 = \frac{1/v - \text{arcctg} v}{(1 - h^2)^{3/2}} h, \quad (3)$$

$v = h / \sqrt{1 - h^2}$ ,  $h = b_3 / b$ . По мере уменьшения величины  $h$  сфероид по форме приближается к тонкой круглой пластинке. Тогда, пренебрегая величиной  $h^2$  по сравнению с единицей, формулы (3) можно упростить, представив их в виде

$$D_3 = 1 - h \text{arcctg} h, \quad D_1 = 1 - D_3 / 2. \quad (4)$$

Представительный элемент структуры композита с одинаковой ориентацией сфероидальных включений выберем в виде составной сфероидальной частицы, содержащей окруженное слоем материала матрицы включение и геометрически подобной этому включению с коэффициентом подобия  $K = C_V^{-1/3}$ . Из допущений, принятых в работах [16-19] при построении упомянутой выше математической модели переноса тепловой энергии в композите, следует, что эта частица также обладает свойством трансверсальной изотропии с главными значениями тензора эффективной теплопроводности  $\lambda_1^\circ = \lambda_2^\circ$  и  $\lambda_3^\circ$ , которые определены формулами (1) и (2).

### 3. Способ описания текстуры композита

При наличии текстуры, определенной в прямоугольной декартовой системе координат с осями  $Ox_i$  (макроосями),  $i = 1, 2, 3$ , необходимо для каждой составной сфероидальной частицы задать ориентацию ее оси вращения  $O'\xi_3$  относительно макроосей. Эту ориентацию можно однозначно задать двумя из трех угловых координат Эйлера [21]: углом прецессии  $\psi$  и углом нутации  $\theta$  (Рис. 1). Выбор значения угла  $\varphi$

собственного вращения, определяющий положение остальных микроосей  $O'\xi_1$  и  $O'\xi_2$  составной частицы в плоскости, ортогональной оси  $O'\xi_3$ , может быть произвольным, поскольку в этой плоскости эта частица

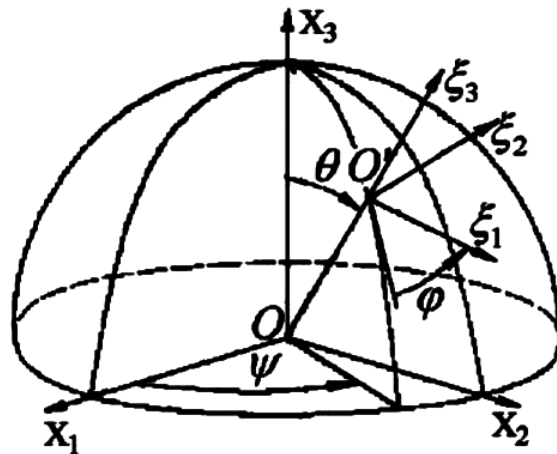


Рис. 1. Ориентация микроосей относительно макроосей  
The orientation of micro-axis relation to macro-axis

(как и включение) обладает свойством изотропии. При этом ортогональная матрица  $A$  направляющих косинусов будет иметь элементы [22]

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \cos \varphi \cos \psi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi, \\
 a_{12} &= -\cos \varphi \sin \psi \cos \theta - \sin \varphi \cos \psi, \\
 a_{13} &= \cos \varphi \sin \theta, \quad a_{21} = \sin \varphi \cos \psi \cos \theta + \cos \varphi \sin \psi, \\
 a_{22} &= \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta, \quad a_{23} = \sin \varphi \sin \theta, \\
 a_{31} &= -\cos \psi \sin \theta, \quad a_{32} = \sin \psi \sin \theta, \quad a_{33} = \cos \theta.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Рассмотрим произвольное расположение составной частицы относительно макроосей. Используя соотношение [23]  $\lambda_{ij}^* = \lambda_{kl}^\circ a_{ki} a_{lj}$ ,  $j, k, l = 1, 2, 3$ , записанное с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся латинским индексам, и элементы транспонированной матрицы  $A$ , а также введя обозначения  $\lambda_1^\circ = \lambda_{11}^\circ = \lambda_{22}^\circ$  и  $\lambda_3^\circ = \lambda_{33}^\circ$  компонент тензора эффективной теплопроводности этой частицы в микроосях, найдем компоненты  $\lambda_{ij}^*$  этого тензора в макроосях:

$$\lambda_{11}^* = \lambda_1^\circ (a_{11}^2 + a_{21}^2) + \lambda_3^\circ a_{31}^2 = \lambda_1^\circ (\sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos^2 \theta) + \lambda_3^\circ \cos^2 \psi \sin^2 \theta, \tag{6}$$

$$\lambda_{22}^* = \lambda_1^\circ (a_{12}^2 + a_{22}^2) + \lambda_3^\circ a_{32}^2 = \lambda_1^\circ (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \theta) + \lambda_3^\circ \sin^2 \psi \sin^2 \theta, \tag{7}$$

$$\lambda_{33}^* = \lambda_1^\circ (a_{13}^2 + a_{23}^2) + \lambda_3^\circ a_{33}^2 = \lambda_1^\circ \sin^2 \theta + \lambda_3^\circ \cos^2 \theta, \tag{8}$$

$$\lambda_{12}^* = \lambda_1^\circ (a_{11} a_{12} + a_{21} a_{22}) + \lambda_3^\circ a_{31} a_{32} = (\lambda_1^\circ - \lambda_3^\circ) \sin \psi \cos \psi \sin^2 \theta, \tag{9}$$

$$\lambda_{13}^* = \lambda_1^\circ (a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23}) + \lambda_3^\circ a_{31}a_{33} = (\lambda_1^\circ - \lambda_3^\circ) \cos\psi \sin\theta \cos\theta, \quad (10)$$

$$\lambda_{23}^* = \lambda_1^\circ (a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23}) + \lambda_3^\circ a_{32}a_{33} = (\lambda_3^\circ - \lambda_1^\circ) \sin\psi \sin\theta \cos\theta. \quad (11)$$

Действительно, компоненты  $\lambda_{ij}^*$  тензора эффективной теплопроводности составной частицы, представленные формулами (6) - (11) в макроосях, не зависят от угла  $\varphi$  в силу трансверсальной изотропии этой частицы.

#### 4. Процедура осреднения

Для перехода к оценке эффективных коэффициентов теплопроводности композита в целом с конкретной заданной текстурой необходимо вначале определить в общем виде процедуру осреднения компонент  $\lambda_{ij}^*(\psi, \theta)$  тензора эффективной теплопроводности отдельных составных частиц, зависящих, согласно формулам (6)-(11) от углов  $\psi$  и  $\theta$ , определяющих ориентацию каждой из этих частиц относительно макроосей  $Ox_i$ . При случайной (хаотической) ориентации составных частиц любое расположение микроосей частиц относительно макроосей равновероятно. Выделим в композите объем с достаточно большим числом  $N_\Sigma$  геометрически подобных частиц с одинаковым тензором эффективной теплопроводности. Тогда при  $N_\Sigma \rightarrow \infty$  можно считать, что относительная плотность  $\eta_0$  распределения микрообъемов композита по возможным ориентациям микроосей будет постоянна, а в силу независимости компонент  $\lambda_{ij}^*$  от угла  $\varphi$  плотность распределения точек пересечения единичной сферы на Рис. 1 микроосью  $O'\xi_3$  будет одинакова на всей ее поверхности. Это означает, что каждому элементарному телесному углу  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\psi$  соответствует доля  $\eta_0 d\Omega$  рассматриваемого объема композита, для которой ориентация микрооси  $O'\xi_3$  определена текущими значениями углов  $\psi$  и  $\theta$ . После интегрирования по всем возможным ориентациям получим

$$\int_{\Omega} \eta_0 d\Omega = \int_0^{2\pi} \eta_0 d\psi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 4\pi\eta_0 = 1.$$

Следовательно,  $\eta_0 = 1/(4\pi)$ , где  $4\pi$  - площадь поверхности сферы единичного радиуса.

Операцию осреднения компонент тензора эффективной теплопроводности составных частиц в случае их хаотической ориентации можно представить в виде

$$\bar{\lambda}_{ij}^* = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \lambda_{ij}^*(\psi, \theta) \sin\theta d\theta = \eta_0 \langle \lambda_{ij}^* \rangle,$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения по всем возможным ориентациям этих частиц. Тогда, используя формулы (6)-(11), находим  $\bar{\lambda}_{11}^* = \bar{\lambda}_{22}^* = \bar{\lambda}_{33}^* = 2\lambda_1^\circ/3 + \lambda_3^\circ/3$  и  $\bar{\lambda}_{12}^* = \bar{\lambda}_{13}^* = \bar{\lambda}_{23}^* = 0$ , т.е. тензор эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого объема композита с хаотической ориентацией составных сфероидальных частиц является шаровым, а этот объем будет изотропным по отношению к свойству теплопроводности. В этом случае совпадают значения  $\bar{\lambda}_{ii}^*$  и  $\lambda_{kk}^\circ$  первых инвариантов тензо-

ров эффективных коэффициентов теплопроводности композита и составных частиц, что может служить косвенным подтверждением корректности процедуры осреднения. Полученный результат справедлив при такой ориентации для частиц любой формы с произвольной анизотропией [20].

### 5. Текстурная функция

При упорядоченной ориентации составных частиц, когда композит текстурирован, относительная плотность  $\eta$  распределения по ориентациям микроосей этих частиц в виде сфероидов зависит от угловых координат  $\psi$  и  $\theta$ . В общем случае она может быть неоднородной в рассматриваемом объеме композита, т.е. зависеть и от координат  $x_i$ . В этом случае необходимо проводить осреднение не только по ориентациям частиц, но и по объему композита. Но если функция  $\eta(\psi, \theta)$  не зависит от координат  $x_i$  и удовлетворяет условию нормирования  $\langle \eta \rangle = 1 / (4\pi)$ , то при осреднении характеристики частиц, определяемой компонентами  $\lambda_{ij}^*(\psi, \theta)$  тензора теплопроводности, вместо формулы (12) следует записать

$$\bar{\lambda}_{ij}^* = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \eta(\psi, \theta) \lambda_{ij}^*(\psi, \theta) \sin \theta d\theta = \langle \eta \lambda_{ij}^* \rangle. \quad (13)$$

Функцию  $f(\psi, \theta) = \eta(\psi, \theta) / \eta_0$  называют текстурной [20, 24]. В данном случае ее текущее значение равно доле объема композита, занятого составными частицами, ориентация которых определена текущими значениями аргументов этой функции, имеющей вероятностную трактовку, связанную с понятием совместной плотности распределения случайного вектора [25], координатами которого являются углы Эйлера  $\psi$  и  $\theta$ .

При хаотической ориентации составных частиц, т.е. при отсутствии у композита текстуры, зависимость от углов Эйлера исчезает и текстурная функция тождественно равна единице, что соответствует переходу формулы (13) в равенство (12). Эту функцию также можно принять равной единице в случае так называемой идеальной текстуры, когда ориентация всех анизотропных частиц одинакова [17], а микрооси совпадают с соответствующими макроосями, т.е.  $\varphi = \psi = \theta = 0$  (см. Рис. 1) и матрица  $A$  станет единичной, что приведет к формулам (1) и (2).

В общем случае текстура композита может быть комбинированной, включающей набор из  $n$  дискретных идеальных текстур и непрерывно распределенную, характеризуемую текстурной функцией  $f_1(\psi, \theta)$ . Пусть для каждой из дискретных идеальных структур ориентация микроосей определена значениями  $\psi_\beta$  и  $\theta_\beta$  ( $\beta = \overline{1, n}$ ) углов Эйлера. Тогда вместо формулы (13) нужно использовать соотношение

$$\bar{\lambda}_{ij}^* = \eta_0 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_1(\psi, \theta) \lambda_{ij}^* \sin \theta d\theta + \sum_{\beta=1}^n v_\beta \lambda_{ij}^*(\psi_\beta, \theta_\beta),$$

где  $v_\beta$  - доля объема композита, в которой идеальная текстура определена значениями  $\psi_\beta$  и  $\theta_\beta$ . При этом текстурную функцию  $f_1(\psi, \theta)$  следует нормировать согласно условию

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} f_1(\psi, \theta) \sin \theta d\theta = 1 - \sum_{\beta=1}^n v_\beta.$$

Одним из вариантов непрерывно распределенных текстур является коническая текстура [24], когда одноименные микрооси всех частиц являются образующими соосных круговых конических поверхностей и равномерно распределены по этим поверхностям, а направления двух остальных ортогональных микроосей случайны. При совмещении оси этих поверхностей с макроосью  $Ox_3$  текстурная функция  $F(\theta)$  будет зависеть только от одной угловой координаты  $\theta$ . Тогда осреднением по углу  $\psi$  из формул (6) и (7) получим

$$\lambda_{11}^* = \lambda_{22}^* = \lambda_1^\circ (1 + \cos^2\theta) / 2 + (\lambda_3^\circ / 2) \sin^2\theta, \quad (14)$$

формула (8) для  $\lambda_{33}^*$  останется без изменения, а из формул (9)–(11) (как и при хаотической ориентации микроосей) следует  $\lambda_{12}^* = \lambda_{13}^* = \lambda_{23}^* = 0$ . Это означает, что макроось  $Ox_3$  композита будет главной осью тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой.

В случае составных сфероидальных частиц при осреднении достаточно провести интегрирование по углу  $\theta$  в интервале  $(0; \pi/2)$ . Тогда текстурную функцию  $F(\theta)$  следует нормировать из условия

$$\int_0^{\pi/2} F(\theta) \sin\theta d\theta = 1, \quad (15)$$

причем равномерному распределению микроосей  $O'\xi_3$  по углу  $\theta$  соответствует значение  $F(\theta) \equiv 1$ . В итоге для главных значений тензора эффективной теплопроводности композита с конической текстурой с учетом формул (8) и (14) получим

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (\lambda_1^\circ (1 + \cos^2\theta) + \lambda_3^\circ \sin^2\theta) F(\theta) \sin\theta d\theta, \quad (16)$$

$$\bar{\lambda}_3^* = \int_0^{\pi/2} (\lambda_1^\circ \sin^2\theta + \lambda_3^\circ \cos^2\theta) F(\theta) \sin\theta d\theta. \quad (17)$$

При идеальной конической текстуре микрооси  $O'\xi_3$  всех составных частиц будут образующими одной конической поверхности с заданным значением  $\gamma \in (0; \pi/2]$  полуугла раствора конуса. В этом случае вместо осреднения по углу  $\theta$  следует при  $\theta = \gamma$  приравнять единице подынтегральную функцию в условии (15) и положить  $F(\gamma) = 1/\sin\gamma$ . Тогда вместо формул (16) и (17) получим равенства

$$\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \lambda_1^\circ (1 + \cos^2\gamma) / 2 + (\lambda_3^\circ / 2) \sin^2\gamma, \quad \bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ \sin^2\gamma + \lambda_3^\circ \cos^2\gamma. \quad (18)$$

Отметим, что первая формула (18) идентична формуле (14), а вторая — формуле (8).

При  $\gamma = \pi/2$  текстуру называют кольцевой [24]. В этом случае  $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = (\lambda_1^\circ + \lambda_3^\circ) / 2$  и  $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ$ . При  $\gamma = 0$  имеем частный случай идеальной конической текстуры, называемой аксиальной [24], для которой главные значения тензора эффективной теплопроводности композита совпадают со значениями эффективных коэффициентов теплопроводности составных частиц, т.е.  $\bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = \lambda_1^\circ$  и  $\bar{\lambda}_3^* = \lambda_3^\circ$ .

В отличие от идеальной конической текстуры для реальной текстуры возможно ее некоторое рассеяние, вызванное тем, что не все одноименные микрооси частиц (в данном случае оси  $O'\xi_3$ ) строго направлены по образующим одной конической поверхности. При упрощенном описании слабого рассеяния идеальной конической текстуры можно принять, что микрооси  $O'\xi_3$  составных частиц равномерно заполняют зазор между двумя соосными круговыми коническими поверхностями, образующие которых составляют с осью углы  $\gamma + \delta$  и  $\gamma - \delta$ , причем  $\delta \leq \gamma$  и  $\gamma + \delta \leq \pi / 2$ . Совместим ось этих поверхностей с макроосью  $Ox_3$ , а зазор между ними равномерно заполним микроосями  $O\xi_3$  составных частиц. Тогда условие (15) примет вид

$$\int_{\gamma-\delta}^{\gamma+\delta} F_\delta(\theta) \sin \theta d\theta = 1,$$

но в пределах интервала интегрирования  $F_\delta(\theta) = F(\gamma, \delta) = \text{const}$ . После вычисления интеграла находим  $F(\gamma, \delta) = 1 / (2 \sin \gamma \sin \delta)$  и вместо формул (16) и (17) получаем соответственно

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_2^* = (\lambda_1^\circ / 2)(1 + \cos^2 \gamma \cos^2 \delta + (1/3) \sin^2 \gamma \sin^2 \delta) + \\ + (\lambda_3^\circ / 2)(\sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - (4/3) \sin^2 \gamma \sin^2 \delta), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_3^* = \lambda_1^\circ (\sin^2 \gamma + \sin^2 \delta - (4/3) \sin^2 \gamma \sin^2 \delta) + \\ + \lambda_3^\circ (\cos^2 \gamma \cos^2 \delta + (1/3) \sin^2 \gamma \sin^2 \delta). \end{aligned} \quad (20)$$

## 6. Результаты расчетов

В качестве примера на Рис. 2 в полулогарифмических координатах представлены построенные с использованием формул (1)-(3) и (18) графики зависимостей  $\tilde{\lambda}_1^* = \bar{\lambda}_1^* / \lambda_m$  (сплошные кривые) и  $\tilde{\lambda}_3^* = \bar{\lambda}_3^* / \lambda_m$  (штриховые линии) от объемной концентрации  $C_V$  включений для некоторых значений угла  $\gamma$ , характеризующего конкретную идеальную коническую текстуру при различных сочетаниях значений параметров  $h$ ,  $\bar{\lambda}_1$  и  $\bar{\lambda}_3$ . Для аксиальной текстуры ( $\gamma = 0$ ) при фиксированном значении  $\bar{\lambda}_1 = 1000$  кривые с темными ромбами соответствуют значениям  $\bar{\lambda}_3 = 200$ ,  $h = 0,1$ , с темными квадратами -  $\bar{\lambda}_3 = 2$ ,  $h = 0,01$ , а с темными треугольниками -  $\bar{\lambda}_3 = 200$ ,  $h = 0,01$ . Видно, что влияние на теплопроводность композита в направлении макрооси  $Ox_3$  мало при изменении относительной толщины пластинчатого включения даже на порядок, но более существенно (особенно при возрастании  $C_V$ ) при изменении коэффициента теплопроводности  $\lambda_3$  включения в его поперечном направлении. Наоборот, совпадение в масштабе рисунка сплошных кривых с темными квадратами и треугольниками при изменении  $\bar{\lambda}_3$  на два порядка свидетельствует о слабом влиянии этого параметра на теплопроводность композита в плоскости  $x_1Ox_2$ . Вместе с тем из существенного отличия от этих кривых сплошной кривой с темными ромбами следует, что уменьшение относительной толщины включения приводит к заметному увеличению теплопроводности композита в этой плоскости.



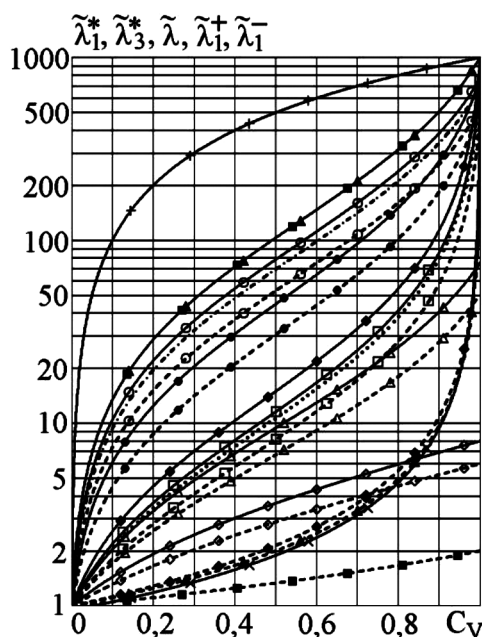


Рис. 2. Зависимости безразмерных главных значений тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита от объемной концентрации пластинчатых включений при различных сочетаниях определяющих параметров

*Dimensionless main values of the tensor of effective thermal conductivity of a textured composite on volume fraction of plate inclusions at various combinations of structured parameters*

При фиксированных значениях  $\gamma = \pi / 4$ ,  $h = 0,1$  и  $\bar{\lambda}_3 = 2$  приведены результаты расчетов для значений  $\bar{\lambda}_1 = 10, 100$  и  $1000$  (на Рис. 2 кривые со светлыми ромбами, треугольниками и квадратами соответственно). Из сопоставления кривых следует, что при фиксированных значениях  $C_v$  для рассматриваемого варианта конической текстуры увеличение на два порядка параметра  $\bar{\lambda}_1$  приводит лишь к незначительному увеличению разности  $\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_3$ . Увеличение на два порядка параметра  $\bar{\lambda}_3$  при неизменных значениях остальных параметров также мало влияет на результаты расчетов. Более существенно влияние уменьшения относительной толщины включения: при  $\bar{\lambda}_1 = 1000$ ,  $\bar{\lambda}_3 = 200$  кривые с темными кружками для  $h = 0,02$  и со светлыми - для  $h = 0,01$ .

В случае отсутствия текстуры при хаотической ориентации включений на Рис. 2 представлены графики для безразмерного эффективного коэффициента теплопроводности  $\bar{\lambda} = (2\lambda_1^* + \lambda_3^*) / (3\lambda_m)$  при  $\bar{\lambda}_1 = 1000$ ,  $\bar{\lambda}_3 = 2$  и двух значениях относительной толщины (пунктирная и штрихпунктирная линии соответственно для  $h = 0,1$  и  $h = 0,01$ ). Сплошными кривыми с плюсами и крестиками отмечены зависимости от  $C_v$  при  $\bar{\lambda}_1 = 1000$  безразмерных верхней и нижней оценок соответственно

$$\tilde{\lambda}_1^+ = 1 - C_v + \bar{\lambda}_1, \quad \tilde{\lambda}_1^- = 1 / (1 - C_v + C_v / \bar{\lambda}_1),$$

для величины  $\tilde{\lambda}_1$ , которые получены при использовании двойственной вариационной формулировки стационарной задачи теплопроводности в неоднородном твердом теле [26].

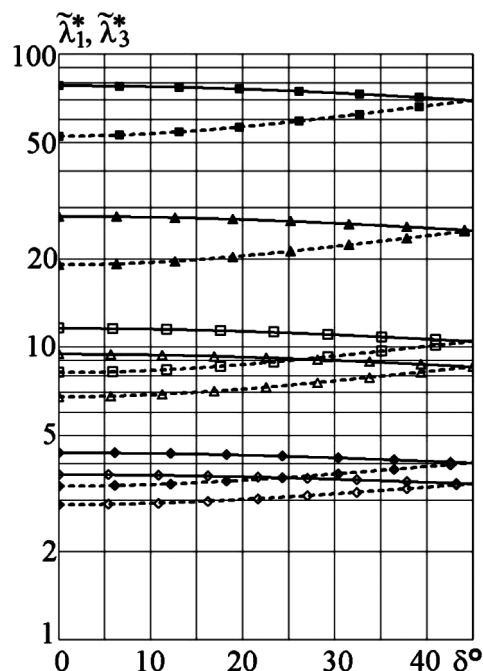


Рис. 3. Зависимости безразмерных главных значений тензора эффективной теплопроводности текстурированного композита от угла рассеяния конической текстуры при различных сочетаниях определяющих параметров  
Dimensionless main values of the tensor of effective thermal conductivity of a textured composite on dispersion of conical texture at various combinations of structured parameters

Для оценки влияния рассеяния на Рис. 3 в полулогарифмических координатах приведены построенные по формулам (19) и (20) графики зависимостей  $\tilde{\lambda}_1^*$  и  $\tilde{\lambda}_3^*$  (сплошные и штриховые линии соответственно) от угла  $\delta$  (в градусах) при значениях  $\gamma = \pi / 4$ ,  $\bar{\lambda}_3 = 2$  и  $C_v = 0,5$ . Значению  $h = 0,1$  отвечают светлые символы, а значению  $h = 0,01$  --- темные, ромбам соответствуют значения  $\bar{\lambda}_1 = 10$ , треугольникам  $\bar{\lambda}_1 = 100$  и квадратам -  $\bar{\lambda}_1 = 1000$ . Отметим, что при  $\delta = \pi / 4 = 45^\circ$  данная коническая текстура с рассеянием эквивалентна хаотической ориентации составных частиц, причем  $\tilde{\lambda}_1^* = \tilde{\lambda}_3^* = \tilde{\lambda}(C_v)$  для каждого значения  $C_v$  и каждого сочетания значений  $\bar{\lambda}_1$  и  $\bar{\lambda}_3$ . Непосредственная проверка показывает, что  $\tilde{\lambda}(C_v) = 2\tilde{\lambda}_1(C_v) / 3 + \tilde{\lambda}_3(C_v) / 3$  для фиксированного значения  $C_v$ , что является косвенным подтверждением корректности использованной выше процедуры учета рассеяния конической текстуры.

## 7. Заключение

На основе построенной в работе [17] математической модели переноса тепловой энергии в композите с анизотропными включениями эллипсоидальной формы разработана модель текстурированного композита с трансверсально изотропными пластинчатыми включениями. Эта модель в сочетании с известной процедурой осреднения характеристик текстурированной среды использована для оценки эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемого композита. Представлены расчетные зависимости для этих коэффициентов в случае различных вариантов конической текстуры композита. При проведении расчетов выбор исходных значений параметров в некоторой степени согласован с ожидаемыми значениями для композита с графеновыми включениями. Приведенные формулы могут быть использованы для прогноза

эффективных коэффициентов теплопроводности текстурированных композитов, модифицированных включениями пластинчатой формы (в том числе наноструктурными элементами).

Работа выполнена по грантам программ Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ (НШ-1432.2014.8) и молодых кандидатов наук (МК-6573.2015.8), а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности по государственному заданию № 2014.104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту 1.2640.2014.

### Библиографический список

1. Ван Флек Л., *Теоретическое и прикладное материаловедение*: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
2. Б.Н. Арзамасов, А.И. Крашенинников, Ж.П. Пастухова, А.Г. Рахштадт, *Научные основы материаловедения*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 366 с.
3. *Физическое металловедение*. Под ред. Р. Кана: Пер. с англ. В 3-х т. Т.2. М.: Мир, 1968. 492 с.
4. Калинин В.А., Ягодников Д.А., *Технология производства ракетных двигателей твердого топлива*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
5. Комков М.А., Тарасов В. А. *Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.
6. Кац Е.А. *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей*. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
7. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B, Kohlhaas K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S., Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. **442**. P. 282—286.
8. Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Physica E*. 2007. V. **40**. P. 228-232.
9. А.В. Елецкий, И.М. Искандарова, А.А. Книжник, Д.Н. Красиков, Графен: методы получения и теплофизические свойства, *УФН*. 2011. Т. 181, 3. С. 233-268.
10. Balandin A.A., Ghosh S., Bao W., Calizo I., Teweldebrhan D., Miao F., Lau C.N. Superior thermal conductivity of single-layer graphene. *Nano Letters*. 2008. V. **8**. P. 902—907.
11. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E.P., Nika D.L., Balandin A.A., Bao W., Miao F., Lau C.N., Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits, *Appl. Phys. Lett.* 2008. V. **92**. P. 151911.
12. Klemens P. G., Theory of the A-plane thermal conductivity of graphite. *J. Wide Bandgap Mater.* 2000. V. **7**. P. 332-339.
13. Nika D.L., Ghosh S., Pokatilov E.P., Balandin A.A. Lattice thermal conductivity of graphene flakes: Comparison with bulk graphite, *Appl. Phys. Lett.* 2009. V. **94**. P. 203103.
14. Nika D.L., Pokatilov E.P., Askerov A.S, Balandin A.A., Phonon thermal conduction in graphene: Role of Umklapp and edge roughness scattering. *Phys. Rev.* 2009. V. **79**. P. 155413.
15. Ghosh S., Bao W., Nika D.L., Sabrina S., Pokatilov E.P., Lau C.N., Balandin A.A. Dimensional crossover of thermal transport in few-layer graphene. *Nature Mater.* 2010. V. **9**. P. 555-558.
16. Зарубин В. С., Кувыркин Г.Н., Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями, *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2012. 3. С. 76–85.
17. Зарубин В. С., Кувыркин Г.Н., Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с анизотропными эллипсоидальными включениями, *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журнал*. 2013. 4. DOI: <http://dx.doi.org/10.7463/0413.0541050>.
18. Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с графеновыми включениями, *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2013. Вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/671.html>.
19. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю., Влияние формы пластинчатых включений на эффективную теплопроводность композита, *Композиты и наноструктуры*, 2014. № 2. С. 95-104.

20. Шермергор Т.Д., *Теория упругости микронеоднородных сред*. М.: Наука, 1977. 400 с.
21. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
22. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*: Пер. с англ. М.: Наука, 1968. 720 с.
23. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*: Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
24. Адамеску Р.А., Гельд П.В., Митюшов Е.А. *Анизотропия физических свойств металлов*. М.: Металлургия, 1985. 136 с.
25. В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко *Теория вероятностей* А. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 456 с. (Сер. Математика в техническом университете; Вып. XVI).
26. Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с анизотропными шаровыми включениями, *Изв. РАН. Энергетика*. 2012. 6. С. 118–126.

### References

1. Van Flek L. *Teoreticheskoe i prikladnoe materialovedenie* [Theoretical and Applied Materials] Trans. from English. Moscow. Atomizdat. 1975. 472 p.
2. Arzamasov B.N., Krashennikov A.I., Pastuhova J.P., Rahshtadt A.G. *Nauchnye osnovy materialovedeniya* [Scientific bases of Materials] Moscow. Izd-vo MGTU. im. N.E. Bauman. 1994. 366 p.
3. Kan R.U., Naazen P.T. *Fizicheskoe materialovedenie* [Physical metallurgy]. Vol. 2. Moscow. Mir. 1968. 492 p.
4. Kalinchev V.A., Jagodnikov D.A. *Tehnologija proizvodstva raketnyh dvigatelej tverdogo topliva* [Production technology of rocket engines of solid fuel]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 p.
5. Komkov M.A., Tarasov V. A. *Tehnologija namotki kompozitnyh konstrukcij raket i sredstv porazhenija* [Technology of winding of composite designs of rockets and means of defeat]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 p.
6. Kats E.A. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaya form i idey*. [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Pedigree forms and ideas] Moscow. Izd-vo LKI. 2008. 296 p.
7. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimmey E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. 442. P. 282–286.
8. Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Physica E*. 2007. V. 40. P. 228–232.
9. Eletskiy A.V., Iskandarova I.M., Knignik A.A., Krasikov D.N. Graphene: fabrication methods and thermophysical properties. *UFN - Physics-Uspekhi*, 2011, Vol. 181, no. 3, pp 233-268 (in Russian).
10. Balandin A.A., Ghosh S., Bao W., Calizo I., Teweldebrhan D., Miao F., Lau C.N. Superior thermal conductivity of single-layer graphene. *Nano Letters*. 2008. V. 8. P. 902–907.
11. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E.P., Nika D.L., Balandin A.A., Bao W., Miao F., Lau C.N. Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits. *Appl. Phys. Lett.* 2008. V. 92. P. 151911.
12. Klemens P. G. Theory of the A-plane thermal conductivity of graphite. *J. Wide Bandgap Mater.* 2000. V. 7. P. 332–339.
13. Nika D.L., Ghosh S., Pokatilov E.P., Balandin A.A. Lattice thermal conductivity of graphene flakes: Comparison with bulk graphite. *Appl. Phys. Lett.* 2009. V. 94. P. 203103.
14. Nika D.L., Pokatilov E.P., Askerov A.S., Balandin A.A. Phonon thermal conduction in graphene: Role of Umklapp and edge roughness scattering. *Phys. Rev.* 2009. V. B 79. P. 155413.
15. Ghosh S., Bao W., Nika D.L., Sabrina S., Pokatilov E.P., Lau C.N., Balandin A.A. Dimensional crossover of thermal transport in few-layer graphene. *Nature Mater.* 2010. V. 9. P. 555–558.
16. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The effective thermal conductivity of the composite with ellipsoidal inclusions. *Vestnik MGTU. im. N.E. Bauman. Ser. Estestvennye nauki - Herald MSTU. NE Bauman. Ser. Science*, 2012, no. 3, pp. 76-85 (in Russian).

17. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. The effective thermal conductivity of the composite with anisotropic elliptic inclusions. *Nauka i obrazovanie. MGTU. im. N.E. Bauman. Elektron. Jurnal*, 2013, no. 4 (in Russ). Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/541050.html> (accessed 06.04.2014). DOI: <http://dx.doi.org/10.7463/0413.0541050>.
18. Kuvyrkin G.N. Estimates of effective coefficient of heat conductivity of a composite with graphene inclusions *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii - Engineering magazine: science and innovations*. 2013, no. 4. (in Russ) URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/671.html>.
19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Influence of a form of lamellar inclusions on effective heat conductivity of a composite. *Kompozity i nanostruktury - Composites and nanostructures*. 2014. no 2, pp. 95-104 (in Russian).
20. Shermergor T.D. *Teorija uprugosti mikroneodnorodnyh sred* [Theory of elasticity of micronon-uniform environments]. M.: Nauka, 1977. 400 p.
21. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mehaniki i jelektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamic of the continuous environment]. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Bauman, 2008. 512 p.
22. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov: Per. s angl.* [The reference book on mathematics for scientists and engineers]. M.: Nauka, 1968. 720 p.
23. Karlsru G., Eger D. *Teploprovodnost tverdyh tel* [Thermal conductivity of solids] Trans. from Eng. Moscow. Nauka. 1964. 488 p.
24. Adamesku R.A., Gel'd P.V., Mitjushov E.A. *Anizotropija fizicheskikh svoystv metallov* [Anisotropy of physical properties of metals]. M.: Metallurgija, 1985. 136 p.
25. Pechinkin A.V., Teskin O.I., Cvetkova G.M., Bocharov P.P., Kozlov N.E. Pod red. V.S. Zarubina, A.P. Krishhenko. *Teorija verojatnostej* [Probability theory]. M.: Izd-vo MGTU im. N.Je. Bauman, 2004. 456 s. (Ser. Matematika v tehničeskom universitete; Vyp. XVI).
26. Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Estimates of effective coefficient of heat conductivity of a composite with anisotropic spherical inclusions *Izv. RAN. Jenegetika - Izv. Russian Academy of Sciences. Enegetika*. 2012, no. 6. pp. 118–126.

**Сведения об авторах**

**В.С. Зарубин**, д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, [Zarubin@bmstu.ru](mailto:Zarubin@bmstu.ru), тел +7 (499) 263-63-26.

**Г.Н. Кувыркин**, д-р техн. наук, проф., заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, [fn2@bmstu.ru](mailto:fn2@bmstu.ru), тел +7 (499) 263-63-26.

**И.Ю. Савельева**, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, [Inga.Savelyeva@gmail.com](mailto:Inga.Savelyeva@gmail.com), тел +7 (916) 848-89-21.