

УДК 539.3

## УПРУГИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КОМПОЗИТА С ПЛАСТИНЧАТЫМИ АНИЗОТРОПНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

(поступила в редакцию 07.07.2015, принята к печати – 09.07.2015)

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

*МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия*

С использованием вариационного подхода для композита с анизотропными включениями пластинчатой формы установлены двусторонние границы возможных значений объемного модуля упругости и модуля сдвига. Построена математическая модель, описывающая взаимодействие включений и частиц матрицы с изотропной линейно упругой средой, модули упругости которой подлежат определению как искомые характеристики рассматриваемого композита. С использованием этой модели методом самосогласования получены расчетные зависимости, позволяющие прогнозировать упругие свойства композитов, армированных анизотропными пластинчатыми включениями (в том числе в виде наноструктурных элементов).

**Ключевые слова:** композит, анизотропные пластинчатые включения, модули упругости, метод самосогласования.

## ELASTIC PROPERTIES OF A COMPOSITE WITH LAMELLAR ANISOTROPIC INCLUSIONS

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Y. Savelyeva

*Bauman Moscow State Technical University, Russia*

Upper and lower boundaries values of the elastic volume and shear moduli of a composite with anisotropic inclusions of a lamellar form are obtained by using the variation approach. The mathematical model of interaction of the inclusions and with isotropic linearly elastic medium, moduli of elasticity of which are to be determined is constructed. With the use of this model, dependences predicting elastic properties of the composites with anisotropic lamellar inclusions (including in the form of nanostructural elements) are obtained by a self-comistancy method.

**Keywords:** composite, lamellar anisotropic inclusions, elasticity modules, self-coordination method.

### 1. Введение

Области применения композитов, армированных включениями различной формы, в значительной степени зависят от комплекса их термомеханических и физических характеристик, среди которых важную роль играют упругие свойства композита. Количественному анализу упругих свойств гетерогенных тел, к которым следует отнести композиты, посвящено значительное число работ, проанализированных, например, в [1-4]. Однако свойства композитов с включениями пластинчатой формы по сравнению со свойствами волоконистых композитов исследованы менее подробно.

Включение можно считать пластинчатым, если его размер в одном из ортогональных направлений значительно меньше размеров в двух других направлениях. В группу мелкодисперсных наполнителей различной формы, применяемых для улучшения технологических характеристик полимерного связующего как составной части композита, входят и включения пластинчатой формы в виде чешуек [5, 6]. В зависимости от свойств материала таких включений возникает возможность получения экзотермического эффекта в процессе отверждения связующего, уменьшения его усадки и улучшения термомеханических, физических и других эксплуатационных характеристик изготавливаемого композита. Близкую к пластинчатой форме имеют некоторые включения новых фаз, образующихся при термической обработ-

ке поликристаллических материалов [7-9], которые в силу неоднородности их структуры также можно считать композиционными материалами.

В последнее время в качестве включений для перспективных композитов рассматривают различные наноструктурные элементы [10], в том числе фрагменты графена [11-13]. Пластинки графена обладают уникальными механическими и теплофизическими свойствами. Известны оценки продольного модуля упругости (модуля Юнга) графена в плоскости его пластинки порядка 1 ТПа [14, 15].

При близких размерах пластинчатого включения в его плоскости в первом приближении форму такого включения можно представить в виде сильно сплюснутого сфероида (эллипсоида вращения) [16, 17]. Применение таких включений в качестве армирующих элементов может повысить эффективные упругие характеристики перспективных композитов. Поэтому представляется целесообразным построение теоретических оценок этих характеристик с использованием соответствующих математических моделей.

Модель, построенная на основе вариационной формулировки задачи упругости в неоднородном теле, позволяет установить двусторонние границы возможных значений объемного модуля упругости и модуля сдвига композита, армированного пластинчатыми включениями с учетом различия их формы и упругих характеристик. Для описания механического взаимодействия элементов структуры композита (частиц матрицы и хаотически ориентированных анизотропных пластинчатых включений) с окружающей изотропной средой, моделирующей эффективные упругие свойства этого композита, использовано известное решение задачи о напряженно-деформированном состоянии включения эллипсоидальной формы, помещенного в однородную изотропную линейно упругую среду [18]. Осреднением по представительному объему композита возмущений деформированного состояния в этих элементах структуры удается получить расчетные зависимости для вычисления значений объемного модуля упругости и модуля сдвига композита.

## 2. Основные соотношения

Рассматриваемый композит состоит из изотропной линейно упругой матрицы, свойства которой характеризуют объемный модуль  $K^\circ$  упругости и модуль сдвига  $G^\circ$ , и линейно упругих анизотропных сфероидальных включений  $N$  различных типов. Геометрической характеристикой каждого типа с номером  $\zeta = \overline{1, N}$  является отношение  $\bar{b}_\zeta = b_\zeta / r_\zeta$  малой полуоси  $b_\zeta$  сфероида к его радиусу  $r_\zeta$ . При объемной концентрации  $C_\zeta$  включений, соответствующих номеру  $\zeta$ , объемная концентрация всех включений будет равна

$$C_V = \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)}. \quad (1)$$

Заданные упругие характеристики включений каждого типа определяют тензоры  $\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)}$  и  $\hat{\mathbf{S}}^{(\zeta)}$  коэффициентов упругости и податливости соответственно. Примем, что одна из главных осей этих тензоров для каждого типа сфероидального включения совпадает с его осью вращения, которую обозначим  $O\xi_3$ . Ориентация двух остальных ортогональных главных осей  $O\xi_1$  и  $O\xi_2$  произвольна, т.е. упругие характеристики каждого типа включений соответствуют частному случаю анизотропии - трансверсальной изотропии относительно оси  $O\xi_3$ .

Представительный объем, осредненные параметры которого отражают упругие свойства композита, содержит множество включений каждого типа, оси  $O\xi_3$  которых равновероятно распределены по всем возможным направлениям. Это означает, что композит не обладает текстурой и его допустимо считать изотропным [1].

Искомые упругие характеристики композита представим тензорами четвертого ранга коэффициентов упругости и податливости соответственно [17]

$$\hat{\mathbf{C}} = 3K\hat{\mathbf{V}} + 2G\hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{S}} = 1/(3K)\hat{\mathbf{V}} + 1/(2G)\hat{\mathbf{D}}, \quad (2)$$

где  $K$  – объемный модуль упругости,  $G$  – модуль сдвига, а  $\hat{\mathbf{V}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$  – изотропные тензоры четвертого ранга, являющиеся соответственно объемной и девиаторной составляющими единичного тензора четвертого ранга  $\hat{\mathbf{I}} = \hat{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{D}}$ . Компоненты этих составляющих не зависят от выбора прямоугольной декартовой системы координат и имеют вид [1]

$$V_{ijmn} = \delta_{ij}\delta_{mn} / 3, \quad D_{ijmn} = (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) / 2 - V_{ijmn}, \quad i, j, m, n = 1, 2, 3,$$

где  $\delta_{ij}$  – компоненты единичного тензора второго ранга (символ Кронекера:  $\delta_{ij} = 1$  при  $i = j$  и  $\delta_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ ). Из этих формул и равенства  $\delta_{ii} = 3$  (с учетом правила суммирования слагаемых по повторяющимся в сомножителях латинским индексам, используемого и в дальнейшем) следует,  $V_{ijpq}V_{pqkl} = V_{ijkl}$ ,  $D_{ijpq}D_{pqkl} = V_{ijkl}$ ,  $V_{ijpq}D_{pqkl} = 0$ ,  $k, l = 1, 2, 3$  т. е.

$$\hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{V}} = \hat{\mathbf{V}}, \quad \hat{\mathbf{D}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{V}} \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\mathbf{O}}_4, \quad (3)$$

где  $\hat{\mathbf{O}}_4$  – тензор четвертого ранга с нулевыми компонентами, а каждая из точек между сомножителями в произведении тензоров означает свертывание по индексу, одинаковому в обоих сомножителях [18].

Заданные упругие характеристики изотропной матрицы можно представить аналогично формулам (2) изотропными тензорами четвертого ранга

$$\hat{\mathbf{C}}^\circ = 3K^\circ\hat{\mathbf{V}} + 2G^\circ\hat{\mathbf{D}}, \quad \hat{\mathbf{S}}^\circ = 1/(3K^\circ)\hat{\mathbf{V}} + 1/(2G^\circ)\hat{\mathbf{D}}, \quad (4)$$

Тензор четвертого ранга имеет два линейных инварианта. Для тензоров  $\hat{\mathbf{V}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$ , согласно формулам (3), этими инвариантами будут  $V_{iipp} = 3$ ,  $V_{ipip} = 1$ ,  $D_{iipp} = 0$  и  $D_{ipip} = 5$ . Тогда инварианты тензоров  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  с учетом формул (2) можно представить в виде

$$\hat{\mathbf{C}} \cdots \hat{\mathbf{V}} = C_{iimm} = 9K, \quad \hat{\mathbf{C}} \cdots \hat{\mathbf{D}} = C_{imim} - C_{iimm} / 3 = 10G, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{S}} \cdots \hat{\mathbf{V}} = S_{iimm} = 1/K, \quad \hat{\mathbf{S}} \cdots \hat{\mathbf{D}} = S_{imim} - S_{iimm} / 3 = 5/(2G), \quad (6)$$

где  $C_{ijmn}$  и  $S_{ijmn}$  – компоненты изотропных тензоров  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  соответственно. После замены в формулах (5) и (6)  $K$  на  $K^\circ$  и  $G$  на  $G^\circ$  они будут справедливы и для инвариантов тензоров  $\hat{\mathbf{C}}^\circ$  и  $\hat{\mathbf{S}}^\circ$ .

Тензору  $\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)}$ , определяющему упругие свойства трансверсально изотропного включения, принадлежащего типу с номером  $\zeta = \overline{1, N}$ , можно поставить в соответствие симметрическую матрицу  $C^{(\zeta)}$  шестого порядка с ненулевыми элементами (верхний индекс  $\zeta$  у элементов матриц опущен) [21]  $C_{11} = C_{22}$ ,  $C_{12} = C_{21}$ ,  $C_{13} = C_{23} = C_{31} = C_{32}$ ,  $C_{33}$ ,  $C_{44} = C_{55}$  и  $C_{66} = (C_{11} - C_{12}) / 2$ . Заменяя равенство для  $C_{66}$  на  $S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$ , а в остальных случаях символ  $C$  на  $S$ , получим элементы матрицы  $S^{(\zeta)}$ , соответствующей тензору  $\hat{\mathbf{S}}^{(\zeta)}$ . Тогда инварианты этих тензоров примут вид [15]

$$C_{iimm}^{(\zeta)} = 2C_{11} + 2C_{12} + 4C_{13} + C_{33}, \quad C_{imim}^{(\zeta)} = 3C_{11} - C_{12} + C_{33} + 4C_{44}, \quad (7)$$

$$S_{iimm}^{(\zeta)} = 2S_{11} + 2S_{12} + 4S_{13} + S_{33}, \quad S_{imim}^{(\zeta)} = 3S_{11} - S_{12} + S_{33} + S_{44}. \quad (8)$$

Осредненные по представительному объему  $V$  композита локальные значения  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}(M)$  и  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}(M)$  тензоров второго ранга соответственно напряжений и деформации в окрестности точки  $M \in V$  имеют вид

$$\langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\sigma}(M) dV(M) \quad \text{и} \quad \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \hat{\varepsilon}(M) dV(M),$$

где угловые скобки обозначают операцию осреднения. Модули упругости  $K$  и  $G$  композита, связывающие эти осредненные тензоры называют эффективными, определяющими тензоры  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$  в формулах (2). Введем эти тензоры из условия равенства потенциальной энергии деформации в изотропной среде и в реальном композите [21]:

$$\frac{V}{2} \langle \hat{\varepsilon} \rangle \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \langle \hat{\varepsilon} \rangle = \frac{V}{2} \langle \hat{\sigma} \rangle \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \langle \hat{\sigma} \rangle = \frac{1}{2} \int_V \hat{\sigma}^* \cdot \hat{\varepsilon}^* dV, \quad (9)$$

где  $\hat{\sigma}^*$  и  $\hat{\varepsilon}^*$  – тензоры напряжений и деформации, описывающие истинное напряженно-деформированное состояние в представительном объеме композита, удовлетворяющее условиям равновесия и совместности деформаций. Тензоры  $\hat{\mathbf{C}}$  и  $\hat{\mathbf{S}}$ , характеризующие упругие свойства композита, подлежат оценке на основе того или иного подхода.

### 3. Вариационный подход

При отсутствии объемных сил и задании кинематических граничных условий на поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$ , функционал Лагранжа, достигающий минимума на истинном распределении перемещений в замкнутой области  $\bar{V} = V \cup S$ , имеет вид [21]

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}(M) \cdot \hat{\mathbf{C}}^*(M) \cdot \hat{\varepsilon}(M) dV(M), \quad (10)$$

где  $\hat{\mathbf{C}}^*$  – тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов упругости матрицы и включений и зависящий от положения точки  $M \in V$ . Этот функционал допустимо рассматривать на непрерывных и кусочно дифференцируемых по пространственным координатам распределениях перемещений, удовлетворяющих кинематическим граничным условиям. Тогда при допустимом однородном деформированном состоянии, определяемом тензором  $\hat{\varepsilon}_* = \langle \hat{\varepsilon} \rangle$ , с учетом формул (9) и (10) и равенства  $\hat{\sigma}^* = \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \hat{\varepsilon}^*$ , опустив обозначение точки  $M \in V$ , можно записать

$$\frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_* \cdot \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \hat{\varepsilon}_* dV \geq \frac{1}{2} \int_V \hat{\varepsilon}_* \cdot \hat{\mathbf{C}}^* \cdot \hat{\varepsilon}_* dV = \frac{V}{2} \hat{\varepsilon}_* \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\varepsilon}_*.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{C}}^*(M) dV(M) \geq \hat{\mathbf{C}}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами  $\hat{\mathbf{V}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$  с учетом формул (5) будет эквивалентно двум неравенствам, содержащим линейные инварианты тензоров  $\hat{\mathbf{C}}^*$  и  $\hat{\mathbf{C}}$ :

$$\frac{1}{V} \int_V C_{iimn}^*(M) dV(M) \geq 9K, \quad \frac{1}{V} \int_V \left( C_{iimn}^*(M) - \frac{C_{iimn}^*(M)}{3} \right) dV(M) \geq 10G,$$

где  $C_{ijmn}^*(M)$  – компоненты тензора  $\hat{\mathbf{C}}^*$ , определенные в выбранной системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах матрицы и отдельно взятых вклю-

чений, что позволяет представить верхние оценки  $K_+$  и  $G_+$  соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\tilde{K}_+ = C_V^\circ + \frac{1}{9K^\circ} \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)} C_{iimm}^{(\zeta)}, \quad \tilde{G}_+ = C_V^\circ + \frac{1}{10G^\circ} \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)} \left( C_{imim}^{(\zeta)} - \frac{C_{iimm}^{(\zeta)}}{3} \right), \quad (11)$$

где  $\tilde{K}_+ = K_+ / K^\circ$ ,  $\tilde{G}_+ = G_+ / G^\circ$ ,  $C_{ijmn}^{(\zeta)}$  - компоненты тензора  $\hat{C}^{(\zeta)}$ , определенные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ , а  $C_V^\circ$  - объемное содержание матрицы в композите, причем

$$C_V^\circ + \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)} = C_V^\circ + C_V = 1.$$

При отсутствии объемных сил и задании силовых граничных условий на поверхности  $S$  функционал Кастилиано, максимизируемый на истинном распределении напряжений в замкнутой области  $\bar{V}$ , имеет вид [21]

$$J_2 = -\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{\sigma}}(M) \cdot \hat{\mathbf{S}}^*(M) \cdot \hat{\mathbf{\sigma}}(M) dV(M), \quad M \in V, \quad (12)$$

где  $\hat{\mathbf{S}}^*$  - тензор, соответствующий локальным значениям коэффициентов податливости матрицы и включений в объеме  $V$ . Этот функционал допустимо рассматривать на статически возможных распределениях напряжений. При допустимом однородном напряженном состоянии, определяемом тензором  $\hat{\mathbf{\sigma}}_* = \langle \hat{\mathbf{\sigma}} \rangle$ , с учетом формул (9) и (12) и равенства  $\hat{\mathbf{\epsilon}}^* = \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \hat{\mathbf{\sigma}}^*$ , опустив обозначение точки  $M \in V$ , получим соотношение

$$-\frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{\sigma}}_* \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \hat{\mathbf{\sigma}}_* dV - \frac{1}{2} \int_V \hat{\mathbf{\sigma}}^* \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \hat{\mathbf{\sigma}}^* dV = -\frac{V}{2} \hat{\mathbf{\sigma}}_* \cdot \hat{\mathbf{S}}^* \cdot \hat{\mathbf{\sigma}}_*.$$

Отсюда следует неравенство

$$\frac{1}{V} \int_V \hat{\mathbf{S}}^*(M) dV(M) \hat{\mathbf{S}}, \quad M \in V,$$

которое после полной свертки с тензорами  $\hat{\mathbf{V}}$  и  $\hat{\mathbf{D}}$  с учетом формул (6) будет эквивалентно двум неравенствам, включающим линейные инварианты тензоров  $\hat{\mathbf{S}}^*$  и  $\hat{\mathbf{S}}$ :

$$\frac{1}{V} \int_V S_{iimm}^*(M) dV(M) \frac{1}{K}, \quad \frac{1}{V} \int_V \left( S_{imim}^*(M) - \frac{S_{iimm}^*(M)}{3} \right) dV(M) \frac{5}{2G},$$

где  $S_{ijmn}^*(M)$  - компоненты тензора  $\hat{\mathbf{S}}^*$ , определенные в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Подынтегральные функции в этих неравенствах кусочно постоянны в пределах отдельно взятых включений и в матрице, что дает возможность представить нижние оценки  $K_-$  и  $G_-$  соответствующих модулей упругости композита в виде

$$\tilde{K}_- = \left( C_V^\circ + K^\circ \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)} S_{iimm}^{(\zeta)} \right)^{-1}, \quad \tilde{G}_- = \left( C_V^\circ + \frac{2G^\circ}{5} \sum_{\zeta=1}^N C_V^{(\zeta)} \left( S_{imim}^{(\zeta)} - \frac{S_{iimm}^{(\zeta)}}{3} \right) \right)^{-1}, \quad (13)$$

где  $\tilde{K}_- = K_- / K^\circ$ ,  $\tilde{G}_- = G_- / G^\circ$ ,  $S_{ijmn}^{(\zeta)}$  - компоненты тензора  $\hat{\mathbf{S}}^{(\zeta)}$ . При вычислении инвариантов тензоров в формулах (11) и (13) следует использовать соотношения (5) -(8).

Оценки (11) и (13) можно также получить с привлечением теории смесей [23]. При существенном различии упругих характеристик матрицы и включений представленные двусторонние оценки могут привести к значительному различию значений, соответствующих верхней и нижней границам. Один из подходов, дающий возможность уточнить упругие характеристики рассматриваемого композита, основан на учете методом самосогласования механического взаимодействия элементов структуры композита с изотропной линейно упругой средой, модули упругости которой подлежат определению как искомые характеристики этого композита [24, 25].

#### 4. Метод самосогласования

Оценка упругих свойств композита как неоднородного тела методом самосогласования состоит в осреднении возмущений напряженно-деформированного состояния в элементах неоднородности (включениях или частицах матрицы). Эти возмущения вызваны механическим взаимодействием этих элементов с однородной окружающей изотропной средой, имеющей искомые модули упругости.

В силу неопределенности формы частиц матрицы, связывающей в композите включения при их хаотическом расположении, примем в качестве средней статической эту форму шаровой с радиусом, изменяющимся от некоторого конечного до бесконечно малого, что позволяет заполнить все пустоты между сферидальными включениями. Взаимодействие упругой изотропной шаровой частицы матрицы с изотропной окружающей средой определяют соотношения [25]

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ = \hat{\mathbf{u}}^\circ \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \quad \hat{\mathbf{u}}^\circ = (\hat{\mathbf{C}}^\circ - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}} - \hat{\mathbf{I}}, \quad (14)$$

где  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ$  - тензор, характеризующий отклонения деформации в частице от однородного деформированного состояния представительного объема композита, определяемого тензором  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ ,

$$\hat{\mathbf{W}} = 3(1-\nu)\hat{\mathbf{V}} / (1+\nu) + (15/2)(1-\nu)\hat{\mathbf{D}} / (4-5\nu),$$

а  $\nu = 1/2 - 3G / (6K + 2G)$  - коэффициент Пуассона среды, окружающей частицу матрицы.

Для трансверсально изотропного включения, свойства которого характеризует тензор  $\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)}$  коэффициентов упругости, по аналогии с формулами (14) запишем

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\zeta)} = \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0, \quad \hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} = (\hat{\mathbf{C}}^{(\zeta)} - \hat{\mathbf{C}} + \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{(\zeta)})^{-1} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{W}}^{(\zeta)} - \hat{\mathbf{I}}, \quad (15)$$

где  $\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}$  - тензор, определяющий отклонение деформации в этом включении от однородного деформированного состояния представительного объема композита,  $\hat{\mathbf{W}}^{(\zeta)}$  - тензор четвертого ранга, компоненты которого зависят от искомым характеристик композита и от формы включения, принадлежащего типу с номером  $\zeta = \overline{1, N}$ . Тензор  $\hat{\mathbf{W}}^{(\zeta)}$  является обратным тензору Эшелби [18, 26]  $\hat{\mathbf{N}}^{(\zeta)}$  с компонентами, определенными в системе координат  $O\xi_1\xi_2\xi_3$ . Тензору  $\hat{\mathbf{N}}^{(\zeta)}$  в случае трансверсально изотропных включений соответствует несимметрическая матрица  $N^{(\zeta)}$  шестого порядка, имеющая 7 независимых элементов [18] (у элементов матрицы и у параметра  $\bar{b}_\zeta$  опущен индекс  $\zeta$ ):

$$N_{11} = N_{22} = QD_{11} + RD_1, \quad N_{12} = N_{21} = QD_{11}/3 - RD_1, \quad N_{33} = QD_{33} + RD_3,$$

$$N_{13} = N_{23} = QD_{31} - RD_1, \quad N_{31} = N_{32} = QD_{13} - RD_3, \quad N_{66} = QD_{11}/3 + RD_1,$$

$$N_{44} = N_{55} = Q(1 + \bar{b}^2)D_{13}/2 + R(1 - D_1)/2,$$

где  $Q = (3/2)/(1-\nu)$ ,  $R = (1/2-\nu)/(1-\nu)$ ,  $D_{11} = (1-3D_{13})/4$ ,

$$D_1 = \frac{\bar{b}/2}{(1-\bar{b}^2)^{3/2}} (\arccos \bar{b} - \bar{b}(1-\bar{b}^2)^{3/2}), \quad D_3 = 1 - 2D_1, \quad D_{13} = \frac{D_3 - D_1}{3(1-\bar{b}^2)}, \quad D_{33} = 1/3 - 2\bar{b}^2 D_{13}, \quad D_{31} = D_{13} \bar{b}^2.$$

Остальные элементы этой матрицы равны нулю.

Оценку в первом приближении влияния формы пластинчатых включений на упругие характеристики рассматриваемого композита можно получить, построив зависимости от параметра  $\bar{b}$  коэффициентов  $D$ , входящих в соотношения для элементов матрицы  $N$ , соответствующей тензору Эшелби. Из графиков этих зависимостей, представленных на Рис. 1 в полулогарифмических координатах, видно, что влияние параметра  $\bar{b}$  на значения указанных коэффициентов пренебрежимо мало при  $\bar{b} < 0,01$ . На Рис. 1 коэффициентам  $D_1$  и  $D_3$  отвечают сплошные кривые, ординаты которых при  $\bar{b} \rightarrow 1$  стремятся к значению  $1/3$  соответственно снизу и сверху,  $D_{13}$  и  $D_{31}$  - штриховые линии с ординатами, стремящимися при  $\bar{b} \rightarrow 1$  к значению  $1/15$  сверху и снизу соответственно, а коэффициентам  $D_{11}$  и  $D_{33}$  - штрихпунктирные линии, ординаты которых при  $\bar{b} \rightarrow 1$  стремятся к значению  $1/5$  соответственно снизу и сверху. При  $\bar{b} \rightarrow 0$  значения коэффициентов  $D_1$ ,  $D_{31}$  и  $D_{11}$  стремятся к нулю,  $D_{13}$  и  $D_{33}$  - к  $1/3$ , а коэффициента  $D_3$  - к 1.

Осреднение по объему композита возмущений деформации по всем включениям и частицам матрицы должно, согласно методу самосогласования, привести к нулевому результату, т.е.

$$\langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(\varsigma)} \rangle C_V^{(\varsigma)} = \hat{\mathbf{O}}_2,$$

где  $\hat{\mathbf{O}}_2$  - тензор второго ранга с нулевыми компонентами. Все тензоры второго ранга, входящие в левые части этого равенства и определенные первыми формулами (14) и (15), имеют один и тот же множитель  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_0$ , характеризующий макроскопически однородное деформированное состояние композита. Поэтому при осреднении этот множитель можно опустить и перейти к осреднению тензоров четвертого ранга, определенных вторыми формулами (14) и (15), т.е.

$$\langle \hat{\mathbf{u}}^\circ \rangle C_V^\circ + \sum_{\varsigma=1}^N \langle \hat{\mathbf{u}}^{(\varsigma)} \rangle C_V^{(\varsigma)} = \hat{\mathbf{O}}_4. \quad (16)$$

При хаотической ориентации осей вращения сфероидальных включений равенство (16) равносильно системе двух однородных уравнений, левые части которых содержат линейные инварианты тензоров  $\hat{\mathbf{u}}^\circ$  и

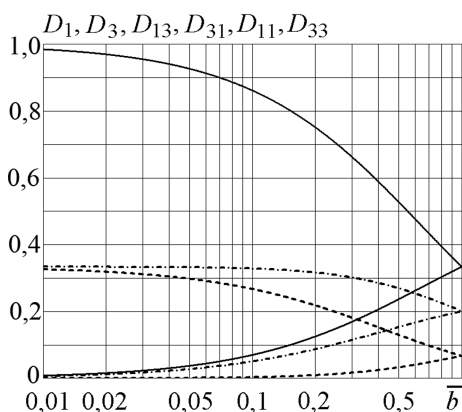


Рис. 1. Зависимости коэффициентов, определяющих компоненты тензора Эшелби, от относительной толщины включений:  $D_1$  и  $D_3$  – сплошные кривые;  $D_{13}$  и  $D_{31}$  – штриховые кривые;  $D_{11}$  и  $D_{33}$  – штрихпунктирные кривые  
The coefficients determining the Eshelby tensor components versus the normalised inclusion thickness:  $D_1$  и  $D_3$  – solid lines;  $D_{13}$  и  $D_{31}$  – dashed lines;  $D_{11}$  и  $D_{33}$  – dash-dotted lines

$\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)}$ ,  $\zeta = \overline{1, N}$ . Эти уравнения, содержащие в качестве неизвестных объемный модуль  $K$  и модуль сдвига  $G$  композита, можно представить в виде

$$(\hat{\mathbf{u}}^\circ \dots \hat{\mathbf{V}})C_V^\circ + \sum_{\zeta=1}^N (\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} \dots \hat{\mathbf{V}})C_V^{(\zeta)} = 0, \quad (\hat{\mathbf{u}}^\circ \dots \hat{\mathbf{D}})C_V^\circ + \sum_{\zeta=1}^N (\hat{\mathbf{u}}^{(\zeta)} \dots \hat{\mathbf{D}})C_V^{(\zeta)} = 0.$$

### 5. Пример расчета

Расчет значений модулей упругости проведен по представленным выше формулам для композита, армированного включениями лишь одного типа, но для разных значений параметра  $\bar{b}$ . На Рис. 2 представлены зависимости объемного модуля  $K$  и модуля сдвига  $G$  композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации  $C_V$  пластинчатых включений из трансверсально изотропного карбида кремния ( $\alpha$ -SiC), для которого известны значения элементов матрицы коэффициентов упругости [27]:  $C_{11}^{(1)} = 504$  ГПа,  $C_{12}^{(1)} = 98$  ГПа,  $C_{13}^{(1)} = 56$  ГПа,  $C_{33}^{(1)} = 566$  ГПа,  $C_{44}^{(1)} = 170$  ГПа и  $C_{66}^{(1)} = 203$  ГПа. Для алюминиевой матрицы принято  $K^\circ = 81,3$  ГПа и  $G^\circ = 25,9$  ГПа. Штрихпунктирная и пунктирная линии без символов соответствуют верхней  $K_+$  и  $K_-$  нижней оценкам объемного модуля, определяемые первыми формулами (11) и (13), а такие же линии с темными кружками, построенные по вторым формулам (11) и (13), - верхней  $G_+$  и нижней  $G_-$  оценкам модуля сдвига данного композита. Сплошные и штриховые кривые представляют результаты расчета модулей  $K$  и  $G$  композита методом самосогласования. Кривые без символов построены при  $\bar{b} = 0,1$ , а кривые с ромбами - при  $\bar{b} = 0,01$ . Для сравнения приведены результаты расчета для шаровых включений ( $\bar{b} = 1$ , кривые со светлыми кружками). Поскольку матрица композита принята изотропной, все оценки каждого из модулей при  $C_V = 0$  совпадают между собой. При значении  $C_V = 1$  компо-

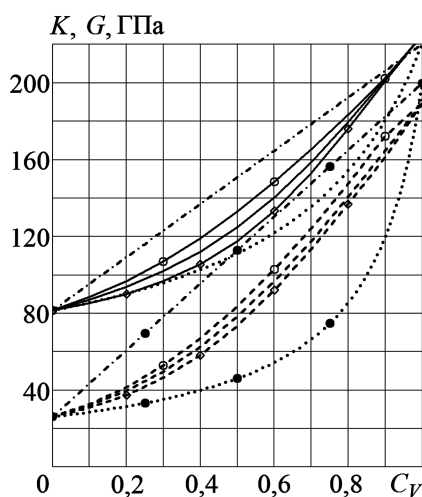


Рис. 2. Зависимости модулей упругости композита с алюминиевой матрицей от объемной концентрации включений из карбида кремния:  $K$  – сплошная кривая;  $G$  – штриховая кривая;  $K_+$  и  $K_-$  – штрихпунктирная и пунктирная кривые;  $G_+$  и  $G_-$  – штрихпунктирная и пунктирная кривые с темными кружками  
The elastic moduli of a Al-matrix composite with SiC particles volume fraction:  $K$  – solid lines;  $G$  – shaped lines;  $K_+$  and  $K_-$  – dash-dotted and dotted lines;  $G_+$  and  $G_-$  – dash-dotted and dotted lines with dark circles



зит формально состоит лишь из трансверсально изотропных пластинчатых включений, для которых верхние оценки модулей упругости несколько выше нижних оценок. В этом случае расчет методом самосогласования для объемного модуля дает значения несколько выше верхней оценки, а для модуля сдвига – несколько ниже нижней оценки. По мере уменьшения относительной толщины пластинчатого включения, характеризуемой значением параметра  $b$ , модули упругости композита при фиксированном значении  $C_V$  убывают, а для объемного модуля при  $\bar{b} = 0,01$  участок соответствующей кривой при  $C_V < 0,3$  практически совпадает с нижней границей возможных значений этого модуля, установленной с использованием вариационного подхода. Для всех рассмотренных значений параметра  $b$  кривые зависимости модуля сдвига от  $C_V$  при  $C_V < 0,9$  расположены примерно в середине между нижней и верхней границами возможных значений этого модуля.

С возрастанием  $C_V$  рассчитанное значение коэффициента Пуассона композита монотонно убывает от значения  $\nu \approx 0,356$ , соответствующего материалу матрицы, до значения  $\nu \approx 0,156$  при  $C_V = 1$  и  $\bar{b} = 1$  (в случае пластинчатых включений  $\nu \approx 0,171$  для  $\bar{b} = 0,1$  и  $\nu \approx 0,178$  для  $\bar{b} = 0,01$ ). Для оценки взаимного влияния параметра  $\bar{b}$  и коэффициента Пуассона композита на значения элементов матрицы, соответствующей тензору Эшелби, на Рис. 3 и 4 в полулогарифмических координатах приведены зависимости от  $b$  элементов этой матрицы при  $\nu = 0,356$ ,  $\nu = 0,156$  соответственно. Из представленных графиков следует, что для каждого из принятых значений коэффициента Пуассона влиянием изменения параметра  $\bar{b}$  можно пренебречь при  $\bar{b} < 0,01$ .

На Рис. 3 элементам  $N_{11}$  и  $N_{33}$  отвечают сплошные кривые, ординаты которых при  $\bar{b} \rightarrow 1$  стремятся к значению 0,5412 соответственно снизу и сверху,  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - штриховые линии с ординатами, стремящимися при  $\bar{b} \rightarrow 1$  к значению 0,2298 сверху и снизу соответственно,  $N_{12}$  - пунктирная линия, а элементам  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - штрихпунктирные линии, ординаты которых при  $\bar{b} \rightarrow 1$  стремятся к значению 0,08074 соответственно

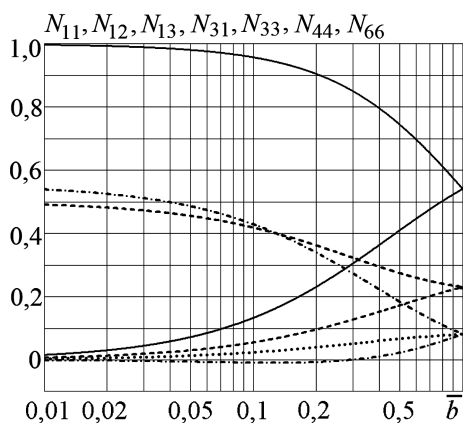


Рис. 3. Зависимости значений элементов матрицы, соответствующей тензору Эшелби, от относительной толщины включений при  $\nu = 0,356$ :  $N_{11}$  и  $N_{33}$  - сплошные кривые;  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - штриховые кривые;  $N_{12}$  - пунктирная кривая;  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - штрихпунктирные кривые

The dependencis of composnents of the Eshelby tensor on the normalised inclusion thickness  $\nu = 0,356$ :  $N_{11}$  и  $N_{33}$  - solid lines;  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - shaped lines;  $N_{12}$  - dotted line;  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - dash-dotted lines.

снизу и сверху. При  $\bar{b} \rightarrow 0$  значения элементов  $N_{11}$ ,  $N_{12}$ ,  $N_{13}$  и  $N_{66}$  стремятся к нулю,  $N_{11}$  - к 1,  $N_{31}$  - к 0,5528, а  $N_{44}$  - к 0,5. На Рис. 4 при тех же обозначениях кривых характер зависимостей остался прежним, но при  $\bar{b} \rightarrow 1$  значения элементов  $N_{11}$  и  $N_{33}$  стремятся к 0,4919,  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - к 0,2543,  $N_{12}$ ,  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - к -0,01739. При  $\bar{b} \rightarrow 0$  значение  $N_{31}$  стремится к 0,1848, а остальные элементы сохраняют свои прежние предельные значения.

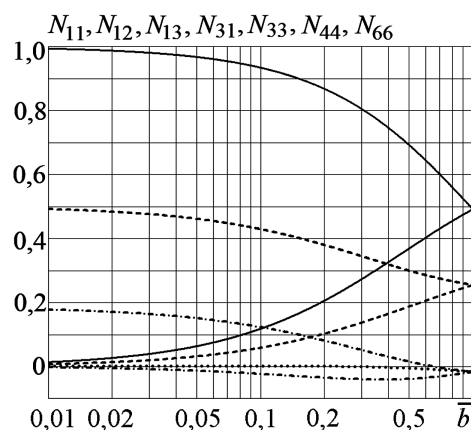


Рис. 4. Зависимости значений элементов матрицы, соответствующей тензору Эшелби, от относительной толщины включений при  $\nu = 0,156$ :  $N_{11}$  и  $N_{33}$  - сплошные кривые;  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - штриховые кривые;  $N_{12}$  - пунктирная кривая;  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - штрихпунктирные кривые  
The dependencis of the components of the Eshelby tensor on the normalised inclusion thickness,:  $N_{11}$  и  $N_{33}$  - solid lines;  $N_{44}$  и  $N_{66}$  - shaped lines; - dotted line;  $N_{13}$  и  $N_{31}$  - dash-dotted lines

## 6. Заключение

Полученные двусторонние оценки упругих характеристик композита с хаотически ориентированными анизотропными пластинчатыми включениями дают возможность установить границы ожидаемых значений его модулей упругости. Применение метода самосогласования позволило учесть влияние формы включений на эти модули. Установлено, что это влияние несущественно при малой объемной концентрации включений, но и с увеличением их объемной концентрации изменение каждого из модулей упругости композита, армированного включениями, существенно отличающимися по своей относительной толщине, сравнительно мало.

Представленные расчетные зависимости дают возможность прогнозировать значения модулей упругости композита с пластинчатыми анизотропными включениями.

Работа выполнена по грантам НШ-1432.2014.8 и МК-6573.2015.8 программ Президента РФ государственной поддержки ведущих научных школ и молодых кандидатов наук, а также в рамках проекта 1712 в сфере научной деятельности в части государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ и государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

### Библиографический список

1. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 400 с.
2. Механика композиционных материалов. Ред. Дж. Сендецки: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 564 с.
3. Кристенсен Р. Введение в механику композитов: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
4. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: Наукова думка, 1985. 302 с.
5. Калинин В.А., Ягодников Д.А. Технология производства ракетных двигателей твердого топлива. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 с.
6. Комков М.А., Тарасов В. А. Технология намотки композитных конструкций ракет и средств поражения. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 с.

7. *Физическое металловедение* / Под ред. Р. Кана: Пер. с англ. В 3-х т. Т. 2. М.: Мир, 1968. 492 с.
8. Ван Флек Л. *Теоретическое и прикладное материаловедение*: Пер. с англ. М.: Атомиздат, 1975. 472 с.
9. Б.Н. Арзамасов, А.И. Крашенинников, Ж.П. Пастухова, А.Г. Рахштадт, *Научные основы материаловедения*, М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. 366 с.
10. Кац Е.А. *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей*. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
11. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. 442. P. 282–286.
12. Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Physica E*. 2007. V. 40. P. 228–232.
13. А.В. Елецкий, И.М. Искандарова, А.А. Книжник, Д.Н. Красиков, Графен: методы получения и теплофизические свойства, *УФН*. 2011. Т. 181, № 3. С. 233–268.
14. *Superlubricity* / Eds. A. Erdemir and J.-M. Martin. Amsterdam: Elsevier, 2007. 524 p.
15. Беринский И.Е., Кривцов А.М. Об использовании многочастичных межатомных потенциалов для расчета упругих характеристик графена и алмаза. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. № 6. С. 60–85.
16. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Двусторонние оценки эффективной теплопроводности композита с анизотропными пластинчатыми включениями, *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн*. 2014. № 11. DOI: 10.7463/1114.0737893.
17. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными пластинчатыми включениями. *Композиты и наноструктуры*. 2015. Т. 7. № 1. С. 1–13
18. Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 248 с.
19. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Изотропные шаровые включения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2014. № 5. С. 53–69.
20. Димитриенко Ю.И. *Тензорное исчисление*. М.: Высш. шк., 2001. 576 с.
21. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
22. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки упругих характеристик композита с короткими анизотропными волокнами. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2015. № 4. С. 70–77.
23. Головин Н.Н., Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Смесевые модели механики композитов. Ч. 1. Термомеханика и термоупругость многокомпонентной смеси. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2009. № 3. С. 36–49.
24. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials. *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. № 4. P. 213–222.
25. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Сравнительный анализ оценок модулей упругости композита. Анизотропные шаровые включения. *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение*. 2014. № 6. С. 20–31.
26. Цвелодуб И.Ю. Об обратном тензоре Эшелби. *Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Сер. Механика предельного состояния*. 2010. № 2 (8). С. 530–535.
27. Францевич И.Н., Воронов Ф.Ф., Бакута С.А. *Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов. Справочник*. Киев: Наукова думка, 1982. 287 с.

#### References

1. Shermegor T.D. *Teorija uprugosti mikroneodnorodnyh sred* [Theory of elasticity of micronon-uniform environments]. М.: Nauka, 1977. 400 p.
2. Brautman L. Krok R., Dzh. Sendecki *Mehanika kompozicionnyh materialov* [Mechanics of composite materials]. Trans. from English. М.: Mir, 1978. 564 p.
3. Kristensen R. *Vvedenie v mehaniku kompozitov* [Introduction to mechanics of composites]. Trans. from English. М.: Mir, 1982. 336 p.
4. Vanin G.A. *Mikromehanika kompozicionnyh materialov* [Mikromechanics of composite materials]. Kiev: Naukova dumka, 1985. 302 p.
5. Kalinchev V.A., Jagodnikov D.A. *Tehnologija proizvodstva raketnyh dvigatelej tverdogo topliva* [Production technology of rocket engines of solid fuel]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 688 p.
6. Komkov M.A., Tarasov V. A. *Tehnologija namotki kompozitnyh konstrukcij raket i sredstv porazhenija* [Technology of winding of composite designs of rockets and means of defeat]. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011. 432 p.
7. Kan R.U., Haazen P.T. *Fizicheskoe materialovedenie* [Physical metallurgy]. Vol. 2. Moscow. Mir. 1968. 492 p.
8. Van Flek L. *Teoreticheskoe i prikladnoe materialovedenie* [Theoretical and Applied Materials] Trans. from English. Moscow. Atomizdat. 1975. 472 p.
9. Arzamasov B.N., Krashennikov A.I., Pastuhova J.P., Rahshtadt A.G. *Nauchnye osnovy materialovedeniya* [Scientific bases of Materials] Moscow. Изд-во МГТУ. им. Н.Э. Баумана. 1994. 366 p.

10. Кас Е.А. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaja form i idej* [Fullerens, carbon nanotubes and nanoclusters. Family tree of forms and ideas]. М.: Izd-vo LKI, 2008. 296 p.
11. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. 442. P. 282–286.
12. Chen Zh., Lin Yu.M., Rooks M.J., Avouris Ph. Graphene nano-ribbon electronics. *Physica E*. 2007. V. 40. P. 228–232.
13. Eletskiy A.V., Iskandarova I.M., Knignik A.A., Krasikov D.N. Graphene: fabrication methods and thermophysical properties. *UFN - Physics-Uspekhi*, 2011, Vol. 181, no. 3, pp 233–268 (in Russian).
14. *Superlubricity* / Eds. A. Erdemir and J.-M. Martin. Amsterdam: Elsevier, 2007. 524 p.
15. Berinskij I.E., Krivcov A.M. About use of multipartial interatomic potentials for calculation of elastic characteristics of a decanter and diamond. *Izv. RAN. Mehanika tverdogo tela – Herald RAN. Mechanics of a solid body*. 2010. № 6, pp. 60–85 (in Russian).
16. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savelyeva I.Ju. Bilateral estimates of effective heat conductivity of a composite with anisotropic lamellar inclusions *Nauka i obrazovanie. MGTU. im. N.E. Baumana. Elektron. Jurnal.*, 2014. № 11. DOI: 10.7463/1114.0737893.
17. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Heat conductivity of the textured composite with anisotropic lamellar inclusions *Kompozity i nanostruktury - Composites and nanostructures.* 2015. Vol. 7. № 1. Pp. 1–13
18. Jeshelbi Dzh. *Kontinual'naja teorija dislokacij* [Continual theory of dislocations] Trans. from English. М.: Izd-vo inostr. lit. 1963. 248 p.
19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Comparative analysis of estimates of modules of elasticity of a composite. Isotropic spherical inclusions. *Vestnik MGTU. im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie - Herald MSTU. NE Bauman. Ser. Mechanical Engineering*. 2014. № 5. Pp. 53 - 69.
20. Dimitrienko Ju.I. *Tenzornoe ischislenie* [Calculus of tensors]. М.: Vyssh. shk., 2001. 576 p.
21. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mehaniki i jelektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamic of the continuous environment]. М.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2008. 512 p.
22. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Estimates of elastic characteristics of a composite with short anisotropic fibers. *Vestnik MGTU. im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie - Herald MSTU. NE Bauman. Ser. Mechanical Engineering*. 2015. № 4. C. 70–77.
23. **Golovin N.N., Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** Smesevye modeli mehaniki kompozitov. Ch. 1. Termomehanika i termouprugost' mnogokomponentnoj smesi // *Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Ser. Estestvennye nauki*. 2009. 3. 36–49 pp.
24. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // *J. Mech. Phys. Solids*. 1965. Vol. 13. № 4. P. 213–222.
25. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Comparative analysis of estimates of modules of elasticity of a composite. Anisotropic spherical inclusions. *Vestnik MGTU. im. N.E. Baumana. Ser. Mashinostroenie - Herald MSTU. NE Bauman. Ser. Mechanical Engineering*. 2014. № 6. Pp. 20–31.
26. Cvelodub I.YU. About the return tensor of Eshelbi. *Vestnik ChGPU im. I.Ja. Jakovleva. Ser. Mehanika predel'nogo sostojanija - Herald ChGPU I.Ya. Yakovlev. Ser. Mechanics of a limit state*. 2010. № 2 (8). Pp. 530–535.
27. Francevich I.N., Voronov F.F., Bakuta S.A. *Uprugie postojannye i moduli uprugosti metallov i nemetallov* [Elastic constants and modules of elasticity of metals and nonmetals]. Spravochnik. Kiev: Naukova dumka, 1982. 287 p.

#### Сведения об авторах

**В.С.Зарубин** - д-р техн. наук, профессор кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э.Баумана.

**Г.Н.Кувыркин** - д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э.Баумана.

**\*И.Ю.Савельева** - канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Прикладная математика» МГТУ им. Н.Э.Баумана.

---

\*Контактное лицо: И.Ю.Савельева, e-mail: Inga.Savelyeva@gmail.com