

УДК 536.2

ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОМПОЗИТА С АНИЗОТРОПНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ ЛЕНТОЧНОЙ ФОРМЫ

(получено редакцией 04.05.2016, принято в печать – 01.11.2016)

В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин, И.Ю. Савельева

МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

На основе математической модели теплопереноса в неоднородном твердом теле с анизотропными эллипсоидальными включениями построена процедура оценки компонент тензора эффективной теплопроводности композита с анизотропными ленточными включениями, моделирующими форму фрагментов графена. Рассмотрены случаи упорядоченного и хаотического расположения включений в изотропной матрице композита. С применением двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле получены двусторонние оценки, позволяющие установить наибольшую возможную погрешность при использовании в качестве компонент тензора эффективной теплопроводности рассматриваемого композита полусумм соответствующих оценок. В силу электротепловой аналогии представленные оценки применимы при рассмотрении характеристик электропроводности и диэлектрической проницаемости композитов с включениями ленточной формы.

Ключевые слова: композит, анизотропные ленточные включения, тензор эффективной теплопроводности, двусторонние оценки.

ESTIMATES OF EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF THE COMPOSITE WITH ANISOTROPIC TAPE FORM INCLUSIONS

V.S. Zarubin, G.N. Kuvyrkin, I.Y. Savelyeva

Bauman Moscow State Technical University, Russia

On the basis of mathematical model of heattransfer in a non-uniform solid body with anisotropic ellipsoidal inclusions the procedure of assessment of effective thermal conductivity tensor components for a composite with the anisotropic tape inclusions modeling a form of fragments of a decanter is constructed. Cases of the ordered and chaotic arrangement of inclusions in an isotropic matrix of a composite are considered. With application of the dual variation formulation of a problem of stationary heat conductivity in a non-uniform anisotropic solid body the bilateral estimates allowing to establish the greatest possible error when using in quality a component of a tensor of effective heat conductivity of the considered composite of half-sums of the corresponding estimates are received. Owing to electrothermal analogy the presented estimates are applicable by consideration of characteristics of conductivity and dielectric permeability of composites with inclusions of a tape form.

Key words: composite, anisotropic tape inclusions, tensor of effective thermal conductivity, bilateral estimates.

1. Введение

Модификация композитов различными наноструктурными элементами [1, 2], обладающими уникальными свойствами, открывает перспективу повышения макроскопических характеристик таких композитов как конструкционных и функциональных материалов. Среди многообразия наноструктурных элементов в качестве модифицирующих включений рассматривают фрагменты графена [3, 4], имеющие повышенные

механические характеристики и аномально высокую теплопроводность, превосходящую теплопроводность всех известных материалов [5]. Теплопроводность в значительной степени определяет конкретные области применения композита в качестве материала технического устройства, подверженного тепловым воздействиям. Экспериментальные измерения [6, 7] и результаты математического моделирования [8-10] для однослойного графена в виде двумерной структуры, состоящей из правильных шестиугольников с атомами углерода в их вершинах, дают оценки коэффициента теплопроводности в плоскости слоя между 3500 и 5500 Вт/(м·К). Установлено влияние различных факторов на теплопроводность графена, которая зависит от температуры, возрастает с увеличением размера листа и уменьшается с увеличением числа слоев. Коэффициент теплопроводности в плоскости пластинки четырехслойного графена заключен в интервале 1300-1700 Вт/(м·К) [11], что сопоставимо с теплопроводностью высококачественного кристаллического графита [5].

При хаотическом расположении фрагментов графена в изотропной матрице композит должен сохранять свойство макроскопической изотропии [12-14], тогда как при упорядоченном расположении в зависимости от конкретной текстуры и формы включений возникает макроскопическая анизотропия свойства теплопроводности, описываемая симметричным тензором второго ранга эффективных коэффициентов теплопроводности [15]. В частном случае сопоставимых размеров пластинки графена в любых двух ортогональных направлениях в ее плоскости форму такой пластинки допустимо моделировать сильно сплюснутым сфероидом [16], что позволяет получить достаточно достоверные оценки компонент указанного тензора в зависимости от объемной концентрации включений в виде круглых пластинок, отношения радиуса пластинки к толщине и соотношения коэффициентов теплопроводности графена в плоскости слоев и в перпендикулярном направлении [17, 18], а также учесть текстуру, характеризующую расположение включений [19].

В более общем случае все три характерных размера фрагмента графена в трех ортогональных направлениях могут быть различны, т.е. форма включения может существенно отличаться от круглой пластинки и в большей степени соответствовать ленточной форме, которую в первом приближении можно моделировать трехосным эллипсоидом. С увеличением размеров пластинки в ее плоскости от 5 до 10 мкм можно ожидать увеличения коэффициента теплопроводности графена примерно в полтора раза [10], что может быть причиной анизотропии теплопроводности в плоскости графена. Следует отметить, что теплопроводность фрагментов графена в направлении, перпендикулярном плоскости слоев, более чем на два порядка ниже теплопроводности в плоскости слоев. Таким образом, все три главных значения тензора теплопроводности фрагмента графена ленточной формы могут быть различны. В данной работе с использованием ранее построенной математической модели переноса тепловой энергии в композите с одинаково ориентированными анизотропными включениями в виде трехосных эллипсоидов [20] представлена процедура оценки компонент тензора эффективной теплопроводности композита, модифицированного фрагментами графена ленточной формы. На основе двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле получены двусторонние границы для возможных значений компонент этого тензора и оценена наибольшая погрешность, возникающая при использовании в качестве компонент тензора эффективной теплопроводности рассматриваемого композита полусумм граничных значений.

2. Модель теплового взаимодействия включения и матрицы

В качестве геометрической модели включения ленточной формы выберем трехосный эллипсоид, полуоси которого удовлетворяют условию $b_1 \geq b_2 \gg b_3$. Начало прямоугольной декартовой системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ выберем в центре этого эллипсоида, а координатные оси совместим с соответствующими осями его симметрии, с которыми совпадают и главные оси тензора теплопроводности включения с главными

значениями λ_k , $k=1,2,3$. Включение поместим в неограниченный массив изотропного материала матрицы с коэффициентом теплопроводности λ° .

Примем, что на весьма большом расстоянии от центра включения по сравнению с длиной b_1 наибольшей полуоси эллипсоида, составляющие градиента установившегося распределения температуры равны G_k . Установившееся распределение температуры $T^\circ(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ в матрице должно удовлетворять уравнению Лапласа $T_{,kk}^\circ = 0$ (здесь и далее использовано правило суммирования по повторяющемуся латинскому индексу, а запятая перед нижними индексами означает операцию дифференцирования по координатам, соответствующим каждому из этих индексов). Известно [21], что этому уравнению удовлетворяет позволяющая выполнить также и граничные условия идеального теплового контакта на поверхности эллипсоидального включения функция

$$T^\circ = G_k \xi_k + A_\alpha^\circ D_k \xi_k, \quad \alpha = k, \quad (1)$$

где $A_\alpha^\circ = \text{const}$,

$$D_\alpha = \frac{b_1 b_2 b_3}{2} \int_\beta^\infty \frac{du}{(b_\alpha^2 + u) f(u)}, \quad (2)$$

β – характеризующий положение точки M с координатами ξ_k положительный корень уравнения

$$\xi_1^2 / (b_1^2 + \beta) + \xi_2^2 / (b_2^2 + \beta) + \xi_3^2 / (b_3^2 + \beta) = 1, \quad (3)$$

а $f(u) = \sqrt{(b_1^2 + u)(b_2^2 + u)(b_3^2 + u)}$. Установившееся распределение температуры в анизотропном включении описывает дифференциальное уравнение $\lambda_\alpha T_{,kk} = 0$, которому удовлетворяет линейное распределение температуры во включении

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = A_k \xi_k, \quad (4)$$

с пока неизвестными составляющими $A_k = \text{const}$ градиента температуры.

Постоянные A_k° и A_k в соотношениях (1) и (4) найдем в предположении идеального теплового контакта на поверхности эллипсоидального включения из условий непрерывности температуры $T = T^\circ$ и плотности теплового потока $\bar{\lambda}_\alpha T_{,k} n_k = T_{,k} n_k$, где $\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha / \lambda^\circ$ и n_k – направляющие косинусы вектора внешней нормали к этой поверхности. Из этих условий для произвольной точки поверхности эллипсоида соответственно следует

$$A_k \xi_k = G_k \xi_k + A_k^\circ \xi_k \bar{D}_\alpha, \quad \bar{\lambda}_\alpha A_k n_k = G_k n_k + A_k^\circ n_k (D_\alpha \xi_\alpha)_{,\alpha} \Big|_{\beta=0}, \quad (5)$$

где \bar{D}_α равны D_α при значении $\beta = 0$ и могут быть представлены эллиптическими интегралами [22, 23]. Отметим, что $\bar{D}_1 + \bar{D}_2 + \bar{D}_3 = 1$ (в частности, для шарового включения $\bar{D}_\alpha = 1/3$), причем для геометрически подобных эллипсоидов значения \bar{D}_α совпадают для одинаковых значений α . На Рис. 1 в логарифмических координатах представлены графики зависимостей \bar{D}_1 (штрихпунктирные линии) и \bar{D}_2 (штриховые линии) от $\bar{b}_3 = b_3/b_1$ при различных значениях $\bar{b}_2 = b_2/b_1$. В случае $\bar{b}_2 = 1$ (сплошная кривая) $\bar{D}_2 = \bar{D}_1$.

Равенства (5) должны быть выполнены в любой точке поверхности включения. В точке с координатами $\xi_1 = b_1, \xi_2 = \xi_3 = 0$ имеем $n_1 = 1, n_2 = n_3 = 0$ и из равенств (5) получим

$$A_1 = G_1 + A_1^\circ \bar{D}_1, \quad \bar{\lambda}_\alpha A_1 = G_1 + B_1 (D_1 \xi_1)_{,1} \Big|_{\xi_1=b_1, \xi_2=\xi_3=0}. \quad (6)$$

С учетом правил дифференцирования интеграла с переменным пределом и неявно заданной уравнением (3) функции $\beta(\xi_1)$ вычислим в этой точке производную в правой части второго равенства (6):

$$(D_1 \xi_1)_{,1} \Big|_{\beta=0} = D_1^\circ + b_1 D_{1,1} \Big|_{\xi_1=b_1, \xi_2=\xi_3=0} = D_\alpha^\circ - 1.$$

Тогда из равенств (6) получим

$$A_1 = \frac{G_1}{1 + (\bar{\lambda}_1 - 1) \bar{D}_1}, \quad A_1^\circ = \frac{G_1 (1 - \bar{\lambda}_1)}{1 + (\bar{\lambda}_1 - 1) \bar{D}_1}.$$

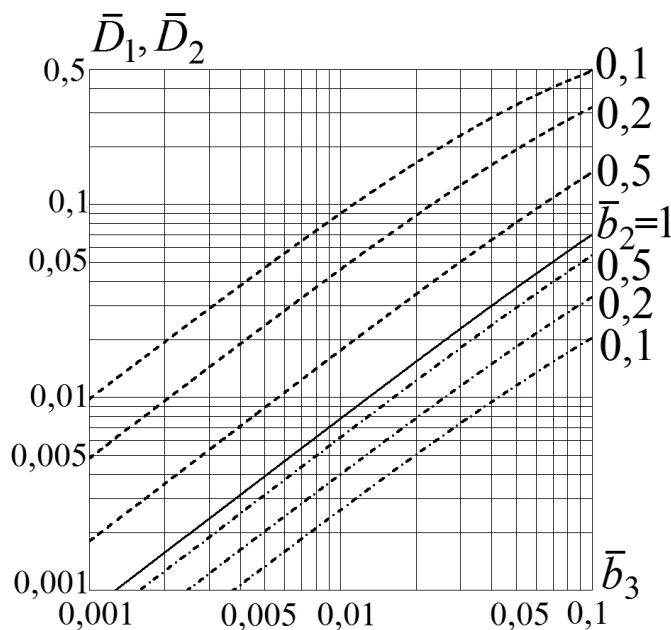


Рис. 1. Зависимости коэффициентов D_1 и D_2 от параметра b_3 при различных значениях параметра b_2
Dependencies of the coefficients D_1 and D_2 on the parameter b_3 at different values of the parameter b_2

Аналогичным путем, выполнив равенства (5) в точках поверхности эллипсоида с координатами $\xi_2 = b_2$, $\xi_1 = \xi_3 = 0$ и $\xi_3 = b_3$, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, найдем соответственно коэффициенты A_2 , A_2° и A_3 , A_3° . Полученные результаты можно представить в виде

$$A_k = \frac{G_k}{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)\bar{D}_\alpha}, \quad A_k^\circ = \frac{G_k(1 - \bar{\lambda}_\alpha)}{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)\bar{D}_\alpha}.$$

Таким образом, наличие анизотропного эллипсоидального включения создает в матрице композита относительно линейного распределения $G_k \xi_k$ возмущение температурного поля, описываемое соотношением

$$\Delta T^\circ = A_k^\circ D_\alpha \xi_k = G_k \xi_k \frac{(1 - \bar{\lambda}_\alpha) D_\alpha}{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1) \bar{D}_\alpha}. \quad (7)$$

3. Представительный элемент структуры композита

Примем, что все включения в композите геометрически подобны, но могут иметь различные размеры от некоторых конечных до бесконечно малых, что позволяет считать возможным заполнение всех возникающих промежутков между включениями. В окружающем отдельно взятое эллипсоидальное включение массиве материала матрицы выделим слой, покрывающий включение и ограниченный поверхностью эллипсоида с полуосями $B_\alpha = b_\alpha / C_V^{1/3}$, где C_V – объемная концентрация включений в композите. Включение вместе с выделенным слоем будем считать представительным элементом структуры композита. Такой элемент не изменит возмущение температурного поля в массиве матрицы, определяемое соотношением (7).

Заменим представительный элемент равновеликим однородным эллипсоидом, главные значения Λ_k тензора теплопроводности которого должны совпадать с искомыми главными значениями тензора эффективной теплопроводности композита при условии одинаковой пространственной ориентации всех включений. Такая замена также вызовет возмущение температурного поля в массиве матрицы, определяемое аналогичным соотношению (7) равенством

$$\Delta T^* = G_k \xi_k \frac{(1 - \bar{\Lambda}_\alpha) D_\alpha^*}{1 + (\bar{\Lambda}_\alpha - 1) \bar{D}_\alpha^*}, \quad (8)$$

где $\bar{\Lambda}_\alpha = \Lambda_\alpha / \lambda^\circ$,

$$D_\alpha^* = \frac{B_1 B_2 B_3}{2} \int_{\beta_*}^{\infty} \frac{du}{(B_\alpha^2 + u) F(u)}, \quad (9)$$

β_* - положительный корень уравнения

$$\xi_1^2 / (B_1^2 + \beta_*) + \xi_2^2 / (B_2^2 + \beta_*) + \xi_3^2 / (B_3^2 + \beta_*) = 1, \quad (10)$$

$F(u) = \sqrt{(B_1^2 + u)(B_2^2 + u)(B_3^2 + u)}$, а $\bar{D}_\alpha^* = \bar{D}_\alpha$ в силу геометрического подобия включения и представительного элемента структуры композита. На бесконечно большом расстоянии от начала системы координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ отношение $\Delta T^\circ / \Delta T^*$ должно стремиться к единице.

Сначала рассмотрим случай, когда $G_2 = G_3 = 0$. Тогда для возмущений температурного поля в матрице композита из формул (7) и (8) получим соответственно

$$\Delta T^\circ = G_1 \xi_1 \frac{(1 - \bar{\lambda}_1) D_1}{1 + (\bar{\lambda}_1 - 1) \bar{D}_1}, \quad \Delta T^* = G_1 \xi_1 \frac{(1 - \bar{\Lambda}_1) D_1^*}{1 + (\bar{\Lambda}_1 - 1) \bar{D}_1},$$

и, приравняв правые части этих равенств, запишем

$$\frac{1 - \bar{\Lambda}_1}{1 + (\bar{\Lambda}_1 - 1) \bar{D}_1} = \frac{1 - \bar{\lambda}_1}{1 + (\bar{\lambda}_1 - 1) \bar{D}_1} \frac{D_1}{D_1^*}. \quad (11)$$

Для точки с координатами $\xi_1 \rightarrow \infty$ и $\xi_2 = \xi_3 = 0$, бесконечно удаленной от представительного объема композита, из уравнения (3) следует $\beta = \xi_1^2 - b_1^2 \rightarrow \infty$, а из уравнения (10) - $\beta_* = \xi_1^2 - B_1^2 \rightarrow \infty$, т.е. интегралы в правых частях равенств (2) и (9) стремятся к нулю. Это означает, что для вычисления предельного значения отношения D_1 / D_1^* в правой части равенства (11) необходимо раскрыть неопределенность типа 0/0 по правилу Лопиталю, продифференцировав интегралы по переменному нижнему пределу:

$$\lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \frac{D_1}{D_1^*} = \frac{b_1 b_2 b_3}{B_1 B_2 B_3} \lim_{\xi_1 \rightarrow \infty} \frac{(B_1^2 + \beta_*) F(\beta_*)}{(b_1^2 + \beta) f(\beta)} = C_V.$$

Тогда формула (11) примет вид

$$\tilde{\Lambda}_1 = \frac{1 + (\bar{\lambda}_1 - 1)(\bar{D}_1 + (1 - \bar{D}_1)C_V)}{1 + (1 - C_V)(\bar{\lambda}_1 - 1)\bar{D}_1}.$$

Аналогичным путем можно найти формулы для $\tilde{\Lambda}_2$ и $\tilde{\Lambda}_3$. В итоге при $\alpha = 1, 2, 3$ запишем

$$\tilde{\Lambda}_\alpha = \frac{1 + (\bar{\lambda}_\alpha - 1)(\bar{D}_\alpha + (1 - \bar{D}_\alpha)C_V)}{1 + (1 - C_V)(\bar{\lambda}_\alpha - 1)\bar{D}_\alpha}. \quad (12)$$

В случае хаотического расположения включений композит в целом станет изотропными и эффективным коэффициентом теплопроводности $\Lambda = (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3) / 3$. Из формулы (12) для частного случая шаровых включений ($D_\alpha = 1/3$) следует равенство $\tilde{\Lambda}_\alpha = (2 + \bar{\lambda}_\alpha - 2(1 - \bar{\lambda}_\alpha)C_V) / (2 + \bar{\lambda}_\alpha + (1 - \bar{\lambda}_\alpha)C_V)$, совпадающее с формулой, полученной в работе [24]. Если шаровые включения изотропны, т.е. $\lambda_\alpha = \lambda$, то это равенство переходит в известную формулу Максвелла [25], полученную им для оценки электрофизических свойств неоднородной среды с шаровыми дисперсными включениями.

Переход от соотношения (12) к рассмотренным частным случаям косвенно свидетельствует о корректности использованного выше подхода для получения этого соотношения. С применением двойственной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле можно установить двусторонние границы корректных оценок эффективной теплопроводности рассматриваемого композита.

4. Двойственная вариационная формулировка задачи теплопроводности

На поверхности S , ограничивающей неоднородное твердое тело объемом V , выделим два участка S_0 и S_1 ($S_0 \cap S_1 = \emptyset$) с заданными значениями температуры T_0 и T_1 соответственно. Остальную часть $S_q = S \setminus (S_0 \cup S_1)$ поверхности этого тела примем идеально теплоизолированной. Материал тела в общем случае анизотропен по отношению к свойству теплопроводности, описываемому тензором теплопроводности с определенными в прямоугольной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ компонентами $\lambda_{ij}(M)$, $i, j = 1, 2, 3$, зависящими от положения точки $M \in V$ в области, соответствующей объему тела. Истинное стационарное распределение температуры $T^*(M)$ ($M \in V$) в рассматриваемом теле минимизирует функционал [18, 26]

$$J[T] = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial T(M)}{\partial x_i} \lambda_{ij}(M) \frac{\partial T(M)}{\partial x_j} dV(M), \quad (13)$$

который допустимо рассматривать на кусочно непрерывно дифференцируемых в области V распределениях $T(M)$ температуры, удовлетворяющих заданным граничным условиям на участках S_0 и S_1 поверхности S .

На истинном распределении в рассматриваемом теле вектора $\mathbf{q}^*(M)$ ($M \in V$) плотности теплового потока с проекциями $q_i^*(M) = -\lambda_{ij}(M) \partial T^*(M) / \partial x_j$ на оси выбранной системы координат достигает максимума функционал [18, 23]

$$I[\mathbf{q}] = -\frac{1}{2} \int_V q_i(M) \rho_{ij}(M) q_j(M) dV(M) - \int_{S_T} T(P) q_i(P) n_i(P) dS(P), \quad (14)$$

где ρ_{ij} - компоненты тензора термического сопротивления, обратного тензору теплопроводности материала тела; $n_i(P)$ - направляющие косинусы вектора внешней нормали к участкам поверхности $S_T = S_0 \cup S_1$ в точках $P \in S_T$. Функционал (14) допустимо рассматривать на кусочно непрерывно дифференцируемых

распределениях $\mathbf{q}(M)$ вектора плотности теплового потока, удовлетворяющих равенству $q_{i,i} = 0$ в области V и условию идеальной теплоизоляции на участке S_q поверхности S .

Функционалы (13) и (14) вместе с ограничениями на допустимые для них распределения температуры и вектора плотности теплового потока составляют двойственную вариационную формулировку задачи установившейся теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле. В случае истинных распределений температуры T^* и вектора \mathbf{q}^* плотности теплового потока для этих функционалов справедливо равенство $J[T^*] = I[\mathbf{q}^*]$ [18]. Поэтому при использовании допустимых распределений в рассматриваемом теле температуры $T(M)$ ($M \in V \cup S_0 \cup S_1$) и вектора $\mathbf{q}(M)$ ($M \in V \cup S_q$) плотности теплового потока получаем

$$J[T] \geq J[T^*] = I[\mathbf{q}^*] \geq I[\mathbf{q}]. \quad (15)$$

В рассматриваемом неоднородном анизотропном твердом теле истинное стационарное распределение $T^*(M)$ ($M \in V$) температуры должно удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda_{ij}(M) \frac{\partial T(M)}{\partial x_j} \right) = 0.$$

С учетом этого уравнения и первой формулы Грина [24] функционал (13) можно преобразовать к виду [18]

$$J[T^*] = \frac{1}{2} \int_{S_T} T(P) \lambda_{ij} \frac{\partial T^*(P)}{\partial x_j} n_i(P) dS(P) = \frac{T_0 Q_0 + T_1 Q_1}{2}, \quad (16)$$

где Q_0 и Q_1 - тепловые потоки, поступающие в данное тело через участки соответственно S_0 и S_1 его поверхности. В силу первого закона термодинамики, из которого в данном случае вытекает условие сохранения тепловой энергии при стационарном процессе теплопроводности, имеем $Q_0 + Q_1 = 0$. Тогда из равенства (16) получим $Q_1 = -Q_0 = 2J[T^*]/(T_1 - T_0)$ и затем формулу для термического сопротивления тела $R_* = (T_1 - T_0)/Q_1 = (T_1 - T_0)^2 / (2J[T^*])$ между изотермическими участками S_1 и S_0 поверхности S . Отсюда с учетом неравенств (15) следует двусторонняя оценка этого термического сопротивления в виде

$$\frac{(T_1 - T_0)^2}{2J[T]} \leq R_* \leq \frac{(T_1 - T_0)^2}{2I[\mathbf{q}]} \quad (17)$$

5. Двусторонние оценки эффективной теплопроводности композита

Сначала рассмотрим вариант одинаковой ориентации включений ленточной формы в композите. Выберем представительный элемент структуры такого композита в виде пластины толщиной $2H$, длиной $2L$ и

шириной $2B$. На Рис. 2 изображена восьмая часть этого элемента, помещенная в октант прямоугольной декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$. Включение расположено в этом элементе симметрично относительно координатных осей и имеет толщину $2h$, длину $2l$ и ширину $2b$. Контуры восьмой части включения обведены на Рис. 2 сплошными толстыми линиями. Остальной объем представительного элемента заполнен изотропным материалом матрицы с коэффициентом теплопроводности λ° . Главные оси тензора теплопроводности анизотропного включения с главными значениями λ_i примем совпадающими с координатными осями. Поскольку тензору теплопроводности в главных осях соответствует диагональная матрица третьего порядка, главным значениям λ_i этого тензора соответствуют главные значения $\rho_i = 1/\lambda_i$ обратного ему тензора термического сопротивления. Из указанных на Рис. 2 размеров следует, что для объемной концентрации включений в композите можно записать равенство $C_v = hlb/(HLB)$. При изменении C_v будем считать, что $h/H = l/L = b/B = C_0$, т.е. $C_v = C_0^3$.

Используем представленную выше двойственную вариационную формулировку задачи стационарной теплопроводности применительно к восьмой части представительного элемента. Пусть на гранях изображенного на Рис. 2 прямоугольного параллелепипеда, расположенных в плоскостях $x_1 = 0$ и $x_1 = L$, заданы значения температур соответственно T_0 и T_1 , а все остальные его грани идеально теплоизолированы. В этом случае для минимизируемого функционала (13) одним из простейших допустимых распределений температуры является линейное вдоль координатной оси Ox_1 с постоянной проекцией $G_1 = (T_1 - T_0)/L$ градиента температуры на эту ось. Такому распределению соответствует значение функционала (13)

$$J_1 = (T_1 - T_0)^2 HB \frac{\lambda^\circ (1 - C_0^3) + \lambda_1 C_0^3}{2L}. \quad (18)$$

При заданных граничных условиях одним из простейших допустимых для максимизируемого функцио-

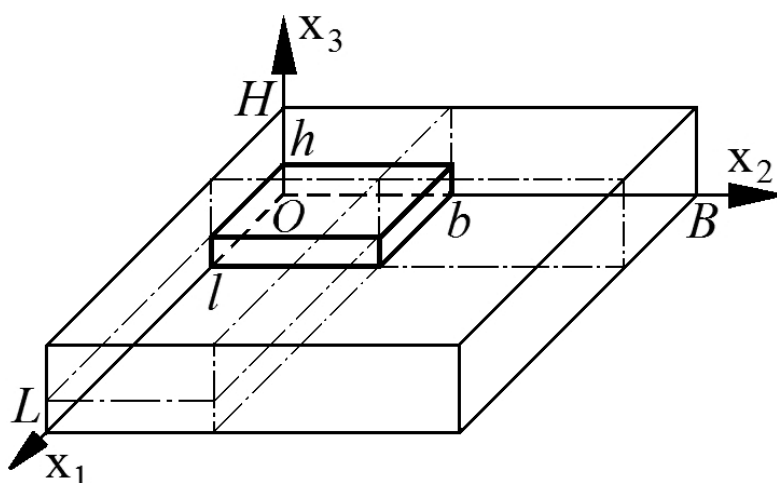


Рис. 2. Восьмая часть представительного элемента структуры композита
An eighth part of the representative element of the composite structure

нала (14) распределений вектора плотности теплового потока будет постоянное значение q_1 проекции этого вектора на координатную Ox_1 ось. Тогда для функционала (14) получим

$$I_1 = -q_1^2 HBL \frac{(1 - C_0^3) / \lambda^\circ + C_0^3 / \lambda_1}{2} - q_1 G_1 HBL.$$

Из необходимого условия $dI_1 / dq_1 = 0$ максимума величины I_1 находим

$$q_1 = -\frac{G_1}{(1 - C_0^3) / \lambda^\circ + C_0^3 / \lambda_1}$$

и затем

$$I_1 = \frac{(T_1 - T_0)^2 HB / (2L)}{(1 - C_0^3) / \lambda^\circ + C_0^3 / \lambda_1}. \quad (19)$$

Термическое сопротивление в направлении оси Ox_1 изображенной на Рис. 2 восьмой части представительного элемента структуры композита равно $R_1 = L / (\Lambda_1 HB)$. Используя для двусторонней оценки величины R_1 неравенства (17) и формулы (18) и (19), для эффективного коэффициента Λ_1 теплопроводности в направлении оси Ox_1 получим двустороннюю оценку в виде

$$\frac{1}{(1 - C_V) / \lambda^\circ + C_V / \lambda_1} \leq \Lambda_1 \leq \lambda^\circ (1 - C_V) + \lambda_1 C_V.$$

Аналогичным путем можно построить двусторонние оценки эффективных коэффициентов Λ_2 и Λ_3 теплопроводности композита в направлениях осей Ox_2 и Ox_3 соответственно. Таким образом, для эффективного коэффициента Λ_i теплопроводности композита в направлении координатной оси Ox_i можно записать

$$\frac{1}{1 - C_V + C_V / \bar{\lambda}_i} = \frac{\Lambda_i^-}{\lambda_m} = \bar{\Lambda}_i^- \leq \bar{\Lambda}_i \leq \bar{\Lambda}_i^+ = \frac{\Lambda_i^+}{\lambda_m} = 1 - C_V + \bar{\lambda}_i C_V. \quad (20)$$

В случае хаотической пространственной ориентации анизотропных ленточных включений для изотропного композита в неравенствах (20) следует заменить $\bar{\lambda}_i$ на $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3) / 3$, а у остальных параметров опустить нижний индекс i .

При $C_V = 0$ и $C_V = 1$ нижняя и верхняя оценки совпадают между собой. Но при промежуточных значениях C_V разность $\Delta\bar{\Lambda}_i = \bar{\Lambda}_i^+ - \bar{\Lambda}_i^-$ оценок возрастает от нуля по мере отклонения параметра $\bar{\lambda}_i$ от единицы. С использованием неравенств (20) можно оценить наибольшую возможную относительную погрешность среднего значения $\bar{\Lambda}_i^\circ = (\bar{\Lambda}_i^- + \bar{\Lambda}_i^+)/2$ при промежуточных значениях C_V , которую представим в виде

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\Delta\bar{\Lambda}_\alpha}{2\bar{\Lambda}_\alpha^\circ} = 1 - \frac{1}{1 + C_V(1 - C_V)(\bar{\lambda}_\alpha + 1/\bar{\lambda}_\alpha - 2)/2}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

На Рис. 3 приведены зависимости ε_α от C_V при различных значениях $\bar{\lambda}_\alpha$ (кривые для пар значений $\bar{\lambda}_\alpha$ и $1/\bar{\lambda}_\alpha$ совпадают). Наибольших значений, равных $\varepsilon_\alpha^* = 1 - 1/(1 + (\bar{\lambda}_\alpha + 1/\bar{\lambda}_\alpha - 2)/8)$, относительная погрешность достигает при $C_V = 0,5$.

Использованные выше для получения двусторонних оценок достаточно простые допустимые распределения температуры и плотности теплового потока учитывают лишь объемное содержание эллипсоидальных включений. Поэтому для всех трех направлений главных осей тензора теплопроводности включения представленные в формулах (20) и (21) оценки эффективных коэффициентов теплопроводности композита и возможной относительной погрешности среднего значения этих оценок идентичны. Если в этих формулах опустить нижний индекс α , то они будут применимы и в случае хаотической ориентации включений.

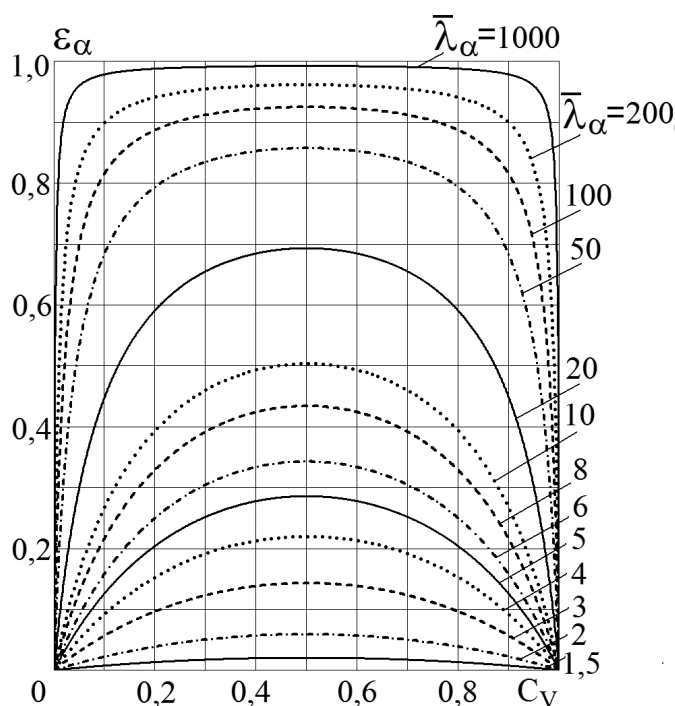


Рис. 3. Зависимости наибольшей возможной погрешности от объемной концентрации включений при различных значениях параметра $\bar{\lambda}_\alpha$

Dependencies of the biggest possible error on inclusions volume density at different values of the parameter $\bar{\lambda}_\alpha$

Для сопоставления полученных оценок с результатами расчетов по формуле (12) на Рис. 4 в качестве примера для композита, модифицированного одинаково ориентированными включениями ленточной формы, моделируемой эллипсоидом с параметрами $\bar{b}_2 = 0,2$ и $\bar{b}_3 = 0,02$, представлены построенные с использованием соотношения (20) графики зависимостей от C_V верхней $\bar{\Lambda}_i^+$ и нижней $\bar{\Lambda}_i^-$ оценок (штрихпунктирные и штриховые линии соответственно) при главных значениях тензора теплопроводности включений, определяемых параметрами $\bar{\lambda}_1 = 100$, $\bar{\lambda}_2 = 50$ и $\bar{\lambda}_3 = 5$. Пунктирные линии соответствуют зависимостям от C_V средних значений $\bar{\Lambda}_i^\circ = (\bar{\Lambda}_i^- + \bar{\Lambda}_i^+) / 2$, а сплошные кривые – определяемым формулой (12) значениям $\tilde{\Lambda}_i$. Следует отметить, что для направления, перпендикулярного плоскости ленточных включений, графики зависимостей $\bar{\Lambda}_3^-$ и $\tilde{\Lambda}_3$ практически совпадают, для поперечного направления в плоскости ленты графики зависимостей $\tilde{\Lambda}_2$ и $\bar{\Lambda}_2^\circ$ пересекаются, а для продольного направления значения $\tilde{\Lambda}_1$ расположены ближе к верхней оценке $\bar{\Lambda}_1^+$. Графики зависимостей $\tilde{\Lambda}_i$ для всех трех характерных направлений расположены внутри границ, определяемых соотношением (20).

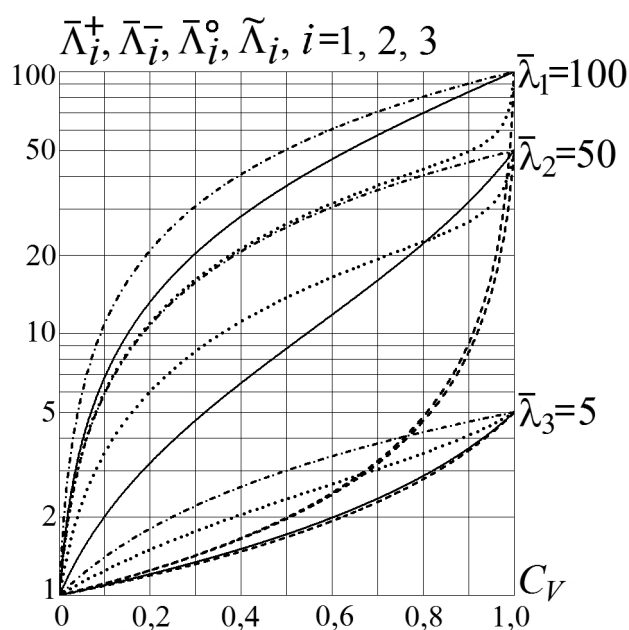


Рис. 4. Результаты расчета главных значений тензора эффективной теплопроводности композита
The results for calculation of principal values of the effective thermal conductivity tensor of the composite

6. Заключение

Представление анизотропных включений ленточной формы трехосным эллипсоидом позволило построить модель теплового взаимодействия таких включений с матрицей композита и затем вывести расчетную зависимость для главных значений тензора теплопроводности сформированного представительного элемента его структуры, совпадающих с искомыми главными значениями тензора эффективной теплопроводности рассматриваемого композита. Результаты количественного анализа этой зависимости находятся в пределах двусторонних границ, установленных с использованием двойствен-

ной вариационной формулировки задачи стационарной теплопроводности в неоднородном анизотропном твердом теле.

Работа выполнена по гранту МК-6573.2015.8 программы Президента РФ государственной поддержки молодых кандидатов наук и в рамках проекта 1712 государственного задания № 2014/104 Минобрнауки РФ, а также в рамках государственного задания по проекту № 1.2640.2014.

Библиографический список

1. Поздняков В.А. *Физическое материаловедение наноструктурных материалов*. М.: МГИУ, 2007. 424 с.
2. Кац Е.А. *Фуллерены, углеродные нанотрубки и нанокластеры. Родословная форм и идей*. М.: Изд-во ЛКИ, 2008. 296 с.
3. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B., Kohlhaas K.M., Zimney E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. 442. P. 282 -286.
4. Galpaya D., Wang M., Liu M., Motta N., Waclawik E., Yan Ch. Recent advances in fabrication and characterization of graphene-polymer nanocomposites. *Graphene*, 2012, no 1, pp. 30-49. DOI: 10.4236/graphene.2012.12005.
5. Елецкий А.В., И.М. Искандарова И.М., Книжник А.А., Красиков Д.Н. Графен: методы получения и теплофизические свойства // *УФН*. 2011. Т. 181. № 3. С. 233 -268.
6. Balandin A.A., Ghosh S., Bao W., Calizo I., Teweldebrhan D., Miao F., Lau C.N. Superior thermal conductivity of single-layer graphene. *Nano Letters*, 2008, vol. 8, pp. 902 -907.
7. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E.P., Nika D.L., Balandin A.A., Bao W., Miao F., Lau C.N. Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits. *Appl. Phys. Lett*, 2008, vol. 92, pp. 151911.
8. Klemens P. G. Theory of the A-plane thermal conductivity of graphite. *J. Wide Bandgap Mater*, 2000, vol. 7, pp. 332 -339.
9. Nika D.L., Ghosh S., Pokatilov E.P., Balandin A.A. Lattice thermal conductivity of graphene flakes: Comparison with bulk graphite. *Appl. Phys. Lett*, 2009, vol. 94, pp. 203103.
10. Nika D.L., Pokatilov E.P., Askerov A.S., Balandin A.A. Phonon thermal conduction in graphene: Role of Umklapp and edge roughness scattering. *Phys. Rev*, 2009, vol. B 79, pp. 155413.
11. Ghosh S., Bao W., Nika D.L., Sabrina S., Pokatilov E.P., Lau C.N., Balandin A.A. Dimensional crossover of thermal transport in few-layer graphene. *Nature Mater*, 2010, vol. 9, pp. 555-558.
12. Шермергор Т.Д. *Теория упругости микроненормодных сред*. М.: Наука, 1977. 400 с.
13. Кристенсен Р. *Введение в механику композитов*: Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 336 с.
14. *Введение в микромеханику* / Под ред. М. Онаи: Пер. с япон. М.: Металлургия, 1987. 280 с.
15. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. *Математические модели механики и электродинамики сплошной среды*. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.
16. Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с графеновыми включениями // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2013. Вып. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/671.html>. Дата обращения 23.02.2016.
17. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Влияние формы пластинчатых включений на эффективную теплопроводность композита // *Композиты и наноструктуры*. 2014. № 2. С. 95 -104.
18. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с пластинчатыми включениями // *Тепловые процессы в технике*. 2015. Т. 7. № 7. С. 325 -332.
19. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Теплопроводность текстурированного композита с анизотропными пластинчатыми включениями // *Композиты и наноструктуры*. 2015. № 1. С. 1 -13.
20. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с анизотропными эллипсоидальными включениями // *Наука и образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн*. 2013. № 4. DOI: 10.7463/0413.0541050.

21. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел*: Пер. с англ. М.: Наука, 1964. 488 с.
22. Эшелби Дж. *Континуальная теория дислокаций*: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 248 с.
23. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Эффективные коэффициенты теплопроводности композита с эллипсоидальными включениями // *Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки*. 2012. № 3. С. 76-85.
24. Зарубин В.С., Котович А.В., Кувыркин Г.Н. Оценки эффективного коэффициента теплопроводности композита с анизотропными шаровыми включениями // *Известия академии наук. Энергетика*. 2012. № 6. С. 118 -126.
25. Maxwell С. *Treatise on electricity and magnetism*. Oxford, 1873.
26. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Двусторонние оценки термического сопротивления неоднородного твердого тела // *Теплофизика высоких температур*. 2013. Т. 51. № 4. С. 578 -585.

References

1. Pozdnjakov V.A. *Fizicheskoe materialovedenie nanostrukturnykh materialov* [Physical materials science of nanostructural materials]. Moscow: MGIU, 2007. 424 p.
2. Кас Е.А. *Fullereny, uglerodnye nanotrubki i nanoklastery. Rodoslovnaja form i idej* [Fullerenes, carbon nanotubes and nanoclusters. Family tree of forms and ideas]. Moscow: LKI Press, 2008. 296 p.
3. Stankovich S., Dikin D.A., Dommett G.H.B, Kohlhaas K.M., Zimmey E.J., Stach E.A., Piner R.D., Nguyen S.T., Ruoff R.S. Graphene-based composite materials. *Nature*. 2006. V. 442. P. 282 -286.
4. Galpaya D., Wang M., Liu M., Motta N., Waclawik E., Yan Ch. Recent advances in fabrication and characterization of graphene-polymer nanocomposites. *Graphene*, 2012, no 1, pp. 30-49. DOI: 10.4236/graphene.2012.12005.
5. Eleckij A.V., Iskandarova I.M., Knizhnik A.A., Krasikov D.N. Grafen: metody poluchenija i teplofizicheskie svojstva. *Uspehi fizicheskikh nauk*. 2011. Vol. 181. № 3. Pp. 233 -268.
6. Balandin A.A., Ghosh S., Bao W., Calizo I., Teweldebrhan D., Miao F., Lau C.N. Superior thermal conductivity of single-layer graphene. *Nano Letters*, 2008, vol. 8, pp. 902 -907.
7. Ghosh S., Calizo I., Teweldebrhan D., Pokatilov E.P., Nika D.L., Balandin A.A., Bao W., Miao F., Lau C.N. Extremely high thermal conductivity of graphene: Prospects for thermal management applications in nanoelectronic circuits. *Appl. Phys. Lett*, 2008, vol. 92, pp. 151911.
8. Klemens P. G. Theory of the A-plane thermal conductivity of graphite. *J. Wide Bandgap Mater*, 2000, vol. 7, pp. 332 -339.
9. Nika D.L., Ghosh S., Pokatilov E.P., Balandin A.A. Lattice thermal conductivity of graphene flakes: Comparison with bulk graphite. *Appl. Phys. Lett*, 2009, vol. 94, pp. 203103.
10. Nika D.L., Pokatilov E.P., Askerov A.S, Balandin A.A. Phonon thermal conduction in graphene: Role of Umklapp and edge roughness scattering. *Phys. Rev*, 2009, vol. B 79, pp. 155413.
11. Ghosh S., Bao W., Nika D.L., Sabrina S., Pokatilov E.P., Lau C.N., Balandin A.A. Dimensional crossover of thermal transport in few-layer graphene. *Nature Mater*, 2010, vol. 9, pp. 555-558.
12. Shermergor T.D. *Teorija uprugosti mikroneodnorodnyh sred* [Theory of elasticity of micronon-uniform environments]. Moscow: Nauka, 1977. 400 p.
13. Kristensen R. *Vvedenie v mehaniku kompozitov: Per. s angl.* [Introduction to mechanics of composites]. Moscow: Mir, 1982. 336 с.
14. *Vvedenie v mikromehaniku* [Introduction to micromechanics]/ Pod red. M. Onami. Moscow: Metallurgy, 1987. 280 p.
15. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. *Matematicheskie modeli mehaniki i elektrodinamiki sploshnoj sredy* [Mathematical models of mechanics and electrodynamics of the continuous environment]. Moscow: BMSTU Press, 2008. 512 p.
16. Kuvyrkin G.N. Ocenki effektivnogo koefficienta teploprovodnosti kompozita s grafenovymi vkluchenijami. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii - Engineering magazine: science and innovations*. 2013. Vol. 4. URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/671.html>.

17. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Vlijanie formy plastinchatyh vkljuchenij na jeffektivnuju teploprovodnost' kompozita. *Kompozity i nanostruktury - Composites and nanostructures*. 2014. № 2. Pp. 95 -104.

18. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Ocenki jeffektivnogo kojefficienta teploprovodnosti kompozita s plastinchatymi vkljuchenijami. *Teplovyje processy v tehnike - Thermal processes in the equipment*. 2015. Vol. 7. № 7. Pp. 325 -332.

19. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Ju. Teploprovodnost' teksturirovannogo kompozita s anizotropnymi plastinchatymi vkljuchenijami. *Kompozity i nanostruktury - Composites and nanostructures*. 2015. № 1. Pp. 1 -13.

20. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Jeffektivnye kojefficienty teploprovodnosti kompozita s anizotropnymi jellipsoidal'nymi vkljuchenijami. *Nauka i obrazovanie. MGTU im. N.Je. Baumana. Jejelektron. zhurn. - Science and education. BMSTU. Online magazine* 2013. № 4. DOI: 10.7463/0413.0541050.

21. Karslou G., Eger D. *Teploprovodnost' tverdyh tel: Per. s angl.* [Heat conductivity of solid bodies] Moscow:Nauka, 1964. 488 p.

22. Jeshelbi Dzh. *Kontinual'naja teorija dislokacij: Per. s angl.* [Continual theory of dislocations]. Moscow: Inostr. Lit. Press, 1963. 248 p.

23. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Jeffektivnye kojefficienty teploprovodnosti kompozita s jellipsoidal'nymi vkljuchenijami. *Vestnik MGTU im. N.Je. Baumana. Ser. Estestvennyje nauki - Bulletin of BMSU. Natural sciences*. 2012. № 3. Pp. 76-85.

24. Zarubin V.S., Kotovich A.V., Kuvyrkin G.N. Ocenki jeffektivnogo kojefficienta teploprovodnosti kompozita s anizotropnymi sharovymi vkljuchenijami. *Izvestija akademii nauk. Jenergetika - News of academy of Sciences. Energy*. 2012. № 6. Pp. 118 -126.

25. Maxwell C. *Treatise on electricity and magnetism*. Oxford, 1873.

26. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N. Dvustoronnie ocenki termicheskogo soprotivlenija neodnorodnogo tverdogo tela. *Teplofizika vysokih temperatur – High Temperature*. 2013. Vol. 51. № 4. Pp. 578 -585.

Сведения об авторах

Зарубин Владимир Степанович, д-р техн. наук, проф., проф., МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Прикладная математика» Тел. 8-499-263-63-26, E-mail: Zarubin@bmstu.ru

Кувыркин Георгий Николаевич, д-р техн. наук, проф., зав. кафедрой, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Прикладная математика», Тел. 8-499-263-63-26, Fn2@bmstu.ru

Савельева Инга Юрьевна (контактное лицо), канд. физ.-мат. наук, доцент, МГТУ им. Н.Э. Баумана, кафедра «Прикладная математика» Тел. 8-499-263-63-26, 8-916-848-89-21, Inga.Savelyeva@gmail.com