УДК 620.173.24

УСТОЙЧИВОСТЬ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ В ТРАКТОВКЕ ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

В.Т.Сапунов

Национальный Исследовательский Ядерный Университет «МИФИ», Москва, Россия

Для проведения расчётов на устойчивость сжатых стержней с помощью коэффициента продольного изгиба выбрана однопараметрическая формула Ренкина. Потеря устойчивости рассматривается на базе критерия разрушения. Вероятность разрушения вычисляется для сжатых стержней и пластин, выполненных из композита.

Ключевые слова: устойчивость, композит, прочность, вероятность разрушения, потеря устойчивости, коэффициент безопасности.

STABILITY ANALYSIS OF COMPOSITE STRUCTURAL COMPONENTS USING A SAFETY APPROACH

V.T.Sapunov

National Research Nuclear University «MEPhI», Moscow, Russia

To compute the stability of bars in compression with reduction factor for longitudinal bending, we choose the one parameter Rankin's formula. The stability lost is considered as a failure criterion. The probability of failure is then computed for bars and plates of composite.

Key words: stability, composite, resistance, failure probability, lost of stability, safety factor.

1. Введение

Модули упругости композитов примерно на порядок ниже, а мера разброса значений их механических характеристик, которую удобно описывать среднеквадратичным коэффициентом вариации, в 2÷4 раза больше, чем для сталей. Более того, ручной, как правило, способ изготовления несущих стеклопластиковых конструкций (например, в судостроении) приводит к существенному разбросу их геометрических размеров. Все сказанное предопределяет необходимость расчетов на устойчивость стеклопластиковых стоек и пластин в рамках теории надежности. Потеря устойчивости рассматривается как «отказ», вероятность которого вычисляется для сжатых стержней и пластин, выполненных из стеклотекстолита.

2. Спецификация и дискриминация зависимостей φ - λ

В настоящее время расчеты на устойчивость сжатых стержней (в судостроении их называют пиллерсами) обычно осуществляются с помощью коэффициента продольного изгиба $0 < \varphi \le 1$, сводящего задачу устойчивости к традиционным расчетам на сжатие:

$$\sigma = P / F \le \varphi R, \tag{1}$$

где P – сжимающая (продольная) сила; F – площадь поперечного сечения (обычно без учета ослаблений концентраторами напряжений); σ – сжимающее напряжение, возникающее в стержне; R – предельное напряжение при сжатии.

Коэффициент продольного изгиба (или коэффициент снижения допускаемого напряжения) φ для каждого материала зависит от гибкости стержня $\lambda = \mu\, l / i$, где $\mu\, l$ – приведенная длина стержня, а $i = \sqrt{I / F}$ – минимальный радиус инерции (I – минимальный момент инерции) площади F поперечного сечения стержня. Экспериментально найденную зависимость коэффициента продольного изгиба φ от гибкости стержня λ для различных материалов представляют обычно либо в форме таблиц, либо графически в виде нормативных кривых. Поскольку конструкторские расчеты с помощью формулы (1) носят итерационный характер, их целесообразно осуществлять с помощью ПК, однако их применение для таких расчетов сдерживается отсутствием математической формализации соответствующих табличных (графических) данных. Именно эта задача и ее обобщения рассматриваются в данном разделе.

Поставим задачу выбора из всех имеющихся аналитических зависимостей (математических моделей) $\varphi - \lambda$ наиболее подходящей для описания полученных экспериментальных данных по устойчивости сжатых стержней, выполненных из данного материала. При этом будем исходить из качественной и количественной оценки пригодности анализируемых соотношений (задача *спецификации* и *дискриминации* математических моделей).

Суть предлагаемого ниже метода спецификации и дискриминации базируется на возможности приведения каждой из зависимостей типа $\varphi_i = f_i(\lambda)$ к каноническому виду аффинного преобразования [1]:

$$\varphi_i \Rightarrow \varphi_i / b_i = f_i(\lambda / a_i)\,, \tag{2}$$

что, в свою очередь, позволяет представить исследуемые зависимости в форме, связанной только с видом функции (функционального идентификатора) f_i. Иными словами, эти функции можно выделить в «чистом виде» вне зависимости от значений искомых параметров b_i и a_i, играющих роль масштабных коэффициентов. Действительно, логарифмируя соотношения (2), запишем их в виде, аддитивном по отношению к названным (но преобразованным) параметрам:

$$\lg \varphi_i - B_i = F_i\,(\lg \lambda - A_i)\,, \tag{3}$$

где $B_i = \lg b_i$, $A_i = \lg a_i$, $F_i(x) = \lg \varphi_i(10^x)$. Если положить $b_i = 1$, $a_i = 1$ (в этом случае $B_i = 0$, $A_i = 0$, $\varphi_i = \varphi_i^0$), то в логарифмических координатах $\lg \varphi_i^0 - \lg \lambda$ анализируемые математические модели (3) будут отличаться между собой лишь функциональными идентификаторами F_i, определяющими только форму кривых. За положение этих «эталонов формы» на плоскости отвечают параметры B_i и A_i, которые временно (только на этапе спецификации) приняты равными нулю.

Процедура выбора из анализируемых зависимостей $\varphi_i = f_i(\lambda)$ той, которая наиболее адекватна экспериментальным данным, в простейшем варианте сводится к визуальному сравнению «эталонов формы» F_i (путем, например, наложения соответствующих шаблонов, построенных на кальке) с формами экспериментальных кривых в логарифмических координатах $\lg \varphi_i^0 - \lg \lambda$. Для количественной оценки адекватности рассматриваемых соотношений $\varphi_i = f_i(\lambda)$ опытным данным можно использовать любой статистический критерий. Добавим, что сопоставление эталонных кривых с экспериментальными результатами дает возможность не только выбрать наиболее подходящее соотношение, но и определить достаточно просто его параметры.

Возможность представления зависимостей $\varphi_i = f_i(\lambda)$ в канонической форме аффинного преобразования проиллюстрируем на примере известной функции Ренкина (Шварца– Ренкина):

$$\varphi_1 = \alpha_1 / \left(1 + \alpha_2 \lambda^{\alpha_3} \right),$$

которая легко приводится к нужному виду:

$$\varphi_1 / b_1 = 1 / \left[1 + (\lambda / a_1)^{c_1} \right], \tag{4}$$

где $b_1 = \alpha_1$, $a_1 = 1/\alpha_2$, $c_1 = \alpha_3$.

В качестве конкурирующих математических моделей рассмотрим [2]:

$$\varphi_2 / b_2 = \exp\left[-(\lambda / a_2)^{c_2} \right]; \tag{5}$$

$$\varphi_3 / b_3 = \left[1 + (\lambda / a_3)^2 \right] \exp\left[-(\lambda / a_2)^{c_3} \right]; \tag{6}$$

$$\varphi_4 / b_4 = \frac{2}{1 + \exp(\lambda / a_4)^{c_4}}; \tag{7}$$

$$\varphi_5 / b_5 = 1 + \frac{c_5 \sec(\lambda / a_5)}{1 + c_5}; \tag{8}$$

$$\varphi_6 / b_6 = 1 + \frac{c_6 (\lambda / a_6)}{1 - (\lambda / a_6)^2}. \tag{9}$$

Здесь зависимости (5) и (6) получены эмпирически; математическая модель (8) учитывает лишь эксцентриситет сжимающей продольной нагрузки (формула Тимошенко С. П.); соотношение (9) учитывает начальные несовершенства в стержнях.

Процедуру спецификации (сопоставления) математических моделей проведем, принимая в соотношениях (4) – (9) $b_i = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$).

Не останавливаясь здесь на визуальном сравнении эталонных форм анализируемых зависимостей (4) – (9) с экспериментальными кривыми, для количественной оценки адекватности математических моделей и опытных данных используем статистический критерий Гаусса, оперирующий логарифмами значений коэффициента продольного изгиба:

$$S = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\lg \varphi_k^{\text{э}} - \lg \varphi_k^{\text{р}} \right)^2 / (n - n_0)}, \tag{10}$$

где $\varphi_k^{\text{э}}$ и $\varphi_k^{\text{р}}$ – экспериментальные и теоретические значения коэффициента продольного изгиба; n– число точек, как узлов интерполяции; $n_0 = 2$ – число определяемых параметров, рассматриваемых как случайные величины.

Для отыскания параметров, входящих в анализируемые математические модели, минимизируем целевую функцию (10) как функцию двух переменных. Для этой цели будем использовать метод линеаризации с применением итерационного процесса. Итерации строим до тех пор, пока последующая и предыдущая оценка параметров a_i будут отличаться друг от друга не более, чем на 5 %. Наряду с минимизацией критерия согласия (10) по параметру a_i как случайной величине, будем осуществлять поиски минимального значения критерия S при дискретном изменении параметра формы C_i, применяя шаг, равный 0,1.

Как результат расчетов, приведём значения глобального минимума критерия адекватности $100S$ для конкурирующих моделей 1 – 6 (формулы (4) – (9)), примененных при решении задачи устойчивости сжатых стержней из судостроительного полиэфирного стеклотекстолита. Будем иметь [3]: $100S_i$ = 1,13; 2,01; 3,30; 2,03; 1,79; 1,15 (i = 1, . . ., 6).

На рассматриваемом уровне доверия процедура Фишера не позволяет однозначно отдать предпочтение какой-либо из моделей 1 и 6, которые лучше остальных отвечают опытным данным для стеклопластика. Однако, из соображений простоты применения выберем формулу Шварца – Ренкина при $c_1 = 2$ (S–критерий адекватности равен 1,7), записав ее в следующем виде:

$$\varphi = 1/\left[\,1+(\alpha\lambda)^2\right]. \tag{11}$$

Использование соотношения (11) в расчетах устойчивости сжатых стержней, выполненных из других материалов (табличные данные [2, 3]), показывает возможность его широкого применения с достаточной степенью точности. В качестве меры точности можно применить основную ошибку аппроксимации в логарифмических координатах $r = 100\,S\,t_\beta\,/\,M\sqrt{n}$, где t_β – статистика Стьюдента (Госсета) для уровня риска β = 5 % при числе степеней свободы n – 1; $M = \lg e = 0,4343$ – постоянная. Значения r для серых чугунов, сталей разных марок, стеклопластиков, дерева и др. не превышает 5–6 %.

Ниже рассмотрим вероятность потери устойчивости сжатого стержня, выполненного из стеклотекстолита, считая нагрузку, предел прочности на сжатие и геометрические размеры стержня случайными величинами.

3. Вероятность потери устойчивости сжатого пиллерса

Свободно опертый с обеих сторон стеклотекстолитовый пиллерс с размерами поперечного сечения $h \times b$ и длиной L нагружен постоянной сжимающей силой P. Будем считать, что $h = 6 \pm 1{,}5$ см; $b = 3 \pm 0{,}45$ см; $L = 120 \pm 9$ см; $P = 25 \pm 4$ кН. Осредненный предел прочности на сжатие для судостроительного полиэфирного стеклотекстолита (ткань $\mathrm{АСТТ(б)С_2-0}$, полиэфирная смола ПН–3) [3] равен $\overline{R}$ = 180 МПа при среднеквадратичном отклонении ζ_R = 24 МПа. Иными словами,

$$R = \overline{R} \pm \zeta_R = \overline{R}\,(1 \pm \vartheta_R) = 180\,(1 \pm 0{,}133),$$

где $\vartheta_R = \zeta_R\,/\,\overline{R} = 0{,}133$ – среднеквадратичный коэффициент вариации предела прочности на сжатие. Говоря о характеристиках прочности, зачастую по среднеквадратичному коэффициенту вариации можно судить априори о состоянии технологии производства металлических и композиционных материалов. Так, для композитов, используемых в гражданском секторе экономики, значения ϑ_R редко превышают $0{,}2 - 0{,}25$.

Подсчитаем вероятность разрушения рассматриваемого пиллерса при сжатии. Принимая во внимание малость соответствующих среднеквадратичных отклонений, для площади поперечного сечения F с помощью формулы переноса ошибок [4] и с учетом того, что случайные величины h и b коррелируют друг с другом, получаем:

$$F = b \cdot h = \overline{F}\,(1 \pm \vartheta_F)\,,\ \vartheta_F = \vartheta_b + \vartheta_h = 0,4\,.$$

В приведенных соотношениях фигурируют коэффициенты вариации площади ϑ_F, ширины ϑ_b и ϑ_h высоты сжатого пиллерса.

Поскольку корреляция между случайными величинами F и P отсутствует, для среднеквадратичного коэффициента изменчивости сжимающего напряжения (при среднем значении напряжения $\overline{\sigma}$ = 13,9 МПа) можем записать [5]:

$$\vartheta_\sigma = \sqrt{\vartheta_P^2 + \vartheta_F^2} = 0,43\,.$$

Под надежностью композита со случайным пределом прочности R будем понимать вероятность $V = 1 - P$ его безотказной работы (P – вероятность отказа) при случайном силовом воздействии σ в течение заданного времени. Для вычисления вероятности отказа P (в данном случае – разрушения) воспользуемся асимптотической формулой [6]:

$$P = 0,399\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^3}\right)\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right), \tag{12}$$

более удобной, чем традиционный интеграл Лапласа, определяя гауссову меру надежности γ следующим упрощенным соотношением [6]:

$$\gamma = \frac{n-1}{\sqrt{\vartheta_\sigma^2 + \vartheta_R^2}}\,, \tag{13}$$

где $n = \overline{R}/\overline{\sigma}$ = 12,95 – запас прочности. Легко получить, что γ = 26,55.

О найденном значении γ можно судить, оценивая его следующим образом. Если γ = 3, то, например для предела прочности R вероятность V того факта, что эта случайная величина будет находиться в интервале $\overline{R} \pm 3\sqrt{D_R}$ $\left(\sqrt{D_R} = \overline{R}\vartheta_R\right)$, равна $V = 1 - 1,37 \cdot 10^{-3}$ (известное в статистике правило трех стандартов). Однако при таком уровне безопасности композит может применяться лишь в качестве декоративного, а не нагруженного материала. Следуя принципу Старра [7], в автомобильной промышленности США, например, допустимый уровень риска должен быть около $3,2 \cdot 10^{-5}$, чему соответствуют γ = 4 и $V = 1 - 3,2 \cdot 10^{-5}$. Следуя же более жестким требованиям [7], композит только тогда пригоден для применения в качестве конструкционного материала, если допустимый уровень риска на порядок меньше, чем рекомендуют нормы Старра. Так, если $1 - V = 3 \cdot 10^{-6}$, то γ = 4,5. По-видимому, значения $\gamma \geq 5$ для композитов можно считать достаточно большими и соответствующими малой вероятности разрушения P. В нашем случае вероятность разрушения сжатого пиллерса из-за ее крайне малого значения вычислять не будем.

Проведем аналогичные вычисления в случае потери устойчивости. Сначала определим гибкость пиллерса $\lambda = \mu\, l / i$. Здесь $\mu\, l = L$, а минимальный радиус инерции равен $i = b/\sqrt{12} = 0,866\ (1 \pm 0,15)$. По ранее изложенной процедуре находим, что $\lambda \approx 138$. С помощью формулы (11) вычисляем для стеклопластика $\varphi \approx 0,349$. Иными словами, критическое напряжение в случае потери устойчивости $\varphi R \approx 62,82$, чему соответствует запас устойчивости $n \approx 2{,}87$. Теперь уже гауссова мера надежности $\gamma = 4{,}16$, а вероятность отказа (здесь – потери устойчивости) – $P = 1{,}58 \cdot 10^{-5}$. Можно видеть, что если вероятность разрушения пиллерса от сжатия крайне мала, то характеристики вероятности потери устойчивости близки к ее допустимым уровням.

Полезной для применения в практических расчетах является логарифмическая мера надежности $\rho = -\lg V$, измеряемая в белах (Б), которая при оценке вероятности потери устойчивости в данной задаче имеет значение $\rho = 4{,}8$ Б.

4. Вероятность потери устойчивости ортотропной пластины из стеклотекстолита

Рассмотрим прямоугольную пластину размером $a_1 \times a_2$, свободно опертую по всем кромкам. Пластина сжата в направлении 1, совпадающим с направлением основы материала, усилием $Q = T \cdot h \cdot a_2$, где h – толщина пластины; T – интенсивность равномерно распределенной нагрузки сжатия. Предполагая, что приложенная нагрузка не вызывает потери устойчивости, критическую нагрузку можем определить по формуле [8]:

$$T_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 \sqrt{D_1 D_2}}{a_2^2} \left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}} \left(\frac{m a_2}{a_1} \right)^2 + \frac{2 D_3}{\sqrt{D_1 D_2}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}} \left(\frac{a_1}{m a_2} \right)^2 \right],$$

где $D_i = E_i h^3 / 12(1 - \nu_1 \nu_2)$, $i = 1, 2$ – жесткость при изгибе; E_1 и E_2, ν_1 и ν_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона в соответствующих направлениях. Жесткость D_3 определяется соотношением $D_3 = \nu_2 D_1 + 2 D_{12}$, где $D_{12} = G h^3 / 12$ (G – модуль сдвига). Коэффициент m зависит от отношения a_1 / a_2, способа закрепления / опирания краев пластины и равен числу полуволн по направлению 1 при потере устойчивости.

Соотношение (14) достаточно громоздко в использовании и, кроме того, не учитывает, что для элементов конструкций, выполненных из композита, нагрузки, механические характеристики и геометрические размеры являются случайными величинами.

Рассмотрим вероятность потери устойчивости для ортотропной пластины из стеклотекстолита при следующих исходных данных: $a_1 = a_2 = 1$ м; $h = 1$ см; $m = 1$; $Q = 10$ кН; $E_1 = 1{,}5 \cdot 10^4$ МПа; $E_2 = 1{,}3 \cdot 10^4$ МПа; $G = 0{,}2 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_1 = 0{,}14$; $\nu_2 = 0{,}12$. Примем, что все случайные величины имеют коэффициент вариации, равный 0,1. Геометрические величины коррелируют друг с другом, поскольку измерения сделаны одним и тем же инструментом. Такое же предположение верно для модулей упругости материала, но между геометрическими и механическими характеристиками корреляции нет.

Принимая во внимание малость соответствующих среднеквадратичных отклонений, с помощью формулы переноса ошибок [4], получаем условие устойчивости для пластины:

$$T(1 \pm \vartheta_T) \le T_{\text{cr}}(1 \pm \vartheta_{T_{\text{cr}}}),$$

где ϑ_T и $\vartheta_{T_{\text{cr}}}$ – коэффициенты вариации случайных величин T и T_{cr}. Для значений $T = 1$ МПа и $T_{cr} = 3{,}05$ МПа коэффициенты вариации соответственно равны: $\vartheta_T = 0{,}224$ и $\vartheta_{T_{\text{cr}}} = 0{,}1$. Принимая теперь $n = 3{,}05$, $\vartheta_\sigma = \vartheta_T$ и $\vartheta_R = \vartheta_{T_{\text{cr}}}$, по формуле (13) находим гауссову меру безопасности $\gamma = 6{,}61$ и по формуле (12) – вероятность потери устойчивости пластины $P = 0{,}188 \cdot 10^{-10}$.

Для прямоугольной свободно опертой пластины с отношением сторон $a_1 / a_2 = 2$ и $m = 3$ коэффициентом получим аналогичный результат.

5. Выводы

При проведении практических расчётов на устойчивость сжатых стержней с помощью коэффициента продольного изгиба φ предпочтение отдано модифицированной однопараметрической формуле Ренкина. Потеря устойчивости рассматривается как «отказ», вероятность которого вычисляется для сжатых стержней и пластин, выполненных из стеклотекстолита.

Библиографический список

1. Маньковский В.А., Сапунов В.Т. Статистическое прогнозирование усталостной и длительной прочности в рамках теории нелинейного подобия. *Заводская лаборатория* (*диагностика материалов*), 1995, т. 61, № 11, с. 44 – 50.

2. Тимошенко С. П., Гере Дж., *Механика материалов.* – М.: Мир, 1974. – 457 с.

3. Лебедев А.А., Ковальчук В.И., Гигиняк Ф.Ф., Ломашевский В.П., *Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. Справочник.* – Киев: Наукова думка, 1983. – 368 с.

4. Худсон Д., *Статистика для физиков.* – М.: Мир, 1970. – 296 с.

5. Ржаницын А.Р., *Расчеты строительных конструкций на надежность.* – М.: Стройиздат, 1978. – 239 с.

6. Рего К. Г., *Метрологическая обработка результатов технических измерений. Справочник.* – Киев: Техника, 1987. – 126 с.

7. Бонди А. Надежность как свойство материала. *Теоретические основы инженерных расчетов*, 1979, № 1, с. 17 – 34.

8. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник. Т. 3. Ред. И.А. Биргер, Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.

References

1. Mankovsky V.A., Sapunov V.T. Statistical prediction of fatigue and long-term strength in the theory of nonlinear similarity. *Zavodskaya laboratoriya (diagnostika materialov) - Factory laboratory (diagnostics of materials)*, 1995, vol. 61, № 11, pp. 44 – 50 (in Russian).

2. Timochenko S.P., Gere Dj., *Mechanika materialov* [Mechanics of materials]. Moscow, Mir, 1974. 457 p. (in Russian).

3. Lebedev A.A., Kovalthuk V.I., Giginiak F.F., Lomachevskii V.P., *Mechanitheskie svoistva konstruktsionnich materialov pri slojnom napryajennom sostoyanii. Spravothnik* [Mechanical properties of structural materials under a 3D stress condition. Handbook]. Kiev, Naukova dumka, 1983. 368 p. (in Russian).

4. Chudson D., *Statistika dlya fizikov* [Statistics for physicists]. Moscow, Mir, 1970. 296 p. (in Russian).

5. Rjanitsin A.R., *Rastheti stroitelnich konstruktsii na nadejnost* [Calculations of structures on the reliability]. Moscow, Stroiizdat, 1978. 239 p. (in Russian).

6. Rego K.G., *Metrologitheskaya obrabotka resultatov techitheskich izmerenii. Spravothnik* [Metrological processing of the results of technical measurements. Handbook]. Kiev, Technika, 1987. 126 p. (in Russian)..

7. Bondi A., Reliability as a property of the material. *Teoretitheskie osnovi injenernich rasthetov – Theoretical foundations of engineering calculations*. 1979, № 1, pp. 17 – 34 (in Russian).

8. Prothnoct, ustoiithivost, kolebaniya. Spravothnik. T. 3 [Strength, stability, oscillations. Handbook. Vol. 3.]. Eds I.A. Birger, Ya.A. Panovko. Moscow, Machinostroenie, 1968. 568 p. (in Russian).

Сведения об авторе

Сапунов Владимир Тимофеевич, к.т.н., доцент Национального Исследовательского Ядерного университета «МИФИ» (НИЯУ МИФИ) E-mail: vtsapunov@yandex.ru