

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КОНСОЛЬНОЙ ПОЛОСЫ С МИКРОСТРУКТУРОЙ

В.В.Васильев¹, С.А.Лурье^{1,2}

¹Институт проблем механики РАН

²Институт прикладной механики РАН

Уравнения теории упругости для среды с микроструктурой, полученные в работах [1,2], привлекаются для решения задачи изгиба консольной полосы, имеющей в рамках классической теории упругости сингулярное решение [3,4]. Показано, что теория упругости, учитывающая структуру среды, позволяет устранить сингулярность классического решения. На основе полученного решения и результатов экспериментов по изгибу композитных балок определена величина структурного параметра, входящего в уравнения предлагаемого варианта теории упругости. Обсуждается соответствие между полученным решением и традиционным решением сопротивления материалов.

Ключевые слова: теория упругости, плоская задача, консольная полоса, сопротивление материалов.

PLANE PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A CANTILEVER STRIP WITH MICROSTRUCTURE

V.V.Vasiliev¹, S.A. Lurie^{1,2}

¹Institute for Problems in Mechanics, Russian academy of Sciences,
101 Vernadskogo, Moscow 119562, Russia

²Institute of Applied Mechanics, Russian academy of Sciences,
Leningradskii pr. 7, Moscow, 125040, Russia

The equations of the theory of elasticity for solids with microstructure obtained in [1,2] are applied to the plane problem for a cantilever strip which has a singular solution in the classical elasticity [3,4]. The theory which takes into account the solid microstructure allows us to eliminate the singularity of the classical solution. The obtained solution in conjunction with experimental study of composite beams is used to determine the microstructural parameter which enters the equations of the proposed theory. The correspondence between the obtained solution and the traditional Strength of Materials solution is discussed.

Keywords: theory of elasticity, plane problem, cantilever strip, strength of materials.

1. Классическое решение плоской задачи теории упругости для консольной полосы

Рассмотрим полосу, показанную на рис. 1 и описываемую уравнениями классической теории упругости, которые можно записать в форме

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \bar{\tau}_{yx} = \bar{\tau}_{xy}, \quad (1)$$

$$\bar{\sigma}_x = \bar{E}(\bar{\epsilon}_x + \nu \bar{\epsilon}_y), \quad \bar{\sigma}_y = \bar{E}(\bar{\epsilon}_y + \nu \bar{\epsilon}_x), \quad \bar{\tau}_{xy} = G \bar{\epsilon}_{xy}, \quad (2)$$

$$\bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \quad \bar{\varepsilon}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \quad (3)$$

где $\bar{E} = E / (1 - \nu^2)$.

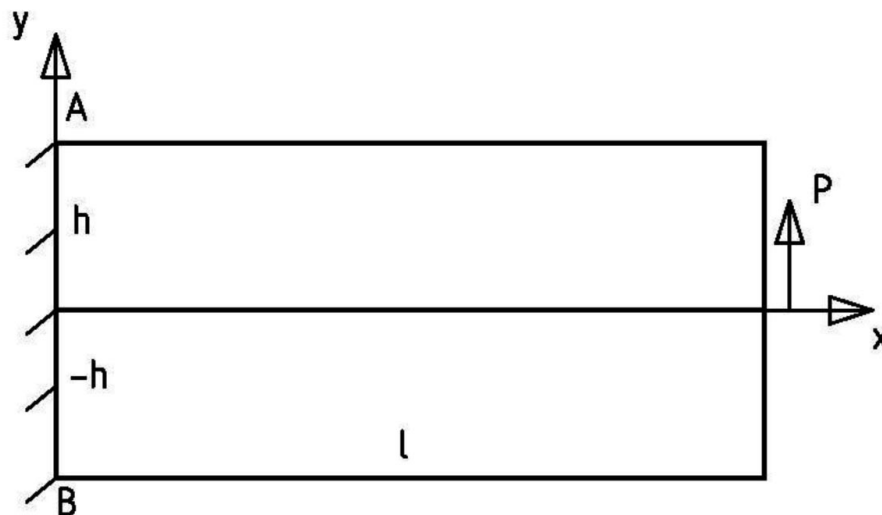


Рис 1. Консольная полоса
Cantilever beam

По причинам, которые будут ясны из дальнейшего, все переменные, входящие в уравнения классической теории упругости, отмечены верхней чертой.

Для упрощения решения задачи об изгибе консольной полосы будем считать материал несжимаемым в направлении оси y (рис. 1), т.е. примем, что $\bar{\varepsilon}_y = 0$ тогда соотношения упругости (2), (3) примут вид

$$\bar{\sigma}_x = E \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, \quad \bar{\tau}_{xy} = G \left(\bar{v}' + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right), \quad (4)$$

где $(*)' = d(*) / dx$.

Решение должно удовлетворять следующим граничным условиям при $x = 0$

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad (5)$$

и при $y = \pm h$

$$\bar{\tau}_{xy} = 0, \quad \bar{\sigma}_y = 0. \quad (6)$$

Для длинной полосы ($l \gg h$) решение задачи в рассматриваемой постановке, полученное в работе [3], определяется следующими выражениями для перемещений, осевых нормальных и касательных напряжений

$$\bar{u} = -\frac{3P}{2Ebh^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy + \frac{P}{4Gbh} \left(\frac{3G}{Eh^2} x^2 - \frac{y^2}{h^2} + \frac{3}{5} \right) y + \frac{P}{Gb} \sum_k \frac{\sin \alpha_k y}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k} e^{-s_k x}, \quad (7)$$

$$\bar{v} = \frac{3P}{4Ebh^3} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2 + \frac{P}{Gbh} \left(\frac{3x}{5} - h \sqrt{\frac{E}{G}} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} (1 - e^{-s_k x}) \right), \quad (8)$$

$$\bar{\sigma}_x = -\frac{3P}{2bh^3} (l - x)y - \frac{P}{bh} \sqrt{\frac{E}{G}} \sum_k \frac{\sin \alpha_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} e^{-s_k x}, \quad (9)$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{3P}{4bh^3} (h^2 - y^2) - \frac{P}{bh} \sum_k \frac{\cos \lambda_k - \cos \alpha_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k} e^{-s_k x}. \quad (10)$$

Здесь b – толщина полосы, а параметры α_k и λ_k связаны соотношениями

$$tg \lambda_k = \lambda_k, \quad \lambda_k = \alpha_k h, \quad \alpha_k^2 = (E/G) s_k^2.$$

Системы функций 1 и $(\cos \lambda_k - \cos \alpha_k y)$, а также y и $\sin \alpha_k y$ являются полными и ортогональными.

Прикладная теория изгиба балок, основанная на законе плоских сечений, принимаемом в сопротивлении материалов, предполагает, что деформации сдвига в балке отсутствует, т. е. что $G \rightarrow \infty$. В этом случае решение (7)-(10) упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{3P}{2Ebh^3} \left(l - \frac{x}{2} \right) xy, & \bar{v} &= \frac{3P}{4Ebh^3} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2 \\ \bar{\sigma}_x &= -\frac{3P}{2bh^3} (l - x)y, & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{3P}{4bh^3} (h^2 - y^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Сравним точное решение (7)-(10) с прикладным решением (11). Принимая $x = 0$, что соответствует закрепленному сечению полосы, и суммируя ряд в правой части равенства (10), можно заключить [3,4], что при $-h < y < h$ касательные напряжения $\bar{\tau}_{xy}(x = 0, y) = P / 2bh$. При $y = \pm h$ из решения (10) следует, что $\bar{\tau}_{xy}(h) = 0$. Таким образом, в закрепленном сечении распределение касательных напряжений по высоте описывается разрывной функцией, которая является постоянной в интервале $-h < y < h$ и обращается в нуль на его концах $y = \pm h$. В результате эта функция оказывается не дифференцируемой в точках $(x = 0, y = \pm h)$ и решение первого уравнения равновесия (1) является сингулярным. Действительно, ряд в правой части решения (9) для $\bar{\sigma}_x$ расходится в точках $(x = 0, y = \pm h)$, т. е. напряжение σ_x в этих точках неограниченно возрастает. Заметим, что сингулярность решения сохраняется и при отказе от предположения о несжимаемости материала по высоте полосы [5,6]. Полученный результат, т. е. бесконечно большое нормальное напряжение в угловой точке закрепленного края полосы на рис. 1, трудно признать правильным, так как он

явно противоречит выражению (11), традиционно используемому в технике при проектировании консольных балок. Более того в работе [3] экспериментально показано, что сингулярность решения (9) не оказывает влияния на прочность балок, и не имеет физической природы.

2. Соотношения теории упругости для консольной полосы с микроструктурой

Как следует из результатов, полученных в разделе 1, напряженное состояние полосы характеризуется большими градиентами напряжений в окрестности угловых точек закрепленного края. Однако уравнения равновесия (1) основаны на предположении о равномерном распределении напряжений по граням бесконечно малого элемента сплошной среды, введенном в теорию упругости О. Коши в 1827 г. Заметим, что в 1887 г. В. Фойгт ввел применительно к кристаллам более общую модель сплошной среды, предположив, что по граням элемента действуют равномерно распределенные микромоменты. Эта модель послужила основой для так называемых моментных теорий упругости [7], не получивших широкого практического применения в связи с трудностями, возникающими при экспериментальном определении постоянных, входящих в соотношения упругости для микромоментов. Аналогичная проблема характерна и для так называемых градиентных теорий [8], в которых соотношения упругости связывают между собой не только напряжения и деформации, но и их градиенты.

В работах [1,2] построен вариант теории упругости, основанный на анализе равновесия элемента, имеющего не бесконечно малые, а малые, но конечные размеры. При этом установлено, что соотношения теории упругости для среды с микроструктурой формально совпадают с уравнениями (1)-(3), а граничные условия для рассматриваемой задачи – с условиями (5) и (6). Полученные уравнения, в отличие от классических уравнений теории упругости, включают обобщенные напряжения и перемещения, которые обозначаются верхней чертой и связаны с традиционными напряжениями и перемещениями (без черты) следующим образом:

$$(\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}) = (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) - r^2 \Delta(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}), \quad (12)$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = (u, v) - r^2 \Delta(u, v), \quad (13)$$

где r - микроструктурный параметр среды, определяемый экспериментально, а Δ - оператор Лапласа.

3. Решение задачи теории упругости для консольной полосы с микроструктурой

Основная идея решения заключается в следующем. Обобщенные напряжения и деформации $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}_{xy}, \bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_{xy}$ и перемещения \bar{u}, \bar{v} удовлетворяют уравнениям классической теории упругости (1)-(3). Граничные условия (5) для \bar{u} и \bar{v} , на краю $x = 0$, а также граничные условия (6) для $\bar{\sigma}_y$ и $\bar{\tau}_{xy}$ на краях $y = \pm h$ соответствуют граничным условиям классической теории для рассматриваемой задачи (рис. 1). Таким образом, решение, соответствующее классической теории, т.е. соотношения (7)-(10), можно считать решением задачи обобщенной теории. Традиционные перемещения u, v получаются в результате решения уравнений Гельмгольца (13) с граничными условиями на закрепленном краю полосы $x = 0$:

$$u = 0, \quad v = 0. \quad (14)$$

Традиционные напряжения находятся как решение уравнения Гельмгольца (12), удовлетворяющее граничным условиям на продольных краях полосы $y = \pm h$ (рис. 1):

$$\tau_{xy} = 0. \quad (15)$$

Как будет показано ниже, в результате этого решения устраняется сингулярность классического решения.

Рассмотрим определение прогиба полосы $v(x)$ и воспользуемся соотношением (13) для \bar{v} , т.е.

$$v - r^2 v'' = \bar{v}. \quad (16)$$

Правая часть уравнения (16) определяется равенством (8), причем \bar{v} удовлетворяет второму граничному условию (5). Решение уравнения (16), удовлетворяющее второму условию (14), имеет вид

$$v = \frac{3P}{4Ebh^3} \left[x^2 \left(l - \frac{x}{3} \right) + 2r^2 (l - x) \right] + \frac{3P}{5Gbh} x - \frac{3Plr^2}{2Ebh^3} e^{-x/r} - \frac{P}{Gb} \sqrt{\frac{E}{G}} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^3} \left(1 + \frac{e^{-s_k x} - r^2 s_k^2 e^{-x/r}}{r^2 s_k^2 - 1} \right). \quad (17)$$

Осевое перемещение находится из соответствующего уравнения (13), т.е.

$$u - r^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \bar{u}. \quad (18)$$

где \bar{u} определяется равенством (7) и удовлетворяет первому граничному условию (5). Учитывая, что перемещение u является нечетной функцией переменной y , запишем общее решение уравнения (18)

$$u = \frac{3P}{4Ebh^3} \left[x^2 + 2(r^2 - lx) \right] y + \frac{P}{2Gbh^3} \left(\frac{3h^2}{10} - 3r^2 - \frac{y^2}{2} \right) y - \frac{P}{Gb} \sum_k \frac{\sin(\alpha_k y) e^{-s_k x}}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k \left[r^2 (s_k^2 - \alpha_k^2) - 1 \right]} + A(y^3 + 3rxy) e^{-x/r} + \sum_k A_1^k e^{-\eta_k x} \sin \alpha_k y + \sum_k A_2^k e^{-\xi_k x} \sin \beta_k y, \quad (19)$$

где $\eta_k^2 = \alpha_k^2 + \frac{1}{r^2}$, $\xi_k^2 = \beta_k^2 + \frac{1}{r^2}$.

Входящие в решение (19) члены, включающие силу P , являются частным решением неоднородного уравнения (18). Члены, содержащие константы A и A_1^k, A_2^k являются частными решениями однородного уравнения, соответствующего уравнению (18), которые позволяют удовлетворить граничное условие $u(x=0, y) = 0$, на закрепленном конце полосы (рис. 1). При $x = 0$ имеем

$$u(x=0, y) = \frac{3Pr^2}{2Ebh^3}y + \frac{3P}{2Gbh^3} \left(\frac{h^2}{10} - r^2 - \frac{y^2}{6} \right) y - \frac{P}{Gb} \sum_k \frac{\sin(\alpha_k y)}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k [r^2 (s_k^2 - \alpha_k^2) - 1]} + Ay^3 + \sum_k A_1^k \sin \alpha_k y + \sum_k A_2^k \sin \beta_k y.$$

Из условия $u = 0$ следует

$$A = \frac{P}{4Gbh^3}, \quad A_1^k = \frac{P}{Gb} \frac{1}{\lambda_k^2 \sin \lambda_k [r^2 (s_k^2 - \alpha_k^2) - 1]}. \quad (20)$$

Тогда

$$u(x=0, y) = \frac{3P}{2Ebh^3} \left[r^2 + \frac{E}{G} \left(\frac{h^2}{10} - r^2 \right) \right] y + \sum_k A_2^k \sin \beta_k y = 0.$$

Примем $\beta_k = \pi(2k-1)/2h$. Разлагая первое слагаемое этого равенства в ряд Фурье получим, соответственно,

$$A_2^k = -\frac{3P \sin[\pi(2k-1)/2]}{Ebh^2 [\pi(2k-1)/2]^2} \left[r^2 + \frac{E}{G} \left(\frac{h^2}{10} - r^2 \right) \right], \quad k = 1, 2, \dots \quad (21)$$

Таким образом, осевое перемещение определяется равенствами (19–21).

Для того, чтобы найти касательное напряжение, воспользуемся соответствующим уравнением (12), т.е.

$$\tau_{xy} - r^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial y^2} \right) = \bar{\tau}_{xy}. \quad (22)$$

Здесь $\bar{\tau}_{xy}$ определяется равенством (10). По построению эта функция удовлетворяет условию (6). Учитывая, что напряжение является четной функцией переменной y , запишем общее решение уравнения (22).

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{4bh^3} (h^2 - y^2 - 2r^2) + \frac{P}{bh} \sum_k \left\{ \frac{1}{\lambda^2 (r^2 s_k^2 - 1)} - \frac{\cos \alpha_k y}{\lambda_k \sin \lambda_k [r^2 (s_k^2 - \alpha_k^2) - 1]} \right\} e^{-s_k x} + B_1 ch \frac{y}{r} + \sum_k B_k e^{-s_k x} \cos \gamma_k y.$$

где $\gamma_k^2 = s_k^2 - \frac{1}{r^2}$.

Как и ранее, члены, включающие силу P , соответствуют частному решению уравнения (22), а члены с константами B_1 и B_k соответствуют решению однородного уравнения и позволяют удовлетворить граничные условия $\tau_{xy}(x, y = \pm h) = 0$ на продольных краях полосы (рис. 1) Из этих условий, учитывая, что $tg \lambda_k = \lambda_k$ получим

$$B_1 = \frac{3Pr^2}{2bh^3ch(h/r)}, \quad B_k = \frac{Pr^2\alpha_k^2}{bh\lambda_k^2(r^2s_k^2-1)[r^2(s_k^2-\alpha_k^2)-1]\cos\gamma_k h},$$

и окончательное выражение для касательного напряжения принимает вид

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{4bh^3} \left[h^2 - y^2 - 2r^2 \left(1 - \frac{chy/r}{chh/r} \right) \right] + \frac{P}{bh} \sum_k \left\{ \frac{1}{\lambda_k^2(r^2s_k^2-1)} - \frac{\cos\alpha_k y}{\lambda_k \sin\lambda_k[r^2(s_k^2-\alpha_k^2)-1]} + \frac{r^2\alpha_k^2 \cos\gamma_k y}{\lambda_k^2(r^2s_k^2-1)[r^2(s_k^2-\alpha_k^2)-1]\cos\gamma_k h} \right\} e^{-s_k x}, \quad (23)$$

где $tg \lambda_k = \lambda_k$, $s_k^2 = \lambda_k^2 \left(\frac{G}{E} \right)^2 \frac{1}{h^2}$, $\alpha_k^2 = \lambda_k^2 / h^2$.

Нормальное осевое напряжение σ_x может быть найдено из соответствующего уравнения (12), т.е.

$$\sigma_x - r^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) = \bar{\sigma}_x. \quad (24)$$

Здесь $\bar{\sigma}_x$ определяется равенством (9). Поскольку граничные условия на напряжения на продольных краях полосы не накладываются, то в качестве решения уравнения (24) может быть принято его частное решение, которое имеет вид

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2bh^3} (l-x)y - \frac{P}{bh} \sqrt{\frac{E}{G}} \sum_k \frac{e^{-s_k x} \sin\alpha_k y}{\lambda_k \sin\lambda_k [1 - r^2(s_k^2 - \alpha_k^2)]}. \quad (25)$$

Ряд в правой части равенства (23) сходится, т.е. в отличие от решения (9) полученное выражение для σ_x не имеет особенности в угловой точке закрепленного края с координатами $x = 0, y = \pm h$ (рис.1). Напряжения σ_x , определяемые равенством (25) очевидно удовлетворяют уравнениям равновесия относительно

моментов так как $\int_{-h}^h y \sin\alpha_k y dy = 0$ ($k = 1, 2, \dots$).

4. Определение постоянных

В полученное решение входят три постоянные – модуль упругости E , модуль сдвига G и структурные постоянная r . Модули E и G могут быть найдены традиционными методами. Для определения параметра r необходимо провести специальный эксперимент.

Предположим, что длина балки достаточно велика ($l \gg h$) и рассмотрим ее напряженно-деформированное состояние вдали от закрепленного края $x = 0$, запишем выражения (17), (19), (23), и (25) для перемещений и напряжений

$$u = \frac{3P}{4Ebh^3} \left[x^2 + 2(r^2 - lx) \right] y + \frac{3P}{4Gbh^3} \left(\frac{h^2}{5} - 2r^2 - \frac{y^2}{3} \right) y, \quad (26)$$

$$v = \frac{3P}{4Ebh^3} \left(l - \frac{x}{3} \right) x^2 + \frac{3P}{5Gbh} x, \quad (27)$$

$$\sigma_x = -\frac{3P}{2bh^3} (l - x) y, \quad (28)$$

$$\tau_{xy} = \frac{3P}{4bh^3} \left[h^2 - y^2 - 2r^2 \left(1 - \frac{chy/r}{chh/r} \right) \right]. \quad (29)$$

Найдем осевую и сдвиговую деформации, т.е.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3P}{2Ebh^3} (l - x) y, \quad (30)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{3Pr^2}{2Ebh^3} + \frac{3P}{4Gbh^3} (h^2 - y^2 - 2r^2). \quad (31)$$

Заметим, что в построенной теории закон Гука выполняется только для обобщенных напряжений и деформаций, т.е.

$$\bar{\sigma}_x = E\bar{\varepsilon}_x, \quad \bar{\tau}_{xy} = E\bar{\varepsilon}_{xy}, \quad (\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_{xy}) = (\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}) - r^2 \Delta (\varepsilon_x, \varepsilon_{xy}). \quad (32)$$

Как следует из равенств (28) и (30) закон Гука $\sigma_x = E\varepsilon_x$, выполняется и для традиционных напряжений и деформаций. Однако для касательных напряжений (29) и деформаций сдвига (31) традиционный закон Гука не выполняется. Причина этого связана с тем, что оператор Лапласа, входящий в равенства (12) и (32) оказывается равным нулю для σ_x и ε_x , которые линейно зависят от x и y , и отличным от нуля для τ_{xy} и ε_{xy} , которые зависят от y^2 . Заметим, что закон Гука экспериментально установлен для однородных напряжений и деформаций и, как показано экспериментально А.В. Андреевым [2,9], не выполняется для полей с градиентами напряжений и деформаций.

Равенство (31) может быть использовано для экспериментального определения параметра r . Максимальная величина деформации сдвига имеет место при $y = 0$, т.е. в середине сечения полосы. При $y = 0$ равенство (31) дает

$$\varepsilon_{xy}^m = \frac{3Pr^2}{2Ebh^3} + \frac{3P}{4Gbh^3}(h^2 - 2r^2).$$

Отсюда

$$r^2 = \frac{h^2}{2(1 - G/E)} \left(1 - \frac{4Gbh}{3P} \varepsilon_{xy}^m \right). \quad (33)$$

Это выражение определяет параметр r если известна деформация сдвига ε_{xy}^m и модули упругости и сдвига материала балки E и G . Схема эксперимента, позволяющего определить деформацию сдвига ε_{xy}^m , представлена на рис.2, а экспериментальная балка показана на рис. 3.

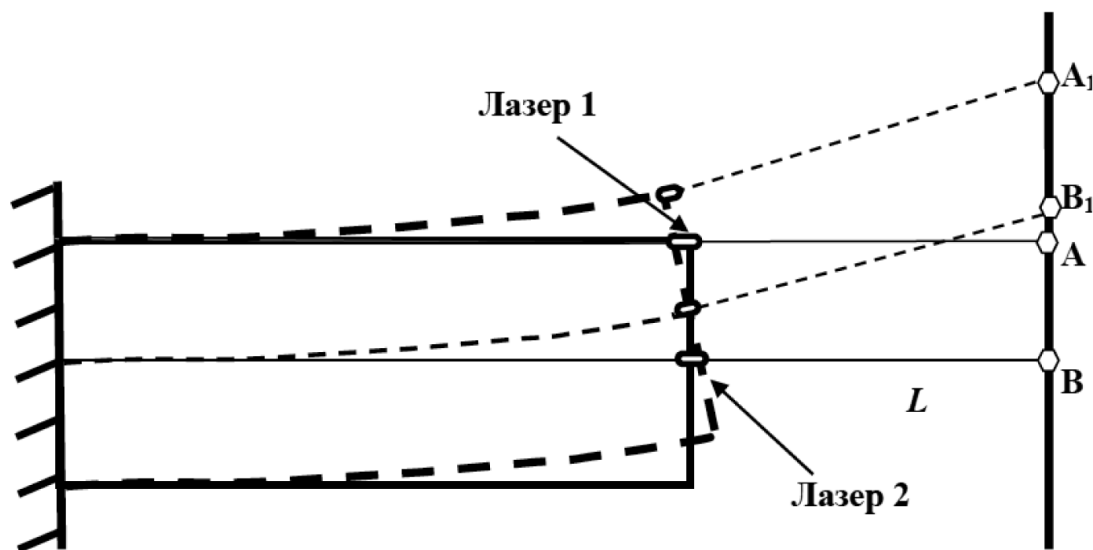


Рис. 2 Схема эксперимента для определения параметра r
Schematic diagram of the experiment undertaken to determine parameter r

На поверхности балки устанавливается лазер 1, луч которого фокусируется в точке A экрана, отстоящего от экрана на расстояние L . При изгибе балки луч перемещается в точку A_1 и измеряется угол поворота касательной к поверхности балки $\alpha = (AA_1)/L$. В центре сечения балки закрепляется стержень, который поворачивается вместе с сечением. На стержне устанавливается лазер 2, луч которого фокусируется в точке B на экране и перемещается в точку B_1 при изгибе балки, что позволяет измерить угол поворота в центре сечения $\alpha_2 = (BB_1)/L$. Деформация сдвига определяется по формуле

$$\varepsilon_{xy}^m = \alpha_1 - \alpha_2.$$



Рис. 3 Экспериментальная композитная балка
Experimental composite beam

Экспериментально исследовался изгиб двухопорной балки, нагруженной силой в середине пролета. В силу симметрии, половину такой балки можно рассматривать как консольную балку, нагруженную опорной реакцией. Экспериментальная балка (рис. 3) была изготовлена из эпоксидного углепластика, армированного в поперечном направлении стеклянными волокнами и имела следующие параметры (рис. 1): $l = 300$ мм, $b = 89,7$ мм, $2h = 53,8$ мм. При силе $P = 24,5$ кН получена деформация сдвига $\varepsilon_{xy}^m = 0,001271$.

Для того, чтобы найти параметр r с помощью уравнения (33), необходимо знать модули упругости и сдвига материала E и G . Для определения этих модулей рассмотрим балку, длина которой l настолько превышает высоту $2h$ (рис. 1), что при определении прогиба в сечении $x = l$ влияние пограничных эффектов, возникающих в окрестности закрепленного конца полосы $x = 0$, можно не учитывать. Тогда из равенства (27) получим

$$v_l = v(x=l) = \frac{Pl^3}{2Ebh^3} + \frac{3Pl}{5Gbh}. \quad (34)$$

Введем следующие обозначения:

$$\tilde{v} = \frac{v_l b}{Pl}, \quad \bar{l} = \frac{l}{h}.$$

Тогда соотношение (34) можно представить в виде:

$$\tilde{v} = \frac{\bar{l}^2}{2E} + \frac{3}{5G}. \quad (35)$$

Соотношение (35) в принципе позволяет определить E и G если определить прогибы v_l двух балок с различными значениями относительно длины \bar{l}_1 и \bar{l}_2 . Однако такой способ обеспечивает высокую точность только если величина $(\bar{l}_1^2 - \bar{l}_2^2)$ является значительной. В связи с этим, модуль упругости E определяется непосредственно из опыта на осевое нагружение балки, в результате которого получен $E = 105,84$ ГПа. Тогда формула (35) дает $G = 5,926$ ГПа и из уравнения (33) следует $r = 0,0762 h \approx 2$ мм. Заметим, что балка была изготовлена прессованием из слоев с толщиной 1,5 мм, т.е. параметр r соизмерим со структурным параметром балки.

5. Анализ полученных результатов

Рассмотрим выражение (17), определяющее прогиб полосы. Это выражение состоит из полиномиальной части и двух составляющих, соответствующих краевым эффектам, локализованным в окрестностях закреплённого сечения полосы ($x = 0$). Краевой эффект, включающий параметр r , соответствует рассматриваемому варианту теории упругости.

Если отбросить члены, содержащие параметр r , решение (17) вырождается в равенство (8), соответствующее классической теории упругости. Это решение содержит второй краевой эффект, определяемый параметрами s_k . Если не учитывать этот краевой эффект и отбросить сумму по k , получим прогиб (27), соответствующий сдвиговой модели С.П. Тимошенко. Если принять $G \rightarrow \infty$, решение вырождается в равенство (11), соответствующее сопротивлению материалов. Для композитной балки с параметрами, приведенными в разделе 4, изменение безразмерного прогиба $\tilde{v} = v / v_m$, где $v_m = Pl^3 / 2Ebh^3$ - максимальный прогиб, соответствующий решению (11), по осевой координате $\tilde{x} = x / l$ показано на рис. 4. Сплошная линия соответствует решению (11), а штриховая - равенству (27). Поправка, связанная с краевыми эффектами, не превышает 2%.

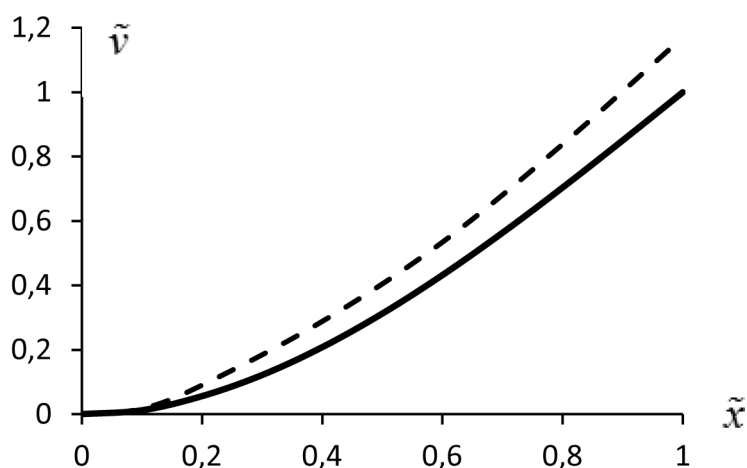


Рис. 4. Распределение относительного прогиба по осевой координате, соответствующие равенствами (11) (—) и (27) (---)

Dependences of the normalized deflection on the axial coordinate corresponding to Eqs (11) (—) and (27) (---)

Распределение относительного нормального напряжения, действующего в сечении $x = 0$ полосы, т.е. $\tilde{\sigma}_x = \sigma_x / \sigma_m$, где $\sigma_m = -3Pl / 2bh^2$ - максимальное напряжение, соответствующее сопротивлению материалов, по координате $\tilde{y} = y / h$, показано на рис. 5.

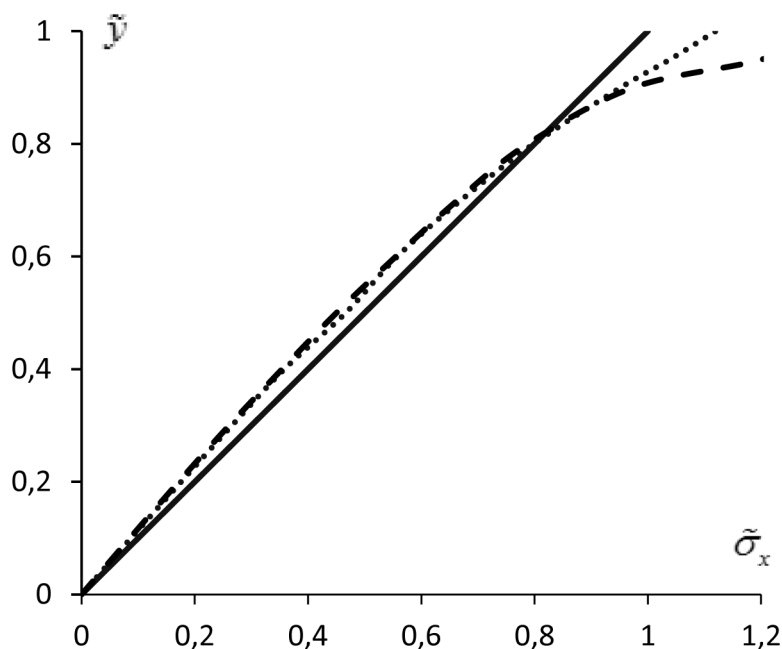


Рис. 5. Распределения относительного нормального напряжения, действующего в закреплённом сечении полосы, по толщине полосы, соответствующие равенствам (11) (—), (9) (- - -) и (25) (■ ■ ■)
Distributions of the normalized normal stress acting in the fixed cross section of the beam over the beam thickness corresponding to Eqs. (11) (—), (9) (- - -) and (25) (■ ■ ■)

Сплошная линия соответствует решению (11), т.е. решению сопротивления материалов, штриховая - решению (11), а точечная - полученному выше решению (25). Как следует из рис.5, сингулярность напряжения в угловой точке полосы (при $x = 0$ и $\tilde{y} = 1$) характерная для решения, соответствующего классической теории упругости, в полученном решении отсутствует. Максимальное нормальное напряжение отличается от напряжения, определяемого по традиционной формуле (11) на 12%.

На рис. 6, представлено распределение по толщине полосы относительного касательного напряжения действующего в сечении $x = 0$ полосы, т.е. $\tilde{\tau}_{xy} = \tau_{xy} / \tau_m$, где $\tau_m = 3P / 4bh$ - максимальное напряжение, соответствующее решению (11). Сплошная линия соответствует решению (11), т.е. сопротивлению материалов, штриховая - решению (10) классической теории упругости, а точечная - полученному выше решению (23). Как следует из рис.6, предлагаемая теория дает, в отличие от классической теории, регулярное распределение касательных напряжений по толщине закреплённого края полосы. Максимальное касательное напряжение отличается от решения (11), соответствующего традиционной формуле Д.И. Журавского на 33 %.

6. Заключение

Полученные результаты позволяют заключить, что сингулярность, появляющаяся в решении задачи классической теории упругости для консольной полосы, связана с феноменологической моделью однородной среды, на которой основана классическая теория. Эта сингулярность отсутствует в решении теории

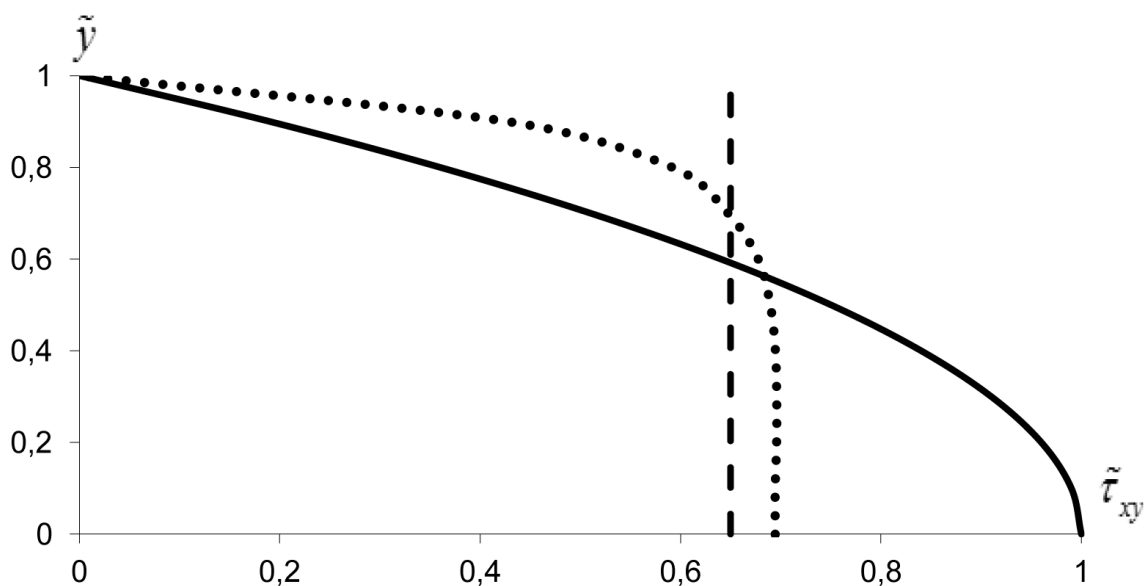


Рис. 6. Распределения относительного касательного напряжения, действующего в закреплённом сечении полосы, по толщине полосы, соответствующие равенствам (11) (—), (10) (---) и (23) (· · ·)

Distributions of the normalized shear stress acting in the fixed cross section of the beam over the beam thickness corresponding to Eqs. (11) (—), (10) (---) and (23) (· · ·)

упругости, учитывающей микроструктуру среды. Полученное в рамках этой теории напряжения в большей степени соответствуют сопротивлению материалов чем теории упругости, что подтверждает справедливость соотношений, используемых для расчета консольных балок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФИ № 16-01-00623-а.

Авторы благодарят В.А.Салова за помощь в проведении эксперимента. Спасибо!

Библиографический список

1. Васильев В.В., Лурье С.А. Модель сплошной среды с микроструктурой // *Композиты и Наноструктуры*. 2015. т. 7. № 1. С. 2-10
2. Васильев В.В., Лурье С.А. *Обобщенная теория упругости* // *Изв. РАН. МТТ*. 2015. № 4. С. 16-27.
3. Васильев В.В., Лурье С.А. *О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы* // *Изв. РАН. МТТ*. 2014. № 4. С. 40-49.
4. Васильев В.В. *Симметрия тензора напряжений и сингулярные решения в теории упругости* // *Изв. РАН. МТТ*. 2010. № 2. С. 62-72.
5. Васильев В.В., Лурье С.А. *Плоская задача теории упругости для ортотропной консольной полосы* // *Изв. РАН. МТТ*. 1984. № 5. С. 125-135.
6. Lurie S.A., Vasiliev V.V. *The Biharmonic Problem in the Theory of Elasticity*. Australia etc: Gordon and Breach, 1995, 265p.
7. Новацкий В. *Теория упругости*. М. Мир, 1975. 872 с.
8. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity* // *Int. Journal of Solids and Structures*. 1965. V. 1. P. 417-438.
9. Андреев А.В *Инженерные методы определения концентраций напряжений в деталях машин*. Машиностроение, 1976, 70с.

References

1. Vasiliev V.V., Lurie S.A. Model sploshnoi sredy s mikrostructuroi [Model of a solid with microstructure]. Composites and Nanostructures. 2015. Vol.6. No.1. P. 2-10.
2. Vasiliev V.V., Lurie S.A. Generalized theory of elasticity// Mechanics of Solids. 2015. No. 4. P. 379-388.
3. Vasiliev V.V., Lurie S.A. On singular solution in plane problem of theory of elasticity for a cantilever strip// Mechanics of Solids. 2014. No. 4. P. 40-49.
4. Vasiliev V.V. Symmetry of the stress tensor and singular solutions in the theory of elasticity// Mechanics of Solids. 2010. No. 2. P. 62-72.
5. Vasiliev V.V., Lurie S.A. Plane problem of theory of elasticity for an orthotropic cantilever strip// Mechanics of Solids. 1984. No.5. P. 125-135.
6. Lurie S.A., Vasiliev V.V. The biharmonic problem in the theory of elasticity. Australia etc: Gordon and Breach, 1995.
7. Nowacki W. Theory of Elasticity. Warszawa, 1970.
8. Mindlin R.D. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity// Int. Journal of Solids and Structures. 1965. V.1. P. 417-438.
9. Andreev A.V. Experimental study of stress concentration in machine parts. Moscow: Mashinostroenie, 1976.

Сведения об авторах

В.В. Васильев: д-р техн. наук, академик РАН, гл. научный сотрудник Института проблем механики РАН, г. Москва, Россия, vvas@dol.ru, тел. 8(916)607 1281.

С.А. Лурье: д-р техн. наук, вед. научный сотрудник Института проблем механики РАН, г. Москва, Россия, salurie@mail.ru, тел. 8(903) 794 7279.