

Методы описания ферми-жидкости.

План лекций:

1. Ферми-жидкость Ландау
2. Спаривание Хартри-Фока. Другие варианты спаривания.
3. Функции линейного отклика
4. Микроскопические теории: приближения Хартри-Фока, Хаотических фаз, Хаббардовские поправки.
5. Применения изложенной техники.

Постановка проблемы

При достаточно низких температурах параметром, характеризующим кинетическое поведение электронов, является фермиевская энергия ε_F . Чтобы можно было пренебречь взаимодействием между электронами, нужно, чтобы эта энергия существенно превышала энергию взаимодействия на характерном расстоянии между частицами.

Постановка проблемы

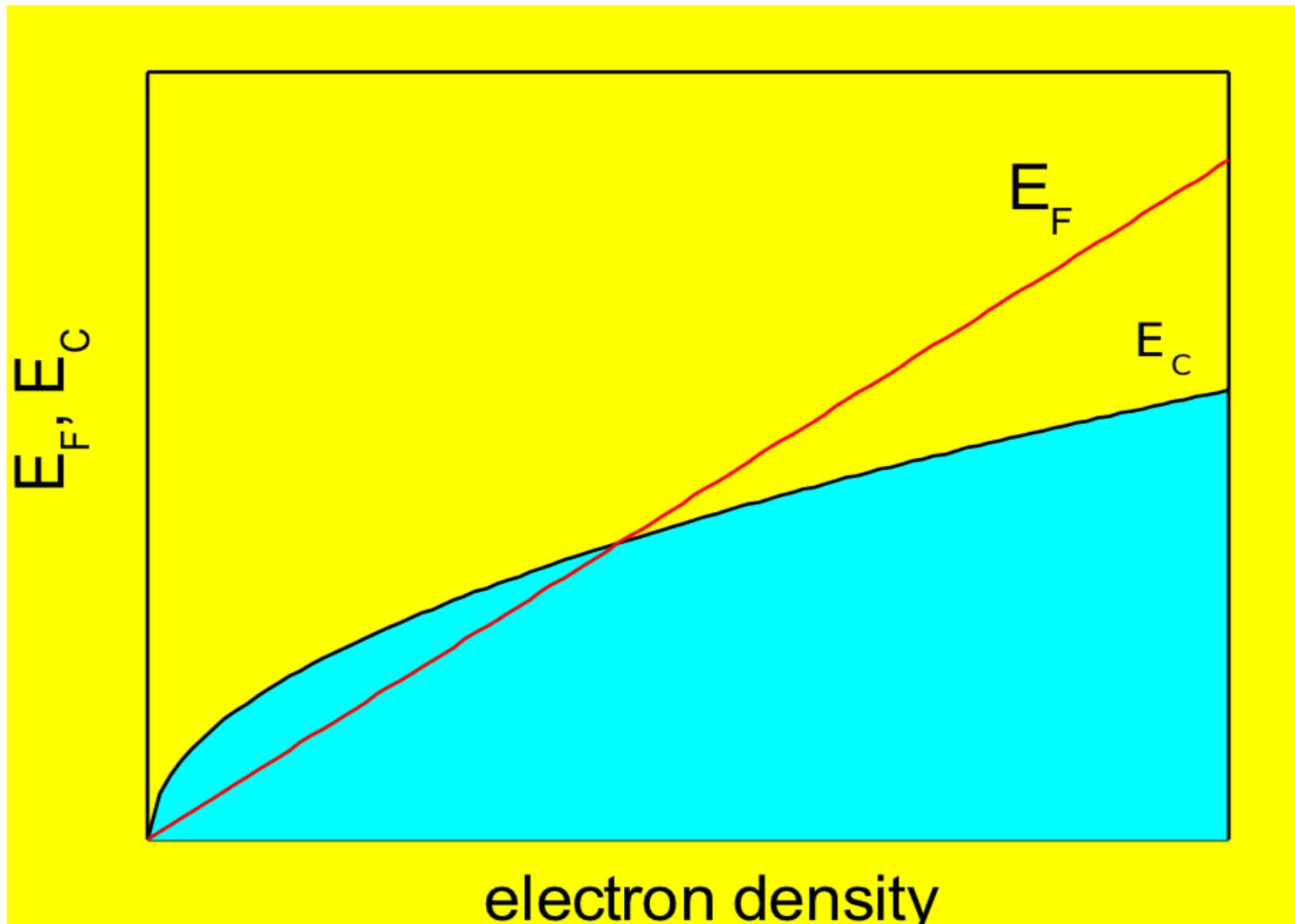
В двумерном случае, например, условие слабого взаимодействия выглядит следующим образом:

$$(p_F)^2 = 2\pi\hbar^2 N_s; \quad \varepsilon_F = (\pi\hbar^2 N_s)/m > e^2 N_s^{1/2}/\varepsilon_0,$$

где p_F – фермиевский импульс, m – эффективная масса частиц, ε_0 – диэлектрическая проницаемость, а N_s – число электронов на единице площади. Из (1.1) следует, что пренебрежение эффектами межэлектронного взаимодействия возможно при

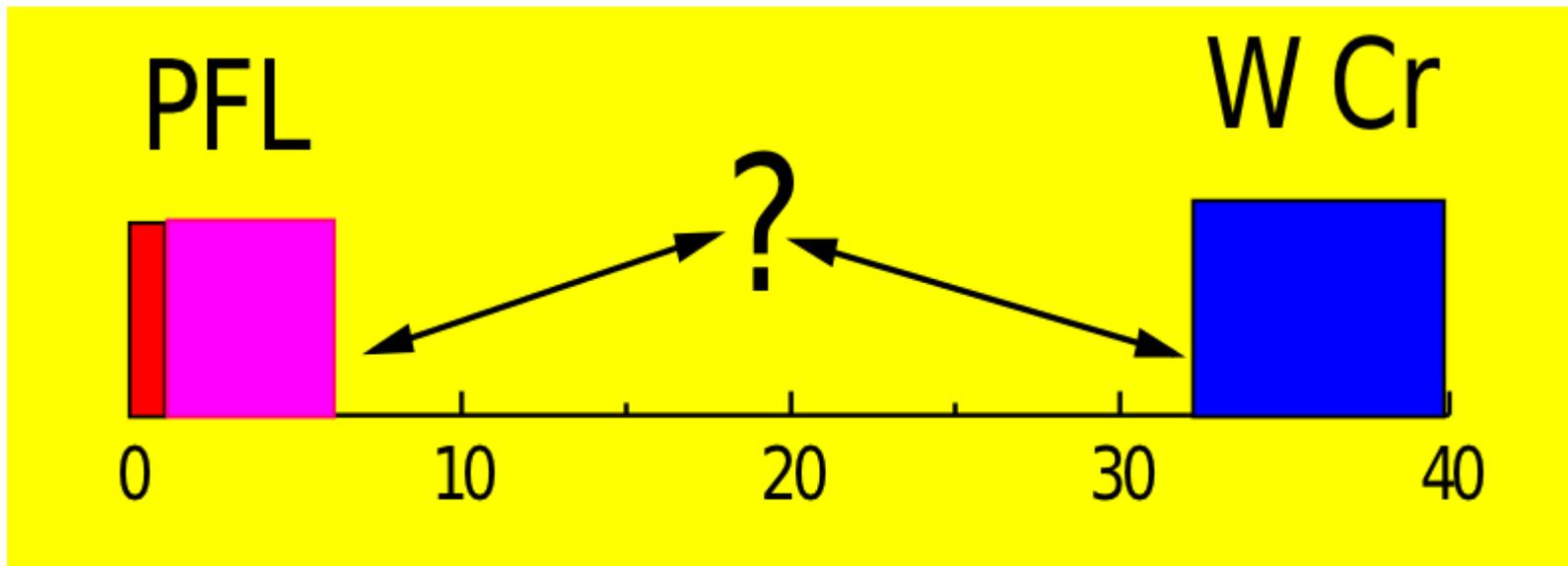
$$N_s \gg (m e^2 / \pi\hbar^2 \varepsilon_0)^2 \sim 10^{12} \text{ см}^{-2}.$$

Постановка проблемы



Постановка проблемы

Обычно для того, чтобы численно охарактеризовать взаимодействие, используют безразмерный параметр r_s равный отношению радиуса Вигнера-Зейтца $[(\pi N_s)^{-1/2}$ в двумерном случае] к боровскому радиусу $a_B = \epsilon_0 h / (2\pi m e^2)$. Легко убедиться, что этот параметр описывает отношение характерной кулоновской энергии к энергии Ферми. В современных двумерных электронных системах в полупроводниковых структурах сравнительно легко достигаются значения $r_s = 10$, в то время как условие (1.1) требует $r_s \ll 1$.



Метод канонических преобразований

Для большинства систем многих тел трюк, аналогичный проделанному с атомами решетки, удастся воспроизвести в том смысле, что оказывается возможным перейти от системы сильно взаимодействующих исходных частиц к совокупности почти независимых возбуждений над основным состоянием.

Эти возбуждения очень похожи на реальные частицы и называются квазичастицами.

Введение квазичастиц

Рассмотрим какое-либо состояние идеальной системы невзаимодействующих фермионов. Будем медленно, “адиабатически”, включать взаимодействие между частицами. В итоге, после включения мы получим одно из собственных состояний системы с взаимодействием. Не ясно, все ли собственные состояния системы с взаимодействием могут быть получены таким образом. Например, в сверхпроводниках с помощью указанной процедуры не может быть получено основное состояние. Будем говорить, что система взаимодействующих фермионов является “нормальной”, если с помощью указанной процедуры могут быть получены все ее состояния из собственных состояний системы невзаимодействующих частиц.

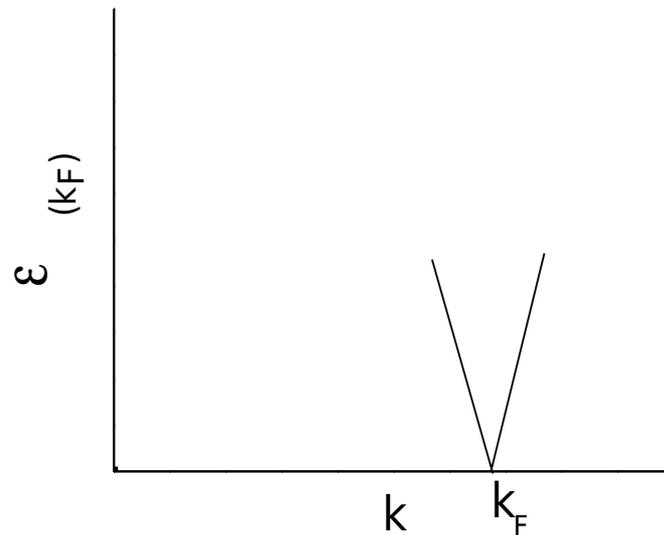
Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

следуя Ландау, можем положить, что полное число квазичастиц в системе равно числу исходных частиц. В основном состоянии заполнены все квантовые состояния с импульсами, меньше фермиевского, который в случае трех измерений связан с числом частиц в системе обычным соотношением

$$k_F = (3\pi^2 N/\Omega)^{1/3}.$$

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

основе теории Л.Д. Ландау лежит предположение о том, что спектр возбуждений ферми-жидкости строится также как спектр возбуждений идеального ферми-газа. Возбужденное состояние может быть построено путем переноса одной из частиц из-под ферми-уровня наружу. При каждом таком переносе возникает возбуждение над ферми уровнем и «дырка» под ним.



Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

следуя Ландау, можем положить, что полное число квазичастиц в системе равно числу исходных частиц. В основном состоянии заполнены все квантовые состояния с импульсами, меньше фермиевского, который в случае трех измерений связан с числом частиц в системе обычным соотношением

$$k_F = (3\pi^2 N/\Omega)^{1/3}.$$

Соотношение (2.1) можно интерпретировать как условие равенства числа «частиц» числу «дырок». Для функции распределения квазичастиц $n(\mathbf{k})$ это означает:

$$\int \delta n d^3\mathbf{k} = 0.$$

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Систему квазичастиц будем считать подключенной к резервуару так, что задан уровень химического потенциала μ .

Свободная энергия системы F запишется через внутреннюю энергию E и число частиц N :

$$(2.3) \quad F - F_0 = E - E_0 - \mu (N - N_0),$$

где E_0 и N_0 внутренняя энергия и число частиц в основном состоянии.

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Разложим свободную энергию по степеням δn_p (здесь и далее мы не будем делать различий между волновым числом электрона k и его импульсом p). На первый взгляд кажется, что в низжайшем порядке разложение должно иметь вид

$$F - F_0 = \sum_p (\varepsilon_p - \mu) \delta n_p.$$

Легко убедиться в том, что этот член является квадратичным по отклонению от равновесия.

Действительно, обозначив отклонение от равновесия символом δ , получим $\delta n_p \propto \delta$ и $(\varepsilon_p - \mu) \propto \delta$.

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Следовательно в разложении должны быть учтены и другие члены второго порядка малости:

$$F - F_0 = \sum_p (\varepsilon_p - \mu) \delta n_p + 1/2 \sum_{p,p'} f_{pp'} \delta n_p \delta n_{p'} + O(\delta^3)$$

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Функция $f_{pp'}$ является второй вариационной производной, значит

$$(2.5) \quad f_{pp'} = f_{p'p} .$$

Для «нормальных систем $f_{pp'}$ непрерывна на ферми-поверхности, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только значение этой функции на ферми-поверхности.

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

В действительности, выражения (2.4) и (2.5) должны содержать еще и проекцию спина. Из инвариантности энергии по отношению к обращению времени следует:

$$(2.6) \quad f_{p\sigma, p'\sigma'} = f_{-p-\sigma, -p'-\sigma'}$$

Ферми поверхность сама инвариантна относительно замены $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}$.
Следовательно,

$$f_{p\sigma, p'\sigma'} = f_{p-\sigma, p'-\sigma'}$$

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Мы обнаружили, что f зависит только от относительной ориентации спинов частиц и имеет две компоненты, соответствующие параллельной и антипараллельной ориентациям.

$$\begin{aligned} f_{pp'}^{\uparrow\uparrow} &= f^S_{pp'} + f^A_{pp'} \\ f_{pp'}^{\uparrow\downarrow} &= f^S_{pp'} - f^A_{pp'}. \end{aligned}$$

(2.8)

Здесь введены симметричная по спину $f^S_{pp'}$ и антисимметричная $f^A_{pp'}$ части взаимодействия.

Энергия взаимодействия в теории ферми жидкости Ландау.

Для изотропной системы функции $f_{pp'}^{s,a}$ зависят только от угла ξ между импульсами p и p' :

$$(2.9) \quad f_{pp'}^{s,a} = \sum_l f_l^{s,a} P_l(\cos \xi),$$

где $P_l(\cos \xi)$ – полиномы Лежандра. Обычно коэффициенты $f_l^{s,a}$ приводят к безразмерному виду, умножив их на **плотность состояний квазичастиц** на ферми-уровне:

$$v f_l^{s,a} = [m^* p_F / (\pi^2 \hbar^3)] f_l^{s,a} = F_l^{s,a}$$

Локальная Энергия квазичастиц.

Зададим некоторое распределение квазичастиц δn_p и добавим в систему еще одну квазичастицу с импульсом p . В результате этого действия свободная энергия вырастет на

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_p - \mu = \varepsilon_p - \mu + \sum'_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'}, \quad (2.11)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что суммировать нужно по всем импульсам, за исключением p .

Величину $\underline{\underline{\varepsilon}}_p$ будем называть **локальной энергией квазичастиц**.

Если возмущение системы зависит от координаты, на нашу квазичастицу будет действовать сила:

$$-\nabla_r \underline{\underline{\varepsilon}}_p = -\nabla_r \left(\sum'_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} \right). \quad (2.14)$$

Откуда видно, что динамика отдельной квазичастицы определяется ее локальной энергией.

Распределение локального равновесия

Определим распределение локального равновесия как

$$\tilde{n}^0 = n^0(\underline{\varepsilon}_p - \mu), \quad (2.15)$$

где n^0 - функция фермиевского распределения .

Истинное равновесное распределение рассчитывается как распределение, которое может быть реализовано максимальным числом способов при фиксированной температуре.

Определим также распределение истинного равновесия (распределение в отсутствии возбуждений), как $n^0(\varepsilon_p - \mu)$.

Распределение локального равновесия

Отклонения от локального равновесия и отклонение от истинного равновесия связаны между собой:

$$\delta \tilde{n} = n_p - \tilde{n}_p^0 = n_p - n_p^0 + n_p^0 - \tilde{n}_p^0 = n_p - n_p^0 - \left(\frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p} \right) (\varepsilon_p - \varepsilon_p^0).$$

Откуда следует:

$$\delta n_p = \delta \tilde{n}_p + \left(\frac{\partial n_p^0}{\partial \varepsilon_p} \right) \left(\sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} \right). \quad (2.17)$$

Распределение локального равновесия

Возмущение электронного распределения может быть разложено по сферическим функциям (что возмущение существует только вблизи ферми-поверхности):

$$\delta n_p = \sum_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \varphi) \delta n_{l,m} \quad (2.25)$$

Подставив (2.23) в (2.15), получим:

$$\delta \tilde{n}_{l,m}^{\mathbf{s},\mathbf{a}} = \delta n_{l,m}^{\mathbf{s},\mathbf{a}} [1 + F_{l,m}^{\mathbf{s},\mathbf{a}} (2l+1)^{-1}]$$

Эффективная масса квазичастиц

В случае ферми-жидкости Ландау эффективная масса должна быть задана через параметры, определенные на ферми-поверхности. Следуя Ландау, определим эффективную массу квазичастицы как отношение ее импульса к групповой скорости

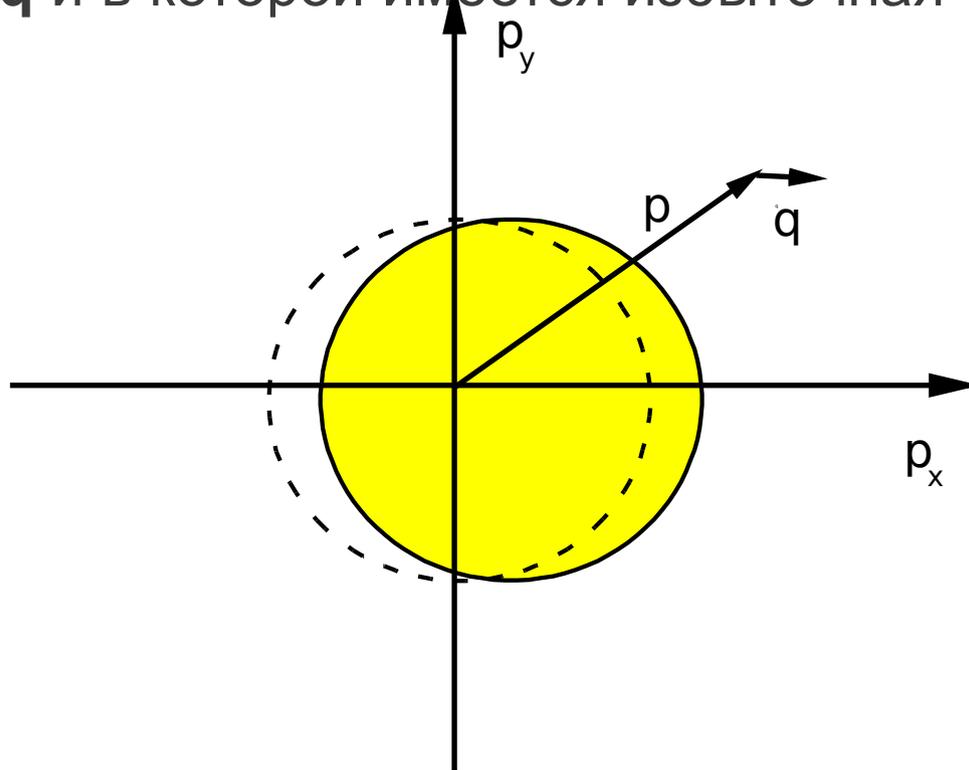
$$m^* = p/v . \quad (2.18)$$

Данное определение совершенно не совпадает с определением через тензор обратных масс, использовавшееся ранее.

Эффективная масса квазичастиц

По определению поток частиц равен $\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{p}_i / m$, где \mathbf{p}_i – импульс i – той частицы, а m – ее масса: $\mathbf{J} = \mathbf{P} / m$. Здесь \mathbf{P} – суммарный импульс частиц.

Рассмотрим состояние системы, у которой ферми-поверхность смещена на \mathbf{q} и в которой имеется избыточная частица с импульсом $\mathbf{p} + \mathbf{q}$



Эффективная масса квазичастиц

Предполагается, что $q \ll p \sim p_F$.

Смещение ферми-поверхности будет устранено, если мы перейдем в систему, движущуюся со скоростью q/m . В движущейся системе координат взаимодействие нашей частицы с избыточным импульсом и остальными частицами системы не меняется, а ее кинетическая энергия изменится на величину:

$$\delta E = (qp/m + q^2/2m) = qj + O(q^2),$$

Таким образом,

$$j_\alpha = \partial E / \partial q_\alpha,$$

Где δE – разность энергий частицы в покоящейся системе координат (в которой импульс частицы равен p) и в движущейся (с импульсом $p + q$)

Эффективная масса квазичастиц

эта разность может быть найдена в терминах квазичастиц

сначала увеличим импульс квазичастицы на \mathbf{q} (что даст вклад в энергию $\mathbf{q} \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}}$, а потом сдвинем ферми-поверхность.

$$\delta E = \mathbf{q} \nabla_{\mathbf{p}} \varepsilon_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{p}'} f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}; \quad \delta n_{\mathbf{p}'} = -\mathbf{q} \mathbf{v}_{\mathbf{p}'} (\partial n^0 / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}'}) . \quad (2.19)$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/m = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}'} |\mathbf{v}_{\mathbf{p}'}| \cos \theta f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'} (\partial n^0 / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}'}) . \quad (2.20)$$

Эффективная масса квазичастиц

суммирование по \mathbf{p}' в (2.20) заменим интегрированием, имея в виду, что $(\partial n^0 / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}'}) = -\delta(\varepsilon_{\mathbf{F}} - \varepsilon_{\mathbf{p}'})$ и тот факт, что при интегрировании по углам от $f_{\mathbf{p}\mathbf{p}'}$ останется симметричный член с $l = 1$ (пропорциональный $\cos \theta$).

Интегрируя по углам $\cos^2 \theta$ с учетом $\mathbf{v}_{\mathbf{F}} = \mathbf{p}_{\mathbf{F}} / m^*$, получим:

$$m^*/m = 1 + 1/3 F S_1.$$

Спиновая восприимчивость

Поместим ферми-жидкость в постоянное и однородное магнитное поле H и вычислим парамагнитный спиновый момент.

Частица со спином $s = \pm 1/2$ обладает энергией $-g\mu_B sH$,

где g – фактор Ланде затравочных частиц, $\mu_B = eh/4\pi mc$ – магнетон Бора, s – проекция спина.

Химический потенциал двух подсистем частиц (с положительной и отрицательной проекциями спина на направление магнитного поля) остается, естественно общим, а ферми-поверхности изменяются: одна из них разбухает, а другая уменьшается в диаметре.

Спиновая восприимчивость

Так как химический потенциал равен локальной энергии квазичастиц на ферми-поверхности (см. 2.15), равновесное распределение в присутствии магнитного поля имеет вид:

$$n_{ps}(H) = n^0(\underline{\varepsilon}_p - \mu - g\mu_B sH), \quad (2.22)$$

что может быть формально переписано для каждой из проекций спина, как распределение со сдвинутым значением химического потенциала:

$$n_{ps}(H) = n^0(\underline{\varepsilon}_p - \mu - \delta\mu), \quad (2.23)$$

где $\delta\tilde{n}_p = -\delta\mu (\partial n^0 / \partial \varepsilon_p) = -g\mu_B sH (\partial n^0 / \partial \varepsilon_p)$.

Спиновая восприимчивость

Полная намагниченность равна

$$M = \sum_{p,s} g \mu_B s \delta n_{ps} . \quad (2.24)$$

Следовательно, нам нужно перейти от $\delta \tilde{n}_p$ к δn_p .

Заметим, что для изотропной системы $\delta \tilde{n}_{ps}$ изотропно в \mathbf{p} -пространстве и анизотропно по спину.

$$\delta n_{ps} = \delta \tilde{n}_{ps} (1+F_0 a)^{-1} = -g \mu_B s H (1+F_0 a)^{-1} (\partial n^0 / \partial \epsilon_p) .$$

Окончательно получаем:

$$M = \mu_B^2 \nu H g^2 (1+F_0 a)^{-1}, \quad (2.27)$$

где ν – плотность состояний на уровне Ферми.

Спиновая восприимчивость

Магнитная восприимчивость равна

$$\chi_p = M/H = (8\pi m^* p_F / h) g^2 \mu_B^2 (1 + F_0 a)^{-1}. \quad (2.28)$$

Полученное соотношение имеет смысл только для $1 + F_0 a > 0$.

Если $F_0 a < -1$, длинноволновые флуктуации магнитного момента становятся неустойчивыми и система переходит в ферромагнитное состояние (знаменитая Стонеровская неустойчивость).

Спиновая восприимчивость

Рассмотрим в качестве примера двумерный случай.

Для частиц, поляризованных по спину, средняя кинетическая энергия возрастает в два раза, из-за падения плотности состояний.

Однако обменная энергия при спиновой поляризации падает также примерно в два раза.

В области малых плотностей, где обменная энергия превышает кинетическую системе выгодно стать ферромагнитной.

Термодинамическая плотность состояний

Сначала найдем связь между термодинамической плотностью состояний и сжимаемостью системы фермионов.

По определению давление $P = - dE_0/d\Omega$, где E_0 энергия основного состояния системы, а Ω - объем.

Сжимаемость определяется как $\kappa^{-1} = - \Omega dP/d\Omega$.

С другой стороны, для макроскопических систем справедливо соотношение $E_0 = \Omega \phi(\rho)$, где $\rho = N/\Omega$ - плотность системы, N - число частиц, а ϕ – некоторая функция, своя для каждой системы.

Термодинамическая плотность состояний

Отсюда:

$$P = -\varphi(\rho) + \Omega \varphi' N/\Omega^2 = -\varphi(\rho) + \rho \varphi'(\rho).$$

$$\alpha^{-1} = -\Omega \{ \varphi'(\rho) \cdot N/\Omega^2 - N/\Omega^2 \varphi'(\rho) - \rho \varphi''(\rho) N/\Omega^2 \} = \rho^2 \varphi''(\rho)$$

Химический потенциал $\mu = dE_0/dN = \varphi'(\rho)$.

Следовательно, $d\mu/dN = \varphi''(\rho)/\Omega$. и

$$\alpha^{-1} = \rho^2 \Omega (\partial\mu/\partial N)_{\Omega} = N\rho (\partial\mu/\partial N)_{\Omega} \quad (2.38)$$

Как мы видим, сжимаемость фермиевской системы и термодинамическая плотность состояний пропорциональны друг другу.

Термодинамическая плотность состояний

локальная энергия частиц на ферми-уровне равна значению химического потенциала (снова см. 2.15) и

равновесное распределение квазичастиц с увеличенным на $d\mu$ химическим потенциалом имеет вид $n^0(\underline{\varepsilon}_p - \mu - d\mu)$.

Отклонение от локального равновесия $n^0(\underline{\varepsilon}_p - \mu)$ равно

$$\delta \tilde{n}_p = -d\mu (\partial n^0 / \partial \varepsilon_p).$$

Если обе добавки к функции распределения изотропны, как в случае всестороннего сжатия, то связь между $\delta \tilde{n}_p$ и δn_p задана уравнением

$$\delta n_p = \delta \tilde{n}_p (1 + F_0^S)^{-1}.$$

Термодинамическая плотность состояний

Термодинамическая плотность состояний равна

$$(\partial N / \partial \mu) = \nu (1 + F_0^S)^{-1}. \quad (2.41)$$

Не прозевайте: В плотность состояний на уровне Ферми ν входит эффективная масса квазичастиц.

Кинетическое уравнение для квазичастиц

введем слабое возмущение, зависящее от координат и времени $n(\mathbf{r}, t)$. В приближении линейного отклика можно рассматривать возмущение только от одной фурье-компоненты.

$$n(\mathbf{r}, t) = n_p^0 + \delta n_p(q, \omega) \exp([i(\mathbf{q}\mathbf{r} - \omega t)].$$

Вообще говоря, введение координатной зависимости для функции от импульса предполагает, что обе величины координата и импульс измеримы одновременно.

Неопределенность энергии и импульса составляют $\hbar\omega/2\pi$ и $\hbar q/2\pi$, соответственно. Дальнейшие вычисления будут справедливы, если

$$\hbar\omega \ll 2\pi\mu; \quad \hbar q v_F \ll 2\pi\mu.$$

Кинетическое уравнение для квазичастиц

Полная энергия $E(n(\mathbf{r}, t))$ представляет собой функционал от функции распределения:

$$E = E_0 + \sum_p \int d^3r \varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) \delta n_p(\mathbf{r}) + 1/2 \sum_{p, p'} \int d^3r d^3r' f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}' \mathbf{r}') \delta n_p(\mathbf{r}) \delta n_{p'}(\mathbf{r}'). \quad (2.12)$$

Если система инвариантна относительно пространственных переносов, то $\varepsilon(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{p})$, а $f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}' \mathbf{r}')$ может зависеть только от разности $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

В случае короткодействующего взаимодействия (как, например, в He^3):

$$E = E_0 + 1/2 \sum_{p, p'} f_{pp'} \delta n_p(\mathbf{r}) \delta n_{p'}(\mathbf{r}); \quad f_{pp'} = \int d^3r' f(\mathbf{p}, \mathbf{r}, \mathbf{p}' \mathbf{r}'). \quad (2.13)$$

Избыточная энергия является локальной функцией координат.

Кинетическое уравнение для квазичастиц

Рассмотрим баланс частиц внутри объема $d^3r d^3p$:

$$(2.30) \quad \left(\frac{\partial n_p}{\partial t}\right) + \nabla_r n_p \nabla_p \underline{\underline{\varepsilon}}_p - \nabla_p n_p \nabla_r \underline{\underline{\varepsilon}}_p = 0.$$

Здесь $\nabla_p \underline{\underline{\varepsilon}}_p$ дает групповую скорость квазичастиц, а $-\nabla_r \underline{\underline{\varepsilon}}_p$ определяет среднюю силу, действующую на квазичастицу со стороны окружения. Перепишем это уравнение для δn_p и сразу его линеаризуем. Для этого нам потребуются два известных соотношения

$$n_p = n_p^0 + \delta n_p; \quad \underline{\underline{\varepsilon}}_p = \varepsilon_p + \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'},$$

Кинетическое уравнение для квазичастиц

В результате получаем:

$$(\partial \delta n_p / \partial t) + v_p \nabla_r \delta n_p - \nabla_p n_p^0 \sum_{p'} f_{pp'} \nabla_r \delta n_{p'} (r, t) = 0$$

Благодаря множителю $\nabla_p n_p^0 = -v_p \delta(\epsilon_p - \mu)$ уравнение описывает квазичастицы только вблизи от уровня Ферми.

Первые два члена этого уравнения типичны для газа невзаимодействующих частиц.

Последний член описывает, в сущности, поток частиц основного состояния, увлекаемый неравновесным распределением возбужденных квазичастиц.

Кинетическое уравнение для квазичастиц

Поскольку

$$\delta n_p = \delta \tilde{n}_p + (\partial n_p^0 / \partial \varepsilon_p) (\sum_{p', pp'} f_{pp'} \delta n_{p'}) = \delta \tilde{n}_p - \partial n_p^0 / \partial p |v_p|^{-1} (\sum_{p', pp'} f_{pp'} \delta n_{p'}),$$

то кинетическое уравнение может быть переписано в виде:

$$(\partial \delta n_p / \partial t) + v_p \nabla_r \delta \tilde{n}_p(p, r, t) = 0$$

В уравнение (2.32) следует, как обычно, добавить еще члены с внешней силой и интегралом столкновений. Окончательно получим:

$$(\partial \delta n_p / \partial t) + v_p \nabla_r \delta \tilde{n}_p(p, r, t) + F_p v_p (\partial n_p^0 / \partial \varepsilon_p) = I(\delta n_p).$$

Плотность потока квазичастиц

Используем для получения плотности потока квазичастиц уравнение непрерывности.

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0,$$

где $\delta \rho(\mathbf{r}, t) = \sum_p \delta n_p(\mathbf{r}, t)$.

Суммируем кинетическое уравнение по всем \mathbf{p} с учетом, что $\mathbf{F}_p = 0$.

$$\partial / \partial t (\delta \rho(\mathbf{r}, t)) + \nabla \cdot \sum_p \delta \tilde{n}_p \mathbf{v}_p = 0 .$$

Здесь учтено, что число частиц при столкновениях сохраняется, поэтому

$$\sum_p I(\delta n_p) = 0$$

Плотность потока квазичастиц

Из этого следует, что плотность потока

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \delta \tilde{n}_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}}, \text{ или}$$

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} (\delta n_{\mathbf{p}} - 1/v_{\mathbf{p}} (\partial n^0 / \partial \mathbf{p}) \sum'_{\mathbf{p}', \mathbf{p} \mathbf{p}'} f_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} \delta n_{\mathbf{p}'}) = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \sum'_{\mathbf{p}', \mathbf{p} \mathbf{p}'} f_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} (\partial n^0 / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}'}) \mathbf{v}_{\mathbf{p}'}$$

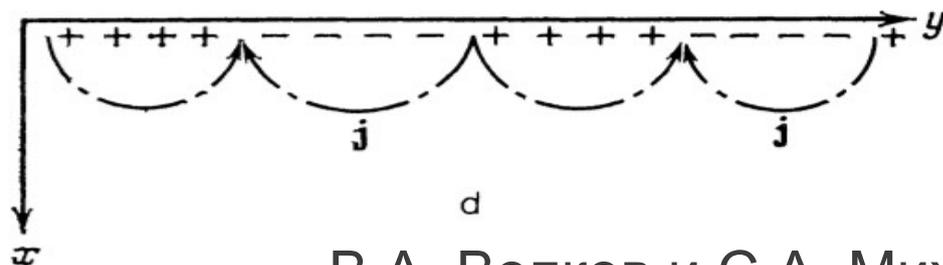
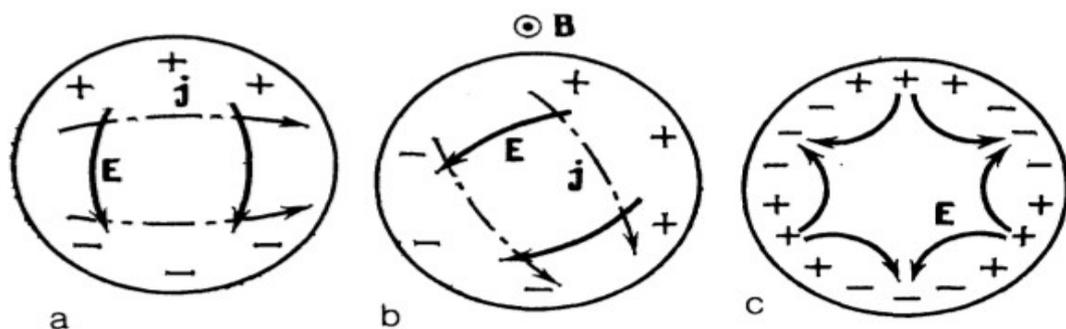
В последнем члене мы сменили порядок суммирования и заменили \mathbf{p} на \mathbf{p}' .

$$\mathbf{J} = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}} \mathbf{j}_{\mathbf{p}}, \text{ где как и раньше,}$$

$$\mathbf{j}_{\mathbf{p}} = \mathbf{v}_{\mathbf{p}} - \sum'_{\mathbf{p}', \mathbf{p} \mathbf{p}'} f_{\mathbf{p} \mathbf{p}'} (\partial n^0 / \partial \varepsilon_{\mathbf{p}'}) \mathbf{v}_{\mathbf{p}'}$$

Нулевой звук в ферми-жидкости

Для распространения обычного звука в какой-либо среде необходимо установление локального равновесия, и следовательно, многократные столкновения между частицами составляющими эту среду. Затухание обычного звука оказывается пропорциональным времени между столкновениями. С другой стороны, для передачи сигнала на расстояние столкновения вообще-то не нужны.



Нулевой звук в ферми-жидкости

Рассмотрим движение системы ферми-частиц в собственном самосогласованном поле.

Будем предполагать, что ферми-жидкость находится в основном состоянии и рассмотрим бесстолкновительный режим.

$$\omega \gg v.$$

Кинетическое уравнение имеет вид (2.31):

$$(\partial \delta n_p / \partial t) + \mathbf{v}_p \nabla_r \delta n_p - \nabla_p n_p^0 \sum_{p'} f_{pp'} \nabla_r \delta n_{p'}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

или для фурье гармоник:

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p (\partial n_p^0 / \partial \epsilon_p) \sum_{p'} f_{pp'} \delta n_{p'} = 0.$$

(2.43)

Нулевой звук в ферми-жидкости

Будем предполагать, что возмущение δn_p является гладкой функцией, определенной на всей ферми-поверхности. При нулевой температуре коллективные моды связаны исключительно с колебаниями самой ферми-поверхности. Будем предполагать, что мы имеем дело с изотропной системой. Смещение ферми-поверхности по нормали на величину u_p приведет к изменению числа квазичастиц

$$\delta n_p = \delta (\varepsilon_p - \mu) |v_F| u_p.$$

Вспомнив, что $(\partial n^0 / \partial \varepsilon_p) = -\delta (\varepsilon_p - \mu)$,

напишем кинетическое уравнение для u_p :

$$(\mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p - \omega) u_p + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}_p \sum_{p'} f_{pp'} u_{p'} = 0.$$

Нулевой звук в ферми-жидкости

Введем полярные координаты φ, θ и проекцию спина σ .

Смещение является функцией $u = u(\varphi, \theta, \sigma)$, а кинетическое уравнение принимает вид:

$$(\cos \theta - \lambda) u(\varphi, \theta, \sigma) + \cos \theta (8\pi)^{-1} \sum_{\sigma'} \int d\Omega' F(\xi, \sigma, \sigma') u(\varphi', \theta', \sigma') = 0.$$

Здесь ξ - угол между направлениями φ, θ и φ', θ' , $\lambda = \omega / qv_F$.
Коэффициент 8π получен как произведение 4π (соответствующих пространственному углу) и 2 (соответствующей двум направлениям спина).

Нулевой звук в ферми-жидкости

Представив смещение в виде

$$u(\varphi, \theta, \sigma) = u^s(\varphi, \theta) \pm u^a(\varphi, \theta),$$

где \pm отвечают двум возможным взаимным ориентациям спина.

$$(\cos \theta - \lambda) u^{sa}(\varphi, \theta) + \cos \theta (4\pi)^{-1} \int d\Omega' F^{sa}(\xi) u^{sa}(\varphi', \theta') = 0.$$

Нулевой звук в ферми-жидкости

Предположим теперь, что взаимодействие не зависит от \mathbf{p} и \mathbf{p}' и рассмотрим моду, соответствующую u^S . Из всех $F(\xi)$ останется только $F_0^S = F_0$. Мода, описываемая в этом случае уравнением (2.44), отвечает за изменение плотности квазичастиц и похожа на звук, поэтому Ландау назвал ее нулевым звуком.

Не составляет труда найти решение (2.44) для рассматриваемого случая:

$$u(\varphi, \theta) = C \cdot \cos \theta (\lambda - \cos \theta)^{-1}$$

Подставив (2.45) в (2.44), найдем связь между λ и F_0 .

$$\lambda/2 \ln[(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{-1}] - 1 = F_0^{-1}$$

(2.46)

Нулевой звук в ферми-жидкости

$$\lambda/2 \ln[(\lambda + 1)(\lambda - 1)^{-1}] - 1 = F_0^{-1}.$$

Если $F_0 > 0$, как в случае отталкивания между частицами, то у (2.46) имеется один корень, $\lambda > 0$ соответствующий незатухающей нуль звуковой моде, со скоростью больше v_F .

Если отталкивание между частицами является очень сильным ($F_0 \gg 1$), то $\lambda \gg 1$. Левую часть (2.46) можно при этом разложить по $1/\lambda$ и получить $\lambda \propto (F_0/3)^{1/2}$.

При $F_0 \ll 1$ $\lambda \rightarrow 1$. В этих условиях возмущение ферми-поверхности существует только в окрестности точки $\theta = 0$ и волна распространяется со скоростью частиц в этой точке (вспомним бросание камешков).

При $\lambda \gg 1$ звуковое возмущение соответствует сдвигу всей ферми-поверхности как целого.

Нулевой звук в ферми-жидкости

Скорость обычного (обусловленного столкновениями) звука в среде связана с сжимаемостью обычным способом:

$$s^2 = (\kappa m \rho)^{-1} = N/m (\partial\mu/\partial N).$$

Для скорости звука в трехмерной системе из (2.39) получаем

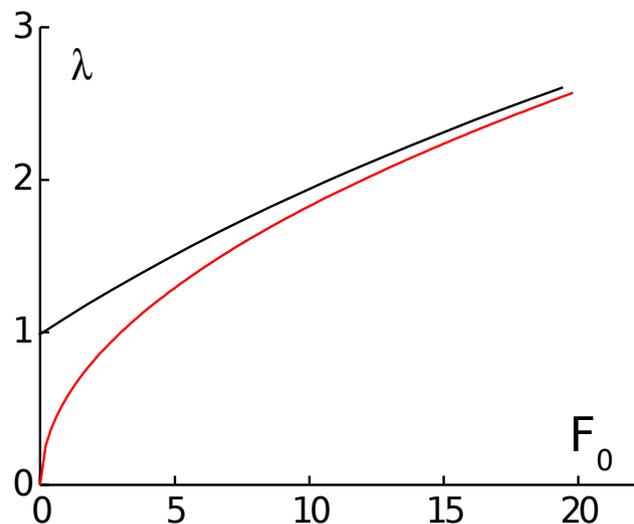
$$s^2 = (p_F^2/3m m^*)(1+F_0^S).$$

По мере исчезновения взаимодействия $F_0^S \rightarrow 0$ и скорость звука приближается к $v_F/\sqrt{3}$.

Нулевой звук в ферми-жидкости

Зависимость скорости нулевого звука ($\lambda = \omega/qv_F$) от силы взаимодействия показана на рисунке черной сплошной линией.

Нулевой звук экспериментально обнаружен в жидком ^3He В. Абелем, А. Андерсоном и Дж. Уитли (1966). В температурном интервале от 2 до 100 мК и давлении 0,32 атм среднее значение скорости обычного звука составило 187,9 м/сек, а нулевого звука — 194,4 м/сек (на частотах 15,4 и 45,5 МГц). На высоких частотах нулевой звук может существовать также и в металлах, электроны в которых образуют заряженную ферми-жидкость.



Вторичное квантование

Определим теперь операторы рождения и уничтожения частиц следующим образом:

$$\begin{aligned}c_i^+ |n_1 \dots n_i \dots \rangle &= (-1)^{\sum i} (1 - n_i) |n_1 \dots n_i + 1 \dots \rangle \\c_i |n_1 \dots n_i \dots \rangle &= (-1)^{\sum i} n_i |n_1 \dots n_i - 1 \dots \rangle\end{aligned}\tag{3.17}$$

Мы ввели по множителю (-1) на каждую частицу, стоящую слева от состояния i .

$$(-1)^{\sum i} = (-1)^{[n_1 + n_2 + \dots + n_{(i-1)}]}$$

Применяя многократно операторы c_i^+ к состоянию истинного вакуума можно получить любой из многочастичных базисных векторов.

Вторичное квантование

Операторы c_k^+ и c_i подчиняются обычным фермионным правилам коммутации:

$$[c_i, c_k^+]_+ = c_i c_k^+ + c_k^+ c_i = \delta_{ik}$$

$$[c_i^+, c_k^+]_+ = 0$$

$$[c_i, c_k]_+ = 0$$

Эти операторы не отвечают никаким физически наблюдаемым величинам.,

Легко проверить, что операторы $\mathbf{n}_i = c_i^+ c_i$ (оператор числа частиц) и

$\mathbf{N} = \sum_i c_i^+ c_i$ (\mathbf{N} – оператор полного числа частиц) эрмитовы.

$$c_i^+ c_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle = n_i |n_1, \dots, n_i, \dots\rangle$$

Вторичное квантование

Введем одночастичный, симметризованный по всем частицам оператор

$$\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{N}_i \mathbf{G}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i).$$

В представлении чисел заполнения он имеет вид:

$$\mathbf{G} = \sum_{l,k} G_{l,k} c_l^\dagger c_k$$

с матричными элементами

$$G_{i,j} = \langle \Phi_i | \mathbf{G} | \Phi_j \rangle = \int \psi_i^*(\mathbf{r}) \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \psi_j(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$$

(3.21)

Вторичное квантование

Произвольный симметризованный по всем частицам двухчастичный оператор

$$\mathbf{G} = \sum_{i,j=1}^N \mathbf{G}(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i; \mathbf{r}_j, \mathbf{p}_j), \quad i \neq j$$

в представлении чисел заполнения имеет вид:

$$\mathbf{G} = \sum_{klmn} G_{klmn} c_l^+ c_k^+ c_m c_n$$

Не прозевайте: порядок индексов в матричном элементе и у операторов рождения/уничтожения в (3.23) различен!

Здесь матричный элемент

$$G_{klmn} = \int d^3\mathbf{r} \int \psi_k^*(\mathbf{r}) \psi_l^*(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{p}, \mathbf{p}') \psi_m(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}') d^3\mathbf{r}'$$

Вторичное квантование

Гамильтониан системы N фермионов, находящихся во внешнем поле $U(\mathbf{r})$, взаимодействующих посредством двухчастичного взаимодействия $V(\mathbf{r})$, имеет вид:

$$H = H_0 + H_1 = \sum_i \left\{ \frac{\mathbf{P}_i^2}{2m} + U(\mathbf{r}_i) \right\} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j), \quad (3.25)$$

Первый член гамильтониана в представлении чисел заполнения выглядит так:

$$H_0 = \sum_{kl} \langle \psi_k | \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + U(\mathbf{r}) | \psi_l \rangle c_k^\dagger c_l,$$

а если функции Φ_k являются собственными функциями гамильтониана $\frac{\mathbf{P}^2}{2m} + U(\mathbf{r})$, то

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k c_k^\dagger c_k.$$

Вторичное квантование

Аналогично для H_I имеем:

$$H_I = \frac{1}{2} \sum_{klmn} V_{klmn} c_l^\dagger c_k^\dagger c_m c_n ; \quad (3.27)$$

Не прозевайте: во всех выписанных выше формулах для простоты записи опущены спиновые индексы.

В дальнейшем, как правило, мы будем иметь дело с системами без внешнего потенциала (при рассмотрении незаряженных систем) или с системами, имеющими однородно заряженный фон, и с взаимодействием между частицами, зависящим только от расстояния между ними.

Тогда $\varepsilon_k = k^2/2m$,

а одночастичная волновая функция имеет вид $\psi_{k\sigma}(\mathbf{r}) = (\Omega)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \eta_\sigma$.

Вторичное квантование

Из (3.25) и (3.27) при этом следует (после суммирования по спиновым переменным):

$$V_{k\sigma_1, l\sigma_2, m\sigma_3, n\sigma_4} = \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_2 \sigma_4} (\Omega)^{-2} \int d^3r \int d^3r' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') e^{i[(\mathbf{k}-\mathbf{m})\mathbf{r} + (\mathbf{l}-\mathbf{n})\mathbf{r}']} \quad (3.28)$$

Если выразить V через фурье образ потенциала V_q (при кулоновском взаимодействии в трехмерном случае $V_q = 4\pi e^2 q^{-2}$,

$V_0 = 0$, см.(3.25), то

$$V_{m+q, \sigma_1, n-q, \sigma_2, m\sigma_3, n\sigma_4} = (2\pi)^3 \Omega^{-1} \delta_{\sigma_1 \sigma_3} \delta_{\sigma_2 \sigma_4} V_q.$$

Приближение Хартри-Фока.

Гамильтониан системы взаимодействующих фермионов записывается в виде (3.14), (3.15):

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p p' q \sigma \sigma'} V_q c_{p+q\sigma}^+ c_{p'-q,\sigma'}^+ c_{p',\sigma'} c_{p,\sigma} .$$

(4.1)

Для нахождения волновой функции и энергии основного состояния мы должны бы решить уравнение Шредингера с таким гамильтонианом. К сожалению, это невозможно. Нам нужно разработать процедуру приближенного поиска решения. Заметим, что применение второго члена в гамильтониане к волновой функции основного состояния даст только тогда волновую функцию основного состояния, если $\mathbf{q} = 0$, либо если $\mathbf{p}' - \mathbf{q} = \mathbf{p}$ и $\sigma = \sigma'$.

Приближение Хартри-Фока.

Поэтому для решения уравнения Шредингера, при поиске волновой функции основного состояния мы можем использовать гамильтониан:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{r\sigma} \varepsilon_r^0 c_{r\sigma}^+ c_{r\sigma} + \\ & + 1/2 \sum_{r r' \sigma \sigma'} V_0 c_{r\sigma}^+ c_{r',\sigma'}^+ c_{r',\sigma'} c_{r,\sigma} + \\ & + 1/2 \sum'_{r q \sigma} V_q c_{r+q,\sigma}^+ c_{r,\sigma}^+ c_{r+q,\sigma} c_{r,\sigma} . \end{aligned}$$

В третьем члене q не равно нулю.

Приближение Хартри-Фока.

Если речь идет о заряженной электронной ферми-жидкости, то для устойчивости ее необходим однородный, положительно заряженный фон. Поэтому $V_0 = 0$

(Легко догадаться, что нулевая компонента волнового вектора соответствует сдвигу электронной системы как целого относительно компенсирующего фона, что не приводит к появлению полей при наличии однородного компенсирующего заряда и бесконечных размерах системы).. В трехмерном случае, например,

$$V_q = 4\pi e^2 / q^2 (1 - \delta_{q0}).$$

Последнее означает что второй член гамильтониана (хартриевский) обращается в нуль.

Приближение Хартри-Фока.

Теперь произведем в третьем члене гамильтониана процедуру, известную как спаривание Хартри – Фока (Hartree-Fock pairing). Заменяем третий член эффективным гамильтонианом

$$H_1^{HF} = -1/2 \sum'_{r,q,\sigma} V_q c_{r+q,\sigma}^+ c_{r,\sigma} c_{r,\sigma} = \\ = - \sum_{r\sigma} X_{r\sigma} c_{r\sigma}^+ c_{r\sigma},$$

где $X_{r\sigma} = \sum_q 1/2 V_q \langle 0 | c_{r+q,\sigma}^+ c_{r,\sigma} | 0 \rangle$.

Легко видеть, что $X_{r\sigma}$ – действительные, хотя и неизвестные числа.

Приближение Хартри-Фока.

В общем случае мы должны были бы действовать по следующему рецепту: выбрав эти числа произвольным образом, решить уравнение Шредингера. Затем, найдя новый вектор основного состояния, вычислить эти неизвестные числа и приравнять их к затравочно предположенным. Это - точный рецепт процедуры Хартри – Фока.

Прелесть ее состоит в том, что гамильтониан

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + H_{HF}$$

пригоден для нахождения решений.

Приближение Хартри-Фока.

В нашем случае свободного электронного газа с взаимодействием — дело еще упрощается. Структура эффективного гамильтониана точно подобна структуре гамильтониана для частиц без взаимодействия. Поэтому

$\langle 0 | c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} | 0 \rangle = n_{p\sigma}^0$, где $n_{p\sigma}^0$ — функция распределения Ферми-Дирака. Следовательно,

$$\langle 0 | H | 0 \rangle = E_0^{\text{HFA}} = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p^0 - 1/2 \sum_{pq\sigma} V_q n_{p\sigma}^0 n_{p+q\sigma}^0.$$

Приближение Хартри-Фока.

Подставляя сюда величины V_q и нормируя E_0^{HFA} на одну частицу, получим

$$E_0^{\text{HFA}}/N = (3/5) p_F^2/2m - N^{-1} \sum 2\pi e^2 (p-p')^{-2},$$

где суммирование ведется по состояниям $p < p_F$, $p' < p_F$. В терминах безразмерного расстояния между частицами r_s :

$$p_F = (4/9\pi)^{-1/3} r_s^{-1} a_B^{-1},$$

где a_B -боровский радиус.

Приближение Хартри-Фока.

Произведя суммирование, получим:

$$E_0^{\text{HFA}} N^{-1} = 2,21 r_s^{-2} - 0,916 r_s^{-1} \text{ (ридберг)}. \quad (4.5)$$

Приближение Хартри – Фока отказывает по мере $r_s \rightarrow 1$. Наивная экстраполяция (4.5) к большим r_s приводит к ожиданию неустойчивости при $r_s \approx 3$ в трехмерном случае. Это ожидание на эксперименте не оправдывается.

Заметим, что в приближении Хартри – Фока мы учли **корреляции в движении частиц с одним направлением спина** $\langle 0 | c_{p+q,\sigma}^+ c_{p+q,\sigma} | 0 \rangle \neq 0$, т.е., так называемые, кинематические корреляции. Вклад, полученный нами в энергию основного состояния в процедуре Хартри-Фока, носит название обменной энергии. Обменная энергия всегда отрицательна.

Приближение Хартри-Фока.

Не составляет труда определить параметры квазичастиц в приближении Хартри-Фока. Пользуясь выражением (4.4), найдем:

$$\varepsilon_{p\sigma}^{\text{HFA}} = \partial E^{\text{HFA}} / \partial n_{p\sigma} = \varepsilon_{p\sigma}^0 - \sum_{p'\sigma'} n_{p'\sigma'}^0 V_{p'-p} \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Здесь $p' \geq p_F$, $p_F \geq p$.

$$f_{p\sigma, p'\sigma'}^{\text{HFA}} = \partial^2 E^{\text{HFA}} / \partial n_{p\sigma} \partial n_{p'\sigma'} = V_{p'-p} \delta_{\sigma\sigma'}.$$

Приближение Хартри-Фока.

В изотропном случае $f_{\text{HFA}}^{\text{HFA}}_{\rho\sigma, \rho'\sigma'}$ зависит только от косинуса угла рассеяния $\cos\theta = \mathbf{p}'\mathbf{p}/p_F^2$. И поскольку скоррелировано лишь движение частиц с одной проекцией спина

$$f_{\text{HFA}}^{\text{S}} = f_{\text{HFA}}^{\text{A}} = \pi e^2 [p_F^2 (1 - \cos\theta)]^{-1}.$$

Откуда с помощью теории Ферми жидкости получаем:

$$m/m^* = 1 - p_F m / (2\pi^2) \int_{-1}^1 d(\cos\theta) \cos\theta f_{\text{HFA}}^{\text{S}}(\cos\theta).$$

Это выражение обладает логарифмической расходимостью, что соответствует нулевой эффективной массе квазичастиц $m^* = 0$.

Такой результат обусловлен тем, что мы пренебрегли экранированием в потенциале взаимодействия электронов.

Модель БКШ

Электроны, обмениваясь фононами, могут притягиваться друг к другу. В этой части взаимодействия участвуют только частицы с противоположными импульсами и направлениями спина.

Взаимодействие имеет вид:

$$V = (1/4)\Omega^{-1} \sum_{p, p'} V(p, p') c_{p, \uparrow}^{\dagger} c_{-p, \uparrow}^{\dagger} c_{-p', \downarrow} c_{p', \downarrow}$$

где $V(p, p') = V(p', p) = -V(-p, p')$ и отлично от нуля в некоторой узкой области энергий вблизи μ .

Модель БКШ

Точно также, как и в приближении Хартри-Фока предположим, что, $\langle 0|c_{-p}c_p|0\rangle \neq 0$, т.е. движение электронов с противоположными импульсами и спинами скоррелировано. Тогда мы можем ввести комплексное число

$$\Delta(p) = (1/2)\Omega^{-1}\sum_{p'} V(p,p') \langle 0|c_{-p'} c_{p'}|0\rangle.$$

Теперь заменим стартовый гамильтониан эффективным:

$$H' = \sum_p c_p^\dagger c_p (p^2/2m - \mu) + 1/2 \lambda \sum_p (\Delta(p) c_p^\dagger c_{-p+\Delta}^* c_{-p} c_p)$$

Где λ -заранее неизвестное число. Этот гамильтониан, являющийся билинейной функцией по операторам рождения и уничтожения, гораздо более удобен для решения, чем исходный .

Модель БКШ

Сделаем линейное преобразование (боголюбовский поворот в пространстве операторов)

$$c_k = u_k B_k + v_k B_{-k}^+,$$

где операторы B по-прежнему обладают свойством антикоммутации. Коэффициенты u_k , и v_k - вещественны,

$$u_k = u_{-k}, \quad v_k = -v_{-k}.$$

Введенное преобразование является каноническим при условии

$$u_k^2 + v_k^2 = 1.$$

Модель БКШ

Теперь подставим выражение для операторов c_k в эффективный гамильтониан и потребуем, чтобы все произведения типа

$B_k^+ B_{-k}^+, B_{-k} B_k$ имели перед собой нулевые коэффициенты.

Последнее справедливо, если

$$u_k^2 - v_k^2 = (k^2/2m - \mu) [(k^2/2m - \mu)^2 + \lambda^2 \Delta^2(k)]^{-1/2}. \quad (4.12)$$

$$2u_k v_k = -\lambda \Delta(k) [(k^2/2m - \mu)^2 + \lambda^2 \Delta^2(k)]^{-1/2}.$$

Модель БКШ

Выразив c_{-k} через B_k и воспользовавшись определением волновой функции основного состояния ($B_k|0\rangle=0$ - в основном состоянии нет возбуждений - нечего уничтожать), получим

$$\Delta(k) = 1/16\pi^3 \int d^3k' V(k,k') u_{k'} v_{k'} .$$

Однако произведение $u_{k'} v_{k'}$ нам уже известно (см. 4.13), поэтому

$$\Delta(k) = -1/32\pi^3 \int d^3k' V(k,k') \lambda \Delta(k') [(k^2/2m - \mu)^2 + \lambda^2 \Delta^2(k)]^{-1/2} .$$

Модель БКШ

Возможным решением этого уравнения является $\Delta(k) = 0$ для всех k .

В этом случае

$$u_k = 1 \quad v_k = 0 \quad \text{при} \quad k^2/2m > \mu,$$

$$u_k = 0 \quad v_k = 1 \quad \text{при} \quad k^2/2m < \mu.$$

Это обычный ферми-газ ($c_k = u_k B_k + v_k B_{-k}^\dagger$).

Модель БКШ

В выражении (4.17) заменим $V(k,k')$ через $V(k_F, k_F')$ и будем использовать его среднее значение V_0 . Тогда остальные функции будут функциями только $|k|$, а основной вклад в интеграл будет от окрестности $k'=k_F$. В результате, условие самосогласования дает нам:

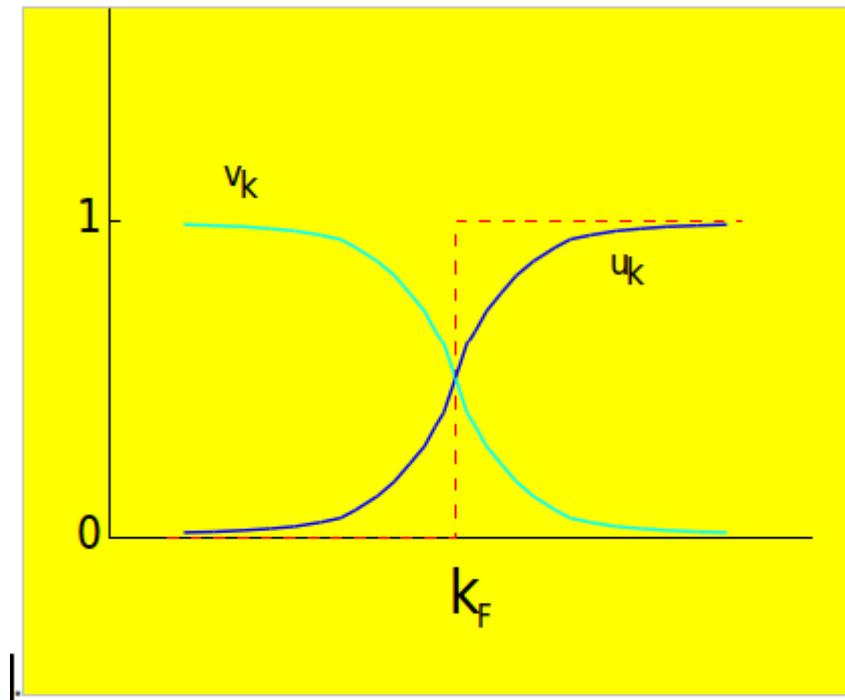
$$1 = -(\lambda/4\pi^2) k_F^2 V_0 \int dk [(k^2/2m - \mu)^2 + \lambda^2 \Delta^2(k)]^{-1/2}.$$

Решение имеется только при $\lambda < 0$, т.е. для случая притяжения на ферми-поверхности. Последнее выражение задает связь между V_0 и $\lambda\Delta$.

В спектре возбуждений появилась щель.

Модель БКШ

Коэффициенты преобразования u_k и v_k , в зависимости от k качественно выглядят следующим образом:



Мы видим, что «нормальные» возбуждения над основным состоянием в БКШ, строго говоря, являются нормальными квазичастицами только вдали от k_F .

Модель Томонаги-Латтинжера

Взаимодействующие фермионы на прямой представляют собой особую интересную систему. Оказывается, даже слабое взаимодействие полностью меняет характер одномерной ферми-системы, приводит к перестройке спектра возбуждений и делает теорию ферми-жидкости неприменимой (см. задачу 82, в которой отсутствие ферми-жидкости при $D = 1$ проиллюстрировано с помощью теории возмущений). Одномерные фермионы могут быть успешно описаны в рамках модели Томонаги–Латтинжера и ее обобщений, и по этой причине часто используется название *латтинжеровская жидкость*.

Модель Томонаги-Латтинжера

Преобразование бозонизации нетрудно построить явно. Начнем с того³⁾, что разобьем фурье-компоненту оператора плотности бесспиновых фермионов на два слагаемых:

$$\hat{\rho}(k) = \sum_p a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2} = \hat{\rho}_1(k) + \hat{\rho}_2(k), \quad (12.8)$$

где

$$\hat{\rho}_1(k) = \frac{1}{L} \sum_{p>0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2}, \quad \hat{\rho}_2(k) = \frac{1}{L} \sum_{p<0} a_{p-k/2}^+ a_{p+k/2}. \quad (12.9)$$

Как уже было отмечено, всегда подразумевается, что существенными окажутся только состояния вблизи уровня Ферми, поэтому k мало, а p близко либо к p_0 , либо к $-p_0$. Такого рода соображения и служат основой для выбора представления (12.8) оператора $\hat{\rho}(k)$ в виде суммы «правого» и «левого» операторов плотности (12.9), а также всех ниже-следующих манипуляций с $\hat{\rho}_{1,2}(k)$.

Модель Томонаги-Латтинжера

Оказывается удобным выразить операторы плотности правых и левых частиц $\hat{\rho}_{1,2}(k)$ через бозевские операторы. Наиболее естественно выбрать b_k и b_k^+ с $k > 0$ для правых частиц, и с $k < 0$ для левых частиц:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_1(x) &= \sum_{k>0} \frac{1}{\lambda_k L} (b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx}), \\ \hat{\rho}_2(x) &= \sum_{k<0} \frac{1}{\lambda_k L} (b_k e^{ikx} + b_k^+ e^{-ikx}),\end{aligned}\tag{12.16}$$

где $\lambda_k = (2\pi/|k|L)^{1/2}$. Определение (12.16) согласовано с коммутационными соотношениями (12.13), (12.14). Используя (12.13) и (12.14) нетрудно получить канонические коммутационные соотношения между операторами b_k и $b_{k'}^+$, причем нормировка в (12.16) такова, что $[b_k, b_{k'}^+] = 2\pi L \delta_{kk'}$.

Модель Томонаги-Латтинжера

вые предложено. Рассмотрим одномерную систему взаимодействующих бесспиновых фермионов:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_p \xi(p) a_p^+ a_p + \frac{1}{2L^2} \sum_{p_1+p_3=p_2+p_4} V_{p_1-p_2} a_{p_1}^+ a_{p_2} a_{p_3}^+ a_{p_4}, \quad (12.17)$$

где $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$. Здесь $V_k = \int V(r) e^{-ikr} dr$ — формфактор потенциала взаимодействия. Рассмотрим случай, когда радиус взаимодействия r_0 много больше p_0^{-1} . При этом формфактор V_k как функция k быстро спадает при $k \approx r_0^{-1} \ll p_0$. Как всегда, нас интересуют только состояния вблизи уровня Ферми, т. е. при $p_i \approx \pm p_0$.

Модель Томонаги-Латтинжера

Легко видеть, что при этих условиях все взаимодействия сводятся к двум существенно различным процессам рассеяния, при которых две частицы, рассеивающиеся друг на друге, движутся в одну сторону или навстречу друг другу. Поэтому достаточно рассмотреть такие комбинации импульсов:

$$1) p_1 \approx p_0, p_2 \approx p_0, p_3 \approx p_0, p_4 \approx p_0;$$

$$2) p_1 \approx p_0, p_2 \approx p_0, p_3 \approx -p_0, p_4 \approx -p_0$$

(и, конечно, отличающиеся знаком всех импульсов и/или перестановкой частиц). Введем обозначения:

$$g_1(k) \equiv V_k, \quad g_2(k) \equiv V_{2p_0+k}, \quad (12.18)$$

причем будем считать, что $k \ll p_0$. Амплитуда $g_1(k)$ описывает процесс рассеяния частиц, находящихся с одной и той же стороны поверхности Ферми (рассеяние вперед), а $g_2(k)$ — переброс двух частиц с одной стороны поверхности Ферми на другую навстречу друг другу (рассеяние назад).

Модель Томонаги-Латтинжера

Запишем гамильтониан, явно выделяя малые импульсы k_1, k_2, q :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2, \quad (12.19)$$

где

$\hat{\mathcal{H}}_1$ и $\hat{\mathcal{H}}_2$ можно переписать так:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_1 &= \frac{1}{2} \sum_q g_1(q) (\hat{\rho}_1(q) \hat{\rho}_1(-q) + \hat{\rho}_2(q) \hat{\rho}_2(-q)), \\ \hat{\mathcal{H}}_2 &= \sum_q g_2(q) \hat{\rho}_1(q) \hat{\rho}_2(-q). \end{aligned} \quad (12.20)$$

В отличие от взаимодействия $\hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\mathcal{H}}_2$, гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}_0$ невзаимодействующих частиц не удастся столь же просто выразить через $\hat{\rho}_{1,2}(k)$, поскольку в нем присутствует множитель $\xi(p_0 + k)$. Тем не менее, оказывается, что если заменить квадратичный спектр фермионов $\xi(p) = (p^2 - p_0^2)/2m$ на линейный $\xi(p) = v(|p| - p_0)$, то и гамильтониан $\hat{\mathcal{H}}_0$ можно представить в виде оператора квадратичного по $\hat{\rho}_{1,2}(k)$. Модель одномерного ферми-газа, получающаяся таким образом, называется моделью Томонаги-Латтинжера.

Модель Томонаги-Латтинжера

Чтобы угадать, как $\hat{\mathcal{H}}_0$ выражается через $\hat{\rho}_1(k)$ и $\hat{\rho}_2(k)$, применим небольшую хитрость. Предположим, что ответ записывается в виде

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \sum_k \alpha_k [\hat{\rho}_1(k) \hat{\rho}_1(-k) + \hat{\rho}_2(k) \hat{\rho}_2(-k)] \quad (12.21)$$

и найдем коммутатор $[\hat{\rho}_1(k), \hat{\mathcal{H}}_0]$. С одной стороны, согласно (12.13),

$$[\hat{\rho}_1(k), \hat{\mathcal{H}}_0] = \sum_{k'} \alpha_{k'} [\hat{\rho}_1(k), \hat{\rho}_1(k') \hat{\rho}_1(-k')] = \frac{k}{\pi} \alpha_k \hat{\rho}_1(k). \quad (12.22)$$

С другой стороны, найдем этот же коммутатор прямым вычислением («по-честному»):

получаем

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \pi v \sum_k [\hat{\rho}_1(k) \hat{\rho}_1(-k) + \hat{\rho}_2(k) \hat{\rho}_2(-k)]. \quad (12.24)$$

Итак, длинноволновая динамика ферми-газа допускает описание в терминах волн плотности в газе фермионов. Отметим, что вместо величин $\hat{\rho}_1(k)$ и $\hat{\rho}_2(k)$ иногда бывает удобнее пользоваться их комбинациями $\hat{\rho}(k) = \hat{\rho}_1(k) + \hat{\rho}_2(k)$ и $\hat{j}(k) = \hat{\rho}_1(k) - \hat{\rho}_2(k)$, которые есть просто плотность и ток частиц.

Модель Томонаги-Латтинжера

Теперь можно заняться задачей о спектре возбуждений одномерного ферми-газа с взаимодействием. Все члены в преобразованном гамильтониане оказываются квадратичными по $\hat{\rho}_{1,2}(k)$. Выражая $\hat{\rho}_1(k)$ и $\hat{\rho}_2(k)$ через операторы b_k^+ , b_k по формулам (12.16), находим

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2\pi L} \sum_{k>0} \left[\left(2\pi k v + k g_1(k) \right) \left(b_k^+ b_k + b_{-k}^+ b_{-k} \right) + k g_2(k) \left(b_k^+ b_{-k}^+ + b_k b_{-k} \right) \right]. \quad (12.25)$$

Модель Томонаги-Латтинжера

Переходим к квазичастицам, выполняя преобразование Боголюбова,

$$\begin{aligned}\tilde{b}_k &= \operatorname{ch} \theta_k b_k + \operatorname{sh} \theta_k b_{-k}^+, \\ \tilde{b}_{-k}^+ &= \operatorname{ch} \theta_k b_{-k}^+ + \operatorname{sh} \theta_k b_k,\end{aligned}\tag{12.26}$$

и подбирая параметр преобразования θ_k так, чтобы гамильтониан стал диагональным:

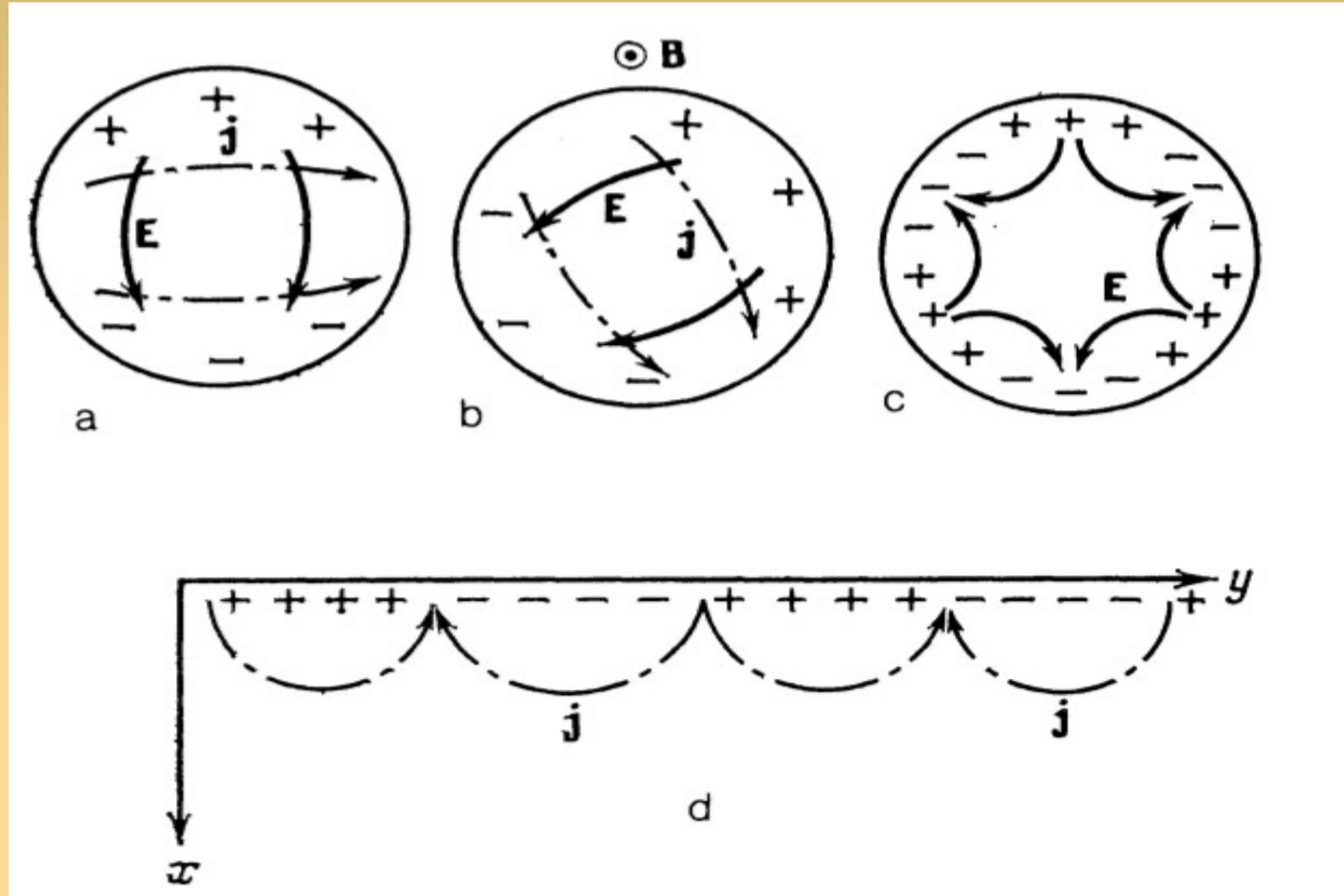
$$\operatorname{th} 2\theta_k = \frac{g_2(k)}{g_1(k) + 2\pi v}.\tag{12.27}$$

Модель Томонаги-Латтинжера

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{L} \sum_k \omega(k) \tilde{b}_k^+ \tilde{b}_k, \quad \omega(k) = \frac{|k|}{2\pi} \left((2\pi v + g_1(k))^2 - g_2^2(k) \right)^{1/2}. \quad (12.28)$$

Полученное решение показывает, что квазичастицами в модели Томонаги-Латтинжера являются не фермионы, а бозоны со спектром (12.28). Перестройка спектра элементарных возбуждений происходит из-за того, что взаимодействие вблизи ферми-поверхности сильное, и поэтому время жизни фермионов оказывается слишком малым. Это означает, что в одном измерении теория ферми-жидкости неприменима.

Коллективные моды на краю двумерной электронной системы



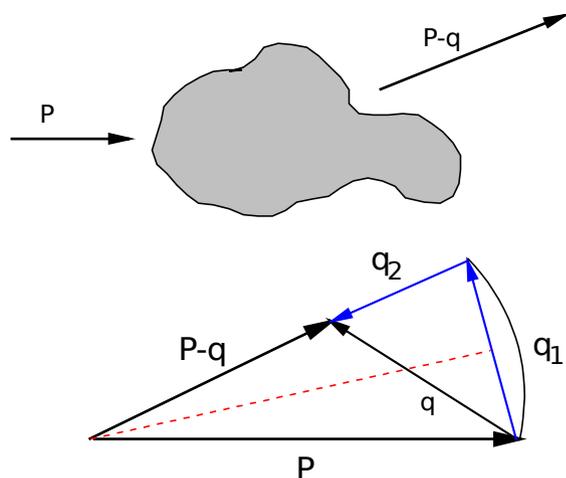
В.А. Волков и С.А. Михайлов, ЖЭТФ, 94, 217 (1988)

C. d. C. Chamon and X. G. Wen, Phys. Rev. B **49**, 8227 (1994)

Динамический форм-фактор

Представим себе, что мы собираемся исследовать свойства системы взаимодействующих частиц так, как это делается в ядерной физике, с помощью рассеяния пробной частицы. Пусть пробная частица, отличимая от частиц, составляющих систему, и сами частицы, составляющие систему, - электронейтральны. (Например, в качестве пробной частицы используется нейтрон, а система представляет собой жидкий He^3).

Пробная частица до рассеяния имела импульс \mathbf{P} , массу M и энергию $P^2/2M$. После столкновения пробная частица имеет импульс $\mathbf{P}-\mathbf{q}$, а система попадает из основного в возбужденное состояние $|n\rangle$. Энергия этого состояния E_n .



Динамический форм-фактор

Предположим, что взаимодействие пробной частицы с системой не зависит от скоростей пробной частицы и частиц, составляющих систему, а зависит лишь от их координат:

$$H_{int} = \sum_i V(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}),$$

(5.1)

где \mathbf{R} соответствует координате пробной частицы. Разложим гамильтониан взаимодействия в ряд Фурье:

$$H_{int} = \sum_i \sum_q V_q \exp[i\mathbf{q}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R})] = \sum_q V_q \rho^+(\mathbf{q}) \exp[-i\mathbf{q}\mathbf{R}].$$

Динамический форм-фактор

Где введено определение:

$$\rho(\mathbf{q}) = \int d^3r \rho(\mathbf{r}) \exp[-i\mathbf{q}\mathbf{r}] = \int d^3r \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \exp[-i\mathbf{q}\mathbf{r}] = \sum_i \exp[-i\mathbf{q}\mathbf{r}_i].$$

(5.3)

$$\rho^+(\mathbf{q}) = \sum_i \exp[i\mathbf{q}\mathbf{r}_i].$$

(5.4)

Величина $\rho(\mathbf{q})$ соответствует фурье-компоненте флуктуаций плотности частиц в системе. Частицы мы считаем точечными.

Динамический форм-фактор

В борновском приближении пробная частица до и после процесса рассеяния слабо связана с системой. Следовательно, ее импульсы до столкновения и после столкновения являются хорошими квантовыми числами. Матричный элемент перехода системы в точное возбужденное $|n\rangle$ состояние равен:

$$\langle n, \mathbf{P}-\mathbf{q} | H_{int} | \mathbf{P}, 0 \rangle = \langle n | \rho^+_{\mathbf{q}} | 0 \rangle V_{\mathbf{q}}, \quad (5.5)$$

поскольку по координатам пробной частицы и начальное и конечное состояние являются плоскими волнами.

Таким образом, для пробной частицы, играющей роль измерительного зонда, определены передаваемый в единицу времени импульс \mathbf{q} . и энергия ω .

Матричный элемент для перехода системы в возбужденное состояние под воздействием пробной частицы, задан флуктуациями плотности в системе.

Динамический форм-фактор

В соответствии с золотым правилом Ферми, вероятность перехода системы в возбужденное состояние в единицу времени равна :

$$P(q, \omega) = 2\pi |V_q|^2 \sum_n |\rho_{n0}^+|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}),$$

(5.6)

Здесь $\omega_{n0} = E_n - E_0$. В выражении для вероятности перехода под влиянием пробной частицы q и ω не независимы, что можно формально учесть, умножив написанное выражение на $\delta(\omega - \mathbf{qP}/M + q^2/2M)$.

Динамический форм-фактор

Следовательно, согласно (5.6), вероятность перехода системы в возбужденное состояние может быть представлена в виде произведения двух сомножителей, один из которых зависит от типа взаимодействия пробной частицы с системой, а второй определяется исключительно свойствами самой системы.

$$P(q, \omega) = 2\pi |V_q|^2 S(q, \omega), \quad (5.7)$$

где вновь введенная величина

$$S(q, \omega) = \sum_n |\rho_{n0}^+|^2 \delta(\omega - \omega_n), \quad (5.8)$$

называется динамическим форм-фактором.

Динамический форм-фактор

Покажем, что динамический форм-фактор связан с корреляциями плотности частиц. В представлении Гейзенберга зависимость от времени может быть перенесена с волновых функций на операторы.

$$\rho_q^+(t) = e^{iH t} \rho_q^+ e^{-iH t} \quad (5.9)$$

Корреляция между флуктуациями плотности в моменты времени $t = 0$ и $t = \tau$

$$S(q, \tau) = \langle 0 | \rho_q(\tau) \rho_q^+(0) | 0 \rangle.$$

Разложим величину $S(q, \tau)$ по полному набору функций, описывающему все состояния нашей системы:

$$\begin{aligned} S(q, \tau) &= \langle 0 | \rho_q(\tau) | n \rangle \langle n | \rho_q^+(0) | 0 \rangle = \langle 0 | e^{iH \tau} \rho_q e^{-iH \tau} | n \rangle \langle n | \rho_q^+(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_n |\rho_q^+|_{n0}^2 e^{-i \omega_n \tau} \end{aligned}$$

Очевидно, что $S(q, \tau)$ получается из $S(q, \omega)$ с помощью Фурье преобразования.

Динамический форм-фактор

Последнее равенство следует из следующих правил квантовой механики:

1. Матричные элементы операторов не изменяются при унитарном преобразовании.

$$2. \psi(\xi, t) = \exp[-iH t] \psi(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-iHt)^n}{n!} \sum_k a_k \varphi_k = \sum_n a_n \varphi_n \exp(-iE_n t).$$

Статический форм-фактор

Часто необходимо иметь более грубое описание вероятности рассеяния.

определение статического форм – фактора :

$$S_q = N^{-1} \int_0^\infty d\omega S(q, \omega). \quad (5.13)$$

Здесь N – число частиц в системе.

Хотя как статический, так и динамический форм-факторы определены нами через отклик системы на воздействие пробной частицей, оба они имеют более широкое употребление и неоднократно встретятся нам в дальнейшем.

Функция линейной реакции

Пусть в результате внешнего воздействия локально изменяется плотность ферми-системы. Исследуем изменение плотности, вызванные в линейном режиме потенциалом, воздействующим на плотность, т.е. **функцию реакции плотность-плотность**.

Гамильтониан взаимодействия мы запишем в виде суммы по фурье гармоникам импульса и интеграла от фурье гармоник энергии:

$$H_e = \sum_q \int_0^\infty d\omega / (2\pi) \rho_q^+ \varphi(q, \omega) \exp(-i\omega t), \quad (5.14)$$

где $\varphi(q, \omega)$ - фурье компонента потенциала по q и ω . Для действительных возмущений, реализуемых в реальности

$$\varphi(q, \omega) = \varphi^*(-q, -\omega) \quad (5.15)$$

Этим свойством, например, обладает потенциал пробной частицы.

Функция линейной реакции

Будем предполагать, что внешний потенциал является слабым, реакция системы линейна по возмущению. В таких условиях каждая фурье – компонента действует независимо. Рассмотрим одну из Фурье – компонент. Полностью потенциал возмущения для одной гармонике должен быть записан в виде

$$H_e = \rho_q^+ \varphi(q, \omega) \exp(-i\omega t) + \text{комплексно сопряженное.} \quad (5.16)$$

С возмущением такого рода вычислить ничего невозможно:

1. В написанном виде возмущение действует в период от $-\infty$ до ∞ .
2. Конечная частота приводит к диссипации энергии, и как следствие, к нелинейным эффектам.

Функция линейной реакции

Примем адиабатические начальные условия, соответствующие отсутствию возмущения при $t = -\infty$ и очень медленному включению возмущения во времени.

Умножим N_e на $\exp(\eta t)$, где $\eta > 0$.

Энергия, передаваемая системе, пропорциональна φ_q^2/η . Нагрева и нелинейных эффектов не будет, если сначала $|\varphi_q| \rightarrow 0$, а затем $\eta \rightarrow 0$.

Другими словами, при вычислении линейной реакции следует считать η конечной величиной вплоть до ответа, а затем стремиться к нулю.

Функция линейной реакции

Примем адиабатические начальные условия, соответствующие отсутствию возмущения при $t = -\infty$ и очень медленному включению возмущения во времени.

Умножим N_e на $\exp(\eta t)$, где $\eta > 0$.

Энергия, передаваемая системе, пропорциональна φ_q^2/η . Нагрева и нелинейных эффектов не будет, если сначала $|\varphi_q| \rightarrow 0$, а затем $\eta \rightarrow 0$.

Другими словами, при вычислении линейной реакции следует считать η конечной величиной вплоть до ответа, а затем стремиться к нулю.

Функция линейной реакции

Средняя флуктуация плотности в момент времени t равна:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}, t) | \rho_{\mathbf{q}} | \psi(\mathbf{r}, t) \rangle,$$

где $\psi(\mathbf{r}, t)$ точная волновая функция системы при наличии возмущения.

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle \exp(-i\omega t) \exp(\eta t). \quad (5.17)$$

Равенство (5.17) как раз и соответствует периодическому очень медленно нарастающему возмущению.

По определению, **функция реакции плотность – плотность** равна:

$$\chi = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / \varphi(\mathbf{q}, \omega).$$

Функция линейной реакции

Для вычисления линейного отклика применим теорию возмущений в первом порядке:

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = (H + H_e) |\psi(t)\rangle,$$

где H_e имеет симметричный вид (5.16).

Такой вид возмущения выбран нами потому, что реальное возмущение действительно. Тем не менее, мы будем иметь в виду, что функция реакции плотность – плотность определена нами для гармонического возмущения (5.17).

Поэтому мы выделим в решении гармоническую часть, соответствующую частоте ω и используем соотношение (5.18).

Функция линейной реакции

Теперь, для нахождения функции реакции плотность – плотность нам необходимо вычислить среднюю q -компоненту плотности возмущенной системы $\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle$. Мы будем оставлять только члены первого порядка малости по возмущению, т.е. только те, которые имеют в матричном элементе $|0\rangle$ слева или справа. Кроме того, мы помним, что $\langle 0 | \rho_q | 0 \rangle = 0$ вследствие трансляционной инвариантности.

Подставив теперь в выражение для $\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle$ функции $|\psi(t)\rangle$ в виде (5.19) с коэффициентами $a_n(t)$ из (5.20), получим:

$$\langle \rho(\mathbf{q}, t) \rangle = \sum_n \{ (\rho_q)_{0n} a_n(t) \exp(-i\omega_{n0} t) + a_n^+(t) (\rho_q)_{n0} \exp(i\omega_{n0} t) \}$$

(5.21)

Функция линейной реакции

Нам осталось подставить в (5.21) коэффициенты из (5.20).

При подстановке следует удерживать только члены, пропорциональные $\exp(-i\omega t)$.

$$\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \varphi(\mathbf{q}, \omega) \sum_n |\rho_q^+|^2_{n_0} \{(\omega - \omega_{n_0} + i\eta)^{-1} - (\omega + \omega_{n_0} + i\eta)^{-1}\}$$

Таким образом, функция реакции плотность-плотность имеет вид:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \sum_n |\rho_q^+|^2_{n_0} 2\omega_{n_0} \{(\omega + i\eta)^2 - \omega_{n_0}^2\}^{-1}. \quad (5.22)$$

Эта функция описывает реакцию нашей системы на периодическое воздействие с передачей энергии ω и импульса q .

Функция линейной реакции

По определению, динамический форм-фактор $S(q, \omega)$ равен

$$S(q, \omega) = \sum_n |\rho_{n0}^+|^2 \delta(\omega - \omega_{n0}),$$

Следовательно,

$$\chi(q, \omega) = \int_0^\infty d\omega' S(q, \omega') \{(\omega - \omega' + i\eta)^{-1} - (\omega + \omega' + i\eta)^{-1}\} \quad (5.23)$$

Разобьем χ на мнимую и действительную части $\chi = \chi' + i\chi''$.

$$\text{Поскольку } \lim_{\eta \rightarrow 0} (x-a+i\eta)^{-1} = P\{(x-a)^{-1}\} - i\pi\delta(x-a), \quad (5.24)$$

где P означает главное значение,

$$\chi' = \int_0^\infty d\omega' S(q, \omega') P \{2\omega' (\omega^2 - \omega'^2)^{-1}\} \quad (5.25)$$

$$\chi'' = -\pi \{ S(q, \omega) - S(q, -\omega) \}. \quad (5.26)$$

Функция линейной реакции

Функция реакции плотность- плотность и динамический форм-фактор выражаются друг через друга, и следовательно, несут одинаковую информацию.

В дальнейшем мы будем вычислять эти величины для различных систем и с разной точностью. С какой из указанных величин начинать вычисления - дело вкуса и удобства.

Функция линейной реакции

В пределе низкочастотного и длинноволнового воздействия на систему фермионов функция реакции плотность –плотность описывает реакцию системы на статическое макроскопическое воздействие, а следовательно, должна выражаться через сжимаемость.

А именно, предел функции реакции плотность-плотность равен:

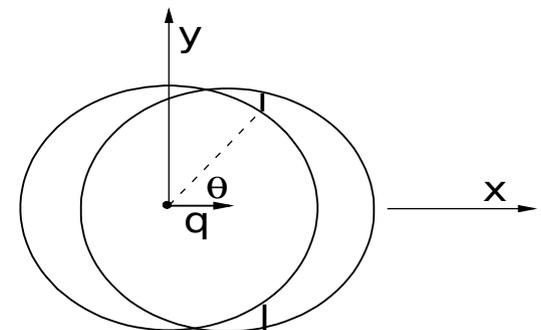
$$\lim_{q \rightarrow 0} \{\chi(q,0)\} = -\rho^2 \kappa = -\partial\rho/\partial\mu, \quad (5.30)$$

т.е., термодинамической плотности состояний.

Вычисление динамического форм-фактора газа невзаимодействующих ферми- частиц

В основном состоянии системы заполнены все одночастичные квантовые состояния типа плоских волн внутри Ферми-сферы. Оператор $\rho^+_{\mathbf{q}}$, действуя на основное состояние $|0\rangle$, вызывает переход частиц из состояния с импульсом \mathbf{p} в состояние с импульсом $\mathbf{p}+\mathbf{q}$. В силу принципа Паули исходное состояние должно быть занято, а состояние с импульсом $\mathbf{p}+\mathbf{q}$ - свободно.

Разрешенные переходы легко представить графически. Для этого необходимо сдвинуть ферми-сферу на \mathbf{q} так, как это сделано на рисунке. Область на рисунке, имеющая вид полумесяца, соответствует разрешенным конечным состояниям.



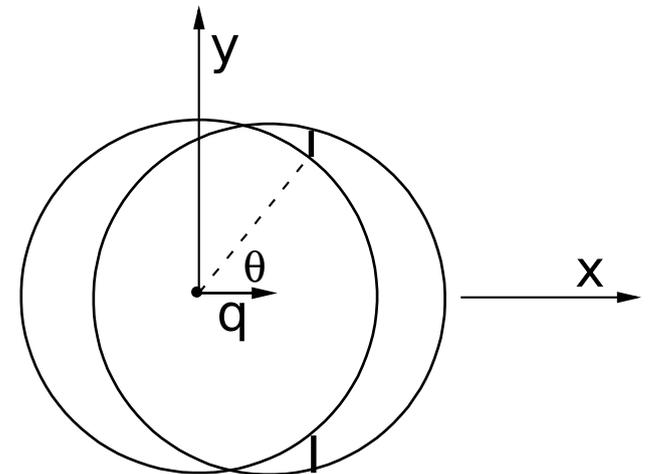
Вычисление динамического форм-фактора ...

Матричный элемент $(\rho^+_{\mathbf{q}})_{n0}$ взятый по двум плоским волнам (начального и конечного состояний) равен единице. Поэтому динамический форм-фактор свободного электронного газа равен:

$$(5.31) \quad S^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum \delta(\omega - \omega^0_{\mathbf{p}\mathbf{q}}),$$

где $\omega^0_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = 1/2m\{(\mathbf{p}+\mathbf{q})^2 - \mathbf{p}^2\}$,

а суммирование проводится для $p < p_F$ и $|\mathbf{p}+\mathbf{q}| > p_F$.



Вычисление динамического форм-фактора ...

Выражение (5.31) может быть переписано в виде, явно учитывающем заполнение начальных и конечных состояний:

$$S^0(q, \omega) = \sum_{\rho\sigma} n_{\rho\sigma}^0 (1 - n_{\rho+q\sigma}^0) \delta(\omega - \omega_{\rho q}^0). \quad (5.32)$$

Последнее означает, что функция реакции плотность-плотность для газа невзаимодействующих фермионов имеет вид:

$$\chi^0(q, \omega) = \sum_{\rho\sigma} n_{\rho\sigma}^0 (1 - n_{\rho+q\sigma}^0) \{ (\omega - \omega_{\rho q}^0 + i\eta)^{-1} - (\omega + \omega_{\rho q}^0 + i\eta)^{-1} \} \quad (5.33)$$

Ниже, в качестве примера, мы рассмотрим случай $q \ll p_F$. В этом случае $\omega_{\rho q}^0 = \rho q m^{-1} \cos \theta$, где θ – угол рассеяния. Суммирование в (5.31) нужно вести по кольцу, сечение которого изображено двумя жирными отрезками.

Вычисление динамического форм-фактора ...

Ширина кольца Δ равна:

$$\Delta = q \, dy/dx = q \, d\{(p^2 - x^2)^{1/2}\}/dx = q \, \text{Cos}\theta / \text{Sin}\theta .$$

Площадь кольца:

$$S = 2\pi r \, \text{Sin}\theta \, q \, \text{Cos}\theta / \text{Sin}\theta = 2\pi \omega_{pq}^0 \, m .$$

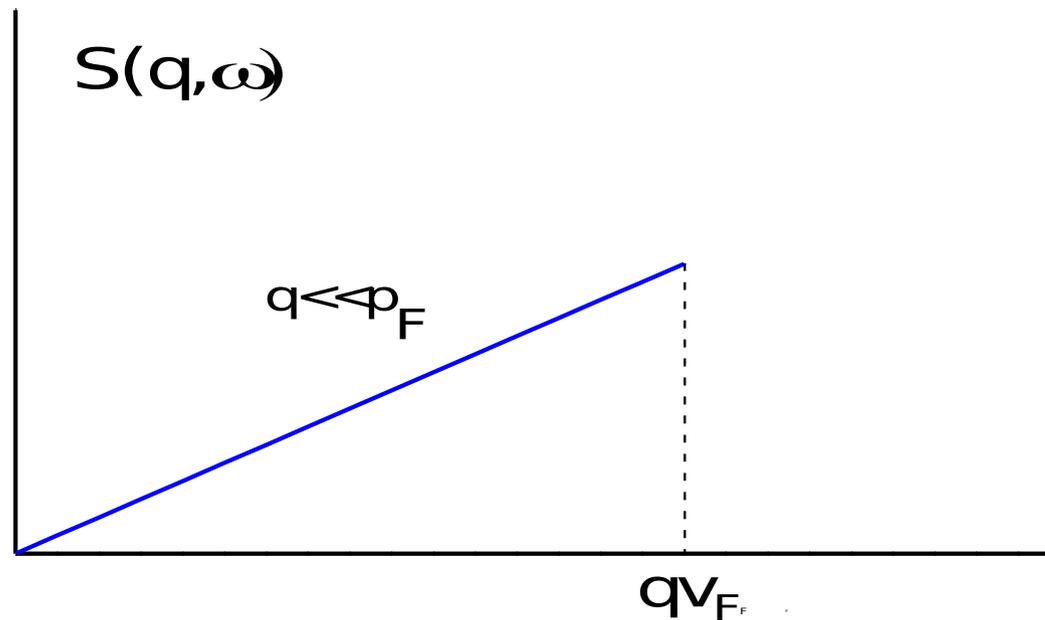
Заменяя в (5.31) суммирование на интегрирование по $dp_x dp_y dp_z / (2\pi)^3$ и вспомнив, что $dp_x = p \cos\theta$, получим

Вычисление динамического форм-фактора ...

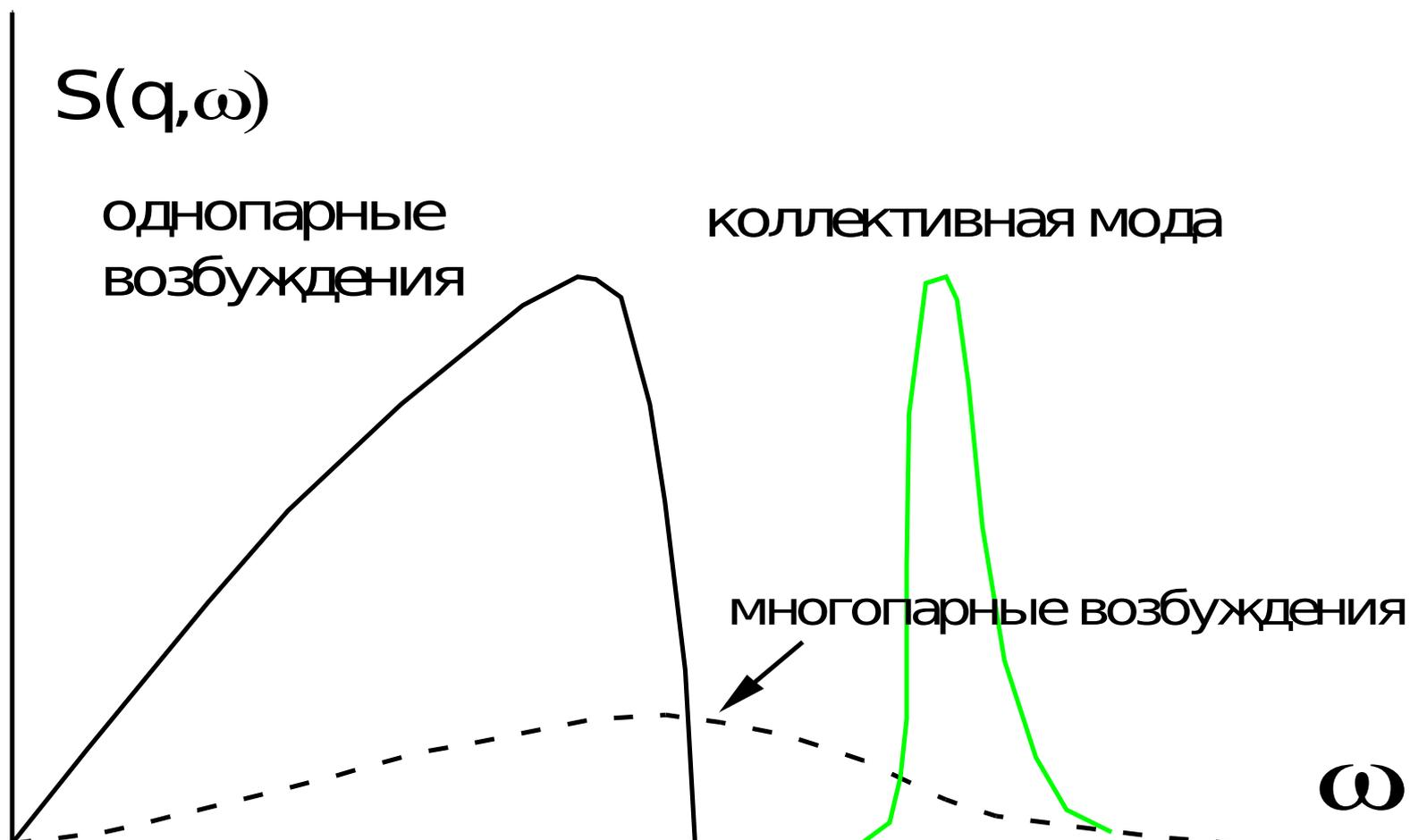
для динамического форм-фактора при $q \ll p_F$:

$$S^0(q, \omega) = m^2 \omega / 2\pi^2 q \quad \text{для } \omega < qv_F$$

$$S^0(q, \omega) = 0 \quad \text{для } \omega > qv_F,$$



Динамический форм-фактор жидкости: структура вкладов

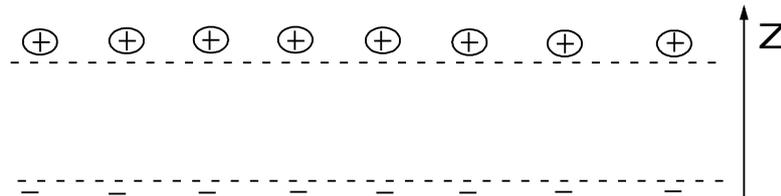


Заряженные ферми-жидкости

будем считать, что в целом система электронейтральна, т.е. заряд электронов компенсируется однородным положительным зарядом (зарядом ионных остовов, например).

В двумерных электронных системах удастся разделить положительные и отрицательные заряды пространственно так, как это показано на Рис.16. В этом случае для положительного заряда очень хороша модель однородного положительно заряженного фона.

Часто мы будем применять ту же модель и к трехмерным системам



Заряженные ферми-жидкости

Кулоновские силы очень медленно спадают с расстоянием (у взаимодействия вообще нет характерного радиуса). Из-за дальнего характера кулоновского поля любой расчет с необрезанным взаимодействием приведет к расходимости.

Фурье компонента кулоновского потенциала равна в трехмерном случае:

$$V_q = \int d^3r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) e^2/r = 4\pi e^2 q^{-2} \quad (6.1)$$

а для двумерных систем соответствующая компонента равна

$$V_q = \int d^2r \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) e^2/r = 2\pi e^2 q^{-1}. \quad (6.2)$$

Именно появление степени q в знаменателе выражений (6.1) и (6.2) приводит к упомянутым расходимостям. Из-за отталкивания между электронами, любой «пробный» электрон окружен обеднением электронной плотности. Компенсирующий положительный заряд области обеднения и обрезает взаимодействие.

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

Пусть «пробный» заряд z находится в начале координат. Эффективный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ и поляризационный заряд $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ связаны уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi (z \delta(\mathbf{r}) + e \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle). \quad (6.3)$$

Вычислим плотность индуцированных заряда $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ в приближении, известном как приближение Томаса-Ферми. Примем, что электрохимический потенциал равен сумме потенциальной энергии и кинетической энергии невзаимодействующих фермионов, определяемой в трехмерном случае из соотношения

$$N/\Omega = (2m E_F)^{3/2} / 3\pi^2. \quad (6.4)$$

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

В условиях равновесия электрохимический потенциал электронов не зависит от координат, следовательно:

$$\mu = E_F(\mathbf{r}) - e\varphi(\mathbf{r}) \quad (6.5)$$

Изменение ферми-энергии приводит к изменению плотности электронов.

В первом порядке:

$$\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle = \frac{3}{2} e\varphi(\mathbf{r}) N / (\Omega E_F(\varphi=0)). \quad (6.6)$$

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

В фурье-компонентах комбинации уравнений (6.3) и (6.6) соответствует:

$$(q^2 + q_{TF}^2) \varphi(q) = 4\pi z \quad \text{или} \quad \varphi(q) = 4\pi z (q^2 + q_{TF}^2)^{-1},$$

(6.7)

где $q_{TF} = (6\pi N e^2 / (\Omega E_F(\varphi=0)))^{1/2}$.

(Строго говоря, в выражении для q_{TF} отношение $N/(\Omega E_F(\varphi=0))$ следует заменить на термодинамическую плотность состояний.)

Переходя к реальному пространству, имеем:

$$\varphi(\mathbf{r}) = z/r \exp(-q_{TF} r). \tag{6.8}$$

Откуда видно, что кулоновский потенциал в статическом случае обрезается на расстоянии, равном обратному Томас-Фермиевскому вектору.

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

Интересно сравнить обратный Томас-Фермиевский вектор со средним расстоянием между электронами $r_0^{-1} = (N/\Omega)^{1/3}$:

$$(q_{TF} r_0)^{-1} = (E_F(\varphi=0) r_0 / 6\pi e^2)^{1/2} \quad (6.9)$$

В типичных металлах потенциальная энергия сравнима с кинетической (см. п.1.2) и поля экранируются на межатомных расстояниях.

Приближение Томаса-Ферми при этом не работает по двум причинам:

Во-первых отсутствует приближение среднего поля, пригодное на масштабах больше межатомного.

Во-вторых, в Томас-Фермиевском приближении мы пренебрегли взаимодействием между электронами, что возможно только при $E_F \gg e^2/r_0$.

Динамическое экранирование.

Рассмотрим в качестве примера экранирование пробного заряда, движущегося со скоростью V_e в плазме, состоящей из однородного положительного фона и электронной жидкости. Плотность заряда, связанная с пробной частицей равна $z\rho_e(\mathbf{r},t) = z\delta(\mathbf{r}-\mathbf{V}_e t)$. Пробный заряд создает зависящую от времени поляризацию среды:

$$\nabla^2\varphi(\mathbf{r},t) = -4\pi (z \delta(\mathbf{r}-\mathbf{V}_e t) + e\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle). \quad (6.10)$$

В фурье-компонентах

$$\varphi(\mathbf{q},\omega) = 4\pi/q^2 [z \delta(\omega- V_e q) + e\langle\rho(\mathbf{q},\omega)\rangle]. \quad (6.11)$$

Динамическое экранирование.

Задача об экранировании пробного заряда свелась к проблеме отыскания $\langle \rho(q, \omega) \rangle$. К той же проблеме сводится и вопрос об экранировании межэлектронного взаимодействия.

Электроны среды, взаимодействующие с пробной частицей, видят не только ее заряд, но и созданную ей поляризационную область. Поэтому, как известно из курса общей физики, в среде взаимодействующих частиц могут распространяться плазменные колебания. В трехмерном случае в пределе длинных волн их частота равна

$$\omega_p = (4\pi N e^2 / m \Omega)^{1/2}.$$

Поскольку и экранирование и плазменные колебания являются результатом поляризационных явлений в плазме, они должны рассматриваться в рамках общего подхода.

Диэлектрическая реакция

Пусть в электронной системе присутствуют внешние заряды $z\rho_e(\mathbf{r},t)$, создающие внутри системы электрическое поле \mathbf{D} (мы предполагаем, что диэлектрическая проницаемость, связанная с зарядами ионных остовов, равна единице):

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 4\pi z\rho_e(\mathbf{r},t), \quad (6.12)$$

Появление индуцированного полем $\mathbf{D}(\mathbf{r},t)$ пространственного заряда $\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle$ в системе создаст дополнительное электрическое поле \mathbf{G}_p .

Полное электрическое поле \mathbf{G} составит из суммы

$$\mathbf{G}(\mathbf{r},t) = \mathbf{D}(\mathbf{r},t) + \mathbf{G}_p(\mathbf{r},t), \quad (6.13)$$

где $\operatorname{div} \mathbf{G}_p(\mathbf{r},t) = 4\pi\langle\rho(\mathbf{r},t)\rangle$.

Диэлектрическая реакция

Те же соотношения в Фурье компонентах выглядят так:

$$iq D(q, \omega) = 4\pi z \rho_e(q, \omega); \quad (6.14)$$

$$iq G(q, \omega) = 4\pi [z \rho_e(q, \omega) + e \langle \rho(q, \omega) \rangle]. \quad (6.15)$$

Диэлектрическая реакция

Предположим, что индуцированный заряд $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ сам пропорционален приложенному полю \mathbf{D} (условие линейной реакции). В результате, \mathbf{D} и \mathbf{G} оказываются пропорциональными величинами:

$$\mathbf{G}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega) / \varepsilon(\mathbf{q}, \omega), \quad (6.16)$$

где $\varepsilon(\mathbf{q}, \omega)$ - зависящая от волнового вектора и частоты диэлектрическая проницаемость.

Она выражается следующими соотношениями через $\langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle$:

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + 4\pi e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / (\mathbf{q} \cdot \mathbf{G}(\mathbf{q}, \omega)); \quad (6.17)$$

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - 4\pi e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / (\mathbf{q} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega)). \quad (6.18)$$

Диэлектрическая реакция

В уравнениях (6.12)-(6.18) мы рассматривали продольную компоненту реакции, т.е. предполагали, что векторы \mathbf{G} и \mathbf{D} параллельны.

Легко догадаться, что в проводящей среде изменение заряда под действием внешнего поля будет определяться проводимостью. Действительно,

$$e\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle = \sigma(\mathbf{q}, \omega) \mathbf{G}(\mathbf{q}, \omega); \quad (6.19)$$

Здесь $\langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle$ средний поток частиц. $\partial \langle \rho \rangle / \partial t + \text{div}(\langle \mathbf{J} \rangle) = 0$, следовательно, $\mathbf{q} \langle \mathbf{J}(\mathbf{q}, \omega) \rangle - \omega \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle = 0$. Из этих соотношений получаем:

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 + 4\pi i \sigma(\mathbf{q}, \omega) / \omega. \quad (6.20)$$

Диэлектрическая проницаемость и функция реакции плотность-плотность

В общем случае отклик электронной системы должен описываться тензором, в котором для изотропной системы остаются лишь две независимые компоненты: продольная и поперечная. Ниже мы продолжим рассмотрение продольной реакции.

Пусть в систему внесен внешний заряд $\rho_e(\mathbf{r}, t)$. Реакция электронной системы находится из соотношений:

$$i\mathbf{q} \mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega) = 4\pi e \rho_e(\mathbf{q}, \omega);$$
$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 - 4\pi i e \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / (\mathbf{q} \mathbf{D}(\mathbf{q}, \omega)).$$

Откуда мгновенно получаем

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / \rho_e(\mathbf{q}, \omega); \quad (6.26)$$

Диэлектрическая проницаемость и функция реакции плотность-плотность

Умножив и разделив второй член в правой части (6.26) на $V_q = 4\pi e^2/q^2$ (в трехмерном случае) и вспомнив определение функции реакции плотность-плотность, получим:

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi e^2/q^2)\chi(\mathbf{q}, \omega). \quad (6.27)$$

Диэлектрическая проницаемость и функция реакции плотность-плотность

По определению, функция реакции плотность-плотность введена по отношению к внешнему возмущению. На самом деле, частицы системы должны испытывать возмущение не затравочным, а экранированным потенциалом $V_q \rho_e(\mathbf{q}, \omega) / \epsilon(\mathbf{q}, \omega)$.

Введем функцию реакции плотность-плотность на экранированном поле:

$$\chi^{\text{Экр}}(q, \omega) = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / [V_q \rho_e(\mathbf{q}, \omega) / \epsilon(\mathbf{q}, \omega)] = \epsilon(\mathbf{q}, \omega) \chi(q, \omega). \quad (6.28)$$

С помощью вновь введенной функции соотношение (6.27) можно переписать как

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - (4\pi e^2 / q^2) \chi^{\text{Экр}}(q, \omega), \quad (6.29)$$

Диэлектрическая проницаемость и функция реакции плотность-плотность

В сущности, выражение (6.29) задает путь приближенного вычисления $\epsilon(\mathbf{q}, \omega)$ для $r_s < 1$. Для этого достаточно заменить в (6.29) $\chi^{\text{ЭКР}}(\mathbf{q}, \omega)$ на величину функции реакции плотность-плотность системы невзаимодействующих фермионов той же массы и плотности $\chi^0(\mathbf{q}, \omega)$. Последнюю можно вычислить следующим образом: сначала находим динамический форм-фактор по формуле (5.8), пренебрегая многопарными возбуждениями и коллективными модами, а затем вычисляем $\chi^0(\mathbf{q}, \omega)$ по формуле (5.24).

Ответ, известный как формула Линдхардта, выглядит следующим образом:

$$\epsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - (4\pi e^2 / q^2) \sum_{\rho\sigma} 2\omega_{\rho\mathbf{q}}^0 n_{\rho\sigma}^0 (1 - n_{\rho+\mathbf{q}\sigma}^0) [(\omega - i\eta)^2 - (\omega_{\rho\mathbf{q}}^0)^2]^{-1}.$$

(6.30)

Уравнение Ландау-Силина

Теория ферми-жидкости Ландау может быть распространена на системы с кулоновским взаимодействием, если самосогласованным образом учесть эффекты динамического экранирования. Делается это следующим образом. Будем строить теорию Ландау по отношению к динамически экранированным частицам. Взаимодействие между двумя экранированными частицами, в отличие от исходного кулоновского, является короткодействующим.

Уравнение Ландау-Силина

Возмущение функции распределения приводит к изменению электронной плотности:

$$\langle \rho(\mathbf{r}, t) \rangle = \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t), \quad (6.21)$$

с которой связано поляризационное электрическое поле $\mathbf{G}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$

$$\operatorname{div} \mathbf{G}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) = 4\pi e \sum_{\mathbf{p}} \delta n_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t) \quad (6.22)$$

Поле $\mathbf{G}_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}, t)$ должно быть учтено в кинетическом уравнении как дополнительное электрическое поле.

Уравнение Ландау-Силина

В простейшем случае отсутствия столкновений и внешних полей, кинетическое уравнение приобретает вид:

$$(\partial \delta n_p / \partial t) + \mathbf{v}_p \nabla_r \delta n_p + \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) \sum_{p'} f_{pp'} \nabla_r \delta n_{p'}(\mathbf{r}, t) - e \mathbf{G}_p(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) = 0, \quad (6.23)$$

где поляризацонное поле определено выражением (6.22). В фурье-компонентах оно имеет вид:

$$(\mathbf{q} \mathbf{v}_p - \omega) \delta n_p + \mathbf{q} \mathbf{v}_p \delta(\epsilon_p - \mu) \sum_{p'} (f_{pp'} + 4\pi e^2 / q^2) \delta n_{p'} = 0. \quad (6.24)$$

Как мы видим, полное взаимодействие между квазичастицами описывается суммой $(f_{pp'} + 4\pi e^2 / q^2)$, в которой $f_{pp'}$ не имеет сингулярности при нулевой передаче импульса.

Уравнение Ландау-Силина

Уравнение Ландау-Силина (6.24) справедливо в отсутствии внешних полей при выполнении следующих условий:

Волновые векторы и частоты должны быть макроскопическими

$$\omega \ll \mu, \quad q v_F \ll \mu.$$

Частота столкновений ν должна быть малой

$$\nu \ll \omega \quad \text{или} \quad \nu \ll q v_F.$$

Уравнение Ландау-Силина

Уравнение Ландау-Силина позволяет описать многие макроскопические свойства бесстолкновительной плазмы, в частности, найти ее диэлектрическую проницаемость. В последнем случае в уравнение необходимо ввести внешнее возмущение в виде плоской монохроматической волны. Мы не будем проводить соответствующих вычислений, а приведем только ответ для трехмерных систем:

$$\varepsilon(q, \omega) = 1 - 4\pi e^2 / q^2 \chi^n(q, \omega). \quad (6.25)$$

Здесь через $\chi^n(q, \omega)$ обозначена функция реакции плотность-плотность нейтральной системы с теми же $f_{pp'}$, ε_p и плотностью ферми-жидкости.

Уравнение Ландау-Силина

Это выражение есть точная копия соотношения

$$\varepsilon(\mathbf{q}, \omega) = 1 - (4\pi e^2 / q^2) \chi^{\text{ЭКР}}(\mathbf{q}, \omega),$$

если считать, что в длинноволновом пределе $\chi^{\text{ЭКР}}(\mathbf{q}, \omega)$ описывает функцию реакции плотность-плотность нейтральной системы с эквивалентной плотностью, таким же взаимодействием на расстояниях, больших радиуса экранирования и спектром.

Уравнение Ландау-Силина

При вычислении сжимаемости мы предполагали, что положительный фон сжимается вместе с системой. Это предположение находится в противоречии с предположениями, сделанными при выводе уравнения Ландау-Силина.

Следовательно, сжимаемость не может быть получена из (6.24) и должна быть вычислена отдельно. Впрочем, ответ не сложно угадать. Если мы полагаем, что система в процессе сжатия остается электронейтральной, то ответ будет точно совпадать с ответом для сжимаемости незаряженной системы (2.41).

Микроскопические теории линейного отклика

Гамильтониан системы взаимодействующих фермионов

Гамильтониан системы взаимодействующих фермионов записывается в виде (3.14), (3.15):

$$H = \sum_{p\sigma} \varepsilon_p^0 c_{p\sigma}^+ c_{p\sigma} + \frac{1}{2} \sum_{p p' q \sigma \sigma'} V_q c_{p+q\sigma}^+ c_{p'-q,\sigma'}^+ c_{p',\sigma'} c_{p,\sigma} . \quad (4.1)$$

Если речь идет о заряженной электронной ферми-жидкости, то для устойчивости ее необходим однородный, положительно заряженный фон. Поэтому $V_0 = 0$ (что второй член гамильтониана (хартриевский) обращается в нуль.)

В трехмерном случае, например,

$$V_q = 4\pi e^2 / q^2 (1 - \delta_{q0}) .$$

Внешнее возмущение

Будем предполагать, что внешний потенциал является слабым, реакция системы линейна по возмущению. В таких условиях каждая фурье – компонента действует независимо. Рассмотрим одну из Фурье – компонент. Полностью потенциал возмущения для одной гармонике должен быть записан в виде

$$H_e = \rho_q^+ \varphi(q, \omega) \exp(-i\omega t) + \text{комплексно сопряженное.} \quad (5.16)$$

С возмущением такого рода вычислить ничего невозможно:

1. В написанном виде возмущение действует в период от $-\infty$ до ∞ .
2. Конечная частота приводит к диссипации энергии, и как следствие, к нелинейным эффектам.

Внешнее возмущение

Примем адиабатические начальные условия, соответствующие отсутствию возмущения при $t = -\infty$ и очень медленному включению возмущения во времени.

Умножим H_e на $\exp(\eta t)$, где $\eta > 0$.

Энергия, передаваемая системе, пропорциональна φ_q^2/η . Нагрева и нелинейных эффектов не будет, если сначала $|\varphi_q| \rightarrow 0$, а затем $\eta \rightarrow 0$.

Другими словами, при вычислении линейной реакции следует считать η конечной величиной вплоть до ответа, а затем стремиться к нулю.

Диэлектрическая проницаемость

Из предыдущего – диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi e^2 / q^2) \chi(\mathbf{q}, \omega). \quad (6.27)$$

Где, по определению, **функция реакции плотность – плотность** равна:

$$\chi = \langle \rho(\mathbf{q}, \omega) \rangle / \varphi(\mathbf{q}, \omega).$$

Диэлектрическая проницаемость

Рассмотрим электрон-дырочную пару с импульсом $-\mathbf{q}$:

$$\rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}\sigma} = c^{\dagger}_{\mathbf{p}\sigma} c_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}. \quad (7.1)$$

На нее действует поле, определяемое гамильтонианом (4.1), и гармоническое возмущение (5.16). Наша цель состоит в отыскании средней плотности

$$\rho_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{p}\sigma} \rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}\sigma}. \quad (7.2)$$

Для реализации этой цели используем операторное уравнение

$$i \frac{d}{dt} (\rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}}) = [\rho_{\mathbf{p}\mathbf{q}}, H] \quad (7.3)$$

Приближение Хартри-Фока.

Теперь произведем процедуру, известную как спаривание Хартри – Фока (Hartree-Fock pairing).

Заменяем третий (помним — второй разбивается на два — с нулевым и ненулевым q !) член эффективным гамильтонианом

$$H_1^{HF} = -1/2 \sum_{p,q,\sigma} V_q c_{p+q,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} c_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} =$$

$$= - \sum_{p,\sigma} X_{p\sigma} c_{p,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma},$$

где $X_{p\sigma} = \sum_q 1/2 V_q \langle 0 | c_{p+q,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} c_{p+q,\sigma} c_{p,\sigma} | 0 \rangle$.

Легко видеть, что $X_{p\sigma}$ — действительные, хотя и неизвестные числа, а гамильтониан

$$H = \sum_{p,\sigma} \varepsilon_p^0 c_{p,\sigma}^\dagger c_{p,\sigma} + H_1^{HF}$$

пригоден для нахождения решений.

Диэлектрическая проницаемость в приближении Хартри-Фока

В качестве самого грубого приближения не будем учитывать в гамильтониане H электрон-электронное взаимодействие, т.е. опустим второй член в правой части (4.1).

Результат коммутации выглядит как

$$i \frac{d}{dt} (\rho_{pq}) = \omega_{pq}^0 \rho_{pq} + \{c_p^+ c_p - c_{p+q}^+ c_{p+q}\} e\varphi \exp(-i\omega t + i\eta t) +$$

$$\{c_p^+ c_{p+2q} - c_{p-q}^+ c_{p+q}\} e\varphi^+ \exp(i\omega t + i\eta t)$$

Третий член в правой части соответствует передаче импульса $2q$ и должен быть опущен при вычислении функции линейного отклика. Вычислив среднее от правой и левой части по основному состоянию, получим:

$$(7.4) \quad \langle \rho_q \rangle = \sum_p \rho_{pq} = \sum_p (n_p^0 - n_{p+q}^0) (\omega - \omega_{pq}^0 + i\eta)^{-1} e\varphi .$$

Диэлектрическая проницаемость в приближении Хартри-Фока

Естественно, что действуя подобным образом, мы получили функцию реакции плотность-плотность для газа невзаимодействующих фермионов.

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^0 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0) (\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta)^{-1}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) совпадает с ранее полученным выражением (5.33), если в последнем во втором члене изменить индексы суммирования $\mathbf{p} \rightarrow -\mathbf{p}-\mathbf{q}$, $\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 \rightarrow -\omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0$.

Осталось подставить (7.5) в выражение для диэлектрической проницаемости (6.27). Получим,

$$\varepsilon^{-1}(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi e^2/q^2) \chi^0(\mathbf{q}, \omega) = 1 + (4\pi e^2/q^2) \sum_{\mathbf{p}} (n_{\mathbf{p}}^0 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0) (\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta)^{-1}. \quad (7.6)$$

Это и есть результат в приближении Хартри-Фока.

Парная корреляционная функция в приближении Хартри-Фока

Рассмотрим функцию корреляции плотность-плотность.

$$S(r) = N^{-1} \langle 0 | \rho(r+r') \rho(r') | 0 \rangle \quad (7.7)$$

Здесь и ниже для простоты будем считать объем системы Ω единичным.

Простыми преобразованиями можно выразить парную корреляционную функцию (7.7) через парную функцию распределения $g(r)$, выделив автокорреляционную часть:

$$S(r) = N^{-1} \langle 0 | \sum_{ij} \delta(r+r'-r_i) \delta(r'-r_j) | 0 \rangle = N^{-1} \langle 0 | \sum_{ij} \delta(r+r_j-r_i) | 0 \rangle = \delta(r) + (N-1) g(r). \quad (7.8)$$

Здесь парная функция распределения $g(r)$

$$g(r) = N^{-1} (N-1)^{-1} \langle 0 | \sum_{i \neq j} \delta(r+r_j-r_i) | 0 \rangle. \quad (7.9)$$

Парная корреляционная функция в приближении Хартри-Фока

Очевидно, что статический форм-фактор является фурье-компонентой функции корреляции плотность-плотность.

$$S_q = \int d^3r \mathbf{S}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}) = N^{-1} \langle 0 | \rho_{\mathbf{q}}^+ \rho_{\mathbf{q}} | 0 \rangle \quad (7.10)$$

В приближении Хартри-Фока мы заменяем реальный статический форм-фактор на форм-фактор невзаимодействующего ферми газа.

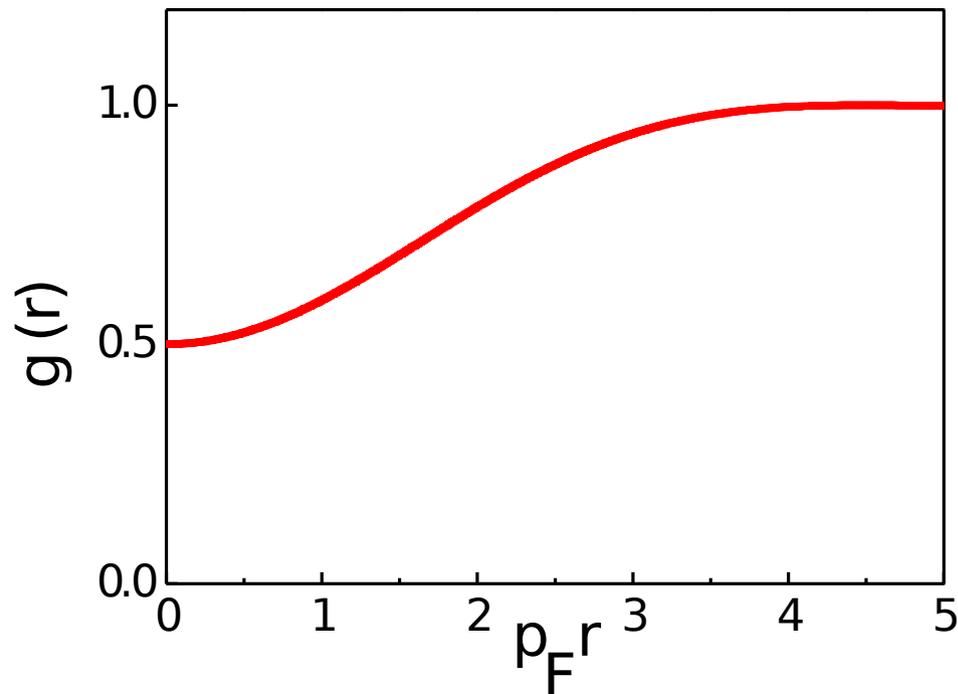
$$S_q^0 = S_{\text{HFA}}^0 = \begin{cases} 3q/4p_F - q^3/16 (p_F)^3 & \text{для } 0 < q < 2 p_F \\ 1 & \text{для } q > 2 p_F. \end{cases} \quad (7.11)$$

Для отыскания парной функции распределения осталось сделать обратное преобразование Фурье от найденного выражения для S_q^0 .

Парная корреляционная функция в приближении Хартри-Фока

Ответ равен:

$$g^{\text{HFA}}(\mathbf{r}) = 1 - \frac{9}{2} \left\{ \frac{[\sin(p_F r) - p_F r \cos(p_F r)]}{p_F r} \right\}^2. \quad (7.12)$$

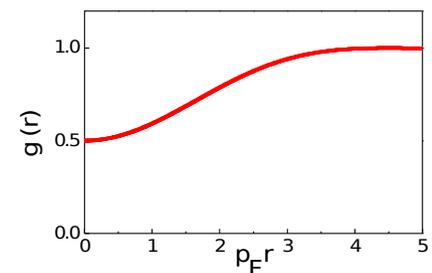


Парная корреляционная функция в приближении Хартри-Фока

Если бы корреляции между положениями частиц вообще отсутствовали, то $g(r)$ была бы равна единице.

Отклонение функции парного распределения от единицы связано с принципом Паули. Корреляции в распределении частиц с противоположно направленными спинами отсутствуют, а вероятность найти в одной точке две частицы с одинаково направленными спинами равна нулю. Как мы видим, в приближении Хартри-Фока учитываются только кинематические (обусловленные принципом Паули) корреляции.

Ясно, что в реальности функция парного распределения а нуле обязана занулиться: каждый из электронов обладает конечной энергией, а потенциальная энергия взаимодействия обращается в бесконечность при нулевом расстоянии между частицами. Следовательно, должен существовать другой тип корреляций (динамические корреляции), обусловленный взаимодействием.



Диэлектрическая проницаемость в Приближении Хаотических Фаз (RPA)

Результат коммутации оператора ρ_{pq} с оператором потенциальной энергии выглядят следующим образом: (необходимо провести коммутации и замены переменных)

$$\sum_k 1/2 V_k \{ \rho_k (c_p^+ c_{p+q-k} - c_{p+k}^+ c_{p+q}) + (c_p^+ c_{p+q-k} - c_{p+k}^+ c_{p+q}) \rho_k \}. \quad (7.17)$$

В сумме удержим только члены с $k=q$ (что и будет соответствовать приближению хаотических фаз). Среднее от коммутатора по основному состоянию равно:

$$V_q \langle \rho_q \{ c_p^+ c_p - c_{p+q}^+ c_{p+q} \} \rangle = V_q (n_p^0 - n_{p+q}^0). \quad (7.18)$$

Диэлектрическая проницаемость в Приближении Хаотических Фаз (RPA)

Уравнение (7.3).приобретает вид:

$$\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle = \sum_{\mathbf{q}} (\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta)^{-1} \{ (n_{\mathbf{p}}^0 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0) e\varphi + 4\pi e^2 / q^2 (n_{\mathbf{p}}^0 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}^0) \}. \quad (7.19)$$

Или $\langle \rho_{\mathbf{q}} \rangle = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) e\varphi (1 - 4\pi e^2 / q^2 \chi^0(\mathbf{q}, \omega))^{-1},$

$$\epsilon_{\text{RPA}} = 1 - 4\pi e^2 / q^2 \chi^0(\mathbf{q}, \omega). \quad (7.20)$$

Этот результат мы уже получали ранее (см. (6.29)). В приближении хаотических фаз частично учтены динамические корреляции. Взаимодействие между электронами заэкранировано, поэтому эффективная масса квазичастиц конечна.

Правила сумм

Для вычислений придется делать радикальные упрощающие предположения.

Для контроля за теоретическими предположениями придумано несколько точных, вообще говоря, интегральных соотношений, называемых правилами сумм. Одно из них сформулировано нами в виде соотношения (5.30) для предела функции реакции плотность плотность.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \{\chi(q, 0)\} = -\rho^2 \kappa = -\partial\rho/\partial\mu,$$

Еще одно из таких правил

$$\int_0^\infty \omega S(q, \omega) d\omega = Nq^2/2m, \quad (7.21)$$

где N – число частиц в системе, а m – масса голой частицы.

Хаббардовские поправки

При высоких плотностях электронной системы (случай малых r_s) основной вклад в корреляционную энергию обусловлен процессами с малыми передачами импульса.

Для этих процессов результаты, полученные в приближении хаотических фаз, должны быть довольно точными, поскольку предположение о динамическом экранировании квазичастиц, на характерных расстояниях много больше обратного фермиевского импульса, выполняется хорошо.

Однако по мере увеличения r_s становятся заметными процессы передачи импульса порядка фермиевского.

Ясно, что потенциал на расстояниях, сравнимых с межчастичным будет экранироваться плохо.

Хаббардовские поправки

Приближенное выражение, описывающее процесс ухудшения экранирования при больших передачах импульса, было предложено Хаббардом:

$$\chi_{\text{экр}}^{\text{H}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \{1 + G(\mathbf{q}) 4\pi e^2 / q^2 \chi^0(\mathbf{q}, \omega)\}^{-1}. \quad (7.22)$$

(Сравните с (7.20) и (6.29) согласно которым $\chi_{\text{экр}}^{\text{H}}(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega)$.)

Здесь введена функция $G(\mathbf{q})$, описывающая так называемые поправки на локальное поле (local field corrections, LFC). Хаббардом был предложен следующий вид этой функции для трехмерных электронных систем :

$$G(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} q^2 (q^2 + p_{\text{F}}^2)^{-1}, \quad (7.23)$$

имеющий правильные асимптотики при $q \ll p_{\text{F}}$ и $q \gg p_{\text{F}}$.

Хаббардовские поправки

легко вычислить исправленную функцию реакции плотность-плотность

$$\chi^H(\mathbf{q}, \omega) = \chi^0(\mathbf{q}, \omega) \{1 - (1 - G(\mathbf{q})) 4\pi e^2 / q^2 \chi^0(\mathbf{q}, \omega)\}^{-1}. \quad (7.24)$$

В настоящее время предложено несколько видов поправок на локальное поле. Считается, что использование такого рода поправок позволяет приблизиться к рубежу $r_s = 1$ и даже продвинуться в область больших r_s .

Хаббардовская поправка в двумерном случае имеет вид:

$$G(\mathbf{q}) = (2g_v)^{-1} q (q^2 + p_F^2)^{-1/2}, \quad (7.25)$$

где g_v — число эквивалентных долин.

Отклик на однородное электрическое поле. Гамильтониан возмущения.

будем рассматривать статическое поле, как предел переменного поля при частоте, стремящейся в нуль. С этой целью прежде всего перепишем гамильтониан возмущения

Будем считать, что электромагнитное поле имеет вихревое происхождение и может быть описано зависящим от времени вектор – потенциалом \mathbf{A} . При наличии возмущения гамильтониан системы взаимодействующих частиц выглядит следующим образом:

$$H = 1/2m \sum_k (\mathbf{p}_k - e/c \mathbf{A}_k)^2 + 1/2 \sum_{i \neq j} e^2/r_{ij}.$$

Отклик на однородное электрическое поле. Гамильтониан возмущения.

Разделим гамильтониан на два члена: $H = H_0 + V$, где V - потенциал взаимодействия:

$$V = -\frac{1}{2} \sum_k e/(mc) (\mathbf{p}_k \mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k \mathbf{p}_k) + \sum_k e^2/(2mc^2) \mathbf{A}_k^2. \quad (8.2)$$

Для произвольного оператора справедливо следующее равенство:

$$(\mathbf{p}f - f\mathbf{p}) \varphi = -i\hbar (\nabla f\varphi - f\nabla\varphi) = -i\hbar \varphi \nabla f. \quad (8.3)$$

В частности, $(\mathbf{p} \mathbf{A} - \mathbf{A} \mathbf{p}) = -i\hbar \operatorname{div} \mathbf{A}$. Теперь выберем условия калибровки:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0; \quad (8.4)$$

тогда

$$V = -\sum_k e/(mc) \mathbf{A}_k \mathbf{p}_k + \sum_k e^2/(2mc^2) \mathbf{A}_k^2. \quad (8.5)$$

Отклик на однородное электрическое поле. Гамильтониан возмущения.

Второй член сразу отбросим, поскольку нас интересует только линейный отклик.

В однородном гармоническом электрическом поле $\mathbf{E} = -1/c \partial \mathbf{A} / \partial t$

$$|A_x| = cE_x / \omega, \quad (8.6)$$

а гамильтониан возмущения имеет вид:

$$V = \sum_k (e\hbar) / (m\omega) E_x \partial / \partial x_k; \quad (8.7)$$

где индекс k , как и ранее, номерует частицы системы.

Формула Кубо-Гринвуда

Перейдем теперь к вычислению проводимости на частоте ω .

Определим ее через среднюю мощность потерь на частоте ω в единице объема системы.

Мощность потерь равна:

$$\frac{1}{2} E_x^2 \sigma(\omega). \quad (8.8)$$

Вычислим эту же величину рассматривая переходы частиц системы в возбужденные состояния.

Формула Кубо-Гринвуда

Вероятность перехода из состояния с энергией ε в состояние с энергией $\varepsilon + \hbar\omega$, в соответствии с золотым правилом Ферми, равна:

$$w = 2\pi/\hbar E_x^2 (e\hbar)^2 / (m\omega)^2 |D|^2 N(\varepsilon + \hbar\omega), \quad (8.9)$$

где $N(\varepsilon + \hbar\omega)$ – плотность конечных состояний, а D , согласно предыдущему параграфу,

$$D = \int d^3x \psi_\varepsilon^* \partial \psi_\varepsilon / \partial x. \quad (8.10)$$

Имея в виду, что нам потребуется величина $w(\omega) d\omega$, интеграл перекрытия следует усреднить по небольшой области энергий

$$w = 2\pi/\hbar E_x^2 (e\hbar)^2 / (m\omega)^2 D_{cp}^2 N(\varepsilon + \hbar\omega),$$

Формула Кубо-Гринвуда

Теперь вычислим потери энергии: Нужно учесть прямые и обратные переходы, а также число электронов, совершающих переходы, и число свободных мест. Приравнявая потери энергии, вычисленные двумя способами, получим:

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi e^2 \hbar}{m^2 \omega^2} \int d\varepsilon \{n^0(\varepsilon)(1-n^0(\varepsilon+\hbar\omega)) - n^0(\varepsilon+\hbar\omega)(1-n^0(\varepsilon))\} D_{\text{cp}}^2 N(\varepsilon)N(\varepsilon+\hbar\omega), \quad (8.11)$$

В фигурных скобках перекрестные произведения исчезают и остается $n^0(\varepsilon) - n^0(\varepsilon+\hbar\omega) = \hbar\omega (-\partial n^0/\partial\varepsilon)$

Формула Кубо-Гринвуда

Следовательно,

$$\sigma(\omega) = \int \sigma(\varepsilon, \omega) (-\partial n^0 / \partial \varepsilon) d\varepsilon;$$

$$\sigma(\varepsilon, \omega) = 4\pi e^2 \hbar^2 / (m^2 \omega) D^2_{\text{ср}} N(\varepsilon) N(\varepsilon + \hbar \omega). \quad (8.12)$$

Выражения (8.12) известны как формула Кубо-Гринвуда.

Мы видим, что если для электронов или квазичастиц можно ввести проводимость, зависящую от энергии, то полная проводимость будет суммой таких, зависящих от энергии проводимостей вблизи Ферми-уровня.

Формула Кубо-Гринвуда. Случай нулевой температуры

Функция распределения в этом случае имеет вид ступени.

Разность функций распределения в (8.11) отлична от нуля на интервале $\hbar\omega$. Поэтому

$$\sigma(\omega) = 4\pi e^2 \hbar^2 / (m^2 \omega) \int_{\varepsilon_F - \hbar\omega}^{\varepsilon_F} D_{\text{cp}}^2 N(\varepsilon) N(\varepsilon + \hbar\omega) d\varepsilon. \quad (8.13)$$

Устремляя частоту к нулю, получим проводимость на постоянном токе.

$$\sigma(0) = 4\pi e^2 \hbar^3 / m^2 D_{\text{cp}}^2 N^2(\varepsilon_F). \quad (8.14)$$

Если электрон локализован, то $D_{\text{cp}}^2 = 0$, поскольку перекрытие двух волновых функций у локализованных электронов с одной энергией отсутствует.

Скейлинговая гипотеза

Знание формулы Кубо-Гринвуда позволяет нам проследить ход соображений, приведший к скейлинговой гипотезе при исследовании перехода металл-диэлектрик.

Исходно задача ставилась следующим образом: как определить локализованы или делокализованы электроны на ферми-уровне не решая задачу о транспорте. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Скейлинговая гипотеза

Пусть имеется ограниченная электронная система. Наложим на нее периодические граничные условия

$$\psi(x+L) = \exp(i\varphi)\psi(x). \quad (8.15)$$

Условие (8.15) эквивалентно введению эффективного гамильтониана с фиктивным векторным потенциалом

$$A(\varphi) \propto \varphi/L. \quad (8.16)$$

Действительно, мы можем убрать границу, свернув систему в x – направлении в трубочку и введя вдоль оси этой трубочки поток магнитной индукции. Тогда каждый обход трубки электроном будет изменять фазу волновой функции согласно (8.15).

Скейлинговая гипотеза

Рассматривая член с векторным потенциалом как возмущение, можно определить сдвиг уровней в зависимости от φ ...по теории возмущений:

$$(\partial^2 E_n / \partial \varphi^2)_{\varphi=0} = \hbar^2 / (2mL^2) \{1 + 2/m \sum_{j \neq n} |\langle j | p_x | n \rangle|^2 (E_j - E_n)^{-1}\}. \quad (8.17)$$

Наличие или отсутствие сдвига уровней свидетельствует о делокализованности или локализованности электронной волновой функции. Чтобы описать этот эффект количественно, введем число Таулесса

$$G_T = \Delta^{-1} \langle (\partial^2 E_n / \partial \varphi^2)_{\varphi=0}^2 \rangle^{1/2}. \quad (8.18)$$

Здесь Δ среднее расстояние между энергетическими уровнями вблизи уровня Ферми, а угловые скобки означают усреднение по различным конфигурациям беспорядка.

Скейлинговая гипотеза

Сделаем теперь следующие предположения:

- а) Второй член в круглых скобках много больше 1.
- б) $E_j - E_n = \Delta = L^{-d} N^{-1}(\varepsilon_F)$, где d – размерность системы, а $N(\varepsilon_F)$ – плотность состояний на ферми-уровне.
- в) $\langle j | p_x | n \rangle$ – матричные элементы берутся при одной энергии.

Скейлинговая гипотеза

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2 E_n}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} = \frac{\hbar^2}{2mL^2} \frac{2}{m} L^d N(\varepsilon_F) \sum_{j \neq n} |\langle j | p_x | n \rangle|^2, \quad (8.19)$$

что следует сравнить с выражением для статической проводимости (8.14)

$$\sigma(0) = 4\pi e^2 \frac{\hbar}{m^2} N^2(\varepsilon_F) \Omega \sum_{j \neq n} |\langle j | p_x | n \rangle|^2 \quad (8.20)$$

Скейлинговая гипотеза

Вводя кондактанс, трехмерной (в качестве примера) системы, как

$$G = \hbar/e^2 L\sigma(0) \quad (8.22)$$

(введенный таким образом конданктанс не имеет размерности), получим

$$\left(\frac{\partial^2 E_n}{\partial \varphi^2}\right)_{\varphi=0} = G \Delta. \quad (8.23)$$

Другими словами, число Таулесса с некоторой точностью может быть заменено безразмерным кондактансом системы.

Скейлинговая гипотеза

Осталось сделать последний шаг: декларировать, что кондактанс (подобно числу Таулесса) может характеризовать состояние системы и кондактанс увеличенной системы является функцией коэффициента увеличения и исходного кондантанса.

$$G(qL) = f(q, G(L)); q=1+\alpha; \alpha \ll 1. \quad (8.24)$$

В нулевом приближении $G(L) = f[1, G(L)]$.

$$\text{В первом приближении } \alpha L G'(L) = \alpha \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=1}. \quad (8.25)$$

Введем новую универсальную функцию $\beta(G)$. (функцию Геллмана-Лоу):

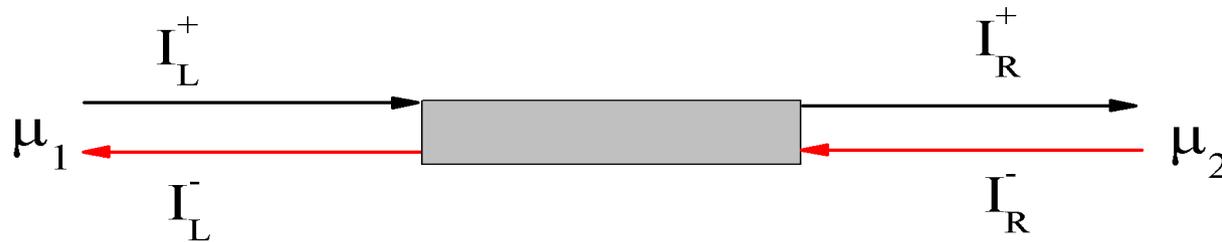
$$\left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=1} G^{-1} = \beta(G).$$

С помощью новой функции соотношение (8.25) может быть записано как:

$$\left(\frac{\partial \ln G}{\partial \ln L} \right) = \beta(G).$$

Формализм Ландауэра

Поставим задачу следующим образом: Одномерная область подключена к резервуарам с близкими, но различными значениями химических потенциалов с помощью участков идеального одномерного проводника



Формализм Ландауэра

Ток, переносимый электронами, падающими на заштрихованную, рассеивающую область с учетом вырождения по спину равен:

$$I_L^+ = (2e/h) N\mu_1, \quad (4.4.1)$$

где N – число заполненных каналов. В левой части рисунка ток уходящих влево каналов равен

$$I_L^- = I_L^+ (1-D) + D I_R^-. \quad (4.4.2)$$

D – коэффициент прохождения заштрихованной области. Соответственно, полный ток

$$I = I_L^+ - I_L^- = (2e/h) N\{\mu_1 - \mu_1(1-D) - \mu_2 D\} = D(\mu_1 - \mu_2) (2e/h) N \quad (4.4.3)$$

Формализм Ландауэра

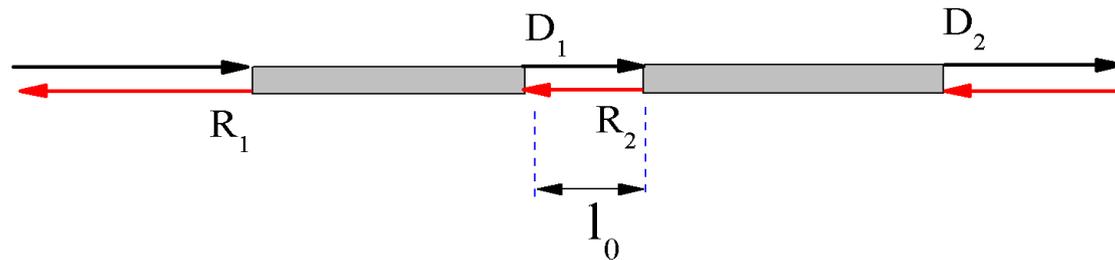
Выражение (4.4.4) может быть переписано следующим образом:

$$R = V/I = (h/2e^2) N^{-1} \{1+(1-D)/D\} = R_{id} + R_{sc} , \quad (4.4.5)$$

то есть сопротивление рассматриваемой системы может быть представлено в виде суммы сопротивлений идеальных подводов и рассеивающей области.

Роль интерференции электронов

Рассмотрим задачу о прохождении двух последовательно соединенных «грязных» областей в одномерном канале (рис. 33). Коэффициенты прохождения и отражения на этих областях обозначим $D_{1,2}$ и $R_{1,2}$, соответственно.



Роль интерференции электронов

В качестве первого шага проведем вычисления в предположении об отсутствии интерференции электронных волн.

Коэффициент прохождения выразится через локальные коэффициенты прохождения и отражения как

$$D = D_1 D_2 + D_1 R_2 R_1 D_2 + D_1 R_2 R_1 R_2 R_1 D_2 + \dots = D_1 D_2 / (1 - R_2 R_1) .$$

(4.5.1)

Элементарное арифметическое вычисление с учетом соотношения $D_i = (1 - R_i)$ приводит к выражению

$$(1-D)/D = R/D = R_1/D_1 + R_2/D_2, \quad (4.5.2)$$

которое легко обобщается на случай произвольного числа последовательно расположенных «грязных областей. Например, для M таких одинаковых областей

$$(1-D(M))/D(M) = M(R_1/D_1) . \quad (4.5.3)$$

Роль интерференции электронов

Если длина нашего одномерного канала равна L , то коэффициент его прохождения может быть записан как

$$D(L) = D_1 / (MR_1 + D_1) = l / (l + L), \quad (4.5.4)$$

где введена эффективная длина свободного пробега $l = D_1 / \{(M/L)(1 - D_1)\}$. Подставив (4.5.4) в выражение (4.4.5), получим для R_{SC}

$$R_{SC} = (h/2e^2) N^{-1} (L/l). \quad (4.5.5)$$

Это очень интересный результат.

Во-первых, из него следует, что сопротивление растет пропорционально длине образца.

Во-вторых, видно, что сопротивление каждого одномерного канала возрастает в среднем на квант на масштабе в длину свободного пробега.

Роль интерференции электронов

Включим теперь в наше рассмотрение эффекты электронной интерференции. В выражении, подобном (4.5.1) нам предстоит теперь складывать не вероятности отражений и прохождений через барьера, а соответствующие амплитуды, причем с правильной фазой.

Для простоты будем считать, что фаза набирается только при пробегах длины l_0 и за один пробег туда и обратно равна $\Theta = 2kl_0$. Амплитуда прошедшего канала определится выражением:

$$\begin{aligned} D^{1/2} &= (D_1 D_2)^{1/2} + (D_1 D_2)^{1/2} e^{i\Theta} (R_1 R_2)^{1/2} + (D_1 D_2)^{1/2} e^{i2\Theta} (R_1 R_2)^{1/2} + \dots \\ &= (D_1 D_2)^{1/2} / \{1 - e^{i\Theta} (R_1 R_2)^{1/2}\}, \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

что дает для вероятности прохождения

$$D = D_1 D_2 / \{1 - 2(R_2 R_1)^{1/2} \cos\Theta + R_2 R_1\}. \quad (4.5.7)$$

Специально отметим, что (4.5.7) не сводится к (4.5.1), поскольку ранее мы считали каждый акт рассеяния на «грязном» участке образца приводящим к полной потере фазовой когерентности.

Роль интерференции электронов

Из выражения (4.5.7) следует, что вероятность прохождения зависит от расстояния между «грязными областями». Нас будет интересовать случай последовательно включенного большого количества «грязных» областей со случайными расстояниями между ними.

Поэтому введем (4.5.7) в R_{SC} и усредним по всем возможным углам Θ :

$$\begin{aligned} R_{SC} &= (h/2e^2) \langle (1-D)/D \rangle = (h/2e^2) (D_1 D_2)^{-1} \{1 + R_1 R_2 - D_1 D_2 \\ &- 2(R_2 R_1)^{1/2} \int_0^{2\pi} \cos\Theta \, d\Theta / 2\pi = \\ &= (h/2e^2) (D_1 D_2)^{-1} \{1 + R_1 R_2 - D_1 D_2\} = (h/2e^2) \{R_1/D_1 + R_2/D_2 + 2 \\ &R_1 R_2 / D_1 D_2\}. \end{aligned}$$

(4.5.8)

Роль интерференции электронов

Последнее выражение не сложно переписать через значения сопротивления R_1 и R_2 «грязных» участков проводника:

$$R_{SC} = R_1 + R_2 + 2(2e^2/h) R_1 R_2 ,$$

или в безразмерных переменных (например $R_{SC} = (2e^2/h) R_{SC}$)

$$R_{SC} (L_1+L_2) = R(L_1) + R(L_2) + 2 R(L_1) R (L_2) . \quad (4.5.9)$$

Роль интерференции электронов

Изменение размера образца может быть реализовано за счет изменения длины любой из его частей. При этом результат в сопротивлении не может зависеть от того, какая часть изменяется:

$$\begin{aligned} \partial R_{SC}(L_1+L_2) / \partial L_1 &= (\partial R(L_1) / \partial L_1) \{1+2 R(L_2)\} = \\ &= \partial R_{SC}(L_1+L_2) / \partial L_2 . \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

Из (4.5.10) следует равенство

$$\begin{aligned} (\partial R(L_1) / \partial L_1) \{1+2 R(L_1)\}^{-1} &= (\partial R(L_2) / \partial L_2) \{1+2 R(L_2)\}^{-1} = \\ &= \text{const} , \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

интегрируя которое, получим:

$$R(L) = (1/2) \{ \exp(2 \text{ const } L) - 1 \} . \quad (4.5.12)$$

Роль интерференции электронов

При малых L полученное выражение должно переходить в (4.5.5) , откуда окончательно имеем

$$R(L) = \{ \exp(2 L/l) - 1 \} / 2 . \quad (4.5.13)$$

Такой ответ был впервые получен Ландауэром.

Из него следует, что одномерная система малой длины может иметь малое сопротивление, но при увеличении длины образца до огромных размеров электроны окажутся локализованными при сколь угодно малом беспорядке.

Скейлинговая гипотеза

Уравнение (4.5.13) может быть переписано в следующем виде:

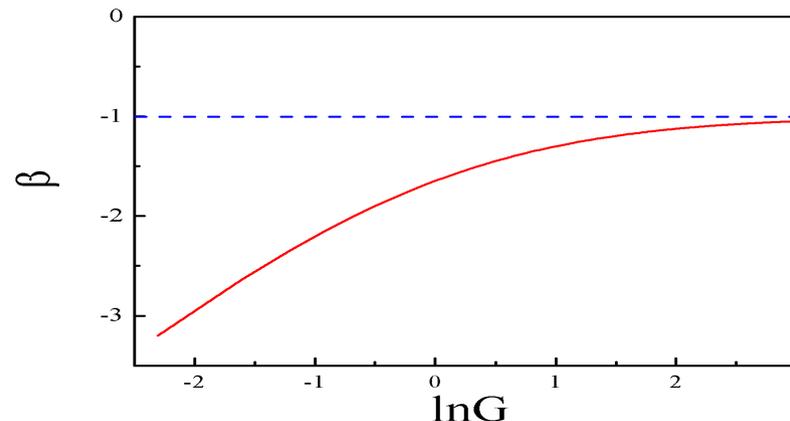
$$\partial(\ln G)/\partial(\ln L) = \beta(G), \quad (4.6.1)$$

где β - функция Геллмана-Лоу, а безразмерный кондактанс $G = 1/R$.

Для одномерного случая выражение для $\beta(G)$ легко находится дифференцированием:

$$\beta(G) = - (G/2) \ln [(2/G) + 1] [1 + (2/G)] \quad (4.6.2)$$

Как мы видим, в одномерном случае β - функция оказалась универсальной, не включающей в себя никаких параметров реальной системы.



Скейлинговая гипотеза

В одномерном случае при кондуктансе стремящемся в бесконечность, β функция выходит на асимптотическое значение $\beta = -1$, а в противоположном пределе $\beta \rightarrow \ln G - \ln 2$.

Найдем соответствующие асимптотики для двумерного случая. В области совсем малых кондуктансов мы ожидаем локализации:

$$G \propto \exp(-L/l) . \quad (4.6.3)$$

Следовательно, $\beta(G) \rightarrow \ln G$ при $G \rightarrow 0$.

Скейлинговая гипотеза

Более интересен обратный предельный случай $G \rightarrow \infty$.

В нулевом приближении в металлической области кондактанс квадрата не зависит от размера его стороны и $\beta(G) \rightarrow 0$. В следующем приближении нужно ожидать линейного члена в разложении $\beta(G)$ по малому параметру $1/G$:

$$\beta(G) = \pm \alpha/G. \quad (4.6.4)$$

Знак перед коэффициентом α *a priori* остается неопределенным.

Подставив (4.6.4) в (4.6.1) и проинтегрировав, получим:

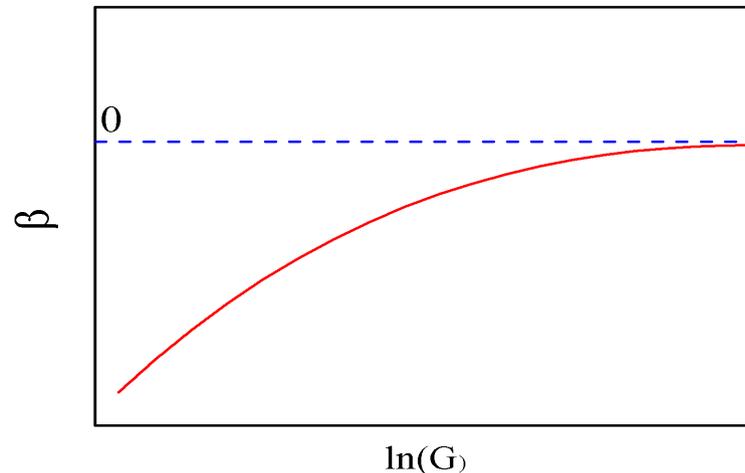
$$G = \pm \alpha^{-1} \ln(L) + \text{const}. \quad (4.6.4)$$

Оказывается, что при больших кондактансах возможна логарифмическая поправка к независящему от размера значению кондактанса.

Скейлинговая гипотеза

В эксперименте наблюдаются оба знака: в системах с сильным спин-орбитальным взаимодействием «+», в системах без спин-орбитального взаимодействия «-».

Последний случай получил название «слабой» локализации. В таких системах ожидается, что по мере увеличения размера при нулевой температуре кондуктанс будет логарифмически уменьшаться до тех пор, пока поправка не сравняется по масштабу с константой, а затем реализуется обычная локализация.



Скейлинговая гипотеза

все приведенные выше рассуждения базировались на учете интерференционных эффектов.

Поэтому при конечной температуре роль размера образца будет играть некоторый размер, на котором фаза у интерферирующих электронов сохраняется (длина сбоя фазы).

По мере повышения температуры длина сбоя фазы (а вместе с ней и эффективный размер образца) будет уменьшаться, приводя к логарифмической поправке к кондактансу образца по температуре. В

принципе, интерференционные эффекты в двумерном случае могут быть подавлены введением нормальной к поверхности двумерной электронной системы компоненты магнитного поля. Поэтому можно ожидать в случае слабой локализации появления отрицательного магнетосопротивления.

**Вычисление диэлектрической
проницаемости двумерного электронного
газа в приближении хаотических фаз.**

Путь расчета

$$\epsilon_{\text{RPA}} = 1 - 2\pi e^2/q \chi^0(\mathbf{q}, \omega).$$

$$S^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}^0) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0).$$

$$\chi^0(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{p}\sigma} n_{\mathbf{p}\sigma}^0 (1 - n_{\mathbf{p}+\mathbf{q}\sigma}^0) \{(\omega - \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta)^{-1} - (\omega + \omega_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^0 + i\eta)^{-1}\}$$

$$\chi' = \int_0^\infty d\omega' S(\mathbf{q}, \omega') \text{P} \{2\omega' (\omega^2 - \omega'^2)^{-1}\}$$

$$\chi'' = -\pi \{S(\mathbf{q}, \omega) - S(\mathbf{q}, \omega)\}.$$

введем новый вектор \mathbf{a} , $\mathbf{a} \parallel \mathbf{q}$; $\mathbf{p} = \mathbf{p}_F - \mathbf{a}$; $0 < a < q$

$$\omega = (\mathbf{p} + \mathbf{q})^2 / 2m - \mathbf{p}^2 / 2m = m^{-1} p_F q \cos\theta - m^{-1} a q + q^2 / 2m$$

введем безразмерную частоту $\Omega = \omega m / (p_F q)$

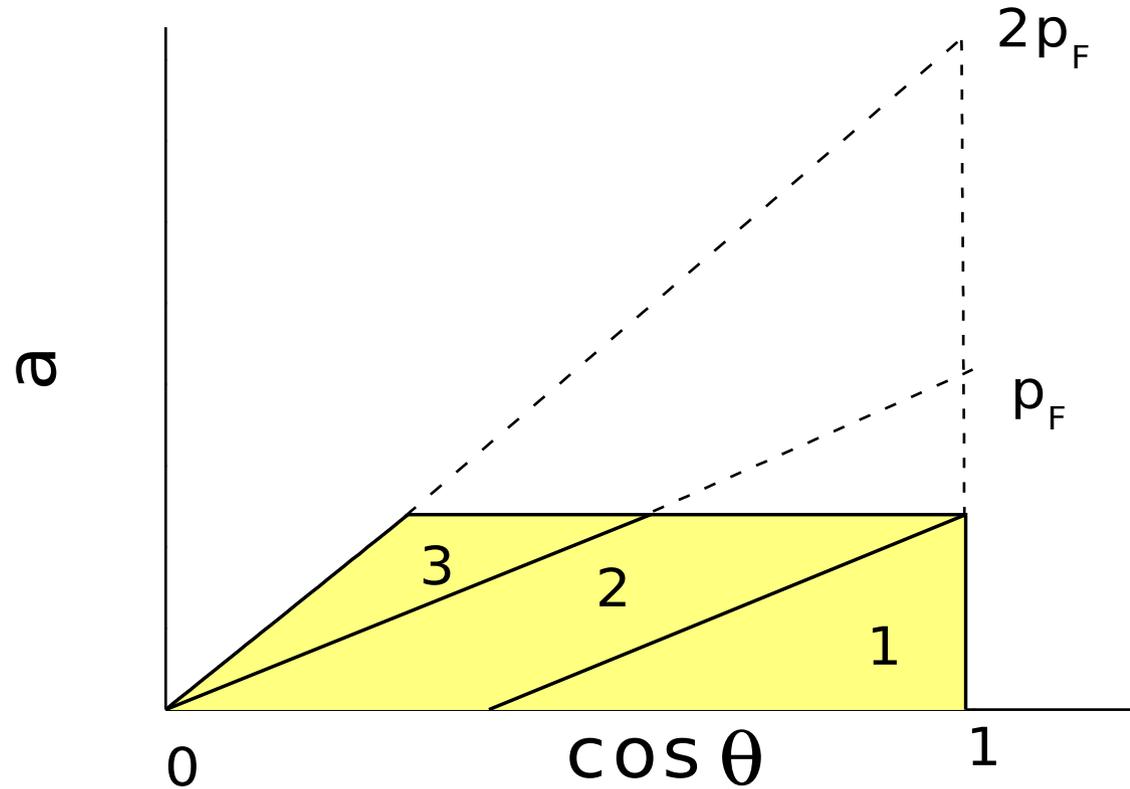
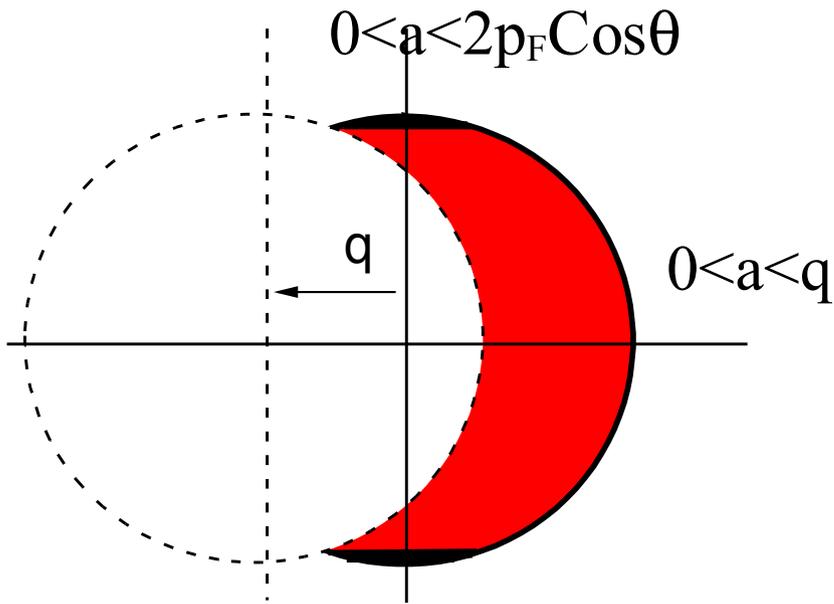
$$a / p_F = -\Omega + \cos\theta + q / 2p_F$$

Число переходов с фиксированными dp_y и da равно dN :

$$dN = - (2\pi)^{-2} dp_y da; \quad d\omega = -(q/m) da; \quad dp_y = p_F \cos\theta \quad d\theta$$

$$\begin{aligned} S^0(q, \omega) &= m p_F [4\pi^2 q]^{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos\theta \quad d\theta \\ &= m p_F [4\pi^2 q]^{-1} \{ \sin\theta_2 - \sin\theta_1 \} \end{aligned}$$

1. $q < p_F$



Район 1 $\Omega - q/2p_F < \cos\theta < 1.$

Район 2 $\Omega - q/2p_F < \cos\theta < \Omega + q/2p_F.$

Район 3 $-\Omega + q/2p_F < \cos\theta < \Omega + q/2p_F$

$1 - q/2p_F < \Omega < 1 + q/2p_F$

$q/2p_F < \Omega < 1 - q/2p_F$

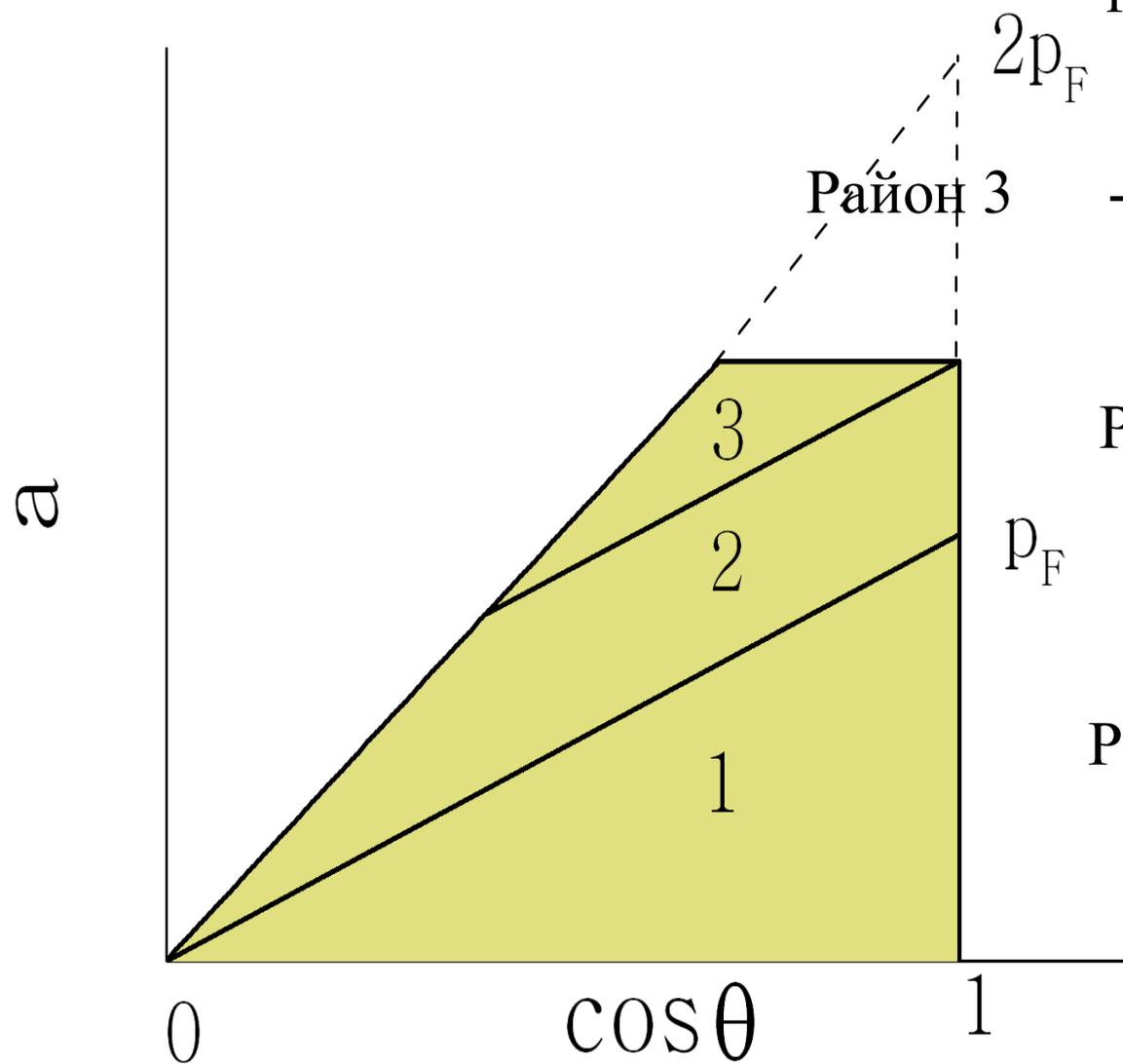
$0 < \Omega < q/2p_F$

2. $2 p_F > q > p_F$

первый $q/2p_F < \Omega < 1 + q/2p_F$

второй - $1 - q/2p_F < \Omega < q/2p_F$

третий - $0 < \Omega < 1 - q/2p_F$



Район 3 $-\Omega + q/2p_F < \cos \theta < \Omega + q/2p_F$

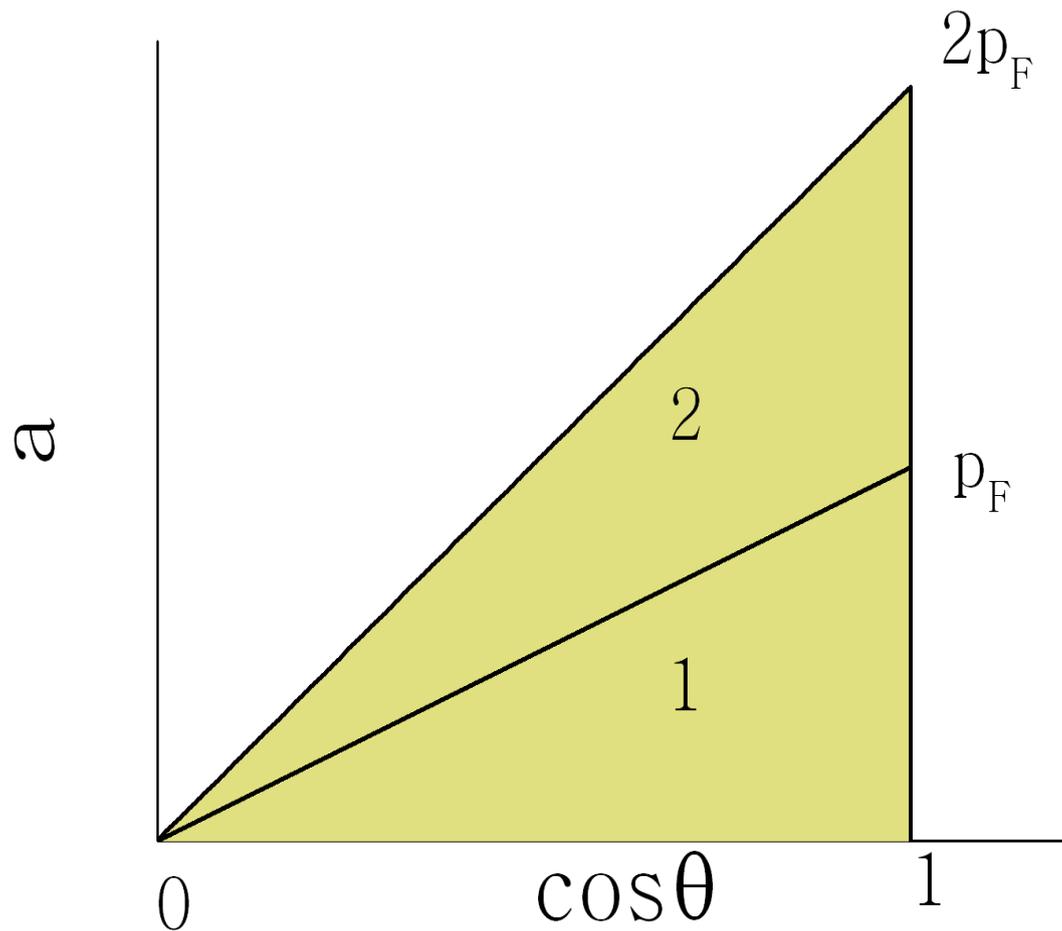
Район 2 $-\Omega + q/2p_F < \cos \theta < 1$

Район 1 $\Omega - q/2p_F < \cos \theta < 1$.

3. $q > 2p_F$

первый - $q/2p_F < \Omega < 1 + q/2p_F$

второй - $q/2p_F - 1 < \Omega < q/2p_F$



Район 2 $-\Omega + q/2p_F < \cos\theta < 1.$

Район 1 $\Omega - q/2p_F < \cos\theta < 1.$

3. $q > 2p_F$

$$S^0(q, \omega) = N(\varepsilon_F) p_F (q\pi)^{-1} [1 - (\Omega - q/2p_F)^2]^{1/2}.$$

Поскольку χ'' антисимметрична по частоте, $\chi''_0(q, 0) = 0$

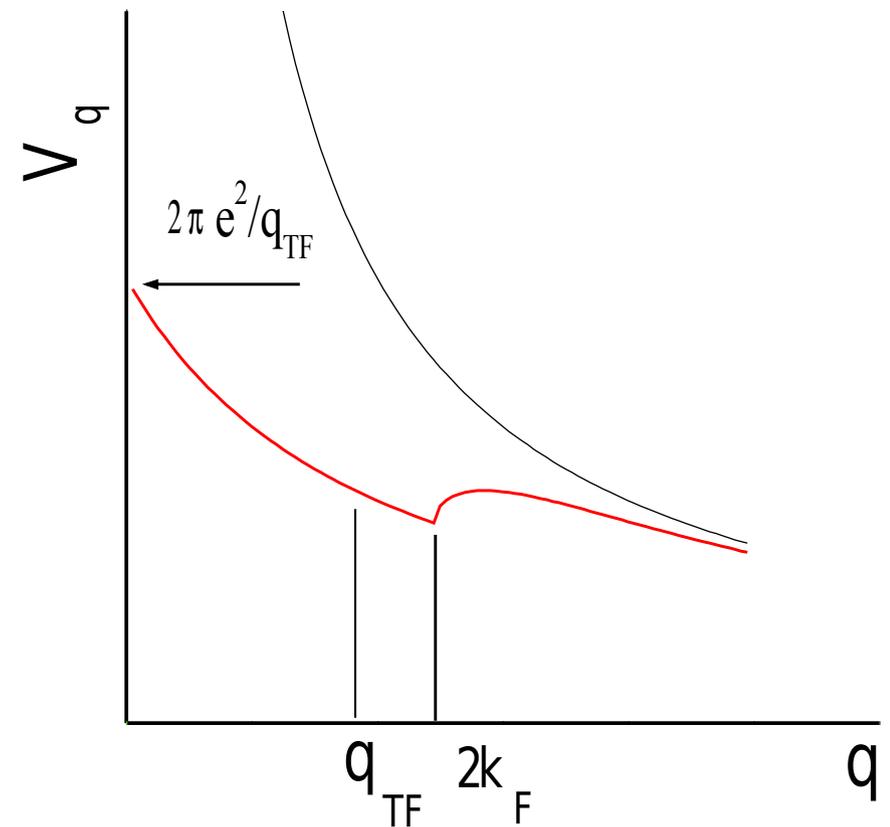
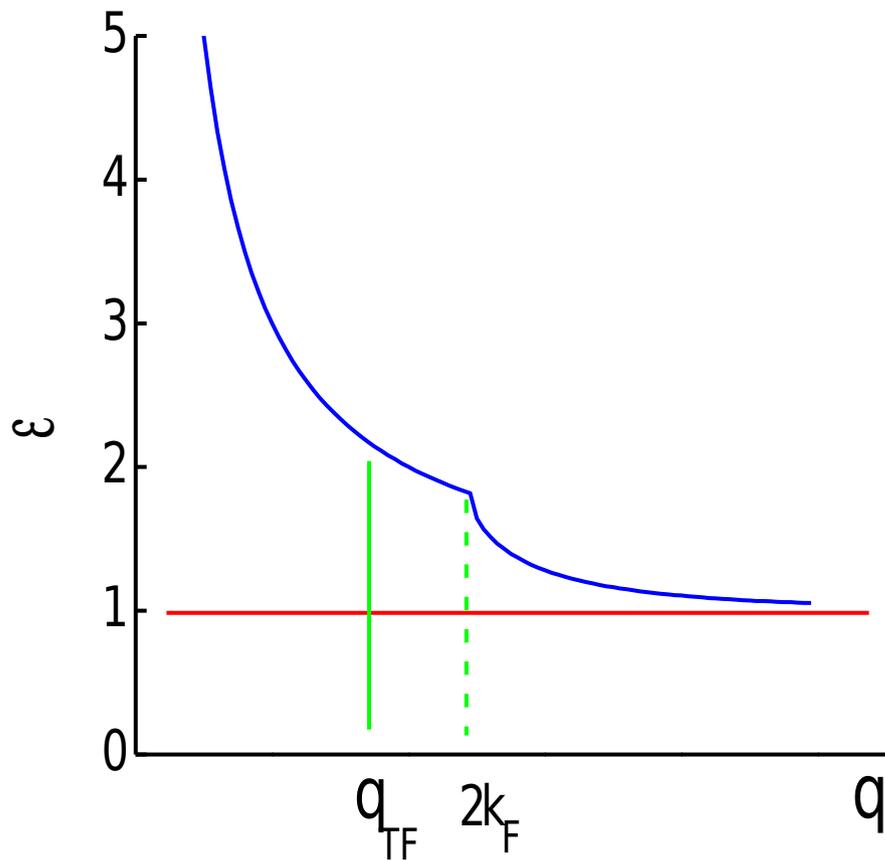
$$\chi'_0 = - \int 2d\Omega' / \Omega' N(\varepsilon_F) p_F (q\pi)^{-1} [1 - (\Omega' - q/2p_F)^2]^{1/2}$$

интеграл вычисляется в пределах от $(q/2p_F - 1)$ до $(1 + q/2p_F)$

$$\chi'_0 = - N(\varepsilon_F) \{ 1 - [1 - (2p_F/q)^2]^{1/2} \} \quad q > 2p_F.$$

$$\varepsilon(q,0) = 1 + q_{TF}/q \{1 - [1 - (2p_F/q)^2]^{1/2}\} \quad q > 2p_F$$

$$\varepsilon(q,0) = 1 + q_{TF}/q \quad q < 2p_F$$

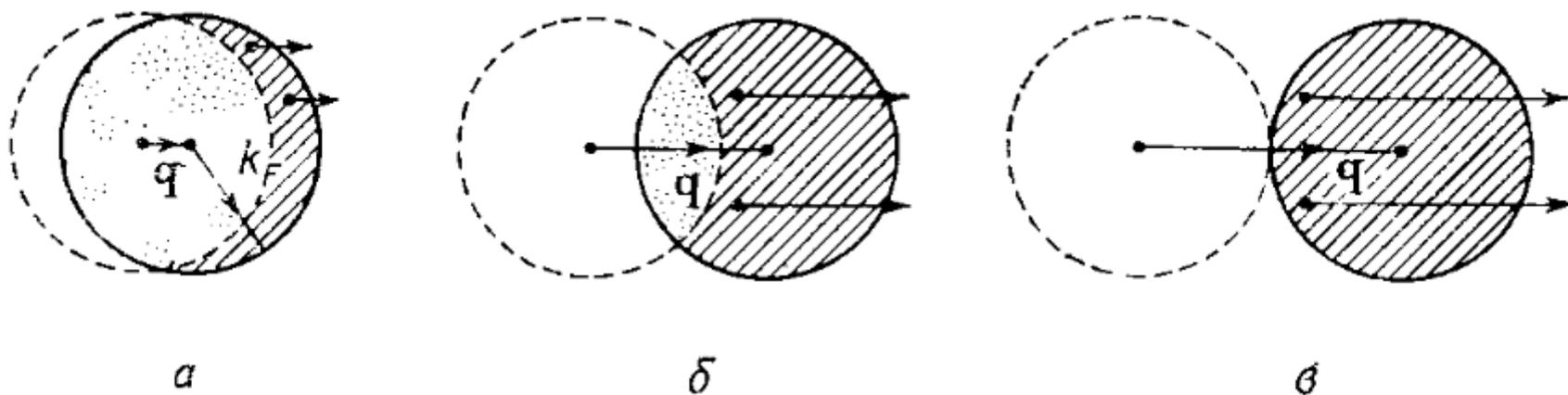


Диэлектрическая проницаемость

Особенность в экранировании при $q=2$ r_F и ухудшение экранирования при больших импульсах ответственны за Фриделевские осцилляции. Очевидно, что по мере уменьшения электронной плотности амплитуда осцилляций будет возрастать.

Диэлектрическая проницаемость

Особенность в экранировании при $q=2 k_F$ и ухудшение экранирования при больших импульсах ответственны за Фриделевские осцилляции. Очевидно, что по мере уменьшения электронной плотности амплитуда осцилляций будет возрастать.



Фиг. 91. Области сферы Ферми, дающие вклад в диэлектрическую проницаемость.

а) малые q ; б) $q < 2k_F$; в) $q = 2k_F$.

Фриделевские осцилляции

$$\varepsilon(\mathbf{q}, 0) = 1 + \frac{4\pi e^2 n}{q^2 \frac{2}{3}\mathcal{E}_F} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4k_F^2 - q^2}{8k_F q} \ln \left| \frac{2k_F + q}{2k_F - q} \right| \right\},$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{r}) = 4\pi e^2 \int \left\{ q^2 + \frac{4\pi e^2 n}{\frac{2}{3}\mathcal{E}_F} \left[\frac{1}{2} + \frac{4k_F^2 - q^2}{8k_F q} \ln \left| \frac{2k_F + q}{2k_F - q} \right| \right] \right\}^{-1} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{q}.$$

Без всякого расчета можно проверить, что наличие сингулярности при $q = 2k_F$ приведет к появлению особого вклада в потенциал $\mathcal{U}(\mathbf{r})$. Вместо плавной экспоненциальной функции мы получим потенциал, содержащий добавку, осциллирующую с волновым числом $2k_F$.

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

Пусть «пробный» заряд z находится в начале координат. Эффективный потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ и поляризационный заряд $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ связаны уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi(\mathbf{r}) = -4\pi (z \delta(\mathbf{r}) + e \langle \rho(\mathbf{r}) \rangle). \quad (6.3)$$

Вычислим плотность индуцированных заряда $\langle \rho(\mathbf{r}) \rangle$ в приближении, известном как приближение Томаса-Ферми. Примем, что электрохимический потенциал равен сумме потенциальной энергии и кинетической энергии невзаимодействующих фермионов, определяемой в трехмерном случае из соотношения

$$N/\Omega = (2m E_F)^{3/2}/3\pi^2. \quad (6.4)$$

Статическое экранирование. Приближение Томаса-Ферми.

В фурье-компонентах комбинации уравнений (6.3) и (6.6) соответствует:

$$(q^2 + q_{TF}^2) \varphi(q) = 4\pi z \quad \text{или} \quad \varphi(q) = 4\pi z (q^2 + q_{TF}^2)^{-1},$$

(6.7)

где $q_{TF} = (6\pi N e^2 / (\Omega E_F(\varphi=0)))^{1/2}$.

(Строго говоря, в выражении для q_{TF} отношение $N / (\Omega E_F(\varphi=0))$ следует заменить на термодинамическую плотность состояний.)

Переходя к реальному пространству, имеем:

$$\varphi(\mathbf{r}) = z/r \exp(-q_{TF} r). \tag{6.8}$$

Откуда видно, что кулоновский потенциал в статическом случае обрезается на расстоянии, равном обратному Томас-Фермиевскому вектору.

Фриделевские осцилляции

Пусть пробный заряд находится в начале координат $\rho_{in}(r) = e\delta(r)$

Тогда он создаёт неравномерное распределение зарядов

$$\delta n(r) = \chi_0(r) V(r) = \chi_0(r) \frac{V_0}{\epsilon(r)}$$

$$\delta n(r) = \frac{\chi_0(r)}{\epsilon(r)} \frac{4\pi e^2}{q^2}$$

Фриделевские осцилляции

$$\epsilon(q) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi^0 \Rightarrow$$

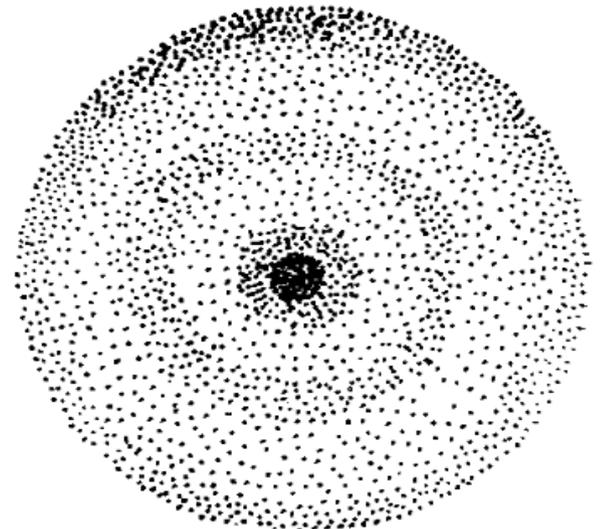
$$\delta u(q) = \frac{1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}$$

~~$$\delta u(q)$$~~

$$\delta u(\tau) = \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \delta u(q) e^{i q \tau}$$

Результат расчёта

$$\delta u(\tau) \approx - \frac{\cos 2k_F \tau}{\tau^3}$$



**Рассеяние двумерных электронов на
кулоновских центрах при $T=0$.**

$$\varphi_i = \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}), \quad \varphi_f = \exp(i(\mathbf{k}+\mathbf{q})\mathbf{r})$$

$$\hbar \tau^{-1} = \hbar \sum_{\mathbf{q}} W_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}} = 2\pi \sum_{\mathbf{q}} |V(\mathbf{q})|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q}))$$

$$\tau^{-1} = N_i 2\pi \hbar^{-1} \int |V(\mathbf{q})|^2 \delta(\varepsilon(\mathbf{k}) - \varepsilon(\mathbf{k}+\mathbf{q})) d^2\mathbf{q} / (2\pi)^2.$$

$$(1 - \cos\theta) = q^2 / 2k^2.$$

$$V(\mathbf{q}) = V_q = 2\pi e^2 / (q\varepsilon(q))$$

$$d^2\mathbf{q}/m = d\varepsilon \quad d\theta / 2\hbar^2$$

$$\tau_{\text{тр}}^{-1}(\varepsilon_F) = N_i m / (\pi \hbar^3) \int_{-\pi}^{\pi} d\theta (1 - \cos\theta) |V_q|^2$$

Пользуясь соотношениями $\hbar q = 2p_F \sin(\theta/2)$,

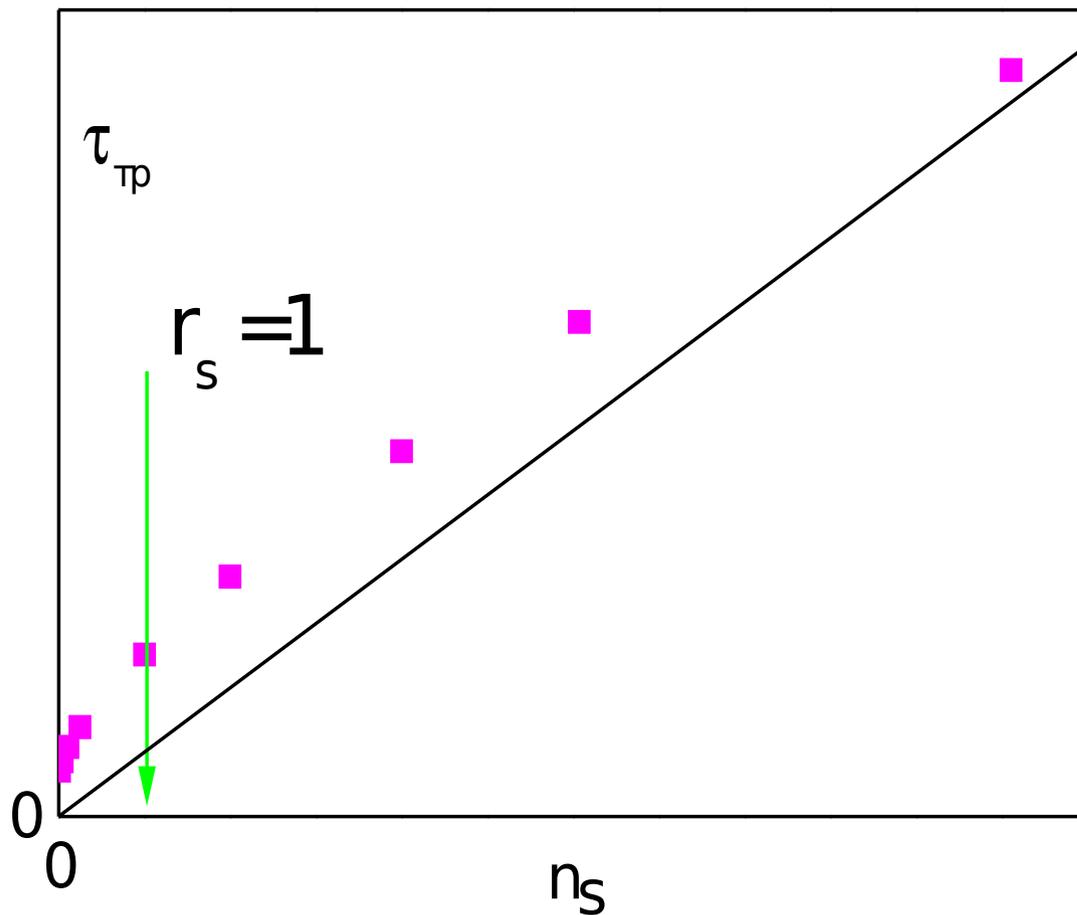
$(1 - \cos\theta) = 2\sin^2(\theta/2)$, $\hbar dq = p_F \cos(\theta/2) d\theta$,

$$x = \hbar q / 2p_F$$

$$\tau_{\text{TP}}^{-1} = \hbar^{-1} N_i/n_s [e^4 m/(\pi \hbar^2)] \int_0^1 x^2 (1-x^2)^{-1/2} (x+x_0)^{-2} dx$$

$$x = \hbar q/2p_F$$

$$x_0 = \hbar q_{\text{TF}}/2p_F$$



Рассеяние двумерных электронов на кулоновских центрах

Как видно из рисунка, при больших электронных плотностях ($r_s \ll 1$) время релаксации возрастает примерно пропорционально электронной плотности. Этот режим соответствует рассеянию на практически незранированном потенциале, поскольку основной вклад дает рассеяние на большие углы, для которых в подинтегральном выражении $x \gg x_0$. Для случая $r_s > 1$ полученное выражение формально неприменимо, однако, забавным образом, именно в этой области обычно находятся результаты эксперимента и довольно хорошо описываются полученным выражением. При больших электронных плотностях в реальных электронных системах за время релаксации ответственны другие механизмы рассеяния.

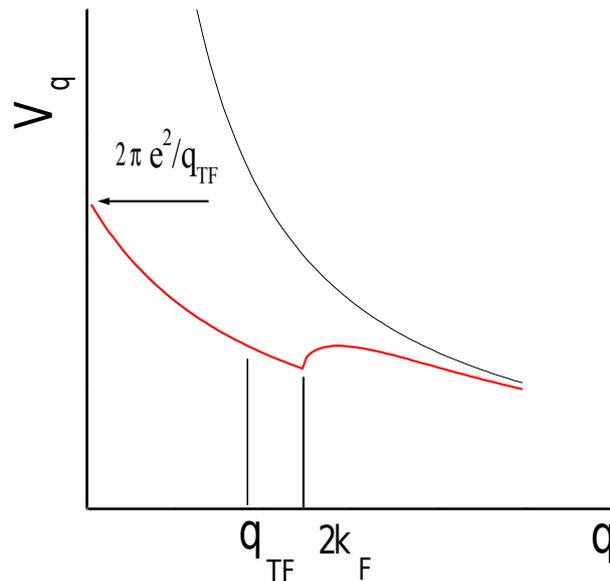
**Температурная зависимость
времени упругой релаксации в
двумерных электронных
системах.**

Температурная зависимость

При высоких температурах основным механизмом рассеяния электронов является неупругое рассеяние на фононах. По мере понижения температуры превалирующим становится упругое рассеяние на примесях. Вообще говоря, частота упругого рассеяния могла бы из-за конечности температуры и размытия фермиевской ступеньки иметь слабую температурозависящую добавку, пропорциональную $(kT/\varepsilon_F)^2$. Как будет показано ниже, в металлических двумерных системах температурная зависимость гораздо сильнее, а температурозависящая добавка пропорциональна kT/ε_F .

Температурная зависимость

По мере увеличения температуры растет число электронов с энергией, превышающей фермиевскую. Эти электроны способны рассеяться с передачей импульса больше, чем $2p_F$, а рассеяние с такой передачей импульса происходит на плохо экранированном потенциале. Доля электронов, участвующих в таких процессах рассеяния равна kT/ε_F , поэтому мы вправе ожидать, что именно этой величине будет пропорциональна относительная поправка к проводимости.



$$\tau^{-1} = N_i 2\pi \hbar^{-1} \int |V(\mathbf{q})|^2 \delta(\epsilon(\mathbf{k}) - \epsilon(\mathbf{k} + \mathbf{q})) d^2\mathbf{q} / (2\pi)^2.$$

Экранированный потенциал

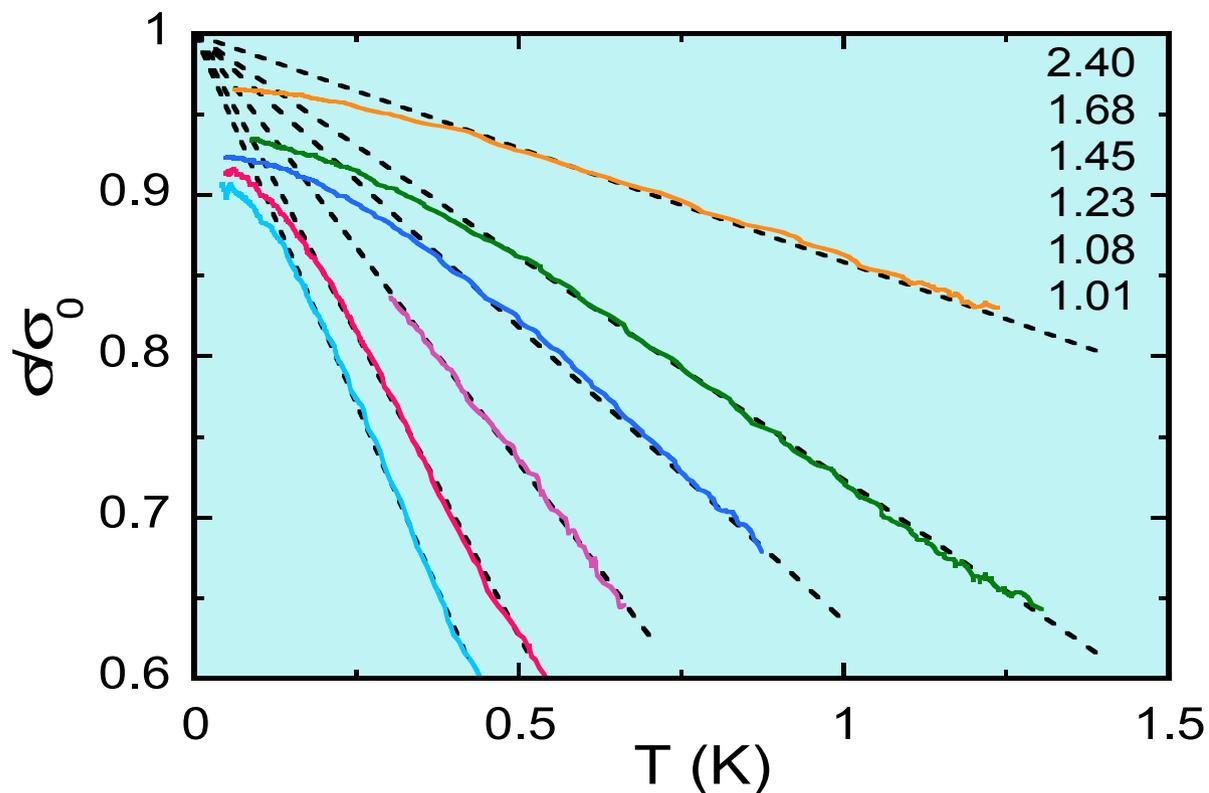
$$V(\mathbf{q}) = V_q = 2\pi e^2 / (q\epsilon(q))$$

Формула Кубо-Гринвуда

$$\tau(\epsilon_F, T) = (4kT)^{-1} \int d\epsilon \tau(\epsilon) \text{ch}^{-2}[(\epsilon - \epsilon_F)/2kT].$$

Полученное выражение для $\tau(\epsilon_F, T)$ следует вставить в обычную формулу для проводимости.

Легко видеть, что сингулярность в экранировании приведет к линейной поправке в (9.18) и к ожидаемому результату для проводимости.

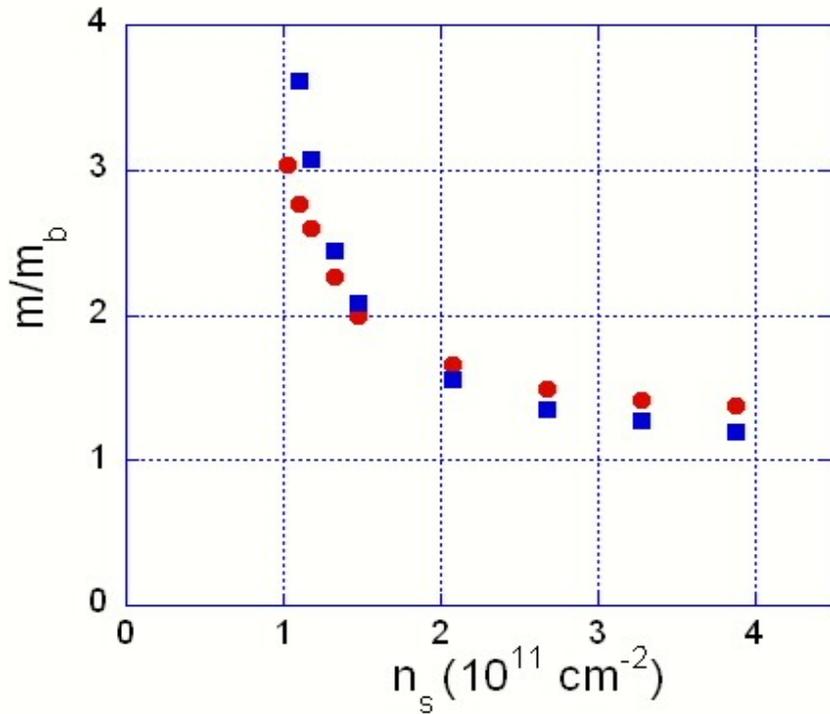


показаны измерения температурной зависимости проводимости двумерного электронного газа в высокоподвижной кремниевой структуре металл-диэлектрик-полупроводник. Цифры на рисунке обозначают электронную плотность в единицах 10^{11}см^{-2} .

На всех экспериментальных кривых прослеживаются линейные участки с наклоном, зависящим от электронной плотности.

Температурная зависимость

Таким образом, линейная температурная зависимость проводимости обусловлена рассеянием электронов на фриделевских осцилляциях, амплитуда которых возрастает при уменьшении электронной плотности. Данные рисунка 25 соответствуют $r_s=8$, а с учетом двухдолинности электронного спектра в исследованных кремниевых полевых структурах, отношение потенциальной энергии к кинетической в эксперименте достигало 16. Ясно, что с формальной точки зрения, это далеко за пределами применимости развитой теории. Тем более удивительно, что расчет дает не только правильное качественное описание, но и вполне разумное количественное.



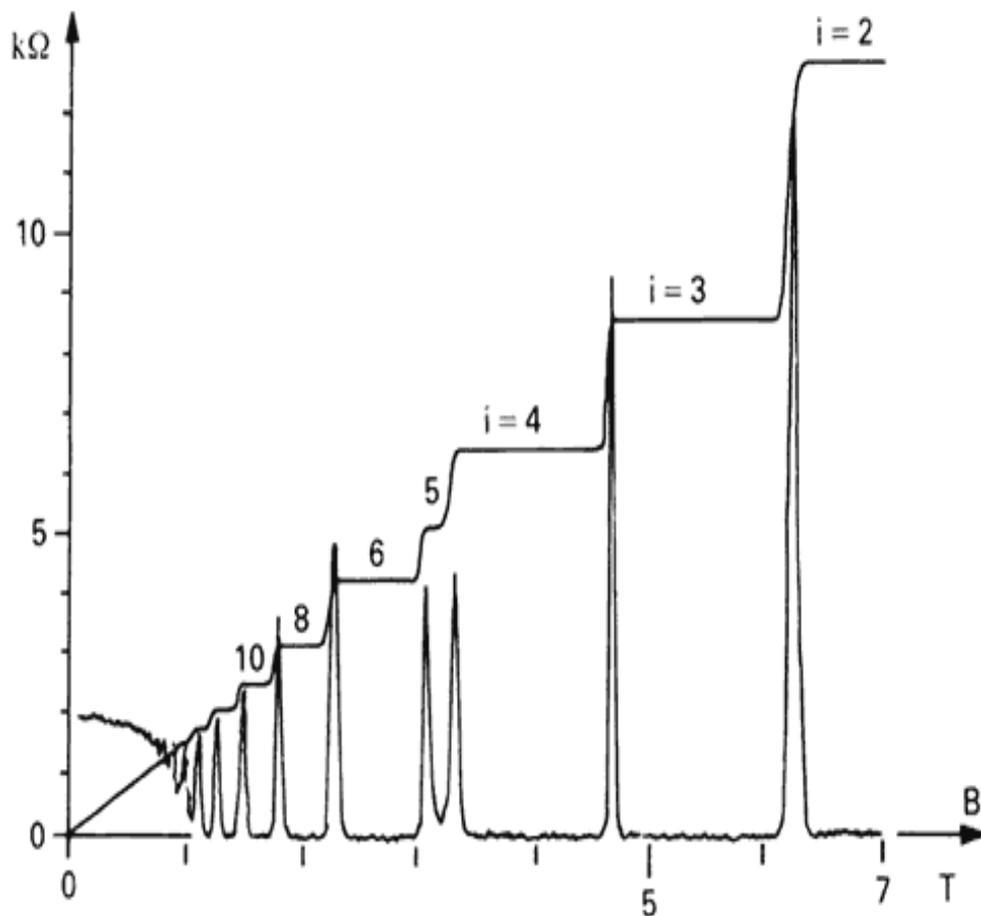
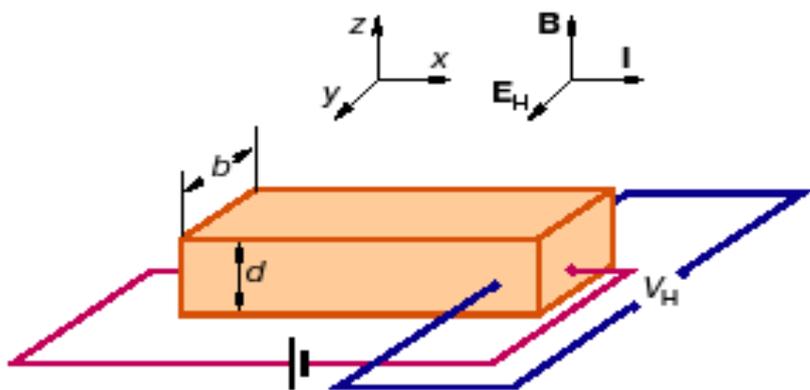
Встает естественный вопрос, неужели столь сильное взаимодействие никак не проявляется в физических свойствах электронной системы? Недавно было обнаружено аномальное возрастание эффективной электронной массы

Собственно говоря, это возрастание можно усмотреть и из внимательного анализа данных на рис, поскольку рост наклона на этом рисунке при уменьшении электронной плотности соответствует уменьшению фермиевской энергии более быстрому, чем ожидаемое

$$\varepsilon_F \propto n_s.$$

**Взаимодействующие
электроны в режиме
квантового эффекта Холла.**

Целочисленный квантовый эффект Холла



Квантование Ландау

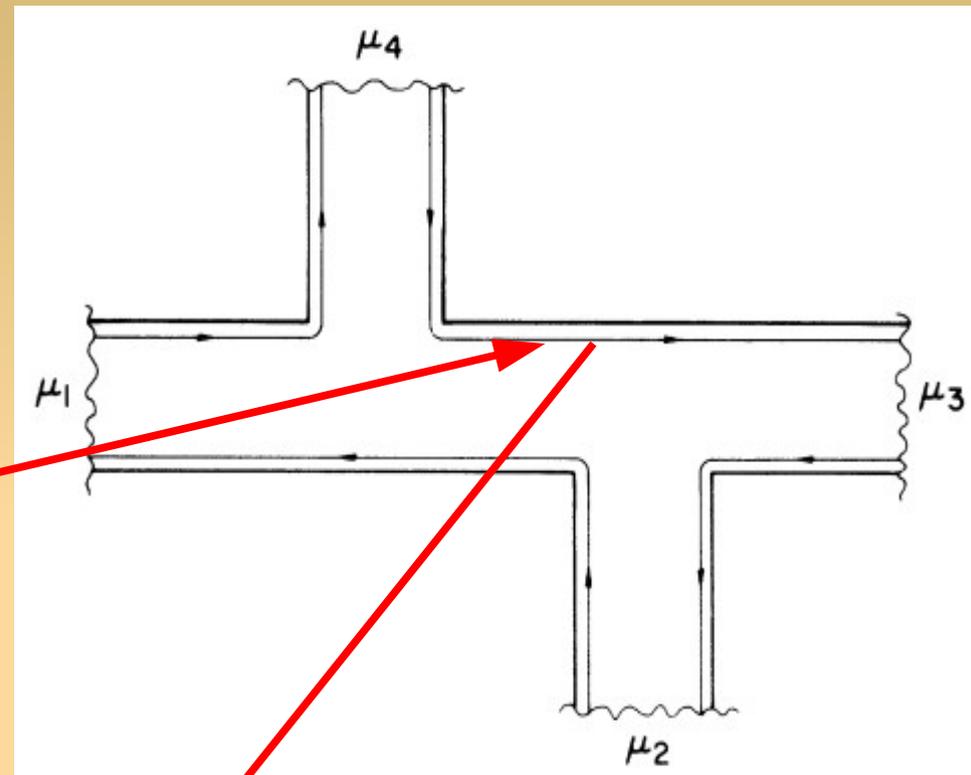
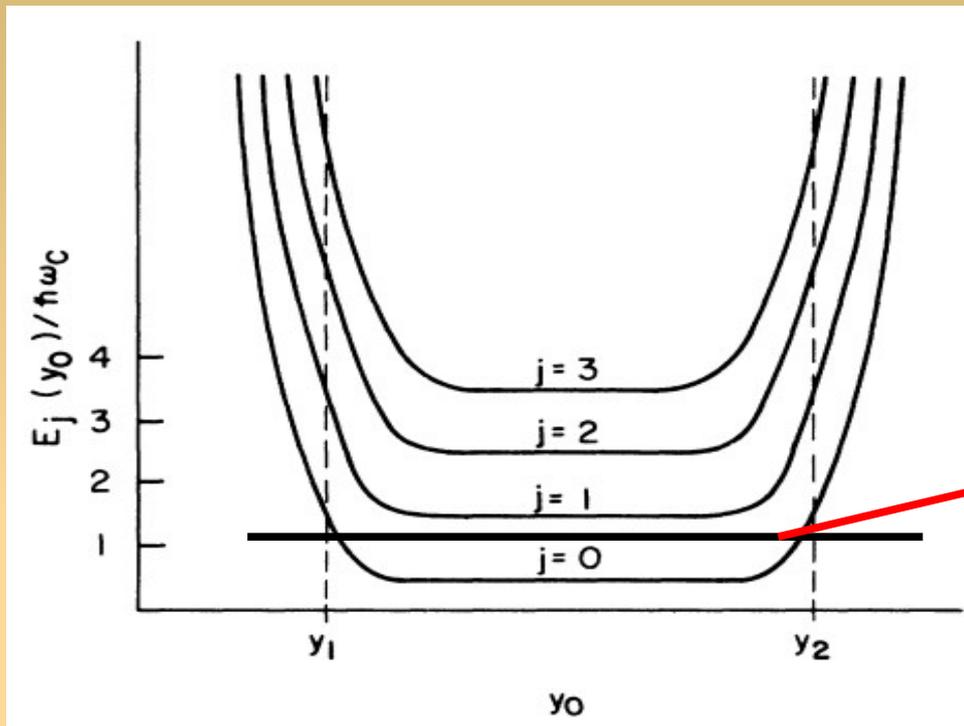
$$\mathbf{A}=(-Hy,0,0) \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{eH}{c} y \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m},$$

$$\psi = \exp \left(\frac{i}{\hbar} p_x x \right) \chi(y),$$

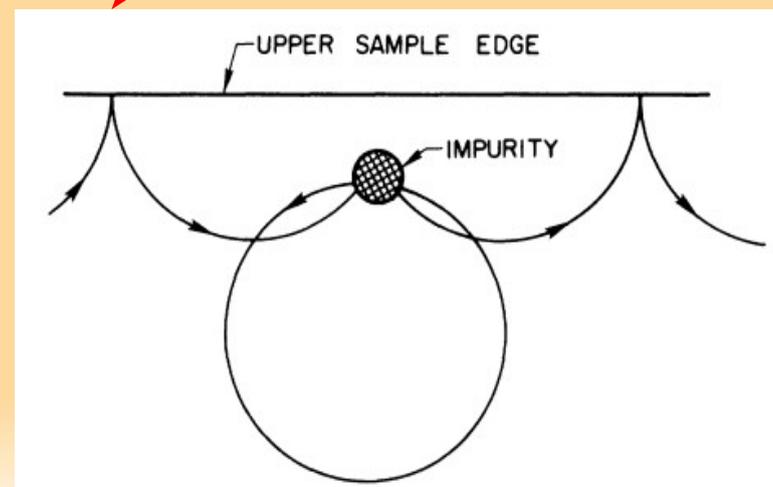
$$\chi'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left[E - \frac{m}{2} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 (y - y_0)^2 \right] \chi = 0,$$

$$E = \frac{|e|H}{mc} \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad y_0 = -cp_x / (eH) = -l_H^2 k_x$$
$$l_H = [c\hbar / (eH)]^{1/2}$$

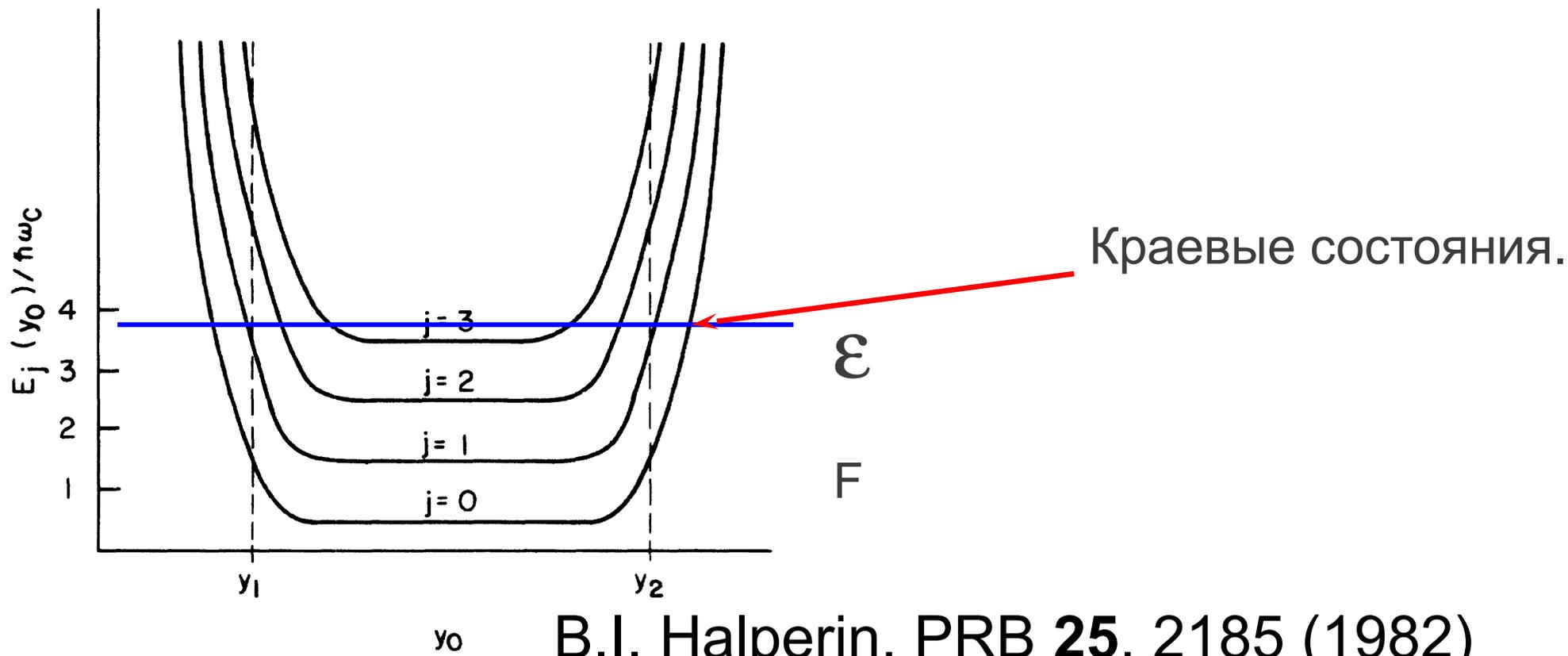
Край двумерной системы. Краевой ток



$$v_{jk} = \hbar^{-1} \frac{dE_{jk}}{dk} = \hbar^{-1} \frac{dE_{jk}}{dy_0} \frac{dy_0}{dk},$$



Краевой ток



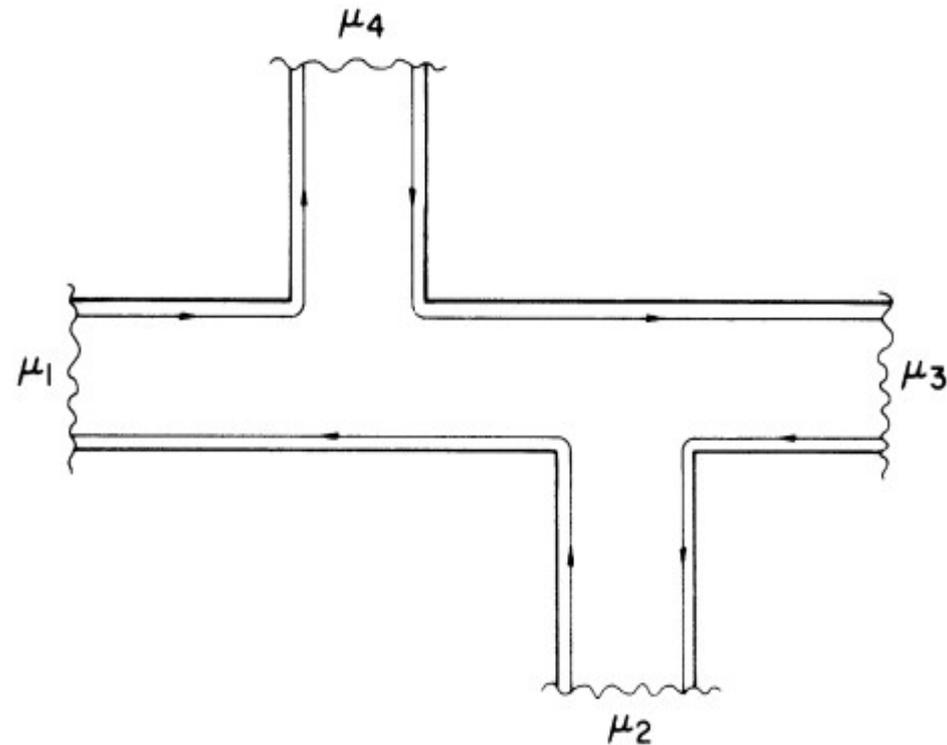
$$I = \int_{y_1}^{y_2} j \, dy = - \int_{k_1}^{k_2} j l_H^2 \, dk =$$

$$= \frac{e}{h} \int_{k_1}^{k_2} \frac{\partial E}{\partial k} \, dk = \frac{e}{h} \int_{\mu_1}^{\mu_2} dE = \frac{e}{h} (\mu_1 - \mu_2).$$

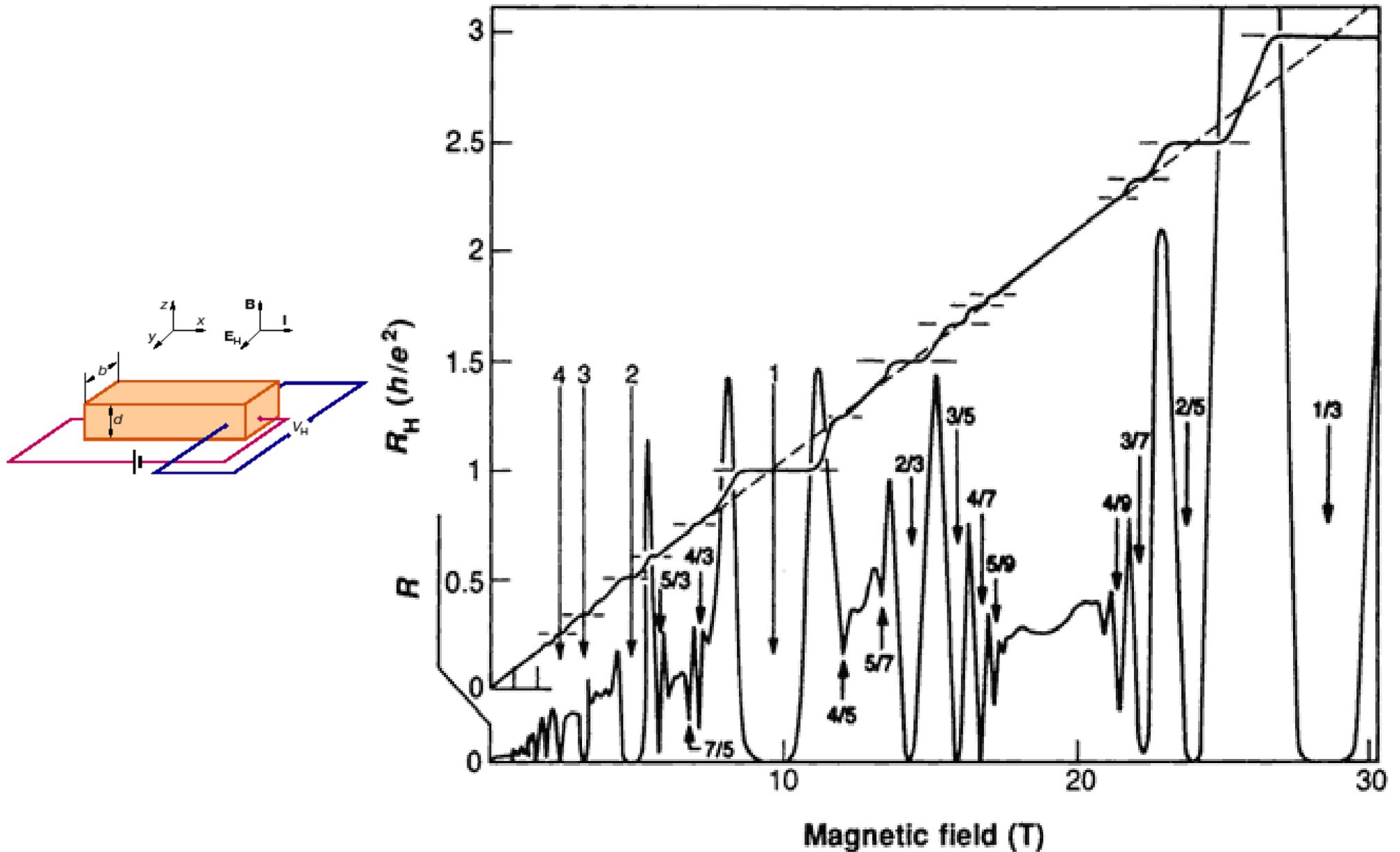
Формализм Бюттикера

Ток через контакт i

$$I_i = \frac{e}{h} \left(n_i \mu_i + \sum_{j \neq i} T_{ij} \mu_j \right),$$



Дробный квантовый эффект Холла



Дробный квантовый эффект Холла

- Плато в холловском сопротивлении

$$R_{xy} = h/\nu e^2, \nu = 1/3, 2/3, 2/5, 3/5, 4/5, \dots$$

- Зануление диагональной компоненты R_{xx}

Общий подход к пониманию

- Эффект вызван межчастичным взаимодействием
- Основное состояние – квантовая жидкость, а не вигнеровский кристалл

Два существующих подхода

- Вариационная волновая функция Лафлина
- Гипотеза о композитных фермионах

Теория Лафлина

R.B. Laughlin, PRB 27, PRL 52 (1983)

Лафлин предложил использовать для описания основного состояния в режиме дробного квантового эффекта Холла при $\nu = 1/3$ волновую функцию вида

$$\Phi_m(z) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \prod_k \exp(-|z_k|^2 / 4l_h^2)$$

где $z_i = x_i - iy_i$ - комплексная (в плоскости) координата частицы,
 l_h - магнитная длина.

Теория Лафлина

Эта волновая функция обладает следующими достоинствами:

- При $m = 1$ является точной волновой функцией полностью заполненного низшего уровня Ландау (для невзаимодействующих электронов)
- Антисимметрична по перестановке пары частиц при нечетном m (в силу степенного множителя $(z_i - z_j)^m$) - т.е. учитывает фермионную статистику
- Зануляется при приближении частиц друг к другу (показатель степени m определяет скорость зануления) - учитывает динамическое отталкивание частиц
- Является точной для систем с малым числом частиц ($N = 3 - 10$), что подтверждается численным расчетом (к этому утверждению надо относиться аккуратно, поскольку любое численное моделирование достаточно приближенно).

Теория Лафлина

Предположив, что волновая функция основного состояния имеет такой вид,

Лафлин провел вариационный расчет энергии основного состояния для дробных факторов заполнения типа

$$\nu = 1/(2k + 1), k = 1, 2, 3, \dots,$$

(так называемая основная лафлиновская последовательность)

используя m как вариационный параметр.

Теория Лафлина

Оказалось, что

- Энергия основного состояния минимальна при $m = 1/\nu = 3, 5, 7$ и в этих условиях ниже энергии основного состояния Вигнеровского кристалла (хотя при более низких ν считается что основное состояние Вигнеровского кристалла лежит ниже по энергии).
- Элементарные возбуждения отделены от энергии основного состояния щелью с характерным масштабом энергии $0.1e^2 / l_h$
- Элементарные возбуждения несут заряд $e/m = e\nu$.
- Из возбуждений с данным нечетным m можно сконструировать дочерние основные состояния с большим нечетным m - т.е. частично объясняется иерархия состояний в режиме ДКЭХ (данный результат получен уже не самим Лафлиным).

Гипотеза о композитных фермионах

Рассмотрим гамильтониан системы взаимодействующих электронов:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{(p_i + \frac{e}{c} A_i)^2}{2m_b} + \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j) + \sum_{i=1}^N U(r_i)$$

Идея метода состоит в том, чтобы заменить реальный гамильтониан на модельный.

Физически переход к модельному гамильтониану выполняется прикреплением к каждому электрону 2-х квантов магнитного потока, направленных против внешнего поля и выполняется точное преобразование исходного гамильтониана.

Гипотеза о композитных фермионах

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{(p_i + \frac{e}{c} A_i)^2}{2m_b} + \sum_{i \neq j} V(r_i - r_j) + \sum_{i=1}^N U(r_i)$$

Далее, магнитный потоки, привязанные к электронам "размазываются" по образцу, и рассматривается движение одной такой частицы (композитного фермиона) в среднем поле (фиктивном усредненном вектор-потенциале) всех остальных частиц и внешнем магнитном поле.

Член со взаимодействием в таком подходе не преобразуется (по этой причине не происходит преобразования эффективной массы - она остается зонной), и фактически далее не используется.

Гипотеза о композитных фермионах

Модельный гамильтониан запишется как

$$H_{CF} = \frac{(p + \frac{e}{c}A - \frac{e}{c}\langle a(r) \rangle)^2}{2m_b} + U(r)$$

где $\langle a(r) \rangle$ и есть фиктивный усредненный вектор-потенциал.

Заметим, что этот гамильтониан уже одночастичный и допускающий точное решение (известное как квантование Ландау).

$$\langle \mathbf{a}(\mathbf{r}) \rangle = 2\hbar \int d^2\mathbf{r}' \frac{\hat{\mathbf{z}} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \langle \rho(\mathbf{r}') \rangle,$$

Гипотеза о композитных фермионах

В результате новые частицы движутся уже в эффективном магнитном поле $B^* = B(1 - 2\nu)$,

для них возникают уровни Ландау, разделенные "циклотронной" энергией $\hbar e B^* / m c$

и дробный эффект Холла может быть описан как целочисленный квантовый эффект Холла для композитных фермионов.

Факторы заполнения электронов и композитных фермионов связаны как

$$\rho = \nu / (1 - 2\nu), \quad \rho = 1, 2, 3, \dots$$

Гипотеза о композитных фермионах

К достоинствам теории композитных фермионов следует отнести

легкость объяснения иерархии уровней в ДКЭХ,

легкое введение спина (как дополнительного Зеемановского расщепления уровней композитных фермионов),

введение нового характерного размера - обратного фермиевского импульса, который проявляется в экспериментах по фокусировке

Гипотеза о композитных фермионах

К недостаткам теории композитных фермионов следует отнести неправильный масштаб энергии возбуждения в режиме ДКЭХ (т.е. циклотронной энергии композитных фермионов $\hbar eV^*/mc$, если не предполагать преобразования эффективной массы, как и требует модельный гамильтониан).

С этой проблемой обычно справляются вводя эффективную массу композитных фермионов так, чтобы энергия возбуждения вела себя так же, как и в теории Лафлина (легко заметить, что эффективная масса при этом корневым образом зависит от магнитного поля).

Можно, по-видимому, считать, что опущенный при переходе к модельному гамильтониану член, описывающий взаимодействие, как раз и приводит к перенормировке эффективной массы. К сожалению, данный способ невозможно последовательно обосновать в рамках описываемого подхода композитных фермионов.