

Министерство образования и науки Российской Федерации
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(государственный университет)
ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ
КАФЕДРА ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА
Лаборатория квантовых кристаллов

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АКУСТИЧЕСКОЙ И КВАНТОВЫХ
ТУРБУЛЕНТНОСТЕЙ:
МЕТОДИКА ВОЗБУЖДЕНИЯ КВАНТОВОЙ
ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ПОМОЩЬЮ «TUNING FORK»
(КВАРЦЕВЫХ КАМЕРТОНОВ)

Выпускная квалификационная работа
студента 822 группы
Алескерова Имрана Арифовича

Научный руководитель
Ефимов Виктор Борисович, д.ф.-м.н.

г. Черноголовка

2012

Введение

В данной работе рассматривается методика генерации и исследования турбулентности в жидком гелии с помощью камертонов.

I. Общая постановка задачи

- 1) Исследовать свойства кварцевого камертона
- 2) Снять резонансные кривые для различных камертонов в различных средах
- 3) Посмотреть, как ток, текущий через камертон зависит от амплитуды подаваемого напряжения, что означает скорость движения концов камертона от сил, приложенных к нему
- 4) Исследовать переход жидкого гелия в турбулентное движение

II. Турбулентность

Турбулентность является одним из наименее понятных явлений в природе. Однако она встречается повсюду: в воздухе, в океанах, в межзвездном пространстве и даже при спуске воды в ванной. Но несмотря на её повсеместность, турбулентность очень плохо изучена.

1. Классическая турбулентность

1) Уравнение Навье-Стокса

Пусть $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ – скорость жидкости в некоторой точке как функция времени. $\rho(\mathbf{r}, t)$ – плотность в некоторой точке. Масса жидкости в некотором объеме $\int \rho dV$, тогда изменение массы можно написать как $\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$. Дифференцирование по времени можно внести под знак интеграла, так как объем предполагается фиксированным. Изменение массы жидкости может происходить только за счет втекания и вытекания её через границы объема. Полный поток жидкости (масса, вытекающая в единицу времени) равен $\int \rho(\mathbf{v}, ds)$.

Преобразуем этот интеграл по теореме Гаусса. Получим:

$$\int \rho(\mathbf{v}, ds) = \int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV$$

Так как вытекание жидкости из объема приводит к уменьшению её массы в данном объеме, имеем

$$\int \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dV = - \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \rho dV$$

В силу произвольности объема интегрирования должны быть равны подинтегральные выражения. Таким образом, получаем уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0$$

В случае несжимаемой жидкости $\rho = \text{const}$, поэтому уравнение непрерывности имеет вид $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$

Выведем теперь уравнение движения для жидкости. По 2му закону Ньютона необходимо приравнять ускорение единицы объема массы жидкости к её плотности. Скорость некоторого элемента жидкости является функцией времени и координат элемента,

которые в свою очередь тоже зависят от времени. Поэтому при вычислении ускорения необходимо взять полную производную по времени.

$$\frac{d\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}$$

Теперь нам необходимо вычислить силу, действующую на элемент жидкости. В случае идеальной жидкости никаких вязких сил нет. Также будем считать, что нет никаких внешних полей. Тогда единственный вклад будет вносить давление. Имеем силу, действующую на элемент объема жидкости:

$$\mathbf{f} = - \int p d\mathbf{s} = - \int \text{grad} p dV$$

Таким образом, сила, действующая на элемент объема жидкости равна $-\text{grad} p = -\nabla p$. Эту силу нужно приравнять ускорению элемента объема жидкости, умноженному на его массу. Последняя – это плотность ρ . Окончательно имеем следующее векторное уравнение:

$$\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho}$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера. Если учесть, что в жидкости присутствуют вязкие силы, то уравнение движения будет выглядеть так:

$$\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{v}$$

Это уравнение Навье-Стокса. Здесь $\nu = \eta/\rho$ – кинематическая вязкость. Уравнение Навье-Стокса нелинейно (в нем присутствует нелинейное слагаемое $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}$). Слагаемое $\nu \Delta \mathbf{v}$ называется вязким. В случае стационарного потока уравнение выглядит так:

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nu \Delta \mathbf{v}$$

Уравнение Навье-Стокса сложно решить аналитически. Для этого требуются очень большие вычисления даже для простой геометрии (напр., цилиндр или сфера). В случае сложной геометрии требования компьютерной мощности такие, что моделировать крупномасштабные турбулентные потоки уже не представляется возможным.

Число Рейнольдса

Пусть параметры системы заданы таким образом, что есть некоторая характерная скорость U , например, при обтекании тела потоком это есть скорость этого потока на бесконечности, а также некоторый характерный масштаб длины l (например, размер тела или трубы). Тогда порядок величины нелинейного слагаемого следующий: $(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} \sim U^2/l$. Порядок же вязкого члена есть $\nu U/l^2$. Тогда отношение нелинейного члена к вязкому (по порядку величины) есть

$$\text{Re} = \frac{UL}{\nu}$$

Эту безразмерную комбинацию называют числом Рейнольдса. Если это число мало, то основную роль в уравнении Навье-Стокса имеет вязкое слагаемое, и уравнение можно сделать линейным просто опустив нелинейное слагаемое. В противоположном предельном случае – большого числа Рейнольдса – основной вклад вносит именно нелинейность и можно опустить вязкое слагаемое. Тогда мы вернемся к уравнению Эйлера, что означает, что в большей части пространства жидкость движется как идеальная. Влияние вязкости начинает проявляться только в тонком слое вблизи твердых поверхностей. За счет нелинейного слагаемого вносится нестабильность в ламинарный поток и он в конце концов становится турбулентным.

Заметим, что в случае турбулентного потока за счет сил вязкого взаимодействия с поверхностью, небольшой поверхностный слой может и не быть турбулентным. Однако в случае сверхтекучей жидкости таких слоев быть не может (если нет нормальной компоненты).

2) Развитая турбулентность

Невозможно найти общее точное решение для уравнения Навье-Стокса, даже для систем с относительно простой геометрией в случае больших чисел Рейнольдса. Скорость испытывает нерегулярные изменения во времени, так и в пространстве. Можно, однако, сделать ряд весьма важных качественных заключений. Попробуем разобраться, что происходит в случае так называемой развитой турбулентности. Допустим, что мы производим накачку (например, размещивая жидкость) на некотором масштабе длины L . Заметим, что этот масштаб может отличаться от размеров генератора турбулентности, как в случае турбулентности на решетке. В данном случае L – размер ячейки, а не решетки. Если бы уравнения гидродинамики были линейными, то решением было бы распределение скорости, которое соответствует вихрю с размерами порядка L . В частности, если скорость U и масштаб L таковы, что мало соответствующее им число Рейнольдса – наблюдается именно такая картина. В случае больших чисел Рейнольдса нелинейность приведет к тому, что будут образовываться вихри более мелких масштабов. Понятно, что на некотором достаточно малом масштабе η_d вязкость начнет играть роль и будет происходить существенная диссипация энергии. Этот масштаб называется вязким. Если есть существенный зазор между масштабом накачки и вязким масштабом, то в промежуточной области энергия будет непрерывно передаваться от больших масштабов к малым. Эта промежуточная область носит название инерционного интервала, а передача энергии от области возбуждения в область, в которой происходит диссипация энергии – каскадом (прямым).

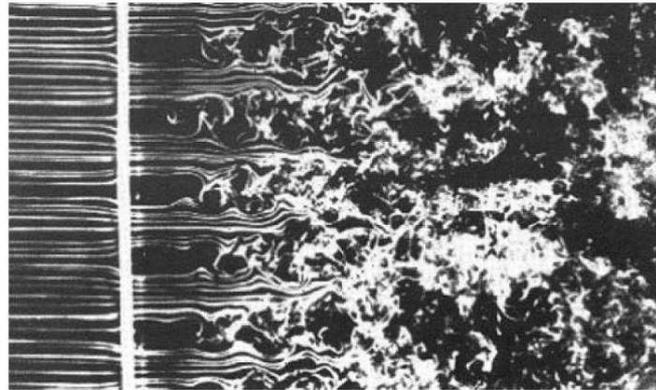
Как уже было сказано выше, невозможно точно описать свойства движения в турбулентном течении, в частности, невозможно определить точный характер распределения скоростей на произвольных масштабах. Можно, однако, сделать некоторые оценки. Рассмотрим свойства поля скоростей в инерционном интервале, то есть будем интересоваться разностями скоростей на масштабах много меньше размера накачки, но много больших вязкого масштаба. Рассмотрим поведение средней разности скорости v_l на расстояниях порядка l . Так как число Рейнольдса для этих масштабов большое, то вязкость не может оказать существенного влияния на движение, соответственно, разность скоростей не может зависеть от вязкости. Далее, как было сказано выше, в инерционном интервале происходит непрерывная перекачка энергии с больших масштабов на малые, диссипация на инерционных масштабах мала. Это значит, что на всех масштабах внутри инерционного интервала имеет смысл величина непрерывно «прокачиваемой» энергии, которая постоянна для этих масштабов в силу её сохранения. Принято пользоваться энергией, диссипируемой в единицу времени в единице массы жидкости ε . Эта величина имеет размерность $\text{см}^2/\text{с}^3$. Таким образом, разность скоростей на некотором масштабе l может зависеть только от ε и от самого этого масштаба. Однако, из этих величин можно составить только одну величину с размерностью скорости. Таким образом, мы получаем следующую оценку:

$$v_l \sim \varepsilon^{\frac{1}{3}} l^{\frac{1}{3}}$$

Наличие нелинейного слагаемого приводит к тому, что поле скоростей может меняться таким образом, что возбуждение скорости на каком-то пространственном масштабе постепенно будет передавать энергию на другие масштабы.

3) Колмогоровский спектр

Рассмотрим ситуацию в момент времени $t = 0$, когда энергия, введенная в систему, содержащую шкалу длины $l(t)$, и передающуюся в обоих направлениях: к большим вихрям, максимальный существующий размер которых равен размеру резервуара D , и к маленьким вихрям, наименьший размер которых равен колмогоровской длине η_d . Спустя конечное время $t = t_0$, когда масштаб достигает длины D (и больше не может увеличиваться), на котором находится большая часть энергии турбулентного движения, наступает стационарное состояние.



Турбулентность, создаваемая сеткой в классической жидкости

Для пространственно однородной изотропной турбулентности (например, турбулентный след на больших дистанциях от сетки) среднее распределение энергии на единицу массы $E(k)dk$, в пределах инерционного интервала для длин волны от k до $k + dk$ определяется выражением Колмогорова

$$E(k)dk = C\epsilon^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} dk$$

Где $k = 2\pi/l(t)$ и C – константа, значение которой из эксперимента ~ 1.5 . Заметим, что это уравнение не зависит от механизма, по которому энергия диссипирует при $k = k_d = 2\pi/\eta_d$. Этот каскад энергий внутри инерционного интервала называется каскадом Ричардсона.

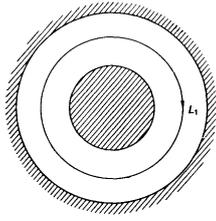
2. Квантовая турбулентность (КТ)

Квантовой турбулентностью обычно называют турбулентность в гелии-II ниже λ -точки. Однако более строгое определение КТ – турбулентность сверхтекучей компоненты гелия-II. Она отличается от классической в том смысле, что классические турбулентные вихри заменены на неупорядоченную систему квантовых вихревых линий в сверхтекучей жидкости. Она часто описывается в терминах «вихревого клубка» (“vortex tangle”).

1) Понятие квантовых вихрей.

Описание сверхтекучей жидкости с помощью волновой функции $|\psi| \exp(iS)$ приводит к следующему выражению для плотности потока

$$\mathbf{j}_s = \hbar |\psi|^2 \nabla S$$



Пусть He-II заполняет кольцевую область, например, пространство между двумя concentрическими окружностями. Контур L_1 полностью находится в сверхтекучей жидкости. Предположим, что температура равна абсолютному нулю, так что He-II состоит только из сверхтекучей компоненты. Для нахождения картины течения рассмотрим величину, известную как циркуляция:

$$\chi = \oint_{L_1} \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{l}$$

Где интеграл берется по любому контуру, полностью находящемуся в жидкости. Применяя к волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ оператор импульса $-\hbar\nabla$, можно показать, что сверхтекучая скорость может быть записана в виде

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S$$

Где m_4 – масса ^4He . Следовательно, циркуляцию можно вычислить через фазу волновой функции:

$$\chi = \frac{\hbar}{m_4} \oint_{L_1} \nabla S \cdot d\mathbf{l}$$

Для окружности L_1 , изображенной на рисунке, циркуляция равна

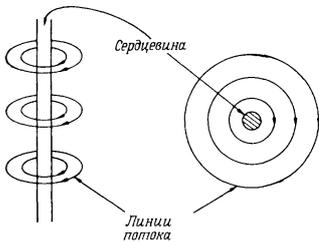
$$\chi = \frac{\hbar}{m_4} (\Delta S)_{L_1}$$

Поскольку волновая функция сверхтекучей жидкости однозначна, обход по замкнутому контуру её не изменит. Следовательно, значение фазы может быть только кратным 2π или равным нулю. Таким образом, из последнего уравнения видим, что циркуляция квантуется, принимая значения

$$\chi = n \frac{h}{m_4}, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots$$

Величину $h/m_4 = 9.98 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ называют квантом циркуляции. Квантование справедливо для любого контура, который можно деформировать в L_1 , не выходя за границы жидкости.

Кольцевая область представляет собой пример многосвязной области, поскольку в этом случае можно считать, что в сверхтекучей жидкости имеется отверстие. Наличие таких отверстий, куда не может проникать жидкость, обеспечивает наличие контуров типа L_1 . Как мы уже видели, это является достаточным условием для квантования циркуляции.



При вращении He-II в сверхтекучей жидкости могут спонтанно возникать цилиндрические отверстия; тогда вокруг этих цилиндров возникают устойчивые потоки. В этом случае мы фактически наблюдаем возникновение вихревых линий. На рисунке показаны вихревая нить в He-II и поперечное сечение вихревой нити.

Квантованные вихри в He-II.

Когда для He-II впервые была предложена двухжидкостная модель, существовало мнение, что сверхтекучую компоненту очень трудно привести во вращение, поскольку сверхтекучий поток характеризуется условием отсутствия вихрей: $\text{rot } \mathbf{v}_s = 0$. Пользуясь теоремой Стокса, можно показать, что циркуляция по любому контуру в сплошной жидкости равна нулю. Кроме того, все контуры можно стянуть в одну точку, поскольку жидкость заполняет односвязную область. Следовательно, циркуляция будет равна нулю

только если $v_s = 0$. Таким образом, если по всей сверхтекучей жидкости выполняется условие $\text{rot } v_s = 0$, то вращение невозможно.

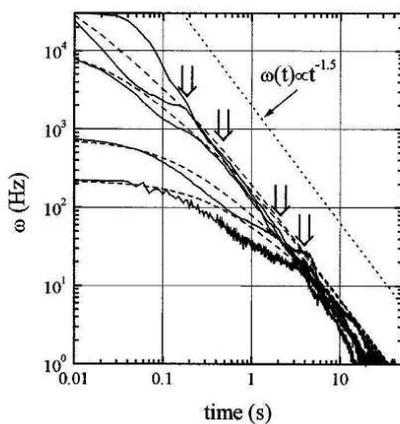
Однако, Осборн, вращая цилиндрический сосуд с He-II, обнаружил, что мениск имеет такую же форму, как у обыкновенной жидкости, вращающейся как целое. Это означало, что сверхтекучая и нормальная компоненты движутся с одной и той же угловой скоростью.

Вращение сверхтекучей компоненты можно успешно объяснить, предположив, что она пронизана рядом вихревых нитей. Для контуров, окружающих сердцевину вихря, циркуляция квантуется точно так же, как и для твердого препятствия (подобно контуру L_1 для цилиндра). Под сердцевиной вихря можно понимать ту область, в которой $\text{rot } v_s \neq 0$.

2) Квантовая турбулентность при $T > 1\text{K}$

При температуре выше 1К турбулентность в гелии-II может быть связана с обеими компонентами: нормальной и сверхтекучей. Один из способов вызвать турбулентность состоит в распространении постоянного теплового потока, который создаст встречный поток нормальной и сверхтекучей скорости. При достаточно высоком тепловом потоке течение становится турбулентным, и это можно обнаружить с помощью датчиков второго звука. Термически вызванная турбулентность известна как турбулентность обратного потока (counterflow turbulence) и была обнаружена Вайненом (Vinen). Однако, данная турбулентность не имеет классической аналогии, и поэтому её исследование не дает нам понимания, как связаны квантовая и классическая турбулентность. В серии экспериментов Доннелли (Oregon group) КТ была вызвана прямоугольной сетчатой решеткой, двигающейся в гелии-II с постоянной скоростью. Временной распад вихревого клубка с плотностью линий L был измерен с помощью затухания второго звука. Измеренная

завихренность ω ($=\kappa L$) оказалась пропорциональна $t^{-\frac{3}{2}}$. Эта зависимость показана на рисунке (штриховыми линиями показаны подгоночные кривые $t^{-\frac{3}{2}}$):



Эта характеристика распада очень важна, поскольку она связана с колмогоровским спектром. Предполагая, что скорость диссипации на единицу массы

$$\epsilon = \nu' (\kappa^2 L^2)$$

можно показать, что колмогоровский энергетический спектр можно свести к $\omega \sim t^{-\frac{3}{2}}$

Сравнивая ϵ это с уравнением $\epsilon = \nu \langle \omega^2 \rangle$, видим, что $\kappa^2 L^2$ эквивалентно $\langle \omega^2 \rangle$, а ν' - эффективная кинематическая вязкость, значение которой выбрано, чтобы соответствовать степенному закону $-3/2$.

Пояснение и механизм диссипации.

Чтобы пояснить колмогоровский вид распада в гелии-II, Джо Вайнен показал, что частичная поляризация вихревого клубка приводит к квазиклассическому потоку на больших масштабах длин. Вместе с тем, сверхтекучая и нормальная компоненты связаны вместе в широком диапазоне масштабов $1/k$ в инерционном интервале, это означает, что между ними двумя присутствует ненулевое трение и отсюда ненулевая диссипация энергии в инерционном интервале. На масштабах порядка межвихревого расстояния

$\delta \approx L^{-\frac{1}{2}}$ в жидкости должны преобладать квантовые эффекты, которые будут разъединять квантовые жидкости, и турбулентность будет затухать частично за счет взаимного трения между вихревыми линиями и частично за счет вязкости нормальной компоненты

3. Образование ядра вихря и остаточные вихри

До сих пор мы не рассматривали образование вихрей. Вайнен показал, что для образования вихря в сверхтекучей жидкости необходимо преодолеть энергетический барьер. Этот барьер возникает за счет взаимодействия вихря и его изображения (возникающего за счет ограничивающей стены). Это так называемый внутренний механизм образования ядра и требуется скорость потока порядка 50 м/с, чтобы преодолеть этот барьер. (Экспериментально исследовали Хендри и др.)

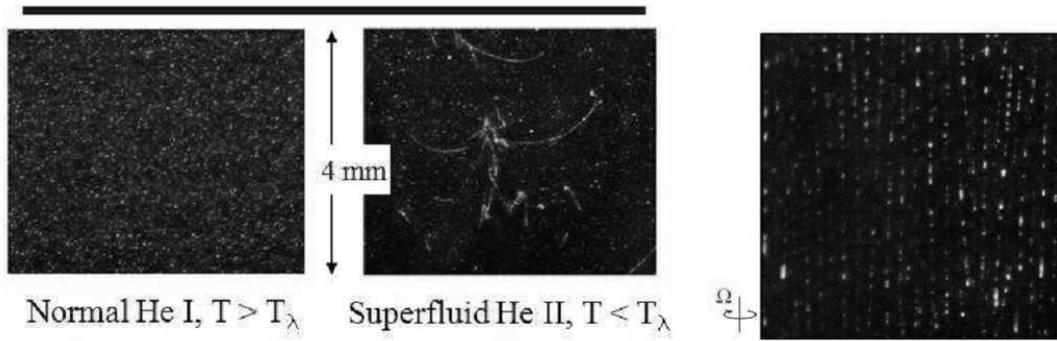
Однако, большинство наблюдаемых скоростей находятся в пределах от мм/с до см/с. Считается, что процесс образования вихря скорее внешний, чем внутренний. Это означает, что вихри вырастают из уже существующих вихрей (так называемых остаточных вихрей), присутствующих в сверхтекучем гелии в результате λ -перехода (где кипящий гелий-I резко превращается в спокойный гелий-II).

Первая экспериментальная проверка остаточных вихрей была сделана Аушаломом и Шварцем (Awschalom and Schwarz), где авторы наблюдали ток, вызванный захваченными ионами, которые были закреплены на вихревых линиях между параллельными поверхностями в резервуаре с невозмущенным гелием. Они оценили плотность вихревых линий как

$$L_R \leq \frac{2 \ln\left(\frac{D}{a_0}\right)}{D^2}$$

где D – расстояние между параллельными поверхностями, либо размер канала, a – среднее расстояние между линиями. Уравнение подразумевает, что в углах, где расстояние D очень маленькое, плотность линий очень большая.

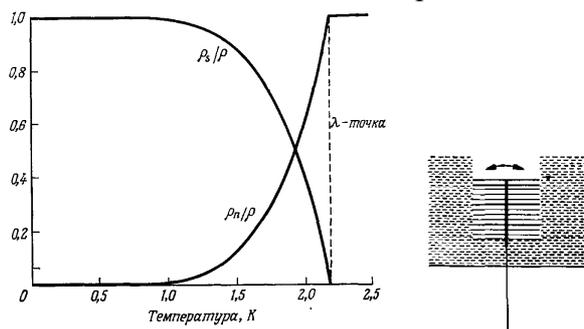
Красивая демонстрация (G. P. Bewley, D. P. Lathrop, and K. R. Sreenivasanan, 2006), показывающая наличие вихрей в сверхтекучем гелии была сделана с помощью техники визуализации потока. Твердые частицы водорода были использованы для визуализации (в 3D) жидкого гелия в оптическом криостате. Как показано на рисунке, при понижении температуры жидкого гелия ниже λ -точки, в ванной с гелием-II возникают вихри. При вращении резервуара они ориентированы вдоль оси.



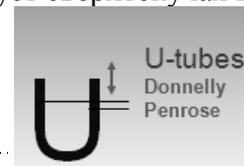
III. Колеблющиеся объекты, используемые для изучения жидкого гелия

Для исследования свойств жидкого гелия, в частности He-II могут использоваться следующие колеблющиеся объекты:

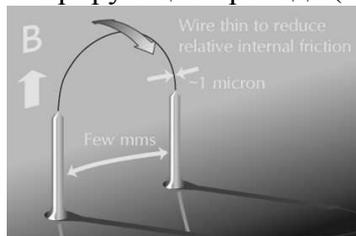
1. Диски или стопки дисков, как в экспериментах Андроникашвили. Он заметил, что при вращении стопки дисков на крутильной нити при переходе гелия в сверхтекучее состояние период осцилляций резко падал, поскольку сверхтекучая компонента не оказывает влияния на крутильный маятник. Измеряя период, можно непосредственно измерить отношение плотности нормальной компоненты к плотности всей жидкости. Андроникашвили получил следующие результаты



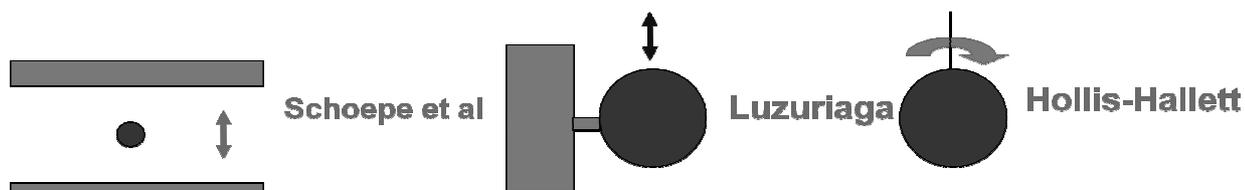
Как видим, при температуре ниже 1К в He-II доминирует сверхтекучая компонента.



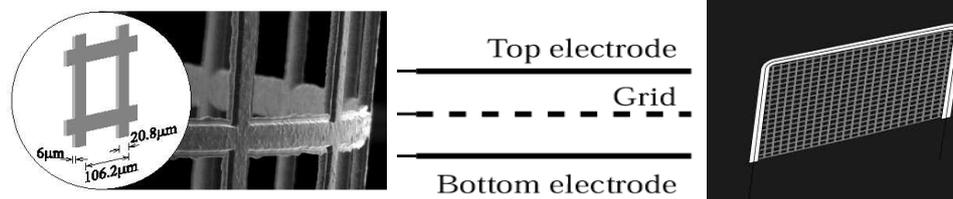
2. U-образные трубки использовали Донелли и Пенроуз.
3. Вибрирующие провода (Lancaster – Pickett's group, Osaka – Yano et al.),



4. Сферы



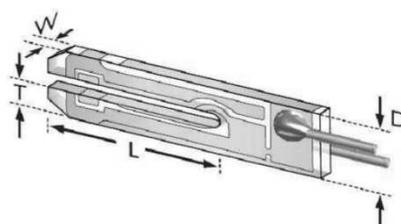
5. Движущиеся сетки



Первые две картинке соответствуют экспериментам P. McClintock's group – Lancaster, на последней картинке сетка колеблется вправо-влево (похоже на то, как движется зубец камертона) – это эксперименты G. Pickett's group - Lancaster

IV. Метод измерения и генерации турбулентности с помощью tuning fork.

Tuning fork может быть использована для исследования свойств окружающей среды, в частности, жидкого гелия. Схема и конструкция стандартного камертона показана на рисунке:



Камертон характеризуется его длиной L , шириной W и шириной T одного из его зубцов. Расстояние $(D - 2T)$ также является важным параметром, поскольку от него зависит плотность остаточных вихрей между зубцами.

Кварц (плотность $\rho_q = 2659 \text{ кг/м}^3$) – пьезоэлектрическим кристалл. К камертону подсоединены два электрода. Если через них подать напряжение, то в силу пьезоэлектрических свойств возникнет сила, которая будет двигать зубцы камертона в противофазе. Камертоны производятся серийно в электронной промышленности как стандарт частоты электронных часов и стоят очень дешево. Обычно они имеют стандартную резонансную частоты 2^{15} Гц (около 32768 Гц, поэтому часто говорят камертон на 32 кГц) в вакууме. Его добротность составляет порядка 10^5 в вакууме. Высокая добротность делает их чувствительными к очень маленьким силам (порядка пН).

Преимущество камертона для исследования жидкого гелия заключается в том, что для движения камертона не требуется магнитного поля, и они крайне нечувствительны к любым внешним магнитным полям. В большинстве исследований камертон можно очень легко установить и использовать. Чтобы управлять и считывать данные с камертона, необходимо всего два провода

Камертоны обычно выпускаются в герметичной вакуумной оболочке. Для его использования в качестве датчика в гелии, оболочка может быть удалена частично (путем проделывания небольшого отверстия в верхней части) или же полностью в зависимости от требуемого применения. Заметим, что поперечное сечение на конце зубцов для камертона на 32 кГц не совсем прямоугольное (см. рис.). Внешние границы заостряются к концу под некоторым углом для подгонки частоты к 32768 Гц

1. Зачем используются камертоны при изучении жидкого гелия?

1) У осциллирующих измерительных приборов за исключением камертонов, используемых для исследования квантовых жидкостей, резонансная частота обычно порядка 1 кГц или меньше. Действие высокочастотных осцилляторов в жидком гелии всё ещё не изучено, и камертоны определенно могут предоставить способность разобраться в сущности вопроса. Зубцы камертона с лёгкостью могут достигать скорости 2 м/с без повреждений. При такой скорости может быть изучен феномен кавитации (возникновения пустот). С помощью других приборов невозможно получить такие высокие значения скорости.

2) Камертоны имеют малый размер (порядка нескольких миллиметров). Они доступны и могут обладать частотами от 4 кГц до МГц. Широкий диапазон частот этих резонаторов может быть использован для измерения частотной зависимости критической скорости, при которой сверхтекучая жидкость становится турбулентной.

3) Камертоны обладают высокой добротностью и малой массой

2. Механические свойства камертона

При достаточно малых амплитудах колебаний камертон может быть описан как гармонический осциллятор, на который действует внешняя гармоническая сила $F = F_0 \cos(\omega t)$ и сила сопротивления, линейно зависящая от скорости. Тогда уравнение движения

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}, \text{ где}$$

m – эффективная масса (одного зубца);

γ – коэффициент сопротивления;

k – жесткость;

F_0 – амплитуда внешней силы.

Эффективная масса и коэффициент сопротивления зависят от среды, в которой находится камертон. Решение этого уравнения есть

$$x(t) = x_a(\omega) \sin(\omega t) + x_d(\omega) \cos(\omega t), \text{ где}$$

x_a – поглощение (absorption);

x_d – рассеяние (dispersion);

Значение поглощаемой мощности $\left\langle F \frac{dx}{dt} \right\rangle = F_0 \omega \frac{x_a}{2}$ максимально при резонансной

частоте $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Удобно ввести добротность $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ как отношение резонансной частоты ω_0 к ширине

$\Delta\omega = \gamma$, где $\Delta\omega$ – ширина резонансной кривой на половине максимальной мощности. Напомним, что камертон характеризуется его длиной L , шириной W и шириной T одного из его зубцов. Коэффициент жесткости можно посчитать по формуле

$$k = \frac{1}{4} E W \left(\frac{T}{L} \right)^3$$

Где E – модуль упругости, для кварца $E_q = 7.87 \cdot 10^{10}$ Н/м², эффективная масса одного зубца в вакууме $m_{vac} = 0.24267 \rho_q LWT$, где $\rho_q = 2659$ кг/м³ – плотность кварца (из работ К. Karrai: 10. K. Karrai and R. D. Grober, Tip-sample distance control for near-field scanning optical microscopes, in Near-Field Optics, M. A. Paesler and P.T. Moyer (ed.), Proc. SPIE 2535, 69 (1995). K. Karrai, lecture notes (2000) at <http://www.nano.physik.uni-muenchen.de/publikationen/Preprints/p-00-03Karrai.pdf>)

3. Электрические свойства и калибровка.

Пусть камертон возбуждается напряжением $U = U_0 \cos(\omega t)$ и частота медленно проходит через резонанс. Сигнал, полученный от камертона – ток, вызванный пьезоэлектрическим эффектом. За счет отклонения зубцов камертона возникают заряды и, таким образом, ток пропорционален производной отклонения камертона, то есть скорости:

$$I(t) = a \frac{dx(t)}{dt},$$

где a – электромеханическая константа камертона. Теоретически в работах К. Karrai этот коэффициент рассчитывается по формуле

$$a = 3 d_{11} E \left(\frac{TW}{L} \right)$$

$d_{11} = 2.31 \cdot 10^{-12}$ м/В – продольный пьезоэлектрический модуль кварца. Для стандартных кварцевых камертонов размером 3 мм по этой формуле получается значение $a = 2.47 \cdot 10^{-5}$ Кл/м. В криогенной установке, где камертон находится в маленьком контейнере, прямые методы измерения константы a затруднительны. Вместо этого можно произвести калибровку путем сравнения нашего механического резонатора с эквивалентным RLC -контуром. Соответствующее дифференциальное уравнение для тока:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L} \frac{dU}{dt}$$

Сравнивая его с механическим дифференциальным уравнением, видим, что

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad \gamma = \frac{R}{L}, \text{ и, используя определение константы } a, \quad \frac{1}{L} = \frac{F_0}{U_0} \frac{a}{m},$$

Дополнительно мы имеем условие, что рассеиваемая мощность в резонансе должна быть одной и той же в обоих уравнениях. Электрическая мощность $U_0^2/(2R)$ приводит в движение зубцы камертона, которые рассеивают энергию $2F_0^2/(2m\gamma)$. Таким образом, получаем систему уравнений, которая позволит нам связать электрические и механические свойства камертона через константу a :

$$F_0 = \frac{a}{2} U_0$$

$$R = \frac{2 m \gamma}{a^2}$$

$$L = \frac{2m}{a^2}$$

$$C = \frac{a^2}{2k}$$

Пользуясь формулой $R = 2m\gamma / a^2$, можно найти электромеханическую константу. Замечая, что $\gamma = \Delta\omega$, получаем:

$$a = \sqrt{\frac{2m\Delta\omega}{R}},$$

где $1/R$ – наклон зависимости $I_0(U_0)$, I_0 – амплитуда тока в резонансе, $\Delta\omega$ – ширина резонансной кривой. Из эксперимента нельзя непосредственно найти m . Однако, теоретическое значение кажется довольно надёжным из-за близкого соответствия между теоретическими и экспериментальными значениями резонансной частоты.

Ток, текущий через камертон, описывается уравнением:

$$I(\omega) = I_a \cos(\omega t) + I_d \sin(\omega t)$$

В нашем эксперименте компоненты I_a и I_d находятся отдельно при помощи поворота фазы на Unipap .

4. Влияние окружающей среды на колебания камертона

В присутствии жидкости сила сопротивления, действующая на камертон, возрастает (в добавок к внутреннему поглощению); во-первых, за счёт присоединённой (гидродинамической) массы и, во-вторых, из-за вязкости жидкости. Пока не будем вдаваться в подробности, скажем лишь, что при внесении камертона в окружающую среду связь между резонансными частотами для камертона в некоторой среде и резонансная частота связаны соотношением^[1]:

$$f_l^2 = f_{vac}^2 \left(\frac{m_{vac}}{m} \right)$$

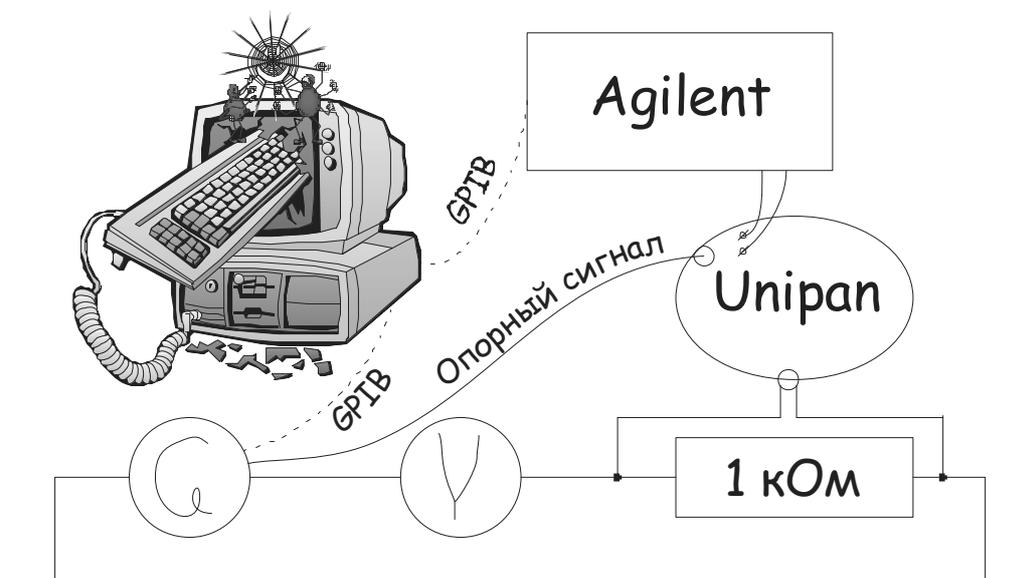
Где m_{vac} – эффективная масса в вакууме, m – в окружающей среде, f_l – резонансная частота, f_{vac} – резонансная частота в вакууме. Из этой формулы видно, что при погружении камертона в некоторую среду резонансная частота падает. Ширина резонансной кривой находится по формуле^[1]

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho\eta f_l}{\pi}} C S \frac{(f_l/f_{vac})^2}{m_{vac}}$$

Где ρ – плотность, η – вязкость, S – площадь поверхности зубца камертона, C – константа, зависящая от геометрии объекта (для камертона её сложно определить аналитически, поэтому её находят экспериментально)

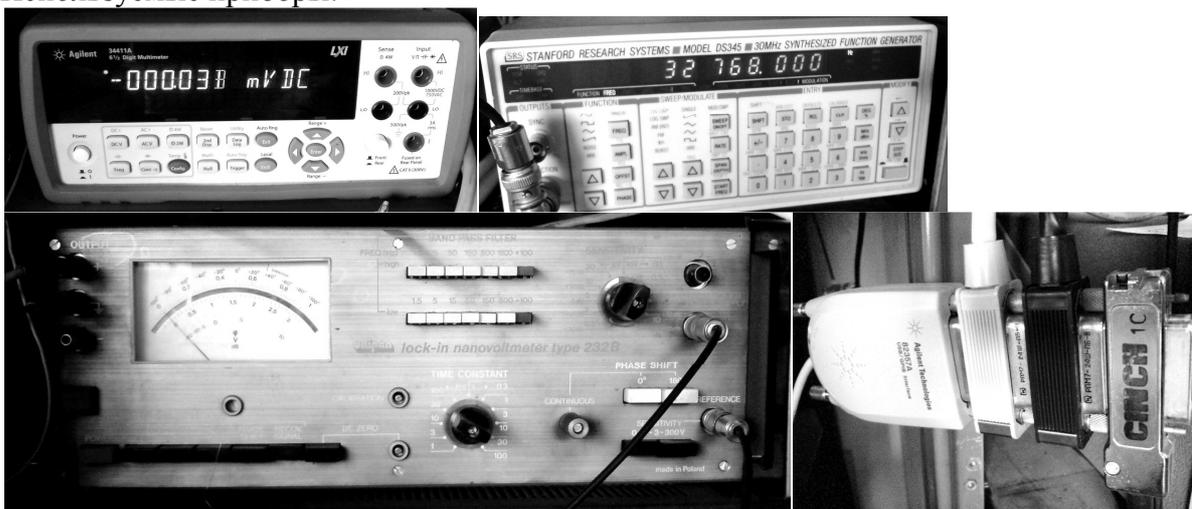
V. Измерения

1. Схема измерений



Параллельно соединенные конденсатор и резистор на 1 кОм подключены к генератору. Сигнал снимаем с резистора при помощи фазочувствительного нановольтметра Unipan 232В. Так как Unipan нельзя подключить к компьютеру через GPIB, к его выходам подключаем мультиметр Agilent 34411А, затем данные с него через GPIB передаем на компьютер. Сигнал на генераторе также задается с компьютера. Показания Agilent можно пересчитать в ток. При сигнале 40 мV pp и ручке чувствительности Unipan 30 мV показания Agilent 4,222 в, так что 1 на Agilent соответствует 9,47 мВ. Каждый раз при повороте ручки чувствительности Unipan против часовой стрелки этот пересчетный коэффициент необходимо поделить на 3.16 (корень из 10). Далее, разделив напряжение на 1 кОм, получим искомый ток.

Используемые приборы:

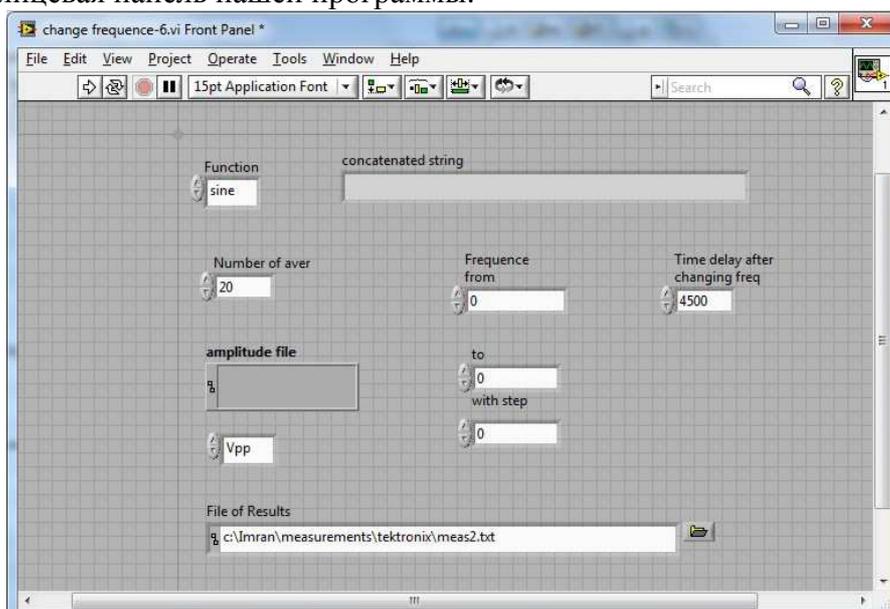


В верхнем ряду: мультиметр Agilent 34411А, генератор Stanford Research System DS345
В нижнем ряду: Unipan lock-in nanovoltmeter type 232В, справа разъемы GPIB и переходник Agilent для подключения к USB

2. Автоматизация измерений при помощи Lab-View

Изначально для автоматизации измерений были загружены стандартные программы для stanford research system ds345 и Agilent 34411A. Однако, эти приборы позволяют сделать очень многое, так что эти программы обладают различными пока ненужными для нас функциями, и работает недостаточно быстро. А наша задача проста: генератор должен подать синусоидальный сигнал определенной амплитуды и частоты, а затем нам нужно записать в файл показания мультиметра. Поэтому было решено написать программы самостоятельно, используя команды, описанные в руководствах к приборам. Не будем вдаваться в подробности работы программы, необходимой для наших измерений, а просто опишем, как ей пользоваться.

Так выглядит лицевая панель нашей программы:



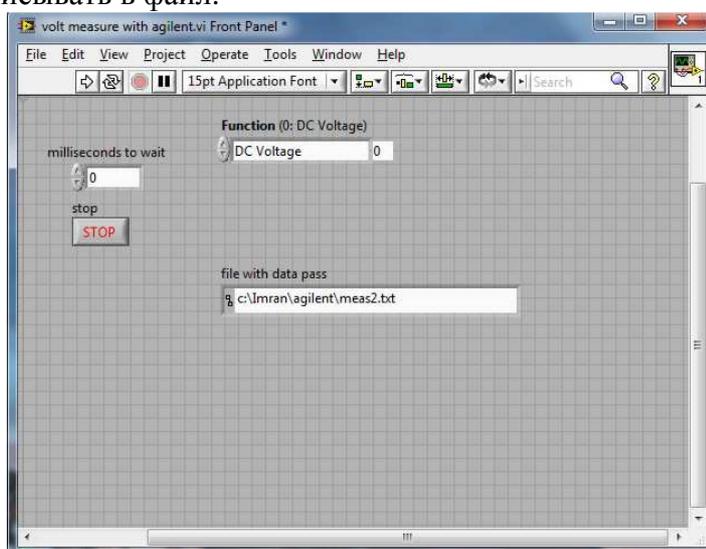
В графе Function выбираем вид сигнала из возможных вариантов: sine, square, triangle, ramp, noise, arbitrary. В графе Number of aver выбираем число усреднений (для каждого сигнала, подаваемого с генератора, измеряемый сигнал снимается определенное число раз). В графе amplitude file записываем полное имя файла, в котором записаны амплитуды сигналов, которые мы хотим подать на генератор. Эту графу можно оставить пустой, тогда программа при запуске попросит найти файл с амплитудами. В графе чуть ниже можно выбрать как считается амплитуда (V_{pp} или V_{rms}). В нашей работе мы задаем амплитуду V_{pp} . В графе concatenated string программа показывает команду, которая подается на генератор, чтобы мы могли видеть, какая в данный момент амплитуда и частота подаваемого сигнала. Рассмотрим следующие три графы. Для каждой амплитуды нам нужно снять зависимость амплитуды измеряемого сигнала от частоты. Поэтому мы задаем диапазон частот, в котором проводим измерения и шаг, по которому частота меняется от наименьшей к наибольшей. В графе time delay after changing freq задаем время, которое нужно подождать, прежде чем производить измерения на следующей частоте. Это связано с тем, что при смене частоты колебания устанавливаются не сразу, особенно, если добротность очень высока. Колебания в системе установятся только после того, как затухнут собственные колебания. Время затухания (см.[7]) находится как $\tau \sim 1/\gamma$, а добротность есть $Q/\Delta\omega = \omega_0/\gamma$. Таким образом, $\tau \sim Q/\omega_0 = Q/(2\pi f_0)$. Если добротность $Q \sim 10^5$, как для камертона в вакууме, то $\tau \sim 1$ с. В итоге на выходе программа выдает текстовый файл (имя файла задаем в самой нижней графе File of Results). В первом столбце записано значение амплитуды подаваемого напряжения, во втором частота, а в

третьем соответствующий сигнал, снятый с agilent (усредненный). После чего можно строить графики зависимости отклика (сигнал, снятый с резистора с помощью Unipan, пересчитанный затем в ток) от частоты при различных значениях амплитуды подаваемого сигнала. Далее для каждого значения амплитуды находим из графиков максимальный отклик, после чего можно построить график зависимости максимального отклика от подаваемого сигнала.

Несколько слов о других программах, не используемых в данной конкретной работе, но нужные для работы в нашей лаборатории:

Вторая программа почти такая же, но данные снимаются не с помощью Agilent, а при помощи осциллографа (написана мной).

В третьей программе с помощью можно снимать временную зависимость интересующей нас величины и записывать в файл.



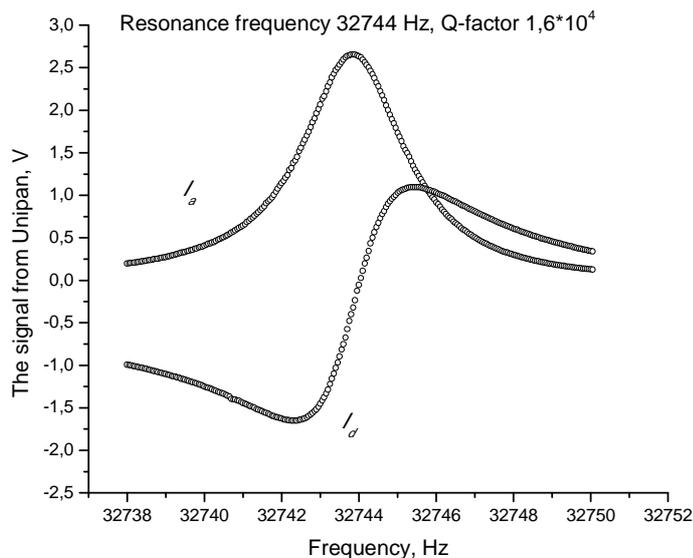
Мы задаем временной интервал между измерениями и сообщаем программе, какую величину нам надо измерить. Она выдает нам файл, где в левом столбце указано абсолютное время, а в правом – значение измеряемой величины.

3. Резонансные кривые для стандартного камертона в воздухе

Напомним, что ток, текущий через камертон, выражается формулой

$$I(\omega) = I_a \cos(\omega t) + I_d \sin(\omega t)$$

Компоненты I_a и I_d находятся отдельно при помощи поворота фазы на Unipan
Экспериментально измеренные кривые для I_a и I_d для стандартного кварцевого камертона в воздухе



4. Отбор камертонов для измерений в жидком гелии

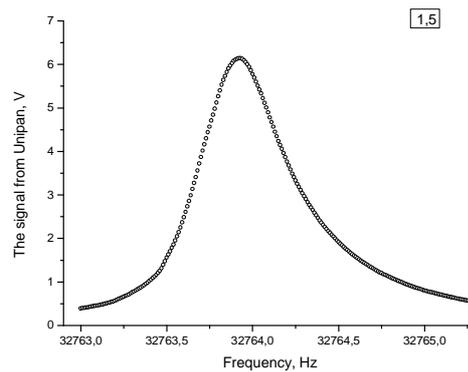
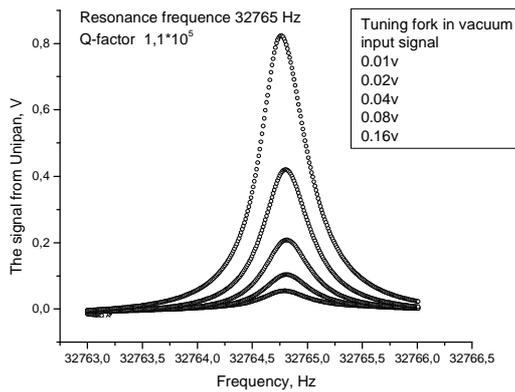
Были сняты резонансные кривые для нескольких камертонов

Резон. Частота	ширина рез.	Добротность	отклик (входной сигнал)
1) $f_0 = 32987$ Гц	$\Delta f = \text{много}$	$Q = \text{мало}$	(отклик слабый)
2) $f_0 = 39080$ Гц	$\Delta f = 18$	$Q = 2,2 \cdot 10^3$	12,8 мкА ($V_{in} = 0,15$ В)
3) $f_0 = 40585$ Гц	$\Delta f = 12$	$Q = 3,4 \cdot 10^3$	12,8 мкА ($V_{in} = 0,08$ В)
4) $f_0 = 34716$ Гц	$\Delta f = 11$	$Q = 3,2 \cdot 10^3$	14,3 мкА ($V_{in} = 0,08$ В)
5) $f_0 = 36253$ Гц	$\Delta f = 5,4$	$Q = 6,7 \cdot 10^3$	11,4 мкА ($V_{in} = 0,08$ В)
7) $f_0 = 31532,8$ Гц	$\Delta f = 1,5$	$Q = 2,2 \cdot 10^4$	(отклик слабый)
8) $f_0 = 32744$ Гц	$\Delta f = 2,0$	$Q = 1,6 \cdot 10^4$	8,31 мкА ($V_{in} = 1$ в) (обычная кварцевая)

Камертон под номером 3 впоследствии сломался. В итоге для измерений были выбраны камертоны под номерами 2 и 4, так как у них максимальный отклик, а, значит, большая скорость движения зубцов, что дает нам больше возможностей при исследовании турбулентности в жидком гелии

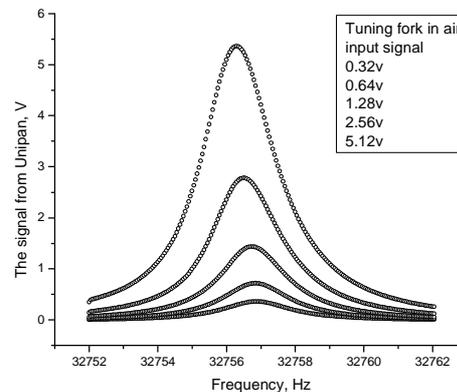
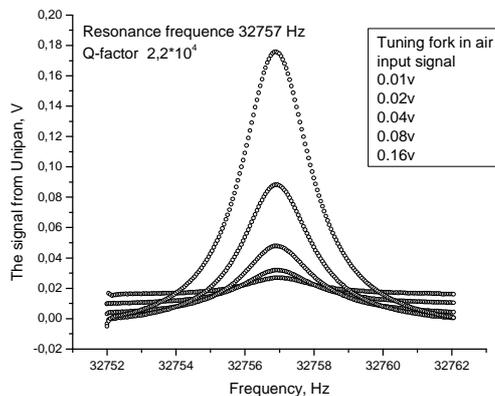
5. Снятие зависимости отклика от возбуждения для стандартного кварцевого камертона в вакууме, и в воздухе

Стандартный камертон в воздухе. Приведем графики резонансных кривых для камертона в вакууме при различных входных сигналах (от 0.01 до 1.5 вольт, значение амплитуды входного сигнала в вольтах указано в правом верхнем углу каждого графика). Зависимость отклика (амплитуды сигнала в резонансе) от входного сигнала будет показана чуть позже в сравнении с зависимостью отклика от подаваемого сигнала в воздухе.



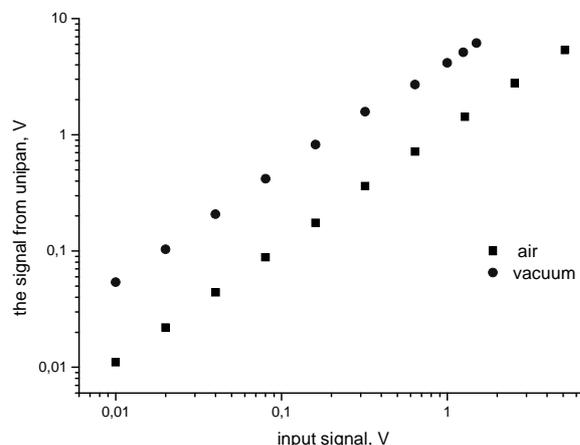
Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.16 В, справа для 1 В

Теперь приведем полученные графики резонансных кривых камертонов в воздухе (входной сигнал от 0.01 до 5.12 вольт)



Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.16 В, справа от 0.32 до 5.12 В

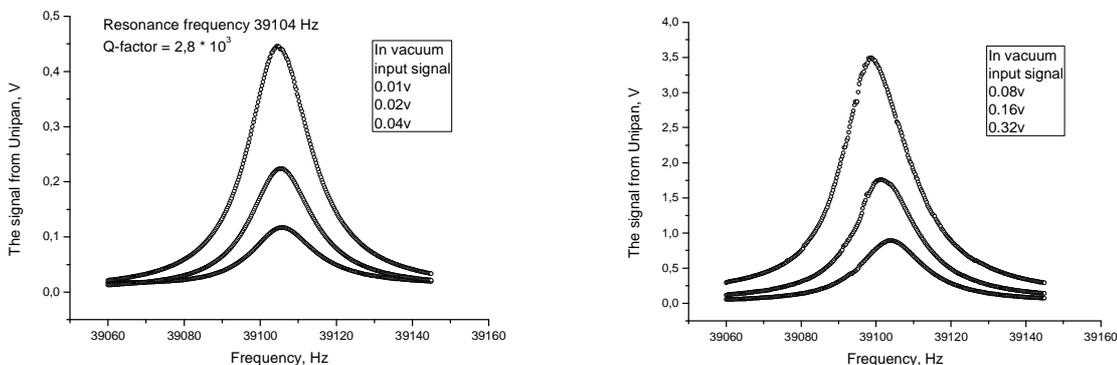
Теперь, взяв амплитуду измеряемого сигнала при резонансной частоте при каждом входном сигнале, можем получить график зависимости отклика от подаваемого сигнала. Синие кружочки соответствуют измерениям в вакууме, черные квадраты – измерения в воздухе. Видим, что отклик в вакууме значительно превосходит отклик в воздухе, как это и следовало ожидать из-за наличия сопротивления движению в воздухе



6. Предварительная работа с камертонами, выбранными для измерений

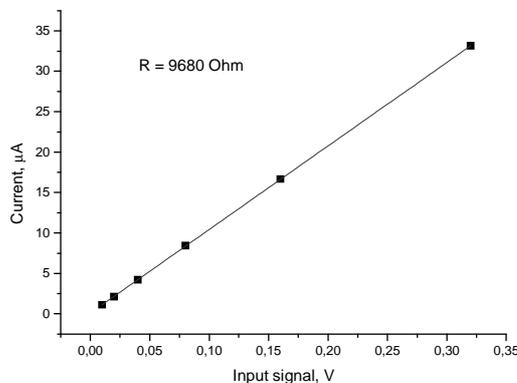
Прежде, чем проводить измерения в жидком гелии, были сняты резонансные кривые при комнатной температуре в вакууме, в воздухе и в газообразном гелии. Были получены следующие результаты для камертона на 39 кГц

1) Измерения в вакууме

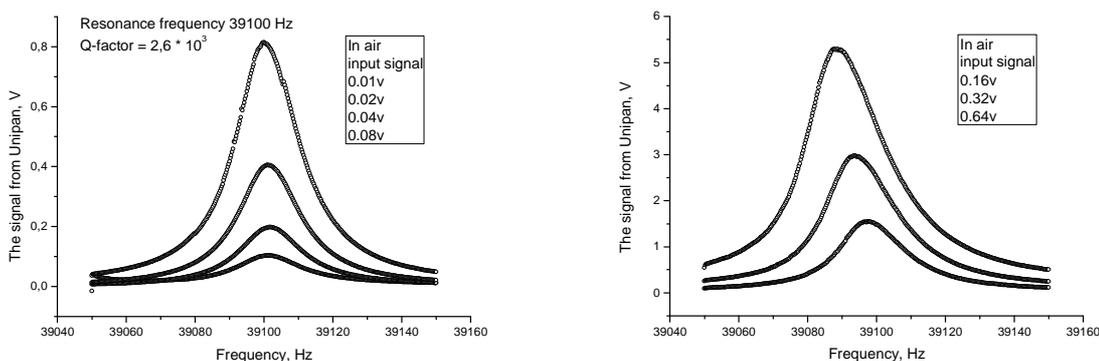


Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.04 В, справа от 0.08 до 0.32 В

Если теперь построить зависимость отклика от входного сигнала, то можно найти величину R для определения электромеханической константы. Однако, для её определения нам не хватает эффективной массы зубцов камертона. Для этого необходимо знать плотность и размеры. Этим мы займемся в будущем, так как для определения размеров необходимо разбирать установку.

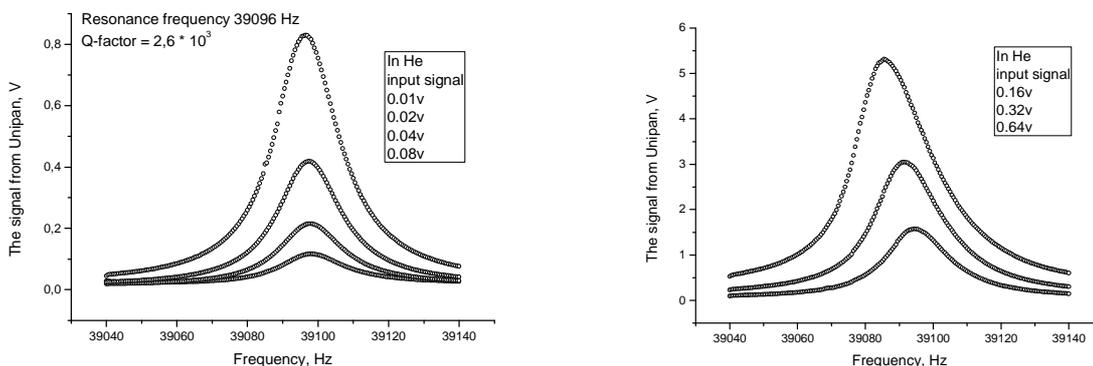


2) Измерения в воздухе



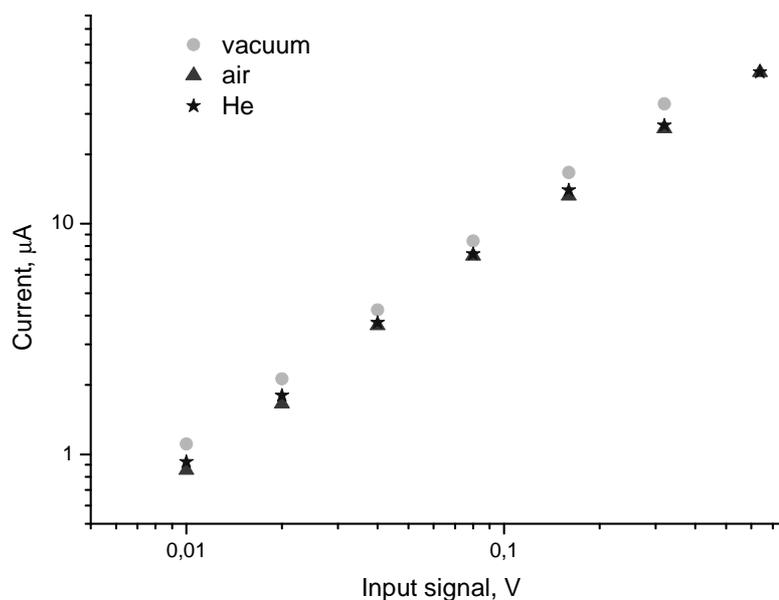
Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.08 В, справа от 0.16 до 0.64 В

3) Измерения в газообразном гелии



Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.08 В, справа от 0.16 до 0.64 В

Приведем график зависимость отклика от входного сигнала для вакуума, воздуха и гелия



Приведем значения вязкости для воздуха и для гелия^[1]:

Tab. 3.1: Kinematic viscosities of test fluids

Fluid	T (K)	P (bar)	ν (cm ² /s)
Air	293	1	0.15
Water	293	1	0.01
Helium I	2.2	SVP	1.8×10^{-4}
Helium II	1.8	SVP	8.9×10^{-5}
Helium gas	5.5	2.8	3.2×10^{-4}

Из таблицы видно, что кинематическая вязкость газообразного гелия много меньше вязкости воздуха. Однако, точки на графике для гелия не сильно отличаются от точек для воздуха. Почему так не ясно. Однако можно сделать предположение. Газ в

низкотемпературную капсулу может проникать через тонкий капилляр, который мы впоследствии будем использовать для подачи высокого давления. Возможно, через него вышел не весь воздух, поэтому данные различаются не сильно

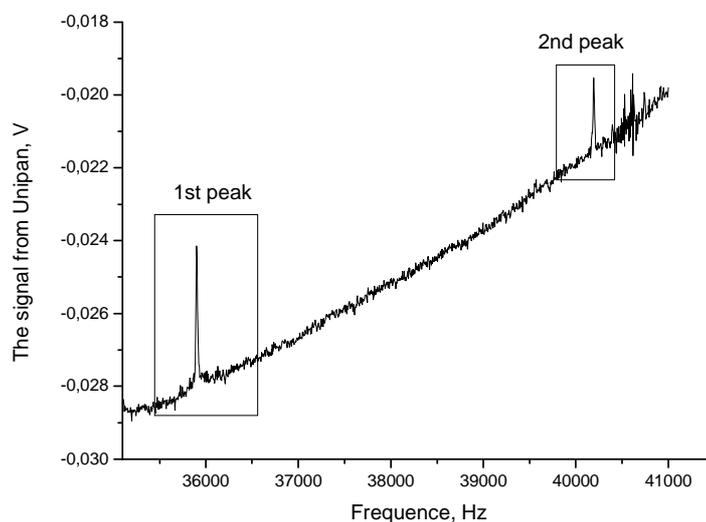
7. Измерения в жидком гелии

Вставка для погружения в жидкий гелий: внутри нее находятся три камертона. Это можно сделать, так как они обладают разными резонансными частотами. Так что если мы работаем при частоте одного камертона, два других не оказывают практически никакого влияния на систему.

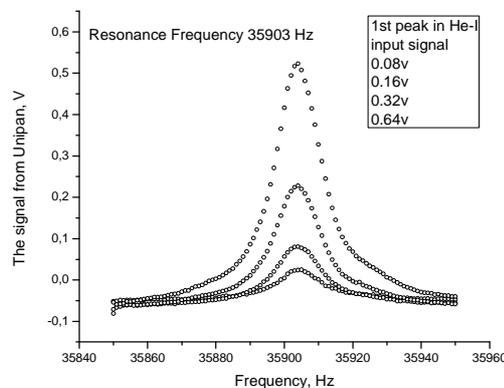
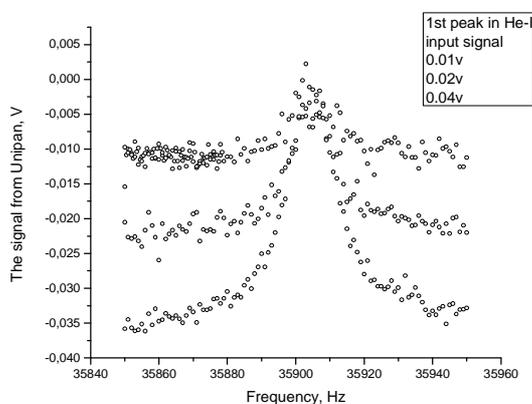


Измерения были проведены в нормальном гелии, а затем в сверхтекучем. Амплитуда входного сигнала менялась в пределах от 0.01В до 10В.

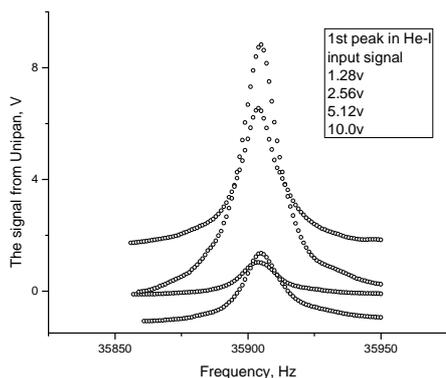
Измерения в нормальном гелии. Видим, что у нас имеется два пика. Они соответствуют двум разным камертонам. Пик от третьего камертона обнаружить не удалось. Рассмотрим их подробнее.



Первый пик:

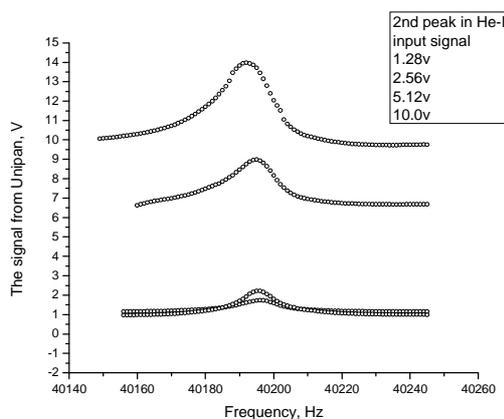
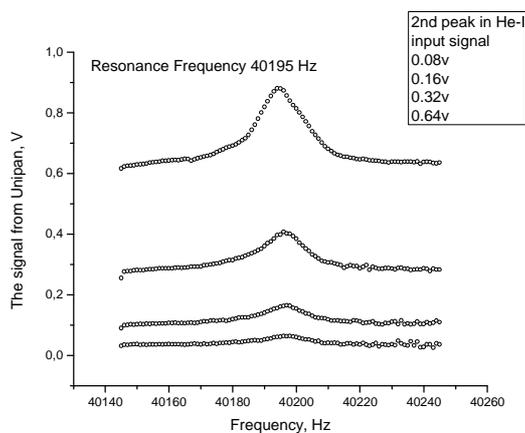


Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.01 до 0.04 В, справа от 0.08 до 0.64 В



Кривые для входных сигналов от 1.28 до 10 В

Второй пик:

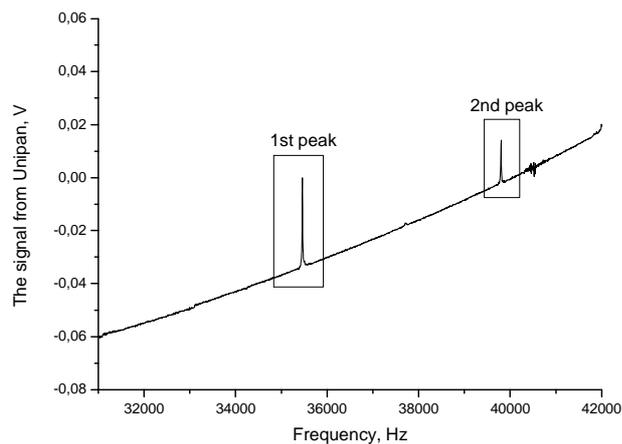


Слева приведены кривые для входных сигналов от 0.08 до 0.64 В, справа от 1.28 до 10 В

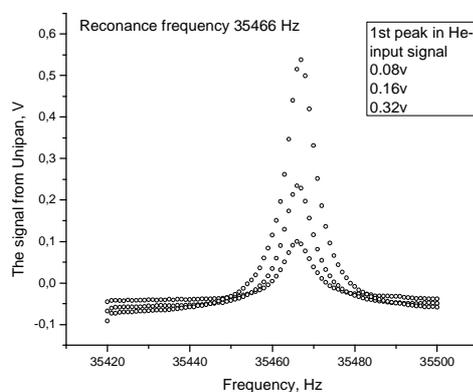
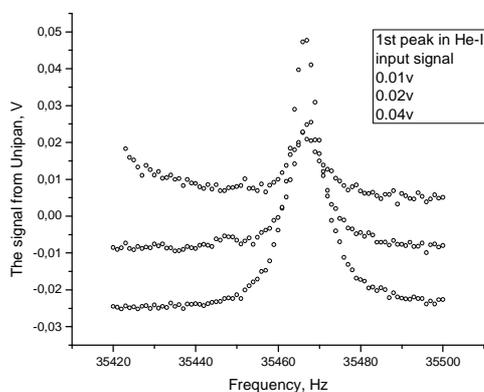
Зависимость отклика от входного сигнала будет рассмотрена после резонансных кривых в He-II.

Измерения в сверхтекучем гелии

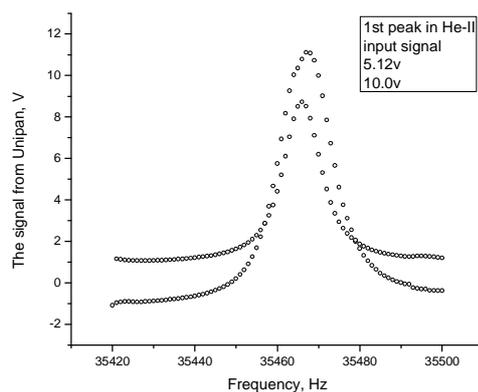
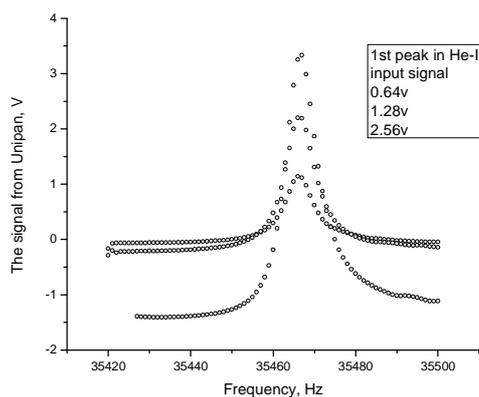
После того, как были произведены измерения в нормальном гелии, была включена откачка паров, гелий начал охлаждаться и через некоторое время перешел в сверхтекучее состояние. Через какое-то время давление установилось на уровне порядка 15 мм рт. ст. (что соответствует температуре порядка 1.85K). В итоге у нас получились следующие графики:



Первый пик:

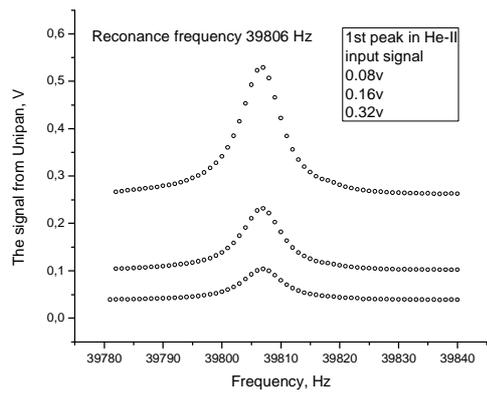
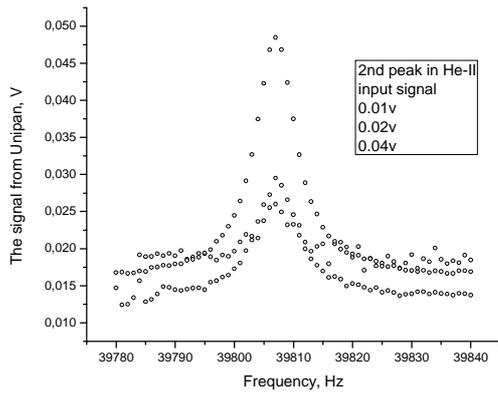


Слева приведены кривые для входных сигналов 0.01 В, 0.02, В 0.04 В; справа 0.08 В, 0.16 В, 0.32 В

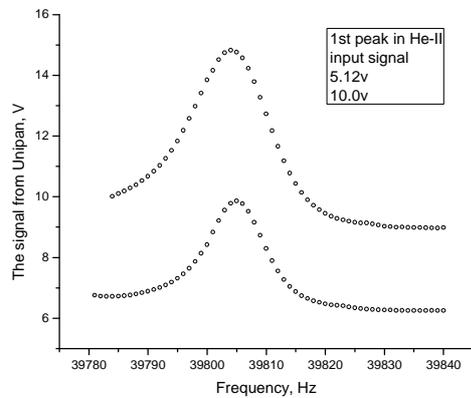
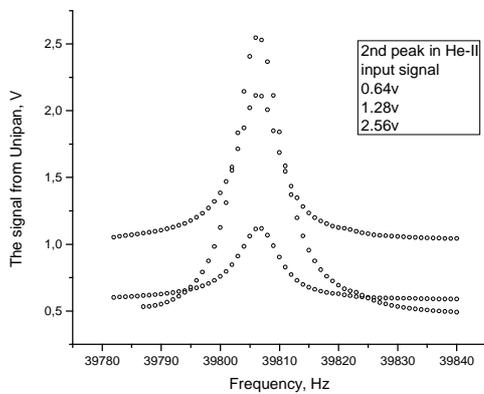


Слева приведены кривые для входных сигналов 0.64 В, 1.28, В 2.56 В; справа 5.12 В, 10 В

Графики для второго пика:

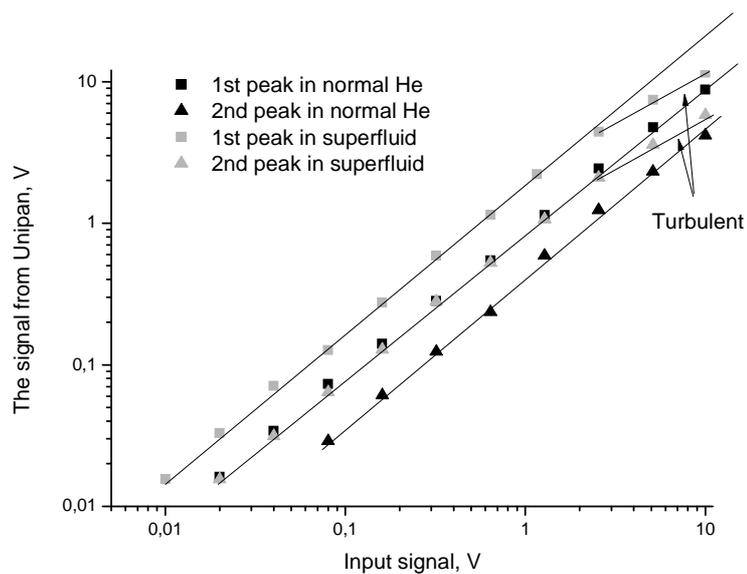


Слева приведены кривые для входных сигналов 0.01 В, 0.02, В 0.04 В; справа 0.08 В, 0.16 В, 0.32 В



Слева приведены кривые для входных сигналов 0.64 В, 1.28, В 2.56 В; справа 5.12 В, 10 В

Взяв амплитуду в резонансе в каждом из графиков, мы можем теперь построить зависимость отклика от подаваемого сигнала для каждого из двух пиков в нормальном и сверхтекучем гелии



Когда движение ламинарно, все точки ложатся на прямую. Когда же происходит переход в турбулентное движение, ток, текущий через камертон зависит от напряжения как корень. В логарифмических координатах эта прямая с наклоном $1/2$.

Видим, что сверхтекучий гелий переходит в турбулентное состояние при напряжениях на Agilent порядка 5 В для первого пика и 2 В для второго. Пересчитывая эти данные в ток, получаем, что переход в сверхтекучее состояние для первого пика происходит при токах порядка 0,5 мкА, а для второго при токах $\sim 0,2$ мкА. Если измерить размеры камертонов, и зная плотность, можно эффективную массу, а с её помощью по формуле

$$a = \sqrt{\frac{2 m \Delta \omega}{R}}$$

Можно определить электромеханическую константу. Разделив ток на эту константу, мы можем определить скорость зубцов, при которой гелий переходит в турбулентное состояние. Сейчас мы пока это сделать не можем, но можем оценить эту величину. Из пункта 6.1 $R = 9680$ Ом, $\Delta \omega = 2\pi \Delta f \sim 90 \text{ с}^{-1}$, эффективную массу считаем по формуле $m_{\text{vac}} = 0.24267 \rho LWT$, где $\rho = 4650 \text{ кг/м}^3$ – плотность ниабата лития, из которого сделан камертон, а размеры $L W T$ будем считать по порядку такими же как в кварце. В статье [2] даны значения этих размеров: $L = 3.12 \text{ мм}$, $W = 0.352 \text{ мм}$, $T = 0.402 \text{ мм}$. Так что подставим в формулу для эффективной массы $L \sim 3 \text{ мм}$, $T \sim W \sim 0.4 \text{ мм}$. Получим эффективную массу $5 \cdot 10^{-4}$ г. Подставляя значения в формулу для электромеханической константы, получаем $a \sim 10^{-4}$ Кл/м. Это на 1 порядок больше чем в статье [1]. Этот результат объясняется тем, что отклик у камертона из ниабата лития гораздо сильнее (в десятки раз), чем у кварцевых камертонов, используемых в статье [1]. Таким образом, получаем скорость, при которой движение переходит в турбулентное.

$$v = I/a \sim 0.5 \text{ см/с}$$

Заключение и выводы

В результате проделанной работы мы сделали следующее:

- ✓ Разработаны программы Lab-View для автоматизации измерений
- ✓ Научились снимать резонансные кривые (компоненты I_a и I_d) для камертонов
- ✓ Научились определять электромеханическую константу камертонов
- ✓ Были отобраны наиболее чувствительные камертоны для измерений в жидком гелии
- ✓ Были сняты резонансные кривые и зависимость тока, текущего через кварцевый камертон от амплитуды напряжения подаваемого сигнала в воздухе и в вакууме
- ✓ Были сняты резонансные кривые для камертонов из ниабата лития, а также зависимость тока, текущего через эти камертоны амплитуды напряжения подаваемого сигнала в вакууме, воздухе, газообразном гелии, в жидком He-I и He-II
- ✓ Был измерен ток для этих камертонов, при котором движение в сверхтекучем гелии становится турбулентным
- ✓ Произведена оценка скорости, выше которой He-II, возбуждаемый камертонами из ниабата лития переходит в турбулентное состояние

Приобретенные навыки измерений помогут нам в дальнейшем глубже исследовать свойства гелия в турбулентном состоянии, в частности исследовать взаимодействие акустической (классической) и квантовой турбулентности в сверхтекучем гелии.

Литература

1. *Deepak*. Experimental investigation of quantised vortices using grid and quartz tuning forks in superfluid helium-4 in the zero temperature limit. (2010)
2. *R. Blaauwgeers, M. Blazkova, M. Clovecko, V.B. Eltsov, R. de Graaf, J. Hosio, M. Krusius, D. Schmoranzler, W. Schoepe, L. Skrbek, P. Skyba, R.E. Solntsev, and D.E. Zmeev*. Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids (2007)
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. 5-е издание. *Физматлит*(2001)
4. *Д.Р. Тилли, Дж. Тилли*. Сверхтекучесть и Сверхпроводимость. *Издательство мир* (1977)
5. *Воробьев П.* Лекции по физической кинетике
6. *L. Skrbek*. The Use of Vibrating Quartz Forks in Cryogenic Helium Research. (2008)
7. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Учеб. пособие: Для вузов. В 5 т. Т. III. Электричество. — 4-е изд., стереот. — М.: ФИЗМАТЛИТ; Изд-во МФТИ, 2004.- 656 с.