Министерство образования и науки Российской Федерации МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (государственный университет) ФАКУЛЬТЕТ ОБЩЕЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ КАФЕДРА ФИЗИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА Лаборатория квантовых кристаллов

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВИХРЕВОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КВАРЦЕВЫМИ КАМЕРТОНАМИ

Магистерская диссертация студента 822 группы Алескерова Имрана Арифовича

Научный руководитель Ефимов Виктор Борисович, д.ф.-м.н.

> г. Черноголовка 2014

I. Введение	3 -
II. Кварцевые камертоны с изгибной модой колебаний	3 -
1. Зачем используются камертоны при изучении жидкого гелия?	5 -
2. Механические свойства камертона	5 -
3. Электрические свойства и калибровка	6 -
4. Влияние окружающей среды на колебания камертона	8 -
III. Торсионные кварцевые камертоны.	8 -
Электромеханическая константа для крутильных колебаний	11 -
Нахождение эквивалентного момента инерции	12 -
III. Квантовые вихри	13 -
1. Квантование циркуляции.	13 -
2. Вращение сверхтекучей жидкости	14 -
3. Одиночная вихревая нить	16 -
IV. Экспериментальные данные	18 -
1. Схема измерений	18 -
2. Измерения в вакууме	19 -
1) Камертон на 32 кГц	20 -
2) Камертон на 31 кГц	21 -
3) Камертон на 76 кГц	22 -
3. Измерения в жидком гелии	23 -
1) Камертон на 31 кГц	24 -
2) Камертон на 32 кГц	25 -
3) Камертон на 76 кГц	27 -
Оценка мощности	29 -
Оценка размеров вихревой структуры	34 -
V. Выводы	36 -

І. Введение

В последнее время для изучения поведения низкотемпературных объектов, например свойств квантовых вихрей, исследования вязкости, наконец, определения температуры квантовых жидкостей, используются кварцевые камертоны – кварцевые стандарты частоты для наручных часов. Такие электромеханические резонаторы дешевы, прочны и стабильны. В цели данной работы входила попытка определить способность таких камертонов перекачивать электрическую энергию внешних источников в вихревую систему сверхтекучего гелия. Необходимо понять, какую мощность можно закачать в вихревую систему, и какая при этом установится равновесная концентрация вихрей. Эти данные могут пригодиться в дальнейшем для различных целей, например, для изучения влияния квантовых вихрей на волны второго звука.

Камертоны, в которых зубцы совершают изгибные колебания, были изучены многими учеными. См. напр., статьи [1], [3], [4].

В нашей работе помимо стандартных камертонов изучаются так называемые торсионные камертоны, зубцы которых совершают крутильные колебания. Их поведение практически никто не изучал, так что эта часть работы представляет особый интерес.

В работе рассматривалось поведение кварцевых камертонов в вакууме и жидком гелии в нормальной и сверхтекучей фазе. В работе использовались три камертона с резонансными частотами соответственно 31 кГц, 32 кГц и 76 кГц. Зубцы первых двух камертонов совершают изгибные колебания и движутся в противофазе, а для камертона на 76 кГц кристаллографические оси исходного кристалла подобраны так, что ножки камертона совершают крутильные колебания.

Кварц, из которого сделан камертон, обладает пьезоэлектрическим эффектом. Таким образом, переменный ток приводит к механическим колебаниям. Каждый камертон можно откалибровать, то есть вычислить электромеханическую постоянную a. Физический смысл постоянной следует из формулы I = av, где I – ток, текущий через камертон, v – скорость движения зубца камертона

II. Кварцевые камертоны с изгибной модой колебаний.^{[1], [3]}

- 3 -

Tuning fork может быть использована для исследования свойств окружающей среды, в частности, жидкого гелия. Схема и конструкция стандартного камертона показана на рисунке:



Рис. 1. Кварцевый камертон

Камертон характеризуется его длиной L, шириной W и шириной T одного из его зубцов. Расстояние (D - 2T) также является важным параметром, поскольку от него зависит плотность остаточных вихрей между зубцами.

Кварц (плотность $\rho_q = 2659 \text{ кг/м}^3$) – пьезоэлектрическим кристалл. К камертону подсоединены два электрода. Если через них подать напряжение, то в силу пьезоэлектрических свойств возникнет сила, которая будет двигать зубцы камертона в противофазе. Камертоны производятся серийно в электронной промышленности как стандарт частоты электронных часов и стоят очень дешево. Обычно они имеют стандартную резонансную частоты 2^{15} Гц (около 32768 Гц, поэтому часто говорят о камертоне на 32 кГц) в вакууме. Его добротность составляет порядка 10^5 в вакууме. Высокая добротность делает их чувствительными к очень маленьким силам (порядка pN).

Преимущество камертона для исследования жидкого гелия заключается в том, что для движения камертона не требуется магнитного поля, и они крайне нечувствительны к любым внешним магнитным полям. В большинстве исследований камертон можно очень легко установить и использовать. Чтобы управлять и считывать данные с камертона, необходимо всего два провода

Камертоны обычно выпускаются в герметичной вакуумной оболочке. Для его использования в качестве датчика в гелии, оболочка может быть удалена частично (путем проделывания небольшого отверстия в верхней части) или же полностью в зависимости от требуемого применения. Заметим, что поперечное сечение на конце зубцов для камертона на 32 кГц не

совсем прямоугольное (см. рис. 1). Внешние границы заостряются к концу под некоторым углом для подгонки частоты к 32768 Гц

1. Зачем используются камертоны при изучении жидкого гелия?

1)У осциллирующих измерительных приборов за исключением камертонов, использующихся для исследования квантовых жидкостей, резонансная частота обычно порядка 1 кГц или меньше. Действие высокочастотных осцилляторов в жидком гелии всё ещё не изучено, и камертоны определенно могут предоставить способность разобраться в сущности вопроса. Зубцы камертона с лёгкостью могут достигать скорости 2 м/с без повреждений. При такой скорости может быть изучен феномен кавитации (возникновения пустот в жидкости). С помощью других приборов невозможно получить такие высокие значения скорости.

2)Камертоны имеют малый размер (порядка нескольких миллиметров). Они доступны и могут обладать частотами от 4 кГц до МГц. Широкий диапазон частот этих резонаторов может быть использован для измерения частотной зависимости критической скорости, при которой сверхтекучая жидкость становится турбулентной, а также для изучения процессов возбуждения звуковых волн в жидкости.

3)Камертоны обладают высокой добротностью и малой массой

2. Механические свойства камертона

При достаточно малых амплитудах колебаний камертон может быть описан как гармонический осциллятор, на который действует внешняя гармоническая сила $F = F_0 * \cos(\omega t)$ и сила сопротивления, линейно зависящая от скорости. Тогда уравнение движения

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d} t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} t} + \frac{k}{m} x = \frac{F}{m}$$
, где

m – эффективная масса (одного зубца);

ү – коэффициент сопротивления;

k – жесткость;

*F*₀ – амплитуда внешней силы.

Эффективная масса и коэффициент сопротивления зависят от среды, в которой находится камертон. Решение этого уравнения есть

$$x(t) = x_{a}(\omega)\sin(\omega t) + x_{d}(\omega)\cos(\omega t)$$
, где

 $x_{\rm a}$ – поглощение (absorption);

*x*_d – рассеяние (dispersion);

Значение поглощаемой мощности $\left\langle F \frac{dx}{dt} \right\rangle = F_0 \omega \frac{x_a}{2}$ максимально при резонансной частоте $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Удобно ввести добротность $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$ как отношение резонансной частоты ω_0 к ширине $\Delta \omega = \gamma$, где $\Delta \omega$ – ширина резонансной кривой на половине максимальной мощности. Напомним, что камертон характеризуется его длиной *L*, шириной *W* и шириной *T* одного из его зубцов. Коэффициент жесткости можно посчитать по формуле

$$k = \frac{1}{4} E W \left(\frac{T}{L}\right)^3$$

Где E – модуль упругости, для кварца $E_q = 7.87 \cdot 10^{10} \text{ H/m}^2$,

эффективная масса одного зубца в вакууме $m_{\rm vac} = 0.24267 \ \rho_{\rm q}LWT$, где $\rho_{\rm q} = 2659 \ {\rm kr/m}^3 - {\rm плотность} {\rm кварца} [11].$

3. Электрические свойства и калибровка.

Пусть камертон возбуждается напряжением $U = U_0 * \cos(\omega t)$ и частота медленно проходит через резонанс. Сигнал, полученный от камертона – ток, вызванный пьезоэлектрическим эффектом. За счет отклонения зубцов камертона возникают заряды и, таким образом, ток пропорционален производной отклонения камертона, то есть скорости:

$$I(t) = a \frac{\mathrm{d} x(t)}{\mathrm{d} t},$$

где *а* – электромеханическая константа камертона. Теоретически в работе [11] этот коэффициент рассчитывается по формуле

$$a = 3 d_{11} E\left(\frac{TW}{L}\right)$$

 $d_{11} = 2.31 \cdot 10^{-12}$ м/В – продольный пьезоэлектрический модуль кварца. Для стандартных кварцевых камертонов размером 3 мм по этой формуле получается значение $a = 2.47 \cdot 10^{-5}$ Кл/м. В криогенной установке, где камертон находится в маленьком контейнере, прямые методы измерения константы *a* затруднительны. Вместо этого можно произвести калибровку путем сравнения нашего механического резонатора с эквивалентным *RLC*-контуром. Соответствующее дифференциальное уравнение для тока:

$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d} t^2} + \frac{R}{L} \frac{\mathrm{d} I}{\mathrm{d} T} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L} \frac{\mathrm{d} U}{\mathrm{d} t}$$

Сравнивая его с механическим дифференциальным уравнением, видим, что

$$ω_0^2 = \frac{1}{LC}$$
, $\gamma = \frac{R}{L}$, и, используя определение константы *a*, $\frac{1}{L} = \frac{F_0}{U_0} \frac{a}{m}$,

Дополнительно мы имеем условие, что рассеиваемая мощность в резонансе должна быть одной и той же в обоих уравнениях. Электрическая мощность $U_0^2/(2R)$ приводит в движение зубцы камертона, которые рассеивают энергию $2F_0^2/(2m\gamma)$. Таким образом, получаем систему уравнений, которая позволит нам связать электрические и механические свойства камертона через константу *a*:

$$F_0 = \frac{a}{2}U_0$$
$$R = \frac{2m\gamma}{a^2}$$
$$L = \frac{2m}{a^2}$$
$$C = \frac{a^2}{2k}$$

Пользуясь формулой $R = 2m\gamma / a^2$, можно найти электромеханическую константу. Замечая, что $\gamma = \Delta \omega$, получаем:

$$a = \sqrt{\frac{2 m \Delta \omega}{R}}$$

где 1/R – наклон зависимости $I_0(U_0)$, I_0 – амплитуда тока в резонансе, $\Delta \omega$ – ширина резонансной кривой. Из эксперимента нельзя непосредственно найти *m*. Однако, теоретическое значение кажется довольно надёжным из-за близкого соответствия между теоретическими и экспериментальными значениями резонансной частоты.

Ток, текущий через камертон, описывается уравнением:

$$I(\omega) = I_a \cos(\omega t) + I_d \sin(\omega t)$$

В нашем эксперименте компоненты I_a и I_d находятся отдельно при помощи поворота фазы на Unipan.

4. Влияние окружающей среды на колебания камертона

В присутствии жидкости сила сопротивления, действующая на камертон, возрастает (в добавок к внутреннему поглощению); во-первых, за счёт присоединённой (гидродинамической) массы и, во-вторых, из-за вязкости жидкости. Пока не будем вдаваться в подробности, скажем лишь, что при внесении камертона в окружающую среду связь между резонансными частотами для камертона в некоторой среде и резонансная частота связаны соотношением^[5]:

$$f_l^2 = f_{vac}^2 \left(\frac{m_{vac}}{m}\right)$$

Где m_{vac} – эффективная масса в вакууме, m – в окружающей среде, f_l – резонансная частота, f_{vac} – резонансная частота в вакууме. Из этой формулы видно, что при погружении камертона в некоторую среду резонансная частота падает. Ширина резонансной кривой находится по формуле^[5]

$$\Delta f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\rho \eta f_l}{\pi}} CS \frac{(f_l / f_{vac})^2}{m_{vac}}$$

Где р – плотность, η – вязкость, S – площадь поверхности зубца камертона, C – константа, зависящая от геометрии объекта (для камертона её сложно определить аналитически, поэтому её находят экспериментально)

III. Торсионные кварцевые камертоны.

Торсионными кварцевыми камертонами никто до нас не занимался, поэтому необходимо изначально привести теорию колебаний данных резонаторов, а после чего уже сравнить теоретические данные с экспериментальными.

Для начала для простоты рассмотрим крутильные колебания круглого стержня. Для крутильных колебаний стержня верно следующее дифференциальное уравнение (см. формулу (25.14) из [6]):

$$C\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\rho I\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}.$$

Здесь $I = \int (x^2 + y^2) df$ - полярный момент инерции сечения стержня, для круглого стержня он равен $I = \frac{\pi R^4}{2}$. ρ - плотность материала, из которого изготовлен стержень. Для кварца ρ = 2659 кг/м³; $C = 4\mu \int (\nabla \chi)^2 df$ - крутильная жесткость стержня, где $\chi(x, y)$ – вспомогательная $\sigma_{xz} = 2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial x};$ функция, определяемая равенствами $\sigma_{xz} = 2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \sigma_{yz} = -2\mu \tau \frac{\partial \chi}{\partial x};$ для кварца μ = 31.14 ГПа. В случае круглого поперечного сечения можно показать (см. [6],

задачу 1 из п.16), что $\chi = \frac{1}{4}(R^2 - x^2 - y^2)$. Отсюда получаем крутильную жесткость, равную

 $C = \frac{\mu \pi R^4}{2}$. Подставив значения *C* и *I*, получаем волновое уравнение для стержня в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Теперь решим это уравнение для стержня длины *l*, один из концов которого закреплен. Для закрепленного конца имеем граничное условие $\varphi = 0$ при z = 0. Для свободного конца при z = l граничное условие $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Будем искать решение уравнения в виде $\varphi = A \cos(\omega t + \alpha) \sin(kz)$,

$$k = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$$
. Из при $z = l$, имеем $\cos(kl) = 0$, откуда для собственных частот находим

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \frac{\pi}{2l} (2n+1)$$
. При $n = 0$ получаем $f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \cdot \frac{1}{4l} \approx 590$ кГц, что в 8 раз превышает

резонансное значение частоты для торсионной вилочки.

Здесь было использовано приближение о том, что поперечное сечение камертона является круглым. Однако, в реальности поперечное сечение есть прямоугольник. Для произвольного сечения^[7]

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$
, где $c_k = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{I_k}{I_0}}$ - скорость распространения крутильных

колебаний.

Здесь I_0 - полярный момент инерции сечения, I_k - момент инерции при

кручении. Для прямоугольного сечения

 $I_0 = \frac{bh}{2}(h^2 + b^2)$, $I_k = \frac{b^3h}{3}\left(1 - 0.63\frac{b}{h} + 0.052\frac{b^5}{h^5}\right)$



Рис. 2. Стержень прямоугольного сечения





 $f_0 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{I_k}{I_0}}$. По фотографиям камертона, сделанным с помощью электронного микроскопа, имеем размеры камертона L = 1.47 мм, T = 0.255 мм, W = 0.150 мм.

([7],

c.148)

Подставив b = W и h = T в формулы для нахождения I_0 и I_k , получаем $\sqrt{\frac{I_k}{I_0}} = 0,3135$. Таким образом, для резонансной частоты имеем окончательно $f_0 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{I_k}{I_0}} \approx 182 \text{ к} \Gamma \text{ ц}$. Полученный результат чем экспериментально наблюдаемый в В 2,4 раза больше, 76 кГп.



Рис. 4. Фотографии камертона на 76 кГц, сделанные при помощи электронного микроскопа.

Возможные причины расхождения могут быть заключены в следующем:

- 1) Нанесенные электроды создают добавочную массу. Её мы не учитывали
- 2) Не учитывали анизотропию кварца
- 3) Имеются отклонения в геометрии реального камертона по сравнению с рассматриваемой моделью.

Электромеханическая константа для крутильных колебаний.

Для расчета представим торсионные колебания камертона в виде следующей модели: будем считать, что ножка камертона невесома, но к нижней её части подвешен груз, обладающий некоторым эффективным моментом инерции. Этот момент можно найти, если приравнять частоту колебаний ножки, полученной из предыдущих рассуждений к частоте колебаний, полученных в результате данной модели. Уравнение крутильных колебаний груза на веревке можно записать в следующем виде [8]:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \alpha \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} + \frac{D}{I_0}\varphi = \frac{M}{I_0} ; \ \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$$

Ток связан с угловой скоростью при помощи электромеханической константы \tilde{a} :

$$I = \tilde{\alpha} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{I}{LC} = \frac{1}{L} \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} \ ; \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \ ; \ \alpha = \frac{R}{L}$$

Используя уравнения механических и электрических колебаний для камертона, а также определение электромеханической константы, получаем:

$$\frac{1}{L} = \frac{M_0}{U_0} \frac{\tilde{a}}{I_0}$$

Поскольку dissipated power одна и та же для обоих уравнений, имеем также

$$\frac{U_0}{2R} = \frac{2M_0^2}{2I_0\alpha}$$

Таким образом, из двух уравнений колебаний получаем систему для определения константы ã:

$$M_0 = \frac{a}{2}U_0$$
$$R = \frac{2I_0\alpha}{\tilde{a}^2}$$
$$C = \frac{\tilde{a}^2}{2k}$$

Экспериментально а находим по формуле

$$\tilde{a} = \sqrt{\frac{2I_0 \Delta \omega}{R}}$$

Здесь R – сопротивление RLC-контура при резонансе, $\Delta \omega$ – ширина резонансной кривой, I_0 – эквивалентный момент инерции груза, подвешенного на невесомой нити.

Нахождение эквивалентного момента инерции

Эквивалентный момент инерции можно найти, если приравнять частоту, полученную по формуле $f_0 = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \sqrt{\frac{I_k}{I_0}}$ к частоте крутильных колебаний груза с моментом инерции I_0 на

невесомой нити с модулем кручения *D*: $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{I_0}}$. Получаем отсюда равенство

$$\frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\sqrt{\frac{I_k}{I_{0non}}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{I_0}}, \text{ откуда получаем } I_0 = \frac{4Dl^2}{\pi^2}\frac{\rho}{\mu}\frac{I_{0non}}{I_k}$$
. Далее, учитывая, что модуль

кручения можно найти по формуле $D = \frac{I_{\kappa}\mu}{l}$, получаем окончательно $I_0 = \frac{4l}{\pi^2}\rho I_{0non} \approx 0.4\rho l I_{0non}$. Подставляя плотность кварца $\rho = 2659$ кг/м³, l = 1.47 мм и $I_{0non} = \frac{bh}{2}(h^2 + b^2) \approx 1.67 \cdot 10^{-15}$ м⁴, имеем окончательно $I_0 = 2.6 \cdot 10^{-15}$ кг · м².

III. Квантовые вихри^[2]

1. Квантование циркуляции.

Описание сверхтекучей жидкости с помощью волновой функции $|\psi| \exp(iS)$ приводит к следующему выражению для плотности потока

$$\boldsymbol{j}_{\rm s} = \hbar \left| \boldsymbol{\psi} \right|^2 \nabla S$$



Пусть He-II заполняет кольцевую область, например, пространство между двумя концентрическими окружностями. Контур L_1 полностью находится в сверхтекучей жидкости. Предположим, что температура равна абсолютному нулю, так что He-II состоит только из сверхтекучей компоненты. Для

Рис. 5. Сверхтекучая жидкость в кольцевой (многосвязной) области

нахождения картины течения рассмотрим величину, известную как циркуляция:

$$\varkappa = \oint \upsilon_{s} \cdot dl$$

Где интеграл берется по любому контуру, полностью находящемуся в жидкости. Применяя к волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ оператор импульса $-i\hbar\nabla$, можно показать, что сверхтекучая скорость может быть записана в виде

$$v_s = \frac{\hbar}{m_4} \nabla S$$

Где *m*₄ – масса ⁴Не. Следовательно, циркуляцию можно вычислить через фазу волновой функции:

$$\varkappa = \frac{\hbar}{m_4} \oint \nabla S \cdot dl$$

Для окружности *L*₁, изображенной на рисунке, циркуляция равна

$$\varkappa = \frac{\hbar}{m_4} \left(\Delta S \right)_{L_1}$$

Поскольку волновая функция сверхтекучей жидкости однозначна, обход по замкнутому контуру её не изменит. Следовательно, значение фазы может быть только кратным 2π или равным нулю. Таким образом, из последнего уравнения видим, что циркуляция квантуется, принимая значения

$$\alpha = n \frac{h}{m_A}$$
, где $n = 0, 1, 2, ...$

Величину $h/m_4 = 9.98 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}$ называют квантом циркуляции. Квантование справедливо для любого контура, который можно деформировать в L_1 , не выходя за границы жидкости.

Кольцевая область представляет собой пример многосвязной области, поскольку в этом случае можно считать, что в сверхтекучей жидкости имеется отверстие. Наличие таких отверстий, куда не может проникать жидкость, обеспечивает наличие контуров типа L_1 . Как мы уже видели, это является достаточным условием для квантования циркуляции.



При вращении He-II в сверхтекучей жидкости могут спонтанно возникать цилиндрические отверстия; тогда вокруг этих цилиндров возникают устойчивые потоки. В этом случае мы фактически

Рис. 6. Вихревая нить и ее поперечное сечение

наблюдаем возникновение вихревых линий. На рисунке показаны вихревая нить в Не-II и поперечное сечение вихревой нити.

2. Вращение сверхтекучей жидкости



Когда для He-II впервые была предложена двухжидкостная модель, существовало мнение, что сверхтекучую компоненту жидкости очень трудно привести во вращение, поскольку сверхтекучий поток характеризуется отсутствием вихрей

rot $\boldsymbol{v}_{s} = 0$

Чтобы выяснить следствия из этого уравнения, рассмотрим

 Рис.
 7.
 К
 вычислению

 циркуляции
 по
 любому

 контуру в сплошной жидкости

заключенный в цилиндрический сосуд He-II и найдем циркуляцию по контуру типа L_2 . В соответствие с теоремой Стокса циркуляцию можно записать как интеграл по поверхности A, опирающейся на контур:

$$\varkappa = \oint_{L_2} \boldsymbol{v}_s \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{l} = \int_{A} (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_s) \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{A}$$

Учитывая предыдущее уравнение, получаем

$$\varkappa = \oint_{L_2} \boldsymbol{v}_s \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{l} = 0$$

Это значит, что циркуляция по любому контуру в сплошной жидкости равна нулю. Кроме того, все контуры можно стянуть в одну точку, поскольку жидкость заполняет односвязную область. Следовательно, уравнение справедливо для всей сверхтекучей жидкости только если в каждой точке $\boldsymbol{v}_{s} = 0$. Таким образом, если уравнение rot $\boldsymbol{v}_{s} = 0$

выполняется по всей сверхтекучей жидкости, вращение невозможно.

Однако, Осборн, вращая цилиндрический сосуд с He-II, обнаружил что мениск имеет такую же форму, как у обыкновенной жидкости, вращающейся как целое. Это означало, что сверхтекучая и нормальная компоненты

движутся с одной и той же угловой скоростью. Можно было бы объяснить эксперимент Осборна просто тем, что при

Рис. 8. Расположение вихревых линий во вращающемся сосуде с Не-II

вращении сверхтекучесть разрушается. Однако, Андроникашвили и Каверкин [12] показали, что во вращающемся Не-II сохраняется эффект фонтанирования, продемонстрировав этим наличие обоих компонент при вращении.

Вращение сверхтекучей компоненты можно успешно объяснить тем, что она пронизана рядом вихревых нитей. В пункте 1 уже было написано, как происходит циркуляция вокруг области, из которой вытеснена сверхтекучая жидкость. Для контуров, окружающих твердое препятствие или сердцевину вихря, циркуляция квантуется:

$$\varkappa = \oint_{L_2} \boldsymbol{v}_s \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{l} = \int_A (\operatorname{rot} \boldsymbol{v}_s) \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{A} = n \frac{h}{m_4}.$$



Из этого уравнения следует, что в некоторых точках площадки A, ограниченной контуром, гоt v_s отличен от нуля. Это обстоятельство не имеет значение для твердого препятствия, но в случае вихря его можно использовать для определения того, что мы называем сердцевиной вихря - это та область, в которой гоt $v_s \neq 0$.

Таким образом, хотя на первый взгляд в эксперименте Осборна сверхтекучая жидкость заполняет односвязную область, где во всех точках rot $v_s = 0$, на самом деле эта область является многосвязной из-за наличия вихревых нитей, в сердцевинах которых rot $v_s \neq 0$.

3. Одиночная вихревая нить.

Рассмотрим отдельную прямую вихревую нить в сверхтекучей жидкости (см. рис. 6). При близких к нулю температурах можно пренебречь наличием нормальной компоненты. Картина вокруг вихревых нитей представляет собой ряд концентрических окружностей, лежащих в плоскостях, перпендикулярных оси вихря и окружающих центральную цилиндрическую сердцевину. Чтобы найти, как линейная скорость меняется с расстоянием от оси, вычислим циркуляцию для контура, представляющего собой виток радиуса r:

$$\varkappa = \oint_{L_2} \boldsymbol{v}_s \cdot \mathbf{d} \boldsymbol{l} = 2\pi r \boldsymbol{\upsilon}_s(r) = n \frac{h}{m_4}$$

Откуда для скорости имеем: $v_s(r) = \frac{\varkappa}{2\pi r}$.

Таким образом, скорость зависит от $\frac{1}{r}$, то есть так же, как и в случае вихря в классической жидкости; единственное отличие между Не-II и классической жидкостью заключается в наличии квантования. Из соотношения для циркуляции $\varkappa = \oint_{L_2} v_s \cdot dI = 2\pi r v_s(r) = n \frac{h}{m_4}$ видно, что величина циркуляции не зависит от выбранного контура, поэтому мы имеем право говорить о вихре, обладающим квантованной циркуляцией. Кроме того, зная, что $\varkappa = n \frac{h}{m_4}$ и $v_s(r) = \frac{\varkappa}{2\pi r}$, можно получить $m_4 r v_s(r) = n\hbar$, то есть мы видим, что момент количества движения на частицу квантуется в единицах \hbar .

При больших г характер связанного с вихрем потока определяется уже границами жидкости, или присутствием других вихрей. Выражение $m_4 r v_s(r) = n\hbar$ указывает на наличие расходимости при $r \rightarrow 0$ - это является еще одним доказательством того факта, что свойства сердцевины вихря отличаются от свойств окружающей жидкости. Расходимости



можно избежать, предположив, что $\rho_s \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$ и что ρ_s **Рис.** 9. Зависимость v_s и ρ_s/ρ от расстояния r вихревой нити от оси падает от своего значения в объеме жидкости до нуля на (схематически); a_0 – радиус сердцевины типичном расстоянии a_0 , которое определяется как радиус сердцевины. (см. рис. 6)

Энергия одиночной вихревой нити определяется в основном кинетической энергией движущейся жидкости. Эта энергия на единицу длины нити равна

$$\varepsilon_{v} = \int_{a_{0}}^{b} \pi \rho_{s} \upsilon_{s}^{2} r \mathrm{d} r$$

Учитывая, что $m_4 r v_s(r) = n\hbar$, находим энергию на единицу длины вихревой структуры:

$$\varepsilon_{v} = \frac{\rho_{s}\varkappa^{2}}{4\pi} \ln \frac{b}{a_{0}}$$

Верхний предел интегрирования *b* имеет величину порядка среднего расстояния между вихрями, а нижний предел равен радиусу сердцевины *a*₀.

IV. Экспериментальные данные

1. Схема измерений



Рис. 10. Схема измерений.

Последовательно соединенные камертон и резистор на 1 кОм подключены к генератору. Сигнал снимаем с резистора при помощи фазочувствительного нановольтметра Unipan 232B. Так как Unipan нельзя подключить к компьютеру через GPIB, к его выходам подключаем мультиметр Agilent 34411A, затем данные с него через GPIB передаем на компьютер. Сигнал на генераторе также задается с компьютера. Показания Agilent можно пересчитать в ток. При сигнале 40 mv pp и ручке чувствительности Unipan 30 mv показания Agilent 4,222 v, так что 1v на Agilent соответствует 9,47 мВ. Каждый раз при повороте ручки чувствительности Unipan против часовой стрелки этот пересчетный коэффициент необходимо поделить на 3.16 (корень из 10). Далее, разделив напряжение на 1 кОм, получим искомый ток. Используемые приборы:



Рис. 11. Приборы: мультиметр Agilent 34411A, генератор SRS DS345, фазочувствительный нановольтметр Unipan 232B, USB-GPIB-преобразователь

Автоматизацию измерений производится при помощи программы Lab-View. На вход значения напряжений для входного сигнала, для которых надо снять резонансные кривые, диапазон частот, а также шаг, с которым меняется частота. В результате, после измерений программа выдает графики резонансных кривых, а также текстовый файл с данными, который потом можно обработать в Origin (или другой программе, в которой можно работать с графиками).

<u>Замечание:</u> в дальнейшем под понятием ток и напряжение, если не оговорено противное, будем понимать их амплитудные значения.

2. Измерения в вакууме

Измерения в вакууме заключались в следующем. С генератора на схему подается сигнал определенной амплитуды. Плавно изменяя частоту подаваемого сигнала, измеряем напряжение на резисторе 1 кОм. По этому напряжению очень легко вычислить ток через резистор. А так как резистор и камертон соединены последовательно, то тот же ток течет и через камертон. Таким образом для некоторой амплитуды входного сигнала мы можем снять резонансную кривую - зависимость тока от частоты. Поскольку камертон можно представить в виде эквивалентного RLC-контура, то, как известно, сопротивление такого контура в резонансе является чисто активным. Поэтому, построив зависимость отклика (резонансного значения тока через камертон) от амплитуды входного сигнала, из полученного графика мы можем извлечь эквивалентное сопротивление камертона. Сопротивление 1 кОм, выбрано из тех соображений, что оно достаточно мало по сравнению с эквивалентным сопротивлением камертона, но в то же время достаточно велико, чтобы напряжение на нем можно было измерить без особых помех.



Рис. 12. Отклик и ширина резонансной кривой.





Рис. 13. Калибровка камертона на 32 кГц.

Напомним, что электромеханическая константа камертона находится^[1] по формуле $a = \sqrt{\frac{2m\Delta\omega}{R}}$, где $m_{vac} = 0.24267 \rho_q LWT$ - эффективная масса зубца камертона в вакууме. В работе [1] принято, что значение эффективной массы для стандартного камертона на 32 кГц с длиной L=3мм равно $m_{vac} = 2.85 \cdot 10^{-7}$ кг. $\Delta \omega = 2\pi\Delta v$ - ширина резонансной кривой, R - эквивалентное сопротивление камертона, полученное экспериментально.

Из измерений получено сопротивление нашего камертона в резонансе R = 16951 Ом. Ширина резонансной кривой $\Delta f = 0.3$ Гц. Таким образом, получаем электромеханическую константу для данного камертона $a = 7.96*10^{-6}$ Кл/м.



2) Камертон на 31 кГц

Рис. 14. Калибровка камертона на 31 кГц.

Из измерений получено сопротивление камертона на 31 кГц в резонансе R = 13117 Ом. Ширина резонансной кривой $\Delta f = 0.18$ Гц. Данный камертон не является настолько распространенным, как камертон на 32 кГц, поэтому эффективную массу зубца в вакууме пришлось искать самостоятельно. По данным фотографиям, полученным на электронном микроскопе были измерены основные размеры: T = 0.560 мм, W = 0.202 мм. Длина камертона была измерена при помощи оптического микроскопа и составила L = 3.65 мм.



Рис. 15. Фотографии камертона на 31 кГц, сделанные с помощью электронного микроскопа.

По формуле $m_{vac} = 0.24267 \rho_q LWT$ было получено значение эффективной массы зубца камертона $m_{vac} \approx 2.66 \cdot 10^{-7}$ кг. Таким образом, получаем электромеханическую константу для данного камертона $a \approx 6.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Kn}}{M}$.

3) Камертон на 76 кГц



Рис. 16. Калибровка камертона на 76 кГц.

Из измерений получено сопротивление камертона на 76 кГц в резонансе R = 50234 Ом. Ширина резонансной кривой $\Delta f = 1.0$ Гц. Одна из таких резонансных кривых приведена на рисунке. Электромеханическую константу найдем по формуле $\tilde{a} = \sqrt{\frac{2I_0\Delta\omega}{R}}$. Напомним, что

 $I_0 = 2.6 \cdot 10^{-15} \text{ kr} \cdot \text{m}^2$ — эквивалентный момент инерции зубца торсионного камертона. Подставляя результаты из эксперимента, получаем $\tilde{a} \approx 8 \cdot 10^{-10} \text{ A} \cdot \text{c}$.



Рис. 17. Одна из резонансных кривых камертона на 76 кГц в вакууме.



Рис. 18. Низкотемпературная вставка.

3. Измерения в жидком гелии

Внутри вставки находятся три параллельно соединенных камертона. Они обладают различными Вне резонансными частотами. резонанса сопротивление камертона очень велико. Так что при работе вблизи резонансной частоты одного из них, два других камертона не оказывают на систему практически влияния. Измерения никакого проводились при различных температурах от 1.3 до 4.2 К. Для каждого из трех камертонов приведены зависимости отклика, а также добротности от входного

сигнала. При малых возмущениях скорость движения зубцов камертона линейно зависит от прикладываемой

силы. При больших скоростях начинают возбуждаться вихри, в следствие чего наблюдается отклонение от линейной зависимости, и зависимость скорости от прикладываемой силы становится квадратичной. Поскольку ток линейно связано со скоростью, а сила, в свою очередь, линейно связана с прикладываемым напряжением, то при малых входных сигналах зависимость тока от скорости является линейной, а при больших становится квадратичной. Таким образом, мы можем найти критический ток, при котором происходит излом на графике. А, зная электромеханическую константу камертона, этот ток можно легко перевести в критическую скорость, при которой в жидкости начинают зарождаться вихри. Для каждой из температур построен график зависимости скорости, при которой движение жидкости становится турбулентным, от температуры.



Рис. 19. Зависимость отклика от входного сигнала для камертона на 31 кГц в жидком гелии при различных температурах.

Зная, электромеханическую константу, ток легко можно перевести в скорость. 1 мкА соответствует примерно 0.147 м/с.



Рис. 20. Зависимость добротности камертона на 31 кГц от входного сигнала в жидком гелии при различных температурах.

Из графиков видно, что при понижении температуры отклик камертона при тех же входных сигналах становится все выше и выше. Это связано с уменьшением плотности нормальной

компоненты жидкости с понижением температуры. Однако, можно видеть, что добротность камертона в нормальной жидкости при температуре 2.5 К примерно в три раза ниже добротности при 4.2 К. С чем это может быть связано, пока не очень понятно. Можно предположить, что при откачке паров гелий кипит интенсивнее, чем без откачки. То есть камертон пытается создать колебания в жидкости, в которой уже есть свои возмущения, связанные с кипением.

По полученным данным построим график зависимости тока через камертон, при котором движение гелия становится турбулентным от температуры.



Рис. 21. Зависимость критической скорости движения зубцов камертона на 31 кГц, при которой движение становится турбулентным, от температуры.

2) Камертон на 32 кГц

Ситуация несколько похожа на ту, что наблюдалась для камертона на 31 кГц, однако, и здесь не обошлось без сюрпризов. Добротность при температуре 2.1 К оказалась значительно ниже, чем при температуре 4.1 К.



Рис. 22. Зависимость отклика от входного сигнала для камертона на 32 кГц в жидком гелии при различных температурах.

Зная, электромеханическую константу, ток легко можно перевести в скорость. 1 мкА соответствует примерно 0.125 м/с.



Рис. 23. Зависимость добротности камертона на 32 кГц от входного сигнала в жидком гелии при различных температурах.

Построим график зависимости скорости, при которой гелий становится турбулентным, как функцию температуры.



Рис. 24. Зависимость критической скорости движения зубцов камертона на 32 кГц, при которой движение становится турбулентным, от температуры.

3) Камертон на 76 кГц

Нами были проведены испытания двух камертов на 76 кГц. Однако, результатами исследований с первым образцом мы не были удовлетворены, поскольку резонансные кривые в жидком гелии получились очень кривые. Одна из таких кривых приведена на рисунке.



Рис. 25. Резонансная кривая для отбракованного камертона при температуре 2.1 К.

Теперь подробнее рассмотрим измерения для второго камертона в жидком гелии при разных температурах



Рис. 26. Зависимость отклика от входного сигнала для камертона на 76 кГц в жидком гелии при различных температурах.

Графики оказались примерно аналогичными тому, что получилось для частоты 31 кГц. Снова отклик при температуре 2.5 К ниже, чем при температуре 4.2 К. Ток легко можно перевести в угловую скорость, зная электромеханическую константу. 1 мкА соответствует 1250 рад/с.



Рис. 27. Зависимость добротности камертона на 76 кГц от входного сигнала в жидком гелии при различных температурах.

По полученным данным построим график зависимости тока через камертон, при котором движение гелия становится турбулентным от температуры



Рис. 28. Зависимость критической угловой скорости вращения зубцов камертона на 76 кГц, при которой движение становится турбулентным, от температуры.

Оценка мощности

Одной из наших основных задач является определение мощности, которую может вкачать камертон в вихревую систему, а также оценка стационарной концентрации вихрей системы.



Рис. 29. Наглядное изображение по подсчету мощности

Чтобы иметь более наглядное представление, как это сделать, рассмотрим график (рис.9). Красная прямая на графике – зависимость тока в резонансе от подаваемого напряжения в вакууме. Зафиксируем некоторое значение тока *I*. Мощность есть произведение $W = I^*U$, таким образом, она численно равна площади желтого прямоугольника на графике. Поскольку в вакууме энергия не может рассеиваться на колебания окружающей среды, то эта мощность поглощается в самом камертоне и идет на его нагрев. Наиболее правильно проводить это измерение при температуре жидкого гелия, тогда будет более корректным сравнивать данные. Теперь опустим камертон в жидкость. Выделяемая мощность при том же токе через камертон (и той же максимальной скорости движения ножек камертона) (при токе I) будет существенной больше и численно равна площади всего прямоугольника на графике. Но желтая его часть идет на нагрев самого камертона. Таким образом, в жидкости поглощается мощность, численно равная площади оранжевого прямоугольника. Теперь остается понять, какая часть этой мощности идет на ламинарное движение, а какая часть идет на образование вихрей (её-то мы и ищем). Как известно, при ламинарном течении ток от напряжения зависит линейно (скорость движения линейна от приложенной силы). Далее, при переходе из ламинарного режима в турбулентный, зависимость становится квадратичной ($F \sim v^2$). Мы можем построить линейную аппроксимацию ламинарного режима (продлить прямую). Так что заштрихованный прямоугольник между реальной кривой и линейной аппроксимацией ламинарного режима и покажет нам, сколько энергии идет на возбуждение вихрей в системе.

Приведем графики зависимостей мощности от тока, текущего через камертон. Зная электромеханические константы камертонов, можно понять, как мощность создаваемых вихрей будет зависеть от скорости движения зубцов. Поскольку ток при ламинарном течении пропорционален напряжению, мощность пропорциональна квадрату тока, то есть $W \sim I^2$. При переходе в турбулентный режим ток пропорционален уже квадрату напряжения, и мы видим, что мощность $W \sim I^3$.

Приведем графики зависимости мощности от тока (что почти тоже самое, что от скорости) для всех наших камертонов.

1) 31 кГц



Рис. 30. График зависимости мощности, идущей на движение жидкого гелия, от тока (1 мкА соответствует скорости движения зубцов порядка 15 см/с), протекающего через камертон на 31 кГц.

Видно, что при температуре 1,3 К при тех же скоростях гелию передается меньшая энергия, чем при более высоких температурах. Это вполне логично, поскольку при 1.3 К плотность сверхтекучей компоненты достаточно высока, и поэтому тратится гораздо меньше усилий, для того, чтобы набрать заданную скорость. Так обстоит дело при не очень больших скоростях, когда движение жидкости ламинарно. Однако, когда в системе образуются вихри, зависимость энергии, вкачиваемой в систему от температуры становится уже менее заметна.

2) 32 кГц



Рис. 31. График зависимости мощности, идущей на движение жидкого гелия, от тока (1 мкА соответствует скорости движения зубцов порядка 12.5 см/с), протекающего через камертон на 32 кГц.

Напомним, что 1 мкА соответствует примерно 0,125 м/с. На этом графике наглядно можно видеть, что при больших скоростях при температуре 4.2 К в систему уходит меньше энергии, чем в сверхтекучем гелии. Это объясняется тем, что нормальный гелий ещё не перешел в турбулентное состояние, а потери на вязкое трение ниже, чем потери на создание квантовых вихрей в сверхтекучем гелии.

3) 76 кГц



Рис. 32. График зависимости мощности, идущей на движение жидкого гелия, от тока (1 мкА соответствует угловой скорости движения зубцов порядка 1250 рад/с), протекающего через камертон на 76 кГц.

1 мкА соответствует примерно угловой скорости 1250 рад/с.

Теперь приведем графики зависимости мощности, идущей именно в вихревую систему от температуры

1) 31 кГц



Рис. 33. График зависимости мощности, идущей на создание вихрей в жидком гелии, от тока, протекающего через камертон на 31 кГц.

2) 32 кГц



Рис. 34. График зависимости мощности, идущей на создание вихрей в жидком гелии, от тока, протекающего через камертон на 32 кГц.

3) 76 кГц



Рис. 35. График зависимости мощности, идущей на создание вихрей в жидком гелии, от тока, протекающего через камертон на 76 кГц.

Оценка размеров вихревой структуры.

Энергия на единицу длины вихревой нити с циркуляцией $\varkappa = n \frac{h}{m_4}$ вычисляется по формуле

$$\varepsilon_v = \frac{\rho_s \varkappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a_0}$$
, где h – постоянная Планка, m_4 – масса молекулы гелия, $h/m_4 = 9.98 \times 10^{-8} \text{ м}^2/\text{c}$ –

квант циркуляции, *ρ*_s – плотность сверхтекучей компоненты, *b* имеет величину порядка среднего расстояния между вихрями, *a*₀ – радиус сердцевины.

Оценивая $n \sim 1$ (вихрям энергетически выгодно принимать минимально возможное n), ln (b/a_0) ~ 1 (что вполне разумно при достаточно плотной упаковке вихрей), $\rho_s = 0.147$ г/см³, получаем энергию на единицу длины вихревой нити $\varepsilon_v = \frac{\rho_s \varkappa^2}{4\pi} \ln \frac{b}{a_0} \sim \frac{150 * 10^{-14}}{12.5} \approx 1.2 \cdot 10^{-13} \frac{Д \pi}{M}$.

Учитывая, что для камертона на 31 кГц максимальная мощность, идущая на вихри, равна примерно 30 мкВт, а для камертона на 32 кГц примерно 83 мкВт, а для камертона на 76 кГц примерно 13 мКв получаем суммарную длину вихревых линий, образующихся за секунду:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \sim 2.5 \cdot 10^8 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{c}}$$
 - для камертона на 31 кГц;

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \sim 7 \cdot 10^8 \, \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{c}}$$
 - для камертона на 32 кГц

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} \sim 10^8 \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{c}}$$
 - для камертона на 76 кГц.

Стоит отметить, что максимальная мощность, передаваемая в систему камертон-гелий-вихри, определяется максимальным напряжением генератора (10 V) и активным сопротивлением камертона. Это объясняет различие в абсолютных величинах, полученных в данных оценках для разных камертонов. Для различных камертонов при максимальном напряжении достигаются различные скорости. Приведем их значения, а также критические скорости, при которых движение гелия становится турбулентным:

- 1) 31 кГц : $v_{max} \sim 1$ м/с; $v_{kr} \sim 14$ см/с
- 2) 32 KF11: $v_{max} \sim 2.4$ M/c; $v_{kr} \sim 29$ cm/c
- 3) 3) 76 кГц $\omega_{max} \sim 3750 \text{ c}^{-1}$; $v_{max} \sim 0.5 \text{ m/c}$; $\omega_{kr} \sim 500 \text{ c}^{-1}$; $v_{kr} \sim 6 \text{ cm/c}$

Теперь оценим равновесную концентрацию вихрей в системе:

По формуле Вайнена (см. [9]) скорость зарождения вихрей определяется по формуле $\left(\frac{dL}{dt}\right)_{\text{gen.}} = \chi_1 \frac{B}{2} \frac{\rho_n}{\rho} |v_s - v_n| L^{\frac{3}{2}}$, χ_2 – некоторая константа порядка единицы, В – некоторая константа, значение которой $B \sim 1.5$ (см. [10]), $v \sim 2$ м/с, $\frac{\rho_n}{\rho} \sim 0.05$ (*T*~1.3K). Объем нашей низкотемпературной вставки оценим как 10 мл. Подставляя в формулу, полученную Вайненом, скорость зарождения вихрей, можем получить их равновесную концентрацию. Таким образом, получаем:

1) 31 кГц – равновесная концентрация вихрей ~ $3.5*10^5$ м/см = $3.5*10^7$ см⁻²

- 2) 32 кГц равновесная концентрация вихрей ~ $4*10^5$ м/см = $4*10^7$ см⁻²
- 7) 76 кГц равновесная концентрация вихрей ~ $3*10^5$ м/см = $3*10^7$ см⁻²

V. Выводы

В работе была поставлена задача исследовать различные камертоны в жидком гелии. В ходе калибровки камертонов были получены следующие электромеханические константы:

1)
$$a \approx 6.8 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Кл}}{\text{м}}$$
 для камертона на 31 кГц;

2)
$$a \approx 7.96 \cdot 10^{-6} \frac{K\pi}{M}$$
 для камертона на 76 кГц.

Пользуясь определением электромеханической константы, можно из амплитуды тока получить амплитудную скорость движения зубцов камертона из формулы $v(t) = \frac{I(t)}{a}$. Таким образом, ток в 1 мкА соответствует примерно 0.149 м/с для камертона на 31 кГц и 0.125 м/с для камертона на 32 кГц.

Несколько иначе дело обстоит с торсионным камертоном на 32 кГц. Эти камертоны мало кто изучал, поэтому теория колебаний таких камертонов была разработана нами самостоятельно. По аналогии с изгибными колебаниями, для торсионных камертонов существует своя электромеханическая константа, однако, теперь она связывает уже угловую скорость и ток по формуле $\omega(t) = \frac{I(t)}{\tilde{a}}$. Эта константа была посчитана и составляет $\tilde{a} \approx 8 \cdot 10^{-10}$ A·c.

После калибровки были произведены измерения в жидком гелии при различных температурах. Из графиков видно, что при повышении температуры скорость движения зубцов, при котором гелий переходит в турбулентный режим, повышается. Это связано с тем, что при повышении температуры повышается плотность нормальной компоненты, и, таким образом, потери на трения не дают жидкости перейти в турбулентное состояние. Скорости движение зубцов, при котором течение жидкости становится турбулентным при температуре 1.3 К порядка 0.1 – 0.3 м/с. Для торсионного камертона угловая скорость составляет порядка 500 рад/с.

Была проведена оценка скорости образования вихревых линий в системе. Из этих данных можно определить равновесную концентрацию вихрей в системе, зная, как она связана со скоростью образования вихрей. Для наших камертонов получилась равновесная концентрация порядка 10⁷ см⁻². Эти данные могут пригодиться, например, для исследования влияния квантовых вихрей на волны второго звука в жидком гелии.

Список литературы

- Blaauwgeers R., Blazkova M., C^{*} lovec ko M., Eltsov V.B., de Graaf R., Hosio J., Krusius M., Schmoranzer D., Schoepe W., Skrbek L., Skyba P., Solntsev R.E., and Zmeev D.E. Quartz Tuning Fork: Thermometer, Pressure- and Viscometer for Helium Liquids. – Journal of Low Temperature Physics. – March 2007. – Vol. 146, Nos. 5/6
- 2. Тилли Д.Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и Сверхпроводимость. М.: Мир, 1977.- 304с.
- Deepak Garg. Experimental investigation of quantized vortices using grid and quartz tuning forks in superfluid helium-4 in the zero temperature limit. – Submitted for the degree of doctor of philosophy. – Department of physics Lancaster university Lancaster, UK. – July 2010.
- 4. *Blažková M., Schmoranzer D., Skrbek L., and Vinen W. F.* Generation of turbulence by vibrating forks and other structures in superfluid ⁴He. Physical Review B 79, 054522 _2009_
- Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Том 6. Гидродинамика. 5-е издание. М.: Физматлит, 2001
- 6. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Том 7. Теория упругости. 5-е издание. М.: Физматлит, 2003. 264 с.
- 7. В.В. Болотин и др. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах. Том 1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978.
- 8. *Д.Б. Ким, А.А. Кропотов, И.Г. Махро*. Физика. Механика: лабораторный практикум. 4-е изд. перераб. и доп. Братск: ГОУ ВПО «БрГУ», 2010. 143 с.
- 9. W. F. Vinen. Mutual friction in a heat current in liquid helium II. III. Theory of muyual friction.
 F.R.S. 23 May 1957
- 10. H.E. Hall and W.F. Vinen. The rotation of liquid helium II. I. Experiments on the propagation of second sound in uniformly rotating helium II. F.R.S. 18 June 1956
- 11. Khaled Karrai. Lecture notes on shear and friction force detection with quartz tuning forks. –
 Work presented at the "Ecole Thématique du CNRS" on near-field optics. March 2000, La
 Londe les Maures, France
- 12. Э.Л. Андроникашвили, И.П. Каверкин. ЖЭТФ, 128, 126 (1955)