

КВАНТОВЫЕ ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

- 10.1. Параллели и различия между классическим и квантовым фазовыми переходами
- 10.2. Критическая окрестность квантового перехода
- 10.3. Квантовые переходы металл-изолятор
- 10.4. Квантовые переходы между разными состояниями холловской жидкости

Глава является сокращенным вариантом обзора [1] в УФН. Желая освоить математический аппарат теории квантовых фазовых переходов следует обратиться к книге [2]; с основными идеями можно ознакомиться также в обзорах [3, 4]. Аналогичную исходную систему понятий, постановку вопросов, приемы рассмотрения можно найти в книге о термодинамических фазовых переходах [5].

Выше мы уже дважды встречались с квантовыми фазовыми переходами: в гл. 5 и 6 речь шла о переходах металл-изолятор, в гл. 9 обсуждались переходы между разными состояниями квантовой холловской жидкости. Принципиальным в обоих случаях является то, что переходы могут происходить при абсолютном нуле температуры $T = 0$ (см. в связи с этим дискуссию в начале гл. 5). Именно по этому признаку их относят к *квантовым* переходам, описывающим изменение *основного состояния*, когда некоторый управляющий параметр x принимает критическое значение x_c .

В принципе существуют два типа квантовых переходов. Точка квантового перехода может быть конечной точкой линии термодинамических переходов на плоскости (x, T) , т.е. на плоскости (управляющий параметр – температура): $x_c(T) \rightarrow x_c(0)$ при $T \rightarrow 0$. Например, обычно так ведут себя магнитные переходы и переходы сверхпроводник-изолятор с магнитным полем в качестве управляющего параметра. Квантовые переходы, которые обсуждаются здесь, в принципе реализуются только при $T = 0$, а при конечной температуре превращаются в плавный кроссовер (см., например, рис. 6.3 в гл. 6). Поэтому они изображаются изолированной точкой x_c на оси абсцисс плоскости (x, T) . Мы ограничимся здесь именно этим случаем.

Мы начнем изложение материала этой главы с обсуждения на качественном уровне тех идей, которые были заложены в основу при построении теории квантовых фазовых переходов. Затем посмотрим, в какой мере в общую теоретическую схему укладываются известные нам данные о переходах металл-изолятор и о переходах между разными квантовыми холловскими жидкостями.

10.1. ПАРАЛЛЕЛИ И РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ КЛАССИЧЕСКИМ И КВАНТОВЫМ ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Прежде чем обсуждать квантовые фазовые переходы по существу, кратко напомним некоторые положения статистической физики. Будем предполагать, что мы имеем дело с макроскопической системой, состоящей из огромного числа частиц. Рассматриваемая система почти изолирована и во многих отношениях ведет себя как замкнутая, однако у нее имеется возможность обмениваться частицами и энергией с еще большей системой, служащей резервуаром, т.е. наша система является подсистемой резервуара.

Центральное место в описании систем, находящихся в тепловом равновесии, занимает статистическая сумма

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/T}, \quad (10.1)$$

в которой суммирование происходит по всем возможным состояниям системы, а ε_i — энергии этих состояний. Вообще говоря, функция Z аналитическая, но в точках фазовых переходов она теряет аналитичность и имеет особенности.

С помощью функции Z можно вычислять значения физических величин, характеризующих систему в равновесии. В частности, через статистическую сумму Z выражается вероятность $p_i \propto \exp(-\varepsilon_i/T)$ пребывания системы в состоянии с энергией ε_i :

$$p_i = \frac{e^{-\varepsilon_i/T}}{\sum_i e^{-\varepsilon_i/T}} = \frac{e^{-\varepsilon_i/T}}{Z}. \quad (10.2)$$

То обстоятельство, что энергия подсистемы не фиксирована, а подчиняется распределению (10.2), означает наличие классических тепловых флуктуаций.

Для перехода к квантовомеханическому описанию предположим сначала, что подсистема полностью замкнута и никак не взаимодействует с большой системой. Это позволяет воспользоваться стандартным аппаратом квантовой механики и применить к подсистеме стационарное уравнение Шредингера. Получившийся набор стационарных значений энергии ε_i и соответствующий набор волновых функций $\varphi_i(q)$ системы можно считать атрибутами подсистемы в нулевом приближении. В выражении (10.1) фигурируют именно эти энергии ε_i . Набор функций $\varphi_i(q)$ удобен тем, что он имеет отношение к рассматриваемой подсистеме и в то же время является полным, так что по нему удобно производить разложения.

Формулы (10.1) и (10.2) можно переписать с помощью функций $\varphi_i(q)$. Обозначим через q точку в координатном пространстве \mathcal{Q} обобщенных координат нашей системы. Вероятность того, что система находится в точке q , будучи в этом состоянии, равна $\varphi_i^*(q)\varphi_i(q)$. Если $\varphi_i(q)$ лишь одно из многих возможных состояний системы, то полная вероятность $P(q)$ найти ее в точке q получается суммированием по всем состояниям:

$$P(q) = \frac{1}{Z} \sum_i \varphi_i^*(q)\varphi_i(q)e^{-\varepsilon_i/T}. \quad (10.3)$$

Поскольку интеграл $\int P(q)dq = 1$, статистическая сумма Z равна сумме интегралов

$$Z = \sum_i \int \varphi_i^*(q)\varphi_i(q)e^{-\varepsilon_i/T} dq, \quad (10.4)$$

причем суммирование происходит по полной системе функций $\{\varphi_i\}$. Впрочем, соотношение (10.4) можно было получить и непосредственно из уравнения (10.1), умножив в нем каждый член суммы на тождественно равный единице интеграл $\int \varphi_i^*(q)\varphi_i(q)dq$ и внося множитель $e^{-\varepsilon_i/T}$ под знак интеграла.

Строго говоря, из-за взаимодействия с внешним окружением подсистема не может быть описана волновой функцией. Вместо нее для описания подсистемы вводится матрица плотности

$$\rho(q', q) = \int \psi^*(q', X)\psi(q, X)dX, \quad (10.5)$$

где q соответствует совокупности координат подсистемы, X — оставшиеся координаты системы, а $\psi(q, X)$ — волновая функция замкнутой системы.

Средние значения $\langle s \rangle$ любой физической величины вычисляются теперь не с помощью волновой функции, а с помощью матрицы плотности

$$\langle s \rangle = \frac{1}{A} \int \left\{ \widehat{s}[\rho(q', q)] \right\}_{q'=q} dq, \quad A = \int \rho(q, q)dq. \quad (10.6)$$

В этом выражении сначала следует применить оператор \widehat{s} , действующий на функции от переменной q , к $\rho(q', q)$, затем положить $q' = q$ и проинтегрировать. Оператор, который формально входит в выражение для нормировочной константы A , тождественно равен единице; поэтому в подынтегральном выражении сразу учтено, что $q' = q$.

В соответствии с общим правилом (10.6), среднее значение координаты $\langle q \rangle$, например, равно

$$\langle q \rangle = \frac{1}{A} \int \int \psi^*(q, X)q\psi(q, X)dq dX = \frac{\int q\rho(q, q)dq}{\int \rho(q, q)dq}. \quad (10.7)$$

Физический смысл матрицы плотности можно прояснить, выписав ее в явном виде для подсистемы, находящейся в статистическом равновесии при конечной температуре T :

$$\rho(q', q) = \sum_i \varphi_i^*(q')\varphi_i(q)e^{-\varepsilon_i/T}. \quad (10.8)$$

Из формул (10.7) и (10.8) получим для подсистемы в статистическом равновесии

$$\langle q \rangle = \frac{1}{A} \sum_i \int \varphi_i^*(q)\varphi_i(q)e^{-\varepsilon_i/T} q dq = \frac{1}{A} \sum_i \langle q \rangle_i e^{-\varepsilon_i/T}, \quad \langle q \rangle_i = \int \varphi_i^*(q)\varphi_i(q)q dq. \quad (10.9)$$

Проведенное в (10.9) усреднение с помощью матрицы плотности включает в себя как результат вероятностного описания в квантовой механике в виде $\langle q \rangle_i$, так и неполную информацию о системе (статистическое усреднение).

Пользуясь функциями $\varphi_i(q)$, функцию $\rho(q', q)$ можно записать в матричном виде

$$\rho(q', q) = \|\rho_{ij}\| = \left\| \int \varphi_j^*(q) \rho(q', q) \varphi_i(q) dq \right\| \quad (10.10)$$

Нормированная матрица плотности

$$w_{ij} = \frac{\rho_{ij}}{\sum_i \rho_{ii}}. \quad (10.11)$$

называется статистической матрицей.

Подставив с уравнение (10.6) вместо \hat{s} оператор энергии \hat{H} , получим

$$\langle \varepsilon \rangle = \sum_i w_{ii} \varepsilon_i. \quad (10.12)$$

Это означает, что вероятность p_i обнаружить у нашей подсистемы энергию ε_i равна диагональному элементу матрицы w_{ii}

$$p_i = w_{ii}. \quad (10.13)$$

Выражение (10.13) является квантовым аналогом соотношения (10.2).

Зависимость волновой функции подсистемы не только от ее внутренних обобщенных координат q_{in} , но и от внешних по отношению к ней координат системы q_{out} сохраняется и при $T = 0$. Поэтому даже при $T = 0$ у рассматриваемой подсистемы нет четко зафиксированного основного состояния, в котором она должна все время находиться. Именно это позволяет реализовываться *квантовым флуктуациям*. При этом измеряемая энергия подсистемы тоже может флуктуировать в рамках, допускаемых соотношением неопределенности

$$\delta \varepsilon \tau \sim \hbar. \quad (10.14)$$

В частности, наличие квантовых флуктуаций означает, что при $T = 0$ в одной из фаз вблизи точки перехода в течение времени τ могут существовать области чужой фазы с характерными размерами ξ . Как обычно, корреляционная длина ξ зависит от расстояния до перехода $\delta x = |x - x_c|$, а на самом переходе расходится. Энергия $\delta \varepsilon$, необходимая для появления такой области, зависит от расстояния до перехода δx и от размера ξ . Она в свою очередь ограничивает время τ : время τ тем меньше, чем больше энергия квантовой флуктуации.

На математическом языке сказанное означает, что, в отличие от классического выражения (10.2), квантовое выражение (10.13) для p_i не стремится экспоненциально к нулю по мере понижения температуры, а приближается к константе, зависящей не от температуры, а от ε_i , размеров и свойств подсистемы (см.рис. 10.1а).

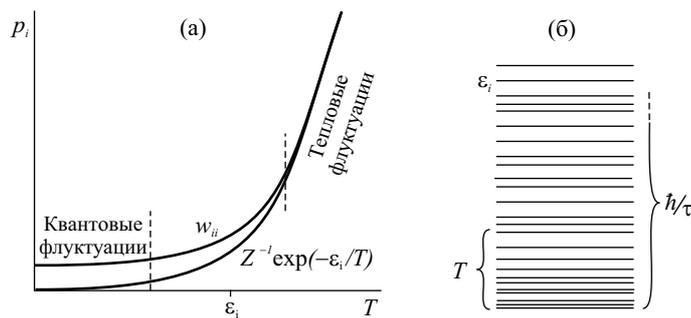


Рис. 10.1: а) Низкотемпературное поведение диагональных элементов w_{ii} статистической матрицы, соответствующих малым значениям энергии; б) одновременное возбуждение тепловых и квантовых флуктуаций

Относительную роль тепловых и квантовых флуктуаций поясняет рис. 10.1б. На нем изображен спектр возбуждений подсистемы в одной из фаз, т.е. вдали от точки $x = x_c$ фазового перехода. Скобка слева показывает

масштаб, связанный с температурой. Классически возбужденными являются только моды с частотами $\omega_i \lesssim T/\hbar$. Диапазон тепловых мод ограничен сверху температурой, но зато у этих мод большие числа заполнений. Моды $\omega_i > T/\hbar$ возбуждаются в основном за счет квантовых процессов и имеют малые числа заполнений. Однако, чем ниже температура, тем роль квантовых возбуждений больше.

Классические статистические суммы в виде (10.1) или (10.4) содержат только члены, описывающие тепловые флуктуации, каждый из которых имеет множитель $\exp(-\varepsilon/T)$. Для теоретического описания квантового фазового перехода, аналогичного теории термодинамического перехода, нужно построить выражение, которое бы играло роль статистической суммы, но содержало бы члены, описывающие квантовые флуктуации. Построением такого выражения мы сейчас и займемся.

Статистическую сумму Z , записанную в виде (10.4), можно считать суммой диагональных матричных элементов оператора $\exp(-\hat{H}/T)$ на полном наборе собственных функций φ_i . Этот оператор очень похож на оператор

$$\hat{S} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right), \quad (10.15)$$

который описывает эволюцию квантовой системы во времени. Собственную функцию гамильтониана \hat{H} этот оператор лишь умножает на фазовый множитель:

$$\varphi_i(t) = \hat{S}\varphi_i(0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t\right)\varphi_i(0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_i t\right)\varphi_i(0),$$

но на произвольную функцию $\Psi(q, 0) = \sum_i a_i \varphi_i(q)$ он воздействует более радикально:

$$\Psi(q, t) = \hat{S}\Psi(q, 0) = \hat{S} \sum_i a_i \varphi_i(q) = \sum_i a_i e^{-i\varepsilon_i t/\hbar} \varphi_i(q), \quad (10.16)$$

поскольку члены суммы (10.16) приобретают разные изменения фазы.

У оператора \hat{S} диагональные матричные элементы $\langle \Psi_i | \exp(-i\hat{H}t/\hbar) | \Psi_i \rangle$ очень похожи на матричные элементы (10.4). Совпадение станет полным, если сделать замену переменных:

$$it/\hbar = 1/T. \quad (10.17)$$

Подстановка (10.17) позволяет по-новому интерпретировать матричные элементы (10.4). Квадрат элемента $\langle i | \exp(-\hat{H}/T) | i \rangle$ можно рассматривать как вероятность того, что подсистема, стартовав из состояния $\langle i |$ и эволюционируя под действием оператора \hat{S} , вернется в исходное состояние $|i\rangle$ через "мнимое время" \hbar/iT . При этом следует иметь в виду, что вследствие открытости подсистемы ее волновая функция не является стационарной, $|i\rangle \equiv \Psi(q, 0) = \Psi(q, \hbar/T) \neq \varphi_i(q)$; это относится и к промежуточным состояниям $|j\rangle \equiv \Psi(q, t)$, где $t < \hbar/T$.

Чтобы отличать мнимое время от реального, введем для него обозначение \tilde{t} . Мнимое время \tilde{t} является параметром, который управляет квантовой эволюцией волновой функции подсистемы. Оно изменяется в ограниченном диапазоне

$$0 < |\tilde{t}| < \hbar/T. \quad (10.18)$$

Допустимый интервал мнимого времени тем больше, чем ниже температура.

Пусть подсистема побывала за время $i\hbar/T$ в какой-то последовательности из N состояний, оставаясь в каждом время $\delta_k \tilde{t}$, и в конце, при $\sum_{k=0}^N \delta_k \tilde{t} = i\hbar/T$, вернулась в состояние $\langle i |$. Такая замкнутая траектория в пространстве состояний описывается произведением матричных элементов

$$P_{i\alpha} = \langle i | \exp(-i\hat{H}\delta_0\tilde{t}/\hbar) | j_1 \rangle \langle j_1 | \exp(-i\hat{H}\delta_1\tilde{t}/\hbar) | j_2 \rangle \dots \langle j_N | \exp(-i\hat{H}\delta_N\tilde{t}/\hbar) | i \rangle, \quad (10.19)$$

а на рис. 10.2 изображается линией, концы которой располагаются на противоположных сторонах полосы шириной \hbar/T точно друг под другом. Из рисунка ясно, что таких траекторий может быть очень много и

$$\langle i | \exp(-\hat{H}/T) | i \rangle = \sum_{\alpha} P_{i\alpha}. \quad (10.20)$$

После подстановки в описание (10.19) любой из них вместо функций $\langle j |$ их разложений (10.16) по полной системе функций $\{\varphi_i\}$ и интегрирования, в выражении останутся, вследствие ортогональности функций φ_i , только

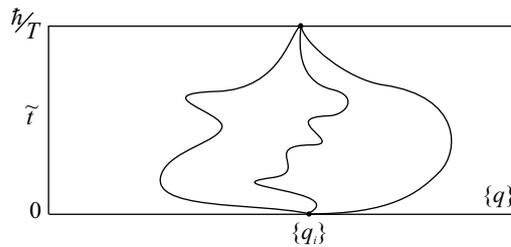


Рис. 10.2: Различные траектории подсистемы в координационном пространстве \mathcal{Q} в интервале изменения переменной $|\tilde{t}|$ от 0 до \hbar/T . Предполагается, что вдоль оси абсцисс располагаются все возможные состояния реальной подсистемы в пространстве размерности d .

диагональные элементы типа $\langle \varphi_i | \exp(-i\hat{H}\delta_0\tilde{t}/\hbar) | \varphi_i \rangle$, которые как раз и должны входить в статистическую сумму Z .

Произведение матричных элементов $P_{i\alpha}$ соответствует цепочке последовательных виртуальных переходов. Суммирование по α означает, что учтены все возможные замкнутые цепочки. Произведенная при помощи формулы (10.20) модернизация выражения для Z означает, что мы учли квантовые свойства системы, добавив к реальным переходам виртуальные. Однако, множество значений энергии $\{\varepsilon\}$, по которому происходит суммирование, теперь другое, потому что энергия меняется теперь не только при изменении координат q , но и со временем \tilde{t} . Такого числа разных состояний в нашей реальной системе нет. Однако, построим воображаемую классическую систему с большей размерностью с тем, чтобы показать, что *поведение квантовой системы в окрестности точки перехода при конечной температуре в пространстве размерности d аналогично поведению классической системы в пространстве большей размерности $\mathcal{D} > d$* .

Путь к такому построению указывает рис. 10.2. Добавим к d осям исходного пространства дополнительную ось, вдоль которой отложим мнимое время $\tilde{t} = it$. В графических образах рис. 10.2 это означает, что к оси абсцисс добавлена ось ординат. Полоса (10.18) на рис. 10.2, в которой находится изображающая точка, тем шире, чем ниже температура. При $T = 0$ полоса превращается в полуплоскость, а рост температуры, наоборот, сужает полосу и уменьшает ее вклад в статистические свойства квантовой системы.

Конечно, в общем виде получившаяся математическая конструкция абсолютно непрактична. Однако, как это обычно бывает при обосновании скейлинговых соотношений, для нас важно не вычисление конкретной статистической суммы, а некоторые ее принципиальные свойства в окрестности точки перехода. Как мы увидим, таким свойством является анизотропия \mathcal{D} -мерного пространства, т.е. неравноценность его осей.

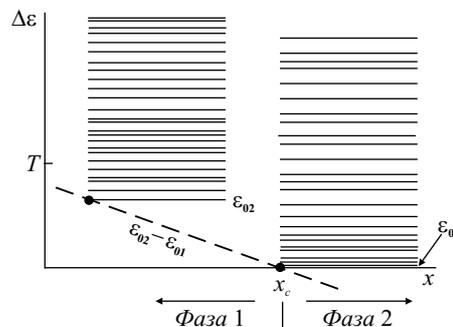


Рис. 10.3: Зависимость разности наимизших возможных значений энергии двух фаз $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}$ от управляющего параметра (штриховая прямая). При значении управляющего параметра $x = x_c - \delta x$ происходит флуктуационное возбуждение фазы 2 внутри равновесной фазы 1. Благодаря тому, что $|\Delta\varepsilon| < T$, основную роль в этом возбуждении играют тепловые флуктуации

В точке термодинамического фазового перехода статистическая сумма Z имеет особенность. Чувствительность функции (10.4) к наличию фазового перехода обусловлена тем, что при приближении к переходу в энергетический интервал T , определяющий существенные члены суммы (10.4), попадают не только уровни φ_i из набора, соответствующего равновесной фазе, но и уровни φ'_i неравновесной фазы (см. рис. 10.3). Это обуславливает возможность флуктуационных переходов между уровнями $|i\rangle$ и $|i'\rangle$ из разных наборов. После введения квантовых флуктуаций в статистическую сумму появились дополнительные возможности. Если температура

низкая, так что $|\Delta\varepsilon| > T$, то флуктуационное появление другой фазы все равно возможно, но только за счет квантовых флуктуаций.

10.2. КРИТИЧЕСКАЯ ОКРЕСТНОСТЬ КВАНТОВОГО ПЕРЕХОДА

Вблизи классического фазового перехода всегда существует окрестность на фазовой плоскости, в которой все физические величины зависят только от корреляционной длины ξ , которая представляет собой характерный размер тепловых флуктуаций. Эту окрестность называют критической или скейлинговой областью. Вблизи квантового фазового перехода, *при* $T = 0$, тоже существует область значений управляющего параметра δx , в которой физические величины выражаются через длину ξ , пропорциональную некоторой степени $|\delta x|$. Эта величина определяет характерный размер квантовых флуктуаций. При конечной температуре $T \neq 0$, однако, скейлинговая область квантового фазового перехода выглядит сложнее.

Пространство $\{^d X, \tilde{t}\}$ имеет размерность \mathcal{D} из-за дополнительного подпространства мнимого времени. Введем в нем корреляционные длины. Сохранив традиционное обозначение ξ для корреляционной длины в обычном d -мерном подпространстве, корреляционную длину вдоль дополнительных осей обозначим ξ_φ . Использованный индекс призван напоминать, что величина ξ_φ связана с квантовым аспектом задачи и со спецификой волновых функций.

Заметьте: Величина ξ_φ имеет размерность не длины, а \hbar/T , т.е. измеряется не в сантиметрах, а в секундах. Однако поскольку подпространство мнимого времени входит в \mathcal{D} -мерное пространство, то "длина" в соответствующих направлениях выступает в той же роли, что и настоящая длина ξ .

Обе корреляционные длины при приближении к переходу, т.е. при $x \rightarrow x_c$ и $T \rightarrow 0$, будут расходиться. Согласно теории термодинамических непрерывных переходов, расходимость описывается степенными функциями, но показатели степени у двух корреляционных длин могут быть, вообще говоря, разные. Обычно это записывается в таком виде:

$$\xi \propto \delta x^{-\nu}, \quad \delta x = |x - x_c|, \quad (10.21)$$

$$\xi_\varphi \propto \xi^z. \quad (10.22)$$

Показатели степени ν и z называются критическими индексами, причем к названию индекса z добавляют слово "динамический". И названия, и обозначения происходят из теории термодинамических переходов. В частности, динамический критический индекс входит там в соотношение, связывающее время жизни тепловых флуктуаций с их размером: $\tau \propto \xi^z$. В квантовой задаче при $T = 0$ все выглядит очень похоже: длина ξ характеризует пространственные корреляции, т.е. характерный размер квантовых флуктуаций, а время ξ_φ — временные корреляции.

Формула (10.22) сразу задает размерность пространства, в котором должна находиться воображаемая классическая система. Вдоль всех осей этого пространства должна быть отложена настоящая длина, т.е. из оси на рис. 10.2, вдоль которой отложено \tilde{t} , нужно сделать оси, вдоль которых отложена длина. По соображениям размерности из соотношения (10.22) следует, что длина, эквивалентная корреляционной псевдо-длине ξ_φ , пропорциональна

$$L_\varphi \propto \xi_\varphi^{1/z}, \quad (10.23)$$

так что элемент объема в интересующем нас пространстве пропорционален

$$(d\xi)^d d\xi_\varphi \propto (d\xi)^d (dL_\varphi)^z \quad (10.24)$$

и подпространство мнимого времени получается z -мерным, но с обычными "пространственными" координатами. Отсюда

$$\mathcal{D} = d + z. \quad (10.25)$$

Следствия уравнений (10.21) и (10.22) удобно обсуждать, используя плоскость (x, T) — см. рис. 10.4. При $T = 0$, на оси абсцисс плоскости (x, T) , управляющий параметр x влияет только на одну независимую корреляционную длину, ξ ; величину ξ_φ (и длину L_φ) можно формально получить из ξ при помощи уравнения (10.22).

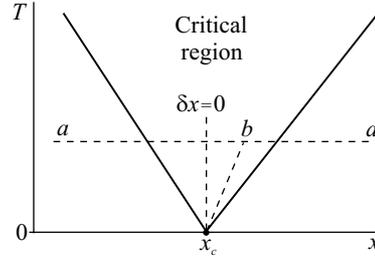


Рис. 10.4: Форма критической области квантового фазового перехода, изображаемого изолированной точкой на плоскости (x, T)

На некотором отрезке $[x_1, x_2]$, включающем в себя точку x_c , все физические величины выражаются только через ξ .

Пусть теперь температура $T \neq 0$. Будем двигаться по плоскости (x, T) вдоль горизонтальной линии $T \neq 0$ (линия aa на рис. 10.4) в направлении $x \rightarrow x_c$. При некотором значении δx величина ξ_φ , изменяющаяся в соответствии с соотношениями (10.21), (10.22), достигает своего максимально возможного значения \hbar/T , обусловленного неравенством (10.18). При меньших значениях δx на линии aa соотношение (10.22) уже не выполняется, потому что ξ растет в соответствии с соотношением (10.21), а ξ_φ остается равным своему максимально возможному значению \hbar/T . Параметры ξ и ξ_φ становятся *взаимно независимыми*. Область, в которой имеет место эта независимость, называется критической. Если теперь двигаться к переходу, оставаясь внутри критической области (например, вдоль линии bx_c), то на переходе по-прежнему расходятся оба параметра, но расходимость одного контролируется величиной δx : $\xi \propto \delta x^{-\nu}$, а расходимость другого контролируется температурой: $\xi_\varphi = \hbar/T$.

Название области определяется тем, что при квантовом переходе критической следует считать ту область, где в перемешивании состояний двух фаз существенную роль играют квантовые флуктуации. Как видно из рис. 10.3, это происходит только при выполнении условия

$$|\varepsilon_{02} - \varepsilon_{01}| > T. \quad (10.26)$$

При понижении температуры интервал значений управляющего параметра δx , в котором выполняется это условие, уменьшается. Отсюда необычная форма критической области, ее расширение при удалении от перехода.

Осмыслить и принять эту необычную форму может помочь такое рассуждение. При повышении температуры энергия каждой из фаз вдалеке от точки перехода x_c обычно представляется в виде суммы энергий основного состояния и набора квазичастиц. Естественно, что квазичастицы в разных фазах различны. На некотором отрезке прямой aa на рис. 10.4 над точкой x_c ни то, ни другое описание не годятся. Чем выше температура T , тем дальше от точки перехода проходит прямая и тем длиннее этот отрезок. Соединив границы всех отрезков, получим область на плоскости (x, T) , ограниченную двумя кривыми, исходящими из точки x_c . Вне этой области справедливо одно из двух микроскопических описаний, но внутри ни одно из них неприменимо. Поэтому для нее приходится конструировать феноменологическое скейлинговое описание.

Исходя из формулы (10.23), длину L_φ внутри критической области можно написать в виде

$$L_\varphi \propto (\hbar/T)^{1/z}, \quad (10.27)$$

Для электронных систем это диффузионная длина (2.7), с которой мы сталкивались в гл. 2 и 6. Конечная температура привносит в квантовую задачу характерную энергию T , которая, согласно рис. 10.1, разделяет классические и квантовые флуктуации. Квантовыми являются флуктуации с энергиями $\hbar\omega_\varphi > T$. Их пространственный размер $l_\varphi \propto 1/\omega_\varphi$ ограничен сверху, так как частота $\omega_\varphi > T/\hbar$ ограничена снизу. Длина L_φ как раз и является верхней границей для размера квантовых флуктуаций. Поэтому L_φ часто называют также длиной расфазировки, т.е. длиной, начиная с которой нарушается когерентность в системе электронов.

Появление двух независимых параметров в критической окрестности квантового фазового перехода обусловлено неравенством (10.18). Поэтому скейлинговое описание в критической окрестности квантового фазового

перехода называется "скейлинг в слое конечной толщины" ("finite-size scaling"). Имеется в виду, что воображаемая термодинамическая система существует в гиперполосе в \mathcal{D} -мерном пространстве с d переменными, меняющимися от 0 до ∞ , и z переменными, меняющимися в интервале от нуля до $(\hbar/T)^{1/z}$.

Внутри критической области $L_\varphi < \xi$, а на границе

$$L_\varphi = \xi. \quad (10.28)$$

Длины L_φ и ξ определены уравнениями (10.21) и (10.22) лишь с точностью до постоянного множителя, но уравнения жестко фиксируют степенную связь между этими переменными. Поэтому уравнение границ критической области имеет вид

$$T = C(\delta x)^{\nu z}, \quad (10.29)$$

где константа C может быть, вообще говоря, разной с двух сторон от перехода.

Поскольку в критической области два независимых параметра, скейлинговые выражения для физических величин усложняются. Мы приведем и прокомментируем только выражения для удельной проводимости и сопротивления

$$\sigma = \xi^{2-d} F(L_\varphi/\xi), \quad \rho = \xi^{d-2} F_1(L_\varphi/\xi), \quad F_1(u) = 1/F(u), \quad (10.30)$$

где $F(u)$ — произвольная функция. Показатель степени первого сомножителя в выражении (10.30) определяется тем, как длина входит в выражения для проводимости при разных размерностях d . Как видно из рис. 10.4, этот сомножитель определяется x -компонентой расстояния до перехода. Отношение L_φ/ξ безразмерное. Именно поэтому правила скейлинга позволяют сделать его аргументом произвольной функции. Отношение зависит и от T , т.е. от y -компоненты расстояния на фазовой плоскости от изображающей точки до перехода, и от расстояния от этой точки до границы критической области вдоль оси x .

В качестве аргумента можно также взять любую степень отношения L_φ/ξ . Это позволяет записать аргумент в разных формах, например,

$$\frac{L_\varphi}{\xi}, \quad \frac{\hbar/T}{\xi_\varphi}, \quad \frac{\hbar/T}{\xi^z}, \quad \frac{\hbar(\delta x)^{z\nu}}{T} \quad \text{или} \quad \frac{\delta x}{(T/\hbar)^{1/z\nu}}. \quad (10.31)$$

Разные формы записи проясняют разные аспекты физического смысла этого отношения. В двух последних формах записи аргумент является размерным и при этом размерность управляющего параметра заранее не задана; эти формы показывают, как температура входит в аргумент скейлинговой функции.

Хотя физические свойства системы в критической области определяются двумя независимыми параметрами, построенная схема называется однопараметрическим скейлингом, потому что сама система при $T = 0$ полностью определена одним параметром. Для невзаимодействующих электронов это, например, кондактанс системы, который, в свою очередь, задается электронной концентрацией и беспорядком. Однако, уже в сильном магнитном поле формально параметров становится два: поперечный кондактанс и поле, так что скейлинг становится двухпараметрическим.

Двухпараметрическим скейлинг становится и при учете межэлектронного взаимодействия, зависящего от температуры и характерного размера системы. Мы в этой книге стараемся избегать систем взаимодействующих электронов, но один пример системы с таким перенормируемым взаимодействием у нас все же был: спин-орбитальное взаимодействие в разд. 6.4. Оно эффективно включается лишь, когда размер образца L становится больше величины $l(\tau_{so}/\tau)^{1/2}$ (см. обозначения в разд. 6.4 и формулу (2.4)).

Описание схемы применения двухпараметрического скейлинга можно найти в обзоре [6]. Здесь же мы только отметим одно неявное предположение, позволившее построить схему однопараметрического скейлинга: предполагается, что уравнение (10.21) для ξ справедливо не только при $T = 0$, но и при конечных температурах. Благодаря этому происходит разделение влияния переменных:

$$\xi = \xi(x), \quad L_\varphi = L_\varphi(T); \quad (10.32)$$

корреляционная длина ξ зависит только от x , а длина сбоя фазы L_φ только от T .

10.3. КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕТАЛЛ-ИЗОЛЯТОР

Трехмерный электронный газ. В разделе 6.2 была построена фазовая диаграмма окрестности 3D-перехода металл-изолятор. Посмотрим теперь на нее с точки зрения понятий и определений, фигурирующих в теории



Рис. 10.5: Окрестность квантового фазового перехода трехмерного электронного газа на плоскости $[x, T]$

квантовых переходов, см. рис. 10.5. Управляющий параметр x на рис. 6.2 не был конкретизирован, но предполагалось, что имеет место соотношение

$$\xi \propto (\delta x)^{-1}, \quad \text{т. е.} \quad \nu = 1. \quad (10.33)$$

Это предположение сохраняется и на рис. 10.5. Оно не ограничивает универсальность диаграммы, потому что и в формулы (6.17), (6.20) для проводимости, и в уравнения (6.18), определяющие линии кроссоверов, все равно входит не x , а ξ . Две линии кроссоверов, выходящие из точки $(x_c, 0)$, являются границами критической области. Критическая область расширяется по мере увеличения температуры, как это и было постулировано на рис. 10.4. Из сравнения уравнений (6.18) и (10.29) получаем, что динамический критический индекс

$$z = 3. \quad (10.34)$$

Внутри критической области есть, как и требуется, два независимых параметра размерности длины: L_{ee} и ξ . Длина расфазировки L_{ee} была введена при анализе проводимости в металлической области (см. формулу (2.30)) и на границе критической области предполагается непрерывной. Численный коэффициент у величины ξ определяется из условия, что $\xi = l$ в точке предела Мотта, где $k_F l = 1$. Поэтому в уравнении (10.28) для границы с металлической областью обе функции полностью определены. На границе с областью изолятора величина $L_\varphi \equiv L_{ee}$ сшивается со средней длиной прыжка \bar{r} .

Заметьте: Значение (10.34) для динамического критического индекса $z = 3$ получилось благодаря предположению, что расфазировка происходит за счет внутренних процессов в электронном газе без привлечения внешних воздействий, таких как, например, электрон-фононное взаимодействие. (См. аналогичное замечание в гл. 6 после формулы (6.17), а также обсуждение физического смысла величины L_φ в обзоре [3].)

Выражение (6.15) для проводимости в критической области можно записать в виде, удовлетворяющем общему соотношению (10.30), положив $F(u) = (e^2/\hbar)(1 + 1/u)$:

$$\sigma = \xi^{-1} (e^2/\hbar) (1 + \xi/L_\varphi), \quad (10.35)$$

а формула (6.17) для $\sigma(T)$ получается из (10.35) подстановкой соотношения (10.27). Таким образом фазовую диаграмму рис. 6.2 окрестности 3D-перехода металл-изолятор, построенную на основании скейлинговой гипотезы, исходившей только из беспорядка и предполагавшей отсутствие взаимодействия, можно полностью описать в терминах теории квантовых переходов.

Перейдем теперь к 2D-системам.

Окрестность виртуального квантового фазового перехода на фазовой плоскости двумерного электронного газа. Согласно теории Абрагамса и др., обсуждавшейся в гл. 6, при отсутствии взаимодействия между электронами в двумерных системах вообще не должно быть перехода металл-изолятор. Однако, линия кроссоверов на плоскости [беспорядок – температура] есть. Действительно, перерисуем рис. 6.6 из гл. 6, направив ось x не вправо, а влево — рис. 10.6. Так получившуюся диаграмму будет удобнее сравнивать с диаграммой для 3D-систем на рис. 10.5. Управляющим параметром здесь является некая характеристика беспорядка, такая,

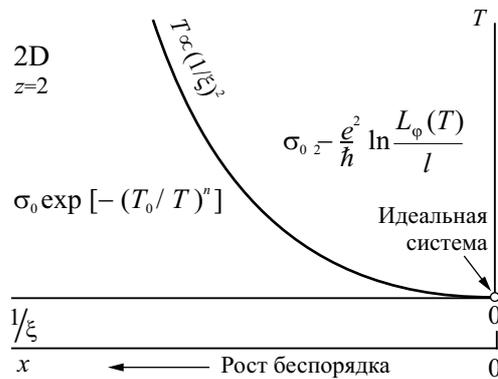


Рис. 10.6: Фазовая плоскость $(1/\xi, T)$ для невзаимодействующего двумерного электронного газа

что $x = 0$ соответствует его полному отсутствию. Строго говоря, вдоль горизонтальной оси отложена величина $1/\xi$, где ξ — корреляционная длина, определенная формулой (6.22). Поэтому можно сказать, что мы выбрали управляющий параметр таким образом, чтобы выполнялось соотношение (10.33). На диаграмме построена кривая (6.23), отделяющая область логарифмических поправок к проводимости от области, где происходит экспоненциальный рост сопротивления. Уравнение этой кривой

$$T = D\hbar/\xi^2, \quad \text{т. е.} \quad T \propto \xi^{-2} \quad (10.36)$$

(здесь D — коэффициент диффузии).

Нетрудно видеть, что рис. 10.6 представляет из себя левую часть фазовой диаграммы окрестности перехода металл–изолятор в трехмерном материале (см. рис. 10.5) с точкой фазового перехода, находящейся на краю диаграммы, в начале координат $T = x = 0$. Для системы невзаимодействующих электронов, локализующихся при сколь угодно малом беспорядке, это естественно: в строго идеальной системе нет оснований для локализации электронов. Когда в гл. 6 говорилось об отсутствии перехода в 2D-системе, подразумевалось, что идеальная система, в которой беспорядок полностью бы отсутствовал, недостижима.

Такая интерпретация графика на рис. 10.6 означает, что область над параболой $T \propto (1/\xi)^2$ является критической областью окрестности квантового перехода. В 2D-системах в формуле (10.30) для проводимости в критической области остается одна скейлинговая переменная u , равная отношению двух характерных длин:

$$\sigma = F(u) \equiv F(L_\varphi/\xi). \quad (10.37)$$

Между тем, в этой области мы обычно пользуемся выражением для проводимости в виде разности между классической частью и квантовой поправкой

$$\sigma = \frac{ne^2l}{\hbar k_F} - \Delta\sigma = \frac{e^2}{\hbar} \left(a_1 k_F l - a_2 \ln \frac{L_\varphi}{l} \right). \quad (10.38)$$

В формуле (10.38), в отличие от аналогичной формулы (6.21), сохранены численные коэффициенты a_1 и a_2 ; они не выписаны в явном виде, поскольку, вообще говоря, могут зависеть от конкретной модели электронного спектра. Наша цель здесь показать, что наличие этих коэффициентов не мешает представить проводимость (10.38) в виде (10.37).

Действительно, приравняв нулю выражение в скобках в (10.38), получим выражение для ξ (ср. с выводом формулы (6.22))

$$\xi = l \exp(ak_F l), \quad a = a_1/a_2. \quad (10.39)$$

Подставив в аргумент логарифма в (10.38) вместо l выражение из (10.39), $l = \xi \exp(-ak_F l)$, и вынеся экспоненту из-под знака логарифма, получим

$$\sigma = a_2^{-1} \frac{e^2}{\hbar} \ln \frac{L_\varphi}{\xi}. \quad (10.40)$$

Проводимость σ , включающая в себя классическую часть $\sigma_2 = ne^2l/\hbar k_F$, зависит только от скейлинговой переменной, как это и должно быть в критической области.

Поскольку уравнение (10.36) описывает границу критической области, из него получается динамический критический индекс $z = 2$. Вспомнив соответствующее значение (10.34) для трехмерных систем, увидим, что для переходов металл-изолятор динамический критический индекс равен размерности, $z = d$. Экспериментальным подтверждением этого соотношения для трехмерных систем являются кривые, представленные на рис. 6.4 и 6.5.

10.4. КВАНТОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ МЕЖДУ РАЗНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ ХОЛЛОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Совокупность проблем применения скейлинговых теорий к целочисленному квантовому эффекту Холла подробно обсуждается с теоретической точки зрения в обзоре [7].

Применим понятия теории квантовых переходов к переходам в системах, находящимся в режиме квантового эффекта Холла, и построим их скейлинговое описание. Поскольку речь пойдет исключительно о двумерных электронных системах, то и сопротивление, и удельное сопротивление, как продольное, так и холловское, все имеют одинаковую размерность [Ом], а соответствующие кондактанс и проводимость — размерность [Ом⁻¹]. Формально поведение системы электронов в сильном магнитном поле при $T = 0$ в окрестности фазовых переходов описывается двумя параметрами, но потоковая диаграмма на рис. 9.25 (разд. 9.7) содержит элемент симметрии: вертикальность сепаратрис, позволяющий упростить рассмотрение. Пусть изображающая точка движется вдоль сепаратрисы вследствие роста L или L_φ , приближаясь к точке квантового перехода. При этом меняется только кондактанс σ_{xx} , а холловская проводимость σ_{xy} остается постоянной. Это позволяет воспользоваться в окрестности перехода формулами однопараметрического скейлинга типа (10.30):

$$R_{uv} = F_{uv}(L_\varphi/\xi), \quad (10.41)$$

где под индексами u и v подразумеваются координаты x или y , а F_{uv} — какие-то неизвестные функции.

Согласно общепринятой модели КЭХ, вблизи центра каждого уровня Ландау существует одно значение энергии ε_c , которому соответствуют делокализованные волновые функции электронов. Переходы между разными состояниями холловской жидкости при $T = 0$ происходят при выполнении условия $\varepsilon_F = \varepsilon_c$. Управляющим параметром x является обычно магнитное поле B или концентрация двумерных электронов n , зависящая от напряжения на затворе V_g :

$$\delta x \equiv |B_c - B| \propto (\delta\varepsilon)^\nu \quad \text{или} \quad \delta x \equiv |n_c - n| \propto |V_{gc} - V_g| \propto (\delta\varepsilon)^\nu. \quad (10.42)$$

Степень ν в обоих случаях одна и та же. Это непосредственно следует из рис. 9.11 и 9.12 и подтверждается тем, что экспериментальные кривые $R_{uv}(B)$ и $R_{uv}(V_g)$, записанные на одном образце в эквивалентных условиях, различаются только масштабом по оси абсцисс (см. гл. 9). Воспользовавшись формулой (10.31), можно написать

$$R_{uv} = F_{uv} \left(\frac{\delta x}{T^{1/z\nu}} \right). \quad (10.43)$$

В отличие от случая переходов металл-изолятор, мы не будем здесь вычислять или предсказывать значения ν и z , а посмотрим, что можно извлечь из эксперимента. На рис. 10.7 приведены в качестве примера записи зависимостей от магнитного поля продольного R_{xx} и поперечного R_{xy} сопротивлений холловского мостика в гетероструктуре на базе GaAs [8], полученные при разных температурах.

Согласно формуле (10.43), когда управляющий параметр принимает критическое значение, скейлинговая переменная

$$u = \delta x / T^{1/z\nu} \quad (10.44)$$

тождественно равна нулю при всех температурах и

$$R_{uv}(x_c, T) = \text{const}. \quad (10.45)$$

Следовательно, сепаратриса (10.45) должна быть горизонтальна, а все изотермы $R_{uv}(x, T = \text{const})$ должны пересекаться в одной точке $x = x_c$. Это первое условие применимости теории, и оно выполнено для кривых $R_{uv}(T)$ на рис. 10.7.

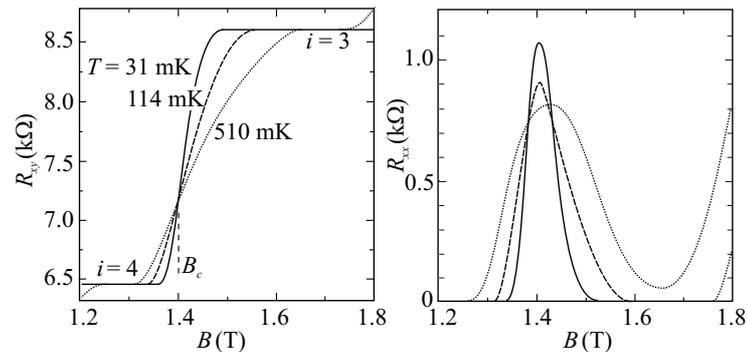


Рис. 10.7: Поперечное R_{xy} и продольное R_{xx} сопротивления при разных температурах на гетероструктуре $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}-\text{Al}_{0.33}\text{Ga}_{0.67}\text{As}$ со значением $x = 0.85\%$. Критическое магнитное поле перехода 4-3, определенное по точке пересечения кривых $R_{xy}(T)$, равно $B_c = 1.40$ Т. [8]

Сосредоточимся сначала на кривых $R_{xy}(T)$. Вблизи точки пересечения все кривые $R_{xy}(T)$ можно, разложив в ряд, заменить на прямые $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}(B - B_c)$. При изменении наклона прямых с $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}$ на $(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}/T^\kappa$, где $\kappa = 1/z\nu$, все прямые должны слиться в одну. Возможность подобрать такое значение κ , чтобы выполнялось соотношение

$$(\partial R_{xy}/\partial B)_{B_c}(T)/T^\kappa = \text{const}, \quad (10.46)$$

это второе условие применимости теории. Выбор κ осуществляется путем построения графика $(\partial R_{xy}/\partial B)$ от T в двойном логарифмическом масштабе (см. рис. 10.8).

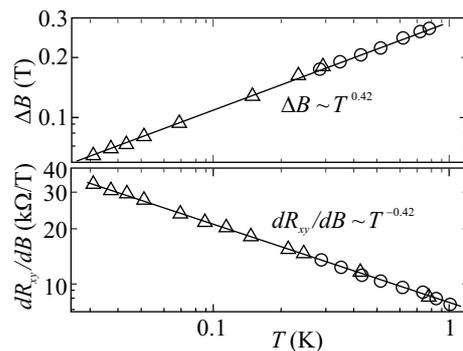


Рис. 10.8: Определение критического индекса $\kappa = 1/z\nu$ для перехода 4-3 по совмещению пересекающихся кривых $R_{xy}(T)$ (внизу) и по ширине пика $R_{xx}(T)$ (вверху). Данные получены на том же образце, что и на предыдущем рисунке, в кристате растворения (треугольники) и в кристате с жидким ^3He (кружки). [8]

Обратимся теперь к продольному сопротивлению R_{xx} , к которому формально уравнение (10.43) применимо в той же мере, что и к R_{xy} . В предыдущей главе при обсуждении экспериментальных кривых, например, на рис. 9.7 и 9.21, неявно подразумевалось, что пики R_{xx} указывают точно на точки переходов. Теперь видно, что это не так, потому что высота пиков зависит от температуры, т.е. точка максимума не удовлетворяет условию (10.45). Причина смещения максимума относительно точки перехода в том, что квантовый эффект Холла принципиально может наблюдаться только на образцах конечных размеров, а практически эти размеры обычно довольно малы. Поэтому мы опять сталкиваемся со скейлингом в системе ограниченных размеров ("finite-size scaling"), причем на этот раз это не только размер вдоль оси мнимого времени, но и размеры в обычном пространстве.

Пики в продольном сопротивлении R_{xx} указывают на тенденцию к расходимости этой величины на переходе. Известно, что физические величины, расходящиеся на термодинамическом переходе в бесконечной системе, в системах с конечными размерами имеют максимум при близких, но, вообще говоря, других значениях управляющего параметра. Поэтому физические величины, расходящиеся на переходе, более чувствительны к конечности размеров реальных систем. Это делает процедуру, использованную при анализе функций $R_{xy}(B)$, ненадежной и неубедительной применительно к функциям $R_{xx}(B)$.

Тем не менее, данные по продольному сопротивлению можно использовать для скейлингового анализа, если воспользоваться интегральным свойством функций $R_{xx}(B)$ в окрестности перехода — полушириной ΔB пика, определенной по некоторому алгоритму. На рис. 10.8 величина ΔB определена как расстояние между двумя максимумами производной ($\partial R_{xx}/\partial B$).

Как видно из рис. 10.8, анализ обоих семейств функций дал одинаковые значения критического индекса $\kappa = 0.42$. Это значение получалось неоднократно на гетероструктурах из различных материалов. Однако, вопреки ожиданиям, оно оказалось не универсальным: в целом ряде экспериментов на разных гетероструктурах наблюдались и другие значения κ , в интервале от 0.2 до 0.8. Поскольку скейлинговые соотношения и критические индексы обычно универсальны, наблюдаемый разброс требует объяснений. Одна из возможных причин в том, что плотность состояний $g(\varepsilon)$ в окрестности энергии ε_c зависит от особенностей случайного потенциала: потенциал может быть длинно- или короткопериодным, статистически симметричным или не симметричным относительно среднего значения и т.п. Работа [8], графики из которой приведены в этом разделе, была как раз посвящена выяснению влияния характера случайного потенциала на κ .

В заключение два замечания относительно экспериментальной процедуры определения κ .

Хотя с точки зрения теории горизонтальность сепаратрисы (10.45) является неизменным условием, на практике кривая $R_{xx}(x = x_c, T)$ может оказаться не совсем горизонтальной, а изотермы могут пересекаться не совсем в одной точке, что затрудняет точное определение значения x_c . Однако, в реализованной на рис. 10.8 процедуре (10.46) определения κ значение x_c в явном виде не используется. Достаточно *знать, что переход существует*, и предполагать, что наблюдаемые в эксперименте отклонения вызваны вторичными причинами.

Формула (10.41) утверждает, что внутри критической области скейлинг реализуется для всей функции, а не только для ее линейной части. Однако, при этом первые производные должны заведомо совпасть. Поэтому самый удобный и точный способ произвести скейлинг состоит в том, чтобы сначала определить критический индекс κ по первой производной, а потом сравнить сами функции и оценить размеры критической области.

-
- [1] В.Ф.Гантмахер, В.Т.Долгополов, *Квантовые фазовые переходы "локализованные — делокализованные электроны"*, УФН **178**, 3 (2008)
- [2] S.Sachdev, *Quantum Phase Transitions* (Cambridge University Press, Cambridge 2000)
- [3] S.L.Sondhi, S.M.Girvin, J.P.Carini, and D.Shahar, *Continuous quantum phase transitions*, Rev.Modern Phys. **69**, 315 (1997)
- [4] T.Vojta, *Quantum phase transitions*, in: K.H. Hoffmann and M. Schreiber (Eds): *Computational Statistical Physics*, Springer, Berlin (2002); cond-mat/0010285
- [5] N.Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Addison-Wesley, Reading, 1992
- [6] В.Ф.Гантмахер, В.Т.Долгополов, *Квантовый фазовый переход сверхпроводник-изолятор*, УФН **180**, 3 (2010)
- [7] В.Huckestein, Rev.Mod.Phys. **67**, 357 (1995)
- [8] Wanli Li, G.A.Csathy, D.C.Tsui, L.N.Pfeiffer, and K.W.West, Phys.Rev.Lett. **94**, 206807 (2005)