Этот вариант текста параграфа 5.2 отличается от опубликованного только некоторыми обозначениями ($\varrho \to R$, $y \to Y$); изменения сделаны для согласования с обозначениями гл.6, в частности, с обозначениями нового параграфа 6.4.

5.2. Формула Ландаузра для одномерных (1D) систем

Последовательное изложение теоретических аспектов этого вопроса см. в [4]

Соединим два резервуара, к которым приложена разность потенциалов V, *идеальной* проволокой длиной Λ. "Идеальная" означает, что в проволоке полностью отсутствует рассеяние, даже упругое. Тогда всякий электрон, попадающий в проволоку с одной стороны, с вероятностью единица выходит с другой. Пусть к тому же диаметр проволоки столь мал, что в ее спектре (5.8) под уровень Ферми ε_F попадает ограниченное число $\nu = 2N_s$ размерно квантованных подзон (их также называют каналами; в отсутствии магнитного поля при каждом $i \leqslant N_s$ имеется два канала с разными направлениями спинов):

$$\varepsilon_\perp(i) < \varepsilon_F \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, N_s. \tag{5.10}$$

Если $N_s = 1$, то 1D-систему называют одноканальной (с учетом спина ее можно было бы также называть двухканальной), при $N_s > 1$ она называется многоканальной. Ввиду идеальности проволоки каналы внутри нее независимы и не обмениваются электронами. Плотность электронов n_i в канале i, продольная скорость электронов v_i и плотность состояний g_i на уровне Ферми связаны соотношениями

$$v_i = \hbar^{-1}(\partial\varepsilon/\partial k)_{\varepsilon=\varepsilon_i}, \qquad g_i = (\partial n_i/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_i} = 1/2\pi\hbar v_i, \qquad \varepsilon_i = \varepsilon_F - \varepsilon_\perp(i), \qquad 2\sum_{i=1}^{N_s} n_i = n. \tag{5.11}$$

Наличие между резервуарами разности потенциалов V означает, что из-за разности электронной плотности $\delta n_i = g_i eV$ имеется разность потоков электронов, попадающих в канал i справа и слева. В выражении для тока конкретные параметры канала, фигурирующие в соотношениях (5.11), сокращаются, так что ток в канале J_i не зависит от индекса i и равен

$$J_i = ev_i\delta n_i = (e^2/2\pi\hbar)V. \tag{5.12}$$

Кондактанс $Y_{\rm id} = J/V$ и сопротивление $R_{\rm id} = 1/Y_{\rm id}$ такой проволоки определяются полным током $J = \sum_1^\nu J_i$ и равны

$$Y_{\rm id} = (e^2/2\pi\hbar)\nu, \qquad R_{\rm id} = (2\pi\hbar/e^2)(1/\nu). \tag{5.13}$$

Индекс в обозначениях подчеркивает, что формула (5.13) относится к идеальной проволоке.

Результат (5.13) замечателен в нескольких отношениях. Во-первых, оказалось, что в 1D-системе, даже в многоканальной, диссипация имеется даже в отсутствии рассеяния. Это проявление принципа нелокальности. Электроны забирают энергию от поля, когда они находятся внутри проволоки, а отдают ее совсем в другом месте, когда термализуются в резервуаре. Во-вторых, как это ни удивительно, сопротивление проволоки $R_{\rm id}$ не зависит от ее длины и определяется только квантованием электронного спектра.

> *Казалось бы,* утверждение, что сопротивление проволоки не зависит от ее длины, противоречит простому рассуждению: разделим мысленно идеальную проволоку на две части, которые при этом окажутся включенными последовательно; если у каждой части сопротивление $R_{\rm id}$, то полное сопротивление должно было бы быть $2R_{\rm id}$. Но просто разделить проволоку на две части недостаточно; для того чтобы обе части превратились в независимые сопротивления, между ними нужно вставить дополнительный резервуар-термостат, который бы сделал проходящие через него электронные волны некогерентными. Если температура проволоки отлична от абсолютного нуля, $T \neq 0$, так что существует конечная длина $L_\varphi < \infty$, на которой происходит сбой фазы, то такие термостаты как бы появляются автоматически на расстоянии L_φ друг от друга.

Таким образом температура накладывает на длину идеальной проволоки ограничение сверху, $\Lambda < L_\varphi$. Ограничением снизу является ее диаметр, т.е. проволока может быть очень короткой. Это дает возможность проверить

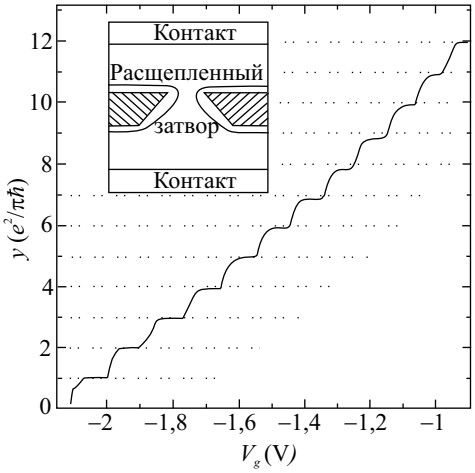

Рис. 5.3: Кондактанс y баллистического контакта между двумя 2D-областями гетероструктуры GaAs–$Al_xGa_{1-x}As$ в зависимости от напряжения на затворе, регулирующем ширину контакта [5]. На вставке схема измерительной ячейки.

формулу (5.13) экспериментально, потому что на коротком участке сравнительно проще добиться отсутствия дефектов.

На рис. 5.3 приведены результаты измерений проводимости узкого канала под расщепленным затвором, соединяющего две области 2D-электронного газа в гетероструктуре GaAs–$Al_xGa_{1-x}As$ [5]. При увеличении запирающего напряжения V_g на затворе обедненная область несколько расширяется за счет того, что она сильнее выступает за края затвора. Как видно из схемы на вставке к рис. 5.3, проводящий канал при этом сужается, что означает уменьшение числа каналов N_s. То, что канал короткий, не мешает применять к нему формулу (5.13), и в то же время именно благодаря этому в нем удается получить баллистический режим, т.е. отсутствие рассеяния. В структуре, демонстрируемой на рис. 5.3, электронная плотность $3.56\cdot10^{11}$ см$^{-2}$, длина пробега при 0.6 K около 8.5 μ, а характерные размеры канала порядка 0.25 μ.

Из вставки к рис. 5.3 видно, что измерение происходит по двухконтактной схеме, так что в измеряемое сопротивление $R_{\rm mea}$ входит сопротивление $R_{\rm cont}$ контактов и прилегающих к ним широких участков 2D-слоя. Интересующий нас кондактанс Y получается после вычитания $R_{\rm cont}$ из $R_{\rm mea}$: $Y \equiv R^{-1} = (R_{\rm mea} - R_{\rm cont})^{-1}$. В качестве $R_{\rm cont}$ была выбрана величина 4.35 kΩ, что примерно соответствует результатам независимых измерений. После вычитания этой величины функция $Y(V_g)$ превращается в последовательность ступеней одинаковой высоты

$$\Delta Y_{\rm id} = (e^2/2\pi\hbar)\Delta\nu = e^2/\pi\hbar, \tag{5.14}$$

в полном соответствии с формулой (5.13).

> *Заметьте:* Рассуждения, которые привели к формуле (5.13), не предопределяют распределение электрического поля вдоль проволоки. Например в краевых каналах, которые образуются при квантовом эффекте Холла вдоль края образца между контактами и являются идеальными одномерными каналами, все падение напряжения V сосредоточено на границе с одним из контактов (см. рис. 9.15 в гл. 9 и поясняющий его текст).

Откажемся от идеальности проволоки, при этом ограничившись для простоты одноканальной системой. Пусть в заштрихованной части проволоки (рис. 5.4) имеются упругие рассеиватели. Уточнять их взаимное расположение не требуется — будем пока рассматривать всю область как единый рассеивающий объект. В квантовой механике он характеризуется в одномерном случае комплексными коэффициентами отражения r и прохождения t, которые связывают амплитуды отраженной и прошедшей волн с амплитудой падающей волны. Слева и справа на заштрихованную падают электронные потоки $j_{\rm in}/e$ и $j_{\rm in'}/e$, каждый из которых отражается с вероятностью $\mathcal{R} = |r|^2$ и проходит с вероятностью $\mathcal{T} = |t|^2$. Из симметрии квантовомеханической задачи

$$\mathcal{R} = j_r/j_{\rm in} = j_{r'}/j_{\rm in'}, \qquad \mathcal{T} = j_t/j_{\rm in} = j_{t'}/j_{\rm in'}, \qquad \mathcal{R}+\mathcal{T} = 1. \tag{5.15}$$

Если падение напряжения на заштрихованной области равно нулю, то и суммарный поток электронов в проволоке равен нулю. При наличии разности потенциалов δV на границах области появляется разность плотностей $\delta n = g e \delta V$. В одномерных системах все электроны движутся вдоль проводника и потому принадлежат

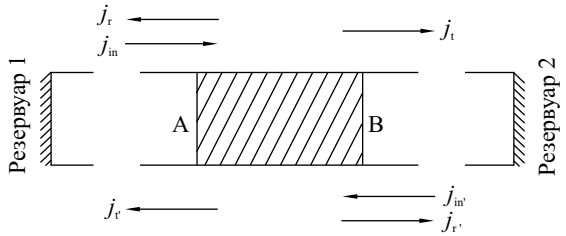

Рис. 5.4: Одномерный проводник, соединяющий два резервуара и состоящий из двух идеальных участков по краям и рассеивающего участка AB в середине.

к одному из потоков, фигурирующих в уравнениях (5.15). Это позволяет связать δn с плотностями электронов в потоках и выразить δV через токи:

$$\delta V = \delta n/ge = \frac{j_{\rm in} + j_r + j_{t'}}{e^2 g v} - \frac{j_{\rm in'} + j_{r'} + j_t}{e^2 g v} = \frac{2\mathcal{R}(j_{\rm in} - j_{\rm in'})}{e^2 g v}. \tag{5.16}$$

Здесь g и v это плотность состояний и модуль скорости электронов на уровне Ферми. Поскольку полный ток J равен

$$J = j_{\rm in} - j_r - j_{t'} = j_{\rm in'} - j_{r'} - j_t = \mathcal{T}(j_{\rm in} - j_{\rm in'}), \tag{5.17}$$

отношение $J/\delta V$ позволяет написать кондактанс $Y_{\rm imp} = J/\delta V$ и сопротивление $R_{\rm imp} = Y_{\rm imp}^{-1}$ заштрихованной области

$$Y_{\rm imp} = (e^2/2\pi\hbar)(\mathcal{T}/\mathcal{R}) = (e^2/2\pi\hbar)\frac{\mathcal{T}}{1-\mathcal{T}}\,, \qquad R_{\rm imp} = (2\pi\hbar/e^2)(\mathcal{R}/\mathcal{T}) = (2\pi\hbar/e^2)\frac{\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}}\,. \tag{5.18}$$

Идея представлять упруго рассеивающие центры в виде потенциальных барьеров на пути распространяющихся волн и выражать транспортные характеристики системы через коэффициенты отражения и прохождения волны через эти барьеры принадлежит Ландауэру. Поэтому соответствующие формулы, в частности выражение для кондактанса (5.18), называют его именем. В принципе техника Ландауэра применима к системам любой размерности, но она особенно удобна и часто используется для 1D-систем.

> *Заметьте:* Формула Ландауэра в виде (5.18) выведена в предположении, что разность потенциалов приложена непосредственно к рассеивающей области между точками A и B на рис. 5.4. Именно поэтому кондактанс (5.18) при слабом рассеянии, $\mathcal{T} \sim 1$, $\mathcal{R} \ll 1$, может оказаться больше, чем кондактанс (5.13) системы, вообще не имеющей рассеивателей.

Если разность потенциалов в системе на рис. 5.4 приложена к резервуарам, то сопротивления идеальной проволоки и области рассеяния включены последовательно и кондактанс $Y_{\rm total}$ всей системы равен

$$Y_{\rm total}^{-1} = Y_{\rm id}^{-1} + Y_{\rm imp}^{-1} \equiv R_{\rm id} + R_{\rm imp} = (2\pi\hbar/e^2)(1 + \mathcal{R}/\mathcal{T}), \qquad Y_{\rm total} = (e^2/2\pi\hbar)\mathcal{T}. \tag{5.19}$$

Теперь при $\mathcal{T} \to 1$ кондактанс $Y_{\rm total} \to Y_{\rm id}$, как и должно быть. Выражение (5.19) для $Y_{\rm total}$ можно получить и непосредственно, приложив разность потенциалов к резервуарам, записав электронный поток из одного резервуара в другой и учтя однократное рассеяние (ср. с выводом формулы (5.13)). Это означает, что сложение сопротивлений в соответствии с законом Ома в рассуждениях (5.19) было правомерным. Как мы покажем в следующем разделе, в одномерных системах из-за интерференции падающих и отраженных волн это отнюдь не всегда так.

---

[1] N.V.Mott, Metal-insulator transitions. Taylor & Francis, 1990
[2] P.A.Lee, T.V.Ramakrishnan, Disordered electronic systems, Rev.Modern Phys. **57**, 287 (1985)
[3] B.Kramer and A.MacKinnon, Rep.Prog.Phys. **56**, 1469 (1993)
[4] Y.Imry, Introduction to Mesoscopic Physics. Oxford University Press, 1997 [Есть русский перевод: Й.Имри, Введение в мезоскопическую физику, Физматлит, Москва, 2002]
[5] B.J. van Wees, L.P. Kouwenhoven, et al., Phys. Rev. B **38**, 3625 (1988)