

## Невзаимодействующие электроны в одномерных системах

В.Ф. Гантмахер

*Институт физики твердого тела РАН, Черноголовка, Россия*  
E-mail: gantm@issp.ac.ru

Статья поступила в редакцию 7 сентября 2004 г.

Изложены теоретические основы описания поведения невзаимодействующих электронов в одномерных системах: транспортные характеристики идеальной проволоки, соединяющей два термостата, описание при помощи формул Ландауэра упругого рассеяния на хаотической последовательности барьеров, гигантские хаотические осцилляции сопротивления, локализация и влияние на нее корреляций в случайном потенциале.

Викладено теоретичні основи опису поведінки невзаємодіючих електронів в одновимірних системах: транспортні характеристики ідеального дроту, що з'єднує два термостати, опис за допомогою формул Ландауєра пружного розсіяння на хаотичній послідовності бар'єрів, гігантські хаотичні осциляції опору, локалізація та вплив на неї кореляцій у випадковому потенціалі.

PACS: 73.63.Nm

Цель настоящего краткого обзора — изложение теоретических основ описания одномерных систем невзаимодействующих электронов и иллюстрация их поведения на основе известных экспериментов. Количество одномерных объектов, имеющих в распоряжении экспериментаторов, за последние годы значительно увеличилось. Это и органические металлы [1], и полупроводниковые нанопроволоки [2], и углеродные нанотрубки [3], и даже реальные короткие цепочки из металлических атомов [4]. Это предопределяет рост числа людей, вовлеченных в работу с такими объектами, и необходимость снабдить их достаточно строгим введением в проблему.

Критерий одномерности связан со структурой электронного спектра свободных электронов с волновыми функциями  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  при соответствующей геометрии области их существования

$$\varepsilon = \hbar^2 k_{\parallel}^2 / 2m + \varepsilon_{\perp}(i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Здесь  $k_{\parallel}$  — волновой вектор в направлении, в котором движение электронов не ограничено;  $\varepsilon_{\perp}$  — размерно квантованная часть энергии, связанная с движением в ограниченных направлениях;  $i$  — номер размерно квантованной подзоны. Система является одномерной (1D), если все электроны помещаются

в нижней подзоне. Для вырожденной электронной системы критерий имеет вид

$$\varepsilon_F < \Delta_s, \quad \Delta_s \equiv \varepsilon_{\perp}(i=2) - \varepsilon_{\perp}(i=1). \quad (2)$$

Если под уровнем Ферми находится несколько размерно квантованных подзон, то система является квазиодномерной.

Вообще говоря, на поведение электронов в 1D-системах большое влияние оказывают межэлектронные взаимодействия. Именно на базе изучения 1D-систем возникли такие понятия, как латтинжеровская жидкость и волны зарядовой или спиновой плотности. Учет взаимодействий сильно усложняет анализ экспериментальных данных и зачастую делает его неоднозначным. Поэтому в качестве исходного базиса полезно иметь ясную картину поведения невзаимодействующих электронов в 1D-системах. Эта картина и излагается в данном обзоре. Изначально постулируется, что волновая функция электрона есть плоская волна  $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})$  и рассматриваются процессы интерференции в волновом поле, образующемся в результате распространения и рассеяния этой волны в одномерном потенциале.

Согласно теореме Пайерлса, 1D-система с идеальным периодическим потенциалом неустойчива

относительно появления нового периода и волны зарядовой плотности [5], а сколь угодно малый беспорядок приводит в одномерной среде к локализации [6]. Тем не менее проводимость в 1D-системе невзаимодействующих электронов возможна за счет температуры, конечной длины 1D-системы и корреляций в случайном потенциале.

### Идеальная проволока

Рассмотрим сначала идеальную проволоку, в которой полностью отсутствует рассеяние, даже упругое. Соединим два резервуара, к которым приложена разность потенциалов  $V$ , идеальной проволокой длиной  $L$ . Тогда всякий электрон, попадающий в проволоку с одной стороны, с вероятностью единица выходит с другой. Пусть к тому же диаметр проволоки столь мал, что в ее спектре (1) под уровень Ферми  $\varepsilon_F$  попадает ограниченное число  $\nu = 2N_s$  размерно квантованных подзон (их также называют каналами; в отсутствие магнитного поля при каждом  $i \leq N_s$  существуют два канала с разными направлениями спинов):

$$\varepsilon_{\perp}(i) < \varepsilon_F \text{ при } i = 1, 2, \dots, N_s. \quad (3)$$

Если  $N_s = 1$ , то 1D-систему называют одноканальной (с учетом спина ее можно было бы также называть двухканальной), при  $N_s > 1$  она называется многоканальной. Ввиду идеальности проволоки каналы внутри нее независимы и не обмениваются электронами. Плотность электронов  $n_i$  в канале  $i$ , продольная скорость электронов  $v_i$  и плотность состояний  $g_i$  на уровне Ферми связаны соотношениями

$$v_i = \hbar^{-1}(\partial\varepsilon/\partial k)_{\varepsilon=\varepsilon_i}, \quad g_i = (\partial n_i/\partial\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_i} = 1/2\pi\hbar v_i, \quad (4)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_F - \varepsilon_{\perp}(i), \quad 2 \sum_{i=1}^{N_s} n_i = n.$$

Наличие между резервуарами разности потенциалов  $V$  означает, что из-за разности электронной плотности  $\delta n_i = g_i eV$  имеется разность потоков электронов, попадающих в канал  $i$  справа и слева. В выражении для тока конкретные параметры канала, фигурирующие в соотношениях (4), сокращаются, так что ток в канале  $J_i$  не зависит от индекса  $i$  и равен

$$J_i = ev_i \delta n_i = (e^2/2\pi\hbar)V. \quad (5)$$

Контактанс  $y_{id} = J/V$  и сопротивление  $\varrho_{id} = 1/y_{id}$  такой проволоки определяются полным током  $J = \sum_1^{\nu} J_i$  и равны

$$y_{id} = (e^2/2\pi\hbar)\nu, \quad \varrho_{id} = (2\pi\hbar/e^2)(1/\nu). \quad (6)$$

Индекс в обозначениях подчеркивает, что формула (6) относится к идеальной проволоке.

Результат (6) замечателен в нескольких отношениях. Во-первых, оказалось, что в 1D-системе, даже в многоканальной, диссипация имеется даже в отсутствие рассеяния. Во-вторых, как это ни удивительно, сопротивление проволоки  $\varrho_{id}$  не зависит от ее длины и определяется только квантованием электронного спектра. И то и другое является проявлением принципа нелокальности. Электроны забирают энергию там, где есть поле, т.е. в проволоке или на ее краях, а отдают ее, когда термализуются в резервуаре, т.е. вдали от проволоки.

Мы не случайно не уточняем, где именно сосредоточено электрическое поле. Рассуждения, которые привели к формуле (6), не предопределяют распределение электрического поля вдоль проволоки. Чтобы выяснить это распределение, нужно привлечь дополнительные соображения. Обычно оказывается, что поле распределено вдоль канала неоднородно и преимущественно сосредоточено вблизи его концов. Интересным в этом отношении примером являются краевые каналы, которые образуются вдоль края образца между контактами при квантовом эффекте Холла. В сильном магнитном поле, перпендикулярном плоскости двумерного электронного газа, все электроны, столкнувшиеся с поверхностью и отразившиеся от нее, обязательно столкнутся с ней вновь на следующем витке своего циклотронного движения. Направление их смещения вдоль поверхности за время между двумя столкновениями с ней определяется знаком векторного произведения поля и нормали к области двумерного газа и не зависит ни от угла падения, ни от угла отражения электрона. Ток вдоль поверхности описывается при помощи понятия об одномерном канале, который является идеальным из-за отсутствия рассеяния назад. Тангенциальное электрическое поле вдоль края образца, т.е. вдоль 1D-канала, при квантовом эффекте поля везде равно нулю, а все падение напряжения сосредоточено на границе с одним из контактов [7].

Казалось бы, утверждение, что сопротивление проволоки не зависит от ее длины, противоречит простому рассуждению: разделим мысленно идеальную проволоку на две части, которые при этом окажутся включенными последовательно; если у каждой части сопротивление  $\varrho_{id}$ , то полное сопротивление должно было бы быть  $2\varrho_{id}$ . Но просто разделить проволоку на две части недостаточно; для того чтобы обе части превратились в независимые сопротивления, между ними нужно вставить дополнительный

резервуар-термостат, который бы сделал проходящие через него электронные волны некогерентными. Если температура проволоки отлична от абсолютного нуля,  $T \neq 0$ , так что существует конечная длина  $L_\phi < \infty$ , на которой происходит неупругое столкновение и сбой фазы электронной волны, то такие термостаты как бы появляются автоматически на расстоянии  $L_\phi$  друг от друга.

Таким образом, на длину идеальной проволоки имеется ограничение сверху,  $\Lambda < L_\phi$ . Ограничением снизу фактически является диаметр проволоки. Это видно из рассмотрения шарвиновского контакта [8], в котором изолирующая плоская диафрагма с отверстием площадью  $S$  разделяет два трехмерных металлических полупространства, одно из которых — «идеальный» кристалл, в том смысле, что длина свободного пробега в нем  $l \gg \sqrt{S}$ . Сопротивление такого контакта равно

$$R \approx \frac{\hbar k_F}{ne^2 S} \approx \frac{\hbar}{e^2} \left( \frac{\hbar^2/mS}{\epsilon_F} \right), \quad (7)$$

где  $n$ ,  $m$ ,  $k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$  и  $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$  — это концентрация, масса, фермиевский импульс и фермиевская энергия электронного газа в идеальном полупространстве, а знак  $\approx$  вместо знака равенства указывает на то, что в выражении опущены численные коэффициенты. Нетрудно убедиться, что выражение (7) по структуре идентично выражению (6) для  $\varrho_{id}$ , а в числителе дроби, стоящей в (7) в скобках, записано характерное расстояние  $\epsilon_\perp$  между размерно квантованными подзонами. На примере квадратного отверстия нетрудно проверить, что это расстояние действительно пропорционально  $S^{-1}$ .

Благодаря тому, что в эксперименте можно использовать очень короткий канал, формулу (6) удастся проверить на эксперименте. На рис. 1 приведены результаты измерений проводимости узкого канала под расщепленным затвором, соединяющего две области  $2D$ -электронного газа в гетероструктуре GaAs–Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As [9]. При увеличении запирающего напряжения  $V_g$  на затворе обедненная область несколько расширяется за счет того, что она слегка выступает за края затвора. Как видно на схеме на вставке к рис. 1, проводящий канал при этом сужается, что означает уменьшение числа каналов  $N_s$ . Маленькая длина канала позволяет получить в нем баллистический режим, т.е. отсутствие рассеяния. В структуре, приведенной на рис. 1, электронная плотность составляет  $3,56 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ , длина пробега при 0,6 К около 8,5 мкм, а характерные размеры канала порядка 0,25 мкм.

На вставке к рис. 1 видно, что измерение происходит по двухконтактной схеме, так что в измеряемое сопротивление  $R_{meas}$  входит сопротивление кон-

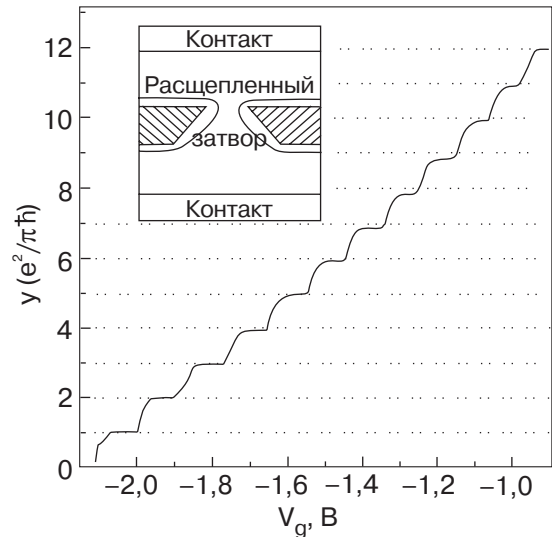


Рис. 1. Кондактанс  $y$  баллистического контакта между двумя  $2D$ -областями гетероструктуры GaAs–Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>As в зависимости от напряжения на затворе, регулирующего ширину контакта [9]. На вставке — схема измерительной ячейки.

тактов  $R_{cont}$  и прилегающих к ним широких участков  $2D$ -слоя. Интересующий нас кондактанс равен  $y \equiv \varrho^{-1} = (R_{meas} - R_{cont})^{-1}$ . В качестве  $R_{cont}$  была выбрана величина 4,35 кОм, что примерно соответствует результатам независимых измерений. После вычитания этой величины функция  $y(V_g)$  превращается в последовательность ступеней одинаковой высоты

$$\Delta y_{id} = (e^2/2\pi\hbar)\Delta v = e^2/\pi\hbar, \quad (8)$$

в полном соответствии с формулой (6).

### Упругие рассеиватели

Откажемся от идеальности проволоки, ограничившись для простоты одноканальной системой. Пусть в заштрихованной части проволоки (рис. 2) имеются упругие рассеиватели. Уточнять их взаимное расположение не требуется — будем рассматривать всю заштрихованную область как единый рассеивающий объект. В квантовой механике в одномерном случае он характеризуется комплексными коэффициентами отражения  $r$  и прохождения  $t$ , которые связывают амплитуды отраженной и прошедшей волн с амплитудой падающей волны. Слева и справа на заштрихованную область падают электронные потоки  $j_{in}/e$  и  $j'_{in}/e$ , каждый из которых отражается с вероятностью  $\mathcal{R} = |r|^2$  и проходит с вероятностью  $\mathcal{T} = |t|^2$ . Из симметрии квантовомеханической задачи

$$\mathcal{R} = j_r/j_{in} = j'_r/j'_{in}, \quad \mathcal{T} = j_t/j_{in} = j'_t/j'_{in}, \quad (9)$$

$$\mathcal{R} + \mathcal{T} = 1.$$

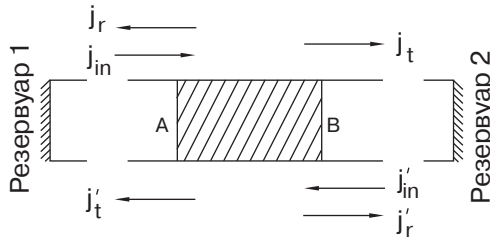


Рис. 2. Одномерный проводник, соединяющий два резервуара и состоящий из двух идеальных участков по краям и рассеивающего участка АВ посередине.

Если падение напряжения на заштрихованной области равно нулю, то и суммарный поток электронов в проволоке равен нулю. При наличии разности потенциалов  $\delta V$  на границах области появляется разность плотностей  $\delta n = ge\delta V$ . В одномерных системах все электроны движутся вдоль проводника и потому принадлежат к одному из потоков, фигурирующих в уравнениях (9). Это позволяет связать  $\delta n$  с плотностями электронов в потоках и выразить  $\delta V$  через токи:

$$\begin{aligned} \delta V &= \frac{\delta n}{ge} = \frac{j_{in} + j_r + j'_t}{e^2 gv} - \frac{j'_{in} + j'_r + j_t}{e^2 gv} = \\ &= \frac{2\mathcal{R}(j_{in} - j'_{in})}{e^2 gv}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $g$  и  $v$  — плотность состояний и модуль скорости электронов на уровне Ферми. Поскольку полный ток  $J$  равен

$$J = j_{in} - j_r - j'_t = j'_{in} - j'_r - j_t = \mathcal{T}(j_{in} - j'_{in}), \quad (11)$$

отношение  $J/\delta V$  позволяет представить кондактанс  $y_{imp} = J/\delta V$  и сопротивление  $\varrho_{imp} = y_{imp}^{-1}$  заштрихованной области в виде

$$\begin{aligned} y_{imp} &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{\mathcal{T}}{\mathcal{R}} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{\mathcal{T}}{1-\mathcal{T}}, \\ \varrho_{imp} &= \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{\mathcal{R}}{1-\mathcal{R}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Идея представлять упругие рассеивающие центры в виде потенциальных барьеров на пути распространяющихся волн и выразить транспортные характеристики системы через коэффициенты отражения и прохождения волны через эти барьеры принадлежит Ландауэру [10]. Поэтому соответствующие формулы, в частности выражение для кондактанса (12), называют его именем. В принципе техника Ландауэра применима к системам любой размерности, но она особенно удобна и часто используется для  $1D$ -систем.

Формула Ландауэра в виде (12) выведена в предположении, что разность потенциалов приложена

непосредственно к рассеивающей области между точками А и В на рис. 2. Именно поэтому кондактанс (12) при слабом рассеянии,  $\mathcal{T} \sim 1$ ,  $\mathcal{R} \ll 1$ , может оказаться больше, чем кондактанс (6) системы, вообще не имеющей рассеивателей. Если разность потенциалов в системе на рис. 2 приложена к резервуарам, то сопротивления идеальной проволоки и области рассеяния включены последовательно и кондактанс всей системы равен

$$\begin{aligned} y^{-1} &= y_{id}^{-1} + y_{imp}^{-1} \equiv \varrho_{id} + \varrho_{imp} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \left( 1 + \frac{\mathcal{R}}{\mathcal{T}} \right), \\ y &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \mathcal{T}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь при  $\mathcal{T} \rightarrow 1$  кондактанс  $y \rightarrow y_{id}$ , как и должно быть. Выражение (13) для  $y$  можно получить и непосредственно, приложив разность потенциалов к резервуарам, записав электронный поток из одного резервуара в другой и учтя однократное рассеяние (ср. с выводом формулы (6)). Это означает, что сложение сопротивлений в соответствии с законом Ома в рассуждениях (13) было правомерным. Однако в одномерных системах из-за интерференции падающих и отраженных волн это отнюдь не всегда так.

Рассмотрим два последовательных барьера в одноканальном одномерном проводнике (рис. 3) и выразим параметры  $\mathcal{T}$  и  $\mathcal{R} = 1 - \mathcal{T}$  образовавшегося составного рассеивающего объекта через параметры  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{R}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$ , и  $\mathcal{R}_2$  исходных барьеров. Если на барьер слева падает волна амплитудой 1, то сформировавшееся стационарное волновое поле будет содержать еще четыре волны: отраженную А, прошедшую D и две волны между барьерами, В и С, движущиеся в противоположные стороны (А, ..., D — это комплексные амплитуды волн). Выразив амплитуды волн, уходящих вправо и влево от каждого из барьеров, через амплитуды падающих волн, получим четыре уравнения:

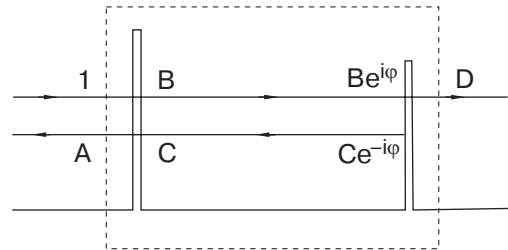


Рис. 3. Рассеивающий участок в  $1D$ -проводнике, состоящий из двух барьеров. Комплексные амплитуды А, ..., D-волн, приходящих и уходящих от обоих барьеров, нормированы на амплитуду исходной приходящей волны, помеченной единицей.

$$A = r_1 + Ct_1, \quad B = t_1 + Cr_1, \quad Ce^{-i\varphi} = Be^{i\varphi}r_2, \\ D = Be^{i\varphi}t_2. \quad (14)$$

Здесь учтено, что коэффициенты отражения от барьера не зависят от того, с какой стороны падает волна,  $r_1 = r_1'$ ; множители  $\exp(\pm i\varphi)$  учитывают набег фазы волны на расстоянии от одного барьера до другого. Из уравнений (14) следует

$$D = \frac{e^{i\varphi}t_1t_2}{1 - e^{2i\varphi}r_1r_2}, \\ T = D^2 = \frac{T_1T_2}{1 + \mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 - 2\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2} \cos\theta}, \quad (15)$$

где  $\theta = 2\varphi + \arg(r_1r_2)$ . Кондактанс  $Y_2$  составного «двухбарьерного» рассеивателя, который выделен на рис. 3 пунктиром, равен

$$Y_2 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{T}{1 - T} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{T_1T_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2\sqrt{\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2} \cos\theta}. \quad (16)$$

Если составной «двухбарьерный» рассеиватель состоит из двух одинаковых барьеров,  $r_1 = r_2 = r'$ ,  $t_1 = t_2 = t'$ ,  $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}'$  и т.д., то

$$Y_2 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{(T')^2}{4\mathcal{R}' \sin^2 \theta/2}, \\ \theta/2 = \varphi + \arg(r') = kl + \arg(r'), \quad (17)$$

где  $k$  — волновой вектор, а  $l$  — расстояние между барьерами.

Кондактанс (16) зависит не только от параметров двух исходных барьеров; через угол  $\theta$  он зависит и от расстояния между ними. Поскольку в конечном счете нас интересует  $1D$ -проводник с большим количеством случайно расположенных барьеров, то можно усреднить по всем возможным расстояниям между ними, предположив, что угол  $\theta$  с одинаковой вероятностью принимает любые значения от 0 до  $2\pi$ . Такое усреднение не совсем корректно, но позволяет проследить тенденции, возникающие при удлинении цепочки одномерных барьеров (более подробно см. в [11], а также в оригинальной работе [12]). Из среднего значения  $\cos\theta = 0$  следует усредненный кондактанс  $\bar{Y}_2$  системы из двух барьеров:

$$\bar{Y}_2 = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{T_1T_2}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{(1 - \mathcal{R}_1)(1 - \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2}. \quad (18)$$

Для сравнения выпишем классическое выражение для суммы двух последовательных сопротивлений  $\varrho_1 = y_1^{-1}$  и  $\varrho_2 = y_2^{-1}$ :

$$Y_2^{(cl)} = (y_1^{-1} + y_2^{-1})^{-1} \equiv (\varrho_1 + \varrho_2)^{-1} = \\ = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \left( \frac{\mathcal{R}_1}{1 - \mathcal{R}_1} + \frac{\mathcal{R}_2}{1 - \mathcal{R}_2} \right)^{-1} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \frac{(1 - \mathcal{R}_1)(1 - \mathcal{R}_2)}{\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 - 2\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2} \quad (19)$$

В (19) имеется лишний по сравнению с (18) член в знаменателе, пропорциональный произведению коэффициентов пропускания двух барьеров  $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$ .

### Гигантские осцилляции сопротивления

Остановимся еще на одной особенности транспорта в  $1D$ -системах. На рис. 4 приведены транспортные характеристики квазиодномерной системы, изготовленной на базе аккумулирующего слоя в полевом транзисторе на поверхности  $n$ -Si [13]. При низкой температуре на зависимости кондактанса  $y$  от напряжения на затворе  $V_g$  появляется шумоподобная составляющая очень большой амплитудой. Это не настоящий шум. Сигнал не зависит от времени, и если не отогревать образец до комнатной температуры, то при повторном эксперименте кривая  $y(V_g)$  воспроизводится вплоть до мельчайших подробностей. Видно, что при низких температурах и при напряжениях на затворе  $V_g$ , обеспечивающих

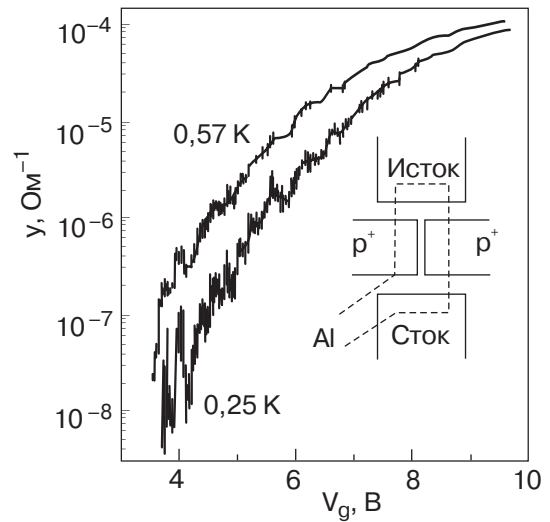


Рис. 4. Зависимость от напряжения на затворе  $V_g$  кондактанса  $y$  длинного квазиодномерного канала в полевом транзисторе, изготовленном на поверхности  $n$ -Si и находящемся в режиме аккумулирующего слоя [13]. Ширина канала может меняться от нуля до максимума  $\sim 1$  мкм, заданного конструкцией (см. схему на вставке), при помощи напряжений на контрольных электродах  $p^+$  и на затворе.

узкий канал и малую концентрацию носителей, кондактанс испытывает хаотические узкие осцилляции при изменении  $V_g$ , размах которых растет при понижении температуры. На другом образце, и даже на этом же при повторном охлаждении от комнатной температуры, детальная структура осцилляций другая при той же общей картине эволюции осцилляций с изменением температуры и напряжения  $V_g$ .

Фундаментальная причина хаотических осцилляций — в одномерности. Все дефекты в проволоке включены последовательно и линии тока не могут обойти ни один из них. Поэтому выключение одного дефекта, осуществляющего сильное рассеяние, может сильно повлиять на суммарное сопротивление. Вопрос в том, как изменение  $V_g$ , которое меняет концентрацию носителей и их энергию Ферми  $\epsilon_F$ , может включать, выключать или менять эффективность отдельных дефектов.

Вернемся к выражению (17) для кондактанса  $Y_2$  симметричного «двухбарьерного» рассеивателя. Выше мы усредняли выражение (16) по  $\cos \theta$  на том основании, что имеется разброс расстояний  $l_i$  между барьерами. Но входящий в  $\theta$  угол  $\varphi = kl_i$  зависит не только от  $l_i$ , но и от волнового вектора  $k$ , т.е. от энергии рассеивающегося электрона  $\epsilon_F$ . Для одной конкретной рассеивающей пары барьеров с фиксированным значением  $l_i$  из формулы (17) следует, что  $R_2$  принимает значение в интервале от нуля до  $4\varrho$ ,

$$0 \leq R_2 \leq 4\varrho, \quad (20)$$

в зависимости от энергии налетающего электрона. При этом следует помнить, что транспортные свойства  $1D$ -системы определяются именно электронами из окрестности  $\epsilon_F$ , потому что противоположные потоки электронов с меньшими энергиями компенсируют друг друга. Выше мы упоминали о существовании проблем с усреднением выражения для сопротивления (16); они связаны именно с большим диапазоном (20) изменения величины  $R_2$ .

Пространство между двумя барьерами представляет собой потенциальную яму. В этой яме, вообще говоря, имеется набор уровней  $\epsilon_i$ , ширина которых обусловлена прозрачностью барьеров  $t_1$  и  $t_2$ . По мере того как энергия электрона  $\epsilon_F$  смещается относительно системы уровней в этой яме, вероятность туннелирования осциллирует, достигая максимума в условиях резонанса  $\epsilon_F = \epsilon_i$ . Поэтому гигантские хаотические осцилляции сопротивления можно теоретически описать именно в терминах резонансного туннелирования [14].

Модель локализованных состояний в  $1D$ -системах использует представления об электронных уровнях внутри составных рассеивателей. При достаточно низких температурах отражения от далеких барьеров

$$1 \ll N \ll L_\varphi/l \quad (21)$$

остаются когерентными. Поэтому, согласно приведенным ниже соотношениям (25), эти отражения при достаточно большом  $L_\varphi$  скомпенсируют прозрачность барьеров  $t_1$  и  $t_2$  и сделают состояние между ними истинно локализованным. В этих условиях следует ожидать прыжковый характер проводимости. И действительно, на рис. 5 приведены измерения температурной зависимости кондактанса, сделанные в нескольких минимумах кривой, приведенной на рис. 4. Видно, что при измерениях в левой части графика на рис. 4, при меньших  $V_g$ , когда кондактанс мал, осцилляции велики и есть все основания считать канал одномерным, точки хорошо ложатся на функциональную зависимость

$$y = y_0 \exp[-(T_M/T)^{1/2}] \quad (22)$$

в полном соответствии с формулой Мотта для температурной зависимости прыжковой проводимости с переменной длиной прыжка:

$$\rho = \rho_0 \exp\left(\frac{T_M}{T}\right)^{1/(d+1)}, \quad T_M \approx (g_\mu \xi^d)^{-1}, \quad (23)$$

где  $d$  — размерность пространства,  $\xi$  — длина затухания локализованных состояний.

При больших  $V_g$  канал расширяется и постепенно превращается в двумерный. Кондактанс при этом увеличивается, а амплитуда хаотических осцилляций падает. Экспериментальные точки зависимости  $\log y(T^{-1/2})$ , полученные при напряжении на затворе  $V_g = 6,3$  В, отклоняются на рис. 5 от прямой, но

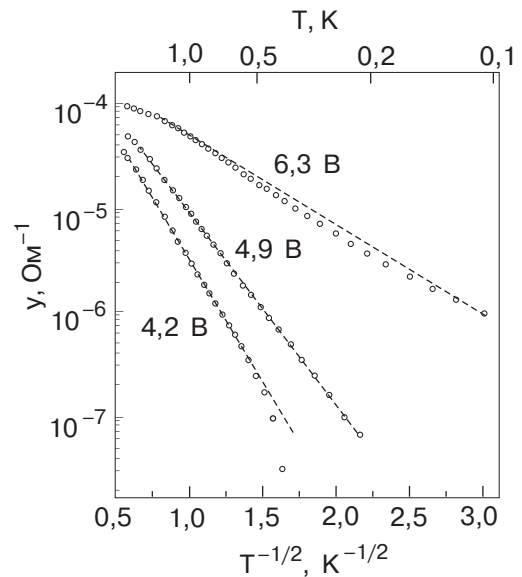


Рис. 5. Температурные зависимости в минимумах кондактанса канала полевого транзистора при трех разных значениях напряжения на затворе  $V_g$  [13].

спрямляются в осях  $(\log y, T^{-1/3})$  опять-таки в полном соответствии с формулой (23).

### Локализация

Рассмотрим длинную цепочку одинаковых, но расположенных на случайных расстояниях  $l_i$  друг от друга слабо рассеивающих барьеров,  $\mathcal{R} \ll 1$ ,  $\mathcal{T} \sim 1$ , имеющих каждый малое сопротивление  $\varrho' = (2\pi\hbar/e^2)(\mathcal{R}'/\mathcal{T}') \ll 2\pi\hbar/e^2$  (среднее расстояние между барьерами  $l = \bar{l}_i$  имеет смысл упругой длины свободного пробега). Будем вычислять сопротивление  $R_N = Y_N^{-1} = (2\pi\hbar/e^2)(\mathcal{R}_N/\mathcal{T}_N)$  составного рассеивающего объекта из  $N$  барьеров по рекуррентной формуле, следующей из (18):

$$\frac{\mathcal{R}_N}{\mathcal{T}_N} = \frac{\mathcal{R}_{N-1} + \mathcal{R}}{\mathcal{T}_{N-1}\mathcal{T}'} \quad (24)$$

Пока число барьеров  $N$  мало, так что  $N\varrho' \ll \ll 2\pi\hbar/e^2$ , величина  $R_N$  возрастает линейно:  $R_N \approx \approx N\varrho \propto N$ . При этом почти линейно растет также и вероятность отражения  $\mathcal{R}_N$ . Однако  $\mathcal{R}_N$  не может стать больше единицы. Поэтому начиная с некоторого  $N$  в формуле (24) можно положить  $\mathcal{R}_N \approx \mathcal{R}_{N-1} \approx 1$ , откуда сразу следует

$$\mathcal{T}_N \approx \mathcal{T}_{N-1}\mathcal{T}', \quad \mathcal{T}_N \rightarrow s(\mathcal{T}')^N = se^{\alpha N} \text{ при } N \rightarrow \infty, \\ (s = \text{const}, \quad \alpha = \ln \mathcal{T}' < 0). \quad (25)$$

Экспоненциальное уменьшение интенсивности прошедшей волны  $\mathcal{T}_N$  при росте числа  $N$  является демонстрацией 1D-локализации на конкретном примере.

### Роль корреляций в случайном потенциале

Общее утверждение [6] о 1D-локализации на случайном потенциале и иллюстрация (25) этого утверждения на конкретной модели предполагали отсутствие каких бы то ни было корреляций. Однако локализации может не произойти, если хаотический одномерный потенциал не является совершенно случайным, а содержит некоторые корреляторы. Чтобы показать это, вернемся к формуле (17) для контактанса  $Y_2$  симметричного «двухбарьерного» рассеивателя, изображенного на рис. 3. Из этой формулы следует, что существует волновой вектор  $k_0 = -\arg(r')/l$ , при котором барьер полностью прозрачен для падающей волны, и отраженной волны нет,  $\mathcal{R}'_2 = 0$ . Если в нашей модели (24), (25) заменить одиночные барьеры на сдвоенные (17), то электрон с энергией  $\varepsilon_0 = \hbar^2 k_0^2 / 2m$  окажется делокализованным.

Эта идея была развита более подробно в так называемой димерной модели [15]. В ней используют-

ся не случайно расположенные барьеры, а одномерная цепочка периодически расположенных потенциальных ям. Цепочка состоит из ям двух сортов, с уровнями энергии  $E_a$  и  $E_b$ . При этом ямы распределены по нечетным узлам решетки совершенно случайно, без каких бы то ни было корреляций, а в каждом четном узле находится яма того же сорта, что и в нечетном узле слева от него. Это означает, что одинаковые ямы стоят парами, откуда и название модели (рис. 6,а). Если расстояние между ямами  $a$ , то получившуюся решетку можно представить как сумму двух случайных, но *одинаковых* подрешеток, сдвинутых на  $a$  друг относительно друга, обе с периодом  $2a$  и совершенно случайным распределением ям по узлам.

Будем считать пары с энергией  $E_a$  принадлежащими основной решетке, а пары с энергией  $E_b$  — дефектами. Как мы уже видели, в этой модели при некоторых выделенных значениях энергии могут существовать делокализованные состояния. Теперь нужно сформулировать условие того, что электроны с такой энергией могут распространяться в основной решетке.

Рассмотрим один димерный дефект из двух ям с энергиями  $E_b$  в идеальной решетке из ям  $E_a$  (рис. 6,б). Пусть интеграл перекрытия между соседними ямами равен  $J$ . Тогда справа и слева от дефекта образуются зоны с квазинепрерывным распределением уровней  $\varepsilon = E_a - 2J \cos ka$ . Если выполняется соотношение

$$|E_a - E_b| < 2J, \quad (26)$$

то невозмущенный энергетический уровень дефекта  $E_b$  попадает внутрь зоны и в зоне появляется выделенное значение  $k = k_0$ ,  $\cos k_0 = -2J/(E_a - E_b)$ , для которого вероятность отражения от дефекта  $\mathcal{R} = 0$ .

В димерной модели корреляции существуют только между ближайшими соседями. При таких корреляциях делокализованные состояния возника-

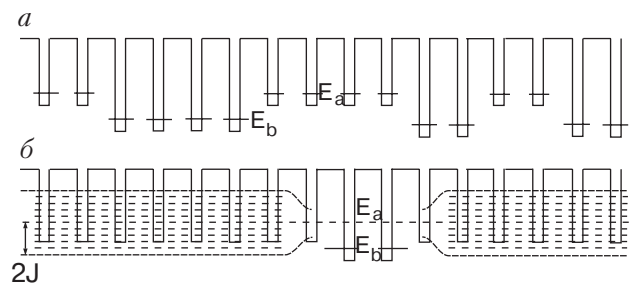


Рис. 6. Димерная модель одномерного случайного потенциала. Изменения положений уровней из-за перекрытия ям не показаны (а). Электронные уровни в одномерной решетке с одним димерным дефектом (б).

ют только при дискретных значениях энергии. Для того чтобы получить полосу делокализованных состояний, необходимо использовать дальние корреляции, сохранив при этом в потенциале элемент случайности. Алгоритм построения такого потенциала был предложен в [16,17]. Здесь приведем только конкретный пример такого алгоритма, составленного для экспериментальной проверки путем микроволнового моделирования.

Микроволновое моделирование процессов локализации возможно благодаря тому, что зависящее от времени уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U \Psi \quad (27)$$

и классическое волновое уравнение

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \Delta \Psi - U \Psi \quad (28)$$

( $c$  — скорость волны) имеют много общего [8]. После подстановки  $\Psi = e^{-i\omega t} \psi$  они оба сводятся к уравнению

$$(\Delta - U + k^2) \psi = 0 \quad (29)$$

с той лишь разницей, что для уравнения Шредингера

$$\omega = (\hbar/2m)k^2, \quad (30)$$

а для волнового уравнения

$$\omega = ck. \quad (31)$$

В качестве примера микроволнового моделирования приведем эксперимент [19], в котором измерялся коэффициент прохождения через длинный волновод электромагнитной волны микроволнового диапазона в зависимости от частоты. Схема волновода изображена на рис. 7. Рабочий диапазон частот был выбран внутри частотного диапазона, в котором волновод находился в одномодовом режиме:  $7,5 \text{ ГГц} = c/2a < \omega/2\pi < c/a = 15 \text{ ГГц}$ , где  $a$  — большой размер поперечного сечения волновода.

На равных расстояниях по длине волновода в него введены  $N = 100$  штырьков-рассеивателей, моделирующих случайный потенциал. При помощи микрометрических винтов их можно вдвигать на разную глубину  $u_n$ , где  $1 \leq n \leq N$ . Глубина устанавливается по формуле

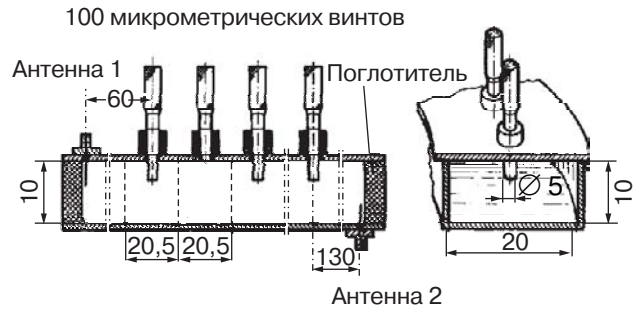


Рис. 7. Схематический чертеж одномодового волновода со 100 рассеивателями, в котором измерялся коэффициент прохождения  $t$  электромагнитной волны в зависимости от частоты [19]. Все размеры в миллиметрах.

$$u_n = \sqrt{u_n^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m Z_{n+m}, \quad (32)$$

$$\beta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sqrt{\varphi(\mu)} \cos(2m\mu) d\mu.$$

Здесь  $Z_{n+m}$  — случайные числа в интервале от  $-1$  до  $+1$ . Именно они вносят в потенциал элемент случайности. Корреляции между всеми  $u_n$  обеспечиваются множителями  $\beta_m$ , определенными через функцию  $\varphi(\mu)$ . Последняя выбирается при помощи специального математического алгоритма в зависимости от того, какой требуется спектр пропускания одномерной системы. Пример реализации такой программы показан на рис. 8. В соответствии с имеющимся алгоритмом была выбрана функция  $\varphi(\mu)$ ,

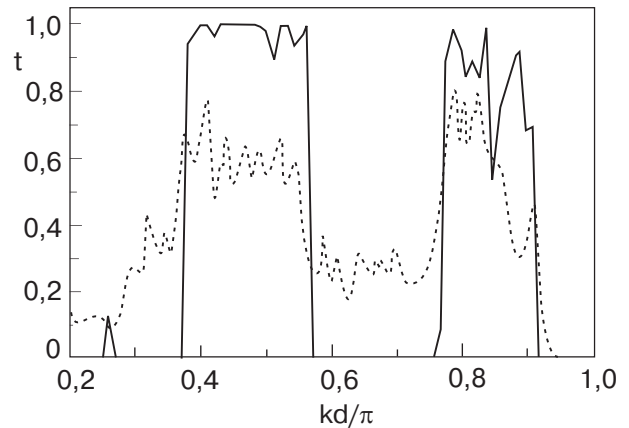


Рис. 8. Коэффициент прохождения  $t$  волны в одномерном канале при наличии периодически расположенных случайных рассеивателей, между которыми имеются корреляции, со специально выбранной корреляционной функцией [19]. Сплошная линия — численный эксперимент с  $N = 10^4$  рассеивателями; пунктир — микроволновый эксперимент с  $N = 100$  рассеивателями, усредненный по пяти разным реализациям. Корреляционная функция одна и та же.



при которой должны были возникнуть две полосы пропускания внутри рабочего диапазона. Сплошной линией на рисунке показан определенный в численном эксперименте коэффициент пропускания волновода с одномерной последовательностью из  $N = 10^4$  рассеивателей, выбранных в соответствии с формулой (32) по заданной функции  $\phi(\mu)$ . Пунктиром показан усредненный по пяти разным реализациям результат реального микроволнового эксперимента с последовательностью из  $N = 100$  рассеивателей.

### Заключение

Таковы основные закономерности поведения не взаимодействующих электронов в одномерных системах со случайным потенциалом. Их следует иметь в виду при обсуждении любых экспериментов в таких системах, даже если основную роль в наблюдаемых явлениях играют межэлектронные взаимодействия.

Работа была поддержана грантом НШ-2170.2003.2 и грантами Министерства науки РФ.

1. D. Jérôme and H.J. Schulz, *Adv. Phys.* **31**, 299 (1982); *ibid.* **51**, 293 (2002).
2. F.P. Millkén, C.P. Umbach, and R.A. Webb, *Solid State Commun.* **7**, 309 (1996).
3. M. Bockrath, D.H. Cobden, J. Lu, A.G. Rinzler, R.E. Smally, L. Balents, and P.L. McEuen, *Nature* **397**, 598 (1999).
4. J.L. Costa-Krämer, N. Garsía, P. Garsía-Mochales, and P.A. Serena, *Surf. Science* **342**, L1144 (1995).
5. R.E. Peierls, *Quantum Theory of Solids*, Clarendon Press, Oxford (1955) [русский перевод: Р. Пайерлс, *Квантовая теория твердых тел*, изд-во иностр. лит., Москва (1956)].
6. В.Л. Березинский, *ЖЭТФ* **65**, 1251 (1973).
7. M. Büttiker, *Adv. Solid State Phys.* **30**, 40 (1990).
8. Ю.В. Шарвин, *ЖЭТФ* **48**, 984 (1965).

9. B.J. van Wees, L.P. Kouwenhoven, H. van Houten, C.W.J. Beenakker, J.E. Mooij, C.T. Foxon, and J.J. Harris, *Phys. Rev.* **B38**, 3625 (1988).
10. R. Landauer, *Philos. Mag.* **21**, 863 (1970).
11. Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics*, Oxford University Press (2002).
12. P.W. Anderson, D.J. Thouless, E. Abrahams, and D.S. Fisher, *Phys. Rev.* **B22**, 3519 (1980).
13. A.B. Fowler, A. Harstein, and R.A. Webb, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 196 (1982).
14. M.Ya. Azbel, *Solid State Commun.* **45**, 527 (1983).
15. D.H. Dunlap, H.-L. Wu, and P.W. Phillips, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 88 (1990).
16. H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos (An Introduction)*, Cambridge University Press (1999) [русский перевод: Х.-Ю. Штокман, *Квантовый хаос (введение)*, Физматлит, Москва (2004)].
17. F.M. Izrailev and A.A. Krokhin, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4062 (1999).
18. F.M. Izrailev and N.M. Makarov, *Optics Lett.* **26**, 1604 (2001).
19. U. Kuhl, F.M. Izrailev, A.A. Krokhin, and H.-J. Stöckmann, *Appl. Phys. Lett.* **77**, 633 (2000).

### Noninteracting electrons in one-dimensional systems

V.F. Gantmakher

The paper contains the elements of the theory describing the behavior of noninteracting electrons in one-dimensional systems, namely, the transport characteristics of an ideal wire which connects two thermostats, the elastic scattering by a random barrier sequence described by the Landauer formulae, the gigantic aperiodic oscillations of resistance, localization and its sensitivity to correlations in a random potential.